

# Résolution des problèmes de distorsion en grande déformation dans les procédés de mise en forme des matériaux basée sur la Méthode EFG

ABDERRACHID HAMRANI\*, IDIR BELAIDI\*\*

\* Laboratoire d'Energétique, Mécanique et Ingénierie, Université de m'hamed bougara boumerdes, Algérie  
E Mail : productiquenc@yahoo.fr

\*\* Laboratoire d'Energétique, Mécanique et Ingénierie, Université de m'hamed bougara boumerdes, Algérie  
E Mail : idir-belaidi@umbb.dz

## Résumé :

*Depuis une quinzaine d'années, de nouvelles méthodes dites « sans maillage » sont apparues pour pallier les limitations de la méthode des éléments finis. Ces méthodes ont la particularité de n'employer à priori aucun maillage prédéfini, et utilisent un ensemble de noeuds dispersés dans le domaine et sur ses frontières. Cette caractéristique présente un avantage majeur par rapport à la méthode des éléments finis en évitant les limitations liées à l'utilisation de l'élément, tel que par exemple la distorsion extrême de la maille. L'objectif de ce papier est de montrer l'un des intérêts majeur des méthodes sans maillage, à l'exemple de la résolution des problèmes de distorsion en grande déformation dans les procédés de mise en forme des matériaux, basée sur la méthode EFG.*

## Abstract:

*In recent years, new methods named Meshfree methods have been developed to surmount the limitations of the finite element method, these methods have the characteristic to employ any pre-defined mesh, they use a set of nodes scattered within the problem domain as well as sets of nodes scattered on the boundaries of the domain. The aim of this study is to show the interest of the application of Meshfree methods for problems of large deformation (Ex: simulation of metal forming processes), based on EFG method.*

**Mots-clefs : Grande déformation, méthode des éléments finis, méthodes sans maillage, EFG.**

## 1 Introduction

La simulation prend de plus en plus une place importante dans l'industrie. Le but est bien sur la prédiction des paramètres optimaux pour les différentes opérations de production afin de minimiser les coûts et d'améliorer la qualité et la fiabilité des produits.

Dans de nombreux cas, cette simulation exige la résolution d'équations différentielles complexes qui régissent ces phénomènes, traditionnellement, ces équations différentielles partielles complexes sont en grande partie résolues en utilisant les méthodes numériques, telles que la méthode des éléments finis (MEF) et la méthode des différences finies (MDF) ou des volumes finis (VOF). En employant un maillage correctement prédéfinie et en appliquant le principe approprié à la méthode numérique utilisée, ces équations différentielles complexes peuvent être approchées par un ensemble d'équations plus simple à résoudre.

La méthode des éléments finis, bien qu'employée dans la grande majorité des logiciels de simulation industriels, présente un certain nombre de limitations dans la simulation des grandes transformations (grande déformation) et de la localisation des phénomènes. La nécessité de reconstruire un maillage (remaillage), soit pour éviter la déformation des éléments, soit pour respecter la conformité du maillage aux localisations ou aux fissures, entraîne des coûts de calculs additionnels très importants, ainsi que des problèmes de robustesse, particulièrement vécues pour les géométries tridimensionnelles complexes [G. R. Liu, 2002].

Les méthodes sans maillage, ou meshless, ou encore meshfree methods, apparues depuis une quinzaine d'années, sont des méthodes employées pour construire un système d'équations simple à résoudre sans avoir recours à un maillage prédéfini, elles utilisent un ensemble de nœuds dispersés dans le domaine et sur ses frontières, ne formant pas nécessairement un maillage, ce qui permet souvent de contourner les difficultés liées à ce dernier.

L'objectif de ce papier est de montrer l'un des intérêts majeur des méthodes sans maillage, à l'exemple de la résolution des problèmes de distorsion en grande déformation dans les procédés de mise en forme des matériaux, basée sur la méthode « Element Free Galerkin » - EFG. Après avoir présenté les fondements théorique et algorithmique, nous avons implémenté un code EFG pour la simulation numérique d'une pièce subissant une grande déformation par matricage. Une comparaison des résultats obtenus a permis de mettre en évidence la performance de la Méthode EFG par rapport à la Méthode EFM.

## 2 Fondement théorique

La méthode Element Free Galerkin ou EFG est une méthode sans maillage développée par Belytschko et al. [T. Belytschko et al. 1994] basée sur la méthode des éléments diffuse (DEM) développée par Nayroles et al. [B. Nayroles et al. 1992]. Cette méthode se caractérise par :

1. Construction des fonctions de forme à partir d'une approximation au sens des moindres carrées mobiles.
2. Utilisation de la forme faible contrainte de Galerkin pour développer l'équation du système discrétisée.
3. Utilisation d'un sous maillage pour l'intégration (quadrature de Gauss).

### 2.1 Construction des fonctions de forme

Dans un domaine  $\Omega$ , l'approximation au sens des moindres carrées mobiles  $u^h(X)$  de la fonction  $u(X)$  est donnée par :

$$u^h(X) = \sum_{j=1}^m p_j(X) a_j(X) = P^T(X) a(X) \quad (1)$$

Où :  $P(X)$  est la fonction de base,  $m$  est le nombre de fonctions de base,  $a(X)$  sont les coefficients du polynôme appelé aussi coordonnées généralisées.

La fonction de base  $P(X)$  est obtenue à partir du triangle de Pascal en  $2D$ , ou tétraèdre de Pascal en  $3D$ , les coefficients  $a(X)$  sont obtenus par la minimisation de la formule de pondération suivante :

$$J = \sum_{i=1}^n \widehat{W}(X - X_i) [P^T(X_i) a(X) - u_i]^2 \quad (2)$$

Où :  $n$  est le nombre de nœuds dans le domaine d'influence de  $X$ ,  $\widehat{W}(X-X_i)$  est la fonction de pondération,  $u_i$  est le paramètre nodal de  $u$  pour  $X=X_i$  (Fig.1).

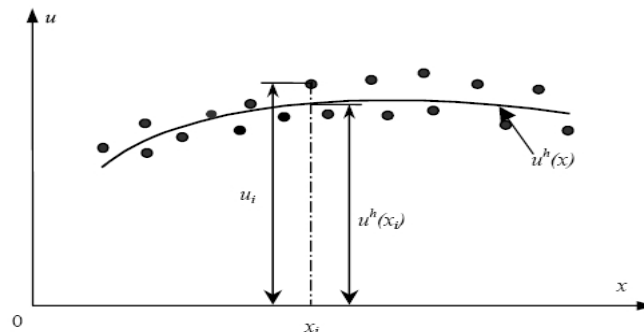


FIG. 1 : Paramètre nodal  $u_i$ .

La détermination du minimum de  $J$ :  $\frac{\partial J}{\partial a} = 0$  (3) nous ramène à la relation suivante :

$$A(X) a(X) = B(X) U_s \quad (4)$$

Où  $U_s$  est le vecteur qui regroupe les paramètres nodaux pour tous les noeuds dans le domaine d'influence et  $A(X)$  sera défini comme suit :

$$A(X) = \sum_{i=1}^n \widehat{W}_i(X) P(X_i) P^T(X_i) \quad (5) \quad \text{Où } \widehat{W}_i(X) = \widehat{W}(X - X_i), \text{ et } B(X) : B_i = \widehat{W}_i(X) P(X_i) \quad (6)$$

A partir de l'équation (4),  $a(x)$  peut s'écrire sous la forme :  $a(X) = A^{-1}(X) B(X) U_s$  (7)

Son remplacement dans l'équation (1), permet d'écrire :

$$u^h(X) = P^T(X) (A^{-1}(X) B(X)) U_s \quad (8) \quad \text{Or } u^h(X) = \sum_{i=1}^n \phi_i(X) u_i = \Phi^T(X) U_s \quad (9)$$

Où  $\Phi(X)$  est le vecteur des fonctions de forme obtenues par moindres carrés mobiles, correspondant aux  $n$  noeuds du domaine d'influence de  $X$  :

$$\Phi^T(X) = \{\phi_1(X) \phi_2(X) \dots \phi_n(X)\}_{(1 \times n)} = P^T(X) \cdot A^{-1}(X) \cdot B(X) \quad (10)$$

### 2.1.1 Choix de la fonction de pondération

La fonction de pondération joue un rôle important dans l'approximation par moindres carrés mobile. Le choix d'une fonction de pondération reste plus ou moins arbitraire (selon la situation ou le type de problème rencontré), parmi les fonctions de pondération les plus utilisées, on citera :

- La fonction spline cubique (adoptée dans cette étude).
- La fonction spline de degré 4.
- La fonction exponentielle.

### 2.2 Utilisation de la forme faible contrainte de Galerkin

Considérons un problème bidimensionnel dans un domaine  $\Omega$  limité par la frontière  $\Gamma$ .

Les équations différentielles partielles et les conditions aux limites du système (problème 2D) peuvent être écrites sous la forme suivante:  $L^T \sigma + b = 0$  Equation d'équilibre du domaine  $\Omega$  du problème,  $u = \bar{u}$  Condition limite de la frontière  $\Gamma_u$  (11)

Ce qui donne des contraintes à la variable de champ du déplacement. Les conditions limites naturelles sont donnés par :  $\sigma n = \bar{t}$  Dans la frontière naturelle  $\Gamma_t$  (12)

Où  $L$  : Matrice des opérateurs différentiels.

$\sigma$  : Vecteur contrainte, en 3D :  $\sigma^T = \{\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} \sigma_{yz} \sigma_{xz} \sigma_{xy}\}$  en 2D :  $\sigma^T = \{\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{xy}\}$

$u$  : Vecteur déplacement, en 3D :  $u^T = \{u \ v \ w\}$  en 2D :  $u^T = \{u \ v\}$

$b$  : Vecteur des forces extérieures, en 3D :  $b^T = \{b_x \ b_y \ b_z\}$  en 2D :  $b^T = \{b_x \ b_y\}$

$\bar{t}$  : Déplacement due à la traction sur les frontières naturelle

$\bar{u}$  : Déplacement aux frontières

$n$  : Vecteur des normales aux frontières naturelles

La forme faible contrainte de Galerkin avec multiplicateur de Lagrange (utilisée dans ce travail) s'écrit sous la forme suivante:

$$\int_{\Omega} \delta (Lu)^T (cLu) d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega - \int_{\Gamma_i} \delta u^T \bar{t} d\Gamma - \int_{\Gamma_i} \delta \lambda^T (u - \bar{u}) d\Gamma - \int_{\Gamma_i} \delta u^T \lambda d\Gamma = 0 \quad (13)$$

### 2.3 Utilisation de la quadrature de Gauss pour l'intégration

Dans la méthode EFG, pour évaluer les intégrales exprimées pour le domaine entier du problème, ce dernier est discrétisé en Maillage « sous-jacent » (cellules d'intégration) (Fig.2).

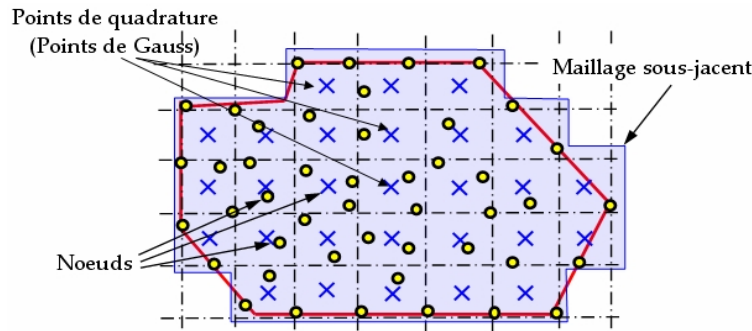


FIG. 2 : cellules d'intégration.

Par conséquent, une intégration de forme globale peut être exprimée comme la somme des intégrales aux cellules :

$$\int_{\Omega} G d\Omega = \sum_k^{n_c} \int_{\Omega_k} G d\Omega \quad (14)$$

Où  $n_c$  est le nombre de cellules d'intégration,  $G$  représente la fonction à intégrer, et  $\Omega_k$  est le domaine de la  $k^{\text{ième}}$  cellule d'intégration.

Quand  $n_g$  points de gauss sont employés dans les cellules d'intégration, l'équation (14) devient :

$$\int_{\Omega} G d\Omega = \sum_k^{n_c} \int_{\Omega_k} G d\Omega = \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} \hat{w}_i G(x_{Q_i}) |J_{ik}^D| \quad (15)$$

Où  $\hat{w}_i$  est le facteur de pondération « intégration de gauss » pour le  $i^{\text{ème}}$  point de gauss à  $x_{Q_i}$ ,  $J_{ik}^D$  est la matrice de Jacobienne de la cellule  $k$ , à laquelle  $x_{Q_i}$  est son point de gauss. Afin d'obtenir numériquement la matrice nodale  $K_{IJ}$  de rigidité, la formulation de la quadrature numérique pour l'équation :

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} (B_I^T)_{2 \times 3} c_{3 \times 3} (B_J)_{3 \times 2} d\Omega \quad (16)$$

$$K_{IJ} = \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} \underbrace{\hat{w}_i B_I^T(x_{Q_i}) c B_J(x_{Q_i}) |J_{ik}^D|}_{K_{IJ}^{ik}} = \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} (K_{IJ}^{ik})_{(2 \times 2)} \quad (17)$$

Et la dimension de  $K_{IJ}^{ik}$  est  $2 \times 2$

Noter que l'équation (17) signifie que la matrice nodale  $K_{IJ}$  est obtenue par la sommation des contributions de tous les points de quadrature dont les domaines locaux incluent l' $I^{\text{ème}}$  et le  $J^{\text{ème}}$  nœud en même temps. Si le nœud I et le nœud J ne sont pas dans le même domaine local du point de quadrature à  $x_{Q_i}$ ,  $K_{IJ}$  est égale à 0.

### 3 Application au matriçage d'un cylindre

Cet exemple illustre comment la méthode EFG peut être employée dans les cas de grande déformation du matériau (distorsion de l'élément). S'est l'exemple du test de compression (Fig.3.a).

Les données du problème sont les suivantes :

- La simulation a été menée sous le logiciel Ansys/LSdyna en 3D.

- Les caractéristiques du matériau de la pièce : Masse volumique  $\rho$  ( $\text{g/mm}^3$ ) = 0.0025, Module de Young E (MPa) =  $6.8900 \cdot 10^4$ , Coefficient de poisson  $\mu$  = 0.33, Limite d'élasticité  $\sigma_e$  ( $\text{N/m}^2$ ) = 117.
  - Le matériau choisi dans cette étude est un matériau élasto-plastique (Material model 24), son comportement est détaillé dans [J. O. Hallquist, 2006].
  - Les dimensions :  $h_0 = 28.5\text{mm}$ ,  $D_0 = 19\text{mm}$ .
  - Le contact se fait avec frottement, en adoptant un coefficient de frottement  $\mu_c = 0.2$ .
  - La force est appliquée dans la direction inverse de l'axe Z et  $f = 8 \cdot 10^2$  Mpa. (Fig.3.b)
  - Le plan du poinçon est supposé infiniment rigide.
- Pour des raisons de symétrie du problème, on prend un quart du cylindre (Fig.3.b).

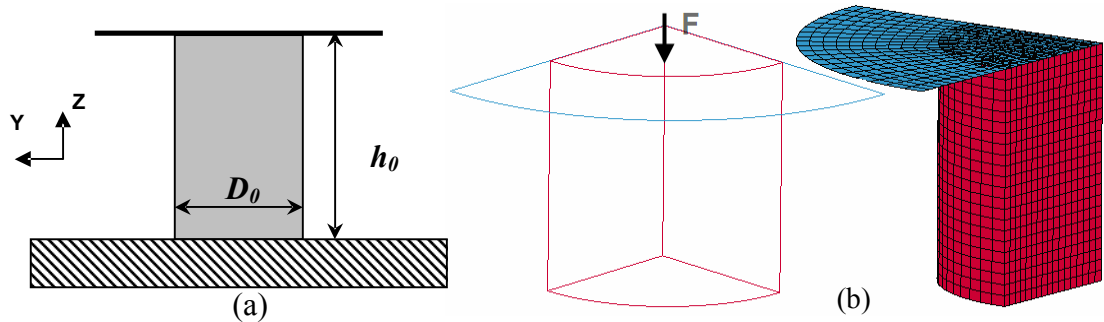


FIG.3 : Compression d'un cylindre (Nombre de nœuds : 5755).

Dans les schémas qui suivent, on retrace les différentes étapes de l'évolution de la simulation, à gauche par la méthode EFG, à droite par MEF (Fig.4).

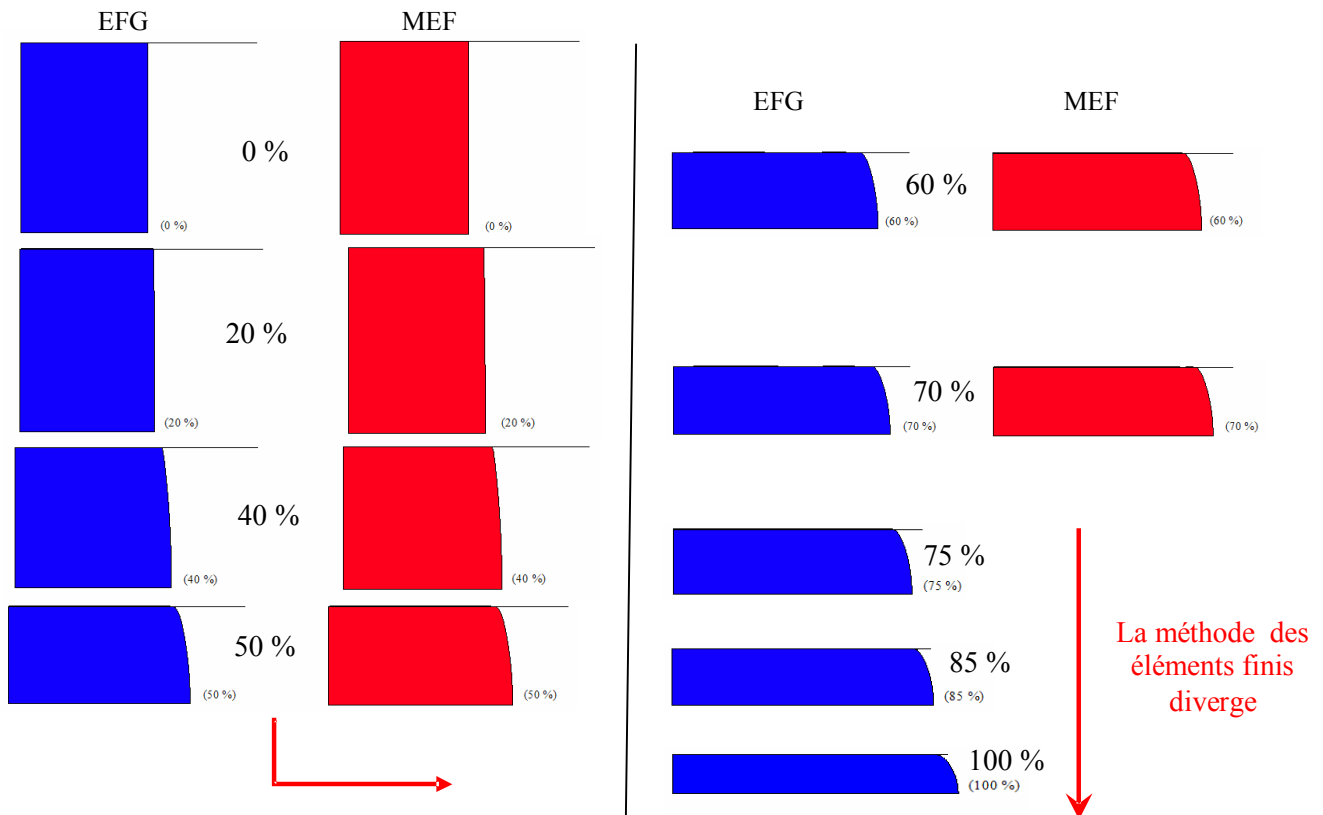


FIG.4 : Résultats des simulations par EFG et par MEF.

On constate bien que la simulation par élément finis diverge à un stade moins avancé que la simulation par la méthode Element Free Galerkin.

Cela est due aux graves distorsions des éléments du maillage MEF (Fig.5.a), ces derniers ne sont pas utilisés

dans la simulation par EFG (Fig.5.b) ce qui constitue en fait l'avantage par rapport à la MEF.

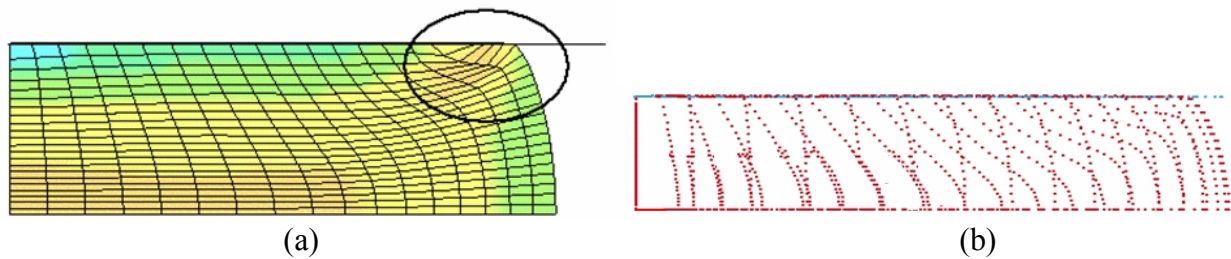


FIG.5 : (a) Distorsions des éléments du maillage MEF, (b) Aucun élément : pas de distorsion.

## 4 Conclusion

La méthode sans maillage présente la particularité par rapport à la méthode des éléments finis de se baser sur un ensemble de nœuds répartis dans le domaine sans exiger la construction d'un maillage qui relie ces nœuds. Cette particularité représente un avantage majeur en simulation en grande déformation (distorsion de la maille).

L'exemple traité de la pièce subissant une grande déformation fait clairement apparaître l'un des avantages majeur de l'EFG par rapport à la méthode des éléments finis, dans la résolution de ce type de problème très souvent rencontré dans la mise en forme des matériaux.

## Références

- B. Nayroles, G. Touzot, P. Villon, 1992, Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 10, 307-318.
- G. R. Liu, 2002, *Mesh Free Methods Moving beyond the Finite Element Method*, CRC PRESS Edition.
- J. O. Hallquist, 2006, *LS-DYNA Theory manual*. Livermore Software Technology Corporation, 304-305. California, USA.
- T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu, 1994, Element-free Galerkin methods, *Int. f. Numer. Methods Eng.*, 229-256.
- S. Yoon, J.S. Chen, 2002, Accelerated meshfree method for metal forming simulation », *Finite Element in Analysis and Design*, 38: 937-948.
- P. Lu, G. Zhao, Y. Guan, X. Wu, 2008, Bulk metal forming process simulation based on rigid-plastic/viscoplastic element free Galerkin method, *Materials Science and Engineering A*, 479: 197-212.
- L. Filicea, I. Alfarob, F. Gagliardi, E. Cuetob, F. Micari, F. Chinesta, 2009, A preliminary comparison between finite element and meshless simulations of extrusion, *journal of materials processing technology*, 209: 3039-3049.
- C. Tiagoa, P. M. Pimentab, 2008, An EFG method for the nonlinear analysis of plates undergoing arbitrarily large deformations, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 32: 494-511.
- D. Peric, M.Vaz, D.R.J. Owen, 1999, On adaptive strategies for large deformations of elasto-plastic solids at finite strains : computational issues and industrial applications, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 279-312.