الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جـامـعة أمحمد بوقرة بومـرداس
كلية العلوم الاقتصادية ، التجارية
و علوم التسيير

Ministère de l'enseignement supérieur
Et de la recherche scientifique

Université M'Hamed BOUGARA de Boumerdès
Faculté Des Sciences Economiques , Commerciales
Etdes Sciences De Gestion

مطبوعة بيداغوجيةتحت عنوان:

محاضـرات
فـي الرياضيات المالية مع تمارين

موجهة لطلبة: -السنة الثانية LMD **تخصص**: كل التخصصات

من اعداد الدكتور: خنفري خيضر .قسـم :علوم التسيير

السنة الجامعية :2017/2016

الفهرس

العنوان	الصفحة
المقدمة	أ
الدرس الأول :عموميات حول الرياضيات	01
أولا: المعادلات	01
ثانيا: الأسس و الجذور	05
ثالثا :المتتالية العددية	08
رابعا: المتتالية الحسابية	13
خامسا: المتتاليات الهندسية	17
سادسا: دالة اللوغاريتم النيبري	20
سابعا: دالة اللوغاريتم العشري	22
الدرس الثاني : الفائدة البسيطة	26
أولا: مفهوم الفائدة	26
ثانيا: أنواع الفائدة	27
ثالثا: القوانين الأساسية للفائدة البسيطة	28
رابعا: العلاقة بين الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة	34
خامسا: حساب الفائدة البسيطة باستخدام طريقة النمر والقاسم	36
سادسا: حساب الجملة	37
سابعا: تمارين حول الفائدة البسيطة	41
الدرس الثالث : الدفعات المتساوية بفائدة بسيطة	43
أولا: تعريف الدفعات	43
ثانيا: أنواع الدفعات	43
ثالثا: حساب فوائد الدفعات المتساوية	44
رابعا: إيجاد جملة الدفعات المتساوية	46
خامسا: تمارين حول الدفعات المتساوية بفائدة بسيطة	48
الدرس الرابع: الرسملة والتحيين	50
أولا: القيمة المستقبلية	50
ثانيا: القيمة الحالية	51
ثالثا: رسملة وتحيين التدفقات المتعددة	52
رابعا: الحالات الخاصة بالتدفقات المتعددة	53
خامسا: القيمة المكتسبة من رأس المال	55
الدرس الخامس: خصم الديون والأوراق التجارية	57

الفهرس

ثانيا: طرق خصم الديون	58
ثالثا: الخصم العقلاني	58
رابعا: الخصم التجاري	60
خامسا: العلاقة بين الخصم العقلاني والخصم التجاري	62
سادسا: المعدل الإسمي و المعدل الحقيقي للخصم	63
الدرس السادس: تسوية الديون وتكافؤ الوراق التجارية	66
أولا :تسوية الديون	66
ثانيا: طرق تسوية الديون وتكافؤ الأوراق التجارية	67
ثالثا: الاستحقاق المشترك	70
رابعا: الاستحقاق المتوسط	72
خامسا: تمارين حول تسوية الديون وتكافؤ الوراق التجارية	75
الدرس السابع: الفائدة المركبة	77
أولا: الفائدة المركبة	77
ثانيا: قانون الفائدة المركبة	78
ثالثا: استنتاجات من قانون الفائدة المركبة	80
رابعا: المعدلات المتناسبة	82
خامسا: المعدلات المتكافئة	83
سادسا: الخصم والتكافؤ باستخدام الفوائد المركبة	86
سابعا: تمارين حول الفائدة المركبة	87
الدرس السابع: الدفعات المتساوية بفائدة مركبة	89
أولا: الدفعات لآخر مدة (الدفعات التسديد)	89
ثانيا: حساب جملة الدفعات التسديد (لأخر مدة)	90
ثالثا: القيمة الحالية لدفعات التسديد(لأخر مدة)	93
رابعا: العلاقة بين الجملة والقيمة الحالية	95
خامسا: تقييم متتالية الدفعات في زمن ما	97
سادسا: الدفعات لأول مدة (دفعات التوظيف)	99
سابعا: جملة الدفعات لأول مدة (دفعات التوظيف)	99
ثامنا: القيمة الحالية لدفعات التوظيف (لأول مدة)	100
تاسعا: العلاقة بيف دفعات التسديد ودفعات التوظيف	101
عاشرا: تمارين حول الدفعات المتساوية بفائدة مركبة	102
الدرس التاسع: استهلاك القروض	104

الفهرس

أولا: تعريف القروض	104
ثانيا: أنواع القروض	104
ثالثا: جدول استهلاك القروض	105
رابعا: الطرق الكلاسيكية لتسديد القروض	106
خامسا: العلاقة بين أصل القرض والاستهلاكات	107
سادسا: العلاقة بين الدفعة والاستهلاكات	108
سابعا: العلاقة بين الفوائد والاستهلاكات	109
ثامنا: تمارين حول استهلاك القروض	110
الدرس العاشر: تقييم الاستثمارات (المشاريع)	112
أولا: مفهوم التدفقات النقدية/ جدول تدفقات الخزينة	112
ثانيا: أنواع التدفقات	112
ثالثا: معايير تقييم واختيار المشاريع	114
رابعا: فترة استرداد رأس المال	114
خامسا: القيمة الحالية الصافية	115
سادسا: قدرة التمويل الذاتي	115
سابعا: معدل العائد الداخلي	116
ثامنا: مؤشر الربحية	117
تاسعا: طريقة العائد الإجمالي	118
الدرس الحادي عشر: اختيار المشاريع	117
أولا: المشاريع الاستثمارية أو عدم اليقين	119
ثانيا: مشروع استثمار مجهول المستقبل	120
ثالثا: جدول يلخص جميع المعايير لتقييم واختيار المشاريع	121
رابعا: تمارين حول اختيار وتقييم الاستثمارات	122
قائمة المراجع	

الدرس الأول: عموميات حول الرياضيات

المعادلات

المعادلة: عبارة عن مقدارين متساويين ويوجد في أحد طرفي المعادلة أو كلتا جهاتها رمز يعبر عن قيمة مجهولة.

أنواع المعادلة:

يمكن تقسيم المعادلات إلى عدة مستويات، وتعتمد هذه المستويات على عدد من المجاهيل وعلى درجة الأسس، وكلما ارتفعت مستويات المعادلة زاد حلها تعقيدا، ومن بين أنواع المعادلات نذكر منها:

-المعادلات من الدرجة الأولى.

- المعادلات من الدرجة الثانية أو أكثر.

أولا: المعادلات من الدرجة الأولى: وهي معادلات ذات مجهول واحد حيث تكون على الشكل التالي:

$$ax + b = 0$$

حيث a، و b عددين حقيقيين قيمتهما معروفة و حد مجهول في المعادلة وبالتالي فإن:

$$x = \frac{-b}{a}$$

وقبل التطرق إلى المعادلات من الدرجة الثانية يجب الأخذ بعين الاعتبار العناصر الأساسية التالية:

-إذا غيرت أي مقدار من مقادير المعادلة من الطرف الأيسر إلى الطرف الأيمن أو بالعكس يجب أن نعكس إشارته من (−) إلى (+) أو العكس.

-إذا أضفت أو طرحت أي مقدار إلى طرفا المعادلة سيبقى طرفا المعادلة متساويين.

-إذا ضربت أو قسمت طرفا المعادلة في مقدار ثابت سيبقى طرفا المعادلة متساويين.

-إذا جذرا طرفا المعادلة سيبقى طرفا المعادلة متساويين.

- إذا رفع طرفا المعادلة إلى نفس الأس يبقى الطرفان متساويين.

-إذا قسمت أو ضربت البسط والمقام بنفس القيمة لا تؤثر في موازنة المعادلة[1] .

ثانيا: المعادلات من الدرجة الثانية ذات مجهولين أو أكثر

لحل مثل هذه المعادلات يجب توافر معادلات بنفس عدد المجاهيل ويمكن حل مثل هذه المعادلات بأحد الطرق التالية[2] :

الطريقة الأولى: وهو إيجاد قيمة مجهول من المجاهيل بواسطة المجهول الأخر ثم التعويض عن هذه القيمة بالمعادلة الأخرى ويتم ذلك على النحو التالي[3] :

مثال: لتكن لدينا المعادلتين التاليتين.

المعادلة (1):

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 156 \\ x - y = 310 \end{cases}$$

من المعادلة الأولى نجد:

أن: $\boldsymbol{x = 156y}$

ثم نعوض قيمة x في المعادلة الثانية فتصبح

لدينا:

$$\boldsymbol{156y - y = 310}$$

أي:

$$\boldsymbol{155y = 310}$$

[1]غازي فلاح المومني، الرياضيات المالية المعاصرة، دار المناهج للنشر، الطبعة الأولى، عمان، الأردن، 2006، ص ص 16-17

[2]شقيري نودي موسى، وليد أحمد الصافين محمود إبراهيم نور، الرياضيات المالية، دار المسير للنسر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان- الأردن، 2009، ص 22.

[3]غازي فلاح المومني، مرجع سبق ذكره، ص 19.

ومنه:

$$y = \frac{310}{155}$$

$$y = 2$$

ثم نعوض قيمة y في أي من المعادلتين فيصبح:

لدينا:

$$\frac{x}{y} = 156$$

أي:

$$x = 156 \times 2$$

$$x = 312$$

الطريقة الثانية: بواسطة طرح أو جمع المعادلة الأولى إلى الثانية أو العكس وبحيث يمكن التخلص من أحد المجهولين، فإذا نظرنا إلى المعادلة المذكورة يمكن أن نجدها على النحو التالي:[1]

مثال: أوجد قيمة و في المعادلتين التاليتين:

المعادلة الأولى:

المعادلة الثانية:

$$\begin{cases} 8x + 4y = 256 \\ 6x - y = 384 \end{cases}$$

لنأخذ المعادلة الثانية ونضرب طرفيها في العدد (-4) فتصبح لدينا:

$$-4(6x + y) = -4(384)$$

أي:

$$-24x - 4y = -1536$$

ثم نأخذ المعادلتين معا ونجمعهما:

$$\begin{cases} 8x + 4y = 256 \\ -24x - 4y = -1536 \end{cases}$$

[1]– غازي فلاح المومني، مرجع سبق ذكره، ص 20.

فنصبح لدينا:

$$-16x = -1280$$

$$x = 80$$

ثم نعوض قيمة x في أحد المعادلتين:

$$8(80) + 4y = 256$$

$$640 + 4y = 256$$

ومنه:

$$y = -96$$

المعادلات من الدرجة الثانية:

المعادلة من الدرجة الثانية، ذات المجهولx ، هي كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

حيث b وc أعداد حقيقية مع $a \neq 0$

برهان:

$ax^2 + bx + c = 0$ (مع$a \neq 0$) معادلة من الدرجة الثانية، مميزهاΔ بحيث:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- إذا كان$\Delta < 0$ فإن المعادلة لا تقبل حلولا ولا يمكن تحليل ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$
- إذا كان$\Delta = 0$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو:$-\frac{b}{2a}$
- ويكون من أجل كل عدد حقيقيx، $ax^2 + bx + c = a\left\{x + \frac{b}{2a}\right\}^2$
- إذا كان$\Delta > 0$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين X_1 ، X_2 بحيث:

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ويكون من أجل كل عدد حقيقيx، $ax^2 + bx + c = a(X - X_1)(X - X_2)$

إشارة:

عندما يكون المعاملات a و c من إشارتين مختلفين (بدون حساب المميز) فإن المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ (مع $a \neq 0$) وبدون حساب المميز، فإنها تقبل حلين مختلفين.

في هذه الحالة، يكون العدد c سالبا تماما وبالتالي يكون (ac)- موجبا تماما و نستنتج أن:

$\Delta = b^2 - 4ac$ موجب تماما.[1]

الأسس والجذور

1)- نظرية الأسس:

ويعبر عنها رياضيا بالأسس أو قوى الأعداد أي من الشكل (X^n) وهذا يعني أن العدد مهم في نفسه "n" من المرات.[2]

قوانين الأسس:

القانون الأول: الأسس عند الضرب تجمع.

$$X^{y+w+z} = X^y . X^w . X^z$$

$$X^{n+n+1+n+2} = X^n . X^{n+1} . X^{n+2}$$

القانون الثاني: الأسس عند القسمة تطرح فمثلا.

---

[1]- رابح بناني وأخرون، الرياضيات، الديوان الوطني للمطبوعات الجزائرية O.N.P.S، طبعة 2009، الجزائر، ص ص 120- 121.

[2]- غازي فلاح المومني، الرياضيات المالية المعاصرة، مرجع سبق ذكره، ص 20.

❖ إذا كان$0 <\Delta$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين X_1 ، X_2 بحيث:

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ويكون من أجل كل عدد حقيقيx،$ax^2 + bx + c = a(X - X_1)(X - X_2)$

إشارة:

عندما يكون المعاملات a وc من إشارتين مختلفين (بدون حساب المميز) فإن المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ (مع$a \neq 0$) وبدون حساب المميز، فإنها تقبل حلين مختلفين.

في هذه الحالة، يكون العددc سالبا تماما وبالتالي يكون (ac)− موجبا تماما و نستنتج أن:

$\Delta = b^2 - 4ac$ موجب تماما.[1]

الأسس والجذور

1)- نظرية الأسس:

ويعبر عنها رياضيا بالأسس أو قوى الأعداد أي من الشكل (X^n) وهذا يعني أن العدد مهم في نفسه "n" من المرات.[2]

قوانين الأسس:

القانون الأول: الأسس عند الضرب تجمع.

$$X^{y+w+z} = X^y . X^w . X^z$$

$$X^{n+n+1+n+2} = X^n . X^{n+1} . X^{n+2}$$

القانون الثاني: الأسس عند القسمة تطرح فمثلا.

$$\frac{X^n}{X^y} = X^{n-y}$$

---

[1]- رابح بناني وأخرون، الرياضيات، مرجع سبق ذكره، ص ص 120- 121.

[2]- غازي فلاح المومني، الرياضيات المالية المعاصرة، مرجع سبق ذكره، ص 20.

$$\frac{X^n}{X^{n-1}} = X^{n-(n-1)} = X^1 = X$$

القانون الثالث: إذا كان هناك عدد مرفوع لقوة (أس) ما ونفس العدد والأس مرفوعين لقوة (أس) أخر، فإن هذا العدد يكون مرفوع لحاصل ضرب الأسين معا، فمثلا:

$$(X^n)^y = X^{n-y}$$

القانون الرابع: إذا كان لدينا عدد مرفوع لقوة (أس) ما وكان هذا العدد تحت الجذر فإننا نقسم أس العدد على دليل الجذر ليكون الناتج هو قيمة العدد.[1]

$$\sqrt[y]{X^n} = X^{\frac{n}{y}}$$

الجذور:

يمكن التعبير عن ناتج العوامل المتساوية في صورة أسية مثل $(a^4 = a.a.a.a)$ ويطلق على أحد العوامل المتساوية لمقدار ما بجذر المقدار، وهكذا فلو أن $(a^4 = b)$ فإن الأساسa هو الجذر الرابع لb .

ويرمز عادة للجذور بعلامة √، ويطلق عليه جذر radial والرقم المكتوب على يسار علامة الجذر يسمى أس الجذر أما المقدار المكتوب تحت علامة الجذر فيطلق عليه المقدار المراد إيجاد جذور.

الجذور:

يرمز عادة للجذر النوني ب $\sqrt{X}$ ، وهذا يعني أن الجذر النوني لعدد ما (X)، إذا رفعت لقوة معينة (n) أصبح مساويا للعدد X فمثلا:

- الجذر التربيعي للعدد.

$$\text{العدد } 36 = \sqrt{6^2} = 6$$

- الجذر التربيعي للعدد.

$$\text{العدد } 125 = \sqrt{5^3} = 5$$

[1]- شقيري نوري موسى وآخرون، الرياضيات المالية، مرجع سبق ذكره، ص ص 15- 16.

خواص الجذور: ويمكن حصر هذه الخواص بما يلي:

$$1.\quad \sqrt[n]{3} \times \sqrt[n]{2} = \sqrt[n]{6}$$

وحاصل ضرب الجذور النونية لعدة أعداد هو الجذر النوني لحواصل ضربها (يجب أن يتساوى والجذور).

أي:

$$2.\quad \sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{xy}$$

$$\sqrt[4]{4} \times \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{20}$$

إذا رفع جذر إلى قوة ما، تكون النتيجة رفع العدد المجذور بهذه القوة:

- إذا قسم جذر عدد على جذر عدد أخر وكان الدليل واحد تكون النتيجة هي الجذر النوني لحاصل قسمة العديدين.

$$3.\quad \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$[1]

المتتالية العددية

متتالية فيبوناتشي.

ليوناردو بيزانو (1170−1250) الملقب فيبوناتشي أعظم رياضي أوروبا في عصره ارتبط اسمه بمتتالية عديدة عرضها عام 1288 في كتابه المسمى Liber.Abaci نمذجة وحلا للمشكلة التالية:

نضع في حظيرة زوجا من أرنبين (ذكر وأنثى).

يلد كل زوج عمره شهران على الأقل، كل شهر، زوجا جديدا من أرنبين (ذكر وأنثى) ذا افترضنا أن ليس هناك أرنب يموت، ماهو عدد أزواج الأرانب بعد n شهرا؟.

وهكذا، فإن كان u_nهو عدد الأزواج الأرانب الموجودة خلال الشهر من المرتبة، نحصل على متتالية معرفة بالشكل.

[1]– غازي فلاح المومني، الرياضيات المالية المعاصرة، مرجع سبق ذكرهن ص ص 24، 25.

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \end{cases}$$

ومن أجل كل عدد طبيعي $n > 1$ حيث،

في هذه المتتالية، يكون كل حد موضوع الحدين السابقين له مباشرة وهي تشرح انتظام الأرانب كما ذكر فيبوناتشي، وقد اكتشف توافقها كذلك مع بعض الظواهر الطبيعية كتفرغ بعض الأشجار التي تنبن في بعض البلدان الباردة وتوجه بعض النباتات (زهرة الأقحوان، عباد الشمس...) نحو الشمس.

كما ساهمت هذه المتتالية في إثراء العديد من مواضيع الرياضيات وحل الكثير من المعضلات.[1]

مفهوم متتالية:

نسمي متتالية عددية كل دالة من مجموعة الأعداد الطبيعية N في مجموعة الأعداد الحقيقية.

اصطلاحات وتعابير:

- يرمز عادة لمتتالية بأحد الرمز u ، v، w ...
- يرمز لصورة عدد طبيعي n بمتتالية u بالشكل $u(n)$ أو بالشكل u_n (نقرأ: u دليل n).
- العدد n هو الحد الذي دليله (أو رتبته) n ويسمى أيضا الحد العام للمتتالية: u .
- يرمز أيضا للمتتالية: u بالشكل (u_n) أو $n \in N$ (u_n).

أمثلة:

أ)- قائمة المربعات 0، 1، 4، 9 وتشكل متتالية u معرفة على $\{0; 1; 2; 3\}$=0.

$$u_3 = 9, u_2 = 4, u_1 = 1, u_0 = 0$$

ب)- V هي المتتالية المعرفة على N^* بالشكل $V_n = \frac{1}{n}$.

الحد الذي رتبته 10 لهذه المتتالية هو $V_{10} = \frac{1}{10}$.

د)- لتكن W المتتالية المعرفة كالآتي $W_0 = 2$ و $W_{n+1} = 3W_{n+1}$ ، من أجل كل عدد طبيعي n.

[1]- رابح بناني وأخرون، الرياضيات، مرجع سبق ذكره، ص 235.

يمكن حساب الحدود W_1، W_2، W_3 .

نجد $W_1 = 3W_0 + 1 = 3 \times 2 + 1 = 7$، $W_2 = 3W_1 + 1 = 3 \times 7 + 1 = 22$

ملاحظة:

يمكن أن تكون المتتالية معرفة بدءا من رتبة معينة.

مثال:

المتتالية (u_n)، حيث $_n = \sqrt{n-3}$ ، تكون معرفة من أجل $n \geq 3$ و u_3 .

طرق توليد متتالية:

هناك ثلاث طرق لتوليد متتالية:

1. بإعطاء قائمة كل حدود المتتالية (عدد الحدود منته).

مثال:

$$7, \frac{11}{2}, 4, \frac{5}{2}, 1$$

2. بعبارة من الشكل: $u_n = f(n)$ ،

يمكن تعريف متتالية بعبارة صريحة (دستور) تسمح بحساب كل حد بدلالة n مباشرة.

مثال:

متتالية معرفة على N بالعبارة $u_n = 2n^2 - 1$

في هذه الحالة $u_0 = -1, u_1 = 2 \times 1^2 - 1 = 1, u_2 = 2 \times 2^2 - 1 = 7$

3. بعلاقة تراجعية

يمكن تعريف متتالية u بإعطاء:[1]

- الحد الأول u_0.

- وعلاقة تسمح بتعين كل حد انطلاقا من الحد السابق له مباشرة نسمي مثل هذه العلاقة علاقة تراجعية.

مثال:

لتكن V المتتالية المعرفة بحدها الأول V_0، حيث $V_0 = 2$ والعلاقة $V_{n+1} = 3V_n - 1$.

لدينا:

$$3V_2 - 1 = 41;\ V_2 = 3V_1 - 1 = 3 \times 5 - 1 = 14;\ V_1 = 3V_0 - 1 = 3 \times 2 - 1 =$$

إذا كانت f الدالة المعرفة على R حيث $f(x) = 3x - 1$ ، فتكون المتتالية V_n معرفة إذا علم V_0 العلاقة التراجعية $V_{n+1} = f(V_n)$ التي تعبر عن الخدمة المرتبة n+1 بدلالة الحد من المرتبة.

التمثيل البياني لمتتالية:

تعريف:

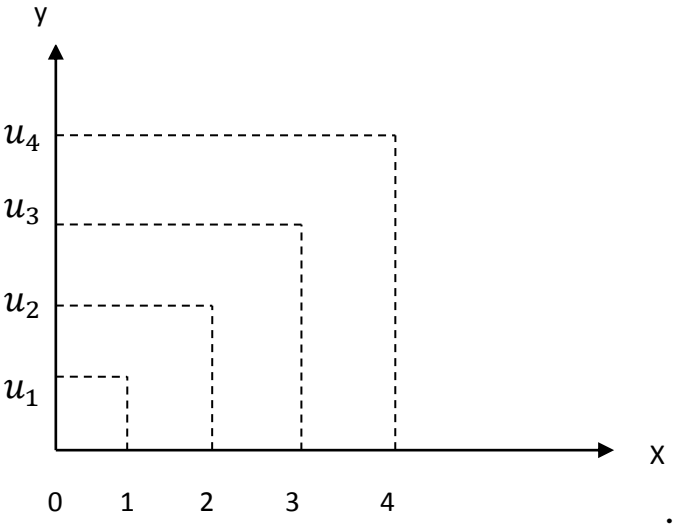
التمثيل البياني لمتتالية u هو مجموعة النقط ذات الإحداثيات (n, u_n) في المعلم $(o; \vec{i}; \vec{j})$ للمستوي.

مثال:

لتكن u المتتالية المعرفة على N حيث: $u_n = n^2 + 4n$

[1]– رابح بناني وآخرون، الرياضيات، مرجع سبق ذكره، ص 239.

النقط الخمس الأولى من التمثيل البياني لهذه المتتالية هي كما في الشكل المقابل.



اتجاه تغير المتتالية.

(u_n) متتالية معرفة علىN .

- نقول إن (u_n) متتالية متزايدة تماما عندما يكون:

من أجل كل عدد طبيعيn :$u_n <$ $_{n+1}$

- نقول إن (u_n) متتالية متناقصة تماما عندما يكون:

من أجل كل عدد طبيعي n:$u_n > u_{n+1}$

عندما نستبدل الرمز$>$ (أو$<$) بالرمز$\geq$ (أو$\leq$) في التعريف السابق، نقول إن المتتالية u_n متزايدة أو متناقصة.

إشارة:

الرمز$>$ ← أصغر تماما الرمز$\leq$ ← أصغر أو يساوي.

الرمز$<$ ← أكبر تماما الرمز$\geq$ ← أكبر أو يساوي

أمثلة:

المتتالية (u_n) حيث من أجل كل عدد طبيعيn $u_n = n^2$متزايدة تماما.

بالفعل، من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = (1+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

وبالتالي: $u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$

وبما أن $2n + 1 > 0$ من أجل كل عدد طبيعي n .

إذن $u_{n+1} - u_n > 0$ أي أن $u_{n+1} > u_n$.

المتتالية (V_n) حيث $V_n = \frac{1}{n+1}$، من أجل كل عدد طبيعي n متناقصة تماما.

بالفعل، $V_{n+1} = \frac{1}{(n+1)+1} = \frac{1}{n+2}$، من أجل كل عدد طبيعي n

وبالتالي: $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$

وبما أن $\frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$ من أجل كل عدد طبيعي n .

إذن: $V_{n+1} - V_n < 0$ أي أن $V_{n+1} < V_n$.[1]

2. المتتالية الحسابية:

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها $(r$عدد حقيقي$)$ إذا وقف إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n. $u_{n+1} = u_{n+r}$

خاصية1 :

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p.

حالات خاصة:

$$u_n = u_1 + (n-1)r, \quad u_n = u_0 + nr$$

برهان:

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها، فإننا نمر من الحد إلى الحد الذي يليه بإضافة r دائما.

أي أن $u_n = u_0 + nr$ ونتقبل أن $u_{1+r} = u_0 + 2r, \quad u_n = u_0 + nr$, ... $u_2 =$,

[1]– رابح بناني وآخرون، الرياضيات، مرجع سبق ذكره، ص 240.

وبالعكس، بالنسبة إلى متتالية$(_n)$، إذا كان$u_n = u_0 + nr$ ،، فإن

$$, \quad u_{n+1} = u_0 + (n+1)r = u_0 + nr + r = u_n + r$$

ومنه فالمتتالية(u_n) متتالية حسابية.

خاصية 2:

إذا كانت$(_n)$ متتالية حسابية فإن:

$$S = u_0 + u_1 + \cdots . + u_{n-1} + u_n = (n+1)(\frac{u_0 + u_n}{2})$$

أي: $\frac{\text{الحد الأخير+الحد الأول}}{2} \times$ (عدد الحدود) $= S$ مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية.[1]

برهان:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots . + u_{n-1} + u_n$$

وبكتابة

$S = {}_{n-1} + {}_n + \cdots . + u_0 + u_1$ والجمع طرفا إلى طرف نحل على:

$$2S_n = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + \cdots . + (u_1 + u_{n-1}) + (u_0 + u_n)$$

لكن:

$$u_0 + u_n = u_0 + \cdots . + (u_0 + nr) = 2u_0 + nr$$

$$u_1 + u_{n-1} = (u_0 + r) + [u_0 + (n-1)r] = 2u_0 + nr$$

$$u_2 + u_{n-2} = (u_0 + 2r) + [u_0 + (n-2)r] = 2u_0 + nr$$

كل من المجاميع السابقة يساوي$u_0 + u_n$

إذن نكتب:$2S_n = \frac{(u_0+u_n)+(u_0+u_n)+\cdots.+(u_0+u_n)}{(n+1)} = (n+1)(u_0 + u_n)$

[1]– جمال تاوريت، الرياضيات، الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية، الطبعة الأولى، الجزائر، 2008، ص 8.

أي أن:[1] $S_n = (n+1)\frac{u_0 + n1}{2}$

مثال: لتكن المتتالية $(_n)$ المعرفة N على كما يلي:

$$u_n = -3n + 2$$

1. أحسب u_0 و u_1 .

2. أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r.

3. أحسب بدلالة ، المجموع $S = u_0 + u_1 + \cdots . + u_n$

طريقة:

لإثبات أن المتتالية $(_n)$ حسابية يكفي أن نبين أن من أجل كل عدد طبيعي n الفرق $_{n+1} - u_n$ عدد ثابت r.

الحل:

1. $u_1 = -3(1) + 2 = -2,\ u_0 = -3(0) + 2 = 2$

2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} - u_n = [-3(n+1) + 2] + [-3n + 2] = -3$$

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r = -3$.

لدينا: $S = (n+1) \times \frac{u_0 + n}{2} = (n-1) \times \frac{2-3n+2}{2}$ ومنه: $S = \frac{(n+1)(4-3n)}{2}$

التمثيل البياني:

التمثيل البياني لمتتالية حسابية هو مجموعة نقط معزول وواقعة على نفس الاستقامة.

[1]– جمال تاوريوت، الرياضيات، مرجع سبق ذكره، ص 9.

برهان:

نعلم أن التمثيل البياني لمتتالية عددية (u_n) هو مجموعة النقط ذات الإحداثيات $(n;\ u_n)$ في المعلم $((o;\vec{i};\vec{j}))$ للمستوي.

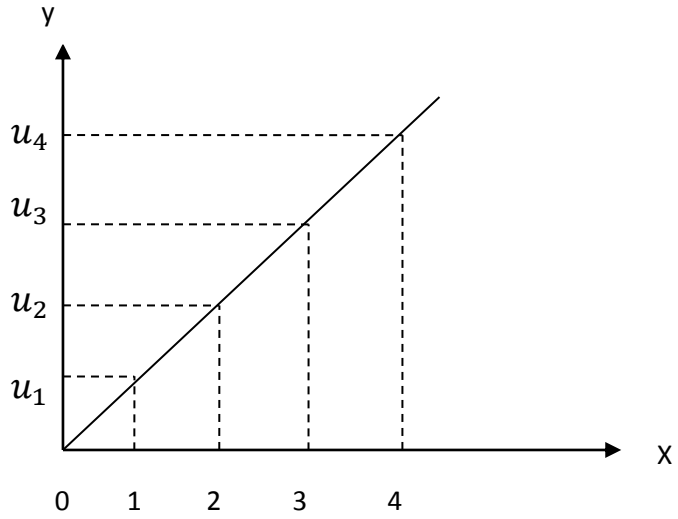
إذا كانت (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r، فإن من أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_n = rn + u_0$$

معنى ذلك أن كل النقط $m(n;\ u_n)$ تكون على المستقيم الذي معادلته $y = rx + u_n$

مثال:

التمثيل البياني للمتتالية الحسابية التي حدها الأول 1 وأساسها 2 كما هو في الشكل المقابل.[1]



اتجاه التغير:

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r.

- إذا كان r موجبها تماما فالمتتالية متزايدة تماما.

- إذا كان r سالبا تماما فالمتتالية متناقصة تماما.

[1]- رابح بناني، نفس المرجع، ص 244.

– إذا كان r منعدما فالمتتالية ثابتة.[1]

3. المتتاليات الهندسية:

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q (q عدد حقيقي) إذا وفقط أن من أجل كل عدد طبيعي n. $u_{n+1} = u_n \times q$

خاصية:

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه من أجل كل عددين طبيعين n و p.

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

حالات خاصة:

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}, u_n = u_0 \times q^n$$

برهان:

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q

بضرب حد من المتتالية (u_n) في العدد q، نحصل على الحد الذي يليه مباشرة، نستنتج أن

$u_n = u_0 \times q^n$ وبالعكس، إذا كان $u_n = q^n$ ، فإن:

$$u_{n+1} = q^{n+1} \times u_0 = (q \times q^n)u_0 = q(q^n.u_0) = qu_n$$

ومنه فالمتتالية (u_n) متتالية هندسية.[2]

خاصية 2:

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن 1 فإن:

$$S = u_0 + u_1 + \cdots . + u_{n-1} + u_n = u_0(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q})$$

---

[1]– نفس المرجع السابق، ص 245.

[2]– جمال تاوريت، مرجع سبق ذكره، ص 8.

بصفة عامة:

$$S = (\text{الحد الأول}) \times \frac{1 - \text{عدد الحدود أس الأساس}}{1 - \text{الأساس}}$$

برهان:

نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots . + u_{n-1} + u_n$

لدينا: $q\ S_n = u_1 + \cdots . + u_n + u_{n-1}$

منه: $(1-q)\ S_n = u_0 - u_{n-1}$ أي أن $S_n - \ q \quad _n = u_0 + u_{n-1}$

وبالتالي: $S_n = \frac{_0 - u_{n+1}}{1-} = \frac{u_0 - u_0 q^{n+1}}{1-q} = u_0 = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$q \neq 1$

ملاحظات:

في العلاقة $u_0 + u_1 + \cdots . + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$، عدد حدود المجموع $u_0 + u_1 + \cdots . + u_n$ هو 1.

إذا كان $q = 1$

فإن $u_0 = u_1 = \cdots = u_n$ وبالتالي $u_0 + u_1 + \cdots . + u_{n-1} + u_n = (n+1)u_0$

اتجاه التغير:

(u_n) متتالية هندسية، u_0 حدها الأول و q أساسها بحيث $u_0 > 0$ و $q > 0$.

تكون المتتالية (u_n):

- متزايدة تماما إذا كان ، فإن وبالتالي:
- متناقصة تماما إذا كان ، فإن وبالتالي

- إذا كان $q = 1$ فمن أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_n = u_0$ ، إذن (u_n) ثابتة.[1]

مثال:

بلغ عدد سكان إحدى المدن الجزائرية 3000 نسمة سنة 2005 و 3630 نسمة سنة 2007.

نفرض أن $\propto$ نسبة تزايد السكان سنويا بهذه المدسنة ثابتة.

1. عين $\propto$ نسبة تزايد سكان المدينة.

2. كم سيكون عدد سكان هذه المدينة سنة 2030؟ يتم تدوير النتيجة إلى العشرات.[2]

الحل:

يتم نمذجة المقادير التي تغيير بنسبة ثابتة $\propto$ بمتتالية هندسية أساسها $q = 1+\propto$.

لنرمز ب u_n مثلا إلى عدد سكان المدينة السنة $2005+n$ ومنه $u_0 = 3000$ و $u_n = 3630$

1. بما أن نسبة التزايد ثابتة $\propto$ فإن العلاقة بين عدد السكان خلال السنة $2005+n$ و عدد السكان خلال السنة الموالية $u_{n+1} = u_n+\propto u_n$ هي أي $u_{n+1} = (1+\propto)u_n$. نستنتج أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1+\propto$.

لدينا إذن $u_2 = u_0 \times q^2$، ومنه $q^2 = \frac{u_2}{u_0}$. نجد هكذا $q^2 = 1.21$ وبالتالي $q = 1.1$ نستنتج أن $\propto = 0.1 = 10\%$.

2. نلاحظ أن $2030=2005+25$ لدينا $u_{25} = u_0 \times q^{25}$ ومنه $u_{25} = 3000 \times (1.1)^{25}$ أي

$u_{25} = 32504.12$ يكون عدد سكان المدينة سنة 2030 حوالي 32500 نسمة.

مجموع المتتالية الهندسية اللانهائية:

من القانون العام المتعلق بمجموع المتتالية الهندسية وجدنا أنه كلما ازدادت (n) زاد عدد حدود المتتالية

[1]– رابح بناني، نفس المرجع السابق، ص 248.

[2]– جمال تاوريرت، مرجع سبق ذكره، ص 9.

فإذا ألت (n) إلى (∞) فإن المتتالية الهندسية تصبح نهائية أي تصبح مكونة من عدد لانهائي من الحدود.

ومن المتعارف عليه إذا كانت القيمة المطلقة للأساس$(q) = |q|$ وأكبر من الواحد (صحيح) فإن مجموع المتتالية (يصبح مساويا) تؤول إلى مالا نهائية.

أما إذا كان الأساس (q) أقل من الواحد فإن (q^n) تصغر كلما ازدادت قيمة (n) بالتدريج حتى تؤول إلى الصفر عندما$n \to \infty$.

ويتم كتابة ذلك على الشكل التالي:

$q^n \to 0$عندما$n \to \infty$.

دالة اللوغاريتم النيبري:

الخواص الجبرية:

خاصية: من أجل كل عددين حقيقيينa وb من $]0; +\infty[$:

1) $\ln a = \ln b$ يعني$a = b$

2) $\ln a < \ln b$ يعني$a < b$

خاصية: من أجل كل عددين حقيقيينa وb من $]0; +\infty[$:

البرهان: aعدد حقيقي موجب تماما. نعتبر الدالة المعرفة على$]0; +\infty[$: ب:

$$f(x) = \ln(ax) - \ln(x)$$

من أجل كل X من$]0; +\infty[$, $f'(x) = ax\frac{1}{ax} - \frac{1}{x} = 0$ ومنه دالة ثابتة على $]0; +\infty[$

لدينا:

$f(1) = \ln(\quad) - \ln(1) = \ln(a)$ إذن من أجل كل X من$]0; +\infty[$,

$f(x) = \ln(a)$ وبالتالي

$\ln(ax) - \ln(x) + \ln(a)$ وهكذا من أجل كل X من $]0; +\infty[$:،

$\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$ نأخذ $X = b$

إشارة: يتم تعميم هذه النتيجة إلى عدة أعداد حقيقية موجبة تماما وهكذا يكون لدينا:

من أجل كل أعداد حقيقية $a_1, a_2, \ldots, a_n$ من $]0; +\infty[$:،

$$a_1, a_2, \ldots, a_n = lna_2 + lna_2 + \cdots + lna_n$$

نتائج:

نتيجة 1: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0; +\infty[$.

فإن: $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \, , ln\,(\frac{1}{a}) = -\ln a$

البرهان:

من أجل a من $]0; +\infty[$, $a \times \frac{1}{a} = 1$ ومنه $ln\,(a \times \frac{1}{a}) = 0$ أي $\ln a + \ln(\frac{1}{a}) = 0$

ومنه: $ln\,\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

من أجل a و b من $]0; +\infty[$

$$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a \times \frac{1}{b}) = \ln a + \ln(\frac{1}{b}) = \ln a - \ln b$$

نتيجة 2:

من أجل كل من a من $]0; +\infty[$ و من أجل كل n من Z

فإن $\ln(a^n) = nln\ a$

البرهان:

a عدد حقيقي من $]0; +\infty[$ و عدد صحيح نسبي. نميز الحالات التالية:

الحالة الأولى:

$n \geq 0$ نستعمل البرهان بالتراجع. ومن أجل ذلك نسمي $p(n)$ الخاصية $\ln(a^n) = nln\ a$

من أجل $n = 0$ لدينا: $\ln(a^0) = ln\ (1) = 0 = 0 \ln a$ وبالتالي $p(0)$ صحيحة.

فرضية التراجع: نفرض صحة $p(n)$ من أجل حيث $n \geq 0$ أي $\ln(a^n) = nln\ a$

وراثية الخاصية إبتداءا من الرتبة 0: نبرهن $p(n+1)$ صحة أي $\ln(a^{n+1}) = (n+1)ln\ a$

لدينا: $\ln(a^{n+1}) = ln\ (a^n \times a) = \ln(a^n) + \ln a = nln\ a + \ln a = (n+1)\ln a$

ومنه $p(n+1)$ صحيحة

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $\ln(a^n) = nln\ a$.

الحالة الثانية: $n < 0$

$$\ln(a^n) = \ln(\frac{1}{a^{-n}}) = -\ln(a^{-n}) = -(-n)\ln a = nln\ a$$

نتيجة (3):

من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ ،

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} ln\ a$$

البرهان:

من أجل a من $]0;+\infty[$،

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} ln\ a \quad , \ln a = \ln\left[(\sqrt[2]{a})\right] = 2\ln(\sqrt{a})$$

دالة اللوغاريتم العشري:

تعريف: دالة اللوغاريتم العشري هي الدالة التي نرمز إليها بالرمز "Log" والمعرفة على $]0;+\infty[$ ب:

$$\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

قوانين اللوغاريتميات:

1)- قانون الضرب:

يتساوى لوغاريتم ناتج ضرب عاملين أو أكثر مع مجموعة لوغاريتمها وتكون صيغة القانون العام:

$$\log\ xy = logx + \log y$$

ومن الممكن استخدام الصيغة السابقة لتسليط عملية الحساب في الضرب كما هو مبين في المثال.

مثال: إذا كانت $xy = (1{,}34)(0{,}027)$ فإن حاصل الضرب يأخذ لوغاريتميات طرفي المعادلة تكون كالآتي:

$$\log(xy) = log\{(1{,}34)(0{,}027)\}$$

$$\log(xy) = log1{,}34 + log0{,}027$$

$$\log 1{,}34 = 0{,}12710$$

$$\frac{\log 0{,}027 = 8{,}43136 - 10}{\log(xy) = 8{,}30426 - 10}$$

ب)- قانون القسمة:

يتساوى لوغاريتم حاصل قسمة مقدارين مع لوغاريتم المقسوم (البسط) ناقص لوغاريتم المقسوم عليه (المقام).[1]

القانون العام هو:

$$log\frac{x}{y} = logx + \log y$$

ومن الممكن استخدام القانون العام لتسليط الحساب في القسمة، كما هو مبين في المثال

[1]- شفن شاو، لورانس شاو، رياضيات التمويل والاستثمار، مرجع سبق ذكره، ص 152.

مثال:

نأخذ لوغاريميات طرفي المعادلة نجد.

$$\frac{x}{y} = log\left(\frac{0{,}104}{2{,}56}\right)$$

$$log\frac{x}{y} = log\frac{0{,}104}{2{,}56}$$

$$\log 0{,}104 = 9{,}01703 - 10$$

$$\frac{(-)\log 2{,}56 = 0{,}40823}{\log\frac{x}{y} = 8{,}60879 - 10}$$

وبإيجاد الرقم المقابل للوغاريتم[1] antilog

$$\log\frac{x}{y} = 8{,}60879 - 10$$

ج)- قانون الأسي والجذور:

لوغاريتم مقدار مرفوع لأس معين يساوي نفس الأس مضروبا وفي لوغاريتم المقدار.[2]

$$logx^{y} = y(\log x)$$

ولو كان الأس كسرا، فيكتب القانون على النحو التالي:

$$logx^{\frac{1}{y}} = \frac{1}{y}(\log x)$$

$$log\sqrt[y]{x} = \frac{1}{y}(\log x)$$

[1]- شفن شاو، لورانس شا، رياضيات التمويل والاستثمار، مرجع سبق ذكره، ص 152.

[2]- شقيري نوري موسى وآخرون، الرياضيات المالية، مرجع سبق ذكره، ص 15.

ويمكن توضيح تطبيقات القانون السابق كما يلي:

مثال:

إذا افترضنا أن:

$$N = (17)^3$$

$$logN = 6(17)^3 = 3log17$$

فإن:[1]

$$= 3(1{,}23045) = 3{,}69135^3$$

[1]– شقيري نوري موسى وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص 155.

الدرس الثاني: الفائدة البسيطة

تعتبر الرياضيات المالية أحد أهم الأدوات التي تساعد الأفراد ومؤسسات الأعمال في اتخاذ قرارات الاستثمار سليمة وذلك لتحقيق أفضل نتائج مالية ممكنة. وتعتمد معظم المعاملات المالية والتجارية بدرجة كبيرة كل عنصر " الفائدة" من العملية الاستثمارية أو بعبارة أخرى على العائد من استثمار رأس المال.

أولا: مفهوم الفائدة.

عرفت الفائدة من قبل عدد من الباحثين على أنها:

- العائد على رأس المال المستخدم.
- ثمن استخدام الأموال.
- أجرة المال المقترض.

كما تعرف أيضا على انها " المبلغ الذي يدفع مقابل استخدام رأس المال المستغل في القروض الودائع السندات على اختلاف أنواعها وذلك لمدة زمنية معينة ويعبر عنه عادة بنسبة مئوية تسمى " سعر الفائدة" أو " معدل الفائدة".[1]

أما Benjamin Legros فعرف الفائدة بأنها عبارة عن تعويض مبلغ من المال المقرض أو هي تكلفة قرض بالنسبة للمقترض.

كما أورد بأن الفائدة هي تابع لنبلغ المقترض، المدة والمعدل المتفاوض عليه بين المدين والدائن".[2]

كما يمكن تعريف الفائدة" بأنها التعويض الذي يدفعه المقترض مقابل استخدامه لرأس المال المفترض لفترة زمنية معينة.

ومن هذه التعاريف السابقة نستنتج أن لصاحب رأس الفائدة هي مبلغ من المال ناتج عن توظيف رأس مال في مؤسسة مالية مثل البنوك لمدة زمنية معينة وبمعدل معين.

[1]– غازي فلاح المومني، الرياضيات المالية، مرجع سبق ذكره بتصرف، ص 111.

[2] – Benjamin Legros, Mathématiques Financières, éditions DUNO, paris, 2011, p 24.

أنواع الفائدة: تنقسم الفائدة إلى نوعين رئيسين هما:

1. الفائدة البسيطة "L'intérêt simple": وهي الفائدة التي تسحب على أفضل نبلغ في نهاية كل فترة زمنية.

2. الفائدة المركبة "L'intérêt composé ": وهي الفائدة التي تحسب كل الأصل المبلغ بعد إضافة الفائدة إلى الأصل في نهاية كل فترة زمنية، أي أنه بعد نهاية كل فترة زمنية يكون لدينا أصل مبلغ جديد" (وهذه الفائدة سنتطرق إليها في الفصول اللاحقة).

ثانيا: عناصر الفائدة:

ويؤثر في حساب الفائدة عدة عناصر وهي:

أ)- الأصل (المبلغ): وهو أصل " مبلغ المقترض أو المستثمر، والذي يظل ثابتا طوال مدة الاقتراض أو الاستثمار، وبالتالي فإن قيمة الفائدة على هذا الأصل في نهاية الفترة الزمنية الأولى تكون مساوية لقيمة الفائدة على هذا الأصل في نهاية الفترة الزمينية الثانية وهكذا حتى نهاية مدة القرض أو الاستثمار وذلك على قرض تساوى هذه الفترات الزمنية ويرمز له بالرمز "C".

ب)- معدل الفائدة: هو قيمة المحسوب على أصل المبلغ المقترض أو المستثمر لفترة زمنية محددة (عادة ما تكون سنة). وعادة ما يعبر عن معدل الفائدة في صورة نسبة مئوية.

وتجدر الإشارة إلا أن معدل الفائدة قد يكون سنويا أو سداسيا أو شهريا. ويعتبر المعدل سنويا ما لم ينض على غير ذلك. ويرمز لمعدل الفائدة بالرمز.[1]

ج)- المدة (الزمن): وتسمى أيضا بمدة التوظيف، وهي المدة أو الفترة المتفق عليها بين المقرض والمقترض لاستعمال أصل القرض، وقد تكون هذه المدة محددة بالسنوات أو بالأشهر أو بالأيام، ويرمز لها بالرمز "n".[2]

[1]- ستفن شاو ، لورانس شاو ، رياضيات التمويل والاستثمار، مرجع سبق ذكره، ص ص 478-479.

[2]- بوغرة باديس، المدخل إلى الرياضيات المالية وتطبيقاتها، دار الهدى للطباعة والنشر، 2012، ص 8.

الفائدة البسيطة:

تستخدم الفائدة البسيطة عند اقتراض أو استثمار الأموال لفترة زمنية قصيرة الأجل (عادة أقل من سنة) وتحسب على المبلغ الأصلي (رأس المال الأولي) خلال مدة زمنية، أي أنها لا تتغير من فترة زمنية إلى أخرى عند ثبات أصل القرض أو أصل المبلغ المستثمر.[1]

القانون الأساسي للفائدة البسيطة:

سبق وأن أشرنا إلى أن الفائدة البسيطة تتحدد عن طريق ثلاثة عناصر رئيسية وهي الأصل (المبلغ) المعدل، والمدة.

وانطلاقا من هذه العناصر فغن القانون الأساسي للفائدة البسيطة يتحدد بحاصل ضرب العناصر الثلاثة المذكورة وفق العلاقة التالية:

$$I = C \times i \times n$$

للإشارة أن الفائدة البسيطة نرمز لها بالرمز "I".

ويمكن استخدام هذا القانون في إيجاد مقدار الفائدة البسيطة لمبلغ معين بمعدل فائدة محددة ولفترة زمنية معلومة.

مثال:

استثمر محمد مبلغ 25000 دج لمدة سنة واحدة في بنك التنمية المحلية "BDL" وبمعدل فائدة قدره 5%.

المطلوب: أوجد مقدار الفائدة البسيطة؟.

الحل: بالاعتماد على القانون الأساسي للفائدة البسيطة نجد أن:

$$I = C \times i \times n$$

أي:

$$I = 25000 \times 0{,}05 \times 1 = 1250\ DA$$

[1]– نفس المرجع السابق، بتصرف.

وانطلاقا من القانون الأساسي للفائدة يمكن استخراج العلاقة التالي:

1- إيجاد أصل المبلغ: عندما يكون المبلغ الأصلي مجهولا نستعمل المعادلة التالية:

$$\mathrm{C} = \frac{I}{i \times n}$$

2- إيجاد معدل الفائدة: عندما يكون معدل الفائدة مجهولا نستعمل المعادلة التالية:

$$\mathrm{i} = \frac{I}{C \times n}$$

3- إيجاد المدة: وعندما تكون المدة المجهولة نستعمل المعادلة التالية:

$$\mathrm{n} = \frac{I}{C \times i}$$

مثال (1-1): استثمر حيدر مبلغ معين قدره X من البنك لمدة 6 سنوات بمعدل فائدة بسيط قدره 8,5% سنويا.

المطلوب: باستخدام قوانين الفائدة البسيطة. أوجد مقدار المبلغ الأصلي للمستثمر حيدر إذا علمت أن الفائدة قدرت ب 285600 دج؟.

الحل: نعلم أن:

أصل المبلغ: $C = X$

الفائدة : $I = 285600$

معدل الفائدة البسيطة: $i = 8{,}5\%$

المدة: $n = 6\ ans$

وباستخدام العلاقة التالية نجد أن:

$$\mathrm{C} = \frac{I}{i \times n}$$

$$\mathrm{C} = \frac{285600}{0{,}085 \times 6} \rightarrow \mathrm{C} = 560000DA$$

مثال (1−2):

استثمر " حيدر" مبلغ من المال قدره 900000 دج لمدة 2 سنوات، وكان العائد المتحقق من العملية الاستثمارية (الفائدة) في نهاية المدة ب 36000 دج.

المطلوب: باستخدام قوانين الفائدة البسيطة أوجد معدل الفائدة البسيطة؟.

الحل:

لدينا المعلومات التالية:

$$C = 900000\ DA$$

$$I = 36000\ DA$$

$$n = 2\ ans$$

$$i = X$$

ويمكن الحصول على معدل الفائدة السنوي من خلال العلاقة التالية:

$$\mathrm{i} = \frac{I}{C \times n}$$

ومنه:

$$\mathrm{i} = \frac{36000}{90000 \times 2} = 0{,}02 = 6\%\ (ans)$$

مثال (1−3):

استثمر حيدر مبلغ من المال قدره 40000 دج، فبلغت فائدته خلال X سنوات 8000 وكان معدل الفائدة ب 4% سنويا.

المطلوب: أوجد مدة قرض هذا المبلغ؟.

الحل:

لدينا:

$$C = 40000\ DA$$

$$I = 8000\ DA$$

$$i = 4\%\ (ans)$$

والمطلوب هو حساب مدة قرض هذا المبلغ.

أي:

$$8000 = 40000 \times 4\% \times n$$

ومنه يمكن الحصول على مدة القرض كما يلي:

$$\mathrm{n} = \frac{I}{C \times i}$$

وعليه:

$$\mathrm{n} = \frac{8000}{40000 \times 0{,}04}$$

$$\mathrm{n} = 5\ ans$$

حساب الفائدة البسيطة لمدة أقل من سنة:

من خلال الأمثلة السابقة التي تطرقنا إليها في حساب الفائدة البسيطة، نلاحظ أن وحدة الزمن (المدة) المستخدمة والمراد إيجاد الفائدة لها هي " سنة كاملة" ويمكن اعتبارها بأنها مدة الاستثمار، ولكن عندما تكون مدة الاقتراض أو الاستثمار أقل من سنة فيمكن حسابها على أساس.

أولا: عدد الأشهر: حين تكون مدة الاستثمار هي عدد أشهر السنة الواحدة المقدرة ب 12 شهرا. فحسب هذه الحالة يجب تحويل فترة الاستثمار إلى سنة، فلا بد من تقسيم عدد الأشهر على 12.[1]

حيث أن:

$$\mathrm{N} = \frac{\text{عدد الأشهر}}{12}$$

فمثلا إذا كانت فترة الاستثمار لمدة أربعة شهور فإن:

$$\mathrm{N} = \frac{4}{12}$$

ويكون قانون الفائدة البسيطة كما يلي:

$$\mathrm{N} = \mathrm{C} \times \mathrm{i} \times \frac{n}{12}$$

حيث n: عدد الشهر المراد حساب الفائدة عليها.

[1]– غازي فلاح، الرياضيات المالية والمعاصرة، مرجع سبق ذكره، ص 126.

مثال: استثمر عبد الرحمان مبلغ قدره 3000 دج لمدة 8 اضهر كاملة.

المطلوب:

أحسب الفائدة المتحققة من العملية الاستثمارية علما ان معدل الفائدة السنوي قدر ب 9,5%.

الحل:

لدينا:

أصل المبلغ: $C = 3000DA$

معدل الفائدة البسيطة: $t = 9{,}5\%$

مدة الاستثمار هي: $n = \frac{8}{12}$

وبذلك فإن العائد من العملية الاستثمار أي الفائدة السنوية تقدر كما يلي:

$$I = C.i.n \rightarrow 3000 \times 0{,}095 \times \frac{8}{12}$$

$$I = 190DA$$

ويمكن أيضا تحويل المعدل السنوي على معدل شهري والحصول على نفس النتيجة بالاعتماد على العلاقة الثلاثية التالية:

$$8\ mois \rightarrow 12\ mois$$

$$(n)x \leftarrow 9{,}5\%$$

أي:

$$x = \frac{9{,}5\%}{12\ mois} \times 8\ mois$$

$$x = \frac{0{,}095}{12} \times 8\ mois$$

وبتعويض في القانون الأساسي للفائدة البسيطة نجد:

$$\mathrm{I} = \mathrm{C} \times \mathrm{i} \times \mathrm{n} \rightarrow 3000 \times \frac{0{,}095}{12} \times 8 = 190$$

أي:

$$\mathbf{I = 190}$$

عدد الأيام: حيث تكون مدة الاستثمار أو الاقتراض هي عدد أيام الفترة المراد حساب الفائدة لها على المبلغ المعين، ولتحويل الأيام إلى السنة له يناظر طريقتين وهما:

إما نقسم عدد أيام فترة الاستثمار على 365 يوما إذا كانت السنة بسيطة او 366 إذا كانت السنة كبيسة حين ان هذا العدد هو العدد الفعلي لأيام السنة وتكون:

إذا كانت السنة بسيطة: $\rightarrow \frac{\text{عدد الأيام}}{365}$

إذا كانت السنة كبيسة: $\frac{\text{عدد الأيام}}{366}$

ليصبح قانون الفائدة البسيطة على النحو الآتي:

$$\mathrm{I} = \mathrm{C} \times \mathrm{i} \times \frac{n}{365}$$

أو:

$$\mathrm{I} = \mathrm{C} \times \mathrm{i} \times \frac{n}{366}$$

وهناك طريقة أخرى لحساب الفائدة ويتم ذلك عن طريق تقسيم عدد أيام فترة الاستثمار المحسوبة على 360 يوم،[1] وذلك باعتبار أن عدد الأيام لجميع أشهر السنة هو 30 يوم ويطلق على الفائدة المحسوبة وفقا لهذه الطريقة (بالفائدة التجارية). حين يصبح قانون الفائدة البسيطة: $\frac{\text{عدد الأيام}}{360}$

$$\mathrm{I} = \mathrm{C} \times \frac{\mathrm{i}}{100} \times \frac{n}{360} \rightarrow n$$

وعادة ما تستخدم البنوك التجارية الفائدة التجارية عندما تمنح قروضا وهذا في حالة ما لم ينص عليه عقد القرض صراحة على أن الفائدة يجب أن تحسب على أساس قانون الفائدة الصحيحة.

وللإشارة فقط أن الفائدة التجارية ينتج عنها فوائد أعلى من تلك التي تعطيها الفائدة الصحيحة لذلك سميت بالفائدة التجارية.

[1]– غازي فلاح مومني، الرياضيات المالية المعاصرة، مرجع سبق ذكره، ص ص 126–127.

مثال:

استثمرت مربع مبلغ 7000 دج وكان معدل الفائدة 6% سنويا، فإذا كانت الفائدة المتحققة من العملية الاستثمارية هو 328 دج.

المطلوب: أحسب مدة الاستثمار بالأيام؟.

الحل:

في هذا المثال تم احتساب أن السنة تتكون من 360 يوم.

وباستخدام قانون الفائدة البسيطة فإن:

$$I = C.i.n \rightarrow 7000 \times 0{,}06 \times n = 328$$

أي: $n = \frac{328}{7000 \times 0{,}06}$

$$n = 0{,}78095(ans)$$

ونظرا لأن معدل الفائدة المستخدم هو معدل سنوي، فغن المدة الناتجة تكون بالسنوات أي أن مدة الاستثمار هيك 0,78095 سنة.

وبذلك فإن المدة بالأيام تساوي:

$$n = 0{,}78095 \times 360$$

$$n = 281$$

العلاقة بين الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة:

يمكن استخلاص العلاقة بين الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة تقسم الأولى على الثانية على النحو التالي:

لدينا:

$I_5 = \mathrm{C} \times \mathrm{i} \times \frac{n}{365}$ (الفائدة الصحيحة)

و:

$\mathrm{I}_c = \mathrm{C} \times \mathrm{i} \times \frac{n}{360}$ (الفائدة التجارية)

وبقسمة الفائدة التجارية على الفائدة الصحيحة أي: $\frac{I_c}{I_5}$ نجد ما يلي:

$$\frac{I_c}{I_5} = \frac{c \times i \times \frac{n}{360}}{c \times i \times \frac{n}{3605}} = \frac{c \times i \times n}{360} \times \frac{365}{c \times i \times n} = \frac{365}{360} = \frac{73}{72}$$

$$\frac{I_c}{I_5} = \frac{73}{72} \rightarrow I_c = \frac{73}{72} I_5 = (1 + \frac{1}{72}) I_5$$

منه العلاقة السابقة نستنتج أن: الفائدة التجارية = الفائدة الصحيحة + $\frac{1}{72}$ الفائدة الصحيحة، وفي مقابل ذلك نجد:

$$\frac{I_c}{I_5} = \frac{73}{72} \rightarrow I_5 = \frac{72}{73} I_c = (1 + \frac{1}{73}) I_c$$

أي: الفائدة الصحيحة = التجارية الفائدة − $\frac{1}{73}$ الفائدة التجارية [1]

التمثل البياني:

تحسب الفائدة البسيطة على الشكل $I = C \times i \times \frac{n}{100}$ ، كما يمكن كل من التعبير عن الفائدة البسيطة على شكل دالة خطية ثابتة $y = ax$ بدلالة كل من رأس مال وبمعدل فائدة i وبالمدة n.

وبمعنى أخر يمكن التعبير عن الفائدة حسب الاحتياج، وذلك بدلالة كل من رأس مال .

$$I = \frac{(i \times n)}{1200} \times c$$:أو

$$I = \frac{(i \times n)}{36000} \times c$$:أو

$$I = \frac{(c \times n)}{1200} \times i$$

$$I = \frac{(c \times i)}{1200} \times n$$:أو

$$I = \frac{(c \times i)}{36000} \times n$$

مثال: التمثيل البياني للفائدة البسيطة وذلك بدلالة المدة n.

يمكن تمثيل التغيرات الفائدة البسيطة I بيانيا وذلك من خلال تعويض مبلغ من رأس مال يقدر ب 30000 دج بمعدل 8% وذلك بدلالة المدة المعبر عنها ب n.

[1]– بوغرة باديس، المدخل إلى الرياضيات المالية، مرجع سبق ذكره، ص 14.

حل المثال: باعتبار أن معدل الفائدة شهري فإن:

$$I = \frac{30000 \times 8}{1200} \times n = 200n$$

وبافتراض أن n (المدة) = 10 اشهر بالتعويض في العلاقة الأولى نجد أن:

$$I = 200 \times 10 = 2000\ DA$$

مثال:

أحسب الفائدة الصحيحة إذا علمت أن الفائدة التجارية تعادل 200 دج.

الحل:

$$I_5 = \frac{72}{73} I_c = \frac{72}{73} \times 200 = 197{,}26\ DA$$

حساب الفائدة البسيطة باستخدام طريقة النمر والقاسم.

تستعمل طريقة النمر والقاسم عندما تكون المبالغ والتواريخ مختلفة، ويمكن أن تكون هذه المبلغ لسنة واحدة أو أكثر، وهذه الطريقة هي عبارة عن المبلغ (الأصل) مضروب في عدد أيام الاستثمار، مع إيجاد عامل مشترك بينهما هو القاسم وهو مكون من (عدد أيام السنة مع معدل الفائدة) حيث أن القاسم يساوي عدد أيام السنة مقسوما على المعدل السنوي.[1]

حيث أن:النمر = المبلغ الأصلي × عدد أيام الإستثمار

$$N = C \times n$$

$$D = \frac{360}{i} = \frac{360}{\frac{i}{100}} \rightarrow \text{أي} \quad \frac{100 \times 360}{i}$$

وهو مبلغ مشترك لكل المبالغ المراد حساب الفائدة عليها.

$$\frac{N}{D} = \frac{\text{مجموع النمر}}{\text{القاسم}} = \text{الفائدة التجارية}$$

[1]– غازي فلاح المومني، الرياضيات المالية المعاصرة، مرجع سبق ذكره، ص 134.

مثال:

أوجد الفائدة التجارية باستخدام طريقة النمر والقاسم، الفائدة المحققة عن توظيف مبلغ 45000 دج لمدة 55 يوم بمعدل 5%.

الحل:

لدينا:

$$D = \frac{360}{0{,}05} = 7200$$

أما:

$$N = C \times n \rightarrow N = 45000 \times 55$$

$$N = 2475000$$

وعليه بتطبيق العلاقة السابقة نجد: $I = \frac{N}{D} = \frac{C \times n}{\frac{360}{i}} = \frac{45000 \times 55}{7200} = 343{,}75DA$

يلاحظ أن تطبيق طريقة النمر والقاسم تساعد على انتصار العمليات الحسابية، خاصة إذا كان لدينا عدة مبالغ وكان معدل الفائدة موحدا، حين يتطلب الأمر حساب القاسم مرة واحدة فقط وعليه يكون حساب فائدة عدة مبالغ وفق العلاقة التالية:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i}{D}$$

حساب الجملة:

تعبر الجملة عن المبلغ الموظف خلال فترة زمنية معينة مضافا إليه قيمة الفائدة المحققة خلال فترة التوظيف، ويعبر عن الجملة بالرمز V ،[1] حيث:

أي: $V = I + C$

مبلغ الأصل + الفائدة = الجملة

[1]– بوغرة باديس، المدخل إلى الرياضيات المالية وتطبيقاتها، مرجع سبق ذكره، ص 16.

وبتعويض قيمة الفائدة بما يقابلها نجد:

$$V = C \times i \times \frac{n}{360} + C$$

$$V = C\,(1 + i \times \frac{n}{360})$$

مثال:

استثمر محمد مبلغ 81000 دج لمدة 13 شهر، فإذ كان معدل الفائدة المتوقع هو 18,5% سنويان أوجد مقدار الفائدة من الاستثمار في نهاية المدة؟.

الحل:

للحصول على مقدار الفائدة، فيجب أولا حساب جملة المبلغ المستثمر حساب الفائدة. وباستخدام جملة مبلغ بفائدة بسيطة فإن:

$$V = C\,(1 + i \times \frac{n}{360})$$

حيث أن:

$$C = 81000\ DA, i = 18{,}5\%, n = 13\ mois$$

$$V = 81000\,(1 + 0{,}185 \times \frac{13}{12})$$

فإن:

$$V = 97233{,}75\ DA$$

وبذلك فإن الفائدة المتحققة من العملية الاستثمارية هي:

$$V = C + I$$

$$97233{,}75 = 81000 + I$$

$$I = 97233{,}75 - 81000$$

$$I = 16233{,}75\ DA$$

وعليه فإن الفائدة تقدر ب:

ويمكن استنتاج أي عنصر من عناصر الفائدة باستخدام قانون الجمل، أي أنه يمكن استنتاج أصل المبلغ، معدل الفائدة، أو الفترة الزمنية وذلك على النحو التالي:

1- إيجاد أصل المبلغ:

$$C = \frac{V}{1 + i \times n}$$

2- إيجاد معدل الفائدة:

$$i = \frac{V - C}{C \times n}$$

3- إيجاد المدة (الفترة الزمنية):

$$n = \frac{V - C}{C \times i}$$

ملاحظة: استثمر خيضر مبلغ معين بمعدل 14% سنويا لمدة سنتين ونصف، فوجد أن جملة هذا المبلغ في نهاية تلك الفترة تساوي 18225 دج.

المطلوب: أحسب أصل المبلغ المستثمر؟.

الحل:

باستخدام القانون الأساسي للفائدة المركبة فإن:

$$V = C\ (1 + i \times n)$$

$$18225 = C\ (1 + 0{,}14 \times 2{,}5)$$

$$18225 = C\ (1{,}35)$$

وبذلك فإن أصل المبلغ هو:

$$C = \frac{18225}{1{,}35} = 13500\ DA$$

مثال: استثمرت مريم 3900 دج لمدة 205 يوما فوجدت أن جملة مبلغ الاستثمار في نهاية المدة هو 4087,2 دج.

المطلوب: أوجد معدل الفائدة البسيطة المستخدم؟.

الحل: باستخدام العلاقة التالية:

$$i = \frac{V - C}{C \times n}$$

$$i = \frac{4087{,}2 - 3900}{3900 \times \frac{205}{360}} = 0{,}0842$$

$$i = 8{,}42\%$$

مثال:

استثمر حيدر مبلغ 1750 دج بمعدل فائدة بسيطة قدره 12% سنويا، فوجد أن جملة المبلغ بعد فترة زمنية معينة ب 1904 دج.

المطلوب:

أوجد مدة الفائدة بالأيام؟.

$$n = \frac{V - C}{C \times i} = \frac{1904 - 1750}{1750 \times 0{,}12} = (0{,}73\ ans)$$

وبذلك فإن المدة بالأيام تساوي:

$$n = 0{,}73 \times 360 = 264\ jours$$

تمارين حول الفائدة البسيطة

التمرين الأول:

أوجد مبلغ رأس المال، الموظف ب 6% لمدة 120 يوم، علما أن الفائدة تقدر ب 43200 دج.

التمرين الثاني:

وظف شخص بفائدة بسيطة كالتالي:

المبلغ الأول: 2160 دج.

المبلغ الثاني: 4000 دج.

حيث أن المبلغ الثاني وظف بمعدل فائدة أكبر ب 4% من المعدل الأول، في حين أن المبلغ الثاني أكبر من المبلغ الأول 14000 دج.

المطلوب:

أحسب قيمة كل من المبلغ الموظف ومعدل التوظيف.

التمرين الثالث:

ماهو المعدل المتوسط لتوظيف رؤوس الأموال التالية: 40000 دج موظف بمعدل 6% لمدة 15 يوم، رأس المال الثاني ب 60000 دج موظف بمعدل 4,5% لمدة 25 يوم ومبلغ 75000 دج موظف بمعدل 7% لمدة 18 يوم؟.

التمرين الرابع:

1)- ماهو مقدار الفائدة البسيطة كرأس مال قدره 60000 دج موظف بمعدل 5% سنويا؟.

2)- ماهو مقدار الفائدة البسيطة لرأس مال قدره 80000 دج موظف بمعدل 4% لمدة 8 أشهر؟.

3)- ماهي مقدار القيمة المكتسبة لرأس مال قدره 150000 دج موظف بمعدل 6% لمدة 15 يوم.

4)- أوجد رأس المال الموظف، إذا علمت أن الفائدة تقدر ب 400000 دج والمعدل الموظف ب 2% لمدة شهرين؟.

5)- أوجد توظيف مدة توظيف رأس مال بمقدار 35000 دج بمعدل 3,5%.

التمرين الخامس:

وظف مبلغ مالي قيمته 600 دج بمعدل 6%، وبعد 4 أشهر تم توظيف مبلغ أخر قيمته 625 دج بمعدل 2%.

إذا علمت أن الجملة المكتسبة عن توظيف المبلغ الأول أكبر من الجملة المكتسبة للمبلغ الثاني ب 625 دج.

المطلوب: ماهو عدد الأشهر التي وظف فيها المبلغ الأول؟.

التمرين السادس:

مبلغين مجموعها 80000 دج وظفا بمعدل فائدة مختلف، الأول 3% سنويا والثاني ب 5% نصف سنوي.

إذا علمت أنها أنتجا في نهاية السنة فائدة قدرها 3580 دج.

المطلوب: أحسب قيمة كل مبلغ.

الدرس الثالث: الدفعات المتساوية بفائدة بسيطة

أولا: تعريف الدفعات.

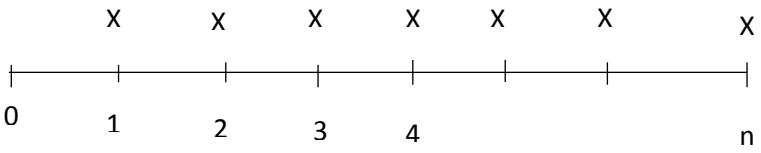
الدفعات هي عبارة عن مبالغ سنوية تدفع في إطار سداد كل من المبلغ الأصلي والفوائد. كما تتعلق أيضا بدفع الأقساط في إطار تأسيس رأس المال التفاعل، أو من أجل تغطية مصاريف التعليم العالي ولذلك فإن سلسلة من الدفعات تعني سلسلة من الدفعات العادية التي تحدث في فترات زمنية فقط أن الدفعات يمكن أن تكون نصف سنوية، فصلية أو شهرية.[1]

كما تعرف أيضا الدفعات Les annuités بأنها مجموعة من المبالغ التي تدفع بصفة دورية منتظمة وكل فترات متساوية، يطلق على المبلغ الذي يدفع دوريا بمبلغ الدفعة، وغالبا ما تدفع الدفعة السنوية فتسمى دفعة سنوية، وقد تدفع كل نصف سنة فتسمى نصف سنوية أو شهريا فتسمى دفعة شهرية، ويطلق على المدة التي تفصل بين دفعتين متتاليتين بفترة الدفعة.[2]

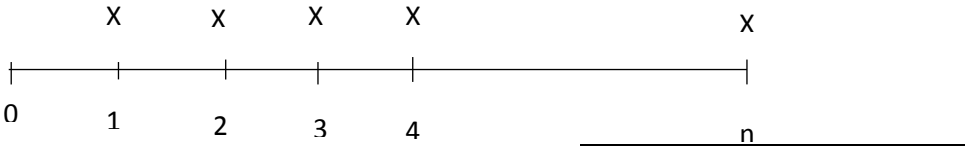
ثانيا: أنواع الدفعات المساوية:

تنقسم الدفاع المتساوية إلى نوعين:

أ)- دفعات التسديد: حيث أن هذه الدفعات المتساوية تدفع في نهاية كل فترة زمنية متفق عليها ومن الأمثلة عليها نجد سداد القروض وتدفع في نهاية المدة.



ب)- دفعات التوظيف: وتسمى أيضا بدفعات استثمارية، دفعات فورية حيث تدفع في بداية كل فترة زمنية وأفصل الأمثلة على ذلك هو إيداع مبالغ في البنك لغرض الادخار أو لغرض تسديد أقساط التأمين حيث تدفع كل بداية فترة زمنية.[3]



[1]- Étienne G.HARB.Firas Batnini, Xavier Durand, Mathématique financières,

[2]- باديس بوغرة، المدخل إلى الرياضيات المالية وتطبيقاتها، مرجع سبق ذكره، ص 166.

[3]- غازي فلاح المومني، الرياضيات المالية المعاصرة، مرجع سبق ذكره، ص 127.

إشارة:

في حالة عدم ذكر نوع الدفعة يجب اعتبارها دفعة عادية، والمبلغ الدوري الذي يدفع يسمى مبلغ الدفعة الفترة الزمنية ما بين الفترة الزمنية الأولى على الفترة الزمنية التالية تعتبر مدة الدفعة.[1]

ثالثا: حساب فوائد الدفعات المتساوية: وتحسب على النحو التالي:

فائدة الدفعة الأولى= قيمة الدفعة× معدل الفائدة× الفترة الزمنية للدفعة الأولى.

فائدة الدفعة الثاني= قيمة الدفعة× معدل الفائدة× الفترة الزمنية للدفعة الثانية.

فائدة الدفعة الثالثة= قيمة الدفعة× معدل الفائدة× الفترة الزمنية للدفعة الثالثة.

وهكذا....

كما أن مجموع فوائد الدفعات المتساوية= قيمة الدفعة× معدل الفائدة× مجموع الفترات الزمنية من الدفعات.

مثال 1: إذا كان لدينا دفعة في بداية كل أربعة أشهر مقدار الدفعة هو 200 و مدة سدادها سنين، فإذا كان معدل الفائدة البسيطة 4% سنويا.

المطلوب: أوجد مجموع الدفعات؟.

الحل:

الدفعة هي دفعة التوظيف أي تدفع في بداية المدة.

مدة توظيف الدفعة الأولى: 24 شهرا.

مدة توظيف الدفعة الثانية: 20 شهرا.

مدة توظيف الدفعة الثالثة: 16 شهرا.

مدة توظيف الدفعة الرابعة: 12 شهرا.

مدة توظيف الدفعة الأخيرة: 4 شهور.

[1]- غازي فلاح المومني، الرياضيات المالية المعاصرة، مرجع سبق ذكره، ص 127.

حيث أن مجموع فوائد الدفاع المتساوية = قيمة الدفعة× معدل الفائدة× مجموع الفترات الزمنية من الدفعات $= 200 \times \frac{4}{100}.(\frac{4+\cdots+12+16+20+24}{12})$

$$= 200 \times \frac{4}{100}.(\frac{84}{12})$$

$$= 56 \text{ دينار}$$

مثال 2: لدينا دفعة في نهاية كل 6 أشهر وقيمة الدفعة الواحدة 250 دج و مدة سدادها بعد 3 سنوات فإذا كان معدل الفائدة البسيطة 8% سنويا.

المطلوب: أوجد مجموع فوائد الدفعات؟.

الحل:

الدفعة هي دفعة التسديد حيث تدفع في نهاية كل مدة زمنية.

مدة توظيف الدفعة الأولى: 30 شهرا.

مدة توظيف الدفعة الثانية: 24 شهرا.

مدة توظيف الدفعة الثالثة: 18 شهرا.

مدة توظيف الدفعة الرابعة: 12 شهرا.

مدة توظيف الدفعة الأخيرة: 0.

مجموع فوائد الدفع = قيمة الدفعة× معدل الفائدة× مجموع فترات الدفعات

$$= 250 \times \frac{8}{100}.(\frac{0+\cdots+12+18+24+30}{12})$$

$$= 250 \times \frac{8}{100}.(\frac{90}{12})$$

$$= 150 \text{ دينار}$$

إيجاد جملة الدفعات المتساوية:

جملة الدفعات المتساوية هي عبارة عن مجموع الدفعات بالإضافة إلى فوائد هذه الدفعات وهي الفوائد الدورية (التي تدفع كل دفعات حسب كل وحدة زمنية).

جملة الدفعات= مجموع مبالغ الدفعات+ جملة فوائد هذه الدفعات.

مجموع مبالغ الدفعات= مبلغ الدفعة × عدد الدفعات.

جملة فوائد هذه الدفعات= قيمة الدفعة× معدل الفائدة× مجموع فترات الدفوعات.

$$V = C \times i \times n$$

مثال:

إذا كان لدينا دفعة شهرية تقدر ب 5000 دج، بمعدل فائدة بسيطة 3%.

المطلوب:

أحسب جملة هذه الدفعات في مدة سنة كاملة، إذا كان للإيداع:

1- في أول كل شهر.

2- في أخر كل شهر.

الحل:

الإيداع في أول كل شهر: وبالتالي نحن أمام دفعة توظيف.

1)- حساب الفوائد المحققة:

$$(\frac{1+\cdots+10+11+12}{12}).\frac{3}{100} + 5000$$

$$(\frac{78}{12}).\frac{3}{100} \times 5000 =$$

$$= 975 \text{ دينار}$$

2)- حساب الجملة المحصلة:

$$V = +I$$

$$V = (5000 \times 12) + 975 = 60975\ DA$$

للإيداع في نهاية كل شهر: وفي هذه الحالة نكون أمام توظيف.

أولا: نحسب الفوائد المحققة.

$$I = 500 \times 0{,}03(\frac{11 + 10 + 9 + 8 + \cdots + 0}{12})$$

$$I = 500 \times 0{,}03(\frac{66}{12})$$

$$I = 825\ DA$$

ثانيا: حساب الجملة المحصلة.

$$V = \ + I = (500 \times 12) + 825$$

$$I = 60825\ DA$$

تمارين حول الدفعات المتساوية بفائدة بسيطة

التمرين الأول:

دفعة متساوية تدفع كل شهرين، بلغت جملتها قبل سداد القسط الرابع مباشرة 3000 دج، أوجد مبلغ الدفعة المذكورة، إذا كان معدل الفائدة 6%سنويا، وكانت تدفع.

1- عند أول فترة.

2- عند خر كل فترة.

التمرين الثاني:

عدد من الدفعات المتساوية وظفت أولها لمدة 16 شهر، وأخرها لمدة 25 يوما وهذا بمعدل فائدة 3%.

إذا علمت أن الفائدة المحققة بعد 16 أشهر هي 444,25 دج.

المطلوب:

- أحسب قيمة وعدد الدفعات.

التمرين الثالث:

يودع أحد الأشخاص في أول كل شهر في بنك البركة مبلغا معينا من المال فوجد في نهاية 13 شهرا من بداية الإيداع أن جملة رصيده في بنك البركة هي 3323,25 دج، إذا علمت أن هذا البنك يحسب فائدة بمعدل 6,5% سنويا.

المطلوب:

- أوجد قيمة المبلغ المودع شهريا.

التمرين الرابع:

يودع الموظف " خيضر" صندوق التوفير والاحتياط في أول كل 20 يوم الأولى من نصف السنة الأولى بمبلغ 800 دج، وفي أول كل 20 يوم من نصف السنة الثانية مبلغ 1000، إذا كلن معدل الفائدة ب 2%.

المطلوب:

– أحسب الجملة المحصلة في نهاية السنة.

التمرين الخامس:

قامت مؤسسة صناعية بكراء 5 مخازن لمدة 3 سنوات وقد طالب صاحب المخزن الشركة بمايلي:

1– إما أن يدفع للإيجار بدفعات سنوية بمبلغ 300.000 دج للمخزن الواحد على تدفع بعد سنة.

2– إما أن يدفع الإيجار دفعة واحدة عند الاتفاق، بمعدل فائدة بسيطة ب 3,75%.

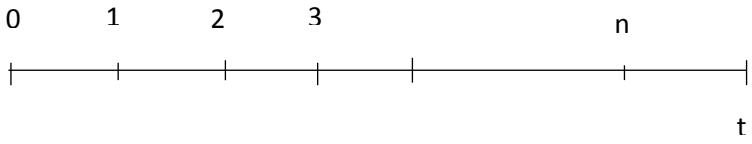
المطلوب:

– ماهو المبلغ الذي تدفعه هذه الشركة إذا اختارت الاقتراح الثاني؟.

الدرس الرابع : الرسملة والتحيين. La Capitalisation et l'actualisation

من خلال هذين المصطلحين يمكن مقارنة المبالغ التي تظهر عبر الزمن في تواريخ مختلفة: كالرسملة والتحيين حيث تسمح الأولى بحساب القيمة المستقبلة لمجموع الأموال التي يمتلكها الشخص حاليا، على عكس التحيين الذي يساعد على تحويل القيمة الحالية إلى مجموع من الأموال التي سنتحصل عليها مستقبلا.

إليكم المحور التالي الخاص بالزمن والذي نرمز له ب t.



التمثيل البياني للزمن

يمكن أن نعتبر فيما بعد عند التاريخ t_0 أن قيمة المبالغ تتعلق بالوقت الحالي أما عند التاريخ 1 نعني بها قيمة المبالغ في آخر فترة.

حيث تعود كل فترة من الفترات الموضحة في محور الزمن المبين أعلاه بصفة عامة إلى السنوات أو في فترات زمنية قصيرة الأجل (كالشهر، الثلاثي، السداسي...)، وكل فترة لها نفس حيث أن الأرقام الموجود على المحور تتعلق إما بنهاية الفترة أو بطريقة أخرى في بداية الفترة الموالية وعلى العموم ننطلق من مبدأ أن مجموع المبالغ المالية توظيف في نهاية الفترة.

القيمة المستقبلية: La Valeur future

يسمح حساب القيمة المستقبلية بمعرفة كم تكون القيمة في مدة n وذلك بالنسبة للمبلغ مالي الموضع حاليا.

وهذه المرحلة تسمى بالرسملة.

مثال: توظيف من أجل الحصول على t_n^1:

وضع شخص مبلغ من المال قدره 1200 دج في صندوق التوفير والاحتياط وبذلك بمعدل سنوي 2%. وخلال العام، أحكام كل وضع مبلغ 1000+ (1000+2%) أو 1000×1,02 أي 1020 دج.

وخلال عامين أصبح المبلغ يقدر ب 1040,40 دج وذلك إما بضرب 1020×1,02 أو مبلغ

1000×1.02^2 بمعنى أن مبلغ 1000 دج حاليا يصبح مساويا لمبلغ 1040,40 دج خلال العامين المقبلين.

كما أن القيمة المستقبلية ل مدة n وبمبلغ V_0 و بمعدل فائدة (i) للفترات تكتب على الشكل V_n.

$$V_n = V_0 \times (1+i)^n$$

القيمة الحالية: La Valeur Actuel

يسمح حساب القيمة الحالية بمعرفة العائد من المبلغ المستثمر حاليا بهدف الحصول على مبلغ معين في تاريخ لاحق ومحدد.

وبعبارات أخرى، نبحث عن القيمة الحالية (V_0) للمبالغ المستقبلية، أي ضرورة التحيين والمقصود من هذه العبارة تحويل مبالغ مالية بالدينار مستقبلا، مع الأخذ بعين الاعتبار تكاليف الفرص الضائعة، معدل التحيين.

ونعني بتكاليف الفرص، أنه عندما يستثمر العون الاقتصادي أمواله فإنه سيفدي بفرص حالية، وتحويلهم أملا في زيادة الحصول على مبالغ مالية مستقبلا.

كما يمكن أن تحصل على القيمة الحالية وفق العلاقة التالية:

$$V_0 = \frac{V_n}{(1+i)^n} = V_n \times (1+i)^{-n}$$

مثال: توظيف محقق لها t_0.

ما هو مبلغ التوظيف الواجب تحقيقه من طرف أجير، والذي يوقع تحت تصرفه يوفر تقاعده في 15 سنة المقبلة، بمبلغ 150000 دج مع العلم أن هناك إمكانية من توظيف مبالغه بمعدلات سنوية ثابتة ب 4 %.

الحل:

$$V_0 = 150000 \times (1+4\%)^{-15} = 83289,68$$

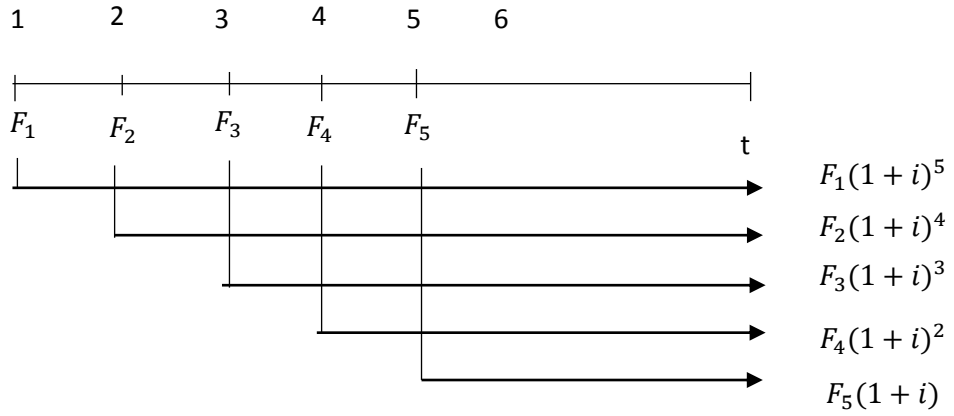
رسملة وتحيين التدفقات المتعددة:

في الواقع العمليين نادرا ما ينتج عن الاستثمار تدفقا واحد أو توظيف لا يحتاج إلا دفع واحد في هذه الحالة يمكن أن نعيد ذكر الصيغ السابقة، وذلك بتطبيق التدفقات على كل من القيمة الحالية والقيمة المستقبلية.

(القيمة المستقبلية) $V_n = F_1(1+i)^n + F_2(1+i)^{n-1} + \cdots + F_n(1+i)$

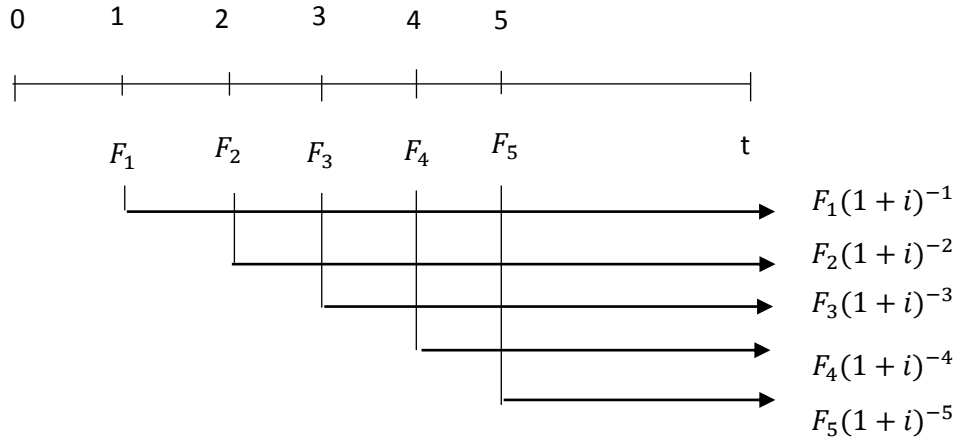
(القيمة الحالية) $V_0 = F_1(1+i)^{-1} + F_2(1+i)^{-2} + \cdots + F_n(1+i)^{-n}$

أما فيما يخص التمثيل البياني، فيمكن تقديم الرسملة والتدفقات المستقبلية وفق التمثيل البياني التالي:



تمثيل بياني للتدفقات المتعددة الرسملة في نهاية الفترة الخامسة

أما فيما يخص التمثيل البياني للتدفقات المرسملة المستقبلية فيمكن تقديمها بالطريقة التالية:



تمثيل بياني للتدفقات المرسملة المستقبلية في بداية الفترة 1.

مثال 1: حول رسملة التدفقات المتعددة.

وظف شخص مبلغ 2000 خلال العام (بداية الفترة) لمدة 4 سنوات بمعدل 5% سنويا؟

العمل المطلوب:

ما هي القيمة المرسملة في نهاية السنة الرابعة؟.

$$V_n = 2000(1{,}05)^4 + 2000(1{,}05)^3 + 2000(1{,}05)^2 + \cdots + 2000(1{,}05)$$

$$V_n = 9051{,}26DA$$

مثال 2: دفع مبلغ 5000 دج في العام (وذلك في نهاية الفترة) لمدة 6 سنوات.

العمل المطلوب:

ماهي القيمة الحالية عند التاريخ 0، مع العلم أن المعدل الحالي يقدر ب 4,5%؟.

$$V_0 = 5000(1{,}045)^{-1} + 5000(1{,}045)^{-2} + 5000(1{,}05)^{-3} + 5000(1{,}05)^{-4} + 5000(1{,}05)^{-5} + 5000(1{,}05)^{-6} = 25789{,}36\ DA$$

الحالات الخاصة بالتدفقات المتعددة:

1)- تدفقات ثابتة ومحددة الزمن في بعض الأحيان: وتكون هذه التدفقات **في حالة التحوصل الآلي/** التلقائي في حساب الادخار لمجموعة من المبالغ تسمى (F).

وبالتالي يمكن تبسيط طريقة حساب القيمة المستقبلية والقيمة الحالية بالشكل التالي:

$$V_0 = F \times \frac{(1-(1+i)^{-n})}{i}$$

$$V_n = F \times \frac{((1+i)^n - 1)}{i}$$

مثال: حول رسملة التدفقات الثابتة والمحددة في الزمن.

يستلم شخص ربع (دخل) سنويا بمبلغ 750 دج، بمعدل 10% لمدة 4 سنوات.

المطلوب:

أحسب القيمة الحالية عند n_0

الحل:

$$V_0 = 750 \times \frac{(1-1,10)^{-4}}{0,10} = 2377 \text{ DA}$$

مثال 2: يستلم شخص في بداية كل شهر في حسابه البنكي مبلغ 200 دج، الناتج عن التوظيف بمعدل 3% لمدة 5 سنوات.

أحسب القيمة المستقبلية في نهاية السنة الخامسة؟.

$$V_n = 200 \times \frac{((1,03)^{60}-1)}{0,03} = 3261 \text{DA}$$

2)- تدفقات ثابتة أفقية لامتناهية:

لما تكون التدفقات لامتناهية، فإننا أمام الريوع الدائمة المستمرة،[1] حيث أن التدفقات الأفقية غير محدودة وبالتالي من المستحيل حساب القيمة المستقبلية. ومن ناحية أخرى لا يمكن تقدير القيمة الحالية F للتدفقات الثابتة المستخرجة من الفترات على النحو التالي:

$$V_0 = \frac{F}{i}$$

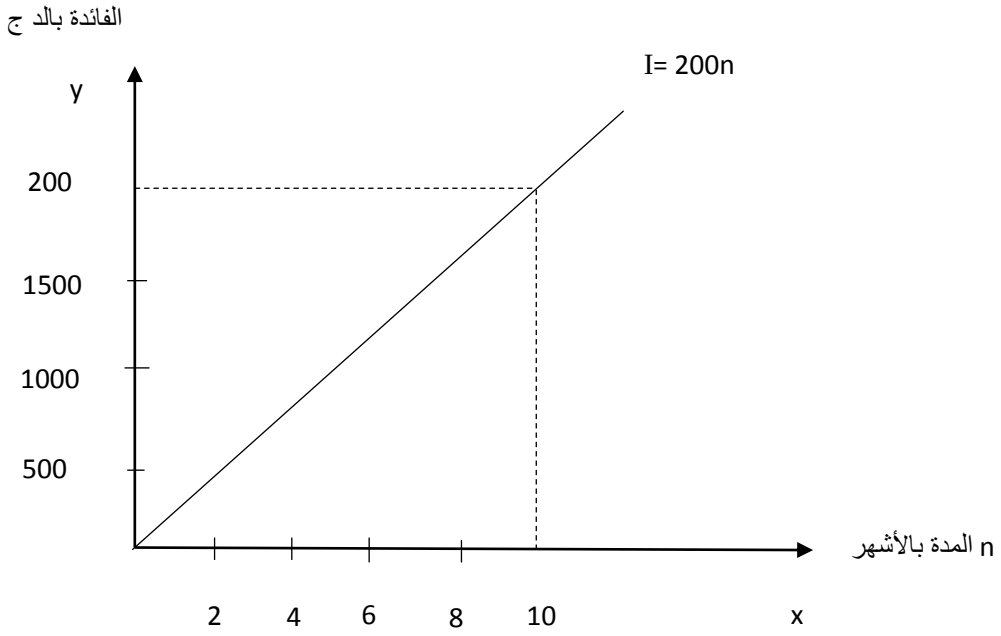
3)- ارتفاع التدفقات بمعدلات ثابتة على أفق غير محدود:

وتكون في هذه الحالة المؤسسات التي تقوم بإعادة تحيين تدفقات الخزينة أو الأرباح وهذه الأخيرة ترتفع كل عام بمعدل ثابت نرمز له ب g:

مع $i > g$

$$V_0 = \frac{F_1}{(i-g)}$$

[1]- سنتناولها في درس الدفعات الثابتة والدفعات المتغيرة.



التمثيل البياني للفائدة البسيطةI بدلالة n (المعبر عنها بالأشهر).

القيمة المكتسبة من رأس المال:

في حالة توظيف مبلغ معين، تكون القيمة المكتسبة على شكل دالة خطية متزايدة من الشكل (y= ax+b) بدلالة كل من رأس المال C، المعدل iأو المدة n.

وبطريقة أخرى يمكن التعبير عن القيمة المكتسبة وذلك حسب الاحتياج، بدلالة كل من C و و n.

$$V_n = C + I$$

$$V_n = C + \frac{C \times i \times n}{36000} \rightarrow V_n = \frac{i \times n}{36000}\ C + C$$

أو:

$$V_n = C + \frac{C \times i \times n}{36000} \rightarrow V_n = \frac{C \times n}{36000}\ i + C$$

أو:

$$V_n = C + \frac{C \times i \times n}{36000} \rightarrow V_n = \frac{C \times i}{36000}\ n + C$$

مثال: التمثيل البياني للقيمة المكتسبة V_n بدلالة n:

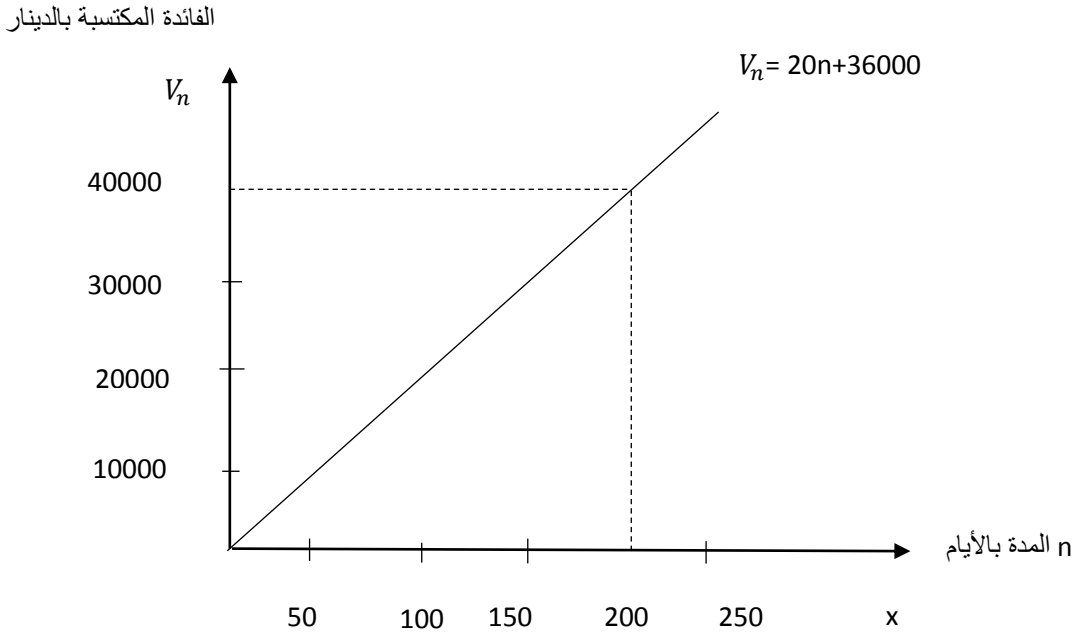
حيث يمكن تمثيل تغير القيمة الحالية المكتسبة من خلال رأس مال يقدر ب 36000 دج بمعدل 20%أوجد V_n بدلالة n.

$$V_n = \frac{36000 \times 20}{36000} n + 36000 = 20n + 36000$$

نفترض أن يوم n= 200

وعليه فإن

$$_n = (20 \times 200) + 36000 = 40000DA$$



التمثيل البياني للقيمة المكتسبة V_n بدلالة n (المعبر عنها بالأيام).

الدرس الخامس: خصم الديون والأوراق التجارية

أولا: مفهوم خصم الديون.

إذا اتفق المقترض مع المقرض على تسديد الدين، أو تقديم أوراق تجارية من (كمبيالات أو سندات أذنية) للحصول على قيمتها نقدا قبل ميعاد استحقاقها، فإن المقرض الذي يتمثل عادة في البنك، يقوم بخصم مبلغ معين نظير دفع قيمة الدين أو قيمة هذه الأوراق قبل الموعد المتق عليه، وتسديد هذه العملية بخصم الديون. وبناء على ذلك فإن خصم الدين يقصد به " سداد الديون قبل ميعاد واستحقاقها".

ويلاحظ أن عملية خصم الديون قبل موعد استحقاقها (Echéance)، ستجعل البنك يحل محل المقترض في الحصول على القيمة الاسمية للورقة التجارية من المقرض في تاريخ استحقاقها، في نظير أن يقوم بخصم مبلغ معين من المقترض مقابل دفع قيمة هذه الورقة قبل الموعد المتفق عليه، هذا بالإضافة إلى الحصول على عمولة معينة متفق عليها من القيمة الإسمية وتسمى عمولة البنك، وكذلك H المصروفات تحصيل على القيمة الاسمية للورقة التجارية ولا تدخل المدة أو معدل الخصم في الاعتبار.

والجدير بالذكر أن قيمة كل من عمولة البنك ومصاريف التحصيل تحسب كنسب مئوية من القيمة الإسمية للورقة التجارية، وبناءا على ذلك فإن مصاريف الخصم أو الأجيو تتكون من الخصم التجاري وعمولة البنك ومصاريف التحصيل ويشمل الخصم[1] على:

- **قيمة الخصم L'exempte:** والذي يحسب من تاريخ الخصم إلى تاريخ استحقاق الورقة التجارية استحقاق الورقة التجارية وذلك بمعدل فائدة محدد يسمى بمعدل الخصم.

- **العمولة La Commission:** وهي مبلغ يتقضاه البنك مقابل عملية الخصم وتحسب كنسبة مئوية من القيمة الاسمية دون الأخذ بعين الاعتبار عامل الزمن.

- **مصاريف أخرى:** وتسمى بمصاريف التحصيل والتي يتقاضاها البنك إذا كان المدين يقيم في منطقة ليست للبنك فرع فيها.

- **تاريخ الاستحقاق:** هو تاريخ الذي تصبح الورقة التجارية واجبة الدفع.

- **القيمة الإسمية:** هي قيمة الورقة التجارية عند تاريخ الاستحقاق.

[1]- يحي موسى حسين الجبالي، محمد إبراهيم خليل، الرياضة المالية، مركز التعليم المفتوح، جامعة بنها، 2011، ص 137.

- **القيمة الحالية:** قيمة الورقة التجارية في تاريخ الخصم = القيمة الإسمية- الخصم.

- **تاريخ الخصم:** هو التاريخ الذي نتوجه إلى البنك طالبين فيه خصم الورقة التجارية ما قبل تاريخ استحقاق.

- **قيمة الخصم:** القيمة الإسمية- القيمة الحالية.

- **الخصم:** هو عبارة عن فائدة عن المدة الفاصلة بين تاريخ الخصم وتاريخ الاستحقاق.

طرق خصم الديون: يمكن حساب قيمة الخصم والقيمة الحالية للدين بطريقتين مختلفتين هما:

1- طريقة الخصم العقلاني (الحقيقي).

2- طريقة الخصم التجاري.

1-1- طريقة الخصم العقلاني:

وفقا لهذه الطريقة فإن الخصم يحسب على أساس القيمة الحالية وليس على أساس القيمة الاسمية عكس ما هو معمول في طريقة الخصم التجاري.

وتحدد قيمة الخصم عن طريق القيمة الحالية الصحيحة كون أن مبلغها وظف بفائدة بسيطة بمعدل t حيث تكون جملتها في نهاية الفترة مساوية إلى القيمة الإسمية.[1]

وعليه فإن الخصم ما هو إلا الفائدة البسيطة المستحقة على مبلغ يعادل القيمة الحالية ويسمى بالخصم العقلاني أو الخصم الصحيح.

وبالتالي فعلاقة الخصم العقلاني تكتب كما يلي:

حالة الأيام:

$$ER = Va' \times t \times \frac{n}{360}$$

حالة الأشهر:

$$ER = Va' \times t \times \frac{n}{12}$$

[1]- بوغرة باديس، المدخل إلى الرياضيات المالية وتطبيقاتها، مرجع سبق ذكره، ص 64.

ولتطبيق هذه العلاقة يتعين معرفة القيمة الحالية " العقلانية".

لدينا: القيمة الإسمية= القيمة الحالية + الخصم العقلاني.

وهذا ما نعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$V_n = Va' + ER$$

$$V_n = Va' + Va' \times t \times \frac{n}{360}$$

إذ يمكن إيجاد القيمة الحالية الصحيحة بدلالة القيمة الإسمية.

$$V_n = Va'(1 + t \times \frac{n}{360})$$

$$Va' = \frac{V_n}{1 + t.\frac{n}{360}}$$

وبضرب البسط والمقام في 360 نجد:

$$Va' = \frac{360 \times V_n}{360 + t \times}$$

وبالرجوع إلى علاقة الخصم العقلاني نعوض القيمة الحالية بما يعادلها بدلالة القيمة الإسمية فنحصل على:

$$ER = \frac{360 \times V_n}{360 + t \times n} \times t \times \frac{n}{360}$$

أي:

$$ER = \frac{V_n \times t \times n}{360 + t \times n}$$

في حالة التعويض بالأشهر تطبق الصيغة السابقة مع تغيير قيمة بما يعادلها بالأشهر وتغيير 360 يوم

ب 12 شهر، فتصبح العلاقة السابقة كما يلي:

$$ER = \frac{V_n \times t \times n}{12 + t \times n}$$

مثال:

لدينا ورقة تجارية قيمتها الإسمية 50000 دج تستحق بعد 200 يوم بمعدل خصم 10%.

المطلوب:

أوجد قيمة الخصم العقلاني والقيمة الحالية للأوراق التجارية؟

الحل:

1)- حساب قيمة الخصم n:

وفقا للعلاقة التالية:

$$ER = \frac{V_n \times t \times n}{360 + t \times n}$$

نجد:

$$\frac{50000 \times 0{,}1 \times 200}{36000 + (0{,}1 \times 200)} = 27{,}76DA$$

2)- حساب القيمة الحالية:

الطريقة الأولى:

$$Va' = V_n - ER = 50000$$

أما الطريقة الثانية:

$$Va' = \frac{360 \times V_n}{360 + t \times n}$$

إشارة: في العادة عند حساب الخصم نتبع الخصم التجاري، إلا إذا نص صراحة على الخصم العقلاني.

2)- الخصم التجاري:

وهو الخصم الذي يحتسب على أساس القيمة الإسمية، لأن غالبا ما تكون قيمتها معلومة ويسمى بالخصم التجاري كونه مبلغ يقتطع من الوراق التجارية وذلك على أساس قيمتها الإسمية عن فترة زمنية محدودة من تاريخ الخصم إلى تاريخ الاستحقاق وبمعدل محدود.

ويرمز للخصم التجاري بالرمز EC في حالة الأيام والأشهر وفق العلاقة التالية:

حالة الأيام:

$$Ec = \frac{V_n \times t \times n}{36000}$$

حالة الأشهر:

$$Ec = V_n . t . \frac{n}{1200}$$

أما القيمة الحالية عند تطبيق طريقة الخصم التجاري فتمثل الفرق بين القيمة الإسمية والخصم التجاري كما سبقنا وأن أشرنا إليه في المقدمة.

$$Va' = V_n + Ec$$

وبالتعويض نحصل العلاقة التالية:

$$Va = V_n - \frac{Vn - t.n}{\frac{36000}{1200}}$$

$$Va' = V_n(1 - \frac{t.n}{\frac{36000}{1200}})$$

مثال:

كمبيالة قيمتها الإسمية 50000 دج تستحق السداد في 18 سيبتمبر 2016 وفي 20 جويلية 2016 اتفق المقترض مع المقرض على سداد قيمتها حالا، فإذا علمت أن معدل الخصم هو 5%.

المطلوب: أحسب قيمة الخصم والقيمة الحالية للكمبيالة.

الحل:

1)- حساب مدة الخصم n:

20/06/2016→ 18/09/2016 → 90يوم

2)- حساب الخصم التجاري:

$$Ec = V_n . t . \frac{n}{360} = 50000 \times 0{,}05 \times \frac{90}{360} = 625\ DA$$

3)- حساب القيمة الحالية Va:

$$Va = Vn - Ec = 50000 - 625 = 49375\ DA$$

العلاقة بين الخصم العقلاني والخصم التجاري:

من خلال تطرقنا إلى كل من طريقة الخصم العقلاني وطريقة الخصم التجاري، نلاحظ في أغلب الأحيان أن الخصم التجاري أكبر من الخصم العقلاني، وذلك لسبب بسيط كون أن القيمة الإسمية لأي ورقة تجارية تكون أكبر من قيمتها الحالية.[1]

حيث أن القيمة الحالية التجارية = القيمة الإسمية – الخصم التجاري.

والقيمة الحالية العقلانية= القيمة الإسمية– الخصم العقلاني.

ولتبيان العلاقة الموجودة بين الخصم العقلاني والخصم التجاري، نقوم بحساب الفرق بينهما كما يلي:

نرمز للفرق بالرمز D على الشكل التالي **حيث:**

$$D = Ec - ER$$

الخصم العقلاني– الخصم التجاري= الفرق

$$D = \left(V_n . t . \frac{n}{360}\right) - Va' . t . \frac{n}{360}$$

$$D = (Vn - Va')\ t \times \frac{n}{360}$$

وعليه فالفرق بين Vn و Va'هو عبارة عن الخصم العقلاني.

وبتعويض علاقة الخصم العقلاني بقيمته في العلاقة الأخيرة يصبح الفرق بين الخصمين كما يلي:

$$D = \frac{Vn \times t \times n}{360 + t \times n} . t . \frac{n}{360}$$

بمعنى أن فائدة الخصم العقلاني= الخصم التجاري– الخصم العقلاني.

مثال: دين قيمته الإسمية 2250 دج يستحق بعد 22 يوما، خصم بمعدل 3,5%.

المطلوب:

أحسب الخصمين التجاري والخصم العقلاني والفرق بينهما.

[1]– بوغرة باديس، مدخل إلى الرياضيات المالية وتطبيقاتها، مرجع سبق ذكره، ص 67.

الحل:

1)- الخصم التجاري:

$$Ec = Vn \times t.\frac{n}{360} = 2250 \times 0{,}035 \times \frac{22}{360}$$

$$Ec = 4{,}8125DA$$

2)- الخصم العقلاني:

$$ER = \frac{Vn \times t \times n}{360 + t \times n} = \frac{2250 \times 0{,}035 \times 22}{360 + 0{,}035 \times 22} = 4{,}8022\ DA$$

3)- الفرق بينهما D: ويمكن إيجاد إما:

$$D = Ec - ER = 4{,}8125 - 4{,}8022 = 0{,}0103DA$$

أو:

$$D = \frac{Vn \times t \times n}{360 + t \times n} \times t \times \frac{n}{360} = 4{,}8022 \times \frac{3{,}5}{100} \times \frac{22}{360} = 0{,}0103$$

مثال: كمبيالة تستحق بعد 12 شهرا، فإن كان الفرق بين الخصم العقلاني والخصم الصحيح هو 21,736 دج، وكان معدل الخصم المطبق 12%، ماهي قيمتها الإسمية؟

الحل:

$$D = 21{,}736 = \frac{Vn \times t \times n}{360 + t \times n} \times t \times \frac{n}{360}$$

$$D = \frac{Vn \times 0{,}12 \times 360}{360 + 0{,}03 \times 360} \times \frac{12}{100} \times \frac{360}{360} = \frac{5{,}184}{362{,}88}Vn$$

$$21{,}736 = \frac{5{,}184}{362{,}88}Vn \rightarrow 7887{,}55968 = 5{,}184Vn$$

$$Vn = \frac{7887{,}55968}{5{,}184} = 1521{,}52$$

المعدل الإسمي والمعدل الحقيقي للخصم:

فالمعدل الحقيقي للخصم هو المعدل الذي إذا ضرب في قيمة الورقة التجارية والمدة الباقية عن تاريخ استحقاقها لأعطى قيمة الأجيو.

أما المعدل الإسمي للخصم هو المعدل الذي إذا ضرب في قيمة الورقة التجارية والمدة الباقية عن تاريخ استحقاقها لأعطى قيمة الخصم الذي هو محتوى في رقيمة الأجيو.

مع العلم أن:

الأجيو Agio = الخصم+ العمولات+ الرسم على القيمة المضافة.

مثال: في 2016/07/30 قام أحد التجار بخصم ورقة تجارب لدى البنك بقيمة إسمية 23000 دج تستحق بعد 4 اشهر وخصمت بمعدل 8,52% وعمولة 1% ومصاريف تحصيل بنسبة 0,6%.

المطلوب: أوجد معدل الخصم الحقيقي.

الحل: لحساب معدل الخصم الحقيقي نتبع إحدى الطريقتين التاليتين:

1)- طريقة تحويل نسب مصاريف الأجيو إلى نسب مئوية سنوية:

وفقا لهذه الطريقة يتعين الحصول على المعدلين المئويين السنويين للعمولة ومصاريف التحصيل.

نسبة العمولة المئوية:

$$\frac{1}{1000} \times 100 = 0{,}1\%$$

نسبة مصاريف التحصيل المئوية:

$$\frac{0{,}6}{1000} \times 100 = 0{,}06\%$$

معدل العمولة المئوي السنوي:

$$\frac{12}{4} \times 100 = 0{,}3\%$$

معدل مصاريف التحصيل المئوية السنوية:

$$0{,}06 \times \frac{12}{4} = 0{,}18\%$$

وعليه فالمعدل الحقيقي للخصم= 8,52%+ 0,3%+ 0,18%= 9%.

وقيمة الأجيو يمكن احتسابها اعتمادا على معدل الخصم العقلاني **حيث:**

$$Agio = Vn \times tr \times \frac{n}{360} = 23000 \times \frac{98}{100} \times \frac{4}{12} = 690\ DA$$

2)- طريقة استخلاص المعدل بدلالة قيمة الأجيو:

وحسب هذه الطريقة يتم إيجاد المعدل العقلاني بدلالة قيمة الأجيو وذلك بالتعويض في علاقة الخصم.

قيمة الخصم:

$$Ec = V_n.t.\frac{n}{360} = 23000 \times \frac{8{,}52}{100} \times \frac{4}{12} = 653{,}2\ DA$$

قيمة العمولة:

$$Com = V_n.t' = 23000 \times \frac{1}{1000} = 23\ DA$$

قيمة مصاريف التحصيل:

$$Fenc = V_n.t'' = 23000 \times \frac{0{,}6}{1000} = 13{,}8\ DA$$

الأجيو:

$$Agio = Ec + Com + Fenc = 653{,}2 + 23 + 13{,}8 = 690\ DA$$

$$Agio = Vn \times tr \times \frac{n}{360}$$

$$690 = 23000 \times tr \times \frac{4}{12}$$

$$690 = 7666{,}66tr$$

$$tr = \frac{690}{7666{,}66}$$

$$tr = 0{,}09 = 9\%$$

الدرس السادس: تسوية الديون وتكافؤ الوراق التجارية

أولا: تسوية الديون.

تسوية الديون قصيرة الأجل يقصد بها اتفاق المدين مع الدائن على استبدال الديون القديمة بديون جديدة، وبالتالي فغن تسوية الديون قصيرة الأجل تكون اتفاق كل من المدين والدائن على الطريقة التي يقوم بموجبها المدين باستبدال الديون القديمة الأصلية أو جزء منها بدين أو ديون أخرى جديدة بدلا من سداد المدين للديون القديمة في ميعاد استحقاقها، والقاعدة العامة لتسوية الديون قصيرة ألجل هي استخدام معادلة القيمة التي تساوي قيمة الديون القديمة في تاريخ محدد يسمى تاريخ التسوية بقيمة الديون الجديدة في نفس التاريخ، وبالتالي تكون القاعدة العامة كما يلي:

قيمة الديون القديمة في تاريخ التسوية= قيمة الديون الجديدة في تاريخ التسوية.

والجدير أن قيمة الدين تحسب عن أنها جملة مبلغ الديون إذا كان تاريخ التسوية بعد تاريخ استحقاق الدين الأصلي، كما ان قيمة الدين تحسب على أنها القيمة الحالية لمبلغ الدين إذا كان تاريخ التسوية قبل تاريخ استحقاق الدين الأصلين كما ان قيمة الدين تساوي نفس قيمة مبلغ الدين إذا كان تاريخ التسوية هو نفس تاريخ استحقاق الدين الأصلي، ويجب أن تحسب القيمة الحالية في تاريخ التسوية على أساس الخصم التجاري، ما لم ينص خلاف ذلك.[1]

مثال: شخص مدين بالمبالغ التالية:

الدين (1): قيمته 15000 يستحق دفعه بعد 4 أشهر.

الدين (2): قيمته 10800 يستحق دفعه بعد 14 شهرا.

الدين (3): قيمته 3000 يستحق دفعه بعد، 15 شهرا.

فإذا طلب المدين باستبدال هذه الديون الثلاثة بثلاثة ديون أخرى متساوية لها بنفس القيمة الإسمية على أن الدين الأول يستحق بعد 6 أشهر والدين الثاني بعد 8 أشهر والدين الثالث بعد 10 أشهر.

المطلوب: فما قيمة كل من هذه الديون علما بأن معدل الفائدة المستعمل 8% سنويا؟

[1]– يحي موسى حسين الجبالي ومحمد إبراهيم خليل، الرياضة المالية، مرجع سبق ذكره، ص 160.

الحل:

نفرض أن قيمة كل دين من الديون الجديدة هي:

القيمة الحالية للديون الأصلية:

$$15000\left(1-\frac{8\times 4}{1200}\right)+10800\left(1-\frac{8\times 14}{1200}\right)+3000\left(1-\frac{8\times 15}{1200}\right)=27092\ DA$$

القيمة الحالية للديون الجديدة:

$$=\mathrm{x}\left(1-\frac{8\times 6}{1200}\right)+x\left(1-\frac{8\times 8}{1200}\right)+x\left(1-\frac{8\times 10}{1200}\right)$$
$$=0{,}96x+0{,}94x+0{,}933x=2{,}84x$$

القيمة الحالية للديون الجديدة= القيمة الحالية للديون الأصلية.

$$2{,}84x=27092$$
$$x=\frac{27092}{2{,}84}$$
$$x=9539{,}43\ DA$$ ديون جديدة.

للإشارة فقط ان العدد 2,84 x يجب أخذ كل الأرقام بعد الفاصلة لتتحصل على هذا العدد.

2)- طرق تسوية الديون وتكافؤ الوراق التجارية:

في بعض الحيان قد يظهر كل من المقرض أو المقترض تكافؤ الوراق التجارية بطرق وتواريخ جديدة تتناسب مع ظروف كل الطرفين المتفق عليها.

ولكي تتحقق عملية تكافؤ الأوراق التجارية يجب توفر شرط رئيسي وهو ضرورة تكافؤ الأوراق التجارية القديمة مع الوراق التجارية الجديدة.

وقبل التطرق إلى طرق تسوية الديون وتكافؤ الأوراق التجارية نعرف أولا مفهوم الأوراق التجارية وتكافؤها.[1]

أ)- **الأوراق التجارية:** وهي عبارة عن وثائق قانونية تستخدم في العمليات المالية الجلة (كالسفتجة(الكمبيالة)، السند لأمر).

[1]- بوعزة باديس، مدحل إلى الرياضيات المالية وتطبيقاتها، مرجع سبق ذكره، ص 93.

أما **تكافؤ الأوراق التجارية:** فيعرف على أنه عملية استبدال ورقة تجارية بورقة تجارية أخرى، شرط هذا التبادل هو تساوي قيمتها الحالية.

1)- التكافؤ بالخصم التجاري:

نقول عن ورقتين تجاريتين قيمتها الإسمية Vn_1 و Vn_2 أنهما متكافئتين إذا تساوى قيمتها الحالية $Va_1 = Va_2$، وذلك بعد خصمهما بمعدل خصم ، لفترتي استحقاق n_1 و n_2 على التوالي:[1]

$$Vn_1\left(1 - t \times \frac{n_1}{360}\right) = Vn_2\left(1 - t \times \frac{n_2}{360}\right)$$

$$\frac{Vn_1}{Vn_2} = \frac{\left(1 - t \times \frac{n_1}{360}\right)}{\left(1 - t \times \frac{n_2}{360}\right)}$$

مثال:

لدينا ورقة تجارية قيمتها الإسمية 8000 دج، تستحق بعد 120 يوم، تم استبدالها بورقة تجارية أخرى تستحق بعد بمعدل خصم 3%.

المطلوب: أحسب القيمة الإسمية للورقة الثانية؟.

الحل:

القيمة الحالية للورقة الأولى بالطريقة التجارية هي:

$$Va_1 = Vn_1\left(1 - t \times \frac{n_1}{360}\right) = 8000\left(1 - 0{,}03 \times \frac{120}{360}\right) = 7920\ DA$$

التكافؤ: $Va_1 = Va_2$

$$Va_1 = Vn_2\left(1 - t \times \frac{n_2}{360}\right)$$

$$7920 = Vn_2\left(1 - 0{,}03 \times \frac{120}{360}\right)$$

$$7920 = Vn_2 \times 0{,}99$$

$$Vn_2 = \frac{7920}{0{,}99}$$

$$Vn_2 = 8000DA$$

[1]- بوعزة باديس، نفس المرجع السابق، ص 94.

ويمكن إيجاد 2 أيضا بتطبيق شرط التكافؤ السابق.

$$\frac{Vn_1}{Vn_2} = \frac{\left(1 - t \times \frac{n_1}{360}\right)}{\left(1 - t \times \frac{n_2}{360}\right)}$$

2)- التكافؤ بالخصم العقلاني:

لدينا ورقتين تجاريتين، قيمتها الإسمية Vn_1, Vn_2، تستحق بعد فترة n_1 و n_2 على التوالي بمعدل خصم t ، نجد أن قيمتها الحالية Va'_1، Va'_2 تحسب كما يلي:

$$Vn_1 = Va'_1\left(1 + t \times \frac{n_1}{360}\right) \rightarrow Va'_1 = \frac{Vn_1}{1 + t \times \frac{n_1}{360}}$$

$$Vn_2 = Va'_2\left(1 + t \times \frac{n_2}{360}\right) \rightarrow Va'_2 = \frac{Vn_2}{1 + t \times \frac{n_2}{360}}$$

نقول عن الورقتين التجاريتين Vn_1 و Vn_2 أنهما متكافئتين، إذا تساوت قيمتها الحالية العقلانية ونكتب:

$$Va'_1 = Va'_2$$

$$\frac{Vn_1}{1 + t \times \frac{n_1}{360}} = \frac{Vn_2}{1 + t \times \frac{n_2}{360}}$$

$$\frac{Vn_1}{Vn_2} = \frac{1 + t \times \frac{n_1}{360}}{1 + t \times \frac{n_2}{360}}$$

هذه الأخيرة يمكن كتابتها بالشكل التالي:

مثال:

لدينا ورقة قيمتها الإسمية خصمت قبل تاريخ استحقاقها ب 15 أشهر، بمعدل خصم 20%، باستخدام طريقة الخصم العقلاني أحسب القيمة الإسمية للورقة التجارية التي تكافؤها إذا كانت تستحق بعد 20 شهر.

الحل:

نحسب أولا القيمة الحالية للورقة التجارية الأولى Va'_1.

$$Vn_1 = Va'_1\left(1 + t \times \frac{n_1}{12}\right)$$

$$4500 = Va'_1\left(1 + 0{,}2 \times \frac{15}{12}\right)$$

$$4500 = 1{,}25Va'_1$$

$$Va'_1 = \frac{4500}{1{,}25} = 3600DA$$

ولتحقيق شرط التكافؤ لابد من أن تتساوى القيمة الحالية العقلانية للورقة الأولى مع القيمة الحالية العقلانية للوقة الأولى مع القيمة الحالية العقلانية للورقة الثانية التي تستحق بعد 20 شهرا.

$$Vn_2 = Va'_2\left(1 + t \times \frac{n_2}{12}\right)$$

$$Vn_2 = 3600\left(1 + 0{,}2 \times \frac{20}{12}\right)$$

$$Vn_2 = 4800DA$$

وعليه فالورقة التجارية التي قيمتها الإسمية 4500 دج تكافئ الورقة التجارية التي قيمتها الإسمية 4800 دج، إذا خصمها بالطرقة العقلانية بمعدل 10% قبل تاريخ استحقاقها ب 15 و20 شهرا على التوالي.

الاستحقاق المشترك:

يقصد به استبدال الورقة التجارية أو الأوراق التجارية بورقة تجارية أو عدة أوراق أخرى شرط هذا التبادل تساوي القيمة الحالية.

أي:

$$Vn_x = Va_1 + Va_2 + Va_3$$

$$Vn_x = Vn_1\left(1 - \frac{t \times n}{36000}\right) + Vn_2\left(1 - \frac{t \times n}{36000}\right) + Vn_3\left(1 - \frac{t \times n}{36000}\right)$$

مثال 1: تاجر مدين بثلاث أوراق تجارية تتمثل معطياتها فيما يلي:

الورقة (1): تستحق يوم N/07/26 ب 43000 دج.

الورقة (2): تستحق يوم N/08/24 ب 26000 دج.

الورقة (3): تستحق يوم N/09/18 ب 30000 دج.

تقدم إلى دائنه بتاريخ N/06/20 ليعوض الأوراق السابقة بورقة وحيدة تستحق في N/08/31.

المطلوب: أوجد القيمة الإسمية لهذه الورقة علما أن معدل الخصم 8%.

الحل:

لدينا:

$$Vn_x = Va_1 + Va_2 + Va_3$$

$$Vn_x = Vn_1\left(1 - \frac{t \times n}{36000}\right) + Vn_2\left(1 - \frac{t \times n}{36000}\right) + Vn_3\left(1 - \frac{t \times n}{36000}\right)$$

$$Vn_x = 43000\left(1 - \frac{8 \times 36}{36000}\right) + 26000\left(1 - \frac{8 \times 65}{36000}\right) + 30000\left(1 - \frac{8 \times 90}{36000}\right)$$

$$Vn_x = 97680{,}44DA$$

مثال 2: بتاريخ 2016/1/1، كان أحد التجار مدينا بالأوراق التجارية التالية:

الورقة الأولى: 3600 دج تستحق بتاريخ 2016/01/20.

الورقة الثانية: 3000 دج تستحق بعد 2016/03/16.

الورقة الثالثة: 9000 دج تستحق بعد 2016/03/06.

وبتاريخ 2016/3/1 قرر هذا التاجر تسوية هذه الأوراق بتحرير شيك بنكي إذا كان معدل الخصم 8%. أحسب قيمة المبلغ المحرر في الشيك؟.

الحل: نعلم أن تاريخ التكافؤ هو 1 مارس 2016 وفيه تكون القيم الحالية للأوراق الثلاث مساوية للمبلغ المحرر في الشيك بهذا التاريخ أي:(Va= Vr)

وعليه:

$$Va = \sum Va_i$$

فإن:

مدة التأخير عن سداد الورقة الأولى هي 40 يوم.

المدة المتبقية عن الورقة الثانية من تاريخ التكافؤ لتاريخ الاستحقاق هي 15 يوم.

المدة المتبقية عن الورقة الثانية من تاريخ التكافؤ لتاريخ الاستحقاق هي 5 أيام.

وعليه فإن:

$$Vn = 3600\left(1 - 0{,}080 \times \frac{40}{360}\right) + 3000\left(1 - 0{,}080 \times \frac{15}{360}\right) + 9000\left(1 - 0{,}080 \times \frac{5}{360}\right)$$

$$Vn = 3568 + 2990 + 8990$$

$$Vn = 15548\ DA$$

الاستحقاق المتوسط:

وهو حالة خاصة من الاستحقاق المشترك له نفس مبادئه، إذ يقوم على فكرة استبدال أوراق تجارية قديمة بأوراق تجارية قيمتها الإسمية تعادل مجموع القيم الإسمية للأوراق القديمة ويسمى بتاريخ الاستحقاق الدين الجديد بتاريخ الاستحقاق الدين الأول وتاريخ استحقاق الدين الأخير.

ولتحقيق التكافؤ لابد من تحقق الشرط التالي:

$$Va = \sum Va_i$$

$$Vn - Vn \times t \times \frac{n}{360} = Vn_1 - Vn_1 \times t \times \frac{n_1}{360} + Vn_2 - Vn_2 \times t \times \frac{n_2}{360} +$$

$$Vn_3 - Vn_3 \times t \times \frac{n_3}{360} + \cdots \ldots + Vn - Vn \times t \times \frac{n_n}{360}$$

وبما أن t هو نفسه وأن Vn(القيمة الإسمية) متساوية فإن العلاقة السابقة تصبح كما يلي:

$$Vn \times \frac{n}{360} = Vn_1 \times \frac{n_1}{360} + Vn_2 \times \frac{n_2}{360} + \cdots \ldots + Vn \times \frac{n_n}{360}$$

$$Vn \times n \times \frac{1}{360} = (Vn_1 \times n_1 + Vn_2 \times n_2 + \cdots \ldots + Vn_n \times n_n)\frac{1}{360}$$

ومن هذه الأخيرة نستخلص العلاقة لحساب تاريخ الاستحقاق كما يلي:

$$N = \frac{Vn_1 \times n_1 + Vn_2 \times n_2 + \cdots \ldots + Vn_n \times n_n}{Vn}$$

$$N = \sum_{i=1}^{n} (\frac{Vn_i \times n_i}{Vn})$$

حيث تمثل تاريخ الاستحقاق الوسطي.[1]

مثال: بتاريخ 2016/06/1 كانت مريم مدينة بالكمبيالات التالية:

- الكمبيالة الأولى: 4000 دج تستحق بتاريخ 2016/12/31.

- الكمبيالة الثانية: 6000 دج تستحق بتاريخ 2017/09/2.

- الكمبيالة الثالثة: 8000 دج تستحق بتاريخ 2018/01/2.

وأرادت مريم استبدال هذه الكمبيالة بكمبيالة وحيدة قيمتها 18000 دج.

المطلوب:

أحسب تاريخ استحقاق هذه الكمبيالة إذا علمت أن معدل الخصم 3%.

الحل:

في حالة الاستحقاق المتوسط، يمكننا الاستغناء عن معدل الخصم من خلال تطبيق قانون تاريخ الاستحقاق المتوسط.

مع العلم أن مدة استحقاق الأوراق القديمة هي على التوالي 122، 366، 488 يوم.

[1]– بوغرة باديس، مدخل إلى الرياضيات وتطبيقاتها، مرجع سبق ذكره، ص 101.

$$N = \frac{Vn_1 \times n_1 + Vn_2 \times n_2 + Vn_3 \times n_3}{Vn}$$

$$N = \frac{4000 \times 122 + 6000 \times 366 + 8000 \times 480}{18000}$$

$$N = \frac{488000 + 2196000 + 3904000}{18000}$$

$$N = \frac{6588000}{18000}$$

$$N = 366\ jours$$

وتاريخ الاستحقاق الوسطي هو تاريخ استحقاق الورقة الثانية، أي بتاريخ 2/ سبتمبر 2017 اما لو افترضنا أن تاريخ التكافؤ هو تاريخ استحقاق الورقة التجارية الأولى، فتصبح مدة الاستحقاق للأوراق الثلاث القدمية على التوالي: 0، 244، 366 يوم.

$$N = \frac{Vn_1 \times n_1 + Vn_2 \times n_2 + Vn_3 \times n_3}{Vn}$$

$$N = \frac{4000 \times 0 + 6000 \times 244 + 8000 \times 366}{18000}$$

$$N = \frac{1464000 + 2928000}{18000}$$

$$N = \frac{4392000}{18000}$$

$$N = 244\ jours$$

224 يوم تحسب بعد تاريخ استحقاق الورقة الأولى أي من تاريخ 2016/12/31 وبالتالي نجد تاريخ استحقاق الورقة الجديدة هو نفسه المحسوب أنفا، أي 2017/09/02.

تمارين حول الخصم وتكافؤ الأوراق التجارية

التمرين الأول:

- ماهو مبلغ الخصم الناتج عن تسبيق قدره 18000 دج المقدم من طرف البنك بمعدل 6% لمدة 60 يوم.
- ماهو معدل الفائدة المطبق من طرف البنك، إذا كان السلفة تقدر ب 15000 دج والمستحقة على 50 يوم، في حين أن الخصم قدر ب 1666,67 دج.
- أوجد تاريخ إرجاع القرض المقدر ب 1080000 إلى البنك والمستحق في 30 جويلية بمبلغ خصم يقدر ب 25200 دج بمعدل فائدة ب 14%.

التمرين الثاني:

-أحسب تاريخ تكافؤ الورقتين التاليتين بمعدل خصم 6%.

الورقة التجارية الأولى: قيمتها الإسمية 8800 دج تستحق في 18 نوفمبر.

الورقة التجارية الثانية: قيمتها الإسمية 5800 دج تستحق في 31 أوت.

التمرين الثالث:

خصم " خيضر" ورقتين تجاريتين بمعدل 3,75% في حين أن الورقة الأولى تستحق بعد 30 يوم والورقة الثانية تستحق بعد 60 يوم. علما أن القيمة الإسمية للمورقة الأولى يساوي $\frac{3}{2}$ من القيمة الإسمية للورقة الثانية بمجموع الخصمين هو 242000 دج.

المطلوب:

- أوجد القيمة الإسمية للورقتين.

التمرين الرابع:

تمتلك المؤسسة X ورقة تجارية ب 12500 دج كقيمة إسمية على أن تستحق في 5 ماي. وفي 15 مارس قامت المؤسسة "X " بمفاوضات مع البنك حول الخصم وذلك بمعدل 9%، تكاليف d'endos 0,60%، رسوم المناولة ب d'endos 1,50 دج خارج الرسم.

المطلوب:

- أوجد مبلغ الخصم.
- أوجد القيمة الحالية.
- أوجد مبلغ الأجيو.
- أوجد المعدل الحقيقي للخم.

التمرين الخامس:

ورقة تجارية تستحق الدفع بعد 120 يوم، خصمت بمعدل 5% بعمولة بنكية 1,8%، وعمولة التطهير ب 2%.

المطلوب:

-أوجد القيمة الإسمية.

الدرس السابع: الفائدة المركبة L'intéret composé

عند حساب الفوائد البسيطة، كان أساس الحساب يتم على رأس المال الموظف أو المبلغ المقرض في بداية العملية، وهذه الطريقة في الحساب تتم على المدى القصير (عادة سنة).

أما عندما تصبح عملية الاقتراض عملية طويلة المدى (لعدة سنوات) فمن الطبيعي أن تعتبر الفوائد البسيطة التي أنتجها رأس المال في السنة الأولى جزء من رأس المال الجديد الذي ستحسب عليه الفائدة خلال السنة القادمة، حيث يصبح رأس المال الجديد عبارة عن رأس المال الابتدائي مضافا إليه فائدة السنة الموالية.

وعليه نستنتج أن الفائدة المركبة تقوم على مبدأ رسملة الفوائد، أي في نهاية كل فترة زمنية يتم حساب فوائدها تم نضيفها إلى رأس المال مباشرة فتصبح جزء أساسي منه لاحتساب الفوائد للفترة الموالية.

مثال:

أودع حيدر في البنك مبلغا قدره 6000 دج بمعدل فائدة مركبة سنوية 6%.

المطلوب:

حساب الفوائد المترتبة عن هذا المبلغ في نهاية السنة؟.

الحل:

الفوائد المترتبة في نهاية السنة هي:

$$I = 6000 \times t = 6000 \times 0{,}06 = 360\ DA$$

أما في بداية السنة الثانية يكون المبلغ الجديد مساويا للمبلغ الأصلي مضافا إليه فائدة السنة الأولى، أي:

$$6000 + 360 = 6360\ DA$$

وهذا المبلغ هو أساس احتساب فائدة السنة الثانية حيث:

$$I = 6360 \times t = 6360 \times 0{,}06 = 381{,}6\ DA$$

وفي بداية السنة الثالثة يصبح المبلغ مساويا للمبلغ الموظف في بداية السنة الثانية مضافا إليه فائدة تلك السنة.

أي:

$$6360 \times 381{,}6 = 6741{,}6\ DA$$

وهذا الأخير تحسب على أساسه فائدة السنة الثالثة وهكذا.

قانون الفائدة المركبة:

تتحدد قيمة الفائدة المركبة بنفس محددات وعناصر الفائدة البسيطة وهي:

- **المبلغ الأصلي:** ويقصد به المبلغ الموظف أو مبلغ القرض ويرمز له بالرمز C.
- **معدل الفائدة:** ويعطي على شكل نسب مئوية في الغالب ويرمز له بالرمز t.
- **المدة:** وتمثل عدد الفترات الزمنية.

يلخص قانون الفائدة المركبة في الجدول الموالي على النحو التالي:

المدة	المبلغ الموظف	الفائدة	القيمة المحصلة في نهاية السنة (الجملة)
1	C	$I_1 = C \times t$	$C_1' = C + Ct = (C + t)^n$
2	C(1+t)	$I_2 = C(1+t) \times t$	$C_2' = C(1+t) + C(1+t)^t$ $= C(1+t)(1+t)$ $= C(1+t)^2$
3	$C(1+t)^2$	$I_3 = C(1+t)^2 \times t$	$C_3' = C(1+t)^2 + C(1+t)^2 \times t$ $= C(1+t)^2(1+t)$ $= C(1+t)^3$
. . . n	$C(1+t)^n$	$I_n = C(1+t)^n \times t$	$C_n' = C(1+t)^n(1+t)$ $= C(1+t)^n$

ومن خلال ملاحظتنا لهذا الجدول نستنتج أن الجملة المكتسبة في نهاية الفترة ناتجة عن توظيف مبلغ الدين C بمعدل فائدة مركبة t مضروبا في عدد من الفترات n المراد حسابها وتحسب وفق العلاقة التالية:

$$C_n = C(1+t)^n$$

للإشارة فقط أن الجملة نرمز لها بالرمز C_n في الفائدة المركبة.

مثال 1: وظف شخص مبلغ 100.000 دج في بنك لمدة 5 سنوات بمعدل 6% سنويا.

المطلوب: أحسب جملة ما يتحصل عليه هذا الشخص؟.

الحل:

لدينا المعلومات التالية:

C= 10.000 DA

t= 6% (ans)

n= 5 ans

وعليه فإن:

$$C_n = C(1+t)^n$$

$$C_n = 100000(1+0{,}06)^5$$

$$C_n = 100000(1{,}06)^5$$

$$C_n = 100000(1{,}338225)$$

$$C_n = 133822{,}55\ DA$$

مثال 2: وظفت مريم مبلغ قدره 1000 دج في بنك " السلامة" بمعدل نصف سنوي 5% وبرسملة نصف سنوية لمدة 4 سنوات.

المطلوب: أحسب جملة ما تتحصل عليها مريم؟.

الحل:

$$C_n = C(1+t)^n$$

$$C_n = 1000(1+0{,}05)^8 = 1000(1{,}05)^8$$

$$C_n = 1477{,}45\ DA$$

ثانيا: استنتاجات من قانون الفائدة المركبة:

1)- حساب المبلغ الأصلي C: ونحسب المبلغ الأصلي بالطريقة التالية واعتمادا على قانون الجملة وعليه فإن C يساوي:

لدينا:

$$C_n = C(1+t)^n$$

كما يمكن كتابتها:

$$C = \frac{n}{(1+t)^n} \rightarrow C_n = C(1+t)^{-n}$$

أي أن:

$$C = \quad {}_n(1+t)^{-n}$$

مثال: اقترض حيدر مبلغ من المال لمدة 4 سنوات بمعدل فائدة مركبة 6%، فدفع في نهاية الفترة القرض فوائد قدرت بقيمة 100.000 دج.

الحل: انطلاقا من القانون:

$$C = \quad {}_n(1+t)^{-n}$$

نجد أن:

$$C = 100000(1+0{,}06)^{-4}$$

$$C = 100000(1{,}06)^{-4}$$

$$C = 79209{,}36\ DA$$

2)- حساب المعدل t:

من قانون الفائدة المركبة.

$$C_n = C(1+t)^n$$

نستنتج أن:

$$(1+t)^n = \frac{C_n}{C}$$

مثال: أحسب معدل الفائدة المركبة السنوي الذي وظفت على أساسه مبلغ 10000 دج لمدة 5 سنوات فأنتج فائدة في نهاية مدة التوظيف قدرها 15000 دج.

الحل:

لدينا المعلومات التالية:

C= 10000 DA

$C_n = 15000\ DA$

n= 5 ans

t= x

وعليه فإن:

$$(1+t)^n = \frac{C_n}{C}$$

$$(1+t)^5 = \frac{15000}{10000}$$

$$(1+t)^5 = 1{,}5$$

$$\sqrt[5]{(1+t)^5} = \sqrt[5]{1{,}5}$$

$$(1+t) = 1{,}08447$$

$$t = 0{,}08447$$

$$t = 8{,}44\%$$

إيجاد n :

$$(1+t)^n = \frac{C_n}{C} \rightarrow log(1+t)^n = log\frac{C_n}{C} \rightarrow nlog(1+t) = \log(\frac{C_n}{C})$$

أي:

$$n = \frac{\log(\frac{C_n}{C})}{log(1+t)}$$

مثال: وظف أحمد مبلغ من المال قدره 100.000 دج بمعدل فائدة مركبة 4% سنويا، فأنتج جملة قدرها 148024,42 دج.

الحل:

لدينا المعلومات التالية:

C= 100000 DA

$C_n = 148024{,}42\ DA$

n= x

t= 4%(ans)

وعليه فإن:

$$n = \frac{\log(\frac{n}{})}{log(1+t)}$$

$$n = \frac{\log(\frac{148024{,}42}{100.00})}{log(1+0{,}04)^n} = \frac{\log(1{,}4802442)}{log(1.04)^n}$$

$$n = 10\ ans$$

المعدلات المتناسبة والمعدلات المتكافئة:

في غالب الأحيان تحدد الفائدة سنويا ولكن في بعض الأحيان تحدد المعدلات سواء سداسيا، فصليا شهريا أو حتى يوميا:

1)- **المعدلات المتناسبة:**

هي معدلات تتناسب تماما مع المعدل السنوي ونحصل عليها بقسمة المعدل السنوي على عدد فترات المعدل المطلوب في سنة أو نستخدم القاعدة الثلاثية.

إن التعامل بالمعدلات المتناسبة لا يعطي نفس النتائج في حالة استخدام الفوائد المركبة بينما في الفوائد البسيطة تكون النتائج متساوية.

ويحسب المعدل المتناسب وفق العلاقة التالية:

$$t_k = \frac{t}{k}$$

حيث: k تمثل عدد مرات التوظيف خلال السنة الواحدة.

مثلا: معدل 08% تقابله المعدلات المتناسبة التالية:

$$8\ \% \leftarrow 12 \text{ شهر}$$

$$n \rightarrow 16 \text{ شهر}$$

$$n = 8 \times \frac{6}{12} = \frac{8}{2} = 4\%$$

- **المعدل السداسي:**

$$t_k = t_2 = \frac{08\%}{2} = 4\%$$

- **المعدل الثلاثي:**

$$t_k = t_4 = \frac{08\%}{4} = 2\%$$

- **المعدل الشهري:**

$$t_k = t_{12} = \frac{08\%}{12} = 0{,}66\%$$

المعدلات المتكافئة:

نظرا لأن الفوائد المرسملة تشكل متتالية هندسية لذلك يجب حساب معدل يكون مكافئا للمعدل السنوي الذي يعطي نفس النتائج المعدل المتكافئ.

ونقول عن معدلين أنهما متكافئان إذا اختلفا في قيمتها وفي فترتي رسملتها، لكنهما ينتجان نفس الجملة المكتسبة لأي فترة زمنية مشتركة ومحددة.

ويحسب هذا المعدل وفق العلاقة التالية:

حيث:

$$(1+t)^1 = (1+t)^2 = (1+t)^4 = (1+t)^{12}$$

تمرين:

وظف شخص مبلغ 20000 دج لدة 5 سنوات بمعدل فائدة مركبة ب 4% لكل سداسي.

المطلوب:

أحسب الجملة بطريقتين.

الحل:

حساب الجملة أولا:

لدينا:

C= 20000 DA

n= 5 ans

t= 4%(ans)

$$C_n' = C(1+t)^n$$

نقوم بتحويل المدة باستخدام الطريقة الثلاثية:

$$1\ ans \leftarrow\ 2\ Semestre$$

$$5\ \text{ans} \rightarrow x$$

$$x = \frac{5\ ans\ \times 2\ semestres}{1 ans}$$

$$x = 10\ semestres$$

$$C_n = 20000(1+0{,}04)^{10} = 29604{,}88\ DA$$

$$C_n' = 20000(1+t)^5 = 29604{,}88$$

$$(1{,}04)^{10} = 29604{,}88$$

$$(1{,}04)^{10} = (1+t)^5$$

$$1{,}480244 = (1+t)^5$$

$$1 + t = 1{,}0816$$

$$t = 1 - 1{,}0816$$

$$t = 0{,}0816$$

$$t = 8{,}16\%$$

أما لو قمنا بتحويل المعدل باستخدام الطريقة الثلاثية:

$$4\% \leftarrow 6\ mois$$

$$\text{x} \rightarrow 12\ mois$$

$$x = \frac{12\ mois\ \times 4\%}{6\ mois} = 8\%$$

وعليه فإن الجملة تساوي:

$$C'_n = 20000(1{,}08)^5 = 29386{,}56$$

2)- حساب الجملة وفق المعدل المتكافئ:

لدينا:

$$(1+t)^1 = (1+t)^2$$

$$1 + t = (1 + 0{,}04)^2$$

$$1 + t = (1{,}04)^2$$

$$1 + t = 1{,}0816$$

$$t = 1{,}0816 - 1$$

$$t = 0{,}0816 = 8{,}61\%$$

وعليه فإن جملة الفائدة المركبة وفق المعدل المتكافئ تساوي إلى:

$$C_n = 20000(1{,}0816)^5 = 29604{,}88$$

الخصم والتكافؤ باستخدام الفوائد المركبة:

بالنسبة لمفاهيم الخصم، التكافؤ، الاستحقاق المشترك، الاستحقاق المتوسط والقيمة الحالية وهي نفسها التي تم تقديمها في الفوائد البسيطة مع تغيير القوانين الخاصة بالفوائد المركبة.

تكافؤ بالفوائد المركبة: ويشترط تساوي القيم الحالية أي:

$$C_1 = C_2$$

$$C_{n_1} = (1+t)^{-n_1} = C_{n_2}(1+t)^{-n_2}$$

مثال:

أما عن الاستحقاق المشترك بالفوائد المركبة:

$$C_X = C_1 + C_2$$

$$C_{n_x} = (1+t)^{-n_x} = C_{n_1}(1+t)^{-n_1} + C_{n_2}(1+t)^{-n_2}$$

تمارين حول الفائدة المركبة

التمرين الأول:

تم توظيف مبلغ من المال قدره ب 20000 دج لمدة 3 سنوات بمعدل سنوي 5%. (فائدة مركبة).

المطلوب:

ماهو المبلغ المسدد؟

التمرين الثاني:

وظفت مريم مبلغ 175000 لمدة 4 سنوات، فكانت جملته في نهاية السنة الثالثة ب 190000 دج.

المطوب: أحسب:

1- معدل التوظيف.

2- الفوائد المحصلة بعد نهاية مدة التوظيف.

3- بافتراض أن الجملة المحصلة تم إعادة توظيفها بمعدل 6,5% فأنتجت فائدة بعد مدة زمنية قدرها 200283,5 دج.

- أحسب مدة التوظيف الجديدة.

التمرين الثالث:

وظفت إحدى المؤسسات مبلغ 40000 دج بفائدة مركبة، وبعد سنة سحبت مبلغ 15000 دج، وبعد سنة أخرى أصبح رصيدها في البنك 28362 دج.

المطلوب:

أحسب معدل الفائدة المطبق.

التمرين الرابع:

مبلغين مجموعها 30000 دج، وظف الأول بمعدل فائدة بسيطة 6%، والثاني بمعدل فائدة مركبة 4,5%، فأنتجا بعد 15 سنة من التوظيف قيمة محصلة متساوية.

المطلوب:

أحسب قيمة كل مبلغ؟

تمرين الخامس:

1)- ماهو المعدل الشهري الذي يقابل المعدل السنوي ب 10%؟

2)- ماهو المعدل الشهري الذي يقابل المعدل السداسي 6%؟

3)- اقترح بنك التنمية المحلية لتاجر بفتح حساب بمعدل فائدة 4%، في حين أن المعدل المقروض في السنتين الأولويتين من طرف البنك كلن ب 7%، أما الثلاث سنوات الأخرى فقدر المعدل ب 8% وبعدها تم تجميل حساب من التاجر لمدة 12 سنة

الدرس الثامن: الدفعات المتساوية بفائدة مركبة

سبق وأن تم تعريف الدفعات المتساوية في الفصل، على أنها عبارة عن مبلغ يدفع خلال فترة زمنية وهي دفعات متساوية وتسمى الدفعة التي تدفع في نهاية المدة بالدفعة لآخر مدة (دفعة التسديد). أما إذا كانت الدفعة تدفع في بداية كل فترة زمنية فتسمى بالدفعة لأول مدة (دفعة التوظيف).[1]

وتحسب الدفعات عادة لمعرفة مثل: القيمة المستقبلية أو القيمة الحالية لرأس المال متراكم.[2]

أنواع الدفعات المتساوية بفائدة مركبة:

تنقسم أيضا الدفعات المتساوية بفائدة مركبة إلى نوعين اثنين كما سبق وتطرقنا إليها في الفصل.

- **دفعات التسديد (لأخر مدة):** تسديد في أخر المدة وتكون غالبا لتسديد القروض.

- **دفعات التوظيف (لأول مدة):** وتسدد في أول المدة وتكون عادة دفعات لحساب التوفير أو أقساط التأمين.

أولا: الدفعات لآخر مدة (الدفعات التسديد): Les annuités constantes de fin de période

1- جملة الدفعات لأخر المدة: (دفعات التسديد):

سبق وأن تعريف الدفعات لآخر مدة على أنها مجموع الدفعات وفائدتها حتى نهاية مدة الدفعات.

نرمز للدفعة بالرمز a:

نرمز للمعدل بالرمز i:

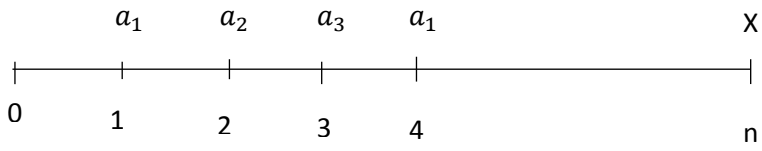
نرمز لعدد الدفعات بالرمز n:

نرمز للجملة بالرمز A_n:

[1]- غازي فلاح المومني، مرجع سبق ذكره، ص 227.

[2] - Etienne G.Harb et d'autre, Mathématique Financière, optic, p 33.

ثانيا: حساب جملة الدفعات التسديد (لأخر مدة): وتحسب جملة الدفعات كما يلي:



$$A_n = a_1(1+i)^{n-1} + a_2(1+i)^{n-2} + a_3(1+i)^{n-3} + a_4(1+i)^{n-4}$$

$$A_n = a[1 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \cdots . + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} +$$

وبملاحظة عناصر الجملة السابقة، نلاحظ أنها تعبر عن متتالية هندسية حدها الأول a وأساسها $(1+i)$ وعدد حدودها n.

ومجموع المتتالية الهندسية يعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$A_n = a.\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

وبالتالي:

$$A_n = a.\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

مثال:

دين تم تسديده ب 10 دفعات سنوية، قيمة كل دفعة ب 5000 دج، بمعدل فائدة مركبة 6% سنويا.

المطلوب: أوجد جملة هذه الدفعات؟.

الحل:

بتطبيق قانون جملة الدفعات:

$$A_n = a.\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$A_n = 5000.\frac{(1{,}06)^{10} - 1}{0{,}06}$$

$$A_n = 65903{,}97\ DA$$

استنتاجات:

إيجاد قيمة الدفعة a:

من العلاقة السابقة لقانون جملة الدفعات يمكن استخلاص قانون حساب قيمة الدفعة كما يلي:

$$A_n = a.\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$a = A_n.\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

مثال:

لدينا سلسلة من الدفعات عددها 5، جملتها 60000 دج، معدل الفائدة المركبة 4%.

المطلوب: أوجد قيمة الدفعة.

$$A_n = a.\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$60000 = a.\frac{(1{,}04)^5 - 1}{0{,}04}$$

$$a = 11077{,}62\ DA$$

2)- حساب معدل الفائدة:

يمكن استخلاص معدل الفائدةi من قانون جملة الدفعة:

$$A_n = a.\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{A_n}{a}$$

مثال: في نهاية كل سنة يتم تسديد دفعة بقيمة 1500 دج لمدة 6 سنوات، فأنتجت جملة قدرها 14532,86 دج.

المطلوب: أحسب معدل الفائدة؟.

الحل:

$$\frac{A_n}{a} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{14532{,}86}{1500} = \frac{(1+i)^6 - 1}{i}$$

$$9{,}68857 = \frac{(1+i)^6 - 1}{i}$$

3)- حساب عدد الدفعات (عدد الفترات):

وفي هذه الحالة سنعتمد على طريقة اللوغاريتمات:

$$\frac{A_n}{a} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{A_n \times i}{a} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{A_n \times i}{a} = (1+i)^n - 1$$

$$\frac{A_n \times i}{a} + 1 = (1+i)^n$$

$$\log(\frac{A_n \times i}{a} + 1) = log(1+i)^n$$

$$\log(\frac{A_n \times i}{a} + 1) = nlog(1+i)$$

$$\mathrm{n} = \frac{\log(\frac{A_n \times i}{a} + 1)}{log(1+i)}$$

مثال:

إذا كانت دفعات تسديد قيمة الواحدة 6000 دج أنتجت بعد عدد من الفترات جملة 78090 دج بمعدل فائدة 3%.

المطلوب: أحسب عدد الدفعات؟.

الحل:

$$\mathrm{n} = \frac{\log(\frac{A_n \times i}{a} + 1)}{log(1+i)} \quad \mathrm{n} = \frac{\log(\frac{79080 \times 0{,}03}{6000} + 1)}{log(1{,}03)}$$

$$\mathrm{n} = \frac{\log(1{,}3954)}{log(1{,}03)} = \frac{0{,}144698718}{2{,}012837225}$$

$$\mathrm{n} = 7\ ans$$

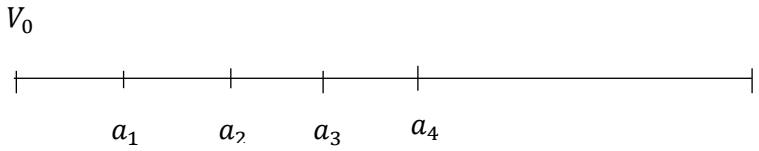
3)- القيمة الحالية لدفعات التسديد (لأخر مدة):

القيمة الحالية للدفعات هي مجموع القيم الحالية للمبالغ الدورية وهي مجموع مبالغ الأصل التي يمكن أن يؤول في نهاية مدة الدفعة إلى جملة الدفعة بفائدة مركبة.[1]

كما يقصد بها أيضا:

يقصد بالقيمة الحالية الدفعات المتساوية لأخر مدة قيمتها في بداية المدة على أساس معدل فائدة مركبة معين.[2]

حساب القيمة الحالية لدفعات التسديد: وتحسب جملة الدفعات كما يلي:



$$V_0 = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + a(1+i)^{-3} + a(1+i)^{-4} + a(1+i)^{-5}$$

وبملاحظة عناصر الجملة السابقة، نلاحظ أنها تعبر عن متتالية هندسية حدها الأول $a(1+i)^{-1}$ ، أما $(1+i)^{-1}$.

$$V_0 = a(1+i)^{-n} \times \frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1}$$

[1]- غازي فلاحي المومني.مرجع سبق ذكره، ص 243.

[2]- باديس بوغرة، مرجع سبق ذكره، ص 171.

$$V_0 = a.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

مثال: دين يتم تسديده ب 8 دفعات سنوية، قيمة كل دفعة ب 10000 دج بمعدل فائدة مركبة 6%. أوجد القيمة الحالية لهذا الدين.

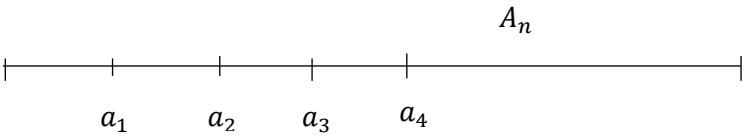
الحل:

$$V_0 = a.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 10000.\frac{1-(1{,}06)^{-8}}{0{,}06} = 62097{,}93\ DA$$

أي:

$$V_0 = 62097{,}93\ DA$$

قاعدة:



الجملة A_n تتطابق مع الدفع الأخير A_n.

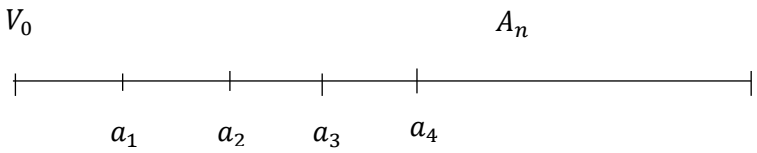
القيمة الحالية (V_0) تأتي دورة قبل الدفع الأول(a_1).

حيث:

$$V_0 = a.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

الدورة هي المدة الفاصلة بين دفعة ودفعة أخرى.

العلاقة بين الجملة A_n والقيمة الحالية V_0:



$$V_0 = A_n(1+i)^{-n}$$

$$A_n = V_0(1+i)^n$$

حيث أن:

$$A_n = a.\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

و:

$$V_0 = a.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$V_0 = A_n(1+i)^{-n}$$

$$a.\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{-n}$$

$$a.\frac{(1+i)^n - (1+i)^{-n}}{i}$$

أي أن V_0:

$$a.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

مثال رقم 1:

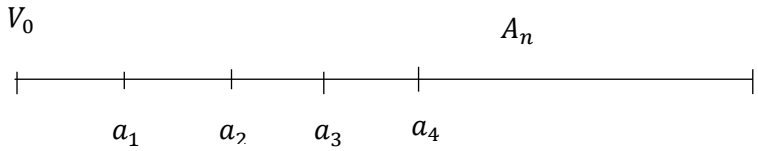
ألة سعر بيعها 1000.000 دج يتم تسديدها كما يلي:

200.000 فورا والباقي على 6 دفعات سنوية متساوية.

الأولى تأتي سنة بعد تاريخ الشراء بمعدل فائدة 5% سنويا.

المطلوب: أوجد قيمة الدفعة؟.

الحل:



الطريقة الأولى بطريقة V_0:

$$V_0 = 800000 = a.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$800000 = a.\frac{1-(1{,}05)^{-6}}{0{,}05}$$

$$a = 157613{,}97$$

الطريقة الثانية بطريقة A_n:

$$800000(1{,}05)^6 = 1072076{,}513$$

$$800000(1+i)^6 =$$

$$A_n = 1072076{,}513 = a.\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$1072076{,}513 = a.\frac{(1{,}05)^6-1}{0{,}05}$$

$$A_n = 157613{,}97$$

مثال 2: استثمار قيمته 2000.000 دج يتم تسديده كما يلي:

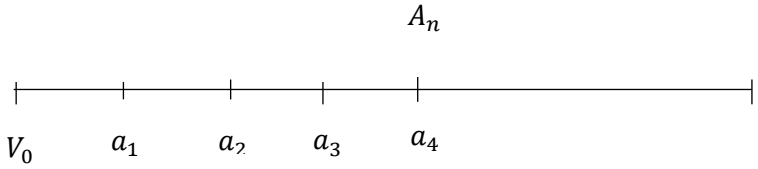
500.000 فورا والباقي على 4 دفعات سنوية متساوية.

تأتي الأولى 3 سنوات بعد تاريخ الشراء بمعدل فائدة 8% سنويا.

المطلوب:

أوجد قيمة الدفعة؟.

الحل:



بطريقة V_0:

$$150000 = V_0(1+i)^{-2}$$

$$150000(1{,}08)^2 = a.\frac{1-(1{,}08)^{-4}}{0{,}08}$$

$$a = 52824{,}77\ DA$$

بطريقة A_n:

$$150000(1{,}08)^6 = a.\frac{(1{,}08)^4-1}{0{,}08}$$

$$a = 52824{,}77\ DA$$

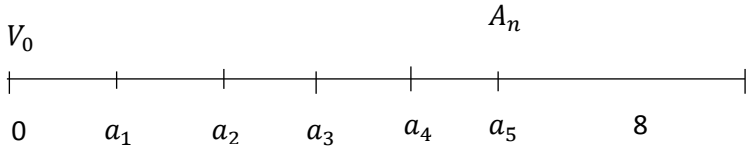
تقييم متتالية الدفعات في زمن ما:

أ)- تقييم متتالية دفعات في زمن حيث:

مثال: متتالية قيمتها الواحدة 20000 دج بمعدل 6% على 5 دفعات متساوية.

المطلوب: أوجد قيمة المتتالية في الزمن 8.

الحل:



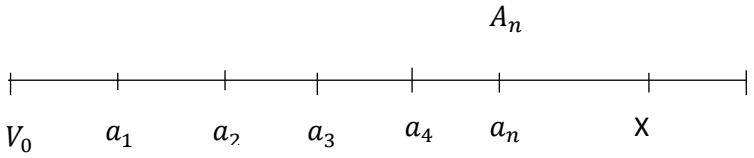
$$X_8 = a_5(1+i)^3 + a_4(1+i)^4 + a_3(1+i)^5 + a_2(1+i)^6 + a_1(1+i)^7$$

$$X_8 = A_n(1+i)^3 = 112741{,}85(1{,}06)^3 = 134277{,}34$$

$$X_8 = V_0(1+i)^8 = 84247{,}29(1{,}06)^8 = 134277{,}34$$

$$A_n = a.\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 20000.\frac{(1{,}06)^5 - 1}{0{,}06} = 112741{,}85$$

$$V_0 = a.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 20000.\frac{1-(1{,}06)^{-5}}{0{,}06} = 84247{,}23$$



$$X_n = A_n(1+i)^{m-n}$$

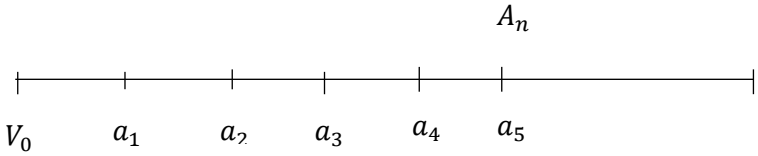
$$X_n = V_0(1+i)^m$$

$$A_n = a.\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_0 = a.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

ب)- تقييم دفعات في زمن حيث:

مثال: باستخدام نفس معطيات التمرين السابق نجد:



$$X_3 = a_1(1+i)^2 + a_2(1+i)^1 + a_3 + a_4(1+i)^{-1} + a_5(1+i)^{-2}$$

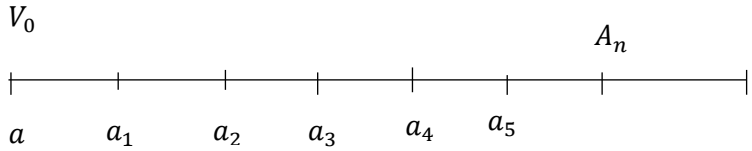
$$X_3 = V_0(1+i)^3 = 84247{,}29(1{,}06)^3 = 100339{,}79DA$$

$$X_3 = A_n(1+i)^{-2} = 112741{,}85(1{,}06)^{-2} = 100339{,}79DA$$

جملة الدفعات لأول مدة (دفعات التوظيف):

دفعات التوظيف هي مبالغ ثابتة تدفع دوريا في بداية كل فترة الغرض منها تكوين رأس مال في نهاية مدة الإيداع فتكون إذا الدفعة الأولى في بداية الفترة وتتوافق مع الزمن صفر.

أما جملتها فتكرون دورة بعد دفعة أخيرة.



نرمز للجملة بالرمز A_n'، وقيمة الدفعة بالرمز 'a.

$$A_n' = \left[a'.\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)$$

مثال: وظف شخص مبلغ 10000 دج سنويا ولمدة 10 سنوات بمعدل فائدة مركبة 5% سنويا أحسب ما يتجمع لهذا الشخص في نهاية السنة العاشرة.

الحل:

$$A_n' = \left[10000.\frac{(1{,}05)^{10} - 1}{0{,}05}\right](1{,}05) = 132067{,}87DA$$

استنتاجات:

1)- حساب قيمة الدفعة:

من العلاقة السابقة لجملة دفعات أول مدة يمكن استخلاص قانون حساب الدفعة.

$$A_n' = \left[a'.\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)$$

$$a' = \left[A_n' =.\frac{i}{((1+i)^n - 1)(1+i)}\right]$$

مثال:

2)- حساب معدل الفائدة:

من العلاقة السابقة نستنتج حساب معدل الفائدة:

$$A_n' = \left[a'.\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)$$

$$\frac{A_n'}{a'} = \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)$$

مثال:

ب)- حساب عدد الدفعات:

من علاقة الجملة لدفعات أول مدة نجد:

$$\frac{A_n{}'}{a'} = \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)$$

$$\frac{A_n{}' \times i}{a'} = (1+i)^n - 1\,.(1+i)$$

$$\frac{A_n{}' \times i}{a'} = (1+i)^n$$

$$(1+i)\left(\frac{A_n{}' \times i}{a'} + 1\right) = (1+i)^n$$

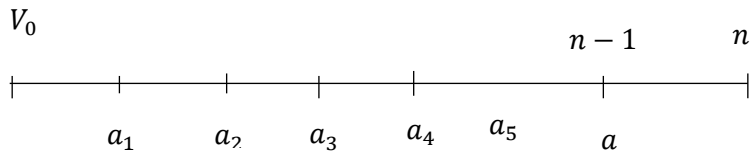
$$log(1+i)\left(\frac{A_n{}' \times i}{a'} + 1\right) = n.\log(1+i)$$

$$n = \frac{log\left(\frac{A_n{}' \times i}{a'} + 1 + i\right)}{\log(1+i)} - 1$$

القيمة الحالية لدفعات التوظيف (أول مدة):

يقصد بالقيمة الحالية للدفعات التوظيف (أول مدة) قيمتها في نهاية المدة على أساس معدل الفائدة المركبة.

حساب القيمة الحالية لدفعات التوظيف: وتحسب جملة الدفعات كما يلي:



$$V_0' = a'(1+i)^{-n+1} + (1+i)^{-n+2} \ldots . + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-1} + 1$$

وبملاحظة عناصر الجملة السابقة. نلاحظ أنها تعبر عن متتالية هندسية حدها الأول$a'(1+i)^{-n+1}$ وأساسها

$(1+i)^{-n+1}$

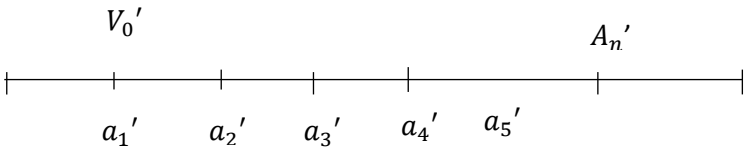
وعليه فإن:

$$A_n{}' = \left[a'.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)$$

مثال:

العلاقة بين دفعات التسديد ودفعات التوظيف.

دفعات التسديد.



دفعات التوظيف.

العلاقة بيانيا بينهما.

$$V_0' = V_0(1+i) + 1$$

$$A_n{}' = A_n(1+i)^1$$

تمارين حول الدفعات المتساوية بفائدة مركبة

التمرين الأول:

دفعات متساوية السداد، قيمة الواحدة 2200 دج، سددت أول دفعة بتاريخ 2016/12/1، وأخرها بتاريخ 2018/12/1.

إذا علمت أم معدل الفائدة 8%.

أحسب الجملة المحصلة:

1- بتاريخ 2018/12/1.

2- بتاريخ 2019/12/1.

3- بتاريخ 2025/12/1.

التمرين الثاني:

تبلغ القيمة الحالية لسلسلة دفعات أخر مدة ب 178975,81 دج قيمة كل منها ب 3200 دج.

المطلوب:

- أحسب عدد الدفعات، إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة هو 4%.

التمرين الثالث:

يوظف شخص في أول كل نصف سنة مبلغ 8000 دج لمدة 4 سنوات بمعدل سداسي ب 3%، وابتداءا من السنة الخامسة بدأ يودع مبلغ 11000 دج في أول منتصف كل سنة لمدة 4 بمعدل سداسي 3%.

المطلوب:

- أحسب الرصيد في نهاية مدة التوظيف.

التمرين الرابع:

أودعت مريم في البنك الخارجي في مبلغ 600 دج أول كل سنة لمدة 10 سنوات فإذا علمت أن البنك احتسب فوائد مركبة بمعدل 9%، خلال 8 سنوات الأولى و 8% سنويا خلال السنتين الأخيرتين.

المطلوب:

– أحسب الجملة المكتسبة في نهاية المدة.

الدرس التاسع: استهلاك القروض

تلجأ المؤسسات الاقتصادية إلى استخدام أنواع عديدة من القروض لتمويل مشاريعها، أو من أجل حيازة أصل عقاري، كما يمكن أن تلجأ إلى القروض وذلك لغرض تمويل الأعمال الترميم لأصل من الأصول أو غيرها...إلخ.

حيث يجب أن يكون القرض المنتوج محدد بدقة، ويسمى بالائتمان المخصص.

وعندما يتم منح الائتمان لاستخدام مسموح به وفقا لتقدير يسمى الائتمان غير المخصص.[1]

أولا: أنواع القروض: ويوجد نوعان من القروض:

1)- القروض وحيدة المصدر: وتسمى كذلك بالقروض العادية ويكون المقرض فيما طرف واحد (شخص عادي/ معنوي، مثل البنوك أو المؤسسات المالية).

2)- القروض السندية: وتسمى أيضا بالقروض الغير عادية ويكون فيها عدد المقرضين أكثر من شخص واحد.

1-1- القروض وحيدة المصدر: وهذا النوع من القروض يتضمن مقرض واحد وحيد حيث أن المقترض يلتزم بتسديد أصل الدين مع الفوائد.[2] ويتم استهلاك هذه القروض وفق النظام الكلاسيكي أي بدفعات ثابتة تحتوي كل دفعة مسددة على عنصرين هما: جزء من رأس المال الأصلي ويسمى الاستهلاك، وفائدة على القرض المتبقي ومع تتابع تقديم الاستهلاكات ضمن الدفعات يتناقص مع ذلك تدريجيا القرض المتبقي ومع ثبات الدفعة تتزايد الاستهلاكات وتتناقص الفائدة بتناقص القرض المتبقي في كل مرة.[3]

يضم استهلاك القروض 5 متغيرات وهي:

- مبلغ القرض ويرمز له بالرمز V.

- الفائدة ويرمز له بالرمز I.

- الاستهلاكات ويرمز له بالرمز M.

---

[1]- Etienne G.Harb et d'autre, Mathématique financières, optic, p 57.

[2]- Christelle Baratay, Mathématique financières, édition gualine,paris,2016, p 20.

[3]- من إعداد دكتور خنفري حيدر.

– الدفعات ويرمز له بالرمز a.

– أصل القرض في نهاية المدة.

تتناسب تكلفة القرض مع مقدار الفائدة المدفوعة.

تكون الفوائد قليلة عند ما تكون التسديدات ذات أهمية في السنوات الأولى، عن المعدل الكثر استعمالا: هو المعدل المتناسب.

إن جدول استهلاك القروض المبين في الجدول التالي يلائم خاصة عمليات التمويل، ففي حالة اختيار الاستهلاكات، فإن هذه الأخيرة يجب أن تكون وفق تواريخ محددة.

إن مبلغ القرض عند التاريخ 0 يساوي مبلغ الدفعات المسددة المرسلة.

وعلاوة كل ذلك فإنه يوضح كل من:

– باقي رأس المال الناتج (V_n– الاستهلاكات).

– الفوائد المدفوعة.

– رأس المال المسدد (الاستهلاكات M).

– الدفعات (الفوائد+ الاستهلاكات).[1]

جدول استهلاك القروض:

المدة	أصل القرض في بداية المدة	الفائدة I	الاستهلاكات M	الدفعةa	أصل القرض في نهاية المدة
0	V_0	–	–	–	V_0
1	V_0	$I_1 = V_0.i$	M_0	$a_1 = I_1 + M_1$	$V_1 = V_0 - M_1$
2	V_1	$I_2 = V_1.i$	M_1	$a_2 = I_2 + M_2$	$V_2 = V_1 - M_2$
3	V_2	$I_3 = V_2.i$	M_2	$a_3 = I_3 + M_3$	$V_3 = V_2 - M_3$
. . . n	V_{n-1}	$I_n = V_n.i$	M_n	$a_n = I_n + M_n$	$V_n = V_{n-1} - M_n$

[1] – Christelle Baratay, Mathématique financières, optic, p 20.

الطرق الكلاسيكية لتسديد القروض:

حيث سنتناول في هذا الجزء طرق التسديد القروض الكثر استعمالا من طرف البنوك، وتضم هذه الطرق الكلاسيكية كل من:

- طريقة التسديد في نهاية المدة Le Remboursement in fine.

- طريقة التقسيط المتساوي Le Remboursement par amortissement constant .

- طريقة التسديد من خلال الدفعات المتساوية Le Remboursement par annuités constantes

1)- طريقة التسديد في نهاية المدة:

حيث تنص هذه الطريقة على أن يتم تسديد مجموع رأس المال الذي يتم اقتراض في السنة الأخيرة للقرض حيث أن المقترض يسدد كل عام فقط الفوائد، ماعدا السنة الأخيرة.[1]

حيث أن تكلفة القرض = قيمة القرض× المعدل× المدة.

$$Le\ Cout\ de\ l'imprunt = C \times i \times n$$

ملاحظة:

تسمح طريقة التسديد في نهاية المدة للمقترض من تسيير خزينة بطريقة سهلة، ذلك كون هذه الطريقة تختلف عن الطرق الأخرى فيما يخص دفع المبلغ الإجمالي لرأس المال المقترض في نهاية الفترة. لكن هذا النوع من القروض يشكل خطرا على القدرة المالية للمقترض أثناء وقت السداد.[2]

2)- طريقة التقسيط المتساوي:

إن طريقة تسديد الاستهلاكات الثانية تتطلب تسديد نفس المبلغ من رأس مال كل سنة.[3] وبمعنى اخر يتم

[1] - Benjamin Legros, Le Guide Manuel de Mathématiques Financières, optic, p 92.

[2]- Etienne G.Harb et d'autre, Mathématique financières, optic, p 62.

[3] - Benjamin Legros, optic, p 93.

سداد جملة القرض على أقساط دورية متساوية يتم دفعها في نهاية كل فترة زمنية متساوية أيضا (عادة ما تكون سنة) ويشمل القسط جزء من أصل القرض مضافا إليه الفوائد على الرصيد المتبقي من القرض.[1]

حيث أن الاستهلاك L'amortissement : $M = \frac{V}{N}$

وفي حالة التسديد عن طريقة الاستهلاكات الثابتة فإن كل من الدفعات والفوائد تأخذ شكل متتالية حسابية من الشكل:

$$M = (-\frac{V}{N}.i)$$

تكلفة القرض في هذه الحالة تتوافق مع مبالغ من التسلسل الحسابي وتساوي[2]

تكلفة القرض = $i \times V \times \frac{N+1}{2}$

3)- طريقة التسديد في نهاية المدة:

حيث تتطلب هذه الطريقة تسديد نفس الدفعات كل عام، حيث أن الطريقة شائعة الاستعمال، لأنها بسيطة الميزانية.[3]

حيث أن قيمة الدفعة تساوي:

$$C_0 = a.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$a = C_0.\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

العلاقة بين أصل القرض والاستهلاكات:

نعلم أن أصل القرض يتكون من مجموع الاستهلاكات:

$$V_0 = \sum_{l=1}^{n} M_i = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_n$$

وعليه فإن الاستهلاكات M تساوي إلى:

---

[1]- باديس بوغرة، الرياضيات المالية، ص 204.

[2]- Christelle Baratay, Mathématique financière, optic, P 22.

[3] - Benjamin Legros, optic, p 93.

$$M_2 = M_1(1+i)$$

منه نجد أن الاستهلاكات تساوي: $M_3 = M_2(1+i) = M_1(1+i)^2$

$$M_4 = M_3(1+i) = M_1(1+i)^3$$

$$M_{n-1} = M_{n-1}(1+i) = M_n(1+i)^{n-1}$$

منه نجد أن الاستهلاكات تساوي:

$$M_n = M_1(1+i)^{n-1}$$

بصفة عامة نستنتج أن: $M_x = M_y(1+i)^{x-y}$.....(1)

كما يساوى أصل القرض في بداية المدة إلى:

$$V_0 = m_1 + m_1 + \ m_n + \cdots + m_3$$

$$V_0 = m_1 + m_1(1+i)^3 + \ m_1(1+i)^2 + m_1(1+i)^{n-1}.....(2)$$

وانطلاقا من العلاقتين السابقتين 1 و 2 نجد أن:

$$V_0 = \frac{m.(1+i)^n - 1}{i}$$

العلاقة بين الدفعة والاستهلاكات:

لدينا:

$$V_{n-1} - M_n = 0$$

$$V_{n-1}M_n = M_n$$

كما نعلم أن: الدفعة= الفائدة + الاستهلاكات أي:

$$a = I_n + M_n$$

$$I_n = M_{n-1} \times i + M_n$$

وعليه فإن الدفعة تساوي:

$$a = M_n.i + M_n$$

وبمأن M_nعامل مشترك فإن:

$$a = M_n(1+i).....(1)$$

لدينا أيضا:

$$a = M_n(1+i)$$

$$a = M_n(1+i)^{n-1}$$

$$a = M_n(1+i)^{n-1}(1+i)$$

وبالتالي فإن:

$$a = M_n(1+i)^n$$

العلاقة بين الفوائد والاستهلاكات:

لنفترض مثلا أن: $a_5 = a_8$

و $I_5 + M_5 = I_8 + M_5$

وعليه: $I_5 - M_5 = I_8 - M_5$

فإن: $I_x - M_5 = M_y + M_x$

تمارين حول استهلاك القروض

التمرين الأول:

اقترضت المؤسسة رأس مال قدره 280000 دج على أن يعوض من خلال دفعات ثانية لمدة 10 سنوات. حيث أن الدفعة يجب أن تسدد في 2017/11/30. وذلك بمعدل فائدة ب 3,5%.

المطلوب: أحسب ما يلي:

- الدفعات الثابتة.

- الاستهلاك الأخير.

- رأس المال المعوض بعد 8 تسديدات.

- رأس المال الباقي للتعويض بعد تسديد الدفعة الرابعة.

التمرين الثاني:

اقترضت مؤسسة حيدر قرض في 2016/11/18 على أن تسدد الدفعة الأولى في 2018/1/1، أما الثانية فتسدد في 2019/01/1 وهكذا.

1)- قدر المبلغ الاهتلاك الرابع ب 6496,78 دج، أما مبلغ الاهتلاك الأول فقدر ب 5400 دج.

وبافتراض أن تعويض الدفعات يتم بطريقة ثابتة.

قم بتسديد معدل الفائدة السنوي؟.

التمرين الثالث:

اقترضت مؤسسة مبلغ من المقال قدره 5000000 على أن يعوض بدفعات ثابتة لمدة 15 سنة بمعدل فائدة 6%.

المطلوب:

1)- أحسب المعدل العاشر للاهتلاك.

2)- ماهو المبلغ المعوض بعد التسديد الاهتلاك العاشر.

3)- ماهو المبلغ الباقي بعد التسديد الثاني عشر للاستهلاك.

التمرين الرابع:

بغرض تمويل 80% من معدات مؤسسة ما، قامت المؤسسة باقتراض قرض في N/01/1 بمعدل 3,5%. في حين أن التسديد (التعويض) هذا القرض يكون كل 5 سنوات بمقدار ثابت كل سداسي انطلاقا من N/04/31.

مع العلم أن قيمة المعدات قدرت ب 800000 دج.

المطلوب:

قدم الثلاث أسطر الأولى، السطر الثاني والسطر الأخير من جدول اهتلاك القروض.

التمرين الخامس:

لدينا قرض يهتلك على 20 سنة بدفعات ثابتة، مع العلم أن الاهتلاك الثاني والاهتلاك الثالث قدر ب 2400 و 2450 دج.

المطلوب: احسب كل من:

1)- المعدل.

2)- الاهتلاك الأول.

3)- الاهتلاك العاشر.

4)- مبلغ القرض.

5)- الدفعات الثابتة.

6)- أنجز الخمس أسطر الأولى من جدول إهلاك القرض.

الدرس العاشر: تقييم الاستثمارات (المشاريع)

عندما يريد شخص أو مؤسسة أن تستثمر مثلا في التقنيات المادية (آلات، معدات...إلخ). فإنها تحتاج إلى مجموعة من الأدوات التي تسمح لها بمعرفة مردودية للاستثمار من عدمها. وتتمثل هذه الأدوات في كل من: فترة استرداد رأس المال.

Le Délai de récupération du capital ويرمز لها بالرمز (DRC)، صافي القيمة الحالية La Valeur Nette ويرمز لها بالرمز (VAN)، معدل العائد الداخلي Les Taux de rentabilité interne ويرمز له بالرمز (TRI)، ومؤشر الربحية L'indice de profitabilité ويرمز له بالرمز (IP).[1]

وقبل التطرق إلى معايير تقييم المشروعات/ الاستثماريات السالفة الذكر، يتعين ذكر بعض المفاهيم التي تتعلق بالتدفقات النقدية والتي سنوجزها على النحو التالي:

1)- مفهوم التدفقات النقدية/ جدول تدفقات الخزينة:

وهو عبارة عن جدول مالي يشرح الميكانيزمات المالية للمؤسسة كما يبين أيضا مساهمة كل وظيفة في تغير منحنى الخزينة.

وبعبارة أخرى فإن جدول تدفقات الخزينة يوضح التغيرات التي تطرأ على الخزينة والمتمثلة في التدفقات الداخلية والتدفقات الخارجية وهذا لفترة زمنية معينة، كما يحدد هذا الجدول طبيعة هذه التدفقات.

2)- أنواع التدفقات: ويوجد نوعين من التدفقات النقدية وهما:

- التدفقات النقدية الداخلية.

- التدفقات النقدية الخارجية.

أولا: التدفقات النقدية الداخلية: وتشمل كل من:

- ❖ **إيرادات المبيعات:** وهي المبالغ الناتجة عن المبيعات المؤسسة في أي فترة زمنية وذلك عن طريق حاصل ضرب سعر السلعة في الكمية.

[1]- Etienne G. Harl, Mathématique financières, optic, P 121.

❖ **القيمة المتبقية: La Valeur Résiduelle**

❖ وهي صافي المبلغ الذي تتوقع المنشأة الحصول عليه لأصل في نهاية عمره التشغيلي بعد خصم التكاليف المتوقعة ما بعد الاستهلاك.

- القروض والإعانات:

تعد القروض والاعانات التي تتحصل عليها المؤسسة من البنوك أو المؤسسات المالية الأخرى ضمن التدفقات النقدية الداخلية للمشروع.

إيرادات أخرى:

وهي عبارة عن إيرادات استثنائية نتحصل عليها من خلال بعض الصول المشروع مثلا.

ثانيا: التدفقات النقدية الخارجية:

وتشمل هذه التدفقات كل من:

- التكاليف التشغيلية:

ويقصد بالتكاليف التشغيلية تلك التكاليف اللازمة لتنفيذ برنامج الإنتاج خلال فترة زمنية معينة مثل: (تكاليف المواد الأولية، تكاليف الصيانة، الكهرباء، أقساط التأمين...إلخ)

- التكاليف الاستثمارية:

وتشمل التكاليف الاستثمارية كل التكاليف التي يقر إنفاقها وذلك قبل وأثناء وبعد إتمام المشروع الاستثماري، ولتشمل هذه التكاليف عموما العناصر التالية:

- تكاليف الأصول الثابتة: مثل تكلفة المباني، تكلفة الأراضي، تكلفة الآلات والمعدات، تكلفة معدات النقل...إلخ.

- تكاليف رأس المال العامل لدورة التشغيل الأولى:

وهي القيمة اللازمة لتشغيل المشروع خلال دورة إنتاجية واحدة وتتكون من جميع الأصول المتداولة اللازمة لتشغيل المشروع.

- فوائد القروض أثناء تشغيل المشروع وإقامته:

تعتبر الفوائد التي يتم تسديدها خلال فترة إقامة المشروع، وقبل أن يبدأ في عمليات الإنتاج من ضمن بنود التكلفة الاستثمارية للمشروع، أما في حالة تسديد هذه الفوائد بعد أن يبدأ المشروع نشاطه فإنها تعتبر من قبيل تكاليف التشغيل السنوية.[1]

وتختلف تكاليف التشغيل عن التكاليف الاستثمارية في كون الأولى يتم حسابها كل سنة من سنوات العمر المقدر للمشروع، في حين أن التكاليف الاستثمارية تحسب في سنة أو سنوات الإنشاء فقط.

ثانيا: معايير تقييم واختيار المشاريع:

وفي هذا الجزء سنتطرق إلى أهم المعايير أو الطرق التي يتم بها تقييم واختيار الاستثمارات أو المشاريع وذلك على النحو التالي:

1- فترة استرداد رأس المال: Le Délai de récupération du capital (DRC)

تمثل فترة استرداد رأس المال أو رؤوس الأموال المستثمرة (DRC) الوقت المنطقي بين وقت تحقق الاستثمار الأولى وأثناء وقت تحصيل مجموع تدفقات الخزينة الناتجة عن المشروع والتي يتم تعويضها بالضبط بالميلغ الأولي للاستثمار.[2]

كما أن هناك من يعرف فترة استرداد رأس المال على أنه تلك الفترة التي يتم استرداد الاستثمار المعني. وتزداد مردودية هذا المشروع عندما يتم استرداد رأس المال قبل نهاية مدة المشروع.

فكلما كانت المدة قصيرة، كلما ازدادت مردودية المشروع.[3]

ملاحظة:

يمكن التعبير عن فترة استرداد رأس المال بالأيام، ويقتضي ضرب في 360 يوم (12 شهر في 30 يوم) وذلك للحصول على النتيجة.[4]

---

[1]- باديس بوغرة، الرياضيات المالية، ص ص 254-255.

[2]- باديس بوغرة، الرياضيات المالية، ص 255.

[3]- Etienne G. Harl, Mathématique financières, optic, P 129.

[4] - Etienne G. Harl, optic, P 130.

2- القيمة الحالية الصافية: La Valeur Nette (VAN)

القيمة الحالية للمشروع هي القيمة الناتجة عن تحيين الرسملة مختلف تدفقات الخزينة التي تتولد عنها. كما تأخذ بعين الاعتبار التآكل النقدي من إمكانية الاستثمار بدلا من الاستثمار و/ أو تحقيق عمليات بسرعة وأكثر وضوحا. (وتسمى بالفرض في ميدان التمويل).

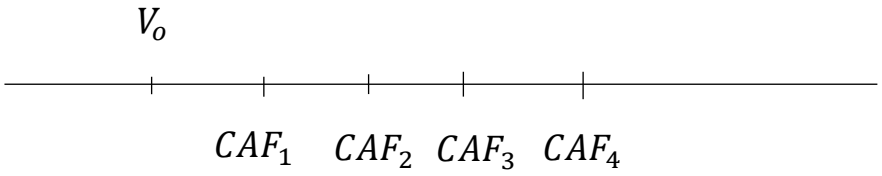
ولحساب صافي القيمة الحالية (VAN) يتطلب تقييم مردودية المشروع أو الاستثمار وذلك بمقارنة الإنفاق الأولي المحقق في القيمة الحالية لتدفقات النقدية المتوقعة على طول مدة المشروع.[1]

طريقة حساب صافي القيمة الحالية VAN :

تمثل هذه الطريقة صافي الموارد المحققة من طرف الاستثمار مقارنة بتكلفة وتحسب صافي القيمة الحالية VAN بالطريقة التالية.

صافي القيمة الحالية (VAN)= القيمة الحالية لقدرة التمويل الذاتي- القيمة الأصلية للاستثمار.

$$VAN = \sum_{l=1}^{n} CAF(1+i)^{-p} + VR(1+i)^{-n} - V_o$$



$$VAN = CAF_1(1+i)^{-1} + CAF_2(1+i)^{-2} + CAF_3(1+i)^{-3} + CAF_4(1+i)^{-4} + VAN_n(1+i)^{-n} - V_o$$

قدرة التمويل الذاتي:

تعرف قدرة التمويل الذاتي على انها قدرة المؤسسة على تمويل استثماراتها واستخداماتها المستقرة بمواردها الذاتية لذلك فهي تعتبر من أهم الموارد الذاتية الدائمة وتحسب بطريقتين:

[1] - Christelle Baratay, Mathématique financière, optic, P 42.

الطريقة الأولى:

CAF= الفائض الإجمالي للاستغلال+ تحوصل تكاليف الاستغلال+ إيرادات الاستغلال- تكاليف الاستغلال+ إيرادات مالية- تكاليف مالية+ إيرادات استثنائية- تكاليف استثنائية- مساهمات العمال- ضرائب على الأرباح.

الطريقة الثانية:

CAF= النتيجة الصافية+ مخصصات الإهتلاكات والمؤونات$\pm$ فائض أو نقص قيمة التنازل عن الاستثمار- استرجاع المؤونات- جزء من إعانات الاستثمار المحولة إلى نتيجة.

ملاحظة:

المشاريع ذات المردودية هي التي تكون صافي قيمتها الحالية (VAN) موجبة.

3- معدل العائد الداخلي: Les Taux de rentabilité interne (TRI)

يعرف معدل العائد الداخلي (TRI) على أنه ذلك المعدل الذي يعمل على تكافؤ بين رأس المال المستثمر ومجموع التدفقات النقدية (القيمة الحالية للمشروع تساوي صفر).

وهو المعدل الذي يقبل للاقتراض لتمويل المشروع.

ولكي يكون المشروع مقبولا، يجب أن يكون معدل العائد الداخلي (TRI) مرتفع مقارنة بمعدل المردودية المقروضة من طرف المؤسسة (معدل التحيين).[1]

كما يعرف معدل العائد الداخلي على أنه " المعدل الذي تتعامل عنده التدفقات النقدية الصافية مع رأس المال المستثمر، ويعبر عنه أيضا على أنه: " سعر الخصم الذي يعطي قيمة حالية للمشروع والتي تساوي صفر".

ومما سبق يتضح أن TRI هو المعدل الذي يكون المشروع قادرا على تغطية التكاليف الاستثمارية وتكاليف التشغيل وتكاليف استخدام رأس المال على أساس معدل خصم يساوي معدل العائد الداخلي نفسه.

[1] - Christelle Baratay, Mathématique financière, optic, P 42.

طريقة حساب معدل العائد الداخلي:

$$TRI = \sum_{l=1}^{n} CAF(1+TRI)^{-n}$$

مع العلم أن:

Les Cash Flous : CAF

TRI : معدل العائد الداخلي.

n : عمر المشروع.

$$TRI = CAF_1(1+TRI)^{-1} + CAF_2(1+TRI)^{-2} + \cdots + CAF_n(1+TRI)^{-n} -$$
$$TRI + CAF_1(1+TRI)^{-1} + CAF_2(1+TRI)^{-2} + \cdots + CAF_n(1+TRI)^{-n} = 0$$

أو

$$TRI = \sum_{l=1}^{n} .\frac{CAF}{(1+TRI)^t}$$

4)- مؤشر الربحية: ((L'indice de profitabilité (IP)).

من أجل مقارنة مختلف المشاريع الاستثمارية، نحسب مؤشر الربحية. حيث أن هذا المؤشر يسمح بتقييم كل دج مستثمر وما هو المشروع الذي يربح أكثر (الأكثر مردودية).[1]

كما يعرف مؤشر الربحية " على أنه عبارة عن نسبة القيمة الحالية للتدفقات النقدية إلى التكاليف الاستثمارية، وبالتالي فهذا المعيار يعبر عن ربحية كل دينار من الاستثمار" ونتيجة لذلك يتم استخدام هذا المعيار لترتيب المشاريع الاستثمارية ذات التكاليف الاستثمارية المتباينة أو ذات الأعمار الاقتصادية المتوقعة المختلفة على أساس ترتيب ربحيتها.[2]

ويمكن صياغة قانون مؤشر الربحية وفقا العلاقة التالية:

$$IP = \frac{VAN + I}{I}$$

[1] - Legros Benjamin, Le Guide Manuel des Mathématiques financières, optic, P 128.

[2] – باديس بوغرة، المدخل إلى الرياضيات المالية وتطبيقاتها، مرجع سبق ذكره، ص 264.

أي: مؤشر الربحية $= \frac{\text{صافي القيمة الحالة+معدل}}{\text{معدل}}$ 1

طريقة العائد الإجمالي: فهذه الطريقة تتحدد العائد الإجمالي للوحدة النقدية المستثمرة والفرق بينها وبين مؤشر الربحية كون أن هذه الأخيرة تحدد العائد الصافي للوحدة النقدية المستثمرة والأخرى تحدد العائد الإجمالي.

وتجدر الإشارة إلى ان تطبيق معيار دليل الربحية في حالة تساوي المشروعات الاستثمارية من حيث التكاليف الاستثمارية سوف يؤدي إلى نفس النتائج المحسوبة وفق معيار صافي القيمة الحالية، لذا يفضل استخدام هذا المعيار في حالات اختلاف التكاليف الاستثمارية للمشاريع محل المقارنة، وهذا حتى يتسنى تجنب النتائج دقيقة لمعاير صافي القيمة الحالية (VAN).

[1] – Legros Benjamin, optic, P 128.

الدرس الحادي عشر: اختيار المشاريع.Sélection Des Projets

عندما تكون مدة إنجاز المشاريع هي نفسها، فإن الإجراءات المتبعة تطبق بدون مشاكل والمشروع ذو مردودية عالية، يعد الأكثر حظا.

وعندما تكون مدة حياة المشاريع مختلفة، فإنه لا توجد أهمية لمقارنة القيمة الحالية الصافية (VAN)، لن المشاريع ذات الجل القصير هي أقل خطر من المشاريع ذات الأجل الطويل.

وفي هذه الحالة تتاح للمؤسسة إمكانية:

– تجديد نفس المشاريع حتى تتطابق مدة المشروع، لكن هذه الطريقة لا تصلح إذا كانت مدة المشروع ذات ألجل الطويل تفوق مرتين مدة المشروع B هي 2 سنتين.

المشروع B سيعاد تجديده (6+2=8). ولو كانت مدة المشروع A 5 سنوات ومدة المشروع B هي 3 سنوات، فإن المشروع A سيحدد 3 مرات والمشروع B 5 مرات ($15 = 5 \times 3$، $15 = 3 \times 5$).

– مع المدة ذات الأجل القصير تقييم القيمة المتبقية للمشروع ذات الأجل الطويل.

– حساب الدفعات الثابتة المتساوية التي تسمح بحساب استهلاكات القروض ذات المبالغ المساوية للقيمة الحالية الصافية، أي ما يعادل مدة القرض مع معدل فائدة يساوي معدل التحيين، وهذه الطريقة تصلح لكل الحالات.

❖ **المشاريع الاستثمارية أو عدم اليقين: Projet d'investissement et Incertitude**

❖ **مشاريع استثمارية في مستقبل عشوائي: Projet d'investissement et avenir aléatoire**

وفي هذه الحالة يمكن تحديد كل قيم التدفقات النقدية التي ممكن أن تأخذ عدة فترات، وعدة احتمالات.

وبالتالي فإن القرارات المتخذة ستكون بناء على توقعات رياضية للقيمة الحالية الصافية (VAN). كما يمكن تقييم الخطر وذلك إذا قمنا بحساب التوقعات لكل قرار متخذ.

$$E(CAF) = \sum_{l=1}^{n} = CAF_j P_j$$

$$VAR(CAF) = \sum_{l=1}^{n} (CAF)^2 P_j - E(CAF)^2$$

$$E(VAN) = \sum_{l=1}^{n} (CAF_j)(1+i)^{-j} - I$$

$$VAR(VAN) = \sum_{l=1}^{n} VAR(CAF_j)(1+i)^{-2j}$$

$$(VAN) = \sqrt{VAR\ (VAN)}$$

مشروع استثمار مجهول المستقبل: Projet d'investissement en avenir incertain

وفي هذه الحالة، يمكن تحديد الاحتمالات لكل الأحداث. حيث لا توجد إجابة واحدة، هذه الأخيرة، تعتمد على سلوك صاحب القرار وكيفية مواجهة الخطر المحتمل. وتوجد عدة معايير:

- **معيار الحد الأقصى:** وهذا المعيار يقتضي التركيز على الربح وبالتالي اختيار القيمة الحالية الصافية (VAN) العالية.

- **معيار le critère Maximin** : ويسمى أيضا معيار الحذر حيث يأخذ الحد الأدنى للقيمة الحالية الصافية (VAN) لكل مشروع مأخوذ.

- **Les Critères de Laplace:** ويتعلق المر باتخاذ أحسن التوقعات الرياضية للقيمة الحالية الصافية VAN، بالانطلاق من فرضية أن التدفقات النقدية متساوية.

- **Les Critères de Savage:** وهذا المعيار ينص على ضرورة أن يكون صاحب القرار حذرا في قراراته، حيث يتطلب هذا المعيار إعداد مصفوفة الندم La Matrice des reqrets حيث أن الندم Le Regretهو الفرق بين النتيجة العالية وبين النتيجة المتوقعة.

إن القرار الجيد سيخفض من الحد الأقصى من الندمLe Regret maximal .

– **Les Critères de Hururiz:** ويقضي هذا المعيار استعمال معاملات التفاؤل وذلك لكل قرار الذي له نتيجة عالية والمرجع ل Les Copiaient d'optimise ($\propto$)، والقرار الذي له نتيجة منخفضة $(1-\propto)$.

حيث أن القرار الجيد هو الذي يعظم من النتيجة المتوسطة.[1]

جدول يلخص جميع المعايير المستخدمة لتقييم واختيار المشاريع:[2]

نقاط القوة ونقاط الضعف	الهدف	الأدوات
– يتم حساب بسرعة (بدون تحيين) – لا يحدد بدقة مردودية الاستثمارات.	– يقيس طاقة الاستثمارات المولدة بسرعة على الخزينة (السيولة).	فترة استرداد رأس المال DRC.
– يعمل على خلق قيمة مضافة للاستثمار. – مادام أنه يعبر بالدينار فإن لا يمكن مقارنته بالمعدلات المرجعية (القطاعات، تكلفة راس المال).	– يقيس مدى قدرة الاستثمارات على خلق قيمة مضافة (المردودية).	القيمة الحالية الصافية VAN .
– يمكن مقارنته بالمعدلات المرجعية. – لا يتحمل أكثر من إثنين من التدفقات النقدية السالبة. – يمكن ان يؤدي إلى استخراج قيم متبقية لبعض المشاريع.	– يقيس المردودية. – أصل المشروع.	معدل العائد الداخلي TRI
– التحكيم بين مشروعين مع الأخذ ميعن الاعتبار معدل التحيين.	– يقيس الفائض المستخرج لكل دينار من رأس المال المستثمر.	مؤشر الربحية Indice de profitabilité.
– يعظم قيمة الفائض الذي يزيل الغموض على أبعاد المشاريع.	– تقيس مردودية الاستثمارات مع الأخذ بعين الاعتبار توظيف التدفقات.	المعايير الإجمالية Critères globaux.

[1] – Christelle Baratay, Mathématique financière, optic, P P 46-47.

[2] – Etienne G. Harl, Mathématique financières, optic, P 149.

تمارين حول اختيار وتقسيم الاستثمارات

التمرين الأول:

على مؤسسة " خيضر" أن تختار بين نوعين من المشاريع المبين في الجدول أدناه:

	المشروع أ	المشروع ب
المبلغ	1900.000	1900.000
التدفقات النقدية للاستغلال	50.000	80.000
المدة	3 سنوات	4 سنوات

كما أن تكلفة رأس المال قدرت ب 8%.

المطلوب:

– ماهو المشروع الواجب اختياره من طرف هذه المؤسسة؟

التمرين الثاني:

تنوي مؤسسة " عبود" أن تنجز استثمارا وعليه وجب أن تختار بين نوعين من المشاريع، حيث أن معطيات، المشروع الأول والثاني نجدها مبنية في الجدول أدناه.

	المشروع أ	المشروع ب
	3500.000 دج	3500.000 دج
مدة	5 سنوات	7 سنوات
التدفقات السنوية للاستغلال	950.000 دج	950.000 دج

في حين أن هذه المعدات تهتلك إهتلاكا خطيا، أما القيمة المتبقية فتساوي القيمة المحاسبية الصافية، كما أن المعدل الأدنى والصافي من الضرائب قدر ب 10%.

المطلوب:

1)– اشرح بطريقة مختصرة لماذا لا يمكن استخدام طريقة VAN لمقارنة المشروعين.

2)– ماهو المشروع الأكثر مردودية؟.

التمرين الثالث:

في إطار تطوير جهازها الإنتاجي من جهة والمحافظة على مركزها التنافسي في السوق، قررت مؤسسة " مريم" حيازة آلة التعبئة عالية السرعة وذلك بقيمة 1,6 مليار دج تهتلك بإهلاك خطي لمدة 5 سنوات في حين أن القيمة المتبقية في السنة الأخيرة تساوي الصفر.

حيث تتوقع المؤسسة ما يقارب 300.00 دج تكلفة حيز التنفيذ. أما تكاليف الإنتاج السنوية يقدر ب 30% من رقم الأعمال خارج الرسم.

كما أن رأس المال العامل يجب أن يساوي على الأقل مرتين من رقم الأعمال خارج الرسم وذلك كل عام.

أما فيما يخص رقم ألعمال للسنوات الخمس (HT):

t	1	2	3	4	5
CA (HT)	800	1500	1600	1500	1200

المطلوب:

بافتراض أن معدل المطبق على الأرباح يقدر ب 35% والتكلفة المتوسطة المرجحة يقدر ب 10%.

1- قم بتحديد تدفقات الخزينة لهذا الاستثمار.

2- قم بدراسة المردودية المالية لهذا المشروع وذلك بحساب كل منTRI, VAN, DRC.

التمرين الرابع:

تريد إحدى مؤسسات " النقلّ الاختيار بين مشروعين للاستثمار.

المشروع الأول: قامت المؤسسة ببيع حافلاتها القديمة بمبلغ 25000.00 ثم قامت بعد ذلك بإعادة شراء حافلات جديدة قدرت تكلفتها ب 35000.00 دج تسدد على خمس أقساط متساوية حيث أن القسط الأول يسدد في نهاية السنة الثانية. وهذه الحافلات تتطلب صيانة سنوية تقدر ب مبلغ 200.000 دج أما عن التدفقات النقدية الصافية المتوقعة السنوية 190000 والقيمة المتبقية في نهاية السنة الرابعة قدرت ب 500.00 دج.

المشروع الثاني:

الاحتفاظ بالحافلات القديمة صيانتها بمبلغ 1000.000.00 دج، كما قامت بصيانة حافلاتها في نهاية السنة الثانية ب 1500000 دج. كما تتطلب صيانة هذه الحافلات سنويا بمبلغ 750000 دج، وتبلغ التدفقات النقدية الصافية المتوقعة السنوية ب 160000 دج والقيمة المتبقية تكون معدومة في نهاية السنة السادسة.

المطلوب:

مع العلم أم معدل الاستحداث 6% وباستعمال طريقة القيمة الحالية الصافية أي المشروعين أحسن؟.

التمرين الخامس:

قامت شركة "ITIMAX" بتقسيم مشروع إستمثاري معين، بعد دراسة هذا المشروع تطلب الأمر تدفقات نقدية خارجية حالية قدرها 200.000 دج، في حين أن التدفقات النقدية الداخلية المتولدة عن المشروع سنويا خلال حياته المقدرة ب 8 سنوات بمبلغ 30000 دج سنويا، كما حددت الشركة معدل العائد المطلوب ب 15%.

المطلوب:

1- ماهو قرار الاستثمار إذا طبقت الشركة معيار صافي القيمة الحالية؟.

2- ماهو قرار الاستثمار إذا طبقت الشركة معيار معدل العائد الداخلي؟.

قائمة المراجع:

الكتب باللغة العربية

1.غازي فلاح المومني، الرياضيات المالية المعاصرة، دار المناهج للنشر، الطبعة الأولى ،عمان الأردن، 2006.

2.شقيري نودي موسى، وليد أحمد الصافين محمود إبراهيم نور، الرياضيات المالية، دار المسير للنسر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان– الأردن، 2009

3.رابح بناني وأخرون، الرياضيات، الديوان الوطني للمطبوعات الجزائرية O.N.P.S، طبعة 2009، الجزائر

4.جمال تاوريت، الرياضيات، الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية، الطبعة الأولى، الجزائر 2008

5.بوغرة باديس، المدخل إلى الرياضيات المالية وتطبيقاتها، دار الهدى للطباعة والنشر، 2012

6.يحي موسى حسين الجبالي، محمد إبراهيم خليل، الرياضة المالية، مركز التعليم المفتوح جامعة بنها، 2011.

الكتب باللغة الأجنبية:

1.Benjamin Legros, Le Guide Manuel de Mathématiques Financières, éditions Dunod, paris, 2011,

2.Étienne G.HARB.Firas Batnini, Xavier Durand, Mathématique financières

3.Christelle Baratay, Mathématique financières, édition gualine,paris,2016