وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة امحمد بوقرة- بومرداس

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مطبوعة بيداغوجية تحت عنوان

محاضرات في تقنيات الاكتوارية

موجهة لطلبة السنة الأولى ماستر علوم اقتصادية تخصص اقتصاد التأمين

من إعداد: الدكتورة العربي شريف هجيرة

أستاذة محاضرة قسم ب بقسم العلوم الاقتصادية

السنة الجامعية: 2018- 2019

الفهرس

مقدمة:

لقد تم إعداد هذه المطبوعة حول مقياس تقنيات الاكتوارية وهي تستهدف طلبة السنة الأولى ماستر اقتصاد التأمين لتتناسب مع المتطلبات المبدئية للدراسة في مجال التأمينات وعلى أساس ذلك فقد حاولت جاهدة التبسيط والإلمام بالمفاهيم وأسلوب العرض ما أمكن ليسهل للطالب الذي يدرس التأمينات لأول مرة التعامل معها.

وقد ركزت هذه المطبوعة على جانب اكتوارية تأمينات الحياة ، حيث قمنا أولا ب التعريف بـمصطلح الاكتوارية ونبذة عن تطور تقنياتها وكذلك مفهوم تأمينات الحياة، ثم قمنا بإعطاء نبذة حول أساسيات الرياضيات المالية والمتمثلة أساسا في طرق حساب القيمة المكتسبة بالفائدة البسيطة والفائدة المركبة والقيمة الحالية والخصم ، ثم قمنا من خلال الجزء الثالث الخاص بالعمليات الحيوية وعقود التأمين على الحياة بالتعرف على جداول الحياة وطرق حساب احتمالات البقاء على قيد الحياة والوفاة، وتوقع الحياة، ثم تعرفنا على طرق حساب القسط الوحيد الصافي والأقساط السنوية الصافية والتجارية لمختلف أنواع الالتزامات تأمينات الحياة (التأمين في حالة البقاء على قيد الحياة، الوفاة والتأمين المختلط) وطرق حساب الأرصدة الرياضية.

الفصل الأول: مدخل إلى تقنيات الاكتوارية

تمهيد

ظهر مصطلح الإكتوارية لأول مرة في منتصف القرن 18 في المملكة المتحدة أي في الوقت الذي ظهرت فيه أول شركة تأمينات رسمية GEOURGE سنة 1720 وأعمال Gauss-Gulton-Berneulli الإحصائية.

ولكن الاكتوارية بمفهومها الحديث ظهرت مع الثورة الصناعية في منتصف القرن 19 حيث ظهر معهد الاكتوارية في المملكة المتحدة والشركة الأمريكية للإكتوارية سنة 1889 ومعهد الاكتوارية الفرنسي في 1890 وفي سنة 1885 تم تنظيم وظيفة الاكتواري عالميا حيث أنشئت الشركة العالمية للاكتوارية في بروكسل وكان دورها الأساسي هو جمع الإحصائيين الذين أحرزوا تطورا في هذا المجال.

وكان ظهور التأمينات الجماعية وصناديق الأجور السبب الرئيسي وراء تطور الاكتوارية في بداية القرن العشرين وفي سنوات الخمسينات ومع تطور التأمينات المرضية أصبحت السبب الرئيسي وراء تطور تقنيات الاكتوارية حيث حققت تأييد كبير من الرأي العام . وتطورت في سنوات الثمانينات لتتحول من النماذج التأكيدية (certitude) إلى نماذج الشك (الاحتمالية)(incertitude) .

1- تعريف تقنيات الاكتوارية:

الاكتوارية كلمة لاتينية تعني (محاسب، محرر كتب الحساب ...) أما الاكتواري فهو المختص الذي يقوم بالحسابات الإحصائية للتأمينات أو بصفة أوسع هو المختص في تحليل ومعالجة الآثار المالية للخطر.

الاكتواري هو مفكر متعدد المواصفات الإستراتيجية ويجب أن يكون متمرّس في الفظريات والتطبيقات في علوم الرياضيات والإحصاءات، والاقتصاد وحساب الاحتمالات والعلوم المالية لذلك يلقّب الا كتواري بالمهندس المالي أومهندس الرياضيات الاجتماعية.

2- الوظائف التي يشغلها الاكتواري

2 1 -تعريف وتكييف المنتجات

- ✓ **تعريف الم نتجات:** تحليل المخاطر، تعريف الضمانات، تهيئة قوانين الوفيات، تعريف طرق الحساب.
- ✓ **تكييف المنتجات :** فهم وسائل التحليل، تحقيق الدراسات التقنية، تقييم تغيرات المخاطر، اقتراح تكيف بدلالة التسعيرة والضمانات، تقييم تغيرات النتائج.

- ✓ التسويق: تحديد الجمهور المستهلك وتوجيه الزبائن.

2 2 تسيير العقد:

- ✓ **العقد:** ضمان التواصل والتحليل التقني، تعريف دفاتر التكاليف التقنية والإعلامية، مراقبة المحفظة، تحديد قدرة التعديل.
- ✓ **المحفظة:** تفعيل جدولة التموين، تعريف احتياجات إعادة التامين، حساب مبالغ الاحتياطات الإجبارية، مراقبة التوازنات التقنية، إعداد نماذج المردودية، وضع وسائل لمراقبة النتائج، مراقبة تنبؤات النتائج.

2 3 تسيير الميزانية:

- ✓ **الحسابات:** مراقبة ومتابعة الحسابات الشهرية ووضع قوانين الحسابات
- ✓ **مراقبة التسيير:** إعداد نماذج المردودية وتحليلها .
- ✓ **الأصول/ الخصوم:** مراقبة تغير الاحتياطي الرياضي، تقييم المحفظة، اقتراح استراتيجيات التسيير وتحليل المخاطر.

2 4 المالية : تحليل اتجاهات مختلف الأسواق وتقييم المحفظة المالية، فهم أنظمة القيادة ، إعداد وسائل المتابعة.

إن الدور الأساسي للاكتواري في أغلب الأوقات هو مساعدة المجتمع من خلال دراسة أنظمة الحماية المالية ومن ضمنها (نظام الضمان الاجتماعي) على التعامل بشكل علمي ومدروس مع حالات عدم التأكد (حالات التشكيك – Uncertutide)

إن فكرة القيمة الزمنية للنقود مهمة جداً للاكتواريين وللعديد من الجوانب الاقتصادية والمالية . ويقوم الاكتواريون باستخدام فكرة القيمة الزمنية للنقود مع المتغيرات العشوائية لاحتساب القيمة الحالية la valeur actuelle ويستطيع الاكتواريون إجراء التحليل والتحكم الملائم لمدى كفاية الأموال وتطابق الموجودات مع المطلوبات للصناديق التقاعدية .

ومنه يم كنا <u>**تعريف الاكتوارية**</u> بأنها تطبيق لحساب الاحتمالات والإحصاءات لمسائل التأمين، المالية والحماية الاجتماعية ويقوم على الأثر المالي للخطر وتقدير التدفقات المستقبلية المجمعة حيث يتم استخدام تقنيات رياضية وإحصائية لتحديد ونمذجة بعض الحوادث المستقبلية بطريقة تنبؤية مثلا: مدة حياة الإنسان، تكرار الحوادث...الخ.

3 - تعريف التأمين:

"عرف دنديل Dandel التأمين بأنه وسيلة لتوزيع الخسائر التي تلحق بالفرد على جماعة من الأفراد ويهدف إلى تكوين صندوق خاص يساهم فيه الكثيرون ويعوض منه القليلون الذين يصابون بخسائر أو أضرار، ويتوقف نجاحه على اختيار قدر كاف من الأخطار المتشابهة للتامين عليها.

كما عرفه البروفسير كالب Kulp بأنه عبارة عن نظام اجتماعي، والذي بمقتضاه تقوم مجموعة من الأفراد هم (المستأمنون) بتحويل الخطر لمجموعة أخرى أو جهة أخرى (المؤمن أو شركة التأمين) حتى تقوم بإدارة هذا الخطر باستخدام الأساليب الرياضية والإحصائية للتنبؤ بالخسائر المتوقعة وتقوم بتعويض الخسائر الفعلية لأفراد المجموعة الأولى عن طريق إدارة الأموال المجمعة في شكل أقساط من الأفراد الذين قاموا بتحويل الخطر لشركة التأمين"[1].

كما يمكن تعريف التأمين عموما "بأنه العملية التي من خ لالها يقوم شخص "المؤمن" بالتكفل بإجراء قرض لفائدة شخص آخر "المؤمن له" في حالة حدوث حادثة عشوائية أو مخاطرة مقابل دفع "علاوة أو قسط التأمين"[2]، وهناك فرعان رئيسيان للتأمين:

- **فرع الحياة:** تأمين في حالة الحياة أو الموت وتأمين الأشخاص
- **فرع غير الحياة:** تأمين الخسارة مثل احتراق المركبات ومختلف الأخطار، تأمين السلع.

- أساسيات التأمين:

أ- **الحاجة للحماية :** لأن الحياة تحمل العديد من المخاطر التي تصيب صحة الإنسان أو حياته أو ممتلكاته، وهذا هو مبرر لجوء الأشخاص للتأمين ضد أحد هذه المخاطر.

ب- **التضامن:** يقوم التأمين على مبدأ التضامن، فالعديد من الأشخاص أو المؤسسات المعرضين لنفس الخطر يدفعون أقساطهم لصندوق مشترك والذي في حالة حدوث حادث يدفع مبلغ للمؤمن له الضحية.

ج- **قانون الأعداد الكبيرة:** نظرية الاحتمالات ومعالجة عدد كبير من حالات التأمين تسمح بتحديد نوع من التأكد من الانتظام، أي التواتر (التكرار) الذي ستحدث به.

د- **عقد التأمين:** وهي تغطية النتائج المالية لحادث خسارة.

هـ- **حماية التأمينات:**أي أن هدفها الأساسي حماية المؤمن له أو عليه.

[1] شريف محمد الغمري، محمد محمد عطا، الاصول العلمية والعملية للخطر والتأمين، الطبعة الأولى، السعودية، 2012، ص75.
[2] Emmanuelle Scheid, théorie de l'assurance-vie, coures destiner au 2 actuariat, université Dauphine, paris.

و- **الأقساط، الاشتراكات :** في مقابل الحماية من الخطر يدفعون مبالغ قبل تلقيهم المساعدة في حالة تعرضهم للخسارة، هذه المبالغ هي الأقساط التي تتكون من العناصر التالية : الخطر، التكاليف، الادخار، الاشتراكات.

4 - مفهوم العمليات الحيوية:

4 ~~1~~ ~~تعريف~~ العمليات الحيوية: العمليات الحيوية يقصد بها العمليات التي من خلالها ترتبط مبالغ أو تبادلات رأس المال بالحياة الباقية أو موت شخص أو عدة أشخاص.[1]

مثال: في مقابل قسط تأمين ثابت، شركة تأمين تدفع مبلغ في وقت وفاة شخص x لشخص مستفيد y.

في مقابل رأس مال مدفوع من y، x لديه الحق في الدخول للملكية في وقت وفاة y لعقار تابع لـ y.

4 ~~2~~ ~~تعريف~~ التأمين على الحياة : هو عملية حيوية حيث تكون المخاطر مرتبطة بالمدة العشوائية لحياة الإنسان تقوم بها شركة مختصة (شركة التأمين على الحياة) إذا مصطلح التأمين على الحياة يشمل مجموعة من العمليات المقيدة بالعمليات الحيوية.

4 ~~3~~ ~~تعريف~~ عقد التأمين على الحياة : هو العقد الذي من خلاله في مقابل دفعات وحيدة أو دورية، المؤمن يضمن الإقراض للمستفيد الذي تنفيذه مرتبط بالحياة المتبقية أو موت المؤمن له.

هناك ثلاث أنواع للتأمين على الحياة: التأمين في حالة الوفاة، التأمين في حالة الحياة والتأمين المختلط.

ملاحظة:

لحساب الأرصدة وأقساط التأمين يستعين الاكتواري بـ:

- الرياضيات المالية: لحساب الفائدة المركبة، التحيين والرسملة.
- الديموغرافيا: لحساب خطر الوفيات.
- المالية: (تسيير الأصول والخصوم، التحليل المالي الديناميكي...)

علم الإحصاء والاحتمالات هو العلم الذي يبحث في المتغيرات العشوائية وهو العلم الأساسي التي تركز عليه العلوم الاكتوارية.

5 - أسباب ومبررات إعداد الدراسات الاكتوارية في تأمين الحياة :

قد تكون استجابة لمتطلبات تشريعية (كما هو الحال في النظام الضماني أو التأميني أو التقاعدي). من المفيد ، بل من الضروري إجراء الدراسات الاكتوارية عند الرغبة في إجراء أي تعديل على مدخلات أو مخرجات النظام التقاعدي أو الضماني مثل زيادة المعاش التقاعدي أو الضماني أو عند الرغبة في دمج

[1]Emmanuelle Scheid, théorie de l'assurance-vie, coures destiner au 2 actuariat, université Dauphine, paris.

صندوقين أو أكثر وذلك بهدف حل بعض الإشكاليات التمويلية كالعجز المالي لأحد الصناديق أو بهدف إجراء إصلاحات مالية أو تشريعية أو إدارية على صناديق التقاعد أو التامين الاجتماعي أو الضمان الاجتماعي.

6- أهمية إجراء الدراسة الاكتوارية في تأمين الحياة:

الوقوف على المركز المالي للصندوق والمشكلات التمويلية التي سيواجهها النظام (الضماني أو التأميني أو التقاعدي) لاتخاذ الإجراءات اللازمة لتعزيز وتقوية المركز المالي للنظام في الوقت المناسب وذلك حرصا على استمرارية النظام (الضماني أو التأميني أو التقاعدي) وديمومته لأجيال عديدة قادمة وخاصة عند اعتماد سياسة التمويل الذاتي ولا يعتمد على الدولة في تغطية مصروفات المعاشات بأنواعها ولا يعتمد على الدولة في تغطية مصروفاته التشغيلية أيضا.

الفصل الثاني: العمليات المالية

I- الفوائد البسيطة:

الفائدة هي المكافأة التي يحصل عليها من رأس المال حين يتم إقراضه لفترة محدد من الزمن، وهي تسدد مرة واحدة أو على عدة مرات إذا كانت المدة الزمنية التي يقترض فيها طويلة، الفائدة يمكن تسديدها مسبقا (في بداية الفترة) أو في نهايتها، والفائدة تحدد حسب مدة القرض، المبلغ المقرض ومعدل الفائدة المعتمدة . المدة التي تحسب على أساسها الفائدة هي في أغلب الأحيان السنة، ويمكن استخدام مدة أخرى أقصر من السنة (نصف سنة، ربع سنة، أو حتى شهر).

تعريف: رأسمال بفائدة بسيطة إذا بقي مبلغ الفائدة ثابت، إذا الفوائد البسيطة هي الفوائد المالية المتناسبة مباشرة مع المال المستثمر في فترة ومعدل معلومين:

n:مدة القرض

i: معدل الفائدة

I: مجموع الفوائد

C_0: رأس المال الأصلي

C_n: رأس المال النهائي أو حاصل رأس المال في نهاية المدة n

لدينا: مقدار الفائدة I الذي ينتجه رأس المال C_0 لاستثمار مدته n هي

$$I = C_0.n.i \qquad (2.1)$$

ومنه

$$C_n = C_0 + I \qquad (2.2)$$

$$C_n = C_0 + C_0.n.i$$

$$C_n = C(1 + in) \qquad (2.3)$$

مثال رقم (1 .1): نستثمر مبلغ 5000$ في حساب بمعدل فائدة 3%، أوجد رأس المال النهائي بعد 3 أشهر؟

الحل:

$$n = \frac{3}{12} \quad i = 0.03 \quad C_0 = 5000$$

$$C_n = 5000\left(1 + \frac{3}{12}0.03\right) = 5037\$$$

المرور من المعدل الدوري إلى المعدل السنوي:

المعدل الدوري X عدد الدورات في السنة= المعدل السنوي

مثال: إذا كان المعدل الشهري 1% فالمعدل السنوي هو 1*12=12%

II– الفوائد المركبة وعمليات الرسملة:

عندما يستثمر رأس مال بفائدة مركبة فذلك معناه أن كل مقدار فائدة يحصل عليه بعد كل فترة يتم إضافته إلى مقدار رأس المال الأصلي ليصبح بدوره مصدرا لأرباح الفائدة ، هذا المبدأ الأساسي في الرياضيات المالية يسمى تحويل الفوائد إلى رأس مال (الرسملة).

وعلى عكس الفوائد البسيطة، فإن الفوائد المركبة تنطبق على الفترات الزمنية التي تزيد عن السنة . وفي كل المواضيع القادمة سنتعامل مع العمليات الحسابية على أساس الفوائد المركبة.

ويوجد في الرياضيات المالية الاكتوارية مفهومان أساسيان هما : القيمة الحالية والقيمة المكتسبة، فعندما نريد البحث عن رأس المال المتحصل عليه بعد مرور فترة من الزمن فإننا نقصد القيمة المكتسبة لرأس المال، وعندما نريد البحث عن رأس المال أو المبلغ الذي وجب إيداعه ا ليوم في حساب لكي نحصل بعد فترة على رأس مال معين فإننا نقصد القيمة الحالية.

<u>تعريف الفائدة المركبة :</u> إذا كان رأسمال بفائدة مركبة، الفوائد الناتجة في آخر كل فترة تضاف إلى رأس المال الابتدائي لتكون رأسمال جديد يحمل الفوائد التالية خلال الفترة التالية " إضافة فوائد الفوائد".[1]

<u>تعريف القيمة المكتسبة :</u> القيمة المكتسبة لرأس المال هي المبلغ الذي يستثمره شخص (رأس مال ابتدائي) لفترة زمنية معينة ومعدل فائدة معين لهذه العملية[2].

عمليات الرسملة لها بعدان:

- البعد الزمني: مدة العملية.
- المردودية/ تكلفة النقود: النسبة التي يدفعها المدين خلال مدة العملية، واصل هذه التكلفة هو:

[1] Walder Masiéri , Mathématiques financières, edition DALLOZ, Paris , 2001,P62
[2] Emmanuelle Scheid, théorie de l'assurance-vie, coures destiner au 2 actuariat, université Dauphine, paris.

- **خطر الافلاس:** من الممكن أن لا يستطيع الدائن أن يعوض إذا أفلس المدين، كفاءة عملية الدين يجب أن تكون كافية لحث الدائن على الخطر.
- **خسارة السيولة:** خلال فترة الدين الدائن لا يحصل على النقود التي أعطاها للمدين، كفاءة الدين تعطيه إذا تعويض لتوقفه المؤقت لحق استعماله للنقود، الفائدة تحصل تكلفة خسارة السيولة.

الفائدة المركبة هي الفائدة المالية نتيجة الاستثمار تحدث نتيجة دورة فوائده المالية[3].

لدينا

n: مدة القرض

i: معدل الفائدة

I: مجموع الفوائد

C_0: رأس المال الأصلي

C_n: رأس المال النهائي أو حاصل رأس المال في نهاية المدة n

حيث

$$C_n = C_0(1+i)^n \qquad (2.4)$$

الفترة	مبلغ الفائدة المحصلة في هذه الفترة	القيمة المكتسبة بالفائدة المركبة في نهاية الفترة
1	$C_0 i$	$C_0 + C_0 i$
2	$C_0(1+i)i$	$C_0(1+i) + C_0(1+i)i$
3	$C_0(1+i)^2 i$	$C_0(1+i)^2 + C_0(1+i)^2 i$
n	$C_0(1+i)^{n-1} i$	$C_0(1+i)^{n-1} + C_0(1+i)^{n-1} i$

مثال رقم (2.1): استثمرنا مبلغ 5000$ لمدة 20 سنة في حساب بمعدل فائدة 2%، ما مقدار رأس المال نهاية هذه المدة؟

الحل:

$$C_n = C_0(1+i)^n = 5000(1+0.02)^{20} = 7429.74\$$$

[3] Walder Masiéri , Mathématiques financières, edition DALLOZ, Paris , 2001,P63

المرور من المعدل الدوري إلى المعدل السنوي:

(1+ المعدل السنوي) = (1+ المعدل الدوري) ^عدد الدورات في السنة^

مثال: كان المعدل الشهري 1% فالمعدل السنوي هو $(1+i)=^{12}(1+0.01)$ ومنه $i=12.68\%$

III- عمليات التحيين:

تعريف القيمة الحالية: القيمة الحالية لرأس المال C مدفوع في n سنة هي المبلغ C_0 الذي وضع بفائدة مركبة خلال فترة n سنة وبمعدل فائدة i، إذا التحيين هي العملية العكسية لعملية الرسملة[4].

$$VA(T,i) = C\frac{1}{(1+i)^T} \qquad (2.5)$$

- **ملاحظة:** نرمز لعامل الرسملة بـ $u=(1+i)$ وعامل التحيين (الخصم) بـ $v=1/(1+i)$

عندما نتقدم في الزمن نضرب في u (القيمة المكتسبة)

عندما نرجع إلى الوراء مع الزمن نضرب في v (القيمة الحالية)

مثال:

رأسمالان بقيمتين اسميتين 30000دج و50000دج استحقا على الترتيب في 2006/11/20 و2009/11/20 تم الاكتتاب في 2002/11/20، حيث كان معدل الفائدة 7%.

أحسب القيمة الحالية الإجمالية.

الحل:

حساب القيمة الحالية الإجمالية:

$$VA=C_3(1+i)^{-4}+C_6(1+i)^{-7}$$
$$VA=30000(1.07)^{-4}+50000(1.07)^{-7}$$

[4] Emmanuelle Scheid, théorie de l'assurance-vie, coures destiner au 2 actuariat, université Dauphine, paris

IV– حساب الدفعات الدورية:

لقد رأينا كيف يم حساب القيمة الحالية والقيمة المكتسبة لرأسمال وحيد، والآن سنتعرف على كيفية حساب القيمة الحالية والمكتسبة لمجموعة من المبالغ مدفوعة بصفة دورية.

تعريف الدفعات السنوية :[5] هي مجموعة من الدفعات تحدث في مجال زمني ثابت حيث يمكن أن تعرف هذه الدفعات فقط في حالة معرفة:

- تاريخ أول دفعة
- المدة التي تفصل بين دفعتين متتاليتين
- عدد الدفعات
- مبلغ كل دفعة

أ– القيمة الحالية لدفعة دورية:

من الممكن أن تكون هذه الدفعات ثابتة أو متغيرة، إذا القيمة الحالية لهذه الدفعات هي:

$$C_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{(1+i)^k} \qquad (2.6)$$

في حالة الدفعات السنوية الثابتة:

$$C_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Leftrightarrow a = C_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

حيث C_0هي القيمة الحالية، a قيمة الدفعة السنوية.

مثال: أحسب القيمة الحالية لمجموعة دفعات سنوية ثابتة قيمتها 3500€ طيلة 10 سنوات بمعدل فائدة 6%.

الحل:

$$C_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 3500\frac{1-(1+0.06)^{-10}}{0.06} = 25670.30€$$

[5] Emmanuelle Scheid, théorie de l'assurance-vie, coures destiner au 2 actuariat, université Dauphine, paris

ب- القيمة المكتسبة لدفعات دورية:

أما القيمة المكتسبة لمجموعة دفعات سنوية ثابتة هي:

$$C_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (2.7)$$

حيث C_n هي القيمة المكتسبة.

مثال: أوجد القيمة المكتسبة لدفعات سنوية ثابتة 3500€ طيلة 10 سنوات بمعدل فائدة 6%.

الحل:

$$C_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 3500\frac{(1+0.06)^{10} - 1}{0.06} = 46132.78€$$

مجموعة تمرينات حول الفصل الثاني:

التمرين الأول:

أحسب القيمة المكتسبة من رأسمال 200000دج بمعدل فائدة سنوي $i=0.115$ مع رسملة سنوية للفوائد

1 مدة 7 سنوات 2- المدة 11 سنة وخمس أشهر.

التمرين الثاني:

- أحسب القيمة المكتسبة بالفائدة المركبة لرأسمال 1000000دج على مدى 10 سنوات وبمعدل سنوي $i=0.09$ مع رسملة سنوية للفوائد.
- أحسب قيمة رأس المال النهائي في حالة الفائدة البسيطة لرأسمال 1000000دج على مدى 10 سنوات وبمعدل سنوي $i=0.09$.
- ماهي المدة التي تصبح فيه ا القيمة رأس المال النهائي للفائدة البسيطة تساوي القيمة المكتسبة في السؤال الأول؟
- ماهي المدة التي تصبح فيها القيمة المكتسبة للفائدة المركبة تساوي القيمة المكتسبة في السؤال الثاني؟
- بأي معدل فائدة رأسمال بقيمة 1000000دج بفائدة بسيطة مدة 10 سنوات يصبح يساوي قيمة رأس المال النهائي في السؤال الأول؟

التمرين الثالث:

رأس مال بقيمة 150000دج مدة الاستحقاق 5 سنوات ومعدل الخصم 6.5%.

- أحسب القيمة الحالية بالفائدة المركبة.
- أحسب قيمة الخصم.

التمرين الرابع: رأس مال بقيمة 20000 مدة الاستحقاق 4سنوات ومبلغ الخصم بقيمة4742.10دج

- أحسب معدل الخصم السنوي بالفائدة المركبة.

التمرين الخامس : رأسمالان بقيمتين اسميتين 40000دج و 70000دج مستحقان على الترتيب في 2005/11/20 و2008/11/20 تم الاكتتاب في 2002/11/20، فكانت القيمة الحالية الإجمالية 75037.96دج. أحسب معدل التحيين.

التمرين السادس : شخص يدفع بالتقسيط في مجال زمني منتظم كل 1 سنة، مبالغ ثابتة تساوي 10000دج إلى مؤسسة مالية، عملية الرسملة بمعدل فائدة 10% تاريخ أول قسط 2002/12/1 وتاريخ آخر قسط 2017/12/1.

- أحسب رأس المال المكون في تاريخ 2017/12/1.
- نفرض أن رأس المال المكون لم يسحب في 2017/12/1 ، أحسب رأس المال المكون في تاريخ 2018/12/1 وفي 2022/12/1

الفصل الثالث: العمليات الحيوية وعقود التأمين على الحياة

تمهيد:

ينقسم التأمين إلى تأمين خاص أو تجاري وتأمين اجتماعي وفي كلا النوعين فلابد من تقدير القيمة الاحتمالية لمبالغ التأمين وتعويضاته التي يلتزم بأدائها عند تحقق الخطر الاحتمالي المؤمن منه حتى يمكن تحديد ما يلتزم بأدائه المعرضين للخطر أي تدبير الموارد اللازمة لمواجهة مبالغ التأمين وتعويضاته.

وتهدف تأمينات الحياة إلى تغطية الخسائر المالية التي يتعرض لها الأفراد والناتجة عن الظواهر الطبيعية، وبالتالي فإن تأمينات الحياة توفر الحماية للإفراد أو من يعولوهم (يعتمدون عليهم مادياً)، فظاهرة الوفاة يترتب على تحققها انقطاع الدخل بالنسبة لأسرة المتوفى ، وظاهرة الشيخوخة يترتب على تحققها انخفاض دخل الفرد مع زيادة الإنفاق بالنسبة لضعف الحالة الصحية وا لجسمانية، وظاهرة العجز يترتب على تحققها انخفاض الدخل أو انقطاعه حسب درجة الحادث الذي تعرض له.

مبدأ التكافؤ : التأمين على الحياة يقوم على مبدأ التكافؤ في الخطر لمجموعة متجانسة من الأشخاص (نفس السن، نفس الجنس،...) أي الأشخاص المعرضون لنفس الخطر تقريبا.

يتم تحديد الاشتراك contribution "القسط" لكل فرد بحيث يكون إجمالي الاشتراكات المتساوية لكل فرد من المجموعة يغطي إجمالي التعويضات المفترضة، وهو مبدأ التكافؤ مابين اشتراكات المؤمن لهم والتزامات المؤمن.

في العمليات الحيوية الوسائل الأساسية للحسابات المالية هي معدل الفائدة ومعدل الوفيات.

I. <u>جداول الوفاة:</u>

تكمن أهمية جدول الوفاة في الدور الذي تمثله بالنسبة للمؤمن على الحياة في وضع القواعد اللازمة لحساب التسعيرة والقسط، ولإعداد جدول للوفاة يجب قياس معدلات الوفاة، فإذا أردنا أن نتعرف على معدلات الوفاة في مجتمع ما بالإمكان الاعتماد على آخر تعداد عام للسكان بالإضافة إلى دفاتر الحالة المدنية، والمعطيات التي نحصل عليها للوفاة ترسم الصورة الأولية لمعطيات قابلة للتغيير، لذلك فهي أرقام لا بد من تعديلها باستخدام بعض الطرق الرياضية.

I – 1 تعريف جدول الوفاة:

يمكن تعريف جدول الوفاة في صورته العامة بأنه نموذج رياضي يبدأ بمجموعة من السكان في عمر معين ويتتبع حياتهم في تناقصهم التدريجي نتيجة حدوث الوفاة حتى وفاة أخر فرد منهم.

إذن، جدول الوفاة هو جدول يعطينا صورة رقمية لوفيات السكان في مختلف الأعما ر، ويستخدم جدول الوفاة لمعرفة احتمالات الحياة واحتمالات الوفاة بما يحتوي على أعداد الأحياء لكل سنة ابتداء من أول عمر حتى أخر عمر يتضمنه الجدول. ومن هذا يتضح مدى أهمية جدول الوفاة في عمليات التأمين على الحياة بالنسبة لحساب الأقساط والاحتياطيات وقيمة التصفية لوثيقة التأمين.

<u>المبدأ</u>: ابتداء من مجموعة أو زمرة ابتدائية من الولادة سنة بعد سنة يكون عدد الباقون على قيد الحياة lx في العمر x قاعدة الجدول هي من قوى العدد 10.

l_x: عدد الباقون على قيد الحياة في السن x

آخر سن في الجدول هو ω وهو السن الذي لا يبقى فيه أي شخص على قيد الحياة

$$l_\omega = 0$$

إذا الدالة l موجبة ومتناقصة كما أن قيمها صحيحة

مثال:

السن x	عدد الباقون على قيد الحياة l_x
0	1.000.000
1	999.415
10	994.002
40	965.973
70	767.741
71	750.022

<u>طريقة تكوين جدول الوفاة</u>

يعتمد تكوين أو إنشاء جدول الوفاة على مصدرين رئيسيين لإحصاءات الأحياء والوفيات وهما:

1-الإحصاءات السكانية التي تقوم بها الدولة.

2-إحصاءات شركات التأمين عن حالات الحياة والوفاة التي حدثت للمؤمن عليهم في وثائق التأمين على الحياة التي تكون تلك الشركات قد أصدرتها خلال سنوات سابقة .

أنواع جداول الوفيات:

- جدول الوفاة الخام: نتيجة الملاحظة مثل الإحصاء العام للسكان سنة 2008.
- جدول الوفاة المصحح: مصحح تحليليا
- جدول الخبرة : جدول يأخذ بعين الاعتبار خبرة المؤمن ، وهي جداول خاصة بشركات التأمين وتعتمد على المشاهدات المتعلقة بعملائهم أو تلك المتعلقة بعملاء شركات التأمين في الدولة بأكملها ويجب التمييز بين جداول مطبقة على أفراد تأمينات الحياة ، وجداول مطبقة على أفراد تأمينات الوفاة.
- جدول الوفاة الدوري: يفترض أن الوفيات تبقى ثابتة في المستقبل
- جدول الوفاة الاستشرافي أو الجداول المحتملة : يدمج التوقعات المنتظرة للوفيات ، أي أن هذه الجداول تعتمد على تطور معدلات الوفيات في المستقبل على عكس الجدول الكلاسيكي، وهي تمكن من حساب عقود المعاشات بمزيد من الدقة والأمان، حيث يتم إيجادها عبر التقييم المسجل في وفيات السكان العام.

ملاحظة: فيما يأتي سنعتمد على الجداول الدورية ، حيث هناك جداول وفيات خاصة بالذكور وأخرى خاصة بالإناث لأن احتمال الوفاة عند الذكور يختلف عن احتمال الوفاة عند الإناث .

عدد الوفيات في العمر x

عدد الوفيات في السن x هو الفرق بين عدد الباقون على قيد الحياة في السن x وعدد الباقون على قيد الحياة في السن x+1.

$$d_x = l_x - l_{x+1} \qquad (3.1)$$

مثال:

من خلال جدول الوفاة في المثال السابق لدينا:

$d_0 = l_0 - l_1$ $\quad$ $d_0 = 1000000 - 999415$ $\quad$ $d_0 = 585$

$d_{70} = l_{70} - l_{71}$ $\quad$ $d_{70} = 767741 - 750022$ $\quad$ $d_{70} = 17719$

I 2 – احتمال البقاء على قيد الحياة واحتمال الوفاة(حاصل قسمة الوفيات):

من خلال دراسة جدول الوفاة يمكننا حساب احتمال الوفاة واحتمال الحياة للشخص في سن معينة x ، حيث يمكننا حساب الاحتمال السنوي للحياة والاحتمال السنوي للوفاة ونعني بذلك احتمال بقاء الشخص على قيد الحياة أو وفاته خلال سنة واحدة، كما يمكن حساب احتمال بقاء الشخص على قيد الحياة أو وفاته خلال أو بعد n سنة.

أ –الاحتمال السنوي للوفيات:

هو احتمال وفاة شخص في السن x قبل بلوغه السن x+1 ويسمى أيضا حاصل قسمة الوفيات.

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \qquad (3.2)$$

مثال:احتمال وفاة شخص عمرة 70سنة قبل بلوغه سن 71سنة

$$q_{70} = \frac{d_{70}}{l_{70}} = \frac{17719}{767741} = 0.023$$

ب -الاحتمال السنوي للحياة:

هو احتمال بقاء شخص في السن x على قيد الحياة عند بلوغه السن x+1

$$P_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - q_x \qquad (3.3)$$

مثال:احتمال بقاء شخص في سن 70 على قيد الحياة في السن 71

$$P_{70} = \frac{l_{71}}{l_{70}} = \frac{750022}{767741} = 0.977$$

ج – احتمال البقاء على قيد الحياة في n سنة:

وهو احتمال أن يبقى شخص في السن x على قيد الحياة عند بلوغه السن x+n

$$_nP_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = P_x P_{x+1} P_{x+2} \dots P_{x+n-1} \qquad (3.4)$$

مثال:احتمال شخص في السن 40 أن يبلغ سن 70

$$_{30}P_{40} = \frac{l_{70}}{l_{40}} = P_{40}P_{41}P_{42} \dots P_{69} = \frac{767741}{965973} = 0.795$$

د- احتمال الوفاة في n سنة:

وهو احتمال وفاة شخص في السنx قبل بلوغه السن x+n

$$_{n}q_{x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - {_{n}P_x} \qquad (3.5)$$

مثال: احتمال وفاة شخص في السن 40 سنة قبل بلوغه سن 70 سنة

$$_{30}q_{40} = \frac{965973 - 767741}{965973} = 0.205$$

هـ- احتمال الوفاة بعد n سنة:

وهو احتمال وفاة شخص في السن x بعد بلوغه السن x+n أي احتمال الوفاة بين السن x+n والسن x+n+1.

$$_{n/}q_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x} = {_{n}p_x}\, q_{x+n} \qquad (3.6)$$

مثال: احتمال وفاة شخص في السن 40 ما بين السن 70 والسن 71 سنة

$$_{30/}q_{40} = \frac{l_{70} - l_{71}}{l_{40}} = \frac{767741 - 750022}{965973} = 0.018$$

I 3 - توقع الحياة:

تعريف توقع الحياة في السن x:

توقع الحياة هو متوسط عدد سنوات البقاء على قيد الحياة في السن x. حيث لدينا صيغتان لتوقع الحياة: توقع الحياة المختصر (الوفاة بداية السنة) وتوقع الحية الكامل (الوفاة في منتصف السنة)

- صيغة توقع الحياة المختصر:

$$e_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} t\; {_{t/}q_x} = \sum_{t=1}^{\omega-x} t\frac{d_{x+t}}{l_x} \qquad (3.7)$$

- صيغة توقع الحياة الكامل:

$$e^{\circ}_{x} = e_{x} + \frac{1}{2} \qquad (3.8)$$

أشكال أخرى لتوقع الحياة:

$$e_{x} = \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_{t}p_{x} \qquad (3.8)$$

البرهان:

$$e_{x} = \sum_{t=1}^{\omega-x} t\ {}_{t|}q_{x} = \sum_{t=1}^{\omega-x} t\frac{d_{x+t}}{l_{x}}$$

$$e_{x} = \frac{1}{l_{x}}(l_{x+1} - l_{x+2} + 2l_{x+2} - 2l_{x+3} + 3l_{x+3} - 3l_{x+4} \dots)$$

$$e_{x} = \frac{1}{l_{x}}(l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} \dots)$$

$$e_{x} = {}_{1}p_{x} + {}_{2}p_{x} + {}_{3}p_{x} \dots$$

ا– 4– التعبير بدلالة المتغير العشوائي*T(x)* (مدة الحياة المتبقية للفرد في السن*x*)

سنقوم بدراسة متغير عشوائي حقيقي *Tx* الذي يعبر عن مدة الحياة المتبقية لفرد في السن *x*

- احتمال البقاء على قيد الحياة خلال الفترة *t* هو: $P(T_{x} > t) = {}_{t}p_{x}$
- احتمال الوفاة قبل انتهاء الفترة *t* هو: $p(T_{x} \leq t) = {}_{t}q_{x} = 1 - {}_{t}p_{x}$
- احتمال الوفاة في الفترة بين *t*و*t+t'* هو: $P(t < T_{x} \leq t + t') = {}_{t|t'}q_{x}$

توقع الحياة هو التوقع الرياضي لهذا المتغير العشوائي:

$$e_{x} = E([T(x)])$$

ا– 5 – *المعدل* الآني للوفيات:

بما أن الوفاة ظاهرة مستمرة بدلالة الزمن نفرض أن l_x مستمرة وقابلة للاشتقاق حيث:

$$x \in [0, \omega] \subset R$$

لدينا حاصل قسمة الوفيات على المجال $(0<h<1)$

$$ {}_hq_x = \frac{l_x - l_{x+h}}{l_x} \to 0 \; si \; h \to 0 $$

نستعمل خواص الاشتقاق بالنسبة إلى h

$$ \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,{}_hq_x = \lim_{h\to 0}\frac{1}{l_x}\,\frac{l_x - l_{x+h}}{h} $$

$$ = -\frac{1}{\mathrm{l_x}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\mathrm{l_x} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\ln l_x $$

$$ = \mu_x $$

μ_x المعدل الآني للوفيات وهو مشتق الدالة $-ln\ lx$

ومنه يمكننا إيجاد العلاقة بين المعدل الآني للوفيات واحتمال البقاء على قيد الحياة:

$$ \mu_{x+t} = -\frac{d}{dt}\ln l_{x+t} \Leftrightarrow \int_0^n \mu_{x+t}dt = -[lnl_{x+t}]_0^n = -(\ln l_{x+n} - lnl_x) $$

$$ = -\ln\frac{l_{x+n}}{l_x} = -\ln\,{}_nP_x $$

$$ {}_nP_x = 1 - \exp(-\int_0^n \mu_{x+t}\,dt) \qquad (3.9) $$

I-6- احتمال الحياة لأكثر من شخص:

أ-**احتمال الحياة لثنائي في السن x و y**

لدينا (x,y) شخصان في السن على الترتيب x,y. نفرض أن احتمال البقاء على قيد الحياة للشخص الأول مستقل عن احتمال البقاء على قيد الحياة للشخص الثاني.

- احتمال أن يبقى الثنائي على قيد الحياة في n سنة

$$ {}_nP_{xy} = {}_nP_x\ {}_nP_y \qquad (3.10) $$

- احتمال أن يبقى شخص على الأقل على قيد الحياة في n سنة:

$$ {}_nP_{\overline{xy}} = {}_nP_x + {}_nP_y - {}_nP_{xy} \qquad (3.11) $$

- احتمال وفاة الثنائي في n سنة:

$$ {}_nq_{\overline{xy}} = 1 - {}_nP_{\overline{xy}} \qquad (3.12) $$

ب- احتمال مجموعة أشخاص مختلفة في السن:

لدينا مجموعة أشخاص أعمارهم(x1, x2, ...xk) و nPx1,x2....xk احتمال بقائهم على قيد الحياة في n سنة

$$ {}_nP_{x_1x_2\ldots x_k} = {}_nP_{x_1}\ {}_nP_{x_2} \cdots {}_nP_{x_k} \qquad (3.13) $$

II- دراسة بعض عقود التأمين على الحياة (القسط الوحيد الصافي)

يرتكز المبدأ الأساسي لحساب أقساط التأمين على الحياة على المساواة في تاريخ الاكتتاب بين القيمة الحالية المحتملة للالتزامات المؤمن والقيمة الحالية المحتملة لالتزامات المؤمن له. وحسابات اكتوارية التامين على الحياة ترتكز كذلك على تحديد القيم الحالية المحتملة للالتزامات التي تقوم على وفاة أو بقاء شخص أو عدة أشخاص على قيد الحياة.

تنقسم عقود تأمينات الحياة إلى ثلاثة أنواع من الالتزامات هي : الالتزامات في حالة عقد التأمين البقاء على قيد الحياة، الالتزامات في حالة عقد التأمين على الوفاة، الالتزامات في حالة عقد التأمين المختلط.

II -1- الالتزام في حالة البقاء على قيد الحياة:

في هذا النوع من العقود يضمن المؤمن دفع مبلغ مال أو معاش إلى مستفيد إذا بقي على قيد الحياة إلى تاريخ معين، في هذه الحالة، الحدث العشوائي هو بقاء الشخص على قيد الحياة إلى سن معين أو تاريخ

معين[1]. وتتمثل أهم أنواع الالتزامات في حالة البقاء على قيد الحياة في: رأس المال المؤجل، ودفعات المعاشات.

قبل أن نتعرض لأهم عقود الالتزام في حالة البقاء على قيد الحياة، نعرف العبارات التالية التي تسمح لنا بتبسيط الحسابات وهي معرفة إلى معدل فائدة i:

$$v=\frac{1}{1+i}\ ;\quad D_x=l_x v^x\ ;\quad N_x=\sum_{k=0}^{\omega-x} D_{x+k}\ ;\quad S_x=\sum_{k=0}^{\omega-x} N_{x+k};\quad nE_x=\frac{l_{x+n}}{l_x}v^n$$

<u>أ- عقد رأس المال المؤجل بدون إعادة التأمين **le capitale différé sans contre assurance :**</u>

وهو عقد تأمين على الحياة من خلاله يضمن المؤمن دفع مبلغ التأمين لمستفيد في نهاية مدة معلومة من تاريخ التعاقد إذا بقي المؤمن له على قيد الحياة عندئذ . وفي حالة وفاة المؤمن له قبل ذلك التاريخ، المؤمن لا يدفع أي مبلغ.

مؤمن له في السن x وفي زمن t=0 يرغب في الحصول على رأسمال S بعد n سنة إذا بقي على قيد الحياة في هذا الوقت. المؤمن يطلب من المؤمن له في مقابل هذا الالتزام قسط يساوي:

$$\Pi=\frac{l_{x+n}}{l_x}v^n\times S=nE_xS \qquad (3.14)$$

القيمة: nE_x هي القيمة الحالية المحتملة لـ 1وحدة نقدية لرأسمال مؤجل n سنة.

$$nE_x=\frac{D_{x+n}}{D_x} \qquad (3.15)$$

مثال:

شخص في تمام السن *50* تعاقد مع شركة تأمين على أن تدفع له مبلغ £ 20000 إذا بقي على قيد الحياة في السن 70 سنة، فما هي القيمة الحالية المحتملة لهذا الالتزام إذا كان معدل الفائدة 2%؟

الحل: نستخدم الجدول *TF 00-02 à 2%* في الملحق

لدينا $l_{70}=87010$ $\quad l_{50}=96548$

$$\Pi=\frac{87010}{96548}\times(1+0.02)^{-20}\times 20000=12129.77$$

[1] Saliou Bakayoko, fonctionnement technique et actuariat de l'assurance vie et capitalisation, siminaire conjoint FANAF/IIA, Bamaco, 26-30 novembre 2007, p11.

هذه القيمة الحالية المحتملة تمثل القسط الوحيد الصافي الذي يدفعه المؤمن له مقابل التزام شركة التامين بدفع مبلغ 20000.

يمكننا الحساب باستخدام الاستبدالات في حالة الحياة:

$D_{50}=35870$ $D_{70}=21756$

$$\Pi = \frac{21756}{35870} \times 20000 = 12129.77$$

ب- المعاش المؤقت:

المؤمن يأخذ التزام بدفع معاش سنوي 1وحدة نقدية لمستفيد في التواريخ $t=1,t=2.....t=n$ إذا بقي المؤمن له على قيد الحياة، المؤمن له يدفع مبلغ a_x (قسط وحيد) في السن x مقابل وفاء المؤمن بهذا الالتزام.

القيمة الحالية المحتملة لهذه الالتزامات تمثل القسط الوحيد الصافي الذي يدفعه المؤمن له في السن x مقابل وفاء المؤمن بالالتزام بدفع معاش سنوي للمؤمن له حتى بلوغه السن x+n :

$$|_n\boldsymbol{a}_x = \sum_{k=1}^{n} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{l_{x+k}}{l_x} \frac{v^{x+k}}{v^x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \sum_{k=1}^{n} {}_kE_x \qquad (3.16)$$

نكتب أيضا:

$$|_n\boldsymbol{a}_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \qquad (3.17)$$

أما إذا كان المعاش بدفع مسبق أي بداية السنة$(t=0,t=1......t=n-1)$ المؤمن له يدفع:

$$|_n\ddot{\boldsymbol{a}}_x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l_{x+k}}{l_x} \frac{v^{x+k}}{v^x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kE_x \qquad (3.18)$$

$$|_n\ddot{\boldsymbol{a}}_x = 1 + |_n\boldsymbol{a}_x - {}_nE_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \qquad (3.19)$$

مثال:

وقع اتفاق بين شركة تأمين ومؤمن له في سن 60 سنة بمقتضاه يتعهد المؤمن بأن يدفع للمؤمن له مبلغ دوري (معاش سنوي) 1000£ خلال مدة محدودة 5سنوات إذا بقي على قيد الحياة وذلك في مقابل أن يقوم المؤمن له بسداد قسط وحيد في تاريخ الاكتتاب. علما أن معدل الفائدة هو 2%.

- أحسب القيمة الحالية المحتملة لهذا الالتزام إذا كان الدفع مسبق(بداية السنة).
- أحسب القيمة الحالية لهذا الالتزام إذا كان الدفع نهاية السنة (دفع عادي).

الحل:

نستخدم الجدول *TF 00-02 à 2%* في الملحق

1 حساب القيمة الحالية المحتملة لهذا الالتزام إذا كان الدفع مسبق

$$\Pi = R \times |5\ddot{a}_{60} = R\sum_{k=0}^{4}\frac{l_{60+k}}{l_{60}}(1+0.02)^{k} = R\sum_{k=0}^{4}\frac{D_{60+k}}{D_{60}} = \mathrm{R}\frac{N_{60}-N_{65}}{D_{60}}$$

تطبيق عددي

$$\Pi = 1000 \times \frac{573903-438684}{28445} = 4753.70$$

2 حساب القيمة الحالية المحتملة لهذا الالتزام إذا كان الدفع عادي.

$$\Pi = R \times |5a_{60} = R\sum_{k=1}^{5}\frac{l_{60+k}}{l_{60}}(1+0.02)^{k} = R\sum_{k=1}^{5}\frac{D_{60+k}}{D_{60}} = \mathrm{R}\frac{N_{61}-N_{66}}{D_{60}}$$

تطبيق عددي

$$\Pi = 1000 \times \frac{545548-413520}{28445} = 4641.52$$

ج- المعاش مدى الحياة:

في هذه الحالة يلتزم المؤمن بدفع معاش سنوي للمستفيد مدى الحياة ، في هذه الحالة نفرض أن n تؤول إلى مالا نهاية

القيمة الحالية المحتملة لمعاش سنوي 1وحدة نقدية هي

$$\boldsymbol{a}_x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kE_x = \frac{N_{x+1}}{\mathrm{D_x}} \qquad (3.20)$$

أما في حالة معاش سنوي لمدى الحياة وبدفع مسبق:

$$\ddot{\boldsymbol{a}}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \sum_{k=0}^{\infty} {}_kE_x = \frac{N_x}{\mathrm{D_x}} \qquad (3.21)$$

<u>مثال:</u>

وقع اتفاق بين شركة تأمين ومؤمن له في سن 60 سنة بمقتضاه يتعهد المؤمن بأن يدفع للمؤمن له مبلغ دوري (معاش سنوي) £1000 مدى الحياة إذا بقي على قيد الحياة وذلك في مقابل أن يقوم المؤمن له بسداد قسط وحيد في تاريخ الاكتتاب. علما أن معدل الفائدة هو 2%.

- أحسب القيمة الحالية المحتملة لهذا الالتزام إذا كان الدفع مسبق(بداية السنة).
- أحسب القيمة الحالية لهذا الالتزام إذا كان الدفع نهاية السنة (دفع عادي).

الحل:

نستخدم الجدول *TF 00-02 à 2%* في الملحق

حساب القيمة الحالية المحتملة لهذا الالتزام إذا كان الدفع مسبق

$$\Pi = R \times \ddot{\boldsymbol{a}}_{60} = R \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_{60+k}}{l_{60}} (1+0.02)^k = R \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_{60+k}}{D_{60}} = \mathrm{R} \frac{N_{60}}{D_{60}}$$

تطبيق عددي

$$\Pi = 1000 \times \frac{573903}{28445} = 20175.88$$

حساب القيمة الحالية المحتملة لهذا الالتزام إذا كان الدفع عادي.

$$\Pi = R \times \boldsymbol{a}_{60} = R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l_{60+k}}{l_{60}} (1+0.02)^k = R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{60+k}}{D_{60}} = \mathrm{R} \frac{N_{61}}{D_{60}}$$

تطبيق عددي

$$\Pi = 1000 \times \frac{545548}{28445} = 19179.05$$

د- المعاش السنوي المؤقت والمؤجل:

في هذه الحالة يتعلق الأمر بمعاش مؤجل m سنة ومؤقت n سنة إذ يلتزم المؤمن بدفع معاش سنوي 1وحدة نقدية بعد مرور m سنة من تاريخ الاكتتاب حيث تدفع أول دفعة في التاريخ t=m+1 وآخر دفعة في t=m+n، القيمة الحالية المحتملة في هذه الحالة هي:

$$m|n\boldsymbol{a}_x = \sum_{k=m+1}^{m+n} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \sum_{k=m+1}^{m+n} kE_x \qquad (3.22)$$

$$m|n\boldsymbol{a}_x = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+n+m+1}}{D_x} \qquad (3.24)$$

في حالة الدفع المسبق تكون أول دفعة في تاريخ t=m وآخر دفعة في تاريخ t=m+n−1 :

$$m|n\ddot{\boldsymbol{a}}_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \sum_{k=m}^{m+n-1} kE_x \qquad (3.25)$$

$$m|n\ddot{\boldsymbol{a}}_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+n+m}}{D_x} \qquad (3.26)$$

مثال: وقع اتفاق بين شركة تأمين ومؤمن له في سن 60 سنة بمقتضاه يتعهد المؤمن بأن يدفع للمؤمن له مبلغ دوري (معاش سنوي) £1000 خلال مدة محدودة 5سنوات إذا بقي على قيد الحياة على أن يبدأ دفع الدفعة الأولى عند بلوغه السن 65 سنة وذلك في مقابل أن يقوم المؤمن له بسداد قسط وحيد في تاريخ الاكتتاب. علما أن معدل الفائدة هو 2%.

- أحسب القيمة الحالية المحتملة لهذا الالتزام إذا كان الدفع مسبق(بداية السنة).
- أحسب القيمة الحالية لهذا الالتزام إذا كان الدفع نهاية السنة (دفع عادي).

الحل:

نستخدم الجدول $TF\ 00-02\ \grave{a}\ 2\%$ في الملحق

حساب القيمة الحالية المحتملة لهذا الالتزام إذا كان الدفع مسبق

$$\Pi = R \times 5|5\ddot{a}_{60} = R\sum_{k=m}^{m+4}\frac{l_{60+k}}{l_{60}}(1+0.02)^{-k} = R\sum_{k=5}^{9}\frac{D_{65+k}}{D_{60}} = \mathrm{R}\frac{N_{65}-N_{70}}{D_{60}}$$

تطبيق عددي

$$\Pi = 1000 \times \frac{438684-319878}{28445} = 4176.69$$

حساب القيمة الحالية المحتملة لهذا الالتزام إذا كان الدفع عادي.

$$\Pi = R \times 5|5a_{60} = R\sum_{k=m+1}^{5+5}\frac{l_{60+k}}{l_{60}}(1+0.02)^{-k} = R\sum_{k=6}^{10}\frac{D_{60+k}}{D_{60}}$$
$$= \mathrm{R}\frac{N_{66}-N_{71}}{D_{60}}$$

تطبيق عددي

$$\Pi = 1000 \times \frac{413520-298123}{28445} = 4056.85$$

هـ المعاش المجزئ

المعاش ليس دائما معاش سنوي ولكن قد يكون شهري أو فصلي ، إذا في حالة المعاش السنوي المجزئ والعادي:

$$|n\boldsymbol{a}_n^{(p)} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{np}\frac{D_{x+k/p}}{D_x} \approx \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{p}-1}{2\mathrm{p}}(1-nE_{\mathrm{x}}) \qquad (3.27)$$

أما في حالة الدفع المسبق:

$$|n\ddot{\boldsymbol{a}}_n^{(p)} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{np-1}\frac{D_{x+k/p}}{D_x} \approx \ddot{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{x}} - \frac{\mathrm{p}-1}{2\mathrm{p}}(1-nE_{\mathrm{x}}) \qquad (3.28)$$

II- 2- الالتزامات في حالة الوفاة

وفقا لهذا النوع من العقود يلتزم المؤمن بأداء مبلغ التأمين للمستفيدين في حالة وفاة المؤمن له في أي وقت اعتبارا من تاريخ التعاقد . الحدث العشوائي في هذه الحالة هو وفاة المؤمن قبل تاريخ معين أو سن معين.

في حالة التزامات الوفاة تواريخ التسديد تعتبر عشوائية لأنها تتحقق عموما بوقتية الوفاة، على عكس حالة الالتزامات البقاء على قيد الحياة حيث أوقات السداد تكون معروفة مسبقا.

سنتناول في هذه النقطة كيفية حساب القيمة الحالية المحتملة التي تمثل قسط التأمين الوحيد الصافي الذي يغطي خطر دفع 1 وحدة نقدية في حالة وفاة المؤمن له قبل بلوغه السن x+n .

نسمي:

$$C_x = d_x v^{x+\frac{1}{2}}; \qquad M_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} C_{x+k}\,; \qquad R_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} M_{x+k}$$

أ - عقد التأمين المؤقت (وقتية الوفاة):

المؤمن يأخذ التزام بدفع رأسمال S مهما كان تاريخ وفاة المؤمن له بين t=0 و t=n للمستفيد.

القسط الوحيد الصافي الذي يدفعه المؤمن له للمؤمن مقابل هذا الالتزام هو:

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_{x+k}}{D_x}\right) S = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} S \qquad (3.28)$$

القيمة الحالية المحتملة للالتزام بدفع 1 وحدة نقدية هي:

$$|nA_x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d_{x+k}}{l_x} v^{k+\frac{1}{2}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \qquad (3.29)$$

مثال:

شخص سنه 70 سنة وقع اتفاق مع شركة تأمين بمقتضاه تتعهد الشركة بأن تدفع مبلغ £300000 لزوجته في حالة وفاته على أن تحدث الوفلة قبل بلوغه سنة 75 سنة بمعدل فائدة 2%.

ماهي القيمة الحالية المحتملة لهذا الالتزام؟.

الحل: نستخدم الجدول *TF 00-02 à 2%* في الملحق

$$\Pi = |nA_xS = S\sum_{k=0}^{n-1}\frac{d_{70+k}}{l_{70}}v^{k+\frac{1}{2}}$$

$$= S(\frac{d_{70}}{l_{70}}v^{\frac{1}{2}} + \frac{d_{71}}{l_{70}}v^{\frac{3}{2}} + \frac{d_{72}}{l_{70}}v^{\frac{5}{2}} + \frac{d_{73}}{l_{70}}v^{\frac{7}{2}} + \frac{d_{74}}{l_{70}}v^{\frac{9}{2}})$$

$$\Pi = S\frac{M_{70} - M_{75}}{D_{70}} = 300000\frac{15637 - 14211}{21755} = 19664.44$$

ب- عقد التأمين لمدى الحياة

وفقا لهذا النوع من العقود يلتزم المؤمن بأن يؤدي مبلغ التأمين في حالة الوفاة في أي سن اعتبارا من تاريخ الاكتتاب

المؤمن يأخذ التزام بدفع المبلغ S مهما كان تاريخ الوفاة

Ax هو التزام بدفع 1 وحدة نقدية في منتصف سنة التأمين:

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_{x+k}}{l_x}v^{k+\frac{1}{2}} = \frac{M_x}{D_x} \qquad (3.30)$$

مثال: تابع المثال السابق، ماهي القيمة الحالية المحتملة إذا لم تحدد مدة العقد؟.

الحل:

$$\Pi = SA_{70} = S\frac{M_{70}}{D_{70}} = 300000\frac{15637}{21755} = 2156331.88$$

ج- الالتزام في حالة الوفاة مع التأجيل

المؤمن يأخذ التزام بدفع 1 وحدة نقدية للمستفيد عند وفاة المؤمن له بين التاريخين t=m و t=m+n

القيمة الحالية المحتملة لوقتية الوفاة n سنة والمؤجل m سنة لـ1وحدة نقدية هي:

$$m|nA_x = \sum_{k=m}^{m+n-1}\frac{d_{x+k}}{l_x}v^{k+\frac{1}{2}} = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x} \qquad (3.31)$$

في حالة عقد مدى الحياة:

$$m|nA_x = \frac{M_{x+m}}{D_x} \qquad (3.32)$$

II- 3- عقد التأمين المختلط:

في عقود التامين في حالة البقاء على قيد الحياة أو حالة الوفاة، هناك دائما مشكل عدم ضمان الاشتراكات المؤكدة كما في حالة عقد رأس المال المؤجل إذا توفي المؤمن له خلال مدة العقد أو في حالة بقاء المؤمن له على قيد الحياة بعد نهاية مدة العقد في حالة عقد التأمين في حالة الوفاة المؤقت (وقتية الوفاة). لهذه الأسباب، يقتر المؤمنون وثائق أخرى من عقود تأمينات الحياة هي عقود التأمين المختلطة.

عقد التأمين المختلط هو عقد يتكون من عقدين:

1- عقد تأمين مدته n سنة ومبلغه 1 وحدة نقدية.

2- عقد وقفية بحتة مدته n سنة ومبلغه 1وحدة نقدية.

ونرمز لها بالرمز: $A_{x:\overline{n}|}$

القيمة الحالية المحتملة للالتزام بعقد تأمين مختلط هي مجموع الالتزامات في حالة الحياة والوفاة.

$$A_{x:\overline{n}|} = |nA_x + nE_x \qquad (3.33)$$

III- حساب الأقساط السنوية المتساوية

رأينا في السابق كيفية حساب القسط الوحيد الصافي لمختلف أنواع الالتزامات سواء في التأمين في حالة الوفاة، في حالة الحياة أو التأمين المختلط، فإذا افترضنا أن المؤمن لهم لا يدفعون قسط وحيد صافي وإنما يدفعون أقساط سنوية أو دورية متساوية حيث يمكن اعتبار الأقساط السنوية تجزئة للقسط الوحيد الصافي ويمكننا حسابها كما يلي:

القيمة الحالية للأقساط السنوية المتوقع سدادها =مبلغ القسط الوحيد

III-1- *حساب الأقساط السنوية في حالة عقد تأمين في حالة الحياة:*

قد تكون الأقساط السنوية طوال مدة العقد وتسمى الأقساط السنوية العادية وقد تكون خلال مدة محددة فقط من العقد وتسمى الأقساط السنوية المحدودة ومن هنا نقول أن:

القسط الوحيد الصافي لعقد تأمين = قيمة القسط السنوي X قيمة مبلغ التأمين في حالة الدفع المسبق لـ1وحدة نقدية لشخص في السن x.

$$\Pi = \mathrm{P} \times \mathrm{n}\ddot{\mathrm{a}}_{\mathrm{x}} \qquad (3.34)$$

1-1 - القسط السنوي الصافي لعقد تامين الوقفية البحتة:

القسط السنوي الصافي لعقد تأمين الوقفية البحتة في حالة التزام المؤمن بدفع 1وحدة نقدية عند بلوغه السن x+n يحسب كما يلي:

$$P = \frac{nE_x}{n\ddot{a}_x} \Leftrightarrow P = \frac{D_{x+n}}{D_x}\frac{D_x}{\sum_{j=0}^{n-1} D_{x+j}} \qquad (3.35)$$

$$P = \frac{D_{x+n}}{\sum_{j=0}^{n-1} D_{x+j}} \qquad (3.36)$$

إذا كانت الأقساط تسدد خلال مدة التامين بالكامل:

$$P = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \qquad (3.37)$$

أما إذا كانت الأقساط تسدد خلال مدة محددة من العقد rسنة تقل عن مدى العقد:

$$P = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+r}} \qquad (3.38)$$

__مثال:__ تعاقد شخص في تمام السن 60 سنة مع إحدى شركات التأمين على أن تلتزم بأن تؤدي له مبلغ 10000 £ في حالة بلوغه تمام السن 75 سنة في مقابل أن يسدد لها أقساط سنوية متساوية، مع معدل فائدة 2%، فما هي قيمة هذه الأقساط إذا كان: – تسديد الأقساط طوال مدة العقد

– تسديد الأقساط خلال مدة 10 سنوات.

__الحل:__ نستخدم الجدول *TF 00−02 à 2%* في الملحق

1 - تسديد الأقساط طوال مدة العقد:

$$P = S\frac{D_{75}}{N_{60} - N_{75}} = 10000\frac{18343}{573993 - 217848} = 515.04$$

2 - تسديد الأقساط خلال مدة 10 سنوات

$$P = S\frac{D_{75}}{N_{60} - N_{70}} = 10000\frac{18343}{573993 - 319878} = 721.84$$

1-2- القسط السنوي الصافي المتساوي لعقود الدفعات لمدى الحياة المؤجلة:

تتمثل هذه العقود في عقد الدفعات السنوية لمدى الحياة المؤجلة العادية والمسبقة، وفي مثل هذه الحالات قد تؤدى الأقساط السنوية طوال مدة التأجيل أو لمدة أقل وذلك طالم ا ظل المتعاقد على قيد الحياة.

أ- في حالة دفعات مدى الحياة المؤجلة العادية:

إذا كان عمر المؤمن له x وفترة التأجيل m سنة فالمؤمن يلتزم بدفع أول معاش في السن x+m+1 وفي المقابل يلتزم المؤمن له بسداد الأقساط السنوية إما خلال مدة التأجيل بالكامل أو خلال مدة r تقل عن مدة التأجيل

إذا كان التقسيط لمدة التأجيل بالكامل:

$$P = \frac{N_{x+m+1}}{D_x}\frac{D_x}{\sum_{j=0}^{m-1} D_{x+j}}$$

$$P = \frac{N_{x+m+1}}{N_x - N_{x+m}} \qquad (3.39)$$

إذا كان التقسيط خلال مدة r من العقد تقل عن مدة التأجيل:

$$P = \frac{N_{x+m+1}}{N_x - N_{x+r}} \qquad (3.40)$$

ب- في حالة الدفع المسبق:

لا تختلف هذه الدفعة عن مثيلتها السابقة إلا من حيث تاريخ تسديد أول معاش حيث تسدد في أول كل سنة بعد انتهاء مدة التأجيل وبالتالي فإن:

$$P = \frac{N_{x+m}}{D_x}\frac{D_x}{\sum_{j=0}^{m-1} D_{x+j}}$$

فإذا كان التقسيط خلال مدة التأجيل بالكامل:

$$P = \frac{N_{x+m+1}}{N_x - N_{x+m}} \qquad (3.41)$$

وإذا كان التقسيط خلال مدة r أقل من مدة التأجيل:

$$P = \frac{N_{x+m}}{N_x - N_{x+r}} \qquad (3.42)$$

1 2 - **القسط السنوي الصافي لعقود الدفعات المؤقتة المؤجلة:**

في هذه العقود يلتزم المؤمن بدفع معاشات سنوية خلال مدة n بعد انقضاء فترة التأجيل m إما عادية أو مسبقة كما يلي:

$$P = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x} \frac{D_x}{\sum_{j=0}^{m-1} D_{x+j}}$$

ففي حالة الدفعات العادية وإذا كان دفع الأقساط خلال مدة التأجيل بالكامل:

$$P = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{N_x - N_{x+m}} \qquad (3.43)$$

وفي حالة الدفعات العادية وكان دفع الأقساط خلال مدة r تقل عن مدة التأجيل :

$$P = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n+1}}{N_x - N_{x+r}} \qquad (3.44)$$

وفي حالة الدفعات المسبقة إذا كان دفع الأقساط السنوية خلال مدة التأجيل بالكامل:

$$P = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{N_x - N_{x+m}} \qquad (3.45)$$

وإذا كان دفع الأقساط خلال مدة r تقل عن مدة التأجيل

$$P = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{N_x - N_{x+r}} \qquad (3.46)$$

مثال: شخص في سن 50 سنة تعاقد مع شركة تأمين على أن تدفع له معاش سنوي 10000 دج إذا بقي على قيد الحياة على أن يبدأ تسديد أول دفعة له بعد أن تنقضي مدة تأجيل 10 سنوات وعلى أن يدفع لها أقساط سنوية متساوية بمعدل فائدة 2%. أحسب قيمة الأقساط السنوية في الحالات التالية:

1- عقد تأمين مدى الحياة دفعة عادية وتسديد الأقساط يكون طوال مدة التأجيل.

2- عقد تأمين مدى الحياة بدفع مسبق وتسديد الأقساط يكون خلال 7 سنوات.

3- عقد تأمين مؤقت 10 سنة بدفع عادي وتسديد الأقساط خلال مدة 5 سنوات.

الحل:

1- عقد تأمين مدى الحياة دفعة عادية وتسديد الأقساط يكون طوال مدة التأجيل.

$$P = S\frac{N_{x+m+1}}{N_x - N_{x+m}} = S\frac{N_{61}}{N_{50} - N_{60}} = 10000\frac{545548}{898423 - 573993} = 16815.58$$

2- عقد تأمين مدى الحياة بدفع مسبق وتسديد الأقساط يكون خلال 7 سنوات.

$$P = S\frac{N_{x+m}}{N_x - N_{x+r}} = S\frac{N_{60}}{N_{50} - N_{57}} = 10000\frac{573993}{898423 - 663549} = 24438.34$$

3- عقد تأمين مؤقت 10 سنة بدفع عادي وتسديد الأقساط خلال مدة 5سنوات

$$P = S\frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{N_x - N_{x+m}} = S\frac{N_{61} - N_{71}}{N_{50} - N_{55}} = 10000\frac{545548 - 298123}{898423 - 726869} = 2996.42$$

III-2 - <u>حساب الأقساط السنوية في حالة الالتزام بعقد تأمين في حالة الوفاة:</u>

يتحدد القسط الصافي بمساواة القيمة الحالية للأقساط بالقسط الوحيد الصافي الذي درسنا كيفية تحديده بافتراض أن مبلغ التأمين 1 وحدة نقدية، وتؤدى الأقساط السنوية إما لمدى الحياة أو لعدد محدود من السنوات طالما المؤمن له على قيد الحياة، فإذا كانت لمدى الحياة فتعتبر دفعة حياة مدى الحياة مسبقة، وأما إن كانت مؤقتة فإنها تعتبر دفعة حياة مسبقة مؤقتة.

2-1- القسط السنوي الصافي لعقد تأمين مدى الحياة

يؤدى هذا القسط في أول كل سنة اعتبارا من تاريخ التعاقد طالما ظل على قيد الحياة

$$P = \frac{M_x}{N_x} \qquad (3.47)$$

يؤدى هذا القسط في أول كل سنة اعتبارا من تاريخ التعاقد ولمدة n من السنوات أو الوفاة أيهما اسبق

$$P = \frac{M_x}{N_x - N_{x+n}} \qquad (3.48)$$

2-2- القسط السنوي الصافي لعقد التأمين مدى الحياة المؤجل:

يؤدى هذا القسط السنوي في أول كل سنة اعتبارا من تاريخ التعاقد طالما ظل المؤمن له على قيد الحياة

$$P = \frac{M_{x+m}}{N_x} \qquad (3.49)$$

يؤدى هذا القسط في أول كل سنة اعتبارا من تاريخ التعاقد ولمدة n من السنوات أو الوفاة أيهما اسبق

$$P = \frac{M_{x+m}}{N_x - N_{x+n}} \qquad (3.50)$$

2-3- القسط السنوي الصافي لعقد التأمين المؤقت:

القسط السنوي الذي يؤدى خلال مدة التأمين بالكامل

$$P = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \qquad (3.51)$$

القسط السنوي الذي يؤدى خلال مدة r تقل عن مدة التأمين

$$P = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+r}} \qquad (3.51)$$

3- **القسط السنوي لعقود التأمين المختلطة:**

إذا كان التقسيط خلال مدة العقد بالكامل

$$P = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \qquad (3.52)$$

إذا كان التقسيط خلال مدة r تقل عن مدة العقد

$$P = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+r}} \qquad (3.53)$$

III- 3- التسعير في التأمين على الحياة

عملية التأمين على الحياة هي التزام المؤمن بدفع دفعة للمستفيد في حالة تحقق الخطر مقابل دفع المؤمن له قسط مالي.

إذا التسعير يرتكز على حساب أقساط صافية وتجارية وتدخل في هذه الحالة التكاليف الكافية التي تسمح للمؤمن بمواجهة مخرجات تسيير وتسويق العقود.

$$\text{القسط التجاري} = \frac{\text{القسط الصافي}}{\text{تكلفة الخطر}} + \frac{\text{التكاليف}}{\text{تكلفة التسيير}}$$

وهناك قيود تتحكم في التسعير هي:

1- قانون العرض والطلب: أي أن التسعيرة تتأثر بالمنافسة مع شركات التأمين الأخرى ويؤدي ذلك إلى خفض التكاليف.

2- القوانين: محددة في تاريخ الاكتتاب أي معالم الحساب المستخدمة إذا المؤمن يستطيع مقابل هذه الالتزامات اقتراح أسعار كافية قادرة على المنافسة.

ونميز نوعان من الأقساط التجارية القسط التجاري الوحيد "π والأقساط التجارية السنوية "P

1- تعريف القسط التجاري:

هو مجموع القسط الصافي زائد التكاليف التجارية وتكاليف التسيير وتتمثل هذه التكليف في تكاليف التسويق، تكاليف تسيير العقد، وتكاليف التسيير المالي، وتكاليف عامة.

إذا نصنف هذه التكاليف إلى:

1- تكاليف ثابتة f وهي تكاليف الشراء

2- تكاليف متغيرة α ‘‘ π وهي تكاليف التحصيل.

3- تكاليف التسيير السنوية: النسبة g1 من أجل تسيير الأقساط.

النسبة g2 من أجل تسيير التكاليف السنوية الأخرى .

أ- **حالة القسط التجاري الوحيد:**

في هذه الحالة لا توجد أقساط سنوية مرتبطة بحياة المؤمن له:

القسط الوحيد التجاري = القسط الوحيد الصافي+ تكاليف الشراء+ تكاليف التحصيل (طالما تدفع أقساط) + المصاريف التسيير الأخرى + رسوم تسوية العقد

$$\Pi'' = \Pi + f + \alpha\Pi'' + g_2\ddot{a}_G + r\Pi \qquad (3.54)$$

$$\Pi'' = \frac{\Pi(1+r) + f + g_2\ddot{a}_g}{(1-\alpha)} \qquad (3.55)$$

ب- **في حالة القسط التجاري السنوي:**

لدينا: $\Pi = \mathrm{P}\ddot{a}_H$

والقسط السنوي التجاري= القسط الصافي السنوي+ تكاليف الشراء+ تكاليف التحصيل+ تكاليف تسيير العقد+ تكاليف أخرى+ رسوم تسوية العقد.

$$P''.\ddot{a}_H = P\ddot{a}_H + f + \alpha P''\ddot{a}_H + g_1\ddot{a}_H + g_2\ddot{a}_H + rP\ddot{a}_H$$

$$P'' = \frac{P(1+r) + g_1 + g_2\dfrac{\ddot{a}_G}{\ddot{a}_H} + \dfrac{f}{\ddot{a}_H}}{(1-\alpha)} \qquad (3.56)$$

IV- الاحتياطات الرياضية:

عند التعاقد بين مؤسسة تأمينات وأحد عملائها فإن مبدأ المعادلة الفردية ينص على وجوب معادلة القيمة الحالية للمستحقات (الخدمة المقدمة من المؤسسة) مع القيمة الحالية للمدفوعات (الأقساط التي يقدمها العميل للشركة)، ونفقد هذه العلاقة مباشرة مع دخول التأمين حيز التنفيذ . عندئذ لا يوجد تعادل بين الأقساط السنوية والخطورة السنوية، في هذه الحالة واعتبارا لهذا الفارق الذي يفصل بين المؤمن والمؤمن له فإن المؤمن مطالب بتكوين احتياطي رياضي يسمى أيضا "كفالة التغطية"، ويسعى المؤمن إلى تنفيذ جميع التزاماته المستقبلية، وتوجد شروط في شركات التأمين تتعلق باستثمار الاحتياطي الرياضي مما يجعل هذه الاستثمارات وسيلة لضمان الملائمة (القدرة على الوفاء بالالتزامات).

IV- 1- تعريف الاحتياطات الرياضية:

الاحتياطات الرياضية provisions mathématiques تمثل الدين المحتمل للمؤمن مقابل المؤمن له حيث يكون في تاريخ الاكتتاب توازن بين التزامات المؤمن والمؤمن له وبعد الاكتتاب يصبح للمؤمن دين محتمل مقابل المؤمن له أكبر من الأقساط. يسجل إذا في الخصوم بالميزانية مبلغ إجمالي يمثل هذا الدين الصافي وهذا ما يسمى **الاحتياطي الرياضي**.

مثال: لما يدفع المؤمن له القسط، يسجل اختلال في الميزانية : يصبح التزام **المؤمن له** في المدة المتبقية للعقد اقل من التزام **المؤمن** خلال كل فترة العقد.

مما سبق يمكن أن نقول أن الاحتياطي الرياضي هو الفرق بين القيم الحالية المحتملة لالتزامات المؤمن زائد التكاليف من جهة، ومن جهة أخرى القيمة الحالية المحتملة لالتزامات المؤمن لهم.

خصائص الأرصدة الرياضية:

-فردي - يحسب عقد بعقد - لا يكون سالب - لا يكون أقل من قيمة شراء العقد - بالنسبة لعقود الأقساط الدورية هناك تكاليف مخصصة لمصاريف الاكتساب في الالتزام تدفع كأقساط على طريقة Zillmer (zillmérisée)

مبدأ الحذر: الاحتياطات الرياضية تحسب بمعدلات فائدة قريبة جدا من المعدلات الموظفة في التسعير.

1 - حساب الاحتياطي الرياضي للأقساط التجارية في حالة عقد تأمين مختلط :

معطيات العقد: رأسمال مؤجل بدون إعادة التامين

الدفع المسبق للأقساط السنوية : المؤمن يأخذ التزام بالدفع في $t = n\ (n \geq p)$ رأسمال إذا بقي المؤمن له على قيد الحياة.

إذا توفي المؤمن له ما بين $t = 0$ و $t = n$ نفس رأس المال يدفع للمستفيد في تاريخ الوفاة.

نفرض أن المؤمن له يدفع كل سنة المبالغ التالية:

- $\theta P''$ كسندات تكاليف.

إذا من أجل حساب التسعيرة نأخذ بعين الأعتبار تاريخ الاكتتاب $t = 0$.

من أجل حساب الاحتياطي الرياضي نأخذ تاريخ $t = k$ من حياة العقد

$$PM(k) = VAP^{assureur}(k) - VAP^{assuré}(k) \qquad (3.57)$$

إذا لدينا:

$$VAP^{assureur}(0) = VAP^{assuré}(0)$$

$$P = \frac{1}{|p\ddot{a}_x}(nE_x + |nA_x)C$$

$$P'' = \frac{1}{(1-\theta)|p\ddot{a}_x}(nE_x + |nA_x + |p\ddot{a}_x g_1 + |n\ddot{a}_x g_2)C$$

نعوض $t = 0$ بالزمن $t = k$

من جهة المؤمن له:

$t=k$	P''
$t=k+1$ . . .	$\frac{l_{x+k+1}}{l_{lx+k}} v^1 P'' = \frac{D_{x+k+1}}{D_{x+k}} P''$
$t=p-1$	$\frac{l_{x+p-1}}{l_{lx+k}} v^{p-1-k} P'' = \frac{D_{x+p-1}}{D_{x+k}} P''$

القيمة الحالية المحتملة لالتزامات المؤمن له في k<p:

$$\mathrm{VAP}^{\mathrm{assuré}}(k) = P'' + \frac{D_{x+k+1}}{D_{x+k}}\mathrm{P''} + \cdots + \frac{D_{x+p-1}}{D_{x+k}}P''$$
$$= \frac{D_{x+k} + D_{x+k+1} + \cdots + D_{x+p-1}}{D_{x+k}}P'' = \frac{\mathrm{N_{x+k}} - \mathrm{N_{x+k+(p-k)}}}{\mathrm{D_{x+k}}}P''$$

$$\mathrm{VAP}^{\mathrm{assuré}}(k) = |p-k\ddot{a}_{x+k}P''$$

لما يكون k>p لا يبقى للمؤمن له أي التزامات.

من جهة المؤمن:

في حالة البقاء على قيد الحياة: $n-kE_{x+k}C$

في حالة الوفاة: $|n-kA_{x+k}C$

	$Si\ k<p$	$Si\ k\geq p$
لمواجهة التكاليف التجارية	$\|p-k\ddot{a}_{x+k}\theta P''$	0
لمواجهة تكاليف التسيير المرتبطة بدفع الأقساط	$\|p-k\ddot{a}_{x+k}g_1C$	0
لمواجهة تكاليف التسيير المرتبطة بمدة العقد	$\|n-k\ddot{a}_{x+k}g_2C$	$\|n-k\ddot{a}_{x+k}g_2C$

القيمة الحالية المحتملة لالتزامات المؤمن في t=k:

$$\mathrm{VAP}^{assureur}(k)=n-kE_{x+k}C+|n-kA_{x+k}C+|n-k\ddot{a}_{x+k}g_2C+\underbrace{|p-k\ddot{a}_{x+k}g_1C+|p-k\ddot{a}_{x+k}\theta P''}_{=0\ \mathrm{si}\ k\geq p}$$

حساب الاحتياطي الرياضي:

$$\boldsymbol{PM(k)=VAP^{assureur}(k)-VAP^{assuré}(k)}\qquad(3.58)$$

k<p	$PM(k)=n-kE_{x+k}C+\|n-kA_{x+k}C+\|n-k\ddot{a}_{x+k}g_2C+\|p-k\ddot{a}_{x+k}g_1C+\|p-k\ddot{a}_{x+k}\theta P''-\|p-k\ddot{a}_{x+k}P''$ $PM(k)=n-kE_{x+k}C+\|n-kA_{x+k}C+\|n-k\ddot{a}_{x+k}g_2C+\|p-k\ddot{a}_{x+k}g_1C-\|p-k\ddot{a}_{x+k}(1-\theta)P''$
$k\geq p$	$PM(k)=n-kE_{x+k}C+\|n-kA_{x+k}C+\|n-k\ddot{a}_{x+k}g_2C$

IV- 2- التقييم على طريقة Zillmer (zillmérisée)

عقود الأقساط الدورية يمكن أن تحسب من خلال تكاليف الدفعات المستقبلية مثلا المؤمن يلتزم بدفع كل شهر قسط 1000دج، 4% تؤخذ من طرف المؤمن كتكاليف و96% أقساط مسددة فعليا بمقتضى العقد.

التقييم بطريقة Zillmer للاحتياطي الرياضي يرتكز إذن على عدم الأخذ بعين الاعتبار التكاليف

$\mathbf{(\theta - \alpha)}\boldsymbol{P}"$ في القيم الحالية المحتملة للالتزامات المؤمن.

التقييم بطريقة Zillmer يسمح إذن بتخفيض كبير في قيمة الاحتياطي الرياضي:

لما يكون: $k<p$

$$PM(k) = (n - kE_{x+k} + |n - kA_{x+k} + |n - k\ddot{a}_{x+k} g_2 + |p - k\ddot{a}_{x+k} g_1)C \\ - |p - k\ddot{a}_{x+k}(1 - \theta)P"$$

نضع:

$$X = (n - kE_{x+k} + |n - kA_{x+k} + |n - k\ddot{a}_{x+k} g_2 + |p - k\ddot{a}_{x+k} g_1)C - |p - k\ddot{a}_{x+k} P"$$

فيصبح الاحتياطي الرياضي على الشكل:

$$PM(k) = X + |p - k\ddot{a}_{x+k}(\propto +(\theta - \propto)P"$$

$$PM(k) = X + |p - k\ddot{a}_{x+k} \propto P" + (\theta - \propto)|p - k\ddot{a}_{x+k} P"$$

الاحتياطي الرياضي على طريقة Zillmer (Zillmérisée)

$$PM^z(k) = X + |p - k\ddot{a}_{x+k} \propto P" \\ = (n - kE_{x+k} + |n - kA_{x+k} + |n - k\ddot{a}_{x+k} g_2 + |p - k\ddot{a}_{x+k} g_1)C \\ - |p - k\ddot{a}_{x+k} P" + |p - k\ddot{a}_{x+k} \propto P"$$

$$PM^z(k) = (n - kE_{x+k} + |n - kA_{x+k} + |n - k\ddot{a}_{x+k} g_2 + |p - k\ddot{a}_{x+k} g_1)C \\ - |p - k\ddot{a}_{x+k}(1 - \propto)P" \quad (3.59)$$

مجموعة تمارين حول الفصل الثالث:

التمرين الأول:

نفرض أن احتمال أن يبقى شخص في سن 60 على قيد الحياة في سن 63 وسن 65 هو على الترتيب 0.932 و 0.879.

1 - ماهو احتمال أن يبقى شخص في عمر 63 على قيد الحياة في عمر 65؟

ماهو احتمال أن يتوفى شخص في عمر 60 قبل سن 63سنة؟

التمرين الثاني: أكمل الجدول التالي:

السن x	lx	dx	Px	qx
0	1000	100	-	-
1	-	-	-	-
2	750	-	0.8	-
3	-	-	-	-
4	300	-	-	0.6
5	-	-	-	-
6	0	-	-	-

التمرين الثالث:

لدينا احتمال الحياة في الجزائر سنة 1987 حيث $P_0=0.938$

$_{14}P_1=0.97025$ $\quad$ $_{20}P_{15}=0.96649$

$_5P_{35}=0.98499$ $\quad$ $_{10}P_{40}=0.9663$

1 - أحسب ل10000 ولادة حية الوفيات قبل 15 سنة، مابين 15و35سنة ومابين 35 و50سنة.

يحتفل ثلاث أصدقاء في نفس اليوم بعيد ميلادهم 40 ، ماهو احتمال أن يصلوا إلى عيد ميلادهم 50سنة.

التمرين الرابع:

قام شخص في تمام السن 40 بالتعاقد مع شركة تأمين على أداء مبلغ معين إذا ما ظل على قيد الحياة حتى سن 50 وذلك مقابل 511336 دج سددت للشركة بمجرد التعاقد كقسط وحيد صافى، فما هو مبلغ التأمين علما أن معدل الفائدة هو 2%؟

التمرين الخامس:

وقع اتفاق بين شركة تأمين و مؤمن له سنه 50 سنة بمقتضاه يتعهد المؤمن بأن يدفع للمؤمن له دفعة دورية 10000دج (معاش سنوي) خلال مدة محدودة 10 سنوات على أن يبدأ دفع الدفعة الأولى في هذا السن ويستمر دفعها إلى سن 60سنة على أن يبقى المؤمن له على قيد الحياة، وذلك في مقابل أن يقوم

المؤمن له بسداد قسط وحيد أي دفعة واحدة عند التعاقد وقبل أن يستحق دفع الدفعة الأولى مع معدل فائدة 3.5%.

1- أحسب القيمة الحالية المحتملة لهذا الالتزام (القسط الوحيد الصافي) إذا علمت أن الدفع في بداية السنة.

2- أحسب القيمة المحتملة لهذا الالتزام إذا علمت أن الدفع في نهاية السنة.

التمرين السادس:

وقع عقد بمقتضاه تدفع شركة تأمين مبلغ 250000 دج عند وفاة شخص مؤمن له في سن 60سنة لابنه بشرط أن تحدث الوفاة خلال 10 سنوات مدة التأمين.

1-أحسب القيمة الحالية المحتملة لهذا الالتزام إذا علمت أن معدل الفائدة 3.5%.

2- ماهي القيمة الحالية المحتملة إذا لم تحدد فترة التأمين؟

التمرين السابع:

شركة تأمين تأخذ التزام بدفع مبلغ سنوي 20000دج لشخص في سن 40 سنة إذا بقي على قيد الحياة حتى سن 65 سنة على أن يبدأ دفع الدفعة الأولى بعد 20 سنة من تاريخ الاكتتاب.

إذا علمت أن معدل الفائدة 3% فما هي قيمة قسط التأمين؟

التمرين الثامن:

تعاقد شخص في تمام السن 30 مع إحدى شركات، التأمين على أن تؤدى له مبلغا معينا في حالة بلوغه تمام السن 60 فإذا توفى قبل ذلك فإنها تؤدى ضعف المبلغ إلى المستفيدين المحددين بالعقد.

فإذا كان القسط الوحيد الصافي لهذا العقد هو 613770 دج فما هو مبلغ التأمين الذي يؤدى في كل من حالة الحياة وحالة الوفاة إذا كان معدا الفائدة 3.5%.

تمارين حول الأقساط السنوية:

التمرين التاسع:

أحسب القسط السنوي لعقد تأمين في حالة الحياة مبلغه 10000 لشخص عمره 40 ومدته 23 سنة بمعدل فائدة 4.5 % وذلك في الحالات الآتية:

أ -إذا كانت الأقساط تسدد خلال مدة التأمين بالكامل.

و -إذا كانت الأقساط تسدد خلال العشر سنوات الأولى فقط من مدة التأمين.

التمرين العاشر:

ما هو القسط السنوي الصافي لعقد تأمين مؤقت لمدة 20 سنة لشخص عمرة في تاريخ التعاقد 45 سنة، إذا كان مبلغ المعاش السنوي 18000 ألف دينار وتاريخ أول دفعة عند بلوغه تمام 60سنة بمعدل فائدة 4.5% وذلك في حالتي سداد الأقساط خلال مدة التأجيل بالكامل وسداد الأقساط خلال العشر سنوات الأولي من التأجيل.

التمرين الحادي عشر:

ما هو القسط السنوي الصافي لعقد تأمين مختلط لشخص عمره في تاريخ التعاقد 40 سنة لمدة 25 سنة في حالتي سداد الأقساط خلال العشر سنوات الأولي من المدة مع معدل فائدة 4.5% وذلك:

أ -إذا كان مبلغ التأمين في حالة الوفاة أو الحياة 6000 دينار.

ب-إذا كان مبلغ التأمين في حالة الوفاة 6000 دينار وفي حالة الحياة 9000 دينار.

المراجع:

1) سامي نجيب، التأمين ورياضياته، الطبعة الرابعة، دار التأمينات، القاهرة، 2007.
2) شريف محمد الغمري، محمد محمد عطا، الأصول العلمية والعملية للخطر والتأمين، الطبعة الأولى، السعودية، 2012.
3) Emmanuelle Scheid, théorie de l’assurance-vie, coures destiner au 2 actuariat, université Dauphine, paris
4) Pierre Petauton, Théorie et pratique de l’assurance vie, 4eme édition, DUNOD, Paris, 2012.
5) Saliou Bakayoko, fonctionnement technique et actuariat de l’assurance vie et capitalisation, séminaire conjoint FANAF/IIA, Bamaco, 26-30 novembre 2007, p11.
6) Walder Masiéri , Mathématiques financières, édition DALLOZ, Paris , 2001,P62

الملحق: جدول الاستبدالات: (TF 00-02 à 2 %) table de COMMUTATIONS

TF 00-02 à 2 %

			COMMUTATIONS EN CAS DE VIE			COMMUTATIONS EN CAS DE DECES		
Age	l_x	d_x	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x
50	96 546	242	35 870	898 423	15 203 708	89	18 435	606 284
51	96 304	255	35 078	862 553	14 305 286	92	18 346	587 849
52	96 049	271	34 299	827 475	13 442 733	96	18 254	569 503
53	95 778	289	33 532	793 176	12 615 257	100	18 158	551 249
54	95 489	309	32 775	759 644	11 822 082	105	18 058	533 091
55	95 180	329	32 028	726 869	11 062 438	110	17 953	515 033
56	94 851	350	31 292	694 840	10 335 569	114	17 843	497 080
57	94 501	370	30 565	663 549	9 640 728	118	17 729	479 236
58	94 131	390	29 849	632 983	8 977 180	122	17 611	461 507
59	93 741	412	29 142	603 135	8 344 196	127	17 488	443 897
60	93 329	437	28 445	573 993	7 741 061	132	17 361	426 409
61	92 892	467	27 757	545 548	7 167 068	138	17 229	409 047
62	92 425	502	27 076	517 791	6 621 521	146	17 091	391 818
63	91 923	541	26 401	490 716	6 103 729	154	16 946	374 727
64	91 382	585	25 731	464 315	5 613 014	163	16 792	357 781
65	90 797	633	25 065	438 584	5 148 699	173	16 629	340 989
66	90 164	688	24 402	413 520	4 710 115	184	16 456	324 360
67	89 476	750	23 741	389 118	4 296 595	197	16 271	307 905
68	88 726	819	23 080	365 377	3 907 477	211	16 074	291 633
69	87 907	897	22 419	342 297	3 542 100	227	15 863	275 559
70	87 010	986	21 755	319 878	3 199 803	244	15 637	259 696
71	86 024	1 083	21 087	298 123	2 879 924	263	15 393	244 059
72	84 941	1 190	20 413	277 037	2 581 801	283	15 130	228 666
73	83 751	1 309	19 732	256 624	2 304 764	305	14 847	213 536
74	82 442	1 444	19 043	236 892	2 048 141	330	14 541	198 689
75	80 998	1 596	18 343	217 848	1 811 249	358	14 211	184 148
76	79 402	1 769	17 629	199 506	1 593 401	389	13 853	169 937