الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة أمحمد بوقرة بومرداس
كلية العلوم الاقتصادية، التجارية
وعلوم التسيير

Ministère de l'enseignement supérieur
Et de la recherche scientifique

Université M'Hamed BOUGARA de Boumerdès
Faculté Des Sciences Economiques, Commerciales
Et des Sciences De Gestion

مطبوعة بيداغوجية تحت عنوان:

محاضـرات
فـي مقياس رياضيات المؤسسة

موجهة لطلبة: السنة الثانية

تخصص: علوم تجارية، علوم اقتصادية، علوم التسيير

من إعداد الدكتور: لعور عبد الحفيظ

قسم: علوم التسيير

السنة الجامعية: 2020-2021

الفهرس العام

مقدمة..... 1

الفصل الأول: مقدمة في بحوث العمليات 3

الفصل الثاني: البرمجة الخطية 14

الفصل الثالث: أشكال نماذج البرامج الخطية 27

الفصل الرابع: الطريقة البيانية في حل البرامج الخطية 38

الفصل الخامس: طريقة السيمبلكس في حل البرامج الخطية 56

الفصل السادس: الثنائية (البرنامج الثنائي) 84

الفصل السابع: تحليل الحساسية 96

الفصل الثامن: مشكل النقل..... 111

الخاتمة 160

المراجع 161

مقدمة

يهتم مقياس رياضيات المؤسسة بدراسة وتطبيق الأساليب العلمية والرياضية في حل المشاكل الإدارية والإنتاجية والخدماتية والتي تواجه المؤسسات الاقتصادية وذلك من أجل اتخاذ القرارات المناسبة، ويعتبر محتوى هذا المقياس جزء من علم تابع يدعى بحوث العمليات، حيث ظهر علم بحوث العمليات لتقديم الصيغ العلمية والرياضية لمحاولة إيجاد الحلول المثلى للمشاكل التي تعتمد على البدائل المتعددة لحلها.

وتصنف بحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة التي حققت تطبيقاتها نجاحا واسعا في مختلف المجالات؛ إذ أن صناعة القرارات وتطبيقاتها في أي مجال من المجالات يتطلب اللجوء إلى الأساليب العلمية التي تمكن صانعي القرارات والقائمين على تنفيذها من الوصول إلى الغايات المرجوة في ظل الإمكانيات المتاحة.

وتعتبر بحوث العمليات التي تهتم بالتخصيص الأمثل للموارد فناً وعلماً على السواء، يتمثل الفن في القدرة على التعبير عن مفاهيم الكفاءة والنذرة في شكل نموذج رياضي محدداً تحديداً جيداً بالنسبة لموقف معين، أما العلم فيتمثل في اشتقاق الطرق الحسابية لحل هذه النماذج الرياضية.

وتأتي أهمية علم بحوث العمليات من مقدرته على نمذجة المشاكل الحقيقية ضمن المجالات المختلفة واستخدامه لأساليب وخوارزميات علمية رياضية في تحليل ودراسة تلك النماذج واستخلاص الحلول المثلى التي تساهم بشكل فعال في عملية اتخاذ القرار المناسب وفي الوقت المناسب.

ومن أهم أساليب بحوث العمليات أسلوب البرمجة الخطية الذي يستخدم لإيجاد التخصيص الأمثل للموارد المحدودة على الاستخدامات البديلة على النحو الذي يحقق هدفا معينا بأحسن صورة ممكنة، والبرمجة الخطية هي الحالة الخاصة للنموذج الرياضي، والذي يهدف إلى إيجاد الحلول (البدائل) الممكنة للمشكلة وهذا في ظل قيود معينة تأخذ شكل المعادلات وهي أحد الأركان الرئيسة لبحوث العمليات ومن أهم أدواتها في حل المشاكل المتعلقة بالبدائل، فهي تساعد المؤسسات الاقتصادية على حل مشاكل لم يكن لها أي حلول في الماضي.

لذا فإن متخذي القرارات داخل المؤسسة لابد وأن يتمتعوا بقدر كبير من الإلمام بالأساليب العلمية الحديثة وخصوصاً الكمية منها لمساعدتهم في اتخاذ القرارات المختلفة بكفاءة وفعالية، حيث يوفر علم بحوث

العمليات أساليب كثيرة تساعد في حل الكثير من المشاكل الإدارية، ولذلك أصبح هذا العلم اليوم من المواد الأساسية التي تدرس في جميع الجامعات العالم بدون استثناء على اختلاف تخصصاتها، ونحن ضمن المجال الاقتصادي أحوج ما نكون إلى اللجوء إلى هذا العلم من خلال الاستعانة بأساليبه بغرض التعامل مع الكثير من المشاكل الاقتصادية والإدارية.

الفصل الأول: مقدمة في بحوث العمليات

Operations Research

تمهيد:

شهد العالم نمواً ملحوظاً في حجم وتعقيد المؤسسات بعد ظهور الثورة الصناعية، صاحب هذا التطور زيادة هائلة في تقسيم العمل ومسؤوليات الإدارة لهذه المؤسسات، لكن مع زيادة الاتساع والتعقيد والتخصص أصبح من الصعب تخصيص الموارد المتاحة للأنشطة المختلفة بطريقة أكثر فعالية للمؤسسة ككل، فأدت هذه الأنواع من المشاكل إلى إيجاد طرق أفضل لتخصيص الموارد المحدودة المتاحة.

ولقد ساعدت الأبحاث التي تمت خلال العمليات الحربية التوصل إلي الكثير من الأساليب الرياضية الجديدة التي تساعد في اتخاذ القرارات وحل المشكلات الإنتاجية المختلفة، ولقد كان ذلك بمثابة نقطة البداية لظهور ما يعرف حاليا ببحوث العمليات.

1. مفهوم بحوث العمليات.

يعبر مصطلح بحوث العمليات عن استخدام الأساليب الكمية لتحليل وتحسين صنع القرارات، فبدأت أفكار وأساليب بحوث العمليات في التبلور خلال الحرب العالمية الثانية، وبعد ذلك تم استخدامها بشكل جيد ضمن مجموعة واسعة من المجالات العلمية والصناعية والمالية والحكومية الربحية وغير الربحية.

1.1. تعريف بحوث العمليات: لقد عرف دانتزينغ (George B. DONTZIG) بحوث العمليات بأنها: "علم الإدارة، أي علم اتخاذ القرارات وتطبيقاتها"،[1] كما يمكن تعريفها بأنها: "استخدام الأساليب الكمية لمساعدة المحللين وصانعي القرار في تصميم وتحليل وتحسين أداء الأنظمة، قذ تكون هذه الأنظمة مالية أو علمية أو هندسية أو صناعية، وبغض النظر عن نوع هذه الأنظمة فإنها تخضع عملياً لإطار منهج البحث العلمي"؛[2] فمن الملاحظ أن تعاريف بحوث العمليات تتراوح بين منهج علمي لصناعة القرارات واستخدام الأدوات الكمية من أجل صناعة القرارات العلمية.

[1] - **حامد سعد نور الشمرتي**، "بحوث العمليات مفهوماً وتطبيقاً"، الطبعة الأولى، مكتبة الذاكرة، بغداد، العراق، 2010 ، ص: 02.

[2] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, "Operations Research: A Practical Introduction", Second Edition, CRC Press, Taylor & Francis Group, New York, USA, 2019, P: 01.

كما عرفتها الجمعية الأمريكية لبحوث العمليات بأنها: "تهتم بحوث العمليات بالقرار العلمي من أجل تصميم وتشغيل أفضل لعلاقة الإنسان بالآلة في ظروف عادة تتطلب تخصيص الموارد النادرة"،[1] بالإضافة إلى ما سبق فإن بحوث العمليات لسيت فقط طريقة للقيام بالأشياء بل هي طريقة للتفكير كذلك، فهي تحاول القيام بالأشياء بشكل أكثر كفاءة.[2]

وتعرف بحوث العمليات على أنها: " مجموعة المعارف التي تستخدم تقنيات رياضية لحل مشاكل الإدارة واتخاذ قرارات مثلى في الوقت المناسب، وتهتم بحوث العمليات بمساعدة المديرين وصناع القرار على اتخاذ قرارات أفضل، فلا يمكن إنكار الدور الذي تلعبه الأساليب العلمية في اتخاذ القرارات المثلى".[3]

ويعرف تشيرمان وأكتوف وأرنوف (Churchman, Ackoff, Arnoff) بحوث العمليات بأنها: "تطبيق الأساليب والتقنيات والأدوات العلمية لتشغيل نظام مع الحصول على الحل الأمثل للمشكلة"،[4] فهذا التعريف يعترف بأن بحوث العمليات تعتمد على تطبيق الأساليب العلمية لايجاد الحل الأمثل للمشكلة قيد الدراسة.

ليس هناك تعريف محدد لبحوث العمليات، فنجد لكل فرد لديه التعريف الخاص به حسب النشاط الذي يقوم بممارسته والهدف الذي يريد الوصول إليه، مثلاً:

- رجل أعمال: الطريقة أو التقنية المستعملة للحصول على أعلى الأرباح.
- رجل التسويق: الطريقة أو التقنية المستعملة للحصول على أكبر حصة من السوق.
- طالب جامعي: الطريقة أو التقنية التي يستعملها للحصول على أعلى العلامات.

فلا أحد يعطي تعريف كامل لها بل كل واحد يعرفها حسب هدفه المنتظر.

فيمكن تعريف بحوث العمليات بأنها: مجموعة من الطرق والأساليب العلمية المساعدة لاتخاذ قرارات التسيير العلمي الأمثلي في الإدارة، وهي تعتمد على القياس الكمي بمساعدة الأساليب الإحصائية والرياضية.

من خلال التعاريف السابقة نستشف السمات البارزة لبحوث العمليات والتي نوجزها في:[5]

- تعتمد على الأساليب العلمية في اتخاذ القرارات.

---

[1] - **H.A. EISELT, C.-L. SANDBLOM**, "Operations Research: A Model-Based Approach", First Edition, Springer-Verlag Heidelberg, Berlin, Germany, 2010, P: 01.

[2] - **Ibid**, P: 01.

[3] - **P. Rama MURTHY**, "Operations research", Second Edition, New Age International (P) Ltd., New Delhi, India, 2007, P: 01.

[4] - **Ibid**, P: 08.

[5] - **Ibid**, P: 09/10.

- تضم العديد من التخصصات لحل المشاكل وتعتمد على معارف وخبرة المتخصصين في مختلف المجالات.
- يتم دراسة جميع جوانب المشكلة وتحليلها بطريقة علمية من أجل الوصول إلى الحل الأمثل لها.
- توفر قاعدة علمية لاتخاذ القرار.

2.1. أهمية واستخدامات بحوث العمليات: هناك العديد من العقبات التي تقف أمام استخدام بحوث العمليات في الممارسة العملية، وأهم هذه العقبات الوعي، حيث العديد من متخذي القرارات غير قادرين على التفكير بأن المشكلة التي بين أيديهم تحتاج إلى استخدام التحليل الكمي، وحتى ولو عرفوا هذا لا يكون هناك اهتمام على الإطلاق؛ فالخطوة الأولى تتطلب الإدراك بأن بحوث العمليات يمكن تطبيقها على المشاكل التي تتطلب حلاً في الوقت الحاضر،[1] وتكمن أهميتها في:

- تعتبر من الوسائل العلمية المساعدة في اتخاذ القرارات بأسلوب أكثر دقة باستخدام الطرق العلمية الحديثة وبعيد عن العشوائية الناتجة عن التجربة والخطأ.
- تعتبر فن وعلم في آن واحد فهي تتعلق بالتخصيص الكفء للموارد المتاحة وكذلك قابليتها الجديدة في عكس مفهوم الكفاءة والندرة في نماذج رياضية تطبيقية.
- تساعد على توفير تكلفة حل المشاكل المختلفة وذلك بتخفيض الوقت اللازم للحل.
- تسعى إلى البحث عن القواعد والأسس الجديدة للعمل الإداري، وذلك للوصول إلى أفضل المستويات من حيث الجودة الشاملة، ومقاييس المواصفات العالمية.
- تساعد على تناول مشاكل معقدة بالتحليل والحل والتي يصعب تناولها في صورتها العادية.
- تساعد على تركيز الإهتمام على الخصائص الهامة للمشكلة دون الخوض في تفاصيل الخصائص التي لا تؤثر على القرار، ويساعد هذا في تحديد العناصر الملائمة للقرار واستخدامها للوصول إلى الأفضل.

3.1. هدف بحوث العمليات: تزداد المؤسسات تعقيدا يوم بعد يوم، فأصبحت المؤسسات تحتوي على العديد من الأقسام وكل قسم يسعى إلى تحقيق أهدافه وأهداف المؤسسة، لكن عند القيام بذلك قد تتعارض أهداف القسم مع أهداف الأقسام الأخرى، على الرغم من أن جميع الأقسام تعمل على تحقيق الهدف المشترك

[1] - **H.A. EISELT, C.-L. SANDBLOM**, Op-Cit, P: 02.

لمصلحة المؤسسة، ففي هذه الحالة يصبح الموقف معقد بالنسبة لمدراء الأقسام ومدير المؤسسة ككل، من خلال تخصيص الموارد المتاحة لجميع الأقسام من أجل تحقيق هدف المؤسسة.

هذا بالإضافة إلى ديناميكية بيئة الأعمال التي تعمل بها المؤسسة، مما يتطلب من مدير المؤسسة اتخاذ قرارات دون تأخير للوقوف على حال المنافسة السوقية، فالقرار الخاطيء أو غير المناسب في مثل هذه الحالات يكون مكلفاً للغاية، فمن المستحسن الاعتماد على الأساليب العلمية والرياضية أثناء اتخاذ القرارات.

ومن تم فإن الإحاطة بعلم بحوث العمليات من طرف مسؤولي المؤسسات أمر ضروري في عملية صنع القرار، حتى يكون القرار المتخذ هو القرار الأمثل بالنسبة للمؤسسة، ومن هنا فإن الهدف من بحوث العمليات هو توفير أساس علمي لصانع القرار لحل المشاكل التي تضم تفاعل المكونات المختلفة للمؤسسة.[1]

4.1. خصائص بحوث العمليات: تتميز بحوث العمليات بمجموعة من الخصائص التي نوجزها في:[2]

- منهج متعدد التخصصات: حيث تتضمن العديد من المتغيرات والقيود، والتي تتجاوز القدرة التحليلية لفرض أو تخصص واحد.
- تزيد من القدرة الإبداعية لصانع القرار: حيث تقدم العديد من الأدوات والتقنيات والنماذج الرياضية المتنوعة لتحليل المشاكل وتقييم البدائل المختلفة واختيار الأمثل منها، مما يساعد على اتخاذ قرارات بشكل أفضل واسرع.
- تعتبر منهج تنظيمي: فيمكن اعتبار أي مؤسسة أو هيئة بمثابة نظام له أنظمة فرعية مختلفة، فالقرار الذي يتخذ من طرف أي نظام فرعي سوف يؤثر على الأنظمة الفرعية الأخرى.

2. التطور التاريخي لبحوث العمليات.

لفهم بحوث العمليات على ما هي عليه اليوم، يجب معرفة تاريخ النشأة والتطور الحاصل عليها، فعلى الرغم من أن نماذج وأدوات وتقنيات بحوث العمليات تعود إلى زمن بعيد، إلا أنه يصعب تحديد فترة معينة كنقطة بداية لتطبيق مفاهيم بحوث العمليات، لكن من خلال استعراض تطور مفهوم الإدارة بشكل عام، نستطيع أن نرى بأنه هناك فترات بدأت تتميز بها هذه المفاهيم أكثر من غيرها كفترة الثورة الصناعية مثلاً.

[1] - **P. Rama MURTHY**, Op-Cit, P: 06/07.
[2] - **Ibid**, P: 10.

فالعديد من الباحثين يرجعون ولادة بحوث العمليات إلى الحرب العالمية الثانية، لكن أساسها قد تم وضعه من قبل، فغالباً ما يطلق على تايلور (F.W. Taylor) أبو الإدارة العلمية، عندما أجرى دراساته الزمنية سنة 1881، حيث كان سؤاله الرئيسي هو: ما هي أفضل طريقة للقيام بالعمل؟ كما قدم كانط (Henry L. Gantt) مخططات كانط لمشاكل الجدولة، وقدم إرلانغ (Agner Krarup Erlang) نظام صفوف الانتظار سنة 1909 عند العمل في بورصة الهاتف بكوبنهاغن، كما طور هاريس (F.W. Harris) الكمية الاقتصادية لإدارة المخزون، حيث كان همهم الرئيسي الأداء السلس للعمليات.[1]

وبالرغم من كل ذلك فإن بحوث العمليات لم تظهر كحقل علمي مستقل إلا مع بداية الحرب العالمية الثانية في كل من المملكة المتحدة والولايات المتحدة، لزيادة فعالية العمليات العسكرية في ظل الموارد المتناقصة،[2] حيث دعت الإدارة العسكرية في انجلترا فريق من العلماء لدراسة المشاكل الاستراتيجية والتكتيكية العالقة وذلك في ظل المصادر المتوفرة التي كانت محدودة والهدف كان ربح الحرب بالمصادر القليلة المتوفرة مثل: الأكل والأدوية والذخيرة والقوة البشرية، وفريق العمل كان يضم علماء من شتى المجالات، علماء في رياضات، أساتذة، وعلماء في الهندسة، وعلماء في علم السلوكيات وغيرها من المجالات، ومن تم ظهرت بحوث العمليات وفي الأخير استطاعت هذه الطريقة حسم الحرب.

هذا البحث التحليلي أدى إلى نجاح العمليات العسكرية بشكل ملحوظ، وبعد انتهاء الحرب أصبحت مهارات وتجارب العلماء الذين ركزوا على العمليات العسكرية متاحة لإعادة التوجيه إلى المجال الصناعي والمالي والمدني، ومما ساعد على ذلك ظهور أجهزة الحاسوب التي جعلت من العمليات الحسابية المعقدة والمستهلكة للوقت أمراً ممكناً، وهكذا أصبحت المنهجيات التي طورت لأغراض عسكرية مفيدة في مجال الأعمال والصناعة.[3]

ونظراً للنجاح الذي لقيهُ هذا الأسلوب في إدارة العمليات الحربية، فقد تم نقله للإدارة المدنية وبخاصة إلى إدارة الأعمال والمشاريع الاقتصادية، فبعد الحرب العالمية الثانية كانت هناك ندرة في المواد الأولية الصناعية والإنتاجية، أو ما يعرف بالكساد الصناعي، فكانت هناك حاجة لحل هذه المشكلة، فبدأت بعض الصناعات الاستفادة من هذه الأساليب في زيادة انتاجيتها وربحيتها عن طريق الاستغلال الأمثل لمواردها، وبدأ هذا الحقل العلمي يتطور بشكل متزايد كماً ونوعاً في شتى المجالات الاقتصادية والاجتماعية والسياسية وقد ساعد ذلك التقدم الفني المتمثل في انتشار أجهزة الحاسوب.[4]

---

[1] - **H.A. EISELT, C.-L. SANDBLOM**, Op-Cit, P: 02.

[2] - **محمد الطراونة، سليمان عبيدات**، "مقدمة في بحوث العمليات"، الطبعة الأولى، دار الميسرة، عمان، الأردن، 2009، ص: 14.

[3] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 02.

[4] - **محمد الطراونة، سليمان عبيدات**، مرجع سابق، ص: 14.

سمي الخبراء العلميون هذه العملية بعملية البحث، وسرعان ما استخدم مصطلح تحليل العمليات من طرف الجيش الأمريكي للإشارة إلى هذا العمل الذي قامت به فرق من المحللين من مختلف التخصصات الذين تعاونوا خلال الحرب،[1] ولقد أعطوها عدة مسميات منها: تحليل العمل، تحليل الأنظمة، تقييم العمليات، تقييم الأنظمة، بحوث العمليات، أنظمة البحث، طرق كمية وتقنيات وعلم الإدارة، ولكن على نحو واسع كانت تسمى **بحوث العمليات**، فكانت لها الأهمية العالمية في كيفية تحسين الربح أو تخفيض التكاليف، وسميت بهذا الاسم لكون أولى البحوث وتطبيقاتها في هذا المجال كانت على العمليات الحربية.

ولقد كان الفضل للعالم الروسي (Leonid Vitalyevich KANTOROVICH) وهو عالم رياضيات وخبير اقتصادي متخصص في الأمثلية (L'optimisation)، ومخترع البرمجة الخطية في سنوات الثلاثينات من القرن الماضي، ولد في 19 جانفي 1912 بسان بطرسبرغ وتوفي في 7 أفريل 1986 بموسكو روسيا ومنح جائزة نوبل للاقتصاد سنة 1975.

وتطورت فيما بعد من طرف عالم الرياضيات الامريكي دانتزينغ سنة 1947، هو الذي أعطى الانفتاح على التعاون بين الحقل الأكاديمي والحقل الصناعي حصوصاً في عملية اتخاذ القرارات، وظهر أول كتاب لبحوث العمليات عام 1957 بواسطة جير جيمان بنيويورك تحت عنوان: "مقدمة في بحوث العمليات"، ومع ذلك فالحدث الرئيس كان في أوت 1947، عندما طور دانتزينغ ما يسمى الآن بطريقة السيمبلكس للبرمجة الخطية، فلم يؤثر أي حدث آخر على علم بحوث العمليات أكثر من هذا التطور، كما كان للتقدم الحاصر على أجهزة الحاسوب وبرامجه تأثير هائل على تقدم بحوث العمليات.[2]

كما لا ننسى مجهودات العالم المجري الأمريكي نيومن (John von NEUMANN) الذي اقترح نظرية الألعاب ونظرية التوازن في ظل المعلومات غير المتماثلة، ولد في 28 ديسمبر 1903 ببودابست وتوفي في 8 فبراير 1975 في واشنطن بالولايات المتحدة الامريكية، وهو عالم الرياضيات والفيزياء ومنح جائزة نوبل في الاقتصاد عام 1972.

[1] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 02.
[2] - **H.A. EISELT, C.-L. SANDBLOM**, Op-Cit, P: 03.

3. مجالات بحوث العمليات.

يتضمن مجال بحوث العمليات أدوات تحليلية من العديد من التخصصات المختلفة، والتي يمكن تطبيقها بطريقة عقلانية لمساعدة صناع القرار على حل المشكلات والتحكم في عمليات الأنظمة والمؤسسات بأكثر الطرق العملية وأفضلها، ويمكن استخدام أدوات بحوث العمليات لتحسين أداء الأنظمة والمؤسسات، إلا أنه في نهاية الأمر فإن صانعي القرار هم الذين سيستخدمون وينفذون ما تم تعلمه من خلال عملية التحليل لتحقيق الأداء الأفضل؛[1] والتطبيقات المستعملة في بحوث العمليات لها استعمالات واسعة فهي قد تستعمل لحل أي نوع من المشاكل أو أي عمل في مختلف المجالات (الأعمال والقطاع الحكومي والصناعي والزراعي والاجتماعي والدفاعي وغيرها)، ويمكن تلخيص أهم المجالات الإدارية لاستخدام بحوث العمليات على سبيل المثال لا الحصر بما يلي:[2]

- **الإنتاج:** ويشمل دراسات الجدوي، تحديد المدخلات اللازمة للعمليات الإنتاجية، تحديد نماذج المنتجات، اختيار موقع المشروع، التصميم الداخلي للمصنع، تخطيط العمليات الإنتاجية، ضبط ومراقبة الجودة، الصيانة، قياس ورفع الكفاءة الإنتاجية.
- **التسويق والمبيعات:** بحوث التسويق وضع الأسعار، الدعاية والإعلان، رسم السياسات التسويقية، تحديد الأسواق، سياسات التوزيع.
- **التمويل:** وما يتعلق به من تحديد مصادر الحصول على الأموال وتخطيط وتوجيه الاستثمارات.
- **الأفراد:** وما يرتبط بذلك من سياسات تحديد الاحتياجات والتعيين والتدريب وأنظمة التحفيز والتشجيع.
- **المشتريات والمخازن:** من حيث تحديد مصادر الشراء وكميات وأسعار المواد المشتراة وأوقات الحصول عليها ووضع نظم سليمة للمخزون مما يؤذي إلى زيادة الربحية وتخفيض التكاليف.
- **الرقابة الإدارية:** حيث أن وضوح وتحديد الأهداف بشكل علمي ومدروس يسهل من مهمة الرقابة وبالتالي زيادة الفعالية.

كل هذا إضافة إلى مجالات أخرى أكثر اتساعاً، ومن هنا نرى أنه يمكن الاستفادة من أساليب بحوث العمليات في كافة المجالات.

---

[1] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, " Op-Cit, P: 01.

[2] - **محمد الطراونة، سليمان عبيدات**، مرجع سابق، ص: 22/21.

4. شروط تطبيق بحوث العمليات.

يمكن تطبيق أساليب بحوث العمليات كافة على مختلف المؤسسات الإنتاجية منها والخدمية، بشروط يجب توفرها وهي:[1]

- **محدودية الموارد:** أي أن الموارد التي تستعملها المؤسسة تتصف بكونها محدودية الكمية من حيث توفرها وكيفية الحصول عليها، بمعنى آخر الموارد المتوفرة تحت تصرف المؤسسة لا يوجد منها كميات كبيرة إلى درجة يمكن الحصول عليها في أية لحظة ومن دون عناء أو تكلفة.
- **تعدد البدائل:** أي أنه هناك أكثر من بديل أو طريقة يتم بموجبها استغلال الموارد المتوفرة، ومن الجدير بالذكر هنا أن اختيار البديل الأفضل أو الأمثل يخضع لمعايير متعددة وأهمها أن يحقق أكبر المنافع بأقل التكاليف، لذلك يسمى بالبديل الأمثل.

5. منهج بحوث العمليات.

تعتمد بحوث العمليات على المنهج العلمي ابتداءً من بناء النموذج إلى حله، فاختباره، فتطبيقه، وكون أن التحضير لإتخاذ القرار في المؤسسات بمساعدة بحوث العمليات يتطلب المرور بمجموعة من المراحل منها ما يلي:

- تحديد المشكلة وتحليلها إلى عناصرها الأولية.
- بناء النموذج الرياضي المناسب والذي يتماشى مع طبيعة المشكلة.
- اختبار مدى صحة النموذج.
- ايجاد حل للنموذج بعد معرفة الطريقة التي تخضع لها المشكلة.
- اختبار مدى مناسبة الحل.
- تنفيذ خطة الحل المتوصل اليها.

من الصعب وصف مسارات عمل محددة، لأن هذه العوامل غير ملموسة، لكن يمكن الاعتماد على هذه المراحل الرئيسة وهي خطوات منهجية لابد من المرور عبرها لحل أي مشكل علمي في الإدارة الاقتصادية للموارد، وسوف نتطرق إلى جميع هذه الخطوات بالتفصيل:[2]

---

[1] - **حامد سعد نور الشمرتي**، مرجع سابق ، ص: 03-05.

[2] - **Hamdy A. TAHA**, "Operations Research: An Introduction", Tenth edition, Pearson Education Limited, Harlow, England, 2017, P: 40/41.

1.5. صياغة المشكلة: الذي يتضمن تحديد نطاق المشكلة محل الدراسة، بحيث يجب أن يقوم فريق بحوث العمليات بأكمله القيام بهذه العملية، والهدف منها هو تحديد ثلاثة عناصر رئيسة: وصف بدائل القرار، وتحديد هدف الدراسة، وتحديد القيود.

وفي صياغة مشكلة الدراسة في بحوث العمليات يجب أن يتم تحليل المكونات الرئيسة الأربعة:

- البيئة (الأفراد، الآلات، الموردين، المستهلكين، الحكومة، الجمهور وغيرها).
- صانع القرار.
- الأهداف.
- بدائل العمل والقيود.

فيعتبر التعرف على الأهداف المناسبة جانب مهم جداً للتعرف على المشكلة، وللقيام بذلك من الضروري معرفة من هو متخذ القرار الإداري فيما يخص المشكلة محل الدراسة، وذلك للتحقق من الأهداف التي يريد الوصول إليها صانع القرار منذ البداية، والذي يعتبر الأمر الضروري لبناء وصياغة أي نموذج وتنفيذ الدراسة.[1]

عادة في العديد من المشاكل، يكون الهدف غير محدد أو غامض؛ وسيتطلب ذلك من صانع القرار صياغة التعبير عنه عن طريق بديل بدلاً من الهدف.[2]

2.5. بناء النموذج الرياضي: بعد صياغة المشكلة فإن الخطوة الموالية هي بناء نموذج للنظام قيد الدراسة (نموذج رياضي)، والذي ينطوي على محاولة لترجمة المشكلة المعرفة إلى علاقات رياضية، والمقارنة فيما إذا النموذج المتحصل عليه يتناسب مع أحد النماذج الرياضية القياسية، مثل البرمجة الخطية، فيمكن التوصل إلى الحل باستخدام الخوارزميات المتاحة، ويتكون النموذج الرياضي من مجموعة من المعادلات تصف هذه المشكلة، هذه المعادلات تمثل دالة الهدف والقيود.

- **دالة الهدف:** هي تعبير رياضي عن الأهداف أي تعبير رياضي لتكلفة أو ربح من العملية.
- **القيود:** هي التعبيرات الرياضية عن القيود المفروضة على تحقيق هذه الأهداف.

3.5. اشتقاق الحل: والذي يعتبر أبسط مراحل جميع عمليات بحوث العمليات، لأنه يعتمد على استخدام خوارزميات معروفة، يمكن الحصول على الحل، إما عن طريق المحاكاة أو التحليل الرياضي.

---

[1] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, "Introduction to operations research", Tenth edition, McGraw-Hill Education, New York, USA, 2015, P: 11.

[2] - **H.A. EISELT, C.-L. SANDBLOM**, Op-Cit, P: 06.

4.5. اختبار النموذج الرياضي والحل: يعتبر النموذج تمثيل بسيط للواقع، فيجب اختبار الحل في الواقع وتحديد مدى تأثر هذا النموذج وهذا الحل بالتغيرات التي تحدث في الواقع، والذي يعني التحقق من أن هذا النموذج يقوم بما هو مفترض القيام به، أي مقارنة مخرجاته مع النتائج السابقة في ظل الظروف المماثلة، كما يمكن استخدام المحاكاة كأداة للتحقق من صحة مخرجات هذا النموذج، وهذا ما يدعى بتحليل الحساسية (أي مقارنة النتائج التي يتم الحصول عليها من دون تطبيق الحل مع النتائج التي تم الحصول عليها من خلال تطبيق هذا الحل).

5.5. مراقبة تنفيذ الحل: الحل الأمثل المتحصل عليه قد يتأثر بالتغيرات التي تحدث في المستقبل، ولذلك قد تظهر الحاجة إلى تعديل هذا الحل من حين لآخر ولأن بعض التغيرات لا يمكن التحكم بها وبالتالي يجب وضع ضوابط على البرنامج الخطي وعلى الحل للرجوع إليها إدا اقتضت الضرورة مع تطوير أدوات ومؤشرات تنبئنا بالحاجة إلى تعديل هذا الحل للأخذ بعين الإعتبار التغيرات الجديدة.

6.5. تنفيذ الحل: الذي يتضمن المصادقة على النتائج وترجمتها إلى تعليمات تشغيلية يتم توضيحها للأفراد المسؤولين على التنفيذ، فهذه هي المرحلة الأخيرة والأكثر أهمية في بحوث العمليات، فعندما يتم الحصول على الحل الأمثل والمجدي من الناحية العملية يتم وضعه موضع التنفيذ وبعد تنفيذ الحل تتم مراقبة استجابة الحل إلى التغيرات التي حدثت.

وأخيرا لا يوجد نظام كامل وثابت تماماً، بل يجب دائماً مراقبة البيئة التي يعمل بها هذا النظام لضمان بأن الظروف المتغيرة لا تؤثر على الحل الأمثل، إذ تتم مراجعة هذا الحل بصفة دورية وتحسينه من طرف صانعي القرار.

بصفة عامة يمكن تطبيق بحوث العمليات على المشاكل التي تتعلق بكيفية تنفيذ وتنسيق العمليات والأنشطة داخل المؤسسة مهما كانت طبيعة المؤسسة، ففي الواقع يمكن تطبيق بحوث العمليات على نطاق واسع في شتى المجالات المتنوعة على بيسل المثال لا الحصر: التصنيع والنقل والبناء والاتصالات والتخطيط المالي والرعاية الصحية والجيش والخدمات العامة، فاتسع نطاق التطبيق بشكل واسع جداً.[1]

[1] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, Op-Cit, P: 02.

ويعتبر الاعتماد على النماذج والعمليات الرياضية أمراً محورياً لممارسة علم بحوث العمليات، فيتم تبسيط الواقع الحقيقي بكل تفاصيلة ومحاولة تلخيصة ضمن نماذج تحتفظ بالخصائص الأساسية للظواهر المدروسة، هذف هذه الأخيرة هو الوصول إلى الأهداف المعرفة من طرف صاحب القرار من خلال خبرته وحدسه وحكمته.

الفصل الثاني: البرمجة الخطية

Linear Programming

تمهيد:

تعتبر البرمجة الخطية أسلوب من أساليب بحوث العمليات والتي تستخدم لمواجهة مشاكل محددة تحت ظروف وشروط معينة، فأول استخدام للبرمجة الخطية كان ضمن المجالات العسكرية وذلك للمساعدة في توزيع الموارد المتاحة بين العمليات المختلفة بالشكل الذي يؤذي إلى زيادة فعالية هذه العمليات، إلا أن استخداماتها تطورت وتوسعت لتشمل مجالات متعددة وأصبح بالإمكان استخدامها ضمن معظم المجالات سواء كانت اقتصادية أو اجتماعية أو عسكرية أو سياسية أو بيئية.

فاتسعت استخدامات البرمجة الخطية لتشمل معظم نواحي الحياة سواء كان بالقطاع الخاص أو العام، الربحي وغير الربحي، وأصبحت اليوم من أهم الأساليب الكمية وأكثرها شيوعاً واستخداماً في تحليل المواقف الإدارية للحصول على النتائج التي تساهم في توفير المعلومات والحقائق والتي تمكن الإدارة من اتخاذ قرارات علمية سليمة، وسوف نتطرق في هذا الفصل إلى البرمجة الخطية فرضياتها وشروط استخدماتها وصياغتها.

1. مفهوم البرمجة الخطية وشروط استخدامها.

تعتبر البرمجة الخطية واحدة من أقوى أدوات بحوث العمليات، حيث نقوم أولاً بتقديم عرض موجز لتعريف البرمجة الخطية متبوعاً بمناقشة الافتراضات الرئيسة ومميزات البرمجة الخطية، ويلي ذلك الخطوات الأساسية لصياغة نموذج البرمجة الخطية.

1.1. تعريف البرمجة الخطية: يمكن تعريف البرمجة الخطية بأنها عبارة عن طريقة أو أسلوب رياضي يستخدم للمساعدة في التخطيط واتخاذ القرارات المتعلقة بالتوزيع الأمثل للموارد المتاحة وذلك بهدف تعظيم الربح أو تذنية التكاليف.

وعرفت البرمجة الخطية بأنها: "الأسلوب الرياضي الذي يبحث عن أفضل الطرق لاستخدام الموارد المتاحة عن طريق تحويل المشكلة المدروسة إلى علاقات رياضية خطية والتي تهدف إلى دراسة البدائل والامكانيات المتاحة وتحليلها، ثم البحث عن أفضل تلك البدائل والامكانيات التي تحقق الأهداف".[1]

وبالتالي فهي أسلوب رياضي يبحث عن أفضل الطرق لاستخدام الموارد المتاحة عن طريق تحويل المشكلة قيد الدراسة إلى علاقات رياضية خطية، يساعد على اتخاذ القرار الأمثل في استخدام الموارد المتاحة، وذلك لهدف **تعظيم** شيئ معين وغالبا يكون الربح أو **تذنية** شيئ معين وغالبا ما يكون التكلفة.

إذا تستخدم البرمجة الخطية نموذجًا رياضيًا لوصف المشكلة قيد الدراسة، وتجدر الإشارة هنا إلى أن مصطلح البرمجة (Programming) ليس له علاقة ببرمجة الحاسوب ولكنه مرادف للتخطيط ويعني وضع المشكلة في صيغة رياضية أو نموذج رياضي يمكن حله، وبناء على ذلك فإن البرمجة الخطية تتضمن تخطيط الأنشطة للحصول على نتائج مثلى،[2] كما يشير مصطلح البرمجة إلى إجراء منهجي يتم من خلاله تصميم برنامج أو خطة عمل معينة، وتتكون البرمجة من سلسلة من التعليمات والقواعد الحسابية لحل مشكلة ما،[3] أما كلمة خطية (Linear) فتعني أن دالة الهدف وجميع القيود دوال خطية في المتغيرات الداخلة فيها، وتسمى هذه المتغيرات بمتغيرات القرار، أي نتيجة تصل إلى الهدف المحدد بشكل أفضل (وفقًا للنموذج الرياضي) من بين جميع البدائل الممكنة.[4]

ومما سبق نستخلص أن البرمجة الخطية هي:

- تقنية وطريقة رياضية.
- مشكلات البرمجة الخطية تهدف إما إلى تدنية أو تعظيم بعض الكميات، والتي عادة ما تكون في صورة تكاليف أو أرباح.
- تستخدم في حل مشاكل الإدارة التي تتمثل في توزيع الموارد المحدودة على عدد من الاستخدامات المتباينة.
- تحقق أحسن توزيع للموارد ويكون بإعطاء الإدارة بالمعلومات التي تمكنها من اتخاذ قرارات أكثر فعالية فيما يتعلق بالموارد التي تحت تصرفها.

يعتبر عالم الرياضيات الروسي ليونيد كانتوروفيتش (Leonid Kantorovich) الحائز على جائزة نوبل، مؤسس نظرية البرمجة الخطية، لكن خوارزمية السيمبلكس طورها عالم الرياضيات الأمريكي دانتزينغ

---

[1] - **صبحي المحمد وآخرون**، "بحوث العمليات"، د ط، منشورات جامعة حلب، سوريا، 2008، ص: 25/24.

[2] - **محمد الطراونة، سليمان عبيدات**، مرجع سابق، ص: 76.

[3] - **P. Rama MURTHY**, Op-Cit, P: 24.

[4] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, Op-Cit, P: 25.

(Goerge B. DANTZIG)، هذه التقنية التي جعلت من البرمجة الخطية الطريقة الأكثر استعمالاً من الناحية العملية، فنجاح هذه الخوارزمية وتطورها أدى إلى تحسين مجالات أخرى.[1]

1.3. شروط استخدام البرمجة الخطية: تعالج مسائل البرمجة الخطية عادة مشكلة تعظيم أو تذنية دالة معينة تسمى دالة الهدف ضمن مجال محدد، يتحدد هذا المجال بواسطة مجموعة من القيود مفروضة على متغيرات الدالة وغالباً ما تكون هذه القيود أو الشروط على شكل متباينات (متراجحات) أو معادلات، ولكي يمكن استخدام البرمجة الخطية فإن هناك شروط يجب توفرها في المشكلة المراد علاجها والتي يمكن إيجازها فيما يلي:[2]

- وجود هدف واضح ومحدد بحيث يمكن تمثيله بمعادلة رياضية وغالبا ما تكون هذه الأهداف متعلقة بزيادة الأرباح أو تخفيض التكاليف.
- وجود محددات أو قيود لا نستطيع تجاوزها.
- توفر عدد من البدائل للاختيار من بينها.
- التعبير عن دالة الهدف والقيود في مشاكل البرمجة الخطية بمعادلات أو متباينات خطية، أي أن تكون هذه المعادلات والمتباينات من الدرجة الأولى.
- بالاضافة إلى توافر شرط الإيجابية أو عدم السلبية.

2. فرضيات استخدام البرمجة الخطية.

يقصد بالفرضيات هنا الشروط العلمية الأساسية الواجب توفرها في المشكلة حتى يمكن حلها بواسطة أسلوب البرمجة الخطية.

وهناك خمس فرضيات أولية يمكن تلخيصها فيما يلي:

2.1. فرضية التأكد: تعني هذه الفرضية أن الأرقام الموجودة في دالة الهدف (مساهمات العوامل) والمحددات أو القيود (احتياجات العوامل والمصادر المتوفرة) معروفة وثابتة وغير قابلة للتغير أثناء فترة معالجة المشكلة موضوع البحث، يتعلق هدا الافتراض بمعلمات النموذج، التي يجب أن تكون معلومة وثابتة القيمة عند صياغة النموذج والمتمثلة في (C_i)، (a_{ij})، (b_i).[3]

---

[1] - **Hamdy A. TAHA**, Op-Cit, P: 105.

[2] - **محمد الطراونة، سليمان عبيدات**، مرجع سابق، ص: 78.

[3] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, Op-Cit, P: 43.

2.2. التناسبية: تعني هذه الفرضية أن كل نشاط قد يعتبر مستقلاً عن الآخر، ذلك أن معيار الإنجاز هو حاصل جميع مساهمات العوامل المختلفة، كذلك فإن الكميات التي يتم استخدامها من الموارد المختلفة تتناسب مع احتياجات العوامل المختلفة من كل هذه الموارد. فعلى سبيل المثال إذا كنا نحتاج إلى وحدتين من المواد الأولية لإنتاج وحدة واحدة تامة الصنع من منتج معين، فإننا نحتاج إلى أربعين وحدة من الموارد الأولية لإنتاج عشرين وحدة من هذا المنتج، وهذه الفرضية هي أساس فرضية الإضافة.

2.3. الإضافية: يعني هذا الإفتراض أنه لا يوجد تداخل بين الفعاليات أو الأنشطة المختلفة، وبناء على ذلك فإن هذا الإفتراض يتضمن ما معناه أنه لو أخذنا مستويات أو جوانب النشاط، فإن الاستعمال الكلي ولكل مصدر وكذلك معيار الإنجاز الكلي الناتج عن هذه الأنشطة يساوي مجموع الكميات المتولدة أو الناجمة عن كل هذه الأنشطة الفردية وبشكل مستقل. أي كل كل دالة في نموذج البرمجة الخطية (دالة الهدف أو القيود) هي مجموع المساهمات الفردية للأنشطة المعنية.[1]

2.4 قابلية القسمة أو الكسرية: المقصود هنا أن الحل لمشكلة البرمجة الخطية ليس بالضرورة أن يكون بقيم صحيحة، وهذا يعني قبول كسور كقيم لعوامل القرار. يتعلق هذا الافتراض بالقيم المسموح بها لمتغيرات القرار، يُسمح لمتغيرات القرار في نموذج البرمجة الخطية أن يكون لها أي قيم، بما في ذلك القيم غير الصحيحة، ويمكن تشغيل الأنشطة على مستويات كسرية.[2]

2.5. اللاسلبية: وهذا يعني أن قيم عوامل متغيرات القرار يجب أن تكون موجبة (غير سالبة)، فالقيم السالبة للكميات المادية حالة مستحيلة، فعلى سبيل المثال لا يمكن إنتاج عدد سالب من الكراسي أو السيارات.

3. العناصر الأساسية للبرمجة الخطية.

تقوم البرمجة الخطية بدراسة الحالات التي يتم فيها التعبير عن تحسين الهدف تحت ظل مجموعة من القيود بشكل خطي[3] لمتغيرات القرار، ونعني بحل مشكلة البرمجة الخطية الوصول إلى تحديد القيم الفعلية لمتغيرات القرار التي تحقق جميع القيود وتعطي أفضل قيمة لدالة الهدف.[4]

وتتكون جميع نماذج بحوث العمليات بما فيها نماذج البرمجة الخطية من ثلاث مكونات رئيسة:[5]

---

[1] - **Ibid**, P: 41.
[2] - **Ibid**, P: 43.
[3] - **Gerd FINKE**, "Operations research and networks", First Edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, USA, 2008, P: 01.
[4] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 23.
[5] - **Hamdy A. TAHA**, Op-Cit, P: 46.

- متغيرات القرار التي نسعى إلى تحديدها.
- الهدف (دالة الهدف) الذي نحتاج إلى تحسينه (تعظيم أو تدنية).
- القيود التي يجب أن يلبيها الحل.

3.1. المتغيرات: وتسمى متغيرات القرار، وبتحديد قيمها نصل إلى الهدف المنشود، والتي نرمز لها بـ:[1]

$X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, X_n$

n: عدد المتغيرات في المسألة المدروسة.

حيث يعتبر التعريف الصحيح لمتغيرات القرار الخطوة الأولى الأساسية في تطوير النموذج، وبمجرد تحديد المتغيرات يصبح بناء دالة الهدف والقيود أكثر وضوحاً.[2]

3.2. دالة الهدف: هي دالة رياضية تمثل الهدف الذي نريد الوصول إليه وتحقيقه ويكون الشكل العام لدلة الهدف كالآتي:[3]

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_nX_n = \sum_{j=1}^{n} C_jX_j$$

حيث:

C_j: أعداد حقيقية تدعى بمعاملات مساهمة المتغيرات في دالة الهدف، وقد تمثل أرباح أو تكاليف المتغيرات وقد تمثل أشياء أخرى.

يجب الوضع بعين الاعتبار أن دالة الهدف للبرمجة الخطية إما تعظيم أو تذنية، حيث غالباً ما يعبر الهدف عن رغبات صانع القرار من الناحية النقدية،[4] فيوجد نوعان لدالة الهدف:

- حالة التعظيم لدالة الهدف، كأن نسعى إلى تحقيق أكبر ربح ممكن أو توفير أعظمي للوقت والجهد أو زيادة الدخل القومي إلى أقصى حد ممكن، أي تكتب دالة الهدف في حالة التعظيم على الشكل:

$$\text{Max } Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_nX_n = \text{Max } \sum_{j=1}^{n} C_jX_j$$

- حالة تدنية دالة الهدف، كأن نسعى إلى تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن، أو تقليل الخسائر قدر الإمكان وتكتب دالة الهدف في حالة التدنية على الشكل:

$$\text{Min } Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_nX_n = \text{Min } \sum_{j=1}^{n} C_jX_j$$

3.3. القيود: وهي عبارة عن وجود علاقة تأثير بين المتغيرات، والتي غالباً ما تمثل الموارد المحدودة،[5] ويعبر عنها رياضيا بمتباينات تدعى الشروط الخطية وتأخذ ثلاثة أشكال:[6]

---

[1] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 23.
[2] - **Hamdy A. TAHA**, Op-Cit, P: 46.
[3] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 23.
[4] - **H.A. EISELT, C.-L. SANDBLOM**, Op-Cit, P: 15.
[5] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 23.
[6] - **Gerd FINKE**, Op-Cit, P: 05.

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \leq b_i$; i = 1, ……. , m
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \geq b_i$; i = 1, ……. , m
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j = b_i$; i = 1, ……. , m

حيث أنه في كل الأشكال:

- **n:** عدد المتغيرات في النموذج الخطي.
- **m:** عدد قيود المسألة (عدد الشروط الخطية).
- **a_{ij}:** أعداد حقيقية (معاملات).
- **b_i:** أعداد حقيقية تعبر عن الموارد المتاحة أو المتطلبات اللازمة لكل قيد من قيود المشكلة ويجب أن تكون موجبة.

3.4. شرط (قيود) عدم السلبية: يشترط على المتغيرات أن تكون غير سالبة أي:

$X_j \geq 0$; j = 1, ……. , n

وهذا ما يجب فرضه على جميع النماذج لأنها جميعها تعبر عن كميات إنتاج، والكميات لا يمكن أن تكون سالبة.

<u>ملاحظة:</u> يجب أن تكون دالة الهدف والقيود خطية، بالإضافة إلى أن جميع المعلمات (C_i)، (a_{ij})، (b_i) يجب أن تكون معلومة.

على الرغم من أن الغرض الأساسي من حل مشاكل البرمجة الخطية الوصول إلى قيم لمتغيرات القرار، إلا أن الخطوة الحاسمة الأولى في البرمجة الخطية، التي تكمن في الصياغة الصحيحة للمشكلة المدروسة في إطار البرمجة الخطية.[1]

4. خطوات صياغة البرمجة الخطية.

تعتبر صياغة البرامج الخطية لحل مشكل الأمثلية من أكثر تطبيقات نماذج بحوث العمليات والتي لاقت نجاحاً في مجال التطبيق العملي، هذا ما يدعم كيانها الهام في المجال الاقتصادي، حيث أن الصياغة السليمة تؤذي إلى نتائج جيدة والعكس صحيح، ولهذا فإنه يجب فهم المشكلة محل الدراسة فهماً دقيقاً وهي

[1] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 24.

الخطوة الأولى والأساسية للوصول إلى الحل، وفيما يلى ذكر لأهم الخطوات اللازمة لصياغة برنامج خطي لمشكل ما:[1]

- الفهم الجيد والدقيق للمشكلة محل الدراسة، فتحديد المكشلة يتطلب مزيج من البصيرة العملية والمهارة التقنية من أجل التعرف على المشاكل التي يمكن نمذجتها بشكل مناسب ضمن نسق البرمجة الخطية.[2]
- تحديد متغيرات القرار بشكل دقيق وصحيح، حيث يجب أن تتميز متغيرات القرار بخاصيتين، تكون مجهولة القيمة ولا تعرف قيمتها إلا بعد حل النموذج، وتكون مستقلة أي لا تحدد قيمتها داخل النموذج من خلال متغيرات أخرى مجهولة القيمة.
- تحديد الهدف، هل حالة التعظيم أم حالة التدنية وكتابة دالة الهدف، ويمكن معرفة حالة دالة الهدف (Max/Min) من خلال الهدف الذي يريده المسؤول، ويجب أن يكون الهدف ممكن التعبير عنه كمياً.
- تحديد قيود البرنامج وهنا يمكن الإشارة إلى أن وحدة قياس طرفي القيد تكون نفسها، حيث هذا الأمر يساعد في صياغة القيود.
- قيد عدم السالبية وهو الذي ينص على أن جميع المتغيرات تكون قيمتها أكبر من أو تساوي الصفر.

فلتشكيل البرنامج الخطي ينبغي أولاً تحديد المتغيرات، ثم تشكيل جدول المسألة بعد ذلك، بحيث يحتوى هذا الجدول على جميع عناصر المسألة من متغيرات وقيود وكذا الكميات المحددة لدالة الهدف، ويمكن للمثال الآتي أن يعطي نظرة واضحة حول كيفية تشكيل البرنامج الخطي لمسألة ما.

مثال رقم (2-1): تنتج مؤسسة ويندور ڤلاص (WYNDOR GLASS CO) منتجات الزجاج عالية الجودة، بما فيها النوافذ والأبواب الزجاجية، لديها ثلاثة مصانع، تنتج في المصنع الأول إطارات مصنوعة من الألمنيوم وفي المصنع الثاني إطارات خشبية، وفي المصنع الثالث يتم إنتاج الزجاج وتجميع المنتجات؛ وبسبب انخفاض الأرباح، قررت الإدارة العليا تجديد خط الإنتاج، وينتج عن ذلك توقيف المنتجات غير المربحة، وتحديد الطاقة الإنتاجية لإطلاق نوعين من المنتجات الجديدة والمتوقع أن تتمتع بنسبة مبيعات عالية:

- المنتج 1: باب زجاجي مع إطار من الألومنيوم.
- المنتج 2: نافدة مزدوجة مع إطار من الخشب.

[1] - **صالح مهدي محسن العامري، عواطف إبراهيم الحداد**، "تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة"، الطبعة الأولى، دار إثراء، الأردن، 2009، ص: 102.

[2] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 24.

يمر المنتج 1 على المصنعين الأول والثالث ولا يمر على المصنع الثاني، بينما يمر المنتج 2 على المصنعين الثاني والثالث ولا يمر على المصنع الأول؛ وخلص قسم التسويق أنه يمكن للمؤسسة أن تبيع ما تنتجه في المصنع الأول والثاني من هذه المنتجات مباشرة، كما يمكنها أن تتم عملية الإنتاج في المصنع الثالث وتبيع المنتج النهائي؛ وفي الحالة الأخيرة فإن كل المنتجات سوف تتنافس على نفس الطاقة الإنتاجية في المصنع الثالث، فإنه ليس من الواضح أي من المنتجات سيحقق الأكثر ربحية ولذلك فقد تم تشكيل فريق بحوث العمليات لدراسة هذه المسألة.

بدأ فريق بحوث العمليات من خلال وجود مناقشات مع الإدارة العليا لتحديد أهداف الإدارة للدراسة، وأدت هذه المناقشات إلى وضع التعريف التالي للمشكلة:

تحديد معدل الإنتاج لنوعين من المنتجات (المنتج 1 والمنتج 2) من أجل تعظيم الربح الكلي، يخضع لقيود تفرضها الطاقات الإنتاجية المتاحة في المصانع الثلاثة. (سيتم إنتاج كل منتج على دفعات من 20 وحدة، حتى يتم تعريف معدل الإنتاج من خلال عدد الدفعات المنتجة في الأسبوع)، أي مزيج من معدلات الإنتاج التي تلبي هذه القيود غير المسموح بتجاوزها، بما في ذلك إنتاج أي منتج واحد دون إنتاج المنتج الآخر.

كما حدد الفريق البيانات التي يتعين جمعها:

- عدد الساعات من وقت الإنتاج المتوفرة في الأسبوع في كل مصنع لهذه المنتجات الجديدة. (معظم الوقت في هذه المصانع مكرس لإنتاج المنتجات الحالية، وبالتالي فإن القدرات المتاحة للمنتجات الجديدة محدودة للغاية).
- عدد الساعات من وقت الإنتاج المستخدمة في كل مصنع لإنتاج كل دفعة من كل منتج جديد.
- الربح لكل دفعة إنتاج ولكل منتج جديد.

وللحصول على تقديرات معقولة لهذه الكميات المطلوبة طلب الفريق المساعدة من الموظفين الرئيسيين في مختلف وحدات المؤسسة، كتوفير الموظفين في قسم التصنيع البيانات في الفئة الأولى أعلاه، أما الفئة الثانية من البيانات فكانت عبارة عن تحليلات وتقديرات مقدمة من طرف المهندسين والتي تدخل في تصميم عمليات الإنتاج للمنتجات الجديدة، ومن خلال تحليل بيانات التكلفة من نفس هؤلاء المهندسين وقسم التسويق، وجنبا إلى جنب مع قرار التسعير من قسم التسويق وقسم المحاسبة وضعت تقديرات الفئة الثالثة من البيانات، ويلخص الجدول الموالي البيانات التي تم جمعها.

المصانع	وقت الإنتاج لكل دفعة (ساعة)		وقت الإنتاج المتاح في الأسبوع لكل مصنع (ساعة)
	المنتجات		
	المنتج 1	المنتج 2	
المصنع الأول	1	0	4
المصنع الثاني	0	2	12
المصنع الثالث	3	2	18
الربح لكل دفعة (ون)	3000	5000	

أدرك الفريق على الفور أن هذا يمثل مشكلة البرمجة الخطية الكلاسيكية من نوع مزيج المنتجات، وقام الفريق بصياغة نموذج رياضي مقابل لهذه المشكلة (المسألة).

صياغة البرنامج الخطي: تعريف المشكلة المذكورة أعلاه يشير إلى أن القرارات الواجب اتخاذها هي عدد الدفعات الواجب إنتاجها من المنتج 1 والمنتج 2 في الأسبوع وذلك لتحقيق أقصى قدر من الربح الكلي؛ والصياغة الرياضية للبرنامج الخطي الذي يعبر من هذه المشكلة يكون كالتالي:

- **متغيرات القرار:**

X_1: عدد الدفعات المنتجة من المنتج 1 في الأسبوع.

X_2: عدد الدفعات المنتجة من المنتج 2 في الأسبوع.

- **دالة الهدف:**

Z: إجمالي الربح في الأسبوع الواحد والناتج عن المنتجين.

وبالتالي فإن X_1 وX_2 هي متغيرات القرار وباستخدام معطيات الجدول يمكن كتابة دالة الهدف (Z) كالآتي:

$$\mathbf{Z = 3000X_1 + 5000X_2}$$

والهدف من ذلك هو تحديد قيم (X_1) و(X_2) وذلك لتحقيق أكبر قدر ممكن لدلة الهدف (Z) أي دالة الهدف تكتب على الشكل:

$$\mathbf{Max\ Z = 3000X_1 + 5000X_2}$$

- **القيود:** نلاحظ من الجدول أن الوقت المستغرق لإنتاج دفعة واحدة من المنتج 1 في المصنع الأول هو ساعة (01) واحدة، بينما الطاقة الإنتاجية المتاحة للمصنع الأول هي أربع (04) ساعات في الأسبوع، وبصياغة رياضية:

$$\mathbf{X_1 \leq 4}$$

ونلاحظ كذلك من الجدول أن الوقت المستغرق لإنتاج دفعة واحدة من المنتج 2 في المصنع الثاني هو ساعتين (02)، بينما الطاقة الإنتاجية المتاحة للمصنع الثاني هي اثني عشر (12) ساعة في الأسبوع، وبصياغة رياضية:

$$\mathbf{2X_2 \leq 12}$$

ونلاحظ كذلك من الجدول أن الوقت المستغرق لإنتاج دفعة واحدة من المنتج 1 ودفعة واحدة من المنتج 2 في المصنع الثالث هي ثلاث (03) ساعات وساعتين (02) على التوالي، بينما الطاقة الإنتاجية المتاحة للمصنع الثالث هي ثمانية عشر (18) ساعة في الأسبوع، وبصياغة رياضية:

$$\mathbf{3X_1 + 2X_2 \leq 18}$$

- **قيد عدم السالبية:** وأخيرا فإن دفعات الإنتاج لا يمكن أن تكون سالبة وهو ما يحدده قيد عدم السالبية:

$$\mathbf{X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0}$$

ويمكن تلخيص البرنامج الخطي كالآتي:

$$\text{Max } Z = 3000X_1 + 5000X_2$$

$$\text{s/c} \begin{cases} X_1 \leq 4 \\ 2X_2 \leq 12 \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 18 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن البرنامج الخطي هو عبارة عن تكرار للمعلومات الموجودة في الجدول السابق، لكن في صياغة رياضية.

هذه المشكلة هي مثال كلاسيكي لمشكلة تخصيص الموارد، وهي النوع الأكثر شيوعًا لمشكلة البرمجة الخطية؛ والسمة الرئيسية لمشاكل تخصيص الموارد هي أن معظم أو كل قيودها الوظيفية هي قيود الموارد؛ إذ يمثل الجانب الأيمن من قيود الموارد المقدار المتاح من الموارد ويمثل الجانب الأيسر الكمية المستخدمة من تلك الموارد.

مثال رقم (2-2): تقوم مؤسسة بريمو (PRIMO) للتأمين بطرح نوعين جديدين من التأمين، تأمين ضد المخاطر الخاصة وتأمين الرهون العقارية، والربح المتوقع هو 50 ون لكل بوليصة تأمين ضد المخاطر الخاصة و20 ون لكل بوليصة تأمين الرهون العقارية، وترغب الإدارة في تحديد حصص المبيعات للنوعين الجديدين لتحقيق أقصى قدر إجمالي من الربح المتوقع، وذلك حسب معطيات ساعات العمل المبينة في الجدول الموالي:

الأقسام	ساعات العمل لكل بوليصة		ساعات العمل المتاحة
	المخاطر الخاصة	الرهون العقارية	
الإكتتاب	03	02	2400
الإدارة	00	01	800
الشكاوى	02	00	1200

المطلوب: أكتب الصياغة الرياضية لهذا المشكل.

- **المتغيرات (متغيرات القرار):**

X_1: عدد بوليصات التأمين على المخاطر الخاصة المباعة.

X_2: عدد بوليصات التأمين على الرهون العقارية المباعة.

- **دالة الهدف:** تحقيق أكبر ربح ممكن، إذن نحن في حالة تعظيم (Max).

$$\text{Max } Z = 50X_1 + 20X_2$$

- **القيود:**

$$3X_1 + 2X_2 \leq 2400$$
$$X_2 \leq 800$$
$$2X_1 \leq 1200$$

- **قيد عدم السالبية:**

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

ويمكن تلخيص البرنامج الخطي كالآتي:

$$\text{Max } Z = 50X_1 + 20X_2$$
$$\text{S/c} \begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \leq 2400 \\ X_2 \leq 800 \\ 2X_1 \leq 1200 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

مثال رقم (2-3): يحب السيد رالف إدمود (Ralph EDMUND) تناول شرائح اللحم مع البطاطا، لذلك قرر أن يتبع حمية غذائية تحتوي على هذين النوعين من الطعام بالإضافة إلى بعض المقبلات والسوائل في كل وجبة من طعامه. يدرك السيد رالف بأن هذه الحمية الغذائية ليست بالأحسن لصحته، لذلك يريد التأكد من أنه يأكل الكميات الصحيحة من النوعين لتلبية حاجاته الجسمية من المواد المتواجدة في هذين النوعين.

ويبين الجدول الموالي كميات بعض المواد المتواجدة في كلا النوعين من الطعام (شرائح اللحم والبطاطا) وكذا تكلفة الوجبة الواحدة من كلا النوعين.

المكونات	عدد الغرامات المتواجدة في كل نوع		المتطلبات اليومية من المكونات (غرام)
	شرائح اللحم	البطاطا	
كربوهيدرات	05	15	أكثر من 50 غرام
بروتينات	20	05	أكثر من 40 غرام
دهون	15	02	أكثر من 60 غرام
تكلفة الوجبة الواحدة (ون)	400	200	

يرغب السيد رالف في تحديد عدد الوجبات التي سوف يقوم باستهلاكها خلال اليوم والتي تلبي متطلبات جسمه وبأقل تكلفة ممكنة.

المطلوب: صياغة البرنامج الخطي.

- **الهدف:** تخفيض تكلفة الوجبات، إذن نحن في حالة تدنية (Min).
- **المتغيرات (متغيرات القرار):**

X_1: عدد الوجبات من شرائح اللحم المستهلكة خلال اليوم.

X_2: عدد الوجبات من البطاطا المستهلكة خلال اليوم.

- **دالة الهدف والقيود:**

$$\text{Min } Z = 400X_1 + 200X_2$$

$$\text{S/c} \begin{cases} 5X_1 + 15X_2 \geq 50 \\ 20X_1 + 5X_2 \geq 40 \\ 15X_1 + 2X_2 \geq 60 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

على الرغم من أن تخصيص الموارد للأنشطة هو أكثر أنواع تطبيقات البرمجة الخطية شيوعًا، إلا أن البرمجة الخطية لها العديد من التطبيقات المهمة الأخرى أيضًا؛ وفي الواقع أي مشكلة يتناسب نموذجها الرياضي مع النموذج العام لنموذج البرمجة الخطية هي مشكلة البرمجة الخطية.[1]

إذن تشكيل أو بناء البرنامج الخطي هي أهم خطوة في البحث عن الحل الأمثل، ويقصد به تحويل المسألة من واقع كلامي مسرود في تعابير أدبية إلى شكل مسألة مصاغة في قالب رياضي واضح، متكون من عدد من المتغيرات، به دالة هدف، وعدد من القيود تكون إما شكل معادلات أو متراجحات أو هما معاً.

وتم تصنيف تطوير البرمجة الخطية من بين أهم التطورات العلمية في منتصف القرن العشرين، وانتشر استخدامها بسرعة في العديد من القطاعات،[2] فتهدف البرمجة الخطية إلى الإجابة بأسلوب رياضي

[1] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, " Op-Cit, P: 25.
[2] - **Ibid**, P: 25.

على بعض الأسئلة وحل المشاكل بما يحقق أكبر ربح ممكن أو أقل تكلفة ممكنة في ظل القيود والمحددات القائمة.

تعتمد البرمجة الخطية على صياغة المشكلة في شكل نمطي يساعد في تسهيل العمليات الحسابية المختلفة، وتؤكد على عدم إغفال أي عنصر هام في المشكلة، وتنظر إلى أي مشكلة على أنها تمثل نظام متكامل مكون من جزئيات تربط بينها علاقات تبادلية، وتسعى لتحقيق هدف معين، وتصف هذه العلاقات التبادلية باستخدام المتباينات أو المعادلات للوصول للحل الأمثل مع الأخذ في الاعتبار القيود المفروضة.

الفصل الثالث: أشكال نماذج البرامج الخطية

Forms of Linear Program Models

تمهيد:

توضح الأمثلة السابقة نسخ مصغرة عن مشاكل البرمجة الخطية، وفي هذا الفصل سوف نستعرض نموذج البرمجة الخطية العام والذي يكون له عدة استخدامات والتي لا يمكن إجمالها في مثال بسيط، كما سوف نتطرق إلى الأشكال المختلفة لنماذج البرمجة الخطية.

1. الشكل النموذجي للبرنامج الخطي.

نعتبر مؤسسة يمكنها إنتاج (n) من المنتجات وتستعمل لذلك (m) من الموارد، إن عدد الوحدات المتاحة من الموارد (i) هي (b_i) حيث: ($i = 1……m$)، إن الربح لكل وحدة من المنتج (j) هي (C_j) حيث: ($j = 1……n$)، كما أن كل وحدة من المنتج (j) تحتاج إلى (a_{ij}) وحدة من الموارد (i)، إن هدف المؤسسة هو تحديد الكمية الواجب إنتاجها من كل منتج قصد تحقيق أكبر ربح، نعتبر (X_j) الكمية المنتجة من المنتج (j) لكل (j)، كما في الجدول الآتي:

الموارد	**المنتجات** **1 2 3 ……j…… n**	b_i
1	$a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}$	b_1
2	$a_{21} + a_{22} + a_{23} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}$	b_2
3	$a_{31} + a_{32} + a_{33} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{3n}$	b_3
.	……	.
.	……	.
m	$a_{m1} + a_{m2} + a_{m3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}$	b_m
الربح للوحدة من المنتج	$C_1 \quad C_2 \quad C_3 \ldots\ldots\ldots\ldots C_j \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots C_n$	

ويمكن كتابة الشكل النموذجي للبرنامج الخطي في حالة التعظيم (Max) على الشكل الآتي:[1]

$$\text{Max } Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_nX_n$$

$$\text{s/c} \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}X_n \leq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}X_n \leq b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{3n}X_n \leq b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}X_n \leq b_m \\ X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, X_n \geq 0 \end{cases}$$

بعض المشاكل لا تتناسب بشكل طبيعي مع النموذج السابق للبرمجة الخطية، لذلك نجد أشكال أخرى لدالة الهدف والقيود يمكن إيجازها في الآتي:[2]

- دالة الهدف في حالة التقليل بدلاً من حالة التعظيم:

$$\mathbf{Min\ Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \ldots\ldots\ldots + C_nX_n}$$

- بعض القيود الوظيفية لا تكون من الشكل أقل من أو يساوي، بل من الشكل أكبر من أو يساوي:

$$\mathbf{a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{in}X_n \geq b_i}$$

- بعض القيود الوطيفية ليست متراجحات بل تأخذ شكل معادلات:

$$\mathbf{a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{in}X_n = b_i}$$

- حذف قيد عدم السالبية على بعض متغيرات القرار:

$\mathbf{X_i}$: غير محدد الإشار (غ م إ)، أي يمكن أن يكون موجب الإشارة أو سالب الإشارة أو معدوم.

ففي حالة التقليل لما تكون جميع القيود من الشكل أكبر من أو يساوي مع قيد عدم السالبية للمتغيرات نكون أمام الشكل النموذجي في حالة التقليل (Min) والذي يمكن كتابة بالشكل الآتي:

$$\text{Min } Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_nX_n$$

$$\text{s/c} \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}X_n \geq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}X_n \geq b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{3n}X_n \geq b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}X_n \geq b_m \\ X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, X_n \geq 0 \end{cases}$$

[1] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, Op-Cit, P: 34.
[2] - **Ibid**, P: 34.

2. الشكل العام للبرنامج الخطي.

يمكن أن نجد مشكلة تمزج بعض أو كل هذه الأشكال السابقة وتبقى مشكلة للبرمجة الخطية، وبالتالي لم نعد نتحدث عن تخصيص الموارد المحدودة فقط ضمن البرمجة الخطية، وكل ما هو مطلوب أن يتناسب النموذج الرياضي للبرمجة الخطية مع المشكلة محل الدراسة، وبالتالي فالشكل العام لأي برنامج خطي يكون كالآتي:[1]

$$\text{Max/Min } Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \ldots\ldots\ldots + C_nX_n$$

$$\text{s/c} \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}X_n \ (\leq, \geq, =)\ b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}X_n \ (\leq, \geq, =)\ b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{3n}X_n \ (\leq, \geq, =)\ b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}X_n \ (\leq, \geq, =)\ b_m \\ X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, X_n \geq 0 \end{cases}$$

كما يمكن كتابته على الشكل المصفوفي كالآتي:

دالة الهدف على الشكل المصفوفي:

$$\text{Max/Min } Z = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \ldots & C_n \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ . \\ . \\ . \\ X_n \end{vmatrix} \Rightarrow \mathbf{Max/Min\ Z = C^TX}$$

القيود على الشكل المصفوفي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ . \\ . \\ . \\ X_n \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leq \\ \geq \\ = \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{vmatrix} \Rightarrow \mathbf{AX} \quad (\leq, \geq, =) \quad \mathbf{b}$$

[1] - **P. Rama Murthy**, Op-Cit, P: 24.

قيد عدم السالبية على الشكل المصفوفي:

$$\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ . \\ . \\ . \\ X_n \end{vmatrix} \geq \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \mathbf{X \geq 0}$$

وباختصار يكتب البرنامج كما يلي:[1]

$$\mathbf{Max/Min\ Z = C^T X}$$
$$s/c \begin{cases} \mathbf{AX\ (\leq, \geq, =)\ b} \\ \mathbf{X \geq 0} \end{cases}$$

حيث:

- C^T: هو منقول مصفوفة معاملات دالة الهدف.
- X: هو شعاع المتغيرات.
- A: هي مصفوفة معاملات القيود.
- b: شعاع الثوابث (الموارد المتاحة).

مثال (3-1): إليك البرنامج الخطي الآتي:

$$\text{Max } Z = 50X_1 + 40X_2$$
$$s/c \begin{cases} 2X_1 + 5X_2 \leq 20 \\ 8X_1 + 5X_2 \leq 40 \\ 5X_1 + 6X_2 \leq 50 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أكتب البرنامج الخطي على الشكل المصفوفي.

الشكل المصفوفي

$$\text{Max } Z = \begin{vmatrix} 50 & 40 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} 20 \\ 40 \\ 50 \end{vmatrix}$$

[1] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, Op-Cit, P: 174.

$$\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} \geq \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

مثال (3-2): إليك البرنامج الخطي الآتي:

$$\text{Min } Z = X_1 + 2X_2 - 3X_3$$
$$\text{s/c} \begin{cases} 2X_1 - X_2 + X_3 \geq 2 \\ 2X_1 + X_2 + 2X_3 \geq 2 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 \geq 1 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ X_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أكتب البرنامج الخطي على الشكل المصفوفي.

الشكل المصفوفي

$$\text{Min } Z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} \geq \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

إذن يمكن كتابة البرنامج الخطي المكتوب على الشكل النموذجي لحالة التعظيم إذا كتب على الشكل الآتي:

$$\text{Max } \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$
$$\text{s/c} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i & ;\ i = 1, \ldots\ldots\ldots, m \\ Xj \geq 0 & ;\ j = 1, \ldots\ldots\ldots, n \end{cases}$$

أو على الشكل المصفوفي:

$$\text{Max } Z = C^T X$$
$$\text{s/c} \begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

وأن البرنامج الخطي مكتوب على الشكل النموذجي لحالة التقليل إذا كتب على الشكل:

$$\text{Min} \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$
$$\text{s/c} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq b_i & ; \ i = 1, \ldots\ldots\ldots, m \\ Xj \geq 0 & ; j = 1, \ldots\ldots\ldots, n \end{cases}$$

أو على الشكل المصفوفي:

$$\text{Min } Z = C^T X$$
$$\text{s/c} \begin{cases} AX \geq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

3. الشكل القانوني للبرنامج الخطي.

في أي برنامج خطي هناك نوعين من القيود، من الشكل أكبر من أو يساوي وأقل من أو يساوي، حيث يمكن تحويل القيود من الشكل أكبر من أو يساوي إلى النوع أقل من أو يساوي بضرب طرفي القيد في (-1)، ونلاحظ كذلك أنه يمكن تحويل دالة الهدف من حالة التقليل إلى حالة التعظيم بالضرب كذلك في (-1)، فكل مشكل للتعظيم تعادل مشكل للتقليل (Max Z = Min (-Z))، وبالتالي يمكن كتابة كل برنامج خطي في شكل عام على الشكل القانوني؛[1] حيث يمكن تحويل الصيغة العامة إلى الصيغة القانونية باستخدام القواعد الآتية:

- تحويل دالة الهدف من (Min) إلى (Max) بالضرب في (-1):

$$\text{Max } Z = \text{Min } (-Z)$$

- تحويل القيد من الشكل: أكبر من أو يساوي إلى قيد من الشكل أقل من أو يساوي بضرب طرفي القيد في (-1):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq b_i \Rightarrow - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq - b_i$$

- تحويل قيد المساواة إلى قيدين واحد من الشكل أقل من أو يساوي والآخر من الشكل أكبر من أو يساوي:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq b_i \Rightarrow - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq - b_i \end{cases}$$

- تحويل المتغيرات السالبة إلى متغيرات موجبة بالضرب في (-1):

$$X_j \leq 0 \Rightarrow X'_j = - X_j \geq 0$$

- يمكن تحويل المتغيرات غير محددة الإشارة إلى متغيرات موجبة:

[1] - **Gerd FINKE**, Op-Cit, P: 05.

X_j: غير محدد الإشارة، ومنه نضع:

$$X_j = X'_j - X''_j$$

بحيث:

$$X'_j \geq 0, X''_j \geq 0$$

ومنه نستنتج أن الشكل القانوني يمتاز بالخصائص الآتية:

- جميع متغيرات القرار غير سالبة (قيد عدم السالبية).
- جميع القيود تكون من الشكل أقل من أو يساوي فقط.
- دالة الهدف تكون في حالة التعظيم فقط.

ملاحظة: الشكل القانوني للبرنامج الخطي في حالة التعظيم هو نفسه الشكل النموجي، وفي بعض المراجع كما هناك الشكل النموذجي للبرنامج الخطي في حالة التعظيم والشكل النموذجي للبرنامج الخطي في حالة التقليل، فهناك الشكل القانوني للبرنامج الخطي في حالة التعظيم والشكل القانوني للبرنامج الخطي في حالة التقليل، أي أن الشكل القانوني هو الشكل النموذجي في كلتا الحالتين.

4. الشكل القياسي (المعياري).

عند القيام بكتابة أي برنامج خطي على شكل قياسي (Standard Form) يجب مراعاة الخطوات الآتية:[1]

- إذا كان القيد في حالة المساواة فلا يتطلب أي تعديل.
- إذا كان القيد من الشكل أقل أو يساوي، فيتم إدخال متغيرات تسمى متغيرات الفجوة والتي تدعى في هذه الحالة بمتغيرات الركود (Slack Variables) والتي تأخذ الإشارة الموجبة، ونرمز لها بالرمز (S_i).
- إذا كان القيد من الشكل أكبر من أو يساوي، فيتم إدخال متغيرات الفجوة كذلك والتي تسمى في هذه الحالة بمتغيرات الفائض (Surplus Variables)، حيث تكون إشارتها في هذه الحالة سالبة، ونرمز لها بالرمز (S_i).
- وأخيرًا، يجب أن تكون جميع المتغيرات غير سالبة في النموذج القياسي، سواءً متغيرات القرار (X_j) أو متغيرات الفجوة (S_i).

[1] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 38.

إذن فالبرنامج الخطي مكتوب على الشكل المعياري إذا كتب كما يلي:

$$\text{Max} \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$
$$\text{s/c} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i & ; \ i = 1, \ldots\ldots\ldots, m \\ X_j \geq 0 & ; \ j = 1, \ldots\ldots\ldots, n \end{cases}$$

أو على الشكل المصفوفي:

$$\text{Max } Z = CX$$
$$\text{s/c} \begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

ويتميز الشكل المعياري بالحصائص الآتية:

- جميع القيود تكون معادلات (القيود من نوع مساواة (=))، ما عدا قيد عدم السالبية إذ يبقى متباينة (متراجحة) من نوع أكبر من أو يساوي $(X_j \geq 0)$.
- الطرف الأيمن للقيود يكون غير سالب أي $(b_i \geq 0)$.
- دالة الهدف تكون (Max) أو (Min).

ويمكن تحويل الصيغة العامة إلى الصيغة القياسية وذلك بتحويل القيود إلى معادلات مع إضافة متغيرات الركود (الفجوة) كما يلي:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq b_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j - S_i = b_i$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + S_i = b_i$$

حيث: (S_i) تمثل متغيرات الفجوة وتضاف باشارة موجبة في حالة القيد أصغر من أو يساوي وبإشارة سالبة في حالة القيد من الشكل أكبر من أو يساوي وتكون هذه المتغيرات غير سالبة $(S_i \geq 0)$، أي قيد عدم السالبية.

يرجع السبب في كتابة البرنامج الخطي على الشكل القياسي إلى أن طريقة الحل العام السيمبلكس التي سوف نتطرق إليها لاحقاً التي تستعمل لحل البرامج الخطية وإيجاد قيم متغيرات القرار تتعامل مع نظام المعادلات وليس المتراجحات.[1]

[1] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 38.

مثال (3-3): إليك البرنامج الخطي الآتي:

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 3X_2 + 5X_3$$
$$\text{s/c} \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 \geq -5 \\ -6X_1 + 7X_2 - 9X_3 = 15 \\ 19X_1 - 7X_2 + 5X_3 \leq 13 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \leq 0,\ X_3 \textbf{ Unrestricted (غير محدد الاشارة)} \end{cases}$$

المطلوب: أكتب الصيغة القانونية والصيغة القياسية لهذا البرنامج.

نلاحظ أن المتغير (X_2) أقل من أو يساوي الصفر وبالتالي نضربه في (-1)، فنتحصل على المتغير (X'_2) الذي يكون أكبر من أو يساوي الصفر؛ كما أن المتغير (X_3) غير محددة الإشارة وبالتالي نكتبه على شكل فرق للمتغيرين (X'_3) و(X''_3) بحيث تكون جميع المتغيرات الجديدة أكبر من أو تساوي الصفر كالآتي:

$$X_2 \leq 0 \Rightarrow X'_2 = -X_2 \Rightarrow X'_2 \geq 0$$
$$X_3 : \text{غ م إ} \Rightarrow X_3 = X'_3 - X''_3 \Rightarrow X'_3 \geq 0,\ X''_3 \geq 0$$

<u>الصيغة القانونية:</u>

- دالة الهدف في حالة التقليل، فيتم تحويلها إلى حالة التعظيم بالظرب في (-1)، كالآتي:

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 3X_2 + 5X_3 \Rightarrow \text{Max } Z = -2X_1 + 3X'_2 - 5(X'_3 - X''_3)$$

- القيد الأول من الشكل أكبر من أو يساوي، فيتم تحويله إلى قيد من الشكل أقل من أو يساوي بضرب طرفي القيد في (-1)، فيصبح القيد الأول كالآتي:

$$X_1 + X_2 - X_3 \geq -5 \Rightarrow -X_1 + X'_2 + (X'_3 - X''_3) \leq 5$$

- القيد الثاني على الشكل مساواة، فيتم تحويله إلى قيدين، قيد من الشكل أقل من أو يساوي وقيد آحر من الشكل أكبر من أو يساوي، ويتم تحويل هذا الأخير إلى قيد من الشكل أقل من أو يساوي بضرب طرفي القيد في (-1)، كالآتي:

$$-6X_1 + 7X_2 - 9X_3 = 15 \Rightarrow -6X_1 - 7X'_2 - 9(X'_3 - X''_3) \leq 15$$
$$-6X_1 - 7X'_2 - 9(X'_3 - X''_3) \geq 15 \Rightarrow 6X_1 + 7X'_2 + 9(X'_3 - X''_3) \leq -15$$

- القيد الثالث من الشكل أقل من أو يساوي، فيبقى كما هو:

$$19X_1 - 7X_2 + 5X_3 \leq 13 \Rightarrow 19X_1 + 7X'_2 + 5(X'_3 - X''_3) \leq 13$$

وبالتالي فالصيغة القانونية لهذا البرنامج الخطي هي:

$$\text{Max } Z = -2X_1 + 3X'_2 - 5(X'_3 - X''_3)$$
$$\text{s/c} \begin{cases} -X_1 + X'_2 + (X'_3 - X''_3) \leq 5 \\ -6X_1 - 7X'_2 - 9(X'_3 - X''_3) \leq 15 \\ 6X_1 + 7X'_2 + 9(X'_3 - X''_3) \leq -15 \\ 19X_1 + 7X'_2 + 5(X'_3 - X''_3) \leq 13 \\ X_1, X'_2, X'_3, X''_3 \geq 0 \end{cases}$$

الصيغة القياسية:

- دالة الهدف تبقى كما هي:

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 3X_2 + 5X_3 \Rightarrow \text{Min } Z = 2X_1 - 3X'_2 + 5(X'_3 - X''_3)$$

- القيد الأول من الشكل أكبر من أو يساوي، فيتم طرح متغير الفجوة (S_1) من الطرف الأول للقيد، لكن نلاحظ كذلك أن الطرف الثاني للقيد سالب، فيتم ضرب الطرفين في (-1)، فنتحل على:

$$X_1 + X_2 - X_3 \geq -5 \Rightarrow X_1 - X'_2 - (X'_3 - X''_3) - S_1 = -5 \Rightarrow -X_1 + X'_2 + (X'_3 - X''_3) + S_1 = 5$$

- القيد الثاني على شكل مساواة وبالتالي يبقى كما هو:

$$-6X_1 + 7X_2 - 9X_3 = 15 \Rightarrow -6X_1 - 7X'_2 - 9(X'_3 - X''_3) = 15$$

- القيد الثالث من الشكل أقل من أو يساوي، فيتم إضافة متغير الفجوة (S_3) إلى الطرف الأول للقيد، فيصبح القيد الثالث كالآتي:

$$19X_1 - 7X_2 + 5X_3 \leq 13 \Rightarrow 19X_1 + 7X'_2 + 5(X'_3 - X''_3) + S_3 = 13$$

ومنه فالصيغة القياسية لهذا البرنامج الخطي هي:

$$\text{Min } Z = 2X_1 - 3X'_2 + 5(X'_3 - X''_3)$$

$$\text{s/c} \begin{cases} -X_1 + X'_2 + (X'_3 - X''_3) + S_1 = 5 \\ -6X_1 - 7X'_2 - 9(X'_3 - X''_3) = 15 \\ 19X_1 + 7X'_2 + 5(X'_3 - X''_3) + S_3 = 13 \\ X_1, X'_2, X'_3, X''_3, S_1, S_3 \geq 0 \end{cases}$$

مثال (3-4): إليك البرنامج الخطي الآتي:

$$\text{Min } Z = X_1 - X_2 + 2X_3$$

$$\text{s/c} \begin{cases} X_1 - X_3 \geq 2 \\ 2X_1 + X_2 - 3X_3 = 3 \\ X_1 + 2X_2 \leq 4 \\ X_1 \geq 0, X_2 \leq 0, X_3 \textbf{ Unrestricted (غير محدد الاشارة)} \end{cases}$$

المطلوب: أكتب الصيغة القانونية والصيغة القياسية لهذا البرنامج.

الصيغة القانونية:

$$\text{Max } Z = -X_1 - X'_2 - 2(X'_3 - X''_3)$$

$$\text{s/c} \begin{cases} -X_1 + (X'_3 - X''_3) \leq -2 \\ 2X_1 - X'_2 - 3(X'_3 - X''_3) \leq 3 \\ -2X_1 + X'_2 + 3(X'_3 - X''_3) \leq -3 \\ X_1 - 2X'_2 \leq 4 \\ X_1, X'_2, X'_3, X''_3 \geq 0 \end{cases}$$

الصيغة القياسية:

$$\text{Min } Z = X_1 + X'_2 + 2(X'_3 - X''_3)$$

$$\text{s/c} \begin{cases} X_1 - (X'_3 - X''_3) - S_1 = 2 \\ 2X_1 - X'_2 - 3(X'_3 - X''_3) = 3 \\ X_1 - 2X'_2 + S_3 = 4 \\ X_1, X'_2, X'_3, X''_3, S_1, S_3 \geq 0 \end{cases}$$

سهولة حل البرمجة الخطية عادة ما تجعلها وسيلة جذابة للتعامل مع المشاكل.

الفصل الرابع: الطريقة البيانية في حل البرامج الخطية

Graphical Method

تمهيد:

نسعى من خلال البرمجة الخطية دائما إلى إيجاد حلا للبرنامج الخطي المصاغ، والحل هو عبارة عن القيم التي تحقق مجموعة من المعادلات في نفس الوقت، ويكون الحل ممكناً بالحل الذي يحقق قيود البرنامج الخطي ومجموعة الحلول تدعى بمنطقة الحلول الممكنة، والحل الأمثل هو الحل الذي ينتمي إلى منطقة الحلول الممكنة ويعطي أفضل قيمة لدالة الهدف، وهناك عدة طرق لحل البرامج الخطية منها الطريقة البيانية في حالة البرنامج الخطي الذي يحتوى على متغيرين فقط والطريقة الحسابية والتي تدعى بطريقة السيمبلكس، وسوف نتطرق ضمن هذا الفصل إلى طرق الحل بالتفصيل إلى الطريقة البيانية.

1. مبدأ الطريقة البيانية.

تعتمد الطريقة البيانية في حل البرامج الخطية على التمثيل البياني للقيود ودالة الهدف، وتحديد منطقة الحلول الممكنة والنقطة التي تمثل الحل الأمثل بعد ذلك.

ويمكن تلخيص خطوات هذه الطريقة فيما يلي:[1]

1. تحويل كل متراجحات القيود إلى معادلات.
2. نرسم الخطوط المستقيمة للمعادلات السابقة في معلم متعامد وتدعى هذه المستقيمات المحصل عليها **بالمستقيمات المولدة.**
3. نشطب المناطق التي لا تحقق القيود، حيث كل قيد يقسم المستوى إلى نصفين، نصف يحقق القيد والنصف الآخر لا يحققه؛ أما في حالة القيد مساواة، فنأخذ النقاط التي تقع على طول المستقيم فقط.
4. نحدد المنطقة التي تحقق جميع القيود وهي في الغالب تشكل مضلع متعدد الرؤوس، وتدعى هذه المنطقة **بمنطقة الحلول الممكنة.**

[1] - **H.A. EISELT, C.-L. SANDBLOM**, Op-Cit, P: 67.

5. نجعل دالة الهدف معدومة أي نساويها إلى الصفر ونرسم مستقيمها على نفس المعلم، يمر هذا المستقيم من نقطة المبدأ ونسمي هذا المستقيم بالمستقيم **(Z_0)** أو **($Z = 0$)**.
6. نحرك المستقيم **(Z_0)** بصفة متوازية باتجاه منطقة الحلول الممكنة:

– تكون النقطة التي تحقق أكبر قيمة لدالة الهدف **(في حالة التعظيم)** هي آخر نقطة يصل إليها المستقيم **(Z_0)** من منطقة الحلول الممكنة، وتمثل هذه النقطة إحدى رؤوس المضلع (إحدى النقاط القصوى).

– تكون النقطة التي تحقق أقل قيمة لدالة الهدف **(في حالة التدنية)** هي أول نقطة يصل إليها المستقيم **(Z_0)** من منطقة الحلول الممكنة، وتمثل هذه النقطة إحدى رؤوس المضلع (إحدى النقاط القصوى).

7. نوجد قيم الأزواج المرتبة لهذه النقطة وذلك إما:

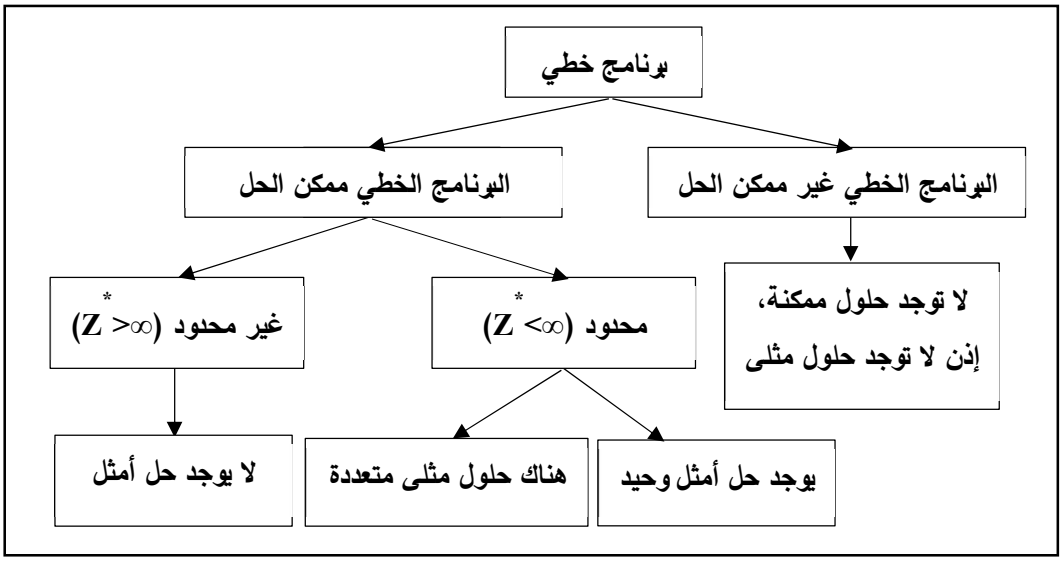
هندسياً: بإسقاط شاقولي لهذه النقطة على المحور الأفقي فنحصل على قيمة المتغير الأول، ثم نقوم بإسقاط أفقي لهذه النقطة على المحور الشاقولي فنحصل على قيمة المتغير الثاني.

جبرياً: بإيجاد الحل المشترك لمعادلات المستقيمات المتقاطعة والمحددة لهذه النقطة، فنحصل على قيمة المتغيرين.

8. نعوض قيمة المتغيرين المحصل عليهما في دالة الهدف فنحصل على القيمة العظمى لهذه الدالة.

عادة تستخدم الطريقة البيانية عندما يكون عدد متغيرات البرنامج الخطي إثنين فقط، أو إذا استطعنا بطريقة ما رد البرنامج الخطي المعطى إلى برنامج ذو متغيرين، ومن مزايا هذه الطريقة البساطة، ويمكن استخدام الطريقة البيانية سواء في حالة التعظيم أو في حالة التدنية. وبالرغم من ذلك فإنها تبقى إحدى الطرق المفيدة واللازمة لحل البرامج الخطية. كما يمكن للبرامج الخطية أن لا تقبل حلول وبعضها لديه حلول مثلى متعددة قد تكون محدودة أو غير محدودة.[1] والمبين ضمن المخطط الآتي:

[1] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, " Op-Cit, P: 30.



هذا المخطط يوضح الحلول الممكنة لمشاكل البرمجة الخطية، وفي الأمثلة الآتية، سنرى الحالات التي تنطوي على تعظيم وتقليل دالة الهدف، سنرى أيضًا المواقف التي لا يوجد فيها حل عملي، وبعضها لديه حلول مثالية متعددة، والبعض الآخر بدون حل مثالي.

ويتضمن الحل البياني للبرمجة الخطية خطوتين رئيسيتين:[1]

- تحديد منطقة الحلول الممكنة.
- تحديد الحل الأمثل والذي يكون من بين جميع الحلول الممكنة.

كل قيد من الشكل أقل أو يساوي أو أكبر أو يساوي يحقق نصف المستوى قد يكون إلى يمين المستقيم أو إلى يساره، ويشمل تقاطع هذه النصف مستويات مساحة تسمى منطقة الحلول الممكنة؛ وتسمى النقاط التي تحد منطقة الحلول الممكنة بالنقاط القصوى، وفي حالة وجود حل أمثل وحيد فإنه يكون إحدى هذه النقاط القصوى.[2] والحل الأمثل هو الحل الذي ينتمي إلى منطقة الحلول الممكنة ويعطي أفضل قيمة لدالة الهدف، وأفضل قيمة هي الأكبر في حالة دالة الهدف تعظيم، والأقل قيمة في حالة دالة الهدف تقليل.[3]

مثال رقم (4-1) في حالة التعظيم: تنتج مؤسسة منتجين (P_1) و(P_2) وتستخدم في إنتاجهما ثلاث موارد (M_1) و(M_2) و(M_3)، وفق البرنامج الخطي الآتي:

[1] - **Hamdy A. TAHA**, Op-Cit, P: 47.
[2] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 30.
[3] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, " Op-Cit, P: 36.

$$\text{Max } Z = 100X_1 + 60X_2$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 8X_1 + 2X_2 \leq 40 & (M_1 \text{ قيد المورد }) \\ 6X_1 + 9X_2 \leq 108 & (M_2 \text{ قيد المورد }) \\ 8X_1 + 6X_2 \leq 96 & (M_3 \text{ قيد المورد }) \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد حل البرنامج باستخدام الطريقة البيانية.

تحويل القيود إلى معادلات:

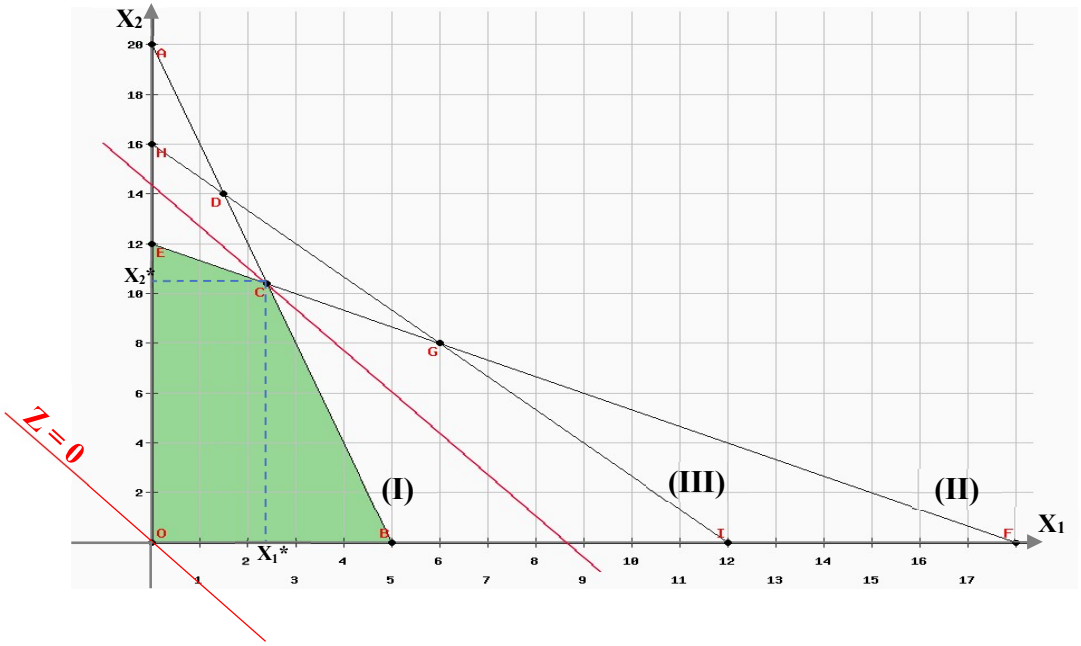
$$\text{Max } Z = 100X_1 + 60X_2$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 8X_1 + 2X_2 = 40 \text{ ……. (I)} \\ 6X_1 + 9X_2 = 108 \text{ ……... (II)} \\ 8X_1 + 6X_2 = 96 \text{ ……. (III)} \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

من الأسهل التفكير في كل قيد على أنه معادلة مرتبطة بهذا القيد، ومن المعروف أن أي مستقيم يتم رسمه بتحديد نقطتين، للقيام بذلك يمكن ببساطة تعيين أي من المتغيرات على أي قيمة نحبها ونحسب قيمة المتغير الآخر، مما يؤدي إلى تعيين إحدى النقاط المطلوبة؛ وسيؤدي تكرار هذه الخطوة بقيمة مختلفة إلى نقطة ثانية، ومنه فالمستقيم الذي يشمل هذين النقطتين يمثل جميع نقاط المعادلة التي تمثل القيد.[1]

(I) $\Rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 20 \Rightarrow$ A (0, 20); $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 5 \Rightarrow$ B (5, 0)
(II) $\Rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 12 \Rightarrow$ E (0, 12); $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 18 \Rightarrow$ F (18, 0)
(III) $\Rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 16 \Rightarrow$ H (0, 16); $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 18 \Rightarrow$ I (12, 0)

[1] - **H.A. EISELT, C.-L. SANDBLOM**, Op-Cit, P: 60.



بعد رسم المستقيم نعود إلى القيد، بحيث لا تكون فقط مجموعة النقاط الواقعة على المستقيم هي التي تحقق القيد، بل جميع نقاط المستوى التي قد تقع إلى يمين المستقيم أو إلى يساره على حسب اتجاه القيد.[1]

وهناك طريقة بسيطة لتحديد أي نصف المستوى الذي يحقق القيد، وهي اختيار نقطة كيفية على يمين المستقيم أو على يساره، ونتأكد من أنها تحقق القيد أم لا، فإذا حققت القيد فهي تنتمي إللى نصف المستوى الذي يحقق القيد وإذا لم تحققه فالنصف الآخر هو الذي يحقق القيد.[2]

بعد رسم جميع القيود يمكن تحديد منطقة الحلول الممكنة، وهي المنطقة التي تحقق جميع القيود في آن واحد، أي أن أي نقطة تقع داخل منطقة الحلول الممكنة تمثل حلاً عملياً للمشكلة قيد الدراسة، وأي نقطة تقع خارج حدود هذه المنطقة تمثل حلاً غير ممكن.[3]

بعد تمثيل جميع القيود في شكل مستقيمات وتحديد نصف المستوي الذي يحقق كل قيد، يتم تحديد منطقة الحلول الممكنة وهي المنطقة المقبولة والتي تحقق جميع القيود في آن واحد، أي أنها تضم جميع نقاط المستوي التي تحقق جميع القيود في نفس الوقت، هذا مع الإشارة إلى قيود عدم السالبية فإن منطقة الحلول الممكنة سوف تكون ضمن الربع الأول من الرسم البياني.[4]

---

[1] - **H.A. EISELT, C.-L. SANDBLOM**, Op-Cit, P: 61.
[2] - **Ibid**, P: 61.
[3] - **محمد الطراونة، سليمان عبيدات**، مرجع سابق، ص: 88.
[4] - **P. Rama MURTHY**, Op-Cit, P: 28.

وبعد تحديد منطقة الحلول الممكنة، فأي نقطة تنتمي إلى هذه المنطقة تمثل حل ممكن، ولابد من تحديد نقطة ضمن هذه المنطقة والتي تعطينا أفضل قيمة لدالة الهدف والتي تمثل الحل الأمثل، حيث تقع هذه النقطة على حدود منطقة الحلول الممكنة، فالحل الأمثل هو عبارة عن حل ممكن تعطي أفضل قيمة لدالة الهدف.[1]

إيجاد الحل الأمثل لمشاكل البرمجة الخطية يعني الوصول إلى قيم مثلى لمتغيرات القرار التي تحقق القيود وتعطي أفضل قيمة لدالة الهدف، فالمساحة المحصورة بين القيود والتي تلبي جميع القيود في نفس الوقت هي جميع النقاط التي تقع داخل هذه المنطقة، وبالتالي فهذه المساحة تمثل مجموعة الحلول الممكنة، والحل الأمثل هو إحدى هذه النقاط التي تحقق أفضل قيمة لدالة الهدف.[2]

نلاحظ من خلال الشكل أن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المحصورة بين النقاط القصوى OECB التي تحقق جميع القيود في آن واحد.

نضع **Z = 0**، أي:

$Z = 0 \Rightarrow 100X_1 + 60X_2 = 0,\ X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 0,\ O\ (0, 0),\ X_1 = 1 \Rightarrow X_2 = -2,\ K\ (1, -5/3)$

بعد رسم المستقيم الذي يمثل دالة الهدف، نقوم بسحب هذا المستقيم نحو منطقة الحلول المثلى بالتوازي حتى نصل إلى آخر نقطة ممكنة، وبالتالي فإن آخر نقطة ممكنة هي النقطة المثلى؛ ومن الواضح من خلال هذا الإجراء، فإن أي حل أمثل يقع على حدود منطقة الحلول والممكنة ولا يقع ضمن الجزء الداخلي منها، وهذا ما تؤكده نظرية دانتزينغ (Dantzig) حول نقطة الزاوية الشهيرة، والتي تنص على أنه في حالة الحل الأمثل وحيد، فإنه يتمثل في إحدى النقاط القصوى التي تحد منطقة الحلول الممكنة.[3]

نلاحظ عند سحب المستقيم $(Z = 0)$ نحو منطقة الحلول الممكنة (حالة **Max**) فإن آخر نقطة يصلها هذا المستقيم هي النقطة $C\ (X_1^*, X_2^*)$

وبعد تحديد نقطة الزاوية والتي تمثل الحل الأمثل، يتم تحديد إحداثياتها بدقة بعد ذلك، ويتم ذلك بيانياً أو عن طريق حل جملة المعادلات التي تمثل هذه النقطة نقطة تقاطع بينها؛ وبعد ذلك يتم تعويض قيم المتغيرات في دالة الهدف من أجل الحصول على قيمة دالة الهدف.[4]

---

[1] - **محمد الطراونة، سليمان عبيدات**، مرجع سابق، ص: 89/88.

[2] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 30.

[3] - **H.A. EISELT, C.-L. SANDBLOM**, Op-Cit, P: 67.

[4] - **Ibid**, P: 67.

نلاحظ أن النقطة (C) هي نقطة تقاطع القيدين (I) و(II)، وبالتالي من أجل التحصل على إحداثيات النقطة (C) والتي تمثل الحل الأمثل، نقوم بالإسقاط على محور الفواصل ومحور التراتيب، أو نقوم بحل جملة المعادلتين للقيدين (I) و(II):

$8X_1 + 2X_2 = 40$ ……. (I)
$6X_1 + 9X_2 = 108$ ……... (II)
$(I) \Rightarrow X_2 = 20 - 4X_1$
$(II) \Rightarrow 6X_1 + 9(20 - 4X_1) = 108 \Rightarrow 6X_1 + 180 - 36X_1 = 108 \Rightarrow -30X_1 = -72 \Rightarrow X_1 = 12/5$
$(I) \Rightarrow X_2 = 20 - 4(12/5) \Rightarrow X_2 = 52/5$

ومنه نستنتج أن الحل الأمثل هو:

$X_1^* = 12/5 = 2,4$
$X_2^* = 52/5 = 10,4$
$Z^* = 864$
$\mathbf{(X_1^* ; X_2^* ; Z^*) = (12/5 ; 52/5 ; 864)}$

- **التحقق من الحل:**

يكون التحقق من الحل بأنه يحقق جميع القيود في نفس الوقت:

بالنسبة للقيد الأول:

$8X_1 + 2X_2 \leq 40 \Rightarrow 8(2,4) + 2(10,4) = 40$

قيد محقق ومستغل بالكامل، أي لا توجد طاقة غير مستغلة.

بالنسبة للقيد الثاني:

$6X_1 + 9X_2 \leq 108 \Rightarrow 6(2,4) + 9(10,4) = 108$

قيد محقق ومستغل بالكامل، أي لا توجد طاقة غير مستغلة.

بالنسبة للقيد الثالث:

$8X_1 + 6X_2 \leq 96 \Rightarrow 8(2,4) + 6(10,4) = 81,6$

قيد محقق وغير مستغل بالكامل، أي توجد طاقة غير مستغلة، قدرها: $96 - 81,6 = 14,4$

- **التفسير الاقتصادي:** يكون قرار المؤسسة بإنتاج (2,4) وحدة من المنتج (P_1)، و(10,4) وحدة من المنتج (P_2)؛ وذلك باستخدام كافة المخزون من المورد الأول (M_1) والمورد الثاني (M_2)، أي لا توجد طاقة عاطلة؛ مع بقاء جزء من المورد الثالث (M_3) يقدر بـ: 14,4 وحدة لم تستغل، حيث تم استغلال 81,6 وحدة منه فقط؛ وتحقق المؤسسة بذلك ربحاً أعظمياً قدره 500 وحدة نقدية.
- **نظرية 01:** إذا وجد حل أمثل لبرنامج خطي ذي متغيرين، فإن هذا الحل يوجد عند رؤوس مضلع منطقة الحلول الممكنة.

مثال رقم (4-2) في حالة التدنية: إليك البرنامج الخطي الآتي:

$$\text{Min } Z = 10X_1 + 30X_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \geq 6 \\ 6X_1 + X_2 \geq 6 \\ X_2 \geq 2 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد حل البرنامج باستخدام الطريقة البيانية.

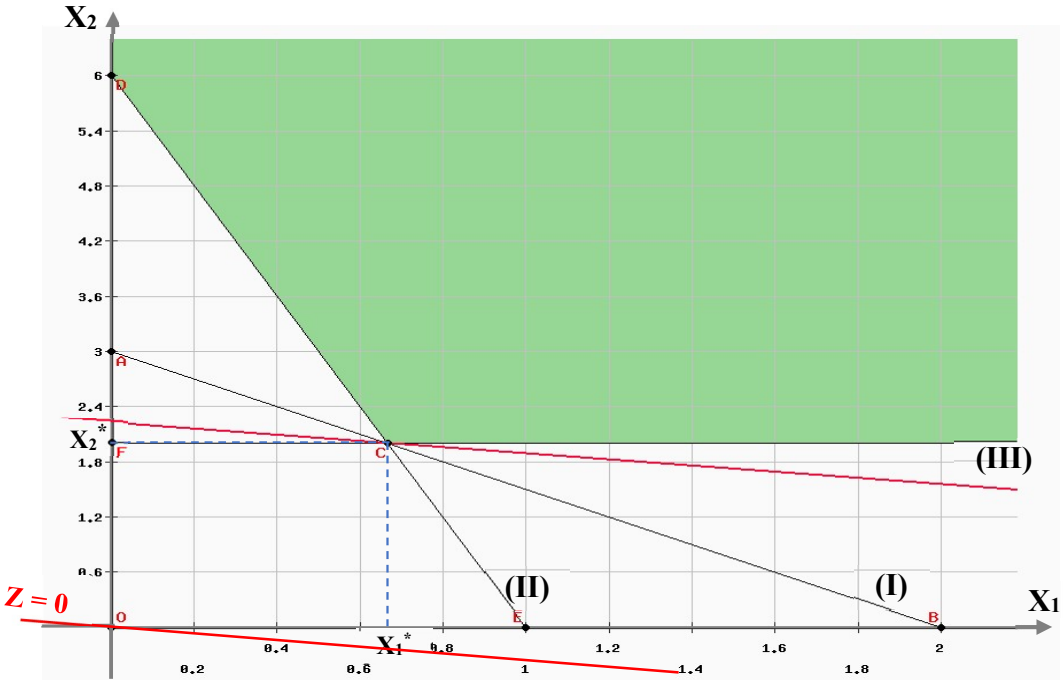
تحويل القيود إلى معادلات:

$$\text{Min } Z = 10X_1 + 30X_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} 3X_1 + 2X_2 = 6 \ldots\ldots (I) \\ 6X_1 + X_2 = 6 \ldots\ldots (II) \\ X_2 = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots (III) \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

(I) $\Rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 3 \Rightarrow$ A (0, 3); $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 2 \Rightarrow$ B (2, 0)

(II) $\Rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 6 \Rightarrow$ D (0, 6); $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 1 \Rightarrow$ E (1, 0)

(III) $\Rightarrow X_2 = 2 \Rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow$ F (0, 2) $\Rightarrow$ هذا المستقيم يوازي محور الفواصل



نلاحظ من خلال الشكل أن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المحصورة بين النقاط القصوى DC والمفتوحة من الأعلى والتي تحقق جميع القيود في آن واحد.

نضع **Z = 0**، أي:

$Z = 0 \Rightarrow 10X_1 + 30X_2 = 0$, $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 0$, O (0, 0), $X_1 = 1 \Rightarrow X_2 = -1/3$, K (1, -1/3)

نلاحظ عند سحب المستقيم ($Z = 0$) نحو منطقة الحلول الممكنة (حالة **Min**) فإن أول نقطة يصلها هذا المستقيم هي النقطة $C\ (X_1^*, X_2^*)$

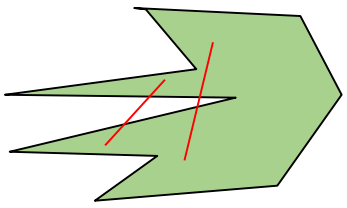
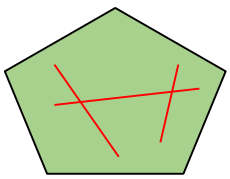
نلاحظ أن النقطة (C) هي نقطة تقاطع جميع القيود، وبالتالي من أجل التحصل على إحداثيات النقطة (C) والتي تمثل الحل الأمثل، نقوم بالإسقاط على محور الفواصل ومحور التراتيب، أو نقوم بحل جملة المعادلتين للقيدين (I) و(III):

$3X_1 + 2X_2 = 6$ ..... (I)
$X_2 = 2$ ..... (III)
$(I) \Rightarrow 3X_1 + 2(2) = 6 \Rightarrow X_1 = 2/3$

ومنه نستنتج أن الحل الأمثل هو:

$X_1^* = 2/3 = 0.67$
$X_2^* = 2$
$Z^* = 200/3 = 66.67$
$(X_1^* ; X_2^* ; Z^*) = (2/3 ; 2 ; 200/3)$

- **نظرية 02:** إن مجموعة الحلول الممكنة لبرنامج خطي هي مجموعة محدبة؛ والمجموعة المحدبة هي المنطقة التي تتمتع بالخاصية الهندسية الآتية: كل قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين تقع داخل هذه المنطقة (منطقة الحلول الممكنة)، وهذا يعني أن المناطق غير المحدبة يستحيل أن تكون حل لبرنامج خطي.

مناطق غير محدبة	مناطق محدبة
	

توضح الطريقة البيانية كيفية تمثيل دالة الهدف والقيود بيانياً وكيف يمكن الحصول على الحل بيانياً، كما يمكن مناقشة الحالات التي قد تحدث في عملية الحل وكيفية فهمها والتعامل معها.[1]

[1] - **H.A. EISELT, C.-L. SANDBLOM**, Op-Cit, P: 60.

2. حالات خاصة في الحل بالطريقة البيانية.

حتى الآن كنا نسعى إلى إيجاد حل واحد فقط يكون أمثلاً، لكن ليس الحال دائماً هكذا، فقد يكون البرنامج ليس لذيه حلاً من الأساس وقد يكون له حلول مثلى متعددة، لذلك سوف نتطرق إلى الحالات التي يمكن أن نصادفها عند القيام بحل أي برنامج خطي.

يمكن أن يكون الحل الأمثل وحيداً ويمكن أن يكون مجموعة من الحلول المثلى المتعددة والمحدودة، وفي هذه الحالة يجب أن يكون على الأقل إثنان من الحلول المثلى المجاورة.[1] كما يمكن للبرامج الخطي الأ يكون له حلا من الأساس. يمكن أن نصادف عدة حالات خاصة أثناء الحل بالطريقة البيانية منها ما يلي:

2.1. حالة تعدد الحلول: كل من البرامج الخطية التي قمنا بحلها بيانياً كان لها الحل الأمثل الوحيد، لكن من الممكن أن يكون لمشكلة البرمجة الخطية حلول متعددة، تكون جميعها فعالة بنفس القدر في تحقيق الهدف.[2] فيمكن أحياناً أن نصادف أكثر من حل واحد، وهي الحالة المسمات **بتعدد الحلول**، وفيها نجد على الأقل رأسين من رؤوس مضلع منطقة الحلول المثلى يتماسان مع مستقيم دالة الهدف عند سحب مستقيمها نحو منطقة الحلو الممكنة، بحيث يكون آخر رأسين يصلهما في حالة التعظيم وأول رأسين يصلهما في حالة التدنية.

مثال رقم (4-3) حالة تعدد الحلول: إليك البرنامج الخطي الآتي:

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 4X_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} 4X_1 + 8X_2 \leq 40 \\ X_1 \leq 6 \\ X_2 \leq 4 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد حل البرنامج باستخدام الطريقة البيانية.

تحويل القيود إلى معادلات:

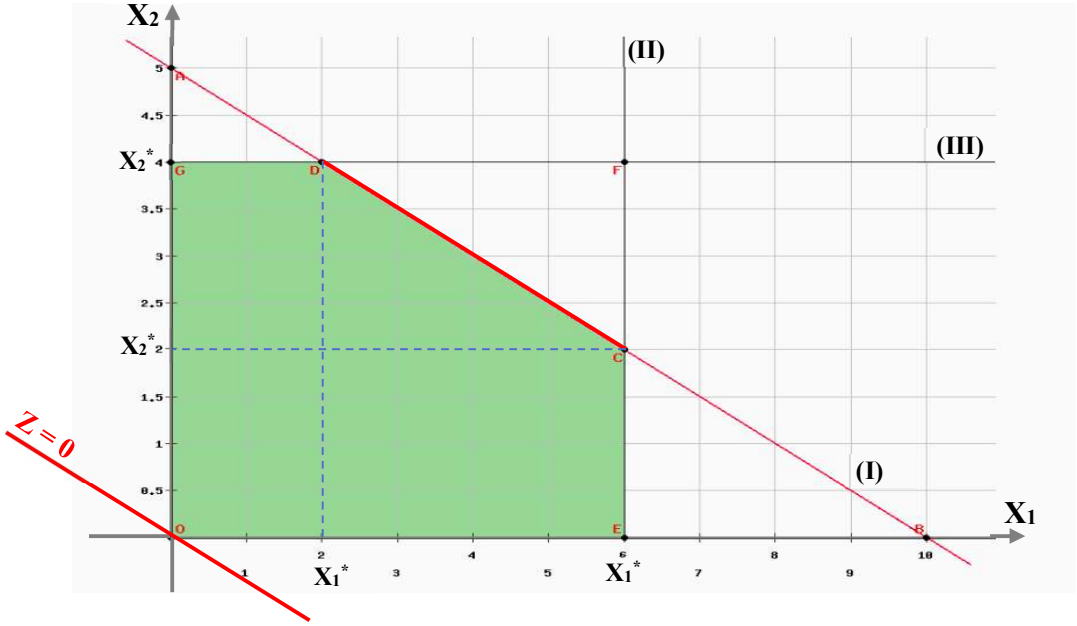
$$\text{Max } Z = 2X_1 + 4X_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} 4X_1 + 8X_2 = 40 \ldots\ldots (I) \\ X_1 = 6 \ldots\ldots\ldots (II) \\ X_2 = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots (III) \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

$(I) \Rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 5 \Rightarrow A\ (0, 5)$; $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 10 \Rightarrow B\ (10, 0)$

$(II) \Rightarrow X_1 = 6 \Rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow E\ (0, 6)$ ⇒ هذا المستقيم يوازي محور التراتيب

[1] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, Op-Cit, P: 168.
[2] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 33.

هذا المستقيم يوازي محور الفواصل $\Rightarrow$ G (0, 4) $\Rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 4 \Rightarrow$ (III)



نلاحظ من خلال الشكل أن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المحصورة بين النقاط القصوى OGDCE والتي تحقق جميع القيود في آن واحد.

نضع **Z = 0**، أي:

$Z = 0 \Rightarrow 2X_1 + 4X_2 = 0, X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 0, O\ (0, 0), X_1 = 1 \Rightarrow X_2 = -1/2, K\ (1, -1/2)$

نلاحظ أنه عند سحب مستقيم دالة الهدف نحو منطقة الحلول الممكنة، فإنه لا يصادف نقطة واحدة فقط، بل جميع النقاط التي تقع بين النقطتين (C) و(D) والتي تشكل القطعة المستقيمة [CD] وبالتالي فالحل الأمثل هنا ليس حل وحيد بل مجموعة من الحلول المثلى المتعددة والمحدودة.

إذن عند سحب المستقيم (Z = 0) نحو منطقة الحلول الممكنة (حالة **Max**) فإن آخر نقطة يصلها هذا المستقيم هما النقطتين D (X_1^*, X_2^*) و C (X_1^*, X_2^*) في آن واحد، وهذا يدل أن جميع النقاط التي تقع على القطعة المستقيمة [CD] تعطي نفس قيمة دالة الهدف، وبالتالي فهذا البرنامج لديه حلول مثلى متعددة محدودة وإحدى هذه الحلول النقطتين D و C.

عند النقطة C:

$X_1^* = 6, X_2^* = 2, Z^* = 20$

عند النقطة D:

$X_1^* = 2, X_2^* = 4, Z^* = 20$

تحدث هذه الحالة عندما تكون نقطتان قصوتان متجاورتان لها نفس قيمة دالة الهدف، حيث يعطيان أفضل قيمة لدالة الهدف، وبالتالي فهناك على الأقل حلين أمثلين، لكن نجد جميع النقاط التي تقع على القطعة المستقيمة بين هاتان النقطتان تعطي نفس قيمة دالة الهدف،[1] وبهذا يتضح أن هذا النموذج لديه حلول مثلى متعددة محدودة.

2.2. حالة لا نهائية دالة الهدف: عدم وجود حل عملي لمسألة البرمجة الخطية يعني أن تغير قيمة متغير أو أكثر في المسألة، يؤدي إلى زيادة قيمة دالة الهدف في حالة مسائل التعظيم دون مخالفة أي قيد من قيود المسألة، وعندما نحاول تمثيل قيود المسألة بيانياً نجد منطقة الحلول الممكنة ستكون مفتوحة من الأعلى.

مثال رقم (4-5) حالة لا نهائية دالة الهدف: إليك البرنامج الخطي الآتي:

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 3X_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} X_1 + X_2 \geq 400 \\ 3X_1 + X_2 \geq 600 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

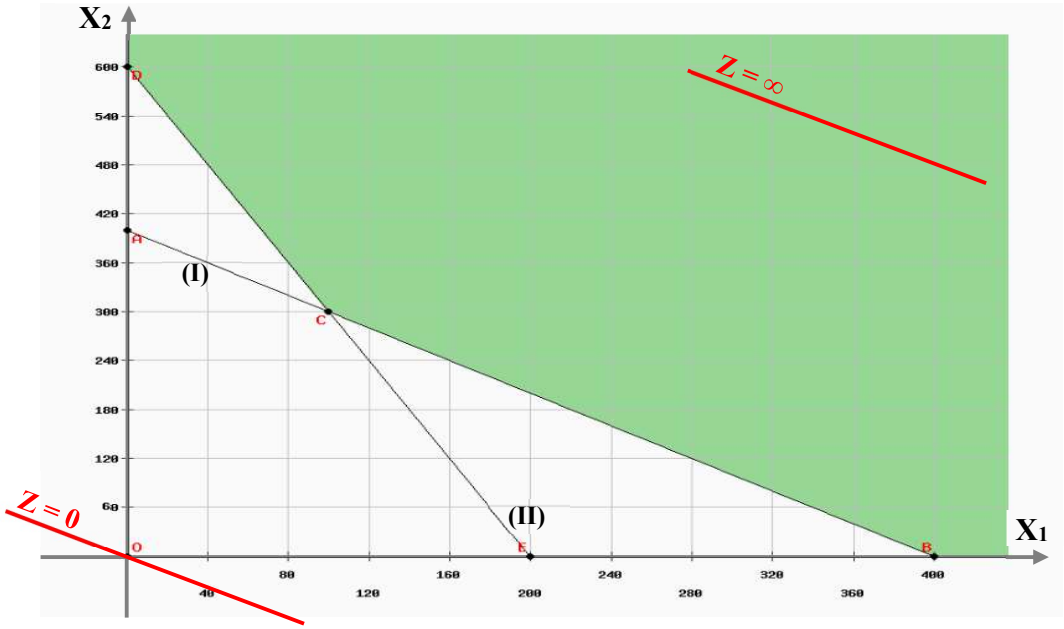
المطلوب: أوجد حل البرنامج باستخدام الطريقة البيانية.

تحويل القيود إلى معادلات:

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 3X_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} X_1 + X_2 = 400 \ldots\ldots\ldots (I) \\ 3X_1 + X_2 = 600 \ldots\ldots (II) \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

$(I) \Rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 400 \Rightarrow A\ (0, 400)$; $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 400 \Rightarrow B\ (400, 0)$
$(II) \Rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 600 \Rightarrow D\ (0, 6)$; $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 200 \Rightarrow E\ (200, 0)$

[1] - **H.A. EISELT, C.-L. SANDBLOM**, Op-Cit, P: 74.



نلاحظ من خلال الشكل أن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المحصورة بين النقاط القصوى ACB والمفتوحة من الأعلى والتي تحقق جميع القيود في آن واحد.

نضع **Z = 0**، أي:

$Z = 0 \Rightarrow 2X_1 + 3X_2 = 0,\ X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 0,\ O\ (0, 0),\ X_1 = 40 \Rightarrow X_2 = -2/3,\ K\ (1, -2/3)$

نلاحظ عند سحب المستقيم $(Z = 0)$ نحو منطقة الحلول الممكنة (حالة **Max**) فإن آخر نقطة يصلها هذا المستقيم غير موجودة، لأن منطقة الحلول مفتوحة من الأعلى، أي قيمة دالة الهدف غير محدودة $(Z = \infty)$.

وتنشأ حالة الحلول غير المحدودة عادةً لأن بعض القيود الحقيقية والتي تمثل قيودًا عملية على الموارد، لم تأخذ بعين الاعتبار عند صياغة البرمجة الخطية، ونظرًا لكون من غير المتوقع بشكل عملي أن القدرة على تحقيق أرباح أو إنتاجية غير محدودة، فيجب تفسير هذه الحالة بالإشارة إلى أن أي برنامج له حلول غير محدودة كما هو في مثالنا دليل على أن المشكلة تحتاج إلى إعادة النظر فيها بعناية أكبر وإعادة صياغتها وإعادة حلها.

يعني ذلك عدم وجود حدود لمنطقة الحلول الممكنة، وهذا يعني أنه يمكن زيادة متغير أو أكثر من متغيرات المكشلة ومن تم قيمة دالة الهدف دون مخالفة لأي قيد من القيود، علماً بأن هذه الحالة هي حالة نظرية وبعيدة الحدوث واقعياً، ذلك أن الموارد المتاحة محدودة في لظة زمنية معينة.[1]

ويعتبر وجود حلول مثلى متعددة غير محدودة، بمثابة عكس عدم وجود منطقة الحلول الممكنة إلى حد ما، ففي حالة عدم وجود حل أمثل تكون القيود متناقضة أي ضيقة جدا، بينما في هذه الحالة تكون واسعة إلى مالا نهاية، وفي هذه الحالة يتطلب تضييق هذه القيود، وتحدث هذه الحالة في حالة نسيان بعض القيود، ومرة أخرى تعتبر هذه الحالة رسالة لعدم صياغة النموذج بشكل جيد، والذي يتطلب تدخلاً.[2]

2.3. حالة استحالة الحل: بمعنى أنه لا توجد منطقة الحلول الممكنة، أي أن تحقيق أحد القيود يؤدي إلى عدم تحقيق القيد الآخر.

مثال رقم (4-5) حالة استحالة الحل: إليك البرنامج الخطي الآتي:

$$\text{Min } Z = 5X_1 + 10X_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} 2X_1 + 4X_2 \geq 20 \\ X_1 + 2X_2 \leq 4 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد حل البرنامج باستخدام الطريقة البيانية.

تحويل القيود إلى معادلات:

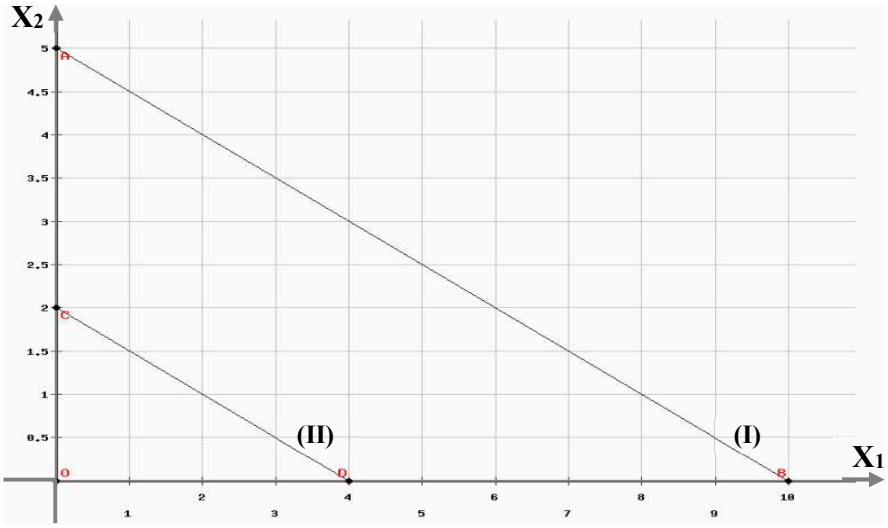
$$\text{Min } Z = 5X_1 + 10X_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} 2X_1 + 4X_2 = 20 \ldots\ldots (I) \\ X_1 + 2X_2 = 4 \ldots\ldots (II) \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

$(I) \Rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 5 \Rightarrow A\ (0, 5); X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 10 \Rightarrow B\ (10, 0)$

$(II) \Rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 2 \Rightarrow D\ (0, 2); X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 4 \Rightarrow E\ (4, 0)$

[1] - **محمد الطراونة، سليمان عبيدات**، مرجع سابق، ص: 102.

[2] - **H.A. EISELT, C.-L. SANDBLOM**, Op-Cit, P: 73.



نلاحظ من خلال الشكل أن منطقة الحلول الممكنة غير موجودة، أي لا توجد منطقة مشتركة بين القيود فهي متناقضة، وبما أنه لا توجد منطقة الحلول الممكنة، فهذا البرنامج الخطي ليس لديه حل.

يشير عدم وجود حل ممكن إلى رسالة مفادها أنه يوجد خطأ في صياغة هذا النموذج، مما يعني أنه هناك تناقض بين القيود.[1]

4.2. حالة حياد أحد القيود: عند تعدد القيود فإنه يمكن أن نجد أحد مستقيمات هذه القيود لا يلمس منطقة الحلول الممكنة في أية نقطة، وحينها يكون هذا القيد حيادياً تماماً، حيث يمكن حذفه كلية من البرنامج دون أن يحدث ذلك أي تأثير على النظام.

مثال (4-6) حالة حياد أحد القيود: إليك البرنامج الخطي الآتي:

$$\text{Max } Z = 6X_1 + 8X_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} X_1 + 2X_2 \leq 10 \\ 2X_1 + 5X_2 \leq 10 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

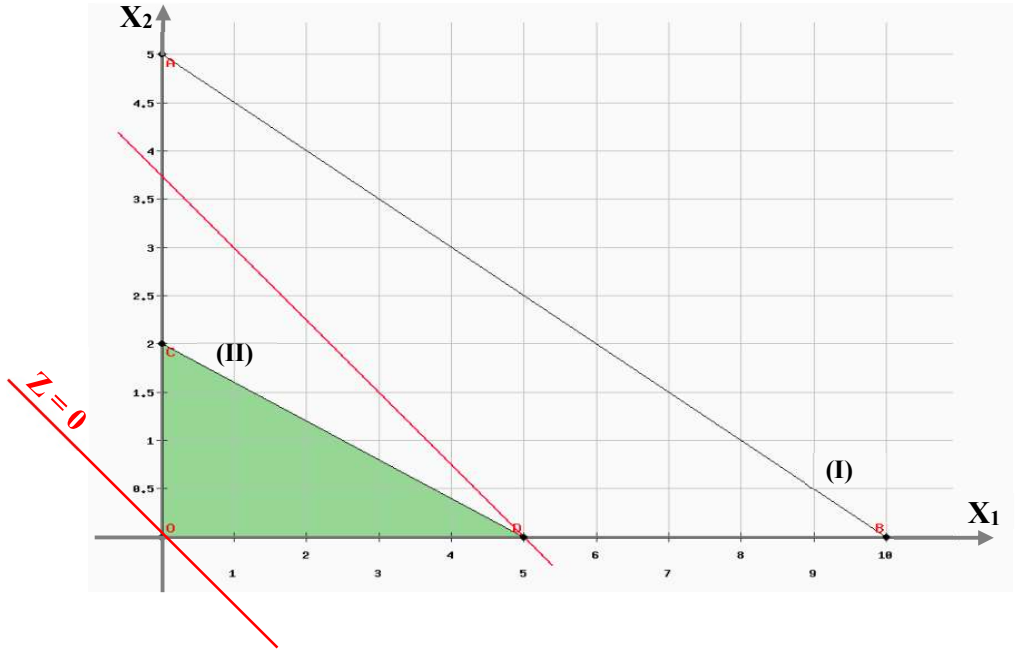
المطلوب: أوجد حل البرنامج باستخدام الطريقة البيانية.

تحويل القيود إلى معادلات:

$$\text{Max } Z = 6X_1 + 8X_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} X_1 + 2X_2 = 10 \ldots\ldots\ldots (I) \\ 2X_1 + 5X_2 = 10 \ldots\ldots\ldots (II) \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

[1] - **H.A. EISELT, C.-L. SANDBLOM**, Op-Cit, P: 70.

(I) $\Rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 5 \Rightarrow A\ (0, 5)$; $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 10 \Rightarrow B\ (10, 0)$
(II) $\Rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 2 \Rightarrow D\ (0, 2)$; $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 5 \Rightarrow E\ (5, 0)$



نلاحظ من خلال الشكل أن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المحصورة بين النقاط القصوى OCD التي تحقق جميع القيود في آن واحد.

نضع **Z = 0**، أي:

$Z = 0 \Rightarrow 6X_1 + 8X_2 = 0,\ X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 0,\ O\ (0, 0),\ X_1 = 1 \Rightarrow X_2 = -3/4,\ K\ (1, -3/4)$

نلاحظ عند سحب المستقيم $(Z = 0)$ نحو منطقة الحلول الممكنة (حالة **Max**) فإن آخر نقطة يصلها هذا المستقيم هي النقطة $D\ (X_1^*, X_2^*)$

ومنه نستنتج أن الحل الأمثل هو:

$X_1^* = 5,\ X_2^* = 0,\ Z^* = 30$

$(X_1^*\ ;\ X_2^*\ ;\ Z^*) = (12/5\ ;\ 52/5\ ;\ 864)$

من خلال الشكل نلاحظ أن القيد رقم (I) يعتبر قيد زائد، وهذا لأن منطقة الحلول الممكنة محصورة بالقيد رقم (II) وفقط، وبالتالي فالقيد رقم (I) هو قيد حيادي، أي وجوده ضمن البرنامج الخطي مثل عدمه، فهو لا يمثل أي تأثير على حلول البرنامج الخطي.

هي حالة شائعة من مشاكل البرمجة الخطية الكبيرة والتي تحتوي على عدد كبير من القيود، مما ينتج عنها قيد فائض لا حاجة له وليس له تأثير على الحل، وهذا يعني وجود قيود لها أهمية أكثر من

غيرها، لذلك فاستخدام الأهم يغني عن استخدام الأقل أهمية. وتحدث هذه الحالة عندما يكون أحد القيود زائد عن الحاجة، أي إذا كان يمكن حدفه من النموذج دون التغيير في مجموعة الحلول الممكنة.[1]

ضمن مشاكل البرمجة الخطية الصغيرة، يمكن اكتشاف هذه الحالات بشكل مرئي عند القيام بعملية الحل بيانياً، لكن ضمن المشاكل الكبيرة والمعقدة قد لا تكون هذه الحالات واضحة فطريقة الحل العامة التي سيتم وصفها لاحقاً ليست قادرة على الوصول إلى الحل الأمثل فقط، بل أيضاً توفر آليات التعرف على جميع الحالات الممكنة التي يمكن مصادفتها عند حل أي برنامج خطي.

3. حدود الطريقة البيانية.

- يجب أن لا يزيد عدد المتغيرات عن متغيرين وذلك لصعوبة تمثيل ثلاثة أبعاد هندسية فما فوق.
- افتراض مراعاة الدقة في رسم الخطوط البيانية.
- الطريقة البيانية ليست مصممة لحل المشاكل الواقعية التي عادة ما تحتوي على عدد كبير من المتغيرات، لكن الغرض منها هو سهولة فهم معنى حل البرنامج الخطي ومناقشة مشاكل وصعوبات البرمجة الخطية بغض النظر عن حجم المشكلة قيد الدراسة.

ملاحظات: عند القيام بحل أي برنامج خطي بالطريقة البيانية، فيجب ملاحظة الحالات الآتية:[2]

- عند سحب المستقيم الذي يمثل دالة الهدف نحو منطقة الحلول الممكنة، فإذا صادف نقطة واحدة تمثل الحل الأمثل، فهذا يدل على أن هذا البرنامج لذيه حل أمثل وحيد.
- عند سحب المستقيم الذي يمثل دالة الهدف نحو منطقة الحلول الممكنة، فإذا صادف أكثر من نقطة تمثل الحل الأمثل، فهذا يدل على أن هذا البرنامج لذيه حلول مثلى متعددة محدودة.
- عند سحب المستقيم الذي يمثل دالة الهدف نحو منطقة الحلول الممكنة والتي تكون مفتوحة من الأعلى، فإذا لم يصادف أي نقطة تمثل الحل الأمثل مهما واصلنا السحب، فهذا يدل على أن هذا البرنامج لذيه حلول مثلى متعددة غير محدودة.
- عند سحب المستقيم الذي يمثل دالة الهدف نحو منطقة الحلول الممكنة والتي لم توجد، فإذا لم يصادف أي نقطة تمثل الحل الأمثل، فهذا يدل على أن هذا البرنامج ليس لذيه حلول.

تعتبر الطريقة البيانية أسهل وأبسط وأوضح الطرق في معالجة مشاكل البرمجة الخطية، خاصة تلك المشاكل التي لا يزيد فيها عدد المتغيرات عن إثنين والتي تحتوي على عدد بسيط من القيود؛ كما تعتبر هذه

[1] - **H.A. EISELT, C.-L. SANDBLOM**, Op-Cit, P: 74.
[2] - **P. Rama MURTHY**, Op-Cit, P: 33.

الطريقة كأداة مفيدة لدراسة وفهم طرق وأساليب أخرى أكثر تعقيداً في حل مشاكل البرمجة الخطية مثل طريقة السيمبلكس والتي سوف نتناولها في الفصل الموالي.

يمكن حل أي برنامج خطي يحتوى على متغيرين بالطريقة البيانية والتي تدعى أحياناً بالطريقة الهندسية، غير أن استخدام هذه الطريقة يكاد يكون منعدم لاحتواء البرامج الخطية التي تمثل مشاكل البرمجة الخطية على عدد كبير من متغيرات القرار، غير أن المرور على الطريقة البيانية يعتبر مدخلاً لفهم واستيعاب معنى حل البرامج الخطية، إذ تعطي تصوراً عن حالات الحل الأمثل للبرامج الخطية عند استعمال الطرق الأخرى لحل البرامج الخطية، لذلك ننتقل إلى طريقة تمكن من حل البرامج الخطية مهما كان عدد المتغيرات التي يحتويها البرنامج الخطي والتي تدعي بطريقة السيمبلكس.

على ضوء النقص الموجود في الطريقة البيانية كونها لا تستخدم إلا في حالة وجود متغيرين فقط، حيث أن المشاكل العملية تتضمن عدد كبير من المتغيرات والقيود، فقد نحتاج إلى طرق وأساليب أخرى لحل هذا النوع من نماذج البرمجة الخطية، ونجد طريقة السيمبلكس أفضل هذه الطرق والأساليب.

الفصل الخامس: طريقة السيمبلكس في حل البرامج الخطية

Simplex Method

تمهيد:

تم التطرق لاستخدام الطريقة البيانية لشرح المفاهيم والصعوبات الرئيسة التي ينطوى عليها حل مشاكل البرمجة الخطية، والسبب هو أن المشاكل الواقعية لا تحتوي على متغيرين فقط، ولكن العشرات وبل الآلاف من المتغيرات، مما يجعل الرسم البياني مستحيلاً؛ وتعتبر طريقة السيمبلكس الطريقة الأفضل لحل البرامج الخطية، والتي يمكن شرحها بيانياً بأنها تتحرك من نقطة قصوى إلى أخرى مجاورة لها وأفضل منها حتى الوصول إلى النقطة المثلى والتي تمثل الحل الأمثل، ومن مميزات هذه النقطة أنها تكون الأفضل من أي نقطة قصوى مجاورة لها.

وضمن هذا الفصل سوف نتطرق إلى طريقة السيمبلكس باعتبار يمكن استخدامها حتى في حالة أكثر من متغيرين، حيث تعتبر هذه الأخيرة الطريقة الأقوي، والتي يقوم مبدأها على عملية التكرار من أول حل ممكن عملي حتى الوصول إلى الحل الأمثل إن وجد، مروراً باختبار أي حل يتم الحصول عليه.

1. طريقة السيمبلكس البسيط.

طريقة السيمبلكس هي إجراء عام لحل مشاكل البرمجة الخطية والتي طورت من طرف العالم جورج دانتزينغ سنة 1947، وقد أثبتت هذه الطريقة فعاليتها بشكل ملحوض ويتم استخدامها بشكل روتيني لحل المشاكل الضخمة بالاستعانة بأجهزة الحاسوب في الوقت الحالي.

وسوف نتطرق في هذا الفصل إلى المميزات الأساسية لهذه الطريقة وإدراج خطوات تنفيذ هذه الطريقة على البرامج الخطية.

1.1. جوهر خوارزم السيمبلكس: المقصود بمصطلح الخوارزم (Algorithm) سلسلة من العمليات التي يمكن إجراؤها في فترة زمنية محدودة، فالخزارزمية عملية قد تكون متكررة لكنها منتهية.[1] وطريقة السيمبلكس تعتبر خوارزمية تكرارية تبدأ بحل عملي مبدئي وتتحرك بشكل تكراري إلى حل أفضل، وتتوقف عند العثور على الحل الأمثل الذي لا يمكن إجراء أي تحسين عليه.[2]

[1] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 05.
[2] - **Ibid**, P: 40.

طريقة السيمبلكس هي أسلوب جبري لكن مفاهيمها الأساسية هندسية، حيث توفر هذه المفاهيم الهندسية فهماً قوياً لكيفية عمل هذه الطريقة، وهذا ما يجعلها فعالة جداً.[1] كما توجد الصيغة الجدولية للسيمبلكس والتي يتم من خلالها تسجيل المعلومات الأساسية فقط، كمعاملات المتغيرات والطرف الثاني للقيود والمتغيرات الأساسية، والأهم من ذلك هو تسليط الضوء على العمليات الحسابية وتسجيلها.[2]

كقاعدة بسيطة يتم اختيار المتغير الذي سوف يصبح متغير أساسي، المتغير الذي يأخذ أكبر قيمة للزيادة في دالة الهدف في حالة التعظيم والتي نقيسها من خلال الفرق $(C_k - Z_k)$، والذي يسمى بالمتغير الداخل إلى الأساس، وبالمقابل فإن أحد متغيرات الأساس سوف يصبح غير أساسي، ويتم اختياره من خلال المتغير الذي يعطي أقل قيمة للنسبة $(\theta_i = b_i/a_i^k)$، ويسمى بالمتغير الخارج من الأساس، هذا مع الأخذ بعين الاعتبار إشارة القيم الواقعة على عمود المتغير الداخل إلى الأساس، بحيث نأخذ إلا القيم الموجبة تماماً $(a_i^k > 0)$.[3]

حالة التقليل تشبه إلى حد كبير حالة التعظيم، والفرق بينها يكمن فقط في اختيار المتغير الداخل إلى الأساس، ففي حالة التقليل نختار المتغير الذي يقابل أقل قيمة للفرق (C_j-Z_j).

2.1. طريقة السمبلكس (الصيغة الجدولية): أو طريقة الجداول كما تسمى أحياناً تستخدم سواء كان عدد متغيرات البرنامج الخطي إثنين أو أكثر من ذلك وهي تعتمد على خوارزم يسمى خوارزم السمبلكس، كالآتي:

ليكن لدينا البرنامج الخطي الآتي:

$$\textbf{Max } Z = C^T X$$
$$\text{s/c} \begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

<u>المرحلة الأولى:</u> كتابة البرنامج على الشكل المعياري (القياسي)، أي تحويل القيود إلى من متراجحات إلى معادلات[4] وإضافة متغيرات الفجوة (S_i).

$$\textbf{Max } Z = C^T X$$
$$\text{s/c} \begin{cases} AX + IS = b \\ X \geq 0, S \geq 0 \end{cases}$$

فكرة جداول السمبلكس مبنية على إيجاد المصفوفة الحيادية والتي هي جزء من مصفوفة البرنامج الخطي والمعبرة عن المتغيرات العاطلة أو متغيرات الفجوة (S_i).

---

[1] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, Op-Cit, P: 93.
[2] - **Ibid**, P: 107.
[3] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 41/42.
[4] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, Op-Cit, P: 98.

$$A = \left|\begin{array}{cccccc|cccccc} \mathbf{X_1} & \mathbf{X_2} & \mathbf{X_3} & \mathbf{X_4} & \ldots\ldots & \mathbf{X_m} & \mathbf{S_1} & \mathbf{S_2} & \mathbf{S_3} & \mathbf{S_4} & \ldots\ldots & \mathbf{S_m} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots\ldots & a_{1m} & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots\ldots & a_{2m} & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots\ldots & a_{3m} & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots & & & & & & \ldots\ldots & & & & & \\ \ldots\ldots & & & & & & \ldots\ldots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \ldots\ldots & a_{nm} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 \end{array}\right| = \mathbf{B}$$

فكتابة الجدول الأولى للسمبلكس المرافق لمصفوفة الأساس الأولية والتي هي مصفوفة المتغيرات العاطلة.

$$B = \left|\begin{array}{cccccc} \mathbf{S_1} & \mathbf{S_2} & \mathbf{S_3} & \mathbf{S_4} & \ldots\ldots & \mathbf{S_m} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots & & & & & \\ \ldots\ldots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 \end{array}\right|$$

حيث يتم تحديد متغيرات الأساس التي تحدد ضمن الجدول الأولى بشكل تلقائي والتي هي متغيرات الفجوة،[1] ويكون الجدول الأولى للسيمبلكس وفق الشكل الآتي:

	C_j	C_1 C_2 C_3 ……C_m	0 0 0 0……0	b_i
C_b	X_B	X_1 X_2 X_3……X_m	S_1 S_2 S_3 S_4……S_m	
0	S_1	a_{11} a_{12} a_{13} ……..a_{1m}	0 0 0 ……0 1	b_1
0	S_2	a_{21} a_{22} a_{23} ……a_{2m}	0 1 0 0…… 0	b_2
0	S_3	a_{31} a_{32} a_{33} ……a_{3m}	0 0 1 0 ……0	b_3
.	.	……..……	……..……	.
.	.	……..……	……..……	.
.	.	……..……	……..……	.
0	S_m	a_{n1} a_{n2} a_{n3} ……a_{nm}	0 0 0 0……..……1	b_m
Z_j		0 0 0 0 …….. 0	0 0 0 0 …….. 0	Z = 0
$C_j - Z_j$		0 0 0 0 …….. 0	0 0 0 0 …….. 0	

الحل الأساسي الأولي المرافق للجدول الأولى هو:

$X_1 = X_2 = X_3 = \ldots\ldots = X_n = 0$; $S_1 = b_1$, $S_2 = b_2$, ……, $S_m = b_m$; $Z = 0$

اتجه إلى المرحلة الثانية.

[1] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, Op-Cit, P: 109.

المرحلة الثانية: مرحلة اختبار الحل الممكن الحالي، ونبحث عن المتغير المرشح للدخول إلى الأساس، حيث نحسب:[1]

$$C_k - Z_k = Max\ (C_j - Z_j),\ j \notin I_B$$

- إذا كان: $(C_k - Z_k \leq 0)$ إنتهى، أي الحل الأساسي الممكن الحالي هو الحل الأمثل.
- إذا كان: $(C_k - Z_k > 0)$، الحل الأساسي الممكن الحالي ليس هو الحل الأمثل، والمتغير (X_k) هو المتغير الداخل إلى الأساس، اتجه إلى المرحلة الثالثة.
- العمود الذي يقع عليه هذا المتغير يدعى عمود الارتكاز

المرحلة الثالثة: نختبر القيم الواقعة على عمود الارتكاز:

$$I = \{i/a_i^k > 0\}$$

- إذا كان: $(I = \emptyset)$ البرنامج الخطي لا يحتوي على حل أمثل $(Z^* = +\infty)$، انتهى.[2]
- إذا كان: $(I \neq \emptyset)$ اتجه إلى المرحلة الرابعة.

المرحلة الرابعة: نبحث عن المتغير المرشح للخروج من الأساس، حيث نحسب النسبة:[3]

$$\theta = Min\ \{\theta_i\} = Min\ \{b_i/\ a_i^k\},\ a_i^k > 0$$

حيث المتغير (X_l) هو المتغير الخارج من الأساس.

- السطر الذي يقع عليه هذا المتغير يدعى سطر الارتكاز
- عنصر تلاقي عمود الارتكاز مع سطر الارتكاز يسمي عنصر الارتكاز (Pivot)

اتجه إلى المرحلة الخامسة.

المرحلة الخامسة: شكل جدول السمبلكس الجديد، بتطبيق عمليات الصف الإبتدائية:[4]

- ملأ الأشعة الأحادية في الجدول الجديد.
- نقسم سطر الارتكاز على قيمة عنصر الارتكاز، أي نقسيم السطر (I) على العنصر (a_l^k).[5]
- حساب العناصر الباقية باستعمال خوارزم (Gauss-Jordan) وأوجد الحل الممكن الجديد، والعودة إلى المرحلة الثانية.

انتهى خوارزم السمبلكس.

---

[1] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 42.
[2] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, Op-Cit, P: 113.
[3] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 42.
[4] - **P. Rama MURTHY**, Op-Cit, P: 49/50.
[5] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, Op-Cit, P: 109.

- خوارزم غوص جوردن (Gauss-Jordan):[1]

العنصر الجديد = العنصر القديم – $\frac{\text{(العنصر المقابل له في عمود الارتكاز *العنصر المقابل له في سطر الارتكاز)}}{\text{عنصر الارتكاز(Pivot)}}$

$$A_{ij} = a_{ij} - \frac{k_{ij} * h_{ij}}{Pivot}$$

- A_{ij}: العنصر الجديد
- a_{ij}: العنصر القديم
- k_{ij}: العنصر المقابل في عمود الارتكاز
- h_{ij}: العنصر المقابل في سطر الارتكاز
- Pivot: عنصر الارتكاز

<u>ملاحظات</u>

1. إن طريقة السمبلكس بالنسبة لمشكل التدنية (Min) تبقى كما هي ما عدا **<u>المرحلة الثانية</u>** والتي تصبح:

نحسب:

$$\mathbf{C_k - Z_k = Min\ (C_j - Z_j),\ j \notin I_B}$$

- إذا كان $(C_k - Z_k \geq 0)$ إنتهى، أي الحل الأساسي الممكن الحالي هو الحل الأمثل.
- إذا كان $(C_k - Z_k < 0)$، الحل الأساسي الممكن الحالي ليس هو الحل الأمثل، والمتغير (X_k) هو المتغير الداخل إلى الأساس.

اتجه إلى المرحلة الثالثة.

2. إذا كان البرنامج يأخذ الشكل العام، في هذه الحالة نستعمل طريقة M–العظمى (Big-M) أو طريقة المرحلتين (Two-Phase) لإيجاد الحل الأساسي الممكن الأولي.
3. في الحل الأمثل لدينا: $C_k - Z_k \leq 0$
   - إذا كان $(C_k - Z_k < 0)$، فالحل الأمثل وحيد.
   - إذا كان $(C_k - Z_k = 0)$، هناك حلول مثلى متعددة.
4. إن طريقة السمبلكس منتهية.

[1] - **Hamdy A. TAHA**, Op-Cit, P: 111.

5. عند حساب: $C_k - Z_k = Max\ (C_j - Z_j)$، يمكننا إيجاد عدد من المتغيرات المرشحة للدخول إلى الأساس، فالاختيار يكون عشوائياً، ونفس الشيء في حالة (Min).

تتوقف طريقة السيمبلكس بشكل تلقائي لحظة الوصول إلى الحل الأمثل، ومن أجل فهم أكثر لكيفية إيجاد الحل الأمثل باستعمال جداول السيمبلكس نقوم بحل الأمثلة الآتية:

مثال (5-1): لدينا البرنامج الخطي الآتي:

$$Max\ Z = 100X_1 + 60X_2$$

$$s/c \begin{cases} 8X_1 + 2X_2 \leq 40 \\ 6X_1 + 9X_2 \leq 108 \\ 8X_1 + 6X_2 \leq 96 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل باستعمال طريقة السمبلكس الجدولية

المرحلة الأولى: كتابة البرنامج الخطي على الشكل المعياري

$$Max\ Z = 100X_1 + 60X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$s/c \begin{cases} 8X_1 + 2X_2 + S_1 = 40 \\ 6X_1 + 9X_2 + S_2 = 108 \\ 8X_1 + 6X_2 + S_3 = 96 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ S_1 \geq 0,\ S_2 \geq 0,\ S_3 \geq 0 \end{cases}$$

إيجاد المصفوفة الحيادية لكتابة الجدول الأولي للسمبلكس:

مصفوفة الجدول الأولي

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{X_1} & \mathbf{X_2} & \mathbf{S_1} & \mathbf{S_2} & \mathbf{S_3} \\ 8 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow B = \begin{vmatrix} \mathbf{S_1} & \mathbf{S_2} & \mathbf{S_3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ومنه فالجدول الأولي للسيمبلكس المرافق للمصفوفة الحيادية:

	C_j	100	60	0	0	0	b_i
C_B	X_B	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_3}$	
0	$\mathbf{S_1}$	8	2	1	0	0	40
0	$\mathbf{S_2}$	6	9	0	1	0	108
0	$\mathbf{S_3}$	8	6	0	0	1	96
Z_j		0	0	0	0	0	$Z^* = 0$
$C_j - Z_j$		100	60	0	0	0	

أي جدول من جداول السيمبلكس يرافقه حلاً، وكل حل من هذه الحلول يحتوي على متغيرات الأساس ومتغيرات خارج الأساس، حيث أن متغيرات الأساس تأخذ قيمها من خانة الطرف الثاني للقيود (b_i)، بينما باقي المتغيرات تعبر متغيرات خارج الأساس وتكون معدومة أي مباشرة قيمتها تساوي الصفر.[1]

الحل المرافق لهذا الجدول هو:

$X_1 = 0, X_2 = 0, S_1 = 40, S_2 = 108, S_3 = 96, Z = 0$

المرحلة الثانية: اختبار هذا الحل؟ نحسب:

$C_k - Z_k = \text{Max}\,(C_j - Z_j), j \notin I_B \Rightarrow C_k - Z_k = \text{Max}\,(100, 60) = 100 > 0$

الحل الممكن الحالي ليس هو الحل الأمثل، ومنه فالمتغير الداخل إلى الأساس هو: (X_1).

المرحلة الثالثة: نختبر (I) بحيث:

	C_j	100	60	0	0	0	b_i
C_B	X_B	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	
0	**S_1**	8	2	1	0	0	40
0	**S_2**	6	9	0	1	0	108
0	**S_3**	8	6	0	0	1	96
Z_j		0	0	0	0	0	$Z^* = 0$
$C_j - Z_j$		100	60	0	0	0	

$I = \{i/A_i^k > 0\} \Rightarrow I = \{8, 6, 8\} \Rightarrow I \neq \emptyset \Rightarrow$ نتجه إلى المرحلة الرابعة

المرحلة الرابعة: نحسب النسبة (θ):

$\theta = \text{Min}\,\{\theta_i\} = \text{Min}\,\{b_i / a_i^k\}\ , a_i^k > 0 \Rightarrow \theta = \text{Min}\{40/8, 108/6, 96/8\} = \text{Min}\{5, 18, 12\} = 5$

	C_j	100	60	0	0	0	**b_i**	**θ_i**
C_B	X_B	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**		
0	**S_1**	8	2	1	0	0	40	40/8 = 5
0	**S_2**	6	9	0	1	0	108	108/6 = 18
0	**S_3**	8	6	0	0	1	96	96/8 = 12
Z_j		0	0	0	0	0	$Z^* = 0$	
$C_j - Z_j$		100	60	0	0	0		

ومنه فالمتغير الخارج من الأساس هو المتغير (S_1). .

المرحلة الخامسة: تشكيل الجدول الثاني: يتم ملأ الجدول الجديد على مرحلتين:

[1] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, Op-Cit, P: 172.

- الأولى: قسمة جميع القيم الواقعة على سطر الإرتكاز على نقطة الإرتكاز، والقيم الأخرى التي تقع على عمود الارتكاز كلها تساوي الصفر.
- الثانية: حساب القيم المتبقية باستعمال خوارزم غوس جوردن.

$$A_{ij} = a_{ij} - \frac{k_{ij} * h_{ij}}{Pivot}$$

$A_{22} = 9 - \frac{6*2}{8} = 15/2$, $A_{23} = 0 - \frac{6*1}{8} = -3/4$, $A_{24} = 1 - \frac{6*0}{8} = 1$, $A_{25} = 0 - \frac{6*0}{8} = 0$,

$A_{32} = 6 - \frac{8*2}{8} = 4$, $A_{33} = 0 - \frac{8*1}{8} = -1$, $A_{34} = 0 - \frac{8*0}{8} = 0$, $A_{35} = 1 - \frac{8*0}{8} = 1$,

$b_2 = 108 - \frac{6*40}{8} = 78$, $b_3 = 96 - \frac{8*40}{8} = 56$.

	C_j	100	60	0	0	0	b_i
C_B	X_B	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	
100	**X_1**	1	1/4	1/8	0	0	5
0	**S_2**	0	15/2	-3/4	1	0	78
0	**S_3**	0	4	-1	0	1	56
Z_j		100	25	25/2	0	0	$Z^* = 500$
C_j-Z_j		0	35	-25/2	0	0	

الحل المرافق لهذا الجدول هو:

$X_1 = 5, X_2 = 0, S_1 = 0, S_2 = 78, S_3 = 56, Z = 500.$

المرحلة الثانية: نحسب:

$C_k - Z_k = \text{Max}\,(C_j - Z_j), j \notin I_B \Rightarrow C_k - Z_k = \text{Max}\,(35, -25/2) = 35 > 0$

ومنه الحل الممكن الحالي ليس هو الحل الأمثل، ومنه فالمتغير الداخل إلى الأساس هو المتغير (X_2).

	C_j	100	60	0	0	0	b_i
C_B	X_B	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	
100	**X_1**	1	1/4	1/8	0	0	5
0	**S_2**	0	15/2	-3/4	1	0	78
0	**S_3**	0	4	-1	0	1	56
Z_j		100	25	25/2	0	0	$Z^* = 500$
C_j-Z_j		0	35	-25/2	0	0	

المرحلة الثالثة: نختبر (I) بحيث:

$I = \{i/A_i^k > 0\} \Rightarrow I = \{1/4, 15/2, 4\} \Rightarrow I \neq \emptyset \Rightarrow$ نتجه إلى المرحلة الرابعة

المرحلة الرابعة: نحسب النسبة (θ):

$\theta = Min\ \{\theta_i\} = Min\ \{b_i / a_i^k\}\ ,\ a_i^k > 0 \Rightarrow \theta = Min\ \{20, 52/5, 14\} = 52/5$

ومنه فالمتغير الخارج من الأساس هو المتغير (S_2).

	C_j	100	60	0	0	0	b_i	θ_i
C_B	X_B	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
100	X_1	1	1/4	1/8	0	0	5	20
0	S_2	0	15/2	-3/4	1	0	78	52/5
0	S_3	0	4	-1	0	1	56	14
Z_j		100	25	25/2	0	0	$Z^* = 500$	
$C_j - Z_j$		0	35	-25/2	0	0		

المرحلة الخامسة: تشكيل الجدول الثالث

	C_j	100	60	0	0	0	b_i
C_B	X_B	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
100	X_1	1	0	3/20	-1/30	0	12/5
60	X_2	0	1	-1/10	2/15	0	52/5
0	S_3	0	0	-1/5	-8/15	1	72/5
Z_j		100	60	9	14/3	0	$Z^* = 864$
$C_j - Z_j$		0	0	-9	-14/3	0	

والحل المرافق لهذا الجدول هو:

$X_1 = 12/5,\ X_2 = 52/5,\ S_1 = 0,\ S_2 = 0,\ S_3 = 72/5,\ Z = 864.$

المرحلة الثانية: نحسب الفرق:

$C_k - Z_k = Max\ (C_j - Z_j),\ j \notin I_B \Rightarrow C_k - Z_k = Max\ (-9, -14/3) = -9 < 0$

ومنه فالحل الممكن الحالي هو الحل الأمثل:

$\mathbf{X_1^* = 12/5,\ X_2^* = 52/5,\ Z^* = 864}$

تعمل طريقة السيمبلكس بشكل مشابه تماماً للطريقة البيانية في كيفية الوصول إلى الحل الأمثل، حيث تقوم بفحص النقاط القصوى والتي تحد منطقة الحلول الممكنة بشكل متسلسل ومتكرر من نقطة إلى أخرى لحين الوصول إلى الحل الأمثل.

وتعتبر طريقة السيمبلكس لحل مسائل البرمجة الخطية لأكثر من متغيرين من أفضل إنجازات القرن السابق في بحوث العمليات، لإمكانها حل المسائل التي تحتوي على أكثر من متغيرين بل المئات والآلاف منها خصوصاً بالإعتماد على أجهزة الحاسوب.

3.1. تفسير جدول السيمبلكس: من الضروري تعلم طريقة قراءة جدول السيمبلكس وتفسير وتحليل النتائج، فهناك اعتقاد خاطيء بأن جدول الحل الأمثل للسيمبلكس يقدم قيم الحل الأمثل وقيمة دالة الهدف فقط؛ بيد

أنه هناك الكثير من المعلومات الآخرى التي يمكن الحصول عليها من هذا الجدول، وفيما يلي قائمة تلخص المعلومات التي يمكن الحصول عليها كما يلي:

- **قيم متغيرات القرار (الحل الأمثل):** المتغيرات الأساسية التي لا تظهر ضمن عمود متغيرات الحل ستكون بالضرورة مساوية للصفر، أما المتغيرات الباقية فلها قيم موجبة تظهر على عمود الحل (b_i).
- **حالة الموارد:** يمكن معرفة حالة الموارد (نادرة أو وافرة) مباشرة من جدول الحل الأمثل، وذلك من خلال قيم المتغيرات العاطلة (S_i)، فإذا كانت مساوية للصفر فيعتبر المورد الذي أضيف هذا المتغير ضمن قيده نادر الوجود، أما إذا اختلف عن الصفر فيعتبر هذا المورد المقابل له وافر الوجود.
- **أسعار الظل:** يمكن الحصول على قيم أسعار الظل من خلال القيم الواقعة على السطر (C_j-Z_j) والتي تكون تحت متغيرات الفجوة بالقيمة المطلقة.

2. طريقة M–العظمى (Big-M).

لاحظنا فيما سبق أنه إذا كان البرنامج الخطي من الشكل:

$$\text{Max } Z = C^T X$$
$$\text{s/c} \begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

فإنه يمكننا اختيار مصفوفة الأساس **(B)** الأولية الممكنة كما يلي:

$$\mathbf{B} = \begin{array}{|cccccc|} \mathbf{S_1} & \mathbf{S_2} & \mathbf{S_3} & \mathbf{S_4} & \ldots\ldots & \mathbf{S_m} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ \multicolumn{6}{|c|}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \multicolumn{6}{|c|}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 \end{array}$$

والحل الأساسي الممكن الأولى هو المبدأ.

والسؤال المطروح هنا: هل يمكنك كتابة البرنامج الخطي المكتوب على الشكل العام على الشكل المعياري بالنسبة لمصفوفة الأساس **(B)** الممكنة؟

- **إذا كان جوابك بنعم:** شكل الجدول الأولي للسمبلاكس المرافق لمصفوفة الأساس **(B)** الأولية وواصل تطبيق خطوات طريقة السمبلاكس.
- **إذا كان جوابك بلا:** في هذه الحالة نستعمل إحدى الطريقتين: طريقة M–العظمى أو طريقة المرحلتين.

يعتبر اختيار المتغير الداخل إلى الأساس ضمن جداول السيمبلكس هو الانتقال من نقطة قصوى إلى أخرى إنطلاقا من المبدأ وآخذا أقصر طريق للوصول إلى الحل الأمثل.[1]

1.3. المتغيرات الاصطناعية: لاحظنا فيما سبق عندما قمنا بحل برنامج خطي باستخدام خوارزمية السيمبلكس أن جميع القيود من الشكل أقل من أو يساوي، وهذا ما أدي بنا إلى إضافة متغيرات الفجوة من أجل كتابة الشكل القياسي للبرنامج الخطي، لكن الشكل العام للبرامج الخطية لا يكون فيه القيود من الشكل أقل من أو يساوي فقط، بل قد يحتوى على قيود من الشكل أكبر من أو يساوي أو قيود من الشكل مساواة أو مزيج بين الحالات الثلاثة، وسوف نرى فيما يأتي كيفية الحصول على حل أساسي مبدئي للبرامج التي يكون فيها جميع أنواع القيود، ثم استخدام طريقة السيمبلكس لحل مثل هذه البرامج.[2]

بادئ ذي بدء، يجب التذكير بأن الطرف الثاني للقيود يجب ألا يكون سالب، فإذا حصل وكان قيد طرفه الثاني سالب فيجب ضرب طرفي القيد بالعدد (1-) لجعله غير سالب.[3]

عند كتابة أي برنامج خطي عام على الشكل القياسي، فقد يحتوي على قيود مساواة والتي تشمل متغيرات القرار الأصلية فقط، بالإضافة إلى قيود تشمل على متغيرات الفائض أي إشارتها سالبة، هنا يمكن اعتبار متغيرات الفجوة للقيود من الشكل أقل من أو يساوي كمتغيرات أساسية، لكن لا يمكن اعتبار متغيرات الفائض للقيود من الشكل أكبر من أو يساوي كمتغيرات أساسية لكون أن إشارتها سالبة بالإضافة إلى أن القيود من الشكل مساواة لا تحتوي على متغيرات الفجوة من الأساس.[4]

سوف نتعامل مع هذا الوضع من خلال إدخال أو إضافة متغيرات أخرى إضافية تسمى بالمتغيرات الاصطناعية فقط من أجل الحصول على حل ممكن أساسي أولي مبدئي،[5] وهناك من يرمز لها بالرمز (A_i) ولكن الرمز الشايع هو (R_i)، وسوف نرمز لها بهذا الأخير. يجب أن تلعب المتغيرات الاصطناعية دورًا مؤقتًا فقط في الحل.[6]

هذه المتغيرات ليس لها معنى حقيقي في المشكلة التي يتم حلها، ولن تكون جزءًا من الحل النهائي. فهي توفر فقط آلية تسمح لنا بإنشاء تكوين حل أساسي مبدئي، ثم تطبيق خوارزمية السيمبلكس على المشكلة.

---

[1] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, Op-Cit, P: 168.
[2] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 46.
[3] - **Ibid**, P: 46.
[4] - **Ibid**, P: 46.
[5] - **Ibid**, P: 46.
[6] - **Ibid**, P: 47.

2.3. مبدأ طريقة M–كبير (Big-M): في كتابة الشكل المعياري للبرنامج الخطي وإضافة إلى إضافة متغيرات الفجوة يجب إضافة متغيرات أخرى تسمى بالمتغيرات الوهمية أو الاصطناعية[1] ونرمز لها بالرمز (R_i)، وهذا مهما كانت دالة الهدف كما يلي:

- إذا كان القيد من الشكل أقل أو يساوي، فإنه يجب إضافة متغير الفجوة فقط.
- إذا كان القيد من الشكل أكبر أو يساوي، فإنه يجب طرح متغير الفجوة وإضافة المتغير الاصطناعي.
- إذا كان القيد من الشكل مساواة، فيجب إضافة المتغير الاصطناعي فقط.

هناك نهجان أساسيان يمكننا استخدامهما للتأكد من أن المتغيرات الاصطناعية ليست في الحل النهائي، إحداهما تسمى طريقة M–العظمى (Big-M)، يتم تحقيق هذا الهدف من خلال تعديل دالة الهدف بإضافة المتغيرات الاصطناعية لها بمعامل (M)، كالآتي:[2]

تضاف المتغيرات الاصطناعية في دالة الهدف كما يلي:[3]

$$\text{Max } Z = \ldots\ldots - MR_1 - MR_2 - \ldots\ldots$$
$$\text{Min } Z = \ldots\ldots + MR_1 + MR_2 + \ldots\ldots$$

حيث M: يأخذ قيمة موجبة وكبيرة بما فيه الكفاية.[4]

باستعمال المتغيرات الاصطناعية يمكننا كتابة مصفوفة الأساس الأولية (B) الممكنة وبالتالي تشكيل الجدول المرافق لها.

تبقي جميع خطوات إيجاد الحل الأمثل المذكورة في طريقة السيمبلكس كما هي.[5]

والمثال الموالي سوف يعطينا توظيح أكثر حول طريقة M–كبير (Big-M).

مثال (5–2): لدينا البرنامج الخطي الآتي:

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 4X_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} 2X_1 + 3X_2 \geq 8 \\ 5X_1 + 2X_2 \geq 12 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل باستعمال طريقة السمبلكس.

---

[1] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, Op-Cit, P: 115.
[2] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 47.
[3] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, Op-Cit, P: 122.
[4] - **Hamdy A. TAHA**, Op-Cit, P: 112.
[5] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, Op-Cit, P: 115.

كتابة البرنامج على الشكل المعياري بإضافة متغيرات الفجوة (S_i):

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 4X_2 + 0S_1 + 0S_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} 2X_1 + 3X_2 - S_1 = 8 \\ 5X_1 + 2X_2 - S_2 = 12 \\ X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{|cccc|} X_1 & X_2 & S_1 & S_2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \end{array}$$

السؤال: هل يمكن إيجاد المصفوفة **(B)** الأولية المرافقة للجدول الأولى للسيمبلكس؟

الإجابة: لا توجد.

إدن نحل هذا البرنامج باستعمال طريقة M–العظمى.

– كتابة البرنامج على الشكل المعياري بإضافة متغيرات الفجوة والمتغيرات الاصطناعية:

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 4X_2 + 0S_1 + 0S_2 + MR_1 + MR_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} 2X_1 + 3X_2 - S_1 + R_1 = 8 \\ 5X_1 + 2X_2 - S_2 + R_2 = 12 \\ X_1, X_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0 \end{cases}$$

بحيث $(0 < M)$ وكبير جداً بما فيه الكفاية

$$A = \begin{array}{|cccccc} X_1 & X_2 & S_1 & S_2 & R_1 & R_2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}| \rightarrow B = \begin{array}{|cc} R_1 & R_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}|$$

السؤال: هل يمكن إيجاد المصفوفة **(B)** الأولية المرافقة للجدول الأولى للسمبلكس؟

الإجابة: الآن توجد.

في هذه الحالة نلاحظ أنه توجد المصفوفة الحيادية **(B)** وبالتالي يمكن تشكيل الجدول الأولي للسيمبلكس.

	C_j	3	4	0	0	M	M	b_i
C_B	X_B	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**R_1**	**R_2**	
M	**R_1**	2	3	-1	0	1	0	8
M	**R_2**	5	2	0	-1	0	1	12
Z_j		7M	5M	-M	-M	M	M	$Z^* = 20M$
C_j-Z_j		3-7M	4-5M	M	M	0	0	

الحل الممكن الحالي المرافق للجدول الأولي هو:

$X_1 = 0, X_2 = 0, S_1 = 0, S_2 = 0, R_1 = 12, R_2 = 8, Z = 20M$

نختبر هذا الحل، ومنه نحسب الفرق:

$C_k - Z_k = \text{Min}\,(C_j - Z_j),\ j \notin I_B \Rightarrow C_k - Z_k = \text{Min}\,(3\text{-}7M, 4\text{-}5M, M, M) = 3\text{-}7M < 0$

ومنه فالحل الممكن الحالي ليس هو الحل الأمثل، والمتغير الداخل إلى الأساس هو المتغير (X_1).

	C_j	3	4	0	0	M	M	b_i
C_B	X_B	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**R_1**	**R_2**	
M	**R_1**	2	3	-1	0	1	0	8
M	**R_2**	5	2	0	-1	0	1	12
Z_j		7M	5M	-M	-M	M	M	$Z^* = 20M$
C_j-Z_j		3-7M	4-5M	M	M	0	0	

نحسب النسبة (θ):

$\theta = \text{Min}\,\{\theta_i\} = \text{Min}\,\{b_i / a_i^k\},\ a_i^k > 0 \Rightarrow \theta = \text{Min}\,\{8/2, 12/5\} = \text{Min}\,\{4, 12/5\} = 12/5$

ومنه فالمتغير الخارج من الأساس هو المتغير (R_2).

	C_j	3	4	0	0	M	M	b_i	θ_i
C_B	X_B	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**R_1**	**R_2**		
M	**R_1**	2	3	-1	0	1	0	8	4
M	**R_2**	5	2	0	-1	0	1	12	12/5
Z_j		7M	5M	-M	-M	M	M	$Z^* = 20M$	
C_j-Z_j		3-7M	4-5M	M	M	0	0		

تشكيل الجدول الثاني:

	C_j	3	4	0	0	M	M	b_i
C_B	X_B	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**R_1**	**R_2**	
M	**R_1**	0	11/5	-1	2/5	1	-2/5	16/5
3	**X_1**	1	2/5	0	-1/5	0	1/5	12/5
Z_j		3	(11M+6)/5	-M	(2M+3)/5	M		$Z^* = (16M+36)/5$
C_j-Z_j		0	(-11M-2)/5	M	(-2M-3)/5	0		

والحل الممكن الحالي المرافق للجدول هو:

$X_1 = 12/5,\ X_2 = 0,\ S_1 = 0,\ S_2 = 0,\ R_1 = 16/5,\ R_2 = 0,\ Z = (16M+36)/5$

نختبر هذا الحل، نحسب الفرق:

$C_k - Z_k = \text{Min}\,(C_j - Z_j),\ j \notin I_B \Rightarrow C_k - Z_k = \text{Min}\,((-11M-2)/5, M, (-2M-3)/5) = (-11M-2)/5 < 0$

ومنه فالحل الممكن الحالي ليس هو الحل الأمثل؛ والمتغير الداخل إلى الأساس هو المتغير (X_2).

	C_j	3	4	0	0	M	M	b_i	θ_i
C_B	X_B	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**R_1**	**R_2**		
M	**R_1**	0	11/5	-1	2/5	1	-2/5	16/5	16/11
3	**X_1**	1	2/5	0	-1/5	0	1/5	12/5	6
Z_j		3	(11M+6)/5	-M	(2M+3)/5	M		$Z^* = (16M+36)/5$	
C_j-Z_j		0	(-11M-2)/5	M	(-2M-3)/5	0			

<u>ملاحظة:</u> عند خروج أي متغير إصطناعي من الأساس فإننا نقوم بتشطيبه، وذلك من أجل عدم السماح له بالعودة إلى الأساس من جديد.

نحسب النسبة (θ):

$\theta = Min\ \{\theta_i\} = Min\ \{b_i/\ a_i^k\},\ a_i^k > 0 \Rightarrow \theta = Min\ \{16/11,\ 12/2\} = Min\ \{16/11,\ 6\} = 16/11$

ومنه فالمتغير المتغير الخارج من الأساس هو المتغير (R_1).

تشكيل الجدول الثالث:

	C_j	3	4	0	0	M	M	b_i
C_B	X_B	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	
4	X_2	0	1	-11/6	11/2	11/6	-11/2	16/11
3	X_1	1	0	0	-1/5	0	1/5	20/11
Z_j		3	4	-14/11	-1/11			$Z^* = 124/11$
C_j-Z_j		0	0	14/11	1/11			

الحل الممكن الحالي المرافق للجدول هو:

$X_1 = 20/11,\ X_2 = 16/11,\ S_1 = 0,\ S_2 = 0,\ R_1 = 0,\ R_2 = 0,\ Z = 11/124$

نختبر هذا الحل، نحسب الفرق:

$C_k - Z_k = Min\ (C_j - Z_j),\ j \notin I_B \Rightarrow C_k - Z_k = Min\ (11/14,\ 11/1) = 11/1 > 0$

إذن هذا الحل الممكن الحالي هو الحل الأمثل، ومنه:

$X_1^* = 20/11,\ X_2^* = 16/11,\ Z^* = 124/11$

<u>ملاحظات:</u>

- يقوم أسلوب السيمبلكس على مجموعة من الخطوات المتتابعة والمحددة التي تؤذي إلى الوصول إلى الحل الأمثل في حالة وجوده.
- إذا كان البرنامج الخطي يأخذ الشكل العام، فإنه في هذه الحالة نستعمل طريقة M–العظمى أو طريقة المرحلتين.
- في حالة الوصول إلى الجدول النهائي للحل الأمثل مع بقاء أحد المتغيرات الاصطناعية على الأقل داخل الأساس، فإن المشكلة الأصلية ليس لها حل ممكن.[1]
- تعتبر طريقة السيمبلكس خوارزمية فعالة وموثوقة لحل مشاكل البرمجة الخطية، فعلى الرغم من أنها تتضمن تفسير هندسي لطريقة تنفيذها، إلا أنها تعتبر طريقة حسابية، فعند القيام بعملية التكرار أي الانتقال من جدول إلى آخر عن طريق خروج ودخول المتغيرات إلى الأساس، فإننا ننتقل من حل ممكن

[1] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 47.

إلى حل ممكن آخر مجاور وأحسن من الحل الذي سبقه ويتم التوقف عند الوصول إلى الحل الأمثل الذي يعتبر أفضل الحلول الممكنة.

- لوضع الجدول الأولى للسيمبلكس نحتاج إلى المتغيرات الراكدة (الفجوة)، وقد نحتاج إلى متغيرات أخرى تدعى المتغيرات الوهمية أو الاصطناعية، من أجل القدرة على تشكيل الجدول الأولى للسيمبلكس، وبهذا ننتقل من طريقة السيمبلكس البسيط إلى طريقة السيمبلكس M–العظمى (Big-M).
- بمجرد مغادرة المتغير الاصطناعي الأساس لا يمكن السماح له أبداً أن يعود إليه، ومن أجل ذلك يمكن شطب العمود الذي يحتوي على هذا المتغير الاصطناعي من أجل عدم السماح له بالعودة إلى الأساس.[1]
- في حالة القيود من الشكل أكبر من أو يساوي نطرح متغيرات الفجوة من الطرف الأيسر للقيد والتي تسمى في هذه الحالة بمتغيرات الفائض، ولهذا السبب يستعان بمتغيرات أخرى تسمى بالمتغيرات الإصطناعية أو الوهمية تضاف بعد طرح متغيرات الفجوة، كما تضاف في حالة قيد المساواة من أجل الحصول على المصفوفة الحيادية والتي تسمح بالحصول على الحل الأولى الممكن
- هناك طريقتان لحل البرامج الخطية التي تضاف إليها المتغيرات الاصطناعية من أجل كتابة البرنامج على الشكل القياسي وهما طريقة M–كبير وطريقة المرحلتين.

3. حالات خاصة في طريقة السمبلكس.

شاهدنا لحد الآن البرامج الخطية التي لها حل أمثل، لكن هناك بعض البرامج الخطية التي تحتوي على الحل الأمثل، ولذلك سوف نناقش الحالات الأخرى التي يمكن أن نصادفها عند حل أي برنامج خطي باستعمال طريقة السيمبلكس.

1.3. البرنامج الخطي ليس لديه حل: عندما تكون القيود متناقضة فإن هذا البرنامج ليس لديه حل عملي، وهذا يدل على عدم صياغة النموذج بشكل صحيح،[2] وتتضح حالة عدم الوصول إلى الحل من خلال طريقة السيمبلكس عند الوصول إلى الجدول الأخير للحل الأمثل، لكن نلاحظ أن متغيرا اصطناعيا موجود ضمن الأساس،[3] ويتم معرفة هذه الحالة عند عدم خروج أحد المتغيرات الاصطناعية من الأساس، أي نصل إلى

[1] - **P. Rama MURTHY**, Op-Cit, P: 56.
[2] - **Hamdy A. TAHA**, Op-Cit, P: 122.
[3] - **محمد الطراونة، سليمان عبيدات**، مرجع سابق، ص: 142.

الجدول النهائي ويبقى أحد المتغيرات الاصطناعية في الأساس،[1] أي لا يساوي الصفر، فهذا يعني أن هذا البرنامج ليس لديه حل، والمثال الموالي يوضح ذلك.

مثال (5-3): لدينا البرنامج الخطي الآتي:

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} X_1 + 4X_2 \leq 3 \\ 3X_1 + X_2 \geq 12 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل باستعمال طريقة السمبلكس.

كتابة البرنامج على الشكل المعياري بإضافة متغيرات الفجوة (S_i):

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} X_1 + 4X_2 + S_1 = 3 \\ 3X_1 + X_2 - S_2 = 12 \\ X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|cccc|} \mathbf{X_1} & \mathbf{X_2} & \mathbf{S_1} & \mathbf{S_2} \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

السؤال: هل يمكن إيجاد المصفوفة (B) الأولية المرافقة للجدول الأولى للسمبلكس؟

الإجابة: لا توجد.

إدن نحل هذا البرنامج باستعمال طريقة M-العظمى

كتابة البرنامج على الشكل المعياري بإضافة متغيرات الفجوة والمتغيرات الاصطناعية كالآتي:

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 - MR_1 - MR_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} X_1 + 4X_2 + S_1 = 3 \\ 3X_1 + X_2 - S_2 + R_2 = 12 \\ X_1, X_2, S_1, S_2, R_2 \geq 0 \end{cases}$$

حيث: $(0 < M)$، وكبير جداً بما فيه الكفاية

$$A = \begin{array}{|ccccc|} X_1 & X_2 & S_1 & S_2 & R_2 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \rightarrow B = \begin{array}{|cc|} S_1 & R_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$$

السؤال: هل يمكن إيجاد المصفوفة (B) الأولية المرافقة للجدول الأولى للسمبلكس؟

الإجابة: الآن توجد.

[1] - **P. Rama MURTHY**, " Op-Cit, P: 59.

تشكيل الجدول الأولي المرافق للمصفوفة الحيادية (B):

	C_j	4	3	0	0	-M	b_i
C_B	X_B	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**R_2**	
0	**S_1**	1	4	1	0	0	3
-M	**R_2**	3	1	0	-1	1	12
Z_j		-3M	-M	0	M	-M	$Z^* = -12M$
C_j-Z_j		4+3M	3+M	0	-M	0	

الحل الممكن الحالي المرافق للجدول الأولي هو:

$X_1 = 0, X_2 = 0, S_1 = 3, S_2 = 0, R_2 = 12, Z = -12M$

من أجل اختبار هذا الحل، نحسب الفرق:

$C_k - Z_k = Max\ (C_j - Z_j), j \notin I_B \Rightarrow C_k - Z_k = Max\ (4+3M, 3+M, -M) = 4+3M > 0$

ومنع فالحل الممكن الحالي ليس هو الحل الأمثل؛ والمتغير الداخل إلى الأساس هو المتغير (X_1).

نحسب النسبة (θ):

$\theta = Min\ \{\theta_i\} = Min\ \{b_i / a_i^k\}\ , a_i^k > 0 \Rightarrow \theta = Min\ \{3/1, 12/3\} = Min\ \{3, 4\} = 3$

ومنه فالمتغير المتغير الخارج من الأساس هو المتغير (S_1).

	C_j	4	3	0	0	-M	**b_i**	**θ_i**
C_B	X_B	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**R_2**		
0	**S_1**	1	4	1	0	0	3	3
-M	**R_2**	3	1	0	-1	1	12	4
Z_j		-3M	-M	0	M	-M	$Z^* = -12M$	
C_j-Z_j		4+3M	3+M	0	-M	0		

تشكيل الجدول الثاني:

	C_j	4	3	0	0	-M	b_i
C_B	X_B	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**R_2**	
4	**X_1**	1	4	1	0	0	3
-M	**R_2**	0	-11	3	-1	1	3
Z_j		4	16+11M	4-3M	M	-M	$Z^* = 12-3M$
C_j-Z_j		0	-11-11M	-4-3M	-M	0	

الحل الممكن الحالي المرافق للجدول هو:

$X_1 = 3, X_2 = 0, S_1 = 0, S_2 = 0, R_2 = 3, Z = 12-3M$

نختبر هذا الحل، ومنه نحسب الفرق:

$C_k - Z_k = Max\ (C_j - Z_j), j \notin I_B \Rightarrow C_k - Z_k = Max\ (-11-11M, -4-3M, -M) = -M < 0$

نلاحظ أن هذا هو الجدول النهائي لأن ($C_k - Z_k < 0$)، ونلاحظ كذلك عدم خروج المتغير الاصطناعي (R_2) من الأساس، وهذا يعني أن هذا البرنامج ليس لديه حل.

فتحدث حالة عدم وجود حل لبرنامج خطي عندما لا نجد حلا مرضياً لجميع القيود، ويمكن معرفة هذه الحالة بمجرد النظر إلى جدول الحل النهائي، حيث تم الوصول إلى الجدول النهائي مع بقاء متغير إصطناعي داخل الأساس، فهنا نستنتج أنه لا يوجد حل لهذا البرنامج، ومن أساب ذلك عدم صياغة البرنامج الخطي المعبر عن المشكلة المدروسة بشكل صحيح.[1]

2.3. حالة حلول غير محدودة (Unbounded Solution): وتسمى كذلك بحالة لا نهائية الحل في هذه الحالة لا يوجد حل أمثل (No Optimal Solution)، أي أن البرنامج لديه عدد غير منته من الحلول، ونتحصل على هذه الحالة عندما تكون منطقة الحلول الممكنة غير محدودة، مما يؤذي إلى زيادة قيمة دالة الهدف بدون حد، ويمكن التعرف على هذه الحالة ضمن جداول السيمبلكس لما تكون القيم الواقعة على عمود الارتكاز، أي عمود المتغير الداخل إلى الأساس كلها سالبة أو معدومة، فلا يمكن تحديد المتغير الخارج من الأساس، وبالتالي فيمكن الحكم من خلال هذه المعلومة على أن منطقة الحلول الممكنة غير محدودة في اتجاه هذا المتغير.[2]

كما نجد في هذه الحالة وفي إحدى جداول السمبلكس نجد المتغير الداخل إلى الأساس وبالمقابل لا يوجد المتغير الخارج من الأساس، وهي الحالة التي تكون فيها جميع عناصر عمود الإرتكاز سالبة أو معدومة ولا يمكن حساب النسبة (θ)، وبالتالي يستحيل اختيار المتغير الخارج من الأساس.[3] وفي هذه الحالة نقول أن البرنامج الخطي لدية عدد غير منتهى من الحلول أو حلول غير منتهية.

بالإضافة إلى ذلك، فإذا كان هذا المتغير مرشح للدخول إلى الأساس فهذا يعني أنه سوف يرفع من قيمة دالة الهدف، وبما أن قيمة هذا المتغير يمكن رفعها إلى مالانهاية (∞)، فكذلك يمكن رفع قيمة دالة الهدف إلى مالانهاية (∞)، وبالتالي تنتهي خوارزمية السيمبلكس ويمكن الإدراك بأن هذه المشكلة لها حل غير محدود.[4]

وإدراكًا لمثل هذا الموقف، يجب إعادة صياغة المشكلة مع إيلاء اهتمام أكثر للقيود الواقعية على متغيرات القرار.[5]

---

[1] - **صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد**، مرجع سابق، ص: 184.

[2] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 51.

[3] - **محمد راتول**، "بحوث العمليات"، الطبعة الرابعة، ديوان المطبوعات الجامعية، بن عكنون، الجزائر، 2011، ص: 78.

[4] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 52.

[5] - **Ibid**, P: 53.

في بعض الحالات تكون منطقة الحلول الممكنة غير محدودة أي مفتوحة من إحدى الجوانب، مما يعني أنه يمكن زيادة قيمة المتغيرات إلى مالانهاية مع عدم الاخلال بالقيود، وبالتالي فإن قيمة دالة الهدف في هذه الحالة تصبح غير محدودة (∞)، وهذا قد يوحي بأن هذا النموذج مبني بشكل سيء، والاحتمال الأكثر في هذه الحالة هو إغفال بعض القيود الرئيسة والاحتمال الآخر هو عدم دقة تقدير المعلمات.[1]

مثال (5-4): لدينا البرنامج الخطي الآتي:

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} X_1 - 6X_2 \leq 5 \\ 3X_1 \leq 11 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل باستعمال طريقة السمبلكس.

كتابة البرنامج على الشكل المعياري بإضافة متغيرات الفجوة (S_i):

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} X_1 - 6X_2 + S_1 = 5 \\ 3X_1 + S_2 = 12 \\ X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{|cccc|} X_1 & X_2 & S_1 & S_2 \\ \hline 1 & -6 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow B = \begin{array}{|cc|} S_1 & S_2 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$$

تشكيل الجدول الأولي المرافق للمصفوفة الحيادية (B):

	C_j	4	3	0	0	b_i
C_B	X_B	X_1	X_2	S_1	S_2	
0	S_1	1	-6	1	0	5
0	S_2	3	0	0	1	12
Z_j		0	0	0	0	$Z^* = 0$
$C_j - Z_j$		4	3	0	0	

الحل الممكن الحالي المرافق للجدول الأولي هو:

$$X_1 = 0, X_2 = 0, S_1 = 5, S_2 = 11, Z = 0$$

نختبر هذا الحل، نحسب الفرق:

$$C_k - Z_k = \text{Max } (C_j - Z_j),\ j \notin I_B \Rightarrow C_k - Z_k = \text{Max } (4, 3) = 4 > 0$$

الحل الممكن الحالي ليس هو الحل الأمثل، ومنه فالمتغير الداخل إلى الأساس هو المتغير (X_1).

نحسب النسبة (θ):

$$\theta = \text{Min } \{\theta_i\} = \text{Min } \{b_i / a_i^k\},\ a_i^k > 0 \Rightarrow \theta = \text{Min}\{5/1, 11/3\} = \text{Min } \{5, 11/3\} = 11/3$$

[1] - **Hamdy A. TAHA**, Op-Cit, P: 121.

ومنه فالمتغير الخارج من الأساس هو المتغير (S_2).

	C_j	4	3	0	0	b_i	θ_i
C_B	X_B	X_1	X_2	S_1	S_2		
0	S_1	1	-6	1	0	5	5
0	S_2	3	0	0	1	12	3/11
Z_j		0	0	0	0	$Z^* = 0$	
C_j-Z_j		4	3	0	0		

تشكيل الجدول الثاني:

	C_j	4	3	0	0	b_i
C_B	X_B	X_1	X_2	S_1	S_2	
0	S_1	0	-6	1	-1/3	4/3
0	X_1	1	0	0	1/3	11/3
Z_j		4	0	0	4/3	$Z^* = 44/3$
C_j-Z_j		0	3	0	-4/3	

الحل الممكن الحالي المرافق للجدول هو:

$X_1 = 11/3, X_2 = 0, S_1 = 4/3, S_2 = 0, Z = 44/3$

نحسب الفرق:

$C_k - Z_k = \text{Max}\,(C_j - Z_j), j \notin I_B \Rightarrow C_k - Z_k = \text{Max}\,(3, -4/3) = 3 > 0$

الحل الممكن الحالي ليس هو الحل الأمثل، والمتغير الداخل إلى الأساس هو هو المتغير (X_2).

نحسب النسبة (θ):

$\theta = \text{Min}\,\{\theta_i\} = \text{Min}\,\{b_i / a_i^k\}, a_i^k > 0 \Rightarrow \theta = \text{Min}\{-, -\} = \emptyset$

	C_j	4	3	0	0	b_i	θ_i
C_B	X_B	X_1	X_2	S_1	S_2		
0	S_1	0	-6	1	-1/3	4/3	-
0	X_1	1	0	0	1/3	11/3	-
Z_j		4	0	0	4/3	$Z^* = 44/3$	
C_j-Z_j		0	3	0	-4/3		

نلاحظ القيمة الأولى سالبة (-6) والقيمة الثانية معدومة (0) وبالتالي لا يوجد المتغير الداخل إلى الأساس، وبالتالي فهذا البرنامج لديه عدد غير منتهى من الحلول، ومنه فهو ليس لديه حل عملي.

إذا حدث وواجهنا مثل هذه الحالة في الحياة العملية، فهذا يعني أن مشكلة البرمجة الخطية موضوع الدراسة قد صيغت بطريقة غير مناسبة، وذلك أنه من المستحيل زيادة الأرباح عملياً بشكل غير محدود؛

ويمكن اكتشاف هذه الحالة عدم ايجاذ أي متغير خارج من الأساس ضمن إحدى جداول السيمبلكس المرحلية.[1]

3.3. البرنامج لديه حلول متعددة منتهية (Multiple Optimal Solutions): تحدث هذه الحالة بيانياً عندما يكون المستقيم الممثل لدالة الهدف موازياً لإحدى مستقيمات القيود المحيطة بمنطقة الحلول الممكنة، عندئذ جميع النقاط الواقعة على تلك القطعة المستقيمة تعطي نفس القيمة الأفضل لدالة الهدف، وبالتالي بدلاً من إعتبار الحل الأمثل وحيد، نجد حلول مثلى متعددة لكن عددها محدود يمكن الاختيار من بينها بما يساعد إدارة المؤسسة على الاختيار بالاعتماد على العوامل الثانوية التي لا تظهر في النموذج.[2]

ويمكن التعرف على هذه الحالة من خلال جداول السيمبلكس، إذا وصلنا إلى جدول مرحلي وكانت جميع القيم $(C_j - Z_j)$ تساوي الصفر، وهذا ما يدل على أن لهذا البرنامج أكثر من حل أمثل،[3] في هذه الحالة، فالمتغير خارج الأساس الذي سوف يدخل إلى الأساس لن يغير من قيمة دالة الهدف، بمعني هناك نقطتنان قصوتان متجاورتان مختلفتان وتعطيان نفس قيمة دالة الهدف الأفضل، فهنا نعرف أن جميع النقاط التي تقع على استقامة واحدة بين هذه النقطتين تعطي نفس قيمة دالة الهدف.[4] وفي هذه الحالة نقول أن البرنامج الخطي لدية عدد غير منتهى من الحلول أو حلول غير منتهية، والمثال الموالي يوضح ذلك.

مثال (5-5): لدينا البرنامج الخطي الآتي:

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} 8X_1 + 6X_2 \leq 25 \\ 3X_1 + 4X_2 \leq 15 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل باستعمال طريقة السمبلكس.

كتابة البرنامج على الشكل المعياري بإضافة متغيرات الفجوة (S_i):

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} 8X_1 + 6X_2 + S_1 = 25 \\ 3X_1 + 4X_2 + S_2 = 15 \\ X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} X_1 & X_2 & S_1 & S_2 \end{matrix} \\ \left| \begin{matrix} 8 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{matrix} \right| \end{array} \rightarrow B = \begin{array}{c} \begin{matrix} S_1 & S_2 \end{matrix} \\ \left| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right| \end{array}$$

[1] - **محمد الطراونة، سليمان عبيدات**، مرجع سابق، ص: 143.

[2] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 51.

[3] - **صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد**، مرجع سابق، ص: 18.

[4] - **P. Rama MURTHY**, Op-Cit, P: 59.

تشكيل الجدول الأولي المرافق للمصفوفة الحيادية (B):

	C_j	4	3	0	0	b_i
C_B	X_B	X_1	X_2	S_1	S_2	
0	S_1	8	6	1	0	25
0	S_2	3	4	0	1	15
Z_j		0	0	0	0	$Z^* = 0$
C_j-Z_j		4	3	0	0	

الحل الممكن الحالي المرافق للجدول الأولي هو:

$X_1 = 0, X_2 = 0, S_1 = 25, S_2 = 15, Z = 0$

نحسب الفرق:

$C_k - Z_k = \text{Max}\,(C_j - Z_j), j \notin I_B \Rightarrow C_k - Z_k = \text{Max}\,(4, 3) = 4 > 0$

ومنه فالحل الممكن الحالي ليس هو الحل الأمثل، والمتغير الداخل إلى الأساس هو المتغير (X_1).

نحسب النسبة (θ):

$\theta = \text{Min}\,\{\theta_i\} = \text{Min}\,\{b_i/ a_i^k\}, a_i^k > 0 \Rightarrow \theta = \text{Min}\,\{25/8, 15/3\} = \text{Min}\,\{25/8, 5\} = 25/8$

ومنه فالمتغير الخارج من الأساس هو المتغير (S_1).

	C_j	4	3	0	0	b_i	θ_i
C_B	X_B	X_1	X_2	S_1	S_2		
0	S_1	8	6	1	0	25	25/8
0	S_2	3	4	0	1	15	5
Z_j		0	0	0	0	$Z^* = 0$	
C_j-Z_j		4	3	0	0		

تشكيل الجدول الثاني:

	C_j	4	3	0	0	b_i
C_B	X_B	X_1	X_2	S_1	S_2	
4	X_1	1	3/4	1/8	0	25/8
0	S_2	0	7/4	3/8	1	45/8
Z_j		4	3	1/2	0	$Z^* = 25/2$
C_j-Z_j		0	0	-1/2	0	

الحل الممكن الحالي المرافق للجدول الأولي هو:

$X_1 = 25/8, X_2 = 0, S_1 = 0, S_2 = 45/8, Z = 25/2$

نختبر هذا الحل ونحسب الفرق:

$C_k - Z_k = \text{Max}\,(C_j - Z_j), j \notin I_B \rightarrow C_k - Z_k = \text{Max}\,(0, -1/2) = 0 \geq 0$

نلاحظ أن $(C_k - Z_k = 0)$، فهذا يدل على أن هذا البرنامج لديه حلول مثلى متعددة ومنتهية، والحل المرافق لهذا الجدول هو أحد هذه الحلول، ويمكننا المتابعة للحصول على حل آخر؛ والمتغير الداخل إلى الأساس هو المتغير (X_2).

نحسب النسبة (θ):

$\theta = \text{Min}\ \{\theta_i\} = \text{Min}\ \{b_i / a_i^k\},\ a_i^k > 0 \Rightarrow \theta = \text{Min}\{25/6, 45/14\} = 45/14$

ومنه فالمتغير الخارج من الأساس هو المتغير (S_2).

	C_j	4	3	0	0	b_i	θ_i
C_B	X_B	X_1	X_2	S_1	S_2		
4	X_1	1	3/4	1/8	0	25/8	25/8
0	S_2	0	7/4	3/8	1	45/8	45/8
Z_j		4	3	1/2	0	$Z^* = 25/2$	
$C_j - Z_j$		0	0	-1/2	0		

تشكيل الجدول الآتي والذي يعطينا نفس قيمة دالة الهدف:

	C_j	4	3	0	0	b_i
C_B	X_B	X_1	X_2	S_1	S_2	
4	X_1	1	0	2/7	-3/7	5/7
3	X_2	0	1	-3/14	4/7	45/14
Z_j		4	3	1/2	0	$Z^* = 25/2$
$C_j - Z_j$		0	0	-1/2	0	

الحل الممكن الحالي المرافق للجدول هو:

$X_1 = 5/7,\ X_2 = 45/14,\ S_1 = 0,\ S_2 = 0,\ Z = 25/2$

نختبر هذا الحل ونحسب الفرق:

$C_k - Z_k = \text{Max}\ (C_j - Z_j),\ j \notin I_B \Rightarrow C_k - Z_k = \text{Max}\ (-1/2, 0) = 0 \geq 0$

نلاحظ أن $(C_k - Z_k = 0)$ كذلك لهذا الحل، وهذا يدل على أن هذا البرنامج لديه حلول مثلى متعددة منتهية، والحل المرافق لهذا الجدول هو أحد هذه الحلول؛ إذن كما قلنا سابقاً فهذا البرنامج لديه حلول متعددة منتهية وإحدى هذه الحلول هما الحلين السابقين:

الحل الأول:

$\mathbf{X_1^* = 25/8,\ X_2^* = 0,\ Z^* = 2/25}$

الحل الثاني:

$\mathbf{X_1^* = 5/7,\ X_2^* = 45/14,\ Z^* = 2/25}$

يمكن التعرف على هذه الحالة من خلال قيم السطر (C_j-Z_j) للجدول النهائي للحل الأمثل التي ستكون مساوية للصفر لمتغير أو أكثر من المتغيرات خارج الأساس.[1]

4.3. حالة دخول أو خروج متغيرين متساوية: في حالة اختيار دخول المتغيرات المرشحة للدخول إلى الأساس، فإن يكون الفرق $(C_k - Z_k)$ متساوي بالنسبة لمتغيرين مرشحين للدخول إلى الأساس، وبالتالي فالاختيار يكون عشوائي، لأننا نعلم مسبقاً أن المتغير المرشح للدخول إلى الأساس في الجدول الموالي سيكون المتغير الذي يحمل نفس القيمة للفرق $(C_k - Z_k)$.[2]

وفي حالة خروج المتغيرات من الأساس، تكون النسبة $(\text{Min}\{b_i/ a_i^k\})$ متساوية بالنسبة للمتغيرين المرشحين للخروج، فالاختيار كذلك يكون عشوائي بالنسبة للمتغير الخارج،[3] لأننا نعلم أن المتغير الذي سوف يخرج من الأساس في الجدول الموالي هو المتغير الذي يحمل نفس النسبة $(\text{Min}\{b_i/ a_i^k\})$، أي المتغير الذي لم يتم اختياره سابقاً.[4] وهذه الحالة تشير إلى أن صياغة البرمجة الخطية تحتوي على قيد واحد زائد على الأقل.[5]

مثال (5-6): لدينا البرنامج الخطي الآتي:

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} 2X_1 + 3X_2 \leq 8 \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 12 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل باستعمال طريقة السمبلكس.

كتابة البرنامج على الشكل المعياري بإضافة متغيرات الفجوة (S_i):

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} 2X_1 + 3X_2 + S_1 = 8 \\ 3X_1 + 2X_2 + S_2 = 12 \\ X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} X_1 & X_2 & S_1 & S_2 \end{matrix} \\ \left| \begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{matrix} \right| \end{array} \rightarrow B = \begin{array}{c} \begin{matrix} S_1 & S_2 \end{matrix} \\ \left| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right| \end{array}$$

[1] - **محمد الطراونة، سليمان عبيدات**، مرجع سابق، ص: 146.

[2] - **Hamdy A. TAHA**, Op-Cit, P: 122.

[3] - **P. Rama MURTHY**, Op-Cit, P: 58.

[4] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 53.

[5] - **Ibid**, P: 53.

تشكيل الجدول الأولي المرافق للمصفوفة الحيادية (B):

	C_j	4	3	0	0	b_i
C_B	X_B	X_1	X_2	S_1	S_2	
0	S_1	2	3	1	0	8
0	S_2	3	2	0	1	12
Z_j		0	0	0	0	$Z^* = 0$
$C_j - Z_j$		4	3	0	0	

الحل الممكن الحالي المرافق للجدول الأولي هو:

$X_1 = 0, X_2 = 0, S_1 = 8, S_2 = 12, Z = 0$

نختبر هذا الحل، ومنه نحسب الفرق:

$C_k - Z_k = \text{Max}\,(C_j - Z_j),\ j \notin I_B \Rightarrow C_k - Z_k = \text{Max}\,(4, 3) = 4 > 0$

ومنه، فالحل الممكن الحالي ليس هو الحل الأمثل؛ والمتغير الداخل إلى الأساس هو المتغير (X_1).

نحسب النسبة (θ):

$\theta = \text{Min}\,\{\theta_i\} = \text{Min}\,\{b_i / a_i^k\}\ ,\ a_i^k > 0 \Rightarrow \theta = \text{Min}\{8/2, 12/3\} = \text{Min}\,\{4, 4\} = 4$

نلاحظ أن للمتغيرين المرشحين للخروج من الأساس لهما نفس قيمة النسبة (θ_i) وبالتالي يكون الاختيار عشوائي؛ والمتغير الذي سوف نختاره ليكون المتغير الخارج من الأساس هو المتغير (S_2).

تبرز مشكلة الإنحلال (التفسخ) عند حساب النسبة (θ) من أجل اختيار المتغير الخارج من الأساس، فتكون قيمتها متساوية بالنسبة لمتغيرين مرشحين للخروج من الأساس، فهذا يعني أن هناك دورانية في الحل، وهذا يدل أن قيمة إحدى المتغيرات الأساسية ضمن الجدول النهائي للحل الأمثل تساوي صفر، الذي بدوره لا يمثل مشكلة.[1]

<u>ملاحظة:</u> نعلم مسبقاً أنه ضمن الجدول الموالي سوف يكون المتغير الخارج من الأساس هو (S_1).

	C_j	4	3	0	0	b_i	Θ
C_B	X_B	X_1	X_2	S_1	S_2		
0	S_1	2	3	1	0	8	4
0	S_2	3	2	0	1	12	4
Z_j		0	0	0	0	$Z^* = 0$	
$C_j - Z_j$		4	3	0	0		

[1] - **محمد الطراونة، سليمان عبيدات**، مرجع سابق، ص: 145.

تشكيل الجدول الثاني:

	C_j	4	3	0	0	b_i
C_B	X_B	X_1	X_2	S_1	S_2	
0	S_1	0	5/3	1	2/3	0
4	X_1	1	2/3	0	1/3	4
Z_j		4	8/3	0	4/3	$Z^* = 16$
C_j-Z_j		0	1/3	0	-4/3	

الحل الممكن الحالي المرافق للجدول هو:

$X_1 = 4, X_2 = 0, S_1 = 0, S_2 = 0, Z = 16$

نختبر هذا الحل، ومنه نحسب الفرق:

$C_k - Z_k = \text{Max}\,(C_j - Z_j), j \notin I_B \Rightarrow C_k - Z_k = \text{Max}\,(1/3, -4/3) = 1/3 > 0$

ومنه فالحل الممكن الحالي ليس هو الحل الأمثل، والمتغير الداخل إلى الأساس هو المتغير (X_2).

نحسب النسبة (θ):

$\theta = \text{Min}\,\{\theta_i\} = \text{Min}\,\{b_i/ a_i^k\}, a_i^k > 0 \Rightarrow \theta = \text{Min}\,\{0, 6\} = 0$

ومنه فالمتغير الخارج من الأساس هو المتغير (S_1).

	C_j	4	3	0	0	b_i	Θ
C_B	X_B	X_1	X_2	S_1	S_2		
0	S_1	0	5/3	1	2/3	0	0
4	X_1	1	2/3	0	1/3	4	6
Z_j		4	8/3	0	4/3	$Z^* = 16$	
C_j-Z_j		0	1/3	0	-4/3		

تشكيل الجدول الثالث:

	C_j	4	3	0	0	b_i
C_B	X_B	X_1	X_2	S_1	S_2	
3	X_2	0	1	3/5	-2/5	0
4	X_1	1	0	-2/5	3/5	4
Z_j		4	3	1/5	6/5	$Z^* = 16$
C_j-Z_j		0	0	-1/5	-6/5	

الحل الممكن الحالي المرافق للجدول هو:

$X_1 = 4, X_2 = 0, S_1 = 0, S_2 = 0, Z = 16$

نختبر هذا الحل، ومنه نحسب الفرق:

$C_k - Z_k = \text{Max}\,(C_j - Z_j), j \notin I_B \Rightarrow C_k - Z_k = \text{Max}\,(-1/5, -6/5) = -1/5 < 0$

ومنه نستنتج أن هذا الحل الممكن الحالي هو الحل الأمثل:

$$X_1^* = 4, X_2^* = 0, Z^* = 16$$

نكون أمام حالة الإنحلال عندما نجد متغيرين على الأقل مرشحين للدخول إلى الأساس (نفس قيمة الفرق C_j-Z_j) أو متغيرين على الأقل مرشحين للخروج من الأساس (نفس قيمة النسبة)؛ في هاتين الحالتين يكون الاختيار عشوائي بسبب عدم وجود معيار محدد.[1]

لقد استطاع العالم دانتزينغ وضع أسس طريقة السيمبلكس (Simplex Method) سنة 1948، إلا أن هذه الطريقة طرأت عليها تعديلات كثيرة وتطورت لتلائم جميع الحالات الممكنة للنماذج الخطية التي رافقت التطورات الاقتصادية والصناعية والإدارية؛ وتتلخص هذه الطريقة في تحويل البرنامج الخطي إلى جدول (على شكل مصفوفة) يعالج بأسلوب معين ضمن خطوات متسلسلة بعدد من التكررات للوصول إلى الحل الأمثل، هذا إن وجد، مبتدئين بحل أساسي أولى ممكن.

فتعتبر طريقة السيمبلكس من الطرق الأكثر كفاءة وفعالية والأكثر استخداماً في حل مسائل البرامج الخطية بصورة عامة، حيث يمكن استخدامها مهما كان عدد المتغيرات والقيود.[2]

لا تعتبر جداول السيمبلكس وسيلة ملائمة للحفاظ على نظام المعادلات أثناء تكرار الخوارزمية فقط، بل تحتوي كذلك على ثروة من المعلومات حول مشكلة البرمجة الخطية التي يتم حلها، حيث يمكن اكتشاف العديد منها فيما يأتي من خلال نظرية الثنائية وتحليل الحساسية انطلاقاً من الجدول النهائي للحل الأمثل.

[1] - **جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري**، "بحوث العمليات والأساليب الكمية: نظرية وتطبيق"، الطبعة الأولى، دار جليس الزمان، عمان، الأردن، 2009، ص: 94/93.

[2] - **سهيلة عبد الله سعيد**، "الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات"، الطبعة الأولى، دار الحامد، الأردن، 2007، ص: 53.

الفصل السادس: الثنائية (البرنامج الثنائي)

Duality

تمهيد:

تدرس النظرية الاقتصادية الندرة النسبية للموارد المحدودة والتي لها قيمة، فعلى سبيل المثال فالأرض المخصصة والصالحة للزراعة تكون محدودة، فمشكلة تخصيص الموارد المحدودة وتقييم الموارد البديلة تبرز مشكلة الثنائية، أي علاقة المشكلة الثنائية بالمشكلة الأصلية؛ فتعتبر الثنائية طريقة بديلة لحل مشاكل البرمجة الخطية.

فلكل مشكلة للبرمجة الخطية مشكلة أخرى مرتبطة بها ومرافقة لها، فالمشكلة الأولية تدعى بالمشكلة الأصلية ونموذجها يدعى بالنموذج الأولي (Primal Model) والمشكلة المرافقة لها تدعى بالمشكلة المقابلة ونموذجها يدعى بالنموذج الثنائي (Dual Model)، هناك ترابط بين هذين النموذجين، فإذا تم التوصل إلى حل إحدى البرنامجين يمكن استنتاج حل البرنامج الآخر، فلكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية هناك نموذج مقابل مشتق منه، فإذا كان النموذج الأولى يتعلق بحالة التعظيم لدالة الهدف، فإن النموذج المقابل له يسكون في حالة التدنية والعكس صحيح.

وتعتبر الثنائية أو الإزدواجية أحد أهم الاكتشافات التي ساهمت في التطور المبكر للبرمجة الخطية، حيث كشفت نظرية الثنائية أن كل برنامج خطي يرافقه برنامج خطي آخر يدعي بالبرنامج الثنائي أو البرنامج المرافق، فثبتت أن العلاقة بين البرنامج الأصلي والبرنامج الثنائي مفيدة للغاية بطرق متنوعة، فعلى سبيل المثال أسعار الظل التي تتمثل في متغيرات البرنامج الثنائي، حيث سوف نتطرق في هذا الفصل إلى نظرية الثنائية وخصائصها.

1. جوهر نظرية الثنائية.

ليكن لدينا البرنامج الخطي المكتوب على الشكل النموذجي في حالة التعظيم والذي يحتوي على (n) متغير و(m) قيد، فإنه يمكننا إرفاق لهذا الأخير برنامج خطي آخر يسمى بالبرنامج الثنائي (المرافق) والذي يحتوي على (m) متغير و(n) قيد، ومعرف رياضياً كما هو موضح في الجدول الآتي:[1]

البرنامج الثنائي	البرنامج الأصلي
$\text{Min } W = b_1Y_1 + b_2Y_2 + b_3Y_3 + ... + b_mY_m$ $a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + a_{31}Y_3 + ... + a_{m1}Y_m \geq C_1$ $a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 + a_{23}Y_3 + ... + a_{m2}Y_m \geq C_2$ $a_{31}Y_1 + a_{32}Y_2 + a_{33}Y_3 + ... + a_{m3}Y_m \geq C_3$ ……... ……... $a_{1n}Y_1 + a_{2n}Y_2 + a_{3n}Y_3 + ... + a_{mn}Y_n \geq C_n$ $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, Y_m \geq 0$	$\text{Max } Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + ... + C_nX_n$ $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ... + a_{1n}X_n \leq b_1$ $a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + ... + a_{2n}X_n \leq b_2$ $a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + ... + a_{3n}X_n \leq b_3$ …… …… $a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + ... + a_{mn}X_n \leq b_m$ $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, X_n \geq 0$

ويمكن كتابة كلا البرنامجين على الشكل المصفوفي كالآتي:[2]

البرنامج الثنائي	البرنامج الأصلي
$\text{Min } W = b^TY$ $A^TY \geq C$ $Y \geq 0$	$\text{Max } Z = C^TX$ $AX \leq b$ $X \geq 0$

نلاحظ أنه إذا كان البرنامج الأصلي في حالة التعظيم فإن البرنامج الثنائي في حالة التقليل والعكس، علاوة على ذلك فإن معالم البرنامج المرافق هي نفسها معالم البرنامج الأصلي لكنها في مواقع مختلفة.[3] ومن الواضح كذلك أن البرنامج الثنائي لبرنامج ثنائي هو البرنامج الأصلي، أي المشكلة الثنائية للمشكلة الثنائية هي المشكلة الأصلية، فكل برنامج هو البرنامج الثنائي للبرنامج الآخر.[4] لكل مشكلة أولية لها مشكلة ثنائية مرافقة، وأن مرافق المشكلة الثنائية هي المشكلة الأولية الأساسية.[5]

[1] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 57.
[2] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, Op-Cit, P: 197.
[3] - **Ibid**, P: 197.
[4] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 57.
[5] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, Op-Cit, P: 204.

ويرتبط البرنامج الثنائي بالبرنامج الأصلي ارتباطاً وثيقاً، بمعنى أن الحل الأمثل لمشكلة ما يوفر الحل الأمثل للمشكلة الأخرى، فقد يكون من المفيد حسابياً في بعض الحالات تحديد الحل الأمثل للبرنامج الأصلي عن طريق حل البرنامج الثنائي، لكن هذه الميزة ثانوية مقارنة بما تقدمه نظرية الثنائية.[1]

فيما يلي ملخص لكيفية بناء البرنامج الثنائي انطلاقاً من البرنامج الأصلي:[2]

- كل متغير ضمن البرنامج الثنائي يقابله قيد ضمن البرنامج الأصلي، وكل قيد ضمن البرنامج الثنائي يقابله متغير ضمن البرنامج الأصلي، أي عدد متغيرات البرنامج الثنائي تساوي عدد قيود البرنامج الأصلي، وعدد قيود البرنامج الثنائي يساوي عدد متغيرات البرنامج الأصلي.
- معاملات الطرف الثاني للقيود للبرنامج الأصلي تصبح معاملات دالة الهدف للبرنامج الثنائي، ومعاملات دالة الهدف للبرنامج الأصلي تصبح معاملات الطرف الثاني للقيود ضمن البرنامج الثنائي.
- يتم إنشاء قيد البرنامج الثنائي عن طريق تحويل عمود المتغير للبرنامج الأصلي إلى سطر، ويصبح معامل دالة الهدف لمتغير البرنامج الأصلي الطرف الأيمن للقيد للبرنامج الثنائي.

إن اللجوء إلى النموذج الثنائي يتضمن فوائد متعددة منها سهولة وسرعة التوصل إلى الحل الأمثل لمشاكل البرمجة الخطية عندما يصعب حل النموذج الأولي، لذلك سوف يتم التطرق إلى قواعد تحويل النموذج الأولى إلى النموذج الثنائي والعكس.

واعتماداً على هذه النظرية، فإن كل برنامج خطي مهما كانت طبيعة دالة الهدف تعظيم (Max) أو تقليل (Min) وهما كان شكل القيود ($\leq$) أو ($\geq$) أو (=) وإشارة المتغيرات ($0 \geq$) أو ($0 \leq$) أو (غ م إ)، فله برنامج مرافق؛ وبالتالي لكل برنامج خطي هذه المواصفات يمكننا كتابة البرنامج المرافق بالاعتماد على الجدول الموالي:[3]

[1] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, Op-Cit, P: 169.
[2] - **Ibid**, P: 169/170.
[3] - **P. Rama MURTHY**, Op-Cit, P: 109.

كيفية كتابة البرنامج الثنائي

البرنامج الأصلي (Max)	<----------	**البرنامج الثنائي (Min)**
القيد أصغر أو يساوي	----------	المتغير أكبر أو يساوي الصفر
القيد أكبر أو يساوي	----------	المتغير أصغر أو يساوي الصفر
القيد مساواة	----------	المتغير غير محدد الإشارة
المتغير أكبر أو يساوي الصفر	----------	القيد أكبر أو يساوي
المتغير أصغر أو يساوي الصفر	----------	القيد أصغر أو يساوي
المتغير غير محدد الإشارة	----------	القيد مساواة
البرنامج الثنائي (Max)	---------->	**البرنامج الأصلي (Min)**

نلاحظ من خلال الجدول أنه توجد تسمية للبرنامج الأصلي أو الثنائي، فإذا كان البرنامج الأصلي في حالة التعظيم فإن البرنامج الثنائي في حالة التدنية والعكس صحيح؛ ومنه نستنتج أنه لكل برنامج خطي برنامج مرافق ومرافق البرنامج المرافق هو البرنامج الأصلي.

ملاحظات:

- البرنامج الأول يسمى البرنامج الأصلي والبرنامج الثاني يسمى البرنامج المرافق أو الثنائي أو النظير.
- عدد المتغيرات في البرنامج الأصلي يساوي عدد القيود في البرنامج المرافق وعدد القيود في البرنامج الأصلي يساوي عدد المتغيرات في البرنامج المرافق.

مثال (6-1): لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = X_1 + 2X_2 + X_3$$
$$\text{s/c} \begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 \leq 2 \\ 2X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 3 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ X_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أكتب البرنامج الخطي المرافق لهذا البرنامج.

البرنامج الخطي المرافق يكون كالتالي:

$$\text{Min } W = 2Y_1 + 3Y_2$$
$$\text{s/c} \begin{cases} Y_1 + 2Y_2 \geq 1 \\ -Y_1 + 2Y_2 \geq 2 \\ Y_1 + 3Y_2 \geq 1 \\ Y_1 \geq 0,\ Y_2 \geq 0 \end{cases}$$

مثال رقم (6-2): لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = 2X_1 - X_2 + X_3 + 3X_4$$
$$\text{s/c} \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 15 \\ 2X_1 - X_3 - 2X_4 \geq 10 \\ X_1 + X_2 - X_3 + 3X_4 \leq 8 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \leq 0, X_4 : \text{غ م إ} \end{cases}$$

المطلوب: أكتب البرنامج الخطي المرافق لهذا البرنامج.

البرنامج الخطي المرافق يكون كالتالي:

$$\text{Min } W = 15Y_1 + 10Y_2 + 8Y_3$$
$$\text{s/c} \begin{cases} Y_1 + 2Y_2 + Y_3 \geq 2 \\ Y_1 + Y_3 \geq -1 \\ -Y_1 - Y_2 - Y_3 \leq 1 \\ -2Y_2 + 3Y_3 = 3 \\ Y_1 : \text{غ م إ}, Y_2 \leq 0, Y_3 \geq 0 \end{cases}$$

ملاحظة: تتطلب طريقة السيمبلكس أن تكون جميع المتغيرات غير سالبة، وعندما يكون متغير سالب، يمكن استبداله بفرق متغيرين جديدين وغير سالبين،[1] ففي حالة ما إذا طلب منا حل البرنامج الثنائي (المرافق) فيجب جعل جميع المتغيرات موجبة، أي التحقق من قيد عدم السالبية والطرف الثاني للقيد يكون موجب كالتالي:

$$Y_1 : \text{غ م إ} \Rightarrow Y_1 = Y'_1 - Y''_1, Y'_1 \geq 0, Y''_1 \geq 0$$
$$Y_2 \leq 0 \Rightarrow Y'_2 = -Y_2 \Rightarrow Y_2 = -Y'_2, Y'_2 \geq 0$$
$$Y_3 \geq 0$$

والبرنامج الخطي الثنائي يصبح كالتالي:

$$\text{Min } W = 15(Y'_1 - Y''_1) - 10\,Y'_2 + 8Y_3$$
$$\text{s/c} \begin{cases} (Y'_1 - Y''_1) - 2\,Y'_2 + Y_3 \geq 2 \\ -(Y'_1 - Y''_1) - Y_3 \leq 1 \\ -(Y'_1 - Y''_1) + Y'_2 - Y_3 \leq 1 \\ 2\,Y'_2 + 3Y_3 = 3 \\ Y'_1 \geq 0, Y''_1 \geq 0, Y'_2 \geq 0, Y_3 \geq 0 \end{cases}$$

نظرية:

- إذا كان (X') حل ممكن للبرنامج الأصلي و(Y') حل ممكن للبرنامج المرافق مع (Z') قيمة دالة الهدف للبرنامج الأصلي و(W') قيمة دالة الهدف للبرنامج المرافق فإن: $(Z' \leq W')$.
- إذا كان (X') حل ممكن للبرنامج الأصلي و(Y') حل ممكن للبرنامج المرافق وكانت $(Z' = W')$، فإن (X') هو الحل الأمثل للبرنامج الأصلي و(Y') هو الحل الأمثل للبرنامج المرافق.

[1] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 59.

2. العلاقة بين حل النموذجين الأولي والثنائي.

هناك ترابط بين حل هذين النموذجين، فإذا تم التوصل إلى حل إحدى البرنامجين يمكن استنتاج حل البرنامج الآخر كالآتي:[1]

- القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة للبرنامج الأصلي والتي تظهر في السطر الأخير (C_j-Z_j) تمثل قيم المتغيرات (Y_i) الرئيسية للبرنامج الثنائي بالترتيب وبالقيمة المطلقة.
- قيم متغيرات الفجوة للبرنامج الثنائي والتي تظهر في السطر الأخير $(b^T_i-W_i)$ تمثل قيم المتغيرات الأساسية (X_j) للبرنامج الأولي بالترتيب.
- قيم المتغيرات الأساسية للبرنامج الأولي والتي تظهر في العمود (b_i) تمثل القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة للبرنامج الثنائي والتي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي.
- قيم المتغيرات الأساسية للبرنامج الثنائي والتي تظهر في العمود (C_j) تمثل القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة للبرنامج الأولي والتي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل وبالقيمة المطلقة.
- قيمة دالة الهدف للحل الأمثل في كلتا البرنامجين متساوية $(Z^* = W^*)$.

3. استنتاج حل البرنامج المرافق من البرنامج الأصلي والعكس.

من خلال الخصائص التي تم وصفها سابقاً، يمكن افتراض الحلول المثلى لكل من النمودج الأصلي والنموذج الثنائي إعتماذا على حل إحدى النموذجين واسنتاج حل النموذج الآخر، لكن كما رأينا سابقاً، أنه ليس جميع النماذج لها حل أمثل، فنجد الحالات الآتية المتبادلة التي تظهر بين النموجين الأصلي والثنائي:[2]

- إذا كان لإحدى النمودجين الأصلي والثنائي حل أمثل وحيد، فإن البرنامج اللآخر كذلك له حل أمثل وحيد.
- فإذا كان لإحدى النموذجين حل غير قابل للتطبيق، فإنه كذلك البرنامج الآخر يكون له حل غير قابل للتطبيق (لا يوجد حل عملي).
- إذا كان للنموذج الأصلي الأولى حلول ممكنة غير محدودة، فإن النموذج الثنائي ليس لذيه حل.

---

[1] - **محمد راتول**، مرجع سابق، ص: 84/83.

[2] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 60.

- إذا كان للنموذج الثنائي حلول ممكنة غير محدودة، فإن النموذج الأصلي ليس لذيه حل.

فعند حل المشكلة الأولية للبرمجة الخطية، فنحصل على حل المشكلة الثنائية للبرمجة الخطية، ويمكن قراءته من الجدول النهائي للبرنامج الأصلي والعكس صحيح.[1]

نقول أن (X′) و(Y′) حلول مثلى للبرنامج الأصلي والبرنامج المرافق إذا وفقط إذا كان:

$Y^{T}'(AX' - b) = 0$ ……1

$(Y^{T}' A - C^{T}) X' = 0$ ……2

حسب 1 و2 يمكن استنتاج:

- إذا كان القيد (i) في البرنامج الأصلي غير مستغل فإن متغير البرنامج المرافق يساوي الصفر $(Y_i = 0)$.
- إذا كان القيد (i) في البرنامج المرافق غير مستغل فإن متغير البرنامج الأصلي يساوي الصفر $(X_i = 0)$.
- إذا كان $(X_i > 0)$ فإن $(Y^{T}' A_i = C_i)$.
- إذا كان $(Y_i > 0)$ فإن $(A_i' X = b_i)$.

مثال (6-3): لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min } Z = 10X_1 + 5X_2 + 12X_3$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 2X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 20 \\ X_1 + 3X_2 + 4X_3 \geq 8 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب:

1- أكتب البرنامج الخطي المرافق لهذا البرنامج.

2- حل البرنامج المرافق بالطريقة البيانية.

3- استنتج حل البرنامج الأصلي.

1- البرنامج الخطي المرافق يكون كالآتي:

$$\text{Max } W = 20Y_1 + 8Y_2$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 2Y_1 + Y_2 \leq 10 \\ Y_1 + 3Y_2 \leq 5 \\ 3Y_1 + 4Y_2 \leq 12 \\ Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0 \end{cases}$$

[1] - **P. Rama MURTHY**, Op-Cit, P: 106.

2- باستعمال الطريقة البيانية لإيجاد حل البرنامج المرافق نجد:

$Y_1^* = 4$
$Y_2^* = 0$
$W^* = 80$

3- استنتاج حل البرنامج الأصلي:

- القيد الأول:

$2Y_1^* + Y_2^* \leq 10 \Rightarrow 2(4) + 0 = 8$

نلاحظ أن القيد الأول من البرنامج المرافق غير مستغل وبالتالي فإن:

$X_1^* = 0$

استنتاج حل البرنامج الأصلي:

- القيد الثاني:

$Y_1^* + 3Y_2^* \leq 5 \Rightarrow 4 + 3(0) = 4$

نلاحظ أن القيد الثاني من البرنامج المرافق غير مستغل وبالتالي فإن:

$X_2^* = 0$

استنتاج حل البرنامج الأصلي:

- القيد الثالث:

$3Y_1^* + 4Y_2^* \leq 12 \Rightarrow 3(4) + 4(0) = 12$

نلاحظ أن القيد الثالث من البرنامج المرافق مستغل وبالتالي فإن:

$X_3^* > 0$

ومن جهة أخرى نلاحظ أن:

$Y_1^* = 4 > 0 \Rightarrow$ القيد الأول للبرنامج الأصلي مستغل

$Y_2^* = 0 \Rightarrow$ القيد الثاني للبرنامج الأصلي غير مستغل

وبالتالي فالقيد الأول من البرنامج الأصلي يكون:

$$Y_1^* = 4 > 0 \Rightarrow 2X_1^* + X_2^* + 3X_3^* = 20$$
$$\Rightarrow 2(0) + 0 + 3X_3^* = 20$$
$$\Rightarrow X_3^* = 20/3$$

ومنه نستنتج أن:

$X_1^* = 0, X_2^* = 0, X_3^* = 20/3$
$Z^* = 10X_1^* + 5X_2^* + 12X_3^* \Rightarrow Z^* = 10(0) + 5(0) + 12\ (20/3) \Rightarrow Z^* = 80$

4. التفسير الاقتصادي للبرنامج الثنائي.

مؤسسة تنتج منتجين (P_1) و(P_2) باستعمال آلتين (M_1) و(M_2)، ولإنتاج وحدة من المنتج (P_1) يجب استعمال الآلة (M_1) 3 ساعات والآلة (M_2) 5 ساعات؛ ولإنتاج وحدة من المنتج (P_2) يجب استعمال الآلة (M_1) 5 ساعات والآلة (M_2) 2 ساعة؛ كما نعلم أنه لا يمكن استعمال (M_1) أكثر من 15 ساعة في اليوم ولا أكثر من 10 ساعات في اليوم بالنسبة للآلة (M_2)؛ وأن سعر بيع الوحدة من المنتج (P_1) هو 5 ون ومن المنتج (P_2) هو 3 ون.

ومنه فالبرنامج الخطي المعبر عن المسألة هو:

الهدف: تعظيم الربح

المتغيرات:

X_1: عدد الوحدات المنتجة من المنتج (P_1).

X_2: عدد الوحدات المنتجة من المنتج (P_2).

$$\textbf{Max } Z = 5X_1 + 3X_2$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 3X_1 + 5X_2 \leq 15 \\ 5X_1 + 2X_2 \leq 10 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

عند حل هذا البرنامج السابق بإحدى الطرق التي درسناها نجد:

$$X_1^* = 20/19,\ X_2^* = 45/19,\ Z^* = 235/19$$

مؤسسة أخرى تريد استئجار هذين الآلتين وتريد معرفة سعر الساعة الواحدة لكل من الآلتين.

- نرمز لسعر كراء الآلة الأولى للساعة الواحدة بـ : Y_1
- نرمز لسعر كراء الآلة الثانية للساعة الواحدة بـ : Y_2

يمكن لهذه المؤسسة استعمال الآلة (M_1) لمدة 15 ساعة والآلة (M_2) لمدة 10 ساعات.

إذن هدف المؤسسة الثانية هو تقليل التكلفة وبالتالي:

$$\textbf{Min } W = 15Y_1 + 10Y_2$$

فالمؤسسة الأولى تبحث عن أسعار كراء الآلتين بحيث يكون الربح على الأقل يساوي ذلك الذي يتحصل عليه عند إنتاج المنتجين (P_1) و(P_2).

المنتج (P_1) يباع بـ: 5 ون ولإنتاجه لابد من 3 ساعات عمل على الآلة (M_1) و5 ساعات على الآلة (M_2) وبالتالي:

$$3Y_1 + 5Y_2 \geq 5$$

المنتج (P_2) يباع بـ: 3 ون ولإنتاجه لابد من 5 ساعات عمل على الآلة (M_1) و2 ساعة على الآلة (M_2) وبالتالي:

$$\mathbf{5Y_1 + 2Y_2 \geq 3}$$

نتحصل إذن على البرنامج الخطي التالي:

$$\mathbf{Min\ W = 15Y_1 + 10Y_2}$$

$$s/c \begin{cases} \mathbf{3Y_1 + 5Y_2 \geq 5} \\ \mathbf{5Y_1 + 2Y_2 \geq 3} \\ \mathbf{Y_1 \geq 0,\ Y_2 \geq 0} \end{cases}$$

نلاحظ أن هذا البرنامج هو البرنامج الثنائي للبرنامج السابق.

عند حل البرنامج المرافق بإحدى الطرق التي تطرقنا إليها سابقاً نجد:

$$\mathbf{Y_1^* = 5/19,\ Y_2^* = 16/19,\ W^* = 235/19}$$

نلاحظ أن قيمة ($\mathbf{Z^*}$) وقيمة ($\mathbf{W^*}$) متساويتان، وهذا ما تبحث عنه المؤسسة الأولى، أي الربح الضائع من الإنتاج يعوض من تكلفة الكراء للآلتين.

<u>ملاحظات:</u>

- التفسير الاقتصادي للبرنامج المرافق (الثنائي) يعني أنه لابد من تفسير المتغيرات والقيود ودالة الهدف.
- تسمى كل من (Y_1) و(Y_2) بأسعار الظل ($\mathbf{Y_i}$).
- عند الحل الأمثل فإن قيمة دالة الهدف للبرنامج الأصلي تساوي قيمة دالة الهدف للبرنامج المرافق(الثنائي).
- في الحالة العامة ليس من السهل تفسير البرنامج المرافق اقتصادياً.

من بين أهم النتائج المتوصل إليها من تطوير مشاكل البرمجة الخطية هي وجود الثنائية في مشاكل البرمجة الخطية، أي لكل برنامج خطي برنامج ثنائي، فكل مشكلة للبرمجة الخطية في حالة التعظيم تقابلها مشكلة أخرى للبرمجة الخطية في حالة التقليل والعكس صحيح، فالبرنامج الأصلي يسمى بالبرنامج الأولى والبرنامج المشتق يسمى بالبرنامج الثنائي.[1]

[1] - **P. Rama MURTHY**, Op-Cit, P: 105.

5. أسعار الظل (Shadow Prices).

أغلب مشاكل البرمجة الخطية يمكن تفسيرها على أنها تخصيص الموارد للأنشطة، حيث يمثل الطرف الثاني للقيود الكمية المتوفرة من الموارد، بينما يوفر البرنامج الثنائي المبالغ (الأسعار) التي يجب توفيرها للحصول على هذه الموارد، حيث توفر طريقة السيمبلكس هذه المعلومات في شكل متغيرات (Y_i^*) تسمى أسعار الظل والتي تمثل متغيرات البرنامج الثنائي.[1]

فبمجرد الانتهاء من طريقة السيمبلكس بنجاح، نجد الجدول النهائي للحل الأمثل لا يحتوي فقط على حلول لمتغيرات القرار، ولكن أيضاً يحتوى على معلومات مساعدة يمكن أن تكون ذات فائدة كبيرة للمحلل، على سبيل القيم التي تقع تحت متغيرات الفجوة (S_i) ضمن سطر دالة الهدف (Z_j)، فهذه القيم تسمى أسعار الظل وتمثل القيمة الهامشية الإضافية.[2]

وتعتبر أسعار الظل أحد أهم المفاهيم الأساسية التي تعتمد عليها طريقة حل البرنامج الثنائي للبرمجة الخطية، إذ يمكن تعريف سعر الظل بأنه: "مقدار الزيادة أو النقص في قيمة دالة الهدف والناجم عن زيادة أو نقص في كمية الموارد المتاحة".[3]

وأسعار الظل عبارة عن مقدار الزيادة أو النقصان في قيمة دالة الهدف الناتج عن زيادة أو نقص في الموارد المتاحة، أي مقدار الربح الإجمالي الناتج عن إضافة وحدة واحدة جديدة من الموارد النادرة.[4]

وهي الأسعار التي تتحدد داخل المؤسسة وليس داخل السوق، وقد تختلف من مؤسسة إلى أخرى حتى ولو تعلق الأمر بنفس النوع من الموارد، فإذا كانت هذه الموارد نادرة بمعنى يجب استغلالها كلياً، فهنا لابد من متخذ القرار داخل المؤسسة التفكير في اقتناء كميات إضافية من هذا النوع من الموارد من السوق وفي هذه الحالة نحن أمام حالتين:

- سعر السوق (P_i) أقل من سعر الظل (Y_i)، فعلى متخذ القرار أن يفكر في شراء كمية إضافية من هذا المورد من السوق، لأن كل وحدة إضافية ينجم عنه ربح إضافي قدره ($Y_i - P_i$).

---

[1] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, Op-Cit, P: 135.
[2] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 55.
[3] - **محمد الطراونة، سليمان عبيدات**، مرجع سابق، ص: 183.
[4] - **جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري**، مرجع سابق، ص: 12.

- سعر السوق (P_i) أعلى من سعر الظل (Y_i)، فعلى متخذ القرار بالمؤسسة التفكير في تحويل جزء من الكمية المتوفرة من هذا المورد لبيعها كما هي (دون إدخالها بعملية الإنتاج)، لأن كل وحدة مباعة ينجم عنها ربح إضافي صافي قدره ($P_i - Y_i$).

فمن الواضح أن المعلومات التي توفرها أسعار الظل مهمة لإدارة المؤسسة عند التفكير في إعادة تخصيص الموارد داخل المؤسسة، كما تعتبر مفيدة للتحقق من الأسعار من خلال اللجوء إلى الأسواق من أجل شراء المزيد من الموارد.[1]

عادة ما يكون صانعو القرار والمحللون في وضع يسمح لهم بمعرفة ما إذا كانت الموارد المتاحة ثابتة حقاً أو يمكن تعديل تخصيصات الموارد من خلال الحصول على موارد إضافية، فيمكن للإدارة القيام بهذه العملية بشكل صائب من خلال الاعتماد على أسعار الظل، فسعر الظل هو الحد الأقصى لسعر الوحدة للمورد الذي يجب دفعه لزيادة تخصيص تلك الموارد بمقدرار وحدة واحدة من أجل تحقيق مكاسب صافية في الهدف.[2]

ومنه نستنتج أنه بما أن كلا النموذجين يستعملان نفس قيم المعلمات، فيمكن التعبير عن مشكلة البرمجة الخطية، إما في شكل نموذج أصلي أو نموذج ثنائي، لأن حل النموذج الأصلي أو النموذج الثنائي يؤذي إلى نفس إلى نفس المعلومات الكافية لاسنتاج حلول البرنامج الآخر بسهولة.[3]

أي أن جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولى يتضمن أيضاً الحل الأمثل للبرنامج الثنائي، وجدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي يتضمن أيضاً الحل الأمثل للبرنامج الأولي، ويمن استنتاج الجدول النهائي للبرنامج الثنائي من الجدول النهائي للبرنامج الأولي والعكس صحيح.

[1] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, Op-Cit, P: 137.
[2] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 55.
[3] - **Ibid**, P: 60.

الفصل السابع: تحليل الحساسية

Sensitivity analysis

تمهيد:

صياغة مشاكل البرمجة الخطية والوصول إلى الحل الأمثل لها مبنية على مجموعة من الفرضيات والتي من بينها فرضية التأكد التام لقيم المعلمات التي من خلالها تم صياغة البرنامج الخطي الذي يمثل العلاقات المختلفة والمتعلقة بالمشكلة قيد الدراسة، إلا أن قيم هذه المعلمات قد تتغير لظروف معينة، لذلك غالبا ما يكون الوصول إلى الحل الأمثل ليس نهاية العملية التي استعملت من أجلها البرمجة الخطية، فقد نهتم بمعرفة ماذا يحدث إذا تغيرت المعطيات التي تم الاعتماد عليها عند صياغة المسألة الأصلية. حيث أنه قد يهمنا، على سبيل المثال، معرفة أثر تغير ربح منتج ما أو معرفة أثر تغير الكمية المتوفرة من نوع معين من الموارد أو معرفة أثر إضافة قيد أو قرار إنتاج منتج جديد على الحل الأمثل المتحصل عليه مع بقاء المعطيات الأخرى على حالها.

وهنا يكمن دور تحليل الحساسية وهي إحدى المزايا التي تقدمها البرمجة الخطية عند الوصول إلى الحل الأمثل، فكثيراً من التغيرات قد تطرأ بشكل مفاجي من شأنها أن تؤثر على الحل الأمثل المتحصل عليه، مما يتطلب إعادة حل نموذج المكشلة من جديد بعد إضافة هذه التغيرات الجديدة، غير أن هذه العملية تكون مرهقة وتحتاج إلى وقت طويل، لذلك نلجأ إلى طريقة لا تتطلب إعادة العملية بكاملها والتي تدعى بتحليل الحساسية، والتي تهتم بدراسة تأثير تغيرات مكونات النموذج على الحل الأمثل، فتقنيات تحليل الحساسية تمكننا من قياس آثار هذه التغييرات واتخاذ التدابير اللازمة دون إعادة صياغة وحل المسألة من جديد.

1. مفهوم تحليل الحساسية.

تحليل الحساسية هو دراسة كيف يتغير حل المشكلة عندما تكون هناك تغييرات طفيفة في معلمات المشكلة دون حل المشكلة بأكملها من جديد، وبالتالي فتحليل الحساسية يدرس تحليل مدى تأثير التغيرات الصغيرة في معلمات النموذج على الحل الأمثل.[1] كما أنها تهتم بدراسة أنواع ونطاق وحجم التغيرات في معلمات نموذج المشكلة التي يمكن تحديد آثارها بسهولة نسبية دون الحاجة إلى حل نموذج مشكلة البرمجة الخطية الجديدة.[2]

فعندما ناقشنا فرضيات البرمجة الخطية سابقاً كانت من بين هذه الفرضيات فرضية التأكد (اليقين) التي تتعلق بثبات معلمات النموذج (C_j, b_i, a_{ij})، فهي بشكل عام مجرد تقديرات للكميات تم وضعها، والغرض الرئيسي لتحليل الحساسية هو تحديد مدى حساسية هذه المعلمات أي ما المقدار المسموح به لتغيرها دون تغيير الحل الأمثل، الأمر الذي يستلزم مراقبتها عن كثب وبشكل خاص عند تنفيذ الدراسة.[3]

فيمكن أن تتغير معلمات البرنامج الخطي (C_j) و(b_i) و(a_{ij}) للنموذج المصاغ، كلا على حدى ضمن حدود معينة دون التسبب في تغييرات على مستوى الحل الأمثل، والذي يشار إليه باسم تحليل الحساسية.[4]

فقيم المعلمات التي يضمها نموذج البرمجة الخطية عبارة عن تقديرات يتم الاعتماد علي المعلومات المتوفرة في تقديرها من طرف الإدارة، لكن في الواقع هناك تغييرات طفيفة على هذه المعلمات بعد الحصول على الحل الأمثل؛ فإذا كانت جميع قيم معلمات النموذج الملخص للمشكلة قيم مؤكدة وثابتة، فلن تكون هناك حاجة لإعادة صياغة المشكلة وحلها من جديد، لكن نادراً ما يكون هذا هو الحال، وبالتالي من أجل عدم القيام بصياغة المشكلة التي تم حلها وإعادة حلها من جديد، يكفي القيام بتحليل الحساسية، أي تحليل مدى حساسية الحل الأمثل إلى التغيرات التي تحدث على معلمات النموذج.[5] ويتضمن تحليل الحساسية تغيير معلمة واحدة في كل مرة في النموذج الأصلي للتحقق من تأثيرها على الحل الأمثل.[6]

---

[1] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 56.
[2] - **Ibid**, P: 61.
[3] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, Op-Cit, P: 137.
[4] - **Hamdy A. TAHA**, Op-Cit, P: 123.
[5] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 56.
[6] - **Frederick S. HILLIER, Gerald J. LIEBERMAN**, Op-Cit, P: 140.

2. حالات تحليل الحساسية.

ويتناول موضوع تحليل الحساسية عدة أنواع مختلفة من التغييرات في صياغة نموذج مشاكل البرمجة الخطية، حيث نجد التغيرات الآتية:[1]

- التغيرات في معاملات دالة الهدف.
- التغيرات في الطرف الأيمن للقيود (التغير في الموارد المتاحة).
- التغيرات في معاملات القيود.
- إضافة متغير جديد.
- إضافة قيد جديد.

مثال (7-1): تقوم مؤسسة بإنتاج ثلاث منتجات وباستعمال ثلاث مواد أولية وفق البرنامج التالي:

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

$$\text{s/c} \begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 430 \\ 3X_1 + 2X_3 \leq 460 \\ X_1 + 4X_2 \leq 420 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

إيجاد الحل الأمثل باستعمال طريقة السمبلكس.

كتابة البرنامج على الشكل المعياري:

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$\text{s/c} \begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 + S_1 = 430 \\ 3X_1 + 2X_3 + S_2 = 460 \\ X_1 + 4X_2 + S_3 = 420 \\ X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases} \quad A = \begin{array}{|cccccc|} X_1 & X_2 & X_3 & S_1 & S_2 & S_3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow B = \begin{array}{|ccc|} S_1 & S_2 & S_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

تشكيل الجدول الأولي المرافق للمصفوفة الحيادية (B):

	C_j	3	2	5	0	0	0	b_i	θ_i
C_B	X_B	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	1	2	1	1	0	0	430	430
0	S_2	3	0	2	0	1	0	460	230
0	S_3	1	4	0	0	0	1	420	-
Z_j		0	0	0	0	0	0	$Z^* = 0$	
$C_j - Z_j$		3	2	5	0	0	0		

[1] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 61.

الحل الممكن الحالي المرافق للجدول الأولي هو:

$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0, S_1 = 430, S_2 = 460, S_3 = 420, Z = 0$

نختر هذا الحل، ونمه نحسب الفرق:

$C_k - Z_k = Max\ (C_j - Z_j), j \notin I_B \Rightarrow C_k - Z_k = Max\ (3, 2, 5) = 5 > 0$

ومنه فالحل الممكن الحالي ليس هو الحل الأمثل؛ والمتغير الداخل إلى الأساس هو المتغير (X_3).

نحسب النسبة (θ):

$\theta = Min\ \{\theta_i\} = Min\ \{b_i / a_i^k\}\ ,\ a_i^k > 0 \Rightarrow \theta = Min\ \{430/1, 460/2, -\} = Min\{430, 230\} = 230$

ومنه فالمتغير الخارج من الأساس هو المتغير (S_2).

تشكيل الجدول الثاني:

	C_j	3	2	5	0	0	0	b_i	θ_i
C_B	X_B	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	-1/2	2	0	1	-1/2	0	200	100
5	X_3	3/2	0	1	0	1/2	0	230	-
0	S_3	1	4	0	0	0	1	420	105
Z_j		15/2	0	5	0	5/2	0	$Z^* = 1150$	
$C_j - Z_j$		-9/2	2	0	0	-5/2	0		

الحل الممكن الحالي المرافق للجدول الأولي هو:

$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 230, S_1 = 200, S_2 = 0, S_3 = 420, Z = 1150$

نختر هذا الحل، ونمه نحسب الفرق:

$C_k - Z_k = Max\ (C_j - Z_j), j \notin I_B \Rightarrow C_k - Z_k = Max\ (-9/2, 2, -5/2) = 2 > 0$

ومنه فالحل الممكن الحالي ليس هو الحل الأمثل؛ والمتغير الداخل إلى الأساس هو المتغير (X_2).

نحسب النسبة (θ):

$\theta = Min\ \{\theta_i\} = Min\{b_i / a_i^k\}\ ,\ a_i^k > 0 \Rightarrow \theta = Min\ \{200/2, -, 420/4\} = Min\{100, 105\} = 100$

ومنه فالمتغير الخارج من الأساس هو المتغير (S_1).

تشكيل الجدول الثالث:

	C_j	3	2	5	0	0	0	b_i
C_B	X_B	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
2	X_2	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100
5	X_3	3/2	0	1	0	1/2	0	230
0	S_3	2	0	0	-2	1	1	20
Z_j		7	2	5	1	2	0	$Z^* = 1350$
$C_j - Z_j$		-4	0	0	-1	-2	0	

الحل الممكن الحالي المرافق للجدول الأولي هو:

$X_1 = 0, X_2 = 100, X_3 = 230, S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 20, Z = 1350$

نختر هذا الحل، ونمه نحسب الفرق:

$C_k - Z_k = \text{Max}\,(C_j - Z_j), j \notin I_B \Rightarrow C_k - Z_k = \text{Max}\,(-4, -1, -1/2) = -1/2 < 0$

ومنه فالحل الممكن الحالي هو الحل الأمثل:

$\mathbf{X_1^* = 0, X_2^* = 100, X_3^* = 230, Z^* = 1350}$

السؤال المطروح: لو تغيرت قيمة إحدى المعاملات التالية:

$C_1 = 3, C_2 = 2, C_3 = 5$

$b_1 = 430, b_2 = 460, b_3 = 420$

- هل يتأثر الحل الأمثل للمسألة؟ أي هل تتغير نقطة الحل الأساسي الممكن المثلى الحالية؟ أو قيمها؟
- ما هو مقدار التغير في قيمة معامل ما بحيث يبقى الحل الأمثل هو نقطة الحل الأساسي الممكن المثلى الحالية؟

1.2. تحديد أثر تغير معاملات دالة الهدف: يتم تحديد وتحليل نطاق معاملات دالة الهدف بتحديد الحد الأقصى بالزيادة والنقصان والمسموح به لكل معاملات دالة الهدف في ظل افتراض ثبات جميع المعلمات الآخرى، حيث يضمن التغيير ضمن المجال المسموح به أن يبقى الحل الأمثل الحالي حلاً أمثلاً.[1]

ويمكن التمييز بين حالتين، في حالة المتغيرات داخل الأساس وفي حالة المتغيرات خارج الأساس؛[2] حيث نلاحظ من الحل السابق أن المتغيران (X_2) و(X_3) هما متغيران داخل الأساس، بينما المتغير (X_1) هو متغير خارج الأساس.

<u>أولا: في حالة المتغير خارج الأساس:</u> يجب الأخذ بعين الاعتبار أن التغير في معاملات دالة الهدف للمتغير غير الأساسي لا يؤثر سوى على معاملات السطر (C_j-Z_j) فقط.

X_1: متغير خارج الأساس.

$\text{Max } Z = (\mathbf{3+\alpha})X_1 + 2X_2 + 5X_3$

- ما هو مجال تغير $C_1 = (3+\alpha)$ حتى يبقى الحل الممكن الحالي هو الحل الأمثل؟

[1] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 61.
[2] - **P. Rama MURTHY**, Op-Cit, P: 118/119.

انطلاقا من الجدول النهائي (جدول الحل الأمثل):

	C_j	$3+\alpha$	2	5	0	0	0	b_i
C_B	X_B	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
2	X_2	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100
5	X_3	3/2	0	1	0	1/2	0	230
0	S_3	2	0	0	-2	1	1	20
Z_j		7	2	5	1	2	0	$Z^* = 1350$
C_j-Z_j		$\alpha-4$	0	0	-1	-2	0	

لكي يبقى هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل لابد من أن يتحقق الشرط الآتي:

$$C_k - Z_k = \text{Max}\,(C_j - Z_j) \leq 0,\ j \notin I_B$$

وبالتالي فإنه يجب أن:

$$\alpha - 4 \leq 0 \Rightarrow \alpha \leq 4 \Rightarrow 3 + \alpha \leq 3 + 4 \Rightarrow C_1 \leq 7$$

إذن طالما أن: $C_1 \in [-\infty, 7]$، فالحل الأمثل يبقى على حاله.

ثانياً: في حالة المتغير داخل الأساس: في حالة المتغيرات الأساسية، فإن التغير في معاملات دالة الهدف سوف يؤثر على جميع أسطر المتغيرات الأساسية، وهذا التأثير قد يؤذي إلى تغير إشارة قيم سطر (C_j-Z_j) وبالتالي قد يتغير الحل الأمثل.

بالنسبة للمتغير (X_2):

$$\text{Max } Z = 3X_1 + (\mathbf{2+\beta})\,X_2 + 5X_3$$

- ما هو مجال تغير $C_2 = (2+\beta)$ حتى يبقى الحل الممكن الحالي هو الحل الأمثل؟

انطلاقا من الجدول النهائي (جدول الحل الأمثل):

	C_j	3	$2+\beta$	5	0	0	0	b_i
C_B	X_B	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
$2+\beta$	X_2	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100
5	X_3	3/2	0	1	0	1/2	0	230
0	S_3	2	0	0	-2	1	1	20
Z_j		$7-\beta/4$	$2+\beta$	5	$1+\beta/2$	$2-\beta/4$	0	$Z^* = 1350 + 100\beta$
C_j-Z_j		$-4+\beta/4$	0	0	$-1-\beta/2$	$-2+\beta/4$	0	

لكي يبقى هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل لابد من أن يتحقق الشرط التالي:

$$C_k - Z_k = \text{Max}\,(C_j - Z_j) \leq 0,\ j \notin I_B$$

وبالتالي فإنه يجب أن:

$-4+\beta/4 \leq 0 \Rightarrow \beta \leq 16$
$-1-\beta/2 \leq 0 \Rightarrow \beta \geq -2$
$-2+\beta/4 \leq 0 \Rightarrow \beta \geq 8$

$$-2 \leq \boldsymbol{\beta} \leq 8 \Rightarrow 2-2 \leq 2+\boldsymbol{\beta} \leq 2+8 \Rightarrow 0 \leq C_2 \leq 10$$

إذن طالما أن: $C_2 \in [0, 10]$، فالحل الأمثل يبقى على حاله.

وهناك طريقة أخرى لإيجاد الحدود الدنيا والعليا لمعاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف، وتتلخص هذه الطريقة فيما يلي:[1]

- نقسم السطر $(C_j\text{-}Z_j)$ لجدول الحل الأمثل على السطر الممثل للمتغير الأساسي داخل الأساس $(a_{ij_{(X_j)}})$ لنفس الجدول النهائي للحل الأمثل، ويكون تركيزنا هنا على معاملات المتغيرات خارج الأساس.
- تحديد أصغر قيمة موجبة والتي نضيف قيمتها إلى قيمة معامل المتغير الأساسي لتمثيل الحد الأعلى لمعامل ذلك المتغير.
- تحديد أكبر قيمة سالبة والتي نضيف قيمتها إلى قيمة معامل المتغير الأساسي لتمثيل الحد الأدنى لمعامل ذلك المتغير.
- في حالة عدم وجود قيم موجبة فإننا نتعبر الحد الأعلى هو $(+\infty)$، وفي حالة عدم وجود قيم سالبة فإننا نعتبر الحد الأدنى $(-\infty)$.

الحد الأعلى $\leq \mathbf{C_j} \leq$ الحد الأدنى

من الجدول النهائي (جدول الحل الأمثل) نحسب:

$$\frac{C_j - Z_j}{a_{ij_{(X_2)}}} = \frac{-4}{-1/4} \quad \frac{-1}{1/2} \quad \frac{-2}{-1/4}$$

$$= 16 \quad -2 \quad 8$$

الحد الأدنى =	$C_j + \{\text{Max}\frac{C_j - Z_j}{a_{ij_{(X_2)}}} \leq 0\}$	$2 + (-2) = 0$
الحد الأعلى =	$C_j + \{\text{Min}\frac{C_j - Z_j}{a_{ij_{(X_2)}}} \geq 0\}$	$2 + 8 = 10$

[1] - **محمد الطراونة، سليمان عبيدات**، مرجع سابق، ص: 168.

الحد الأعلى ≤ C_2 ≤ الحد الأدنى

$$\Rightarrow 0 \leq C_2 \leq 10$$

بالنسبة للمتغير (X_3):

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2 + C_3X_3$$

- ما هو مجال تغير $C_3 = (5+\gamma)$ حتى يبقى الحل الممكن الحالي هو الحل الأمثل؟

انطلاقا من الجدول النهائي (جدول الحل الأمثل)؛ نحسب:

$$\frac{C_j - Z_j}{a_{ij_{(X_3)}}} = \frac{-4}{3/2} \quad \frac{-}{-} \quad \frac{-2}{1/2}$$

$$= \quad -8/3 \quad - \quad -4$$

الحد الأدنى =	$C_j + \{\text{Max}\frac{C_j - Z_j}{a_{ij_{(X_3)}}} \leq 0\}$	$5 + (-8/3) = 7/3$
الحد الأعلى =	$C_j + \{\text{Min}\frac{C_j - Z_j}{a_{ij_{(X_3)}}} \geq 0\}$	$+\infty$

الحد الأعلى ≤ C_3 ≤ الحد الأدنى

$$\Rightarrow 7/3 \leq C_3 \leq +\infty$$

إذن طالما أن: $C_3 \in [7/3, +\infty[$، فالحل الأمثل يبقى على حاله.

هذا الجدول يلخص ما سبق:

المتغيرات	معامل دالة الهدف	أقل قيمة في دالة الهدف	أكبر قيمة في دالة الهدف	الربح المضاف
X_1	3	$-\infty$	7	4
X_2	2	0	10	8
X_3	5	7/3	$+\infty$	$+\infty$

2.2. أثر التغير في كمية الموارد، أي الطرف الثاني للقيد (b_i): يشير الجانب الأيمن للقيود إلى المستوى الحالي لتوافر الموارد أو المتطلبات، فعندما يكون التغير بالزيادة أو النقصان سيكون له تأثير على قيمة دالة الهدف، والذي قد يؤذي إلى تغير المتغيرات الأساسية للحل الأمثل:[1]

هنا نفترض أن الكمية الخاصة بنوع معين من الموارد قد تتغير بمقدار معين وليكن التغيير الذي يبقي أساس الحل الأمثل ثابتا؟

[1] - **P. Rama MURTHY**, Op-Cit, P: 120/121.

$b_1 = 430, b_2 = 460, b_3 = 420$
$b'_1 = 430 + V_1$
$b'_2 = 460 + V_2$
$b'_3 = 420 + V_3$

وبالتالي فالجدول الاولي يكون كالآتي:

	C_j	3	2	5	0	0	0				
C_B	X_B	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	b_i	V_1	V_2	V_3
0	S_1	1	2	1	1	0	0	430	1	0	0
0	S_2	3	0	2	0	1	0	460	0	1	0
0	S_3	1	4	0	0	0	1	420	0	0	1
Z_j		0	0	0	0	0	0	$Z^* = 0$			
$C_j - Z_j$		3	2	5	0	0	0				

الجدول النهائي يكون كالآتي:

	C_j	3	2	5	0	0	0				
C_B	X_B	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	b_i	V_1	V_2	V_3
2	X_2	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100	1/2	-1/4	0
5	X_3	3/2	0	1	0	1/2	0	230	0	½	0
0	S_3	2	0	0	-2	1	1	20	-2	1	1
Z_j		7	2	5	1	2	0	$Z^* = 1350 + V_1 + 2V_2$			
$C_j - Z_j$		-4	0	0	-1	-2	0				

حتى يبقى أساس الحل الأمثل ثابتا لا بد أن تكون كل عناصر العمود الأخير موجبة، أي:

$X_2 = 100 + ½V_1 - 1/4V_2 \geq 0$
$X_3 = 230 + ½V_2 \geq 0$
$S_3 = 20 - 2V_1 + V_2 + V_3 \geq 0$

<u>مثلا:</u> إذا زاد المورد الأول بـ 50 وحدة وانخفض المورد الثاني بـ 20 وحدة وانخفض المورد الثالث بـ 10 وحدات، فما هو تأثير ذلك على الحل الأمثل؟

أي:

$V_1 = 50, V_2 = -20, V_3 = -10$

$X_2 = 100 + ½ (50) - ¼ (-20) = 130 > 0$ مقبول

$X_3 = 230 + ½ (-20) = 220 > 0$ مقبول

$S_3 = 20 - 2(50) + (-20) - 10 = -110 < 0$ مرفوض

نلاحظ أنه في هذه الحالة سوف يتغير الحل الأمثل لأنه لا يحقق قيد عدم السالبية.

حتى يبقى أساس الحل الأمثل ثابتا لا بد أن تكون كل عناصر العمود الأخير موجبة، أي:

$X_2 = 100 + ½V_1 - ¼V_2 \geq 0$
$X_3 = 230 + ½V_2 \geq 0$
$S_3 = 20 - 2V_1 + V_2 + V_3 \geq 0$

مثلا: إذا انخفض المورد الأول بـ 30 وحدة وانخفض المورد الثاني بـ 12 وحدة وزاد المورد الثالث بـ 10 وحدات، فما هو تأثير ذلك على الحل الأمثل؟

أي:

$V_1 = -30, V_2 = -12, V_3 = 10$

$X_2 = 100 + ½ (-30) - 14(-12) = 88 > 0$ مقبول

$X_3 = 230 + ½ (-12) = 224 > 0$ مقبول

$S_3 = 20 - 2(-30) + (-12) + 10 = 78 > 0$ مقبول

$\mathbf{Z = 1350 + V_1 + 2V_2 = 1350 - 30 + 2(-12) = 1296}$

- في حالة تغير المورد الأول وبقاء المورد الثاني والثالث على حالهما، أي:

$V_1 = ?, V_2 = 0, V_3 = 0$
$X_2 = 100 + ½V_1 \geq 0 \Rightarrow V_1 \geq -200$
$X_3 = 230 \geq 0$
$S_3 = 20 - 2V_1 \geq 0 \Rightarrow V_1 \leq 10$
$\Rightarrow -200 \leq V_1 \leq 10$
$b'_1 = 430 + V_1$
$\Rightarrow 430 + (-200) \leq 430 + V_1 \leq 430 + 10 \Rightarrow 230 \leq b'_1 \leq 440$

إذن طالما أن: $b_1 \in [230, 440]$، فالحل الأمثل يبقى على حاله.

- في حالة تغير المورد الثاني وبقاء المورد الأول والثالث على حالهما، أي:

$V_1 = 0, V_2 = ?, V_3 = 0$
$X_2 = 100 - ¼V_2 \geq 0 \Rightarrow V_2 \leq 400$
$X_3 = 230 + ½V_2 \geq 0 \Rightarrow V_2 \geq -460$
$S_3 = 20 - V_2 \geq 0 \Rightarrow V_2 \leq -20$
$\Rightarrow -20 \leq V_2 \leq 400$
$b'_2 = 460 + V_2$
$\Rightarrow 460 + (-20) \leq 460 + V_2 \leq 460 + 400 \Rightarrow 440 \leq b'_2 \leq 860$

إذن طالما أن: $b_2 \in [440, 860]$، فالحل الأمثل يبقى على حاله.

- في حالة تغير المورد الثالث وبقاء المورد الأول والثاني على حالهما، أي:

$V_1 = 0, V_2 = 0, V_3 = ?$
$X_2 = 100 \geq 0$
$X_3 = 230 \geq 0$
$S_3 = 20 + V_3 \geq 0 \Rightarrow V_3 \geq -20$
$\Rightarrow -20 \leq V_3 \leq +\infty$

$b'_3 = 420 + V_3$

$\Rightarrow 420 + (-20) \leq 420 + V_3 \leq 420 + \infty \Rightarrow 400 \leq b'_3 \leq +\infty$

إذن طالما أن: $b_3 \in [400, +\infty[$، فالحل الأمثل يبقى على حاله.

وهناك طريقة أخرى لمعالجة هذه الحالة والتي تتلخص خطواتها فيما يلي:[1]

- نقسم قيم العمود (b_i) ضمن الجدول النهائي على معاملات متغيرات خارج الأساس $(a_{ij_{(S_i)}})$ المقابلة لها ضمن نفس الجدول النهائي للحل الأمثل، فالنسبة للمورد الأول نقسم قيم (b_i) على قيم العمود (S_1) وبالنسبة للمورد الثاني نقسم قيم (b_i) على قيم العمود (S_2) وهكذا.
- تؤخذ أقل قيمة موجبة ونطرحها من كمية المورد الأصلية للحصول على الحد الأدنى لكمية مورد القيد.
- تؤخذ القيمة المطلقة لأكبر قيمة سالبة وتضاف إلى كمية المورد الأصلية للحصول على الحد الأعلى لكمية مورد القيد.
- في حالة عدم الحصول على قيم موجبة فإن الحد الأعلى يكون $(+\infty)$، وفي حالة عدم الحصول على قيم سالبة فإن الحد الأدنى يكون $(-\infty)$.

بالنسبة للمورد الأول:

$$\frac{b_i^*}{a_{ij_{(S_1)}}} = \frac{100}{1/2} \quad \frac{230}{0} \quad \frac{20}{-2}$$

$$= 200 \quad - \quad -10$$

الحد الأدنى =	$b_i - \{Min \frac{b_i^*}{a_{ij_{(S_1)}}} \geq 0\}$	430 - 200 = 230
الحد الأعلى =	$b_i + \lvert\{Max \frac{b_i^*}{a_{ij_{(S_1)}}} \leq 0\}\rvert$	430 + |-10| = 440

$$\Rightarrow 230 \leq b'_1 \leq 440$$

إذن طالما أن المورد الأول ينتمي إلى المجال: $b_1 \in [230, 440]$، فالحل الأمثل يبقى على حاله.

[1] - **محمد الطراونة، سليمان عبيدات**، مرجع سابق، ص: 175.

بالنسبة للمورد الثاني:

$$\frac{b_i^*}{a_{ij_{(S_2)}}} = \frac{100}{-1/4} \quad \frac{230}{1/2} \quad \frac{20}{1}$$

$$= -400 \quad 460 \quad 20$$

الحد الأدنى =	$b_i - \{\text{Min}\frac{b_i^*}{a_{ij_{(s_2)}}} \geq 0\}$	460 - 20 = 440
الحد الأعلى =	$b_i + \lvert\{\text{Max}\frac{b_i^*}{a_{ij_{(s_2)}}} \leq 0\}\rvert$	460 + |-400| = 860

$$\Rightarrow 230 \leq b'_2 \leq 440$$

إذن طالما أن المورد الثاني ينتمي إلى المجال: $b_2 \in [440, 860]$، فالحل الأمثل يبقى على حاله.

بالنسبة للمورد الثالث:

$$\frac{b_i^*}{a_{ij_{(S_3)}}} = \frac{100}{0} \quad \frac{230}{0} \quad \frac{20}{1}$$

$$= - \quad - \quad 20$$

الحد الأدنى =	$b_i - \{\text{Min}\frac{b_i^*}{a_{ij_{(s_3)}}} \geq 0\}$	420 - 20 = 440
الحد الأعلى =	$b_i + \lvert\{\text{Max}\frac{b_i^*}{a_{ij_{(s_3)}}} \leq 0\}\rvert$	$+\infty$

$$\Rightarrow 420 \leq b'_3 \leq +\infty$$

إذن طالما أن المورد الثالث ينتمي إلى المجال: $b_3 \in [440, +\infty[$، فالحل الأمثل يبقى على حاله.

هذا الجدول يلخص ما سبق:

القيود	قيمة b_i	أقل قيمة لـ b_i	أكبر قيمة لـ b_i	قيمة أسعار الظل Y_i
القيد الأول	430	230	440	1
القيد الثاني	460	440	860	2
القيد الثالث	420	400	$+\infty$	0

<u>ملاحظة:</u> بالنسبة لاستنتاج حلول البرنامج الثنائي من جدول الحل الأمثل للبرنامج الأصلي يكون كالتالي:

$Y_i = |C_j - Z_j|_{si}$

$Y_1^* = |C_j - Z_j|_{S1} = 1$

$Y_2^* = |C_j - Z_j|_{S2} = 2$

$Y_3^* = |C_j - Z_j|_{S3} = 0$

طلما أن الزيادة في الطرف الثاني للقيود التي تعبر عن الموارد المتاحة والمحدودة لا تغير الحل الأساسي الأمثل، فهذا أمر جيد وفي الواقع هذه العملية تعتبر إحدى مشاكل البرمجة الخطية، إذ يعد تحليل مدى إمكانية تغيير قدرات الموارد أو الإمكانيات دون تغير الحل الأمثل أحد الموضوعات المهمة ضمن تحليل الحساسية.

3.2. أثر إضافة قيد جديد للبرنامج الخطي: عند صياغة أي برنامج خطي يتم التأكد من القيود ويتم حل البرنامج الخطي والحصول على الحل الأمثل، لكن قد نواجه حالة إضافة قديد جديد لأسباب خاصة قد لا تكون متوفرة لحظة صياغة البرنامج الخطي أو قد تم نسيانها، وفي كلتا الحالتين يجب التأكد من القيد باستخدام متغيرات الحل الأساسي الأمثل، فإذا كان القيد محقق يبقى الحل الأمثل على حاله، وإذا كان الأمير غير ذلك يتم إدخال هذا القيد إلى جدول الحل الأمثل ويتم مواصلة الحل باستخدام طريقة السيمبلكس وتحسين الحل.[1]

في هذه الحالة نفترض أننا تحصلنا على الحل أمثل ونريد معرفة آثار إدخال قيد جديد في المسألة؛ فإذا افترضنا أن هناك نوع رابع من الموارد لم نأخذه بعين الاعتبار عند البدء في البحث عن الحل الأمثل، قد نكون ظننا أن هذا النوع من الموارد موجود بكميات معتبرة وبالتالي لا يمكن أن يؤثر على النتائج النهائية، ثم تبين أن هناك احتمال أن يكون لهذا النوع من الموارد تأثير على الحل الأمثل.

ما هو أثر إضافة القيد الآتي:

$$2X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 200$$

لدينا:

$X_1^* = 0, X_2^* = 100, X_3^* = 230$

$\Rightarrow 2X_1 + X_2 + 2X_3 = 2(0) + 100 + 2(230) = 560 > 200$

[1] - **P. Rama MURTHY**, Op-Cit, P: 128.

هذا القيد سوف يؤثر على الحل الأمثل.

تأثير إضافة قيد آخر:

$$2X_1 + X_2 + X_3 \leq 400$$
$$\Rightarrow 2X_1 + X_2 + X_3 = 2(0) + 100 + 230 = 330 < 400$$

هذا القيد لا يؤثر على قيمة الحل الأمثل.

إن إضافة قيد أو تغيير معاملات القيد يرقى إلى تغييرات معقدة إلى حد ما في المشكلة الأصلية. تقع هذه الأنواع من التغييرات على نموذج البرمجة الخطية بشكل منطقي في إطار تحليل ما بعد الأمثلية، ولكن من الناحية الفنية هذه ليست تغييرات يمكن تحليلها أو تنفيذها عن طريق استخدام المعلومات الموجودة ضمن الجدول النهائي للحل الأمثل، ومن الأفضل التعامل مع هذه التغييرات بشكل عام من خلال حل المشكلة المعدلة من جديد.[1]

4.2. أثر إضافة متغير جديد للبرنامج الخطي: قد تتطلب إضافة متغير جديد إلى نموذج إدخال متطلبات الموارد لهذا النشاط أو المنتج الجديد في الحل الأمثل الحالي. من خلال تحليل المعلومات الموجودة بالفعل في الجدول النهائي للحل الأمثل، يمكن تحديد ما إذا كان المتغير الجديد سيكون متغيرًا أساسيًا في الحل الأمثل وما هي قيمة معامله في دالة الهدف، وتوفر أسعار الظل في الحل الأمثل معلومات حول القيمة الهامشية للموارد، ومعرفة احتياجات الموارد المقابلة للمتغير الجديد، يمكن حساب قيمة إضافة المتغير الجديد.[2]

نعلم أن إضافة متغير جديد في للبرنامج الخطي يعني أن المؤسسة قررت إنتاج منتج رابع نرمز له بالرمز (X_4):

حيث أن إنتاج هذا المنتج يتطلب وحدة واحدة من المورد الأول وثلاث وحدات من المورد الثاني ووحدتين من المورد الثالث ويحقق ربح قدره أربع وحدات نقدية للوحدة الواحدة المباعة من المنتج الرابع (X_4)؛ فهل ننصح المؤسسة بإنتاجه أم لا؟

نعلم أن إضافة متغير جديد في البرنامج الأصلي يقابله إضافة قيد في البرنامج الثنائي، يكتب كما يلي:

$$Y_1 + 3Y_2 + 2Y_3 \geq 4$$

ولدينا :

$$\mathbf{Y_1^* = 1,\ Y_2^* = 2,\ Y_3^* = 0}$$

[1] - **Michael W. CARTER, Camille C. PRICE, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 63.
[2] - **Ibid**, P: 62/63.

نعوض في القيد فنجد:

$$\Rightarrow Y_1 + 3Y_2 + 2Y_3 = 1 + 3(2) + 2\,(0) = 7 > 4$$

إذن فهذا القيد لا يؤثر على الحل الأمثل الحالي، وبالتالي ننصح المؤسسة بإنتاج هذا المنتج.

نهدف من خلال تحليل الحساسية إلى تحديد الحدود العليا والحدود الدنيا للمعلمات (C_j) و(a_{ij}) و(b_i) والتي تبقى الحل الأمثل على حاله، ومنه فتحليل الحساسية دليل رئيسي للتخطيط والمراقبة الإداريتين.[1]

عند تحليل الحساسية فإن النتائج المتوصل إليها، قد تبقى الحل الأمثل على حاله دون تغير، أي تبقى قيم متغيرات الأساس على حالها دون تغير؛ وقد تبقى متغيرات الأساس على حالها، لكن بتغير قيمتها؛ وأما قد يتغير الحل الأمثل كلية.[2]

إذ بعد العثور على الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية، فإن الخطوة الآتية هي مراجعة معلمات نموذج المشكلة وتأثيرها على الحل، استعدادًا لوضع الحل موضع التنفيذ، فتتضمن عملية تحليل الحساسية، التأكد فيما إذا كانت هناك تغييرات على معلمات المشكلة الأصلية وهل لهذه التغييرات إن وجدت تأثير على الحل، فإذا كانت هذه التغييرات صغيرة وطفيفة، فلا يكون من الضروري إعادة حل نموذج المشكلة الجديدة، وبدلاً من ذلك قد تكون بعض الحسابات القليلة كافية لتحديد مجال تأثير هذه التغييرات في شكل سيناروهات تدعى بتحليل الحساسية.[3]

ويقصد بتحليل الحساسية الإجراء الذي يتم تنفيذه بعد التوصل إلى الحل الأمثل، وهو تحديد مدى حساسية الحل الأمثل تجاه حدوث أي تغيرات محدودة (طفيفة) على معلمات النموذج الأصلي والتي تحافظ على الحل الأمثل على حاله.

---

[1] - **P. Rama MURTHY**, Op-Cit, P: 117.
[2] - **Ibid**, P: 118.
[3] - **Michael W. Carter, CAMILLE C. Price, Ghaith RABADI**, Op-Cit, P: 60.

الفصل الثامن: مشكل النقل.

Transportation Problem

تمهيد

تعتبر مشكلة النقل حالة خاصة من مشاكل البرمجة الخطية، والتي تتعلق بنقل وتوزيع سعلة أو منتج أو مورد من مصادر معينة إلى وجهاتها الخاصة، ولكل مصدر عرض ثابت ولكل وجهة طلب ثابت كذلك، والافتراض الأساسي هو أن تكلفة التوزيع أو النقل من كل مصدر إلى كل وجهة تتناسب طردياً مع الكمية الموزعة، وتتطلب مشاكل النقل صياغتها على شكل جدول النقل يوضح جميع المعطيات، هذا الجدول يمكن من الحصول على الحل الأمثل بالاعتماد على عدة طرق سواء لإيجاد الحل الابتدائي الأساسي الأولي أو من أجل تحسينه والحصول على الحل الأمثل.

وفي هذا الفصل سوف نتطرق إلى التعرف على مشكل النقل هذا وكيفية صياغة برنامج النقل الذي يعتبر حالة خاصة من مشاكل البرمجة الخطية، وكذلك التعرف على طرق إيجاد الحل المبدئي الأساسي الأولي وطرق احتبار أمثليته وتحسينه في حالة لم يكن هو الحل الأمثل، بالإضافة إلى التطرق إلى حالة عدم التوازن، أي حالة الطلب أكبر من العرض وحالة العرض أكبر من الطلب.

1. تطور مفهوم مشكل النقل.

نشر عالم الرياضيات الفرنسي مونج (Gaspard Monge) بأنه وضع بالتعاون مع جيش نابوليون بونابارت (Napoleon Bonaparte) سنة 1781 نموذجاً رياضياً يتعامل مع نقل التربة والحجارة للبناء بأقل تكلفة ممكنة بين مواقع البناء بغرض بناء حصون وطرق عسكرية، فعلى الرغم من أن مونج وضع أساسًا نظريًا لحل مشكلة النقل، إلا أنه لم يتم تطوير أي خوارزمية حتى سنة 1941 عندما نشر عالم الرياضيات الأمريكي هيتشكوك (F. L. Hitchcock) حله لمشكلة مونج.[1]

[1] - **Hamdy A. TAHA**, Op-Cit, P: 211.

فقد تم تطوير نماذج النقل لأول من طرف هيتشكوك، حيث قدم دراسة بعنوان: توزيع الإنتاج من عدة مصادر إلى عدة مناطق (The Distribution of a Production from Sources to Numerous Localities).[1]

كما كان في هذه الأثناء العالم الأمريكي الهولندي كوبمانز (Tjalling C. Koopmans) يدرس مشكلة النقل بشكل مستقل لدعم جهود الحرب العالمية الثانية، وبحلول سنة 1947 كان عالم الرياضيات الأمريكي دانتزيغ قد توصل إلى تطوير طريقة السيمبلكس لحل أي مشكلة برمجة خطية بما في ذلك نموذج النقل،[2] كما تم تطوير العديد من النماذج والطرق لحل مشكل النقل لاحقاً.[3]

وتم اقتراح أول طريقة مبسطة لحل مشكلة النقل من طرف شارنس (Charnes) وكوبر سنة 1953 وتلك الطريقة تعرف بطريقة الحجر المتنقل (Stepping Stone Method) أو طريقة القفز على الصخور، وفي سنة 1955 قام دانتزينغ بتطوير هذه الطريقة مما جعلها أكثر سهولة وأقل مجهوداً وأصبحت تسمى بطريقة التوزيع المتعادل (The Modified Distribution Method)، وفي نفس السنة اقترح فوقل (W. R. Vogel) طريقته الشهيرة في تحديد الحل المبدئي.[4]

وتظهر مشاكل النقل في الحياة العملية بصورة متكررة، فكثيرا ما يرى المرء شاحنات لنقل البضائع أو ناقلات النفط تسير عبر طرق مختلفة من مواقع عديدة (مراكز الإنتاج أو التخزين أو التوزيع) لإيصال هذه المواد إلى المستهلك الذي يتواجد في أماكن متعددة (مراكز التسويق والبيع والاستهلاك).[5]

ويمكن تعريف مشكل النقل بأنه: "عبارة عن عملية نقل مواد متشابهة من الأصول (المصادر) إلى النهايات (المصبات) بأقل التكاليف"،[6] ويتضمن جوهر مشكل النقل توفر عدداً كبيراً من طرق الشحن من العديد من مراكز التوريد (المصادر) إلى العديد من مراكز الطلب (المصبات)، والغرض هو تحديد عدد الوحدات المنقولة من هذا العنصر (سلع أو منتجات أو مواد أولية) التي يجب شحنها من المصدر إلى المصب من أجل تلبية الكمية المطلوبة في كل مركز طلب وبأقل تكلفة أو وقت نقل،[7] فيتعلق مشكل النقل

---

[1] – **دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال**، بحوث العمليات، الطبعة الأولى، دار اليازوري، عمان، الأردن، 2008، ص: 141.

[2] - **Hamdy A. TAHA**, Op-Cit, P: 211.

[3] - **J K SHARMA**, Operations Research: Theory and Applications, Sixth Edition, Trinity Press, New Delhi, India, 2016, P: 257.

[4] – **عبد المنعم فليح عبد الله وآخرون**، بحوث العمليات في المحاسبة، الطبعة الأولى، جهاز الكتب، جامعة القاهرة، القاهرة، مصر، 2017، ص: 176.

[5] – **محمد دباس الحميد**، البرمجة الرياضية، د ط، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، منشورات جامعة حلب، سوريا، 2010، ص: 201.

[6] – **دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال**، مرجع سابق، ص: 141.

[7] - **J K SHARMA**, Op-Cit, P: 257.

بقرار اختيار الطريقة المثلى للنقل المادي لكميات من المنتجات أو السلع من نقاط معينة يطلق عليها اسم المصادر (جهات العرض) إلى نقاط أخرى يطلق عليها اسم المصبات (جهات الطلب)، وذلك بشرط أن تصل التكلفة الكلية للنقل إلى أدنى مستوى ممكن.

وتعتبر طريقة النقل أو كما تسمى غالباً بنموذج النقل من الأساليب الرياضية ذات الأهمية في عملية اتخاذ القرارات المتعلقة بنقل حجم معين من السلع أو المواد من مصادر متعددة إلى مصبات متعددة بهدف سد احتياجات المراكز ذات العلاقة بأقل تكلفة ممكنة من مجموع تكاليف النقل، فمشكل النقل يأخذ أهميته من خلال ما تحتله تكاليف النقل من أهمية نسبية مقارنة بمجموع تكاليف الصنع والتوزيع وغيرها. وهي تطبق بنجاح في إدارة الموارد وتنظيم توزيع المياه من وإلى الخزانات واستقبال وتوزيع الكهرباء وإدارة الإنتاج كذلك. ويعتمد نموذج النقل على الافتراضات الأساسية الآتية:[1]

- جميع المواد المنقولة من المصبات ومناطق العرض متجانسة.
- عدم وجود عوائق للنقل بين مصادر العرض ومواقع الطلب.
- مجموع الكميات المتوفرة لذى المصادر يساوي مجموع الكميات المطلوبة من المصبات.
- تكاليف نقل المواد بين أي مصدر وأي مصب معروفة ولن تتغير في الأمد القريب.
- تكلفة النقل بين أي مصدر وأي مصب لا تتغير بتغير كمية المواد المنقولة.
- الهدف الرئيس لمشكلة النقل هو تخفيض تكاليف النقل الكلية بين مناطق العرض والطلب.

2. صياغة نماذج النقل (مشكل النقل).

تعتبر طريقة النقل طريقة خاصة من طرق البرمجة الخطية تستخدم لمعالجة توزيع السلع والمنتجات ونقلها من المصادر المختلفة إلى أماكن أو مراكز التوزيع والاستخدام المطلوب نقلها إليها وذلك في ظل اختلاف فئات تكلفة النقل بما يحقق أقصر ربح وتحمل أقل تكاليف نقل ممكنة،[2] ويتكون نموذج النقل من عدة عناصر وهي:[3]

---

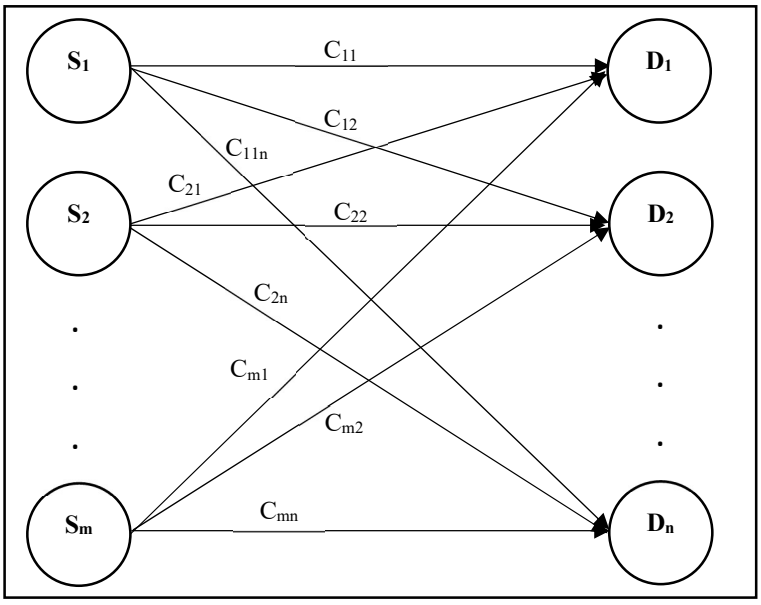
[1] – **عمر محمد ناصر حسين العشاري**، استخدام البرمجة الخطية في حل مشكلة النقل المتعددة المراحل، مجلة ديالى للعلوم الصرفة، المجلد 07، العدد 04، أكتوبر 2011، ص: 45.

[2] – **عبد المنعم فليح عبد الله وآخرون**، مرجع سابق، ص: 176.

[3] – **إبراهيم موسى عبد الفتاح**، مقدمة في بحوث العمليات (نماذج وتطبيقات)، د ط، المكتبة العلمية، الزقازيق، مصر، 2005–2006، ص: 187.

- **جانب العرض:** ويتمثل في عدد (m) من مصادر عرض السلعة والذي يتوافر لدى كل منها (S_i) من الكميات المتاحة.
- **جانب الطلب:** ويتمثل في عدد (n) من جهات استخدام السلعة والتي يبلغ احتياج كل منها (D_j) من السلعة.
- **جانب التكلفة:** ويتمثل في المتغير (C_{ij}) والذي يشير إلى تكلفة نقل الوحدة من المصدر (i) إلى جهة الاستخدام (j).

ويمكن تمثيل عناصر نموذج النقل بيانياً بالشكل الآتي:[1]



وبالتالي متغيرات القرار ضمن برنامج النقل تكون كالآتي:[2]

X_{ij}: وتعني الكمية التي يجب نقلها من المصدر (i) إلى جهة الاستخدام (j).

ويمكن تحويل الشكل السابق إلى نموذج رياضي ويكون الشكل العام لنموذج النقل كالآتي:[3]

- **دالة الهدف:** بحكم الهدف هو تقليل تكاليف النقل، فإننا في حالة التذنية (Min).

$$Min\ Z = C_{11}X_{11} + C_{22}X_{22} + \ldots\ldots + C_{ij}X_{ij} + \ldots\ldots + C_{mn}X_{mn}$$

[1] – **إبراهيم موسى عبد الفتاح**، مرجع سابق، ص: 188.

[2] – **نفس المرجع**، ص: 189.

[3] – **نفس المرجع**، ص: 191/190.

- **قيود العرض:**

$$X_{11} + X_{12} + \ldots\ldots\ldots + X_{1n} \leq S_1$$
$$X_{21} + X_{22} + \ldots\ldots\ldots + X_{2n} \leq S_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_{m1} + X_{m2} + \ldots\ldots\ldots + X_{mn} \leq S_m$$

- **قيود الطلب:**

$$X_{11} + X_{21} + \ldots\ldots\ldots + X_{m1} \geq D_1$$
$$X_{12} + X_{22} + \ldots\ldots\ldots + X_{m2} \geq D_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_{1n} + X_{2n} + \ldots\ldots\ldots + X_{mn} \geq D_n$$

- **قيد عدم السالبية:**

$$X_{ij} \geq 0$$

ويمكن تلخيص الشكل العام لبرنامج النقل كالآتي:[1] و[2]

- **دالة الهدف:**

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

- **قيود العرض:**

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq S_m, \ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

- **قيود الطلب:**

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \geq D_n, \ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

- **قيد عدم السالبية:**

$$X_{ij} \geq 0, \ (i = 1, 2, \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n)$$

مثال (8-1): مؤسسة لانتاج السيارات تقوم بتصنيع نموذج معين لأربعة وكالاء إنطلاقاً من ثلاثة مصانع للإنتاج، والكمية المعروضة من طرف هذه المصانع هي على التوالي: 80، 40، 100 سيارة شهريا، بينما الكمية المطلوبة من الوكالاء هي على التوالي: 40، 75، 25، 60 سيارة شهريا، ويوضح الجدول الموالي تكلفة النقل للسيارة الواحدة بالأورو (€) من المصانع إلى وكالاء التوزيع.

[1] – **إبراهيم موسى عبد الفتاح**، مرجع سابق، ص: 192/191.

[2] – **إبراهيم بن صالح العليان**، مقدمة في البرمجة الخطية، د ط، جامعة الملك سعود، الرياض، المملكة العربية السعودية، 2007، ص: 245/244.

الوكلاء / المصانع	الوكيل (01)	الوكيل (02)	الوكيل (03)	الوكيل (04)
المصنع (01)	4	2	6	4
المصنع (02)	8	6	10	8
المصنع (03)	6	4	8	6

المطلوب: شكل البرنامج الخطي الذي يقلل تكلفة نقل السيارات من المصانع إلى وكالاء التوزيع.

الإجابة:

- **الهدف:** تذنية التكاليف، إذن نحن في حالة (Min).
- **المتغيرات:** X_{ij}: عدد السيارات المنقولة من المصنع (i) إلى الوكيل (j).
- **دالة الهدف:**

$$Min\ Z = 4X_{11} + 2X_{12} + 6X_{13} + 4X_{14} + 8X_{21} + 6X_{22} + 10X_{23} + 8X_{24} + 6X_{31} + 4X_{32} + 8X_{33} + 6X_{34}$$

- **قيود العرض:**

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 80$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 40$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 100$$

- **قيود الطلب:**

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} \geq 40$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} \geq 75$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} \geq 25$$
$$X_{14} + X_{24} + X_{34} \geq 60$$

- **قيد عدم السالبية:**

$$X_{ij} \geq 0\ (i = 1 \dots 3;\ j = 1 \dots 4)$$

ويلاحظ أن قيود العرض تعني أن جملة الكميات المعروضة من المصدر (i) إلى جميع جهات الاستخدام يجب ألا تتجاوز الكمية التي ينتجها أو يوفرها المصدر (i)، بينما قيود الطلب تعني أن جملة الكميات التي تنقل إلى جهة الاستخدام (j) من جميع مصادر العرض يجب ألا تقل عن احتياجات جهة الاستخدام (j).[1]

ويشترط نموذج النقل بشكله الأولى ضرورة المساواة بين عدد الوحدات المعروضة من المصادر وعدد الوحدات المطلوبة من المصبات ليكون جدول النقل في حالة توازن، أي مجموع الكميات المعروضة تساوي مجموع الكميات المطلوبة، أما إذا لم تتحقق هذه المساواة يتم إضافة صف (سطر) أو عمود وهمي

[1] – **إبراهيم موسى عبد الفتاح**، مرجع سابق، ص: 192.

ليستوعب الفارق بين كمية العرض وكمية الطلب وتكون تكاليف النقل فيها صفر،[1] وسوف يتم التطرق إلى هذه الحالة لاحقا.

ففي التطبيقات العملية، لا يمكن أن يكون لنموذج النقل حل أساسي ممكن إذا لم يكن إجمالي العرض يساوي على الأقل إجمالي الطلب، أي أن ($\sum_{i=1}^{m} S_i \geq \sum_{j=1}^{n} D_j$) ولتبسيط أساليب الحل بفرض أن ($\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$)،[2] ويسمى البرنامج في هذه الحالة بحالة التوازن.

وبناءً على ماسبق فإن نموذج النقل يكتب على الشكل القياسي كالآتي:[3]

- **دالة الهدف:**

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

- **قيود العرض:**

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = S_m, (i = 1, 2, \ldots, m) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (01)$$

- **قيود الطلب:**

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = D_n, (j = 1, 2, \ldots, n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (02)$$

- **قيد عدم السالبية:**

$$X_{ij} \geq 0, (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$$

ومن (01) و(02) نستنتج أنه هناك قيد ضمني:

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$$

وهذا القيد الضمني يشير إلى أنه يشترط لوجود حل أساسي ممكن لنموذج النقل، أن يتوازن إجمالي العرض لدى المصادر المختلفة مع إجمالب الطلب لدى جهات الاستخدام المختلفة.

ومنه نستنتج أن مشكل النقل من المشاكل الخاصة للبرمجة الخطية، حيث أن النماذج الرياضية المستخدمة في مشكلة النقل هي نماذج خطية والهدف من استخدامها هو إيجاد أسلوب أمثل لنقل سلع أو منتجات أو موارد من مراكز للعرض متعددة إلى مراكز للطلب متعددة، بحيث تكون تكلفة النقل الكلية أقل ما يمكن.

---

[1] – **دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال**، مرجع سابق، ص: 143.

[2] – **إبراهيم موسى عبد الفتاح**، مرجع سابق، ص: 192.

[3] - **J K SHARMA**, Op-Cit, P: 258.

ومشاكل النقل يمكن حلها باستخدام طريقة السيمبلكس إلا أن هذه الطريقة تتطلب خطوات وجداول وعمليات حسابية كثيرة، وهذا الأمر تم التغلب عليه من خلال تفريغ كافة متغيرات مشكلة النقل في جدول خاص يسمى جدول النقل.[1]

فلو أردنا أن نقوم بحل برنامج نموذج النقل باستخدام طريقة السيمبلكس فإننا نحتاج إلى إضافة متغير اصطناعي لكل قيد من القيود، ومن تم فإن الحصول على حل مبدئي أساسي مقبول سوف يكون صعباً نوعاً ما، لذلك فإننا لن نستخدم طريقة السيمبلكس للحصول على حل أساسي بل سوف نستخدم طريقة أخرى،[2] تعتمد على جدول خاص يسمى جدول النقل.

فنظراً لطبيعة مشكل النقل، يستخدم لحلها جدول خاص يسمى جدول النقل يتكون من عدد من الصفوف يساوي عدد المصادر وعدد من الأعمدة يساوي عدد المصبات، وتعرف الخلية بأنها تقاطع المصدر مع المصب، ويوضع في الخلية الكميات التي يتقرر نقلها من المصدر إلى المصب وتوضع تكلفة النقل في مربع صغير في الركن الأيسر العلوي من كل خلية.[3]

عدد الخلايا في الجدول = عدد المصادر x عدد المصبات = (m x n)

حيث:

m: عدد الأسطر (الصفوف).

n: عدد الأعمدة.

ولتسهيل دراسة مشكل النقل ومن تم إيجاد الحلول لها نقوم بوضع هذه المشكلة على شكل جدول يسمى جدول النقل، ويمكن كتابة نموذج جدول النقل بشكل عام كالآتي:

---

[1] – **أكرم محمد عرفان المهتدي**، الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية (بحوث العمليات)، الطبعة الأولى، دار صفاء، عمان، الأردن، 2004، ص: 125.

[2] – **إبراهيم بن صالح العليان**، مرجع سابق، ص: 246.

[3] – **إبراهيم محمد مهدي**، مرجع سابق، ص: 224.

الشكل العام لنموذج جدول النقل

إلى / من	01	02	03	…	n	S_i
01	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	…	C_{1m} X_{1n}	S_1
02	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	…	C_{2m} X_{2n}	S_2
03	C_{31} X_{31}	C_{32} X_{32}	C_{33} X_{33}	…	C_{3m} X_{3n}	S_3
. . .	. . .	. . .	. . .	…. …. ….	. . .	. . .
m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	C_{m3} X_{m3}	…	C_{mn} X_{mn}	S_m
D_j	D_1	D_2	D_3	…	D_n	$\sum S_i = \sum D_j$

جدول النقل يلخص كامل المشكلة، بحيث تظهر فيه تكاليف نقل الوحدة الواحدة من كل منطقة عرض إلى كل منطقة طلب (C_{ij}) في أعلى الخلية، وتظهر متغيرات المشكلة وهي القيم (X_{ij}) المراد البحث عنها، كما تظهر الكميات القصوى التي يعرضها كل مصدر (S_i) وكذا الكميات المطلوبة من كل مصب (D_j).

وعليه فإن القيمة (C_{ij}) هي تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر (i) إلى المصب (j) وهي قيمة غير سالبة، و(X_{ij}) هي الكميات المراد نقلها من المصدر (i) إلى المصب (j) وهي أيضا قيمة غير سالبة،[1] فالمطلوب في مشكل النقل هو تعيين الكميات (X_{ij}) التي ننقلها من المصادر (S_i) إلى المصبات (D_j) بحيث تكون تكلفة النقل أقل ما يمكن.[2]

مثال (8-2): فيما يلي البرنامج الخطي لأحدى مشكلات النقل:

$$\text{Min } Z = 18X_{11} + 24X_{12} + 8X_{13} + 16X_{21} + 23X_{22} + 28X_{23}$$

$$\text{s/c} \begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} = 450 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} = 200 \\ X_{11} + X_{21} = 250 \\ X_{12} + X_{22} = 200 \\ X_{13} + X_{23} = 200 \\ X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{21}, X_{22}, X_{23} \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: حول هذا البرنامج إلى جدول لنموذج مشكل النقل.

---

[1] – **محمد راتول**، مرجع سابق، ص: 105.

[2] – **محمد دباس الحميد**، البرمجة الرياضية، د ط، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، منشورات جامعة حلب، سوريا، 2010، ص: 202.

الإجابة:

جدول نموذج النقل:

إلى / من	المصب (01)	المصب (02)	المصب (03)	S_i
المصدر (01)	18 X_{11}	24 X_{12}	8 X_{13}	450
المصدر (02)	16 X_{21}	23 X_{22}	28 X_{23}	200
D_j	250	200	200	650

3. حل نماذج النقل.

بما أن مشاكل النقل حالات خاصة للبرمجة الخطية، والهدف هنا يكمن في تحديد شبكة النقل من المصادر إلى المصبات بأقل تكلفة ممكنة. هذا سوف يعطينا جدولاً كبيراً ومعقداً بالأرقام يصعب تناوله، فعادة ما نستعمل طرق أخرى أكثر سهولة، فقد أمكن من خلال الدراسة والبحث التوصل إلى طرق أكثر كفاءة في حل مثل هذه المشاكل من الطريقة العامة لحل مشاكل البرمجة الخطية (السيمبلكس)،[1] وتتلخص عملية حل نموذج النقل في خطوتين رئيسيتين هما:[2] تحديد الحل المبدئي للنموذج واختبار أمثلية الحل المبدئي وتحسينه، ويمكن تلخيص خوارزمية حل مشكل النقل في الخطوات الآتية:[3]

- **الخطوة الأولى:** صياغة المشكلة وترتيب البيانات على شكل مصفوفة أو جدول يمثل مشكلة النقل والتي تشبه في صياغتها صياغة مشاكل البرمجة الخطية، ففي مشكلة النقل تمثل دالة الهدف التكلفة الإجمالية للنقل وتمثل القيود مقدار الطلب والعرض المتاح من كل مصدر ومصب على التوالي.
- **الخطوة الثانية:** الحصول على ح عملي أساسي أولي ممكن باتباع إحدى الطرق الثلاث المختلفة: الزاوية الشمالية الغربية أو أقل تكلفة أو فوقل التقريبية، ويجب أن يستوفي الحل الأولي الذي تم الحصول عليه الشروط الثلاثة: أن يكون حلا ممكنا ويحقق جميع قيود العرض والطلب والعدد المطلوب من المتغيرات الأساسية $(m + n - 1)$، حيث (m) عدد الصفوف و(n) عدد الأعمدة،

[1] – **عبد المنعم فليح عبد الله وآخرون**، مرجع سابق، ص: 175.

[2] – **إبراهيم موسى عبد الفتاح**، مرجع سابق، ص: 201.

[3] - **J K SHARMA**, Op-Cit, P: 259.

ويسمى أي حل يحقق هذه الشروط حل أولي أساسي ممكن غير متحلل وخلاف ذلك يسمى حل متحلل أو متفكك أو متدهور.

- **الخطوة الثالثة:** اختبار هذا الحل الإبتدائي الأولى باتباع إحدى الطريقتين: الحجر المتنقل أو التوزيع المعدل، فيتم اختبار الحل الذي تم التوصل إليه في الخطوة الثانية، فإذا كان هو الحل الأمثل نتوقف وخلاف ذلك يتم تحسينه بالبحث عن حل آخر جديد.
- **الخطوة الرابعة:** تحديث الحل وتكرار الخطوة الثالثة حتى يتم الوصول إلى الحل الأمثل.

1.3. إعداد الحل المبدئي (إيجاد حل أساسي): تعتبر الصيغة الجدولية لمشكلة النقل منطلق المرحلة الأولى وهي مرحلة تحديد الحل الإبتدائي الأساسي الأولي الممكن. إذ يمكن وضع الحل المبدئي عشوائيا، وذلك في محاولة لتلبية احتياجات المصبات على ضوء المصادر، ولكن هناك مجموعة من الطرق العلمية المنطقية التي تكمن من الوصول إلى الحل المبدئي والتي تجعل الحل أكثر سهولة وتوصل إلى الحصول على الحل الأمثل بصورة أيسر وأسرع.[1]

وتهدف هذه الخطوة إلى تحديد الحل المبدئي لنموذج النقل والذي ينبغي أن يكون حلاً أساسياً وممكناً في نفس الوقت بالإضافة إلى استيفائه لقيود العرض وقيود الطلب المختلفة، ولتحقيق هذا الهدف يوجد عدة طرق مختلفة تتدرج في كفائتها نذكر منها:[2]

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية (الركن الشمالي الغربي).
- طريقة أقل (أدنى) تكلفة.
- طريقة فوقل التقريبية (طريقة الجزاء).

1.1.3. طريقة الزاوية الشمالية الغربية (North West Method): تسمى كذلك بطريقة الركن الشمالي الغربي أو طريقة الدرج، وتعتبر هذه الطريقة من أسهل وأبسط الطرق وأكثرها شيوعاً وخاصة عندما لا تكون هناك أهمية لتكلفة النقل، ويتم التوزيع في هذه الطريقة من مراكز العرض إلى مراكز الطلب دون أي منطق علمي، إذ تبدأ عملية إيجاد الحل الابتدائي الأساسي الأولي من الزاوية الشمالية الغربية ولذلك سميت هذه الطريقة بهذا الإسم.[3] وتتلخص هذه الطريقة في الخطوات الآتية:[4]

---

[1] – **عبد المنعم فليح عبد الله وآخرون**، مرجع سابق، ص: 183.

[2] – **إبراهيم موسى عبد الفتاح**، مرجع سابق، ص: 201.

[3] – **دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال**، مرجع سابق، ص: 144.

[4] – **إبراهيم موسى عبد الفتاح**، مرجع سابق، ص: 202–204.

- نبدأ بالخلية التي تقع في شمال غرب مصفوفة النقل وهي الخلية (σ_{11})، ولتحديد الكمية التي توضع في هذه الخلية تتم المقارنة بين الكمية المعروضة من المصدر (S_1) والكمية المطلوبة من جهة الاستخدام (D_1).

فإذا كانت ($D_1 < S_1$) والذي يعني أن الكمية المطلوبة تقل عن الكمية المعروضة فيتم شغل الخلية (σ_{11}) بمقدرار (D_1) ويرمز لهذه الكمية بـ (X_{ij}) ويعني ذلك استيفاء قيد العمود الأول وبالتالي يجب حدفه من مصفوفة النقل، أما الكمية المعروضة في الصف الأول من المصفوفة فيتم تخفيضها من الكمية (X_{ij})، ونتحرك أفقياً إلى الخلية (σ_{21}) في الخطوة الآتية.

وإذا كانت ($S_1 < D_1$) والذي يعني أن الكمية المعروضة تقل عن الكمية المطلوبة فيتم شغل الخلية (1،1) بمقدرار (S_1) ويرمز لهذه الكمية بـ (X_{ij}) ويعني ذلك استيفاء قيد الصف الأول وبالتالي يجب حدفه من مصفوفة النقل، أما الكمية المطلوبة في العمود الأول من المصفوفة فيتم تخفيضها من الكمية (X_{ij})، ونتحرك رأسياً إلى الخلية (σ_{12}) في الخطوة الآتية.

وإذا كانت ($S_1 = D_1$) والذي يعني أن الكمية المعروضة تساوي عن الكمية المطلوبة، فيتم شغل الخلية (1،1) بنفس المقدرار (S_1) أو (D_1) باعتبارهما متساويين ويرمز لهذه الكمية بـ (X_{ij}) ويعني ذلك استيفاء قيد الصف الأول وبالتالي يجب حدفه من مصفوفة النقل، واستيفاء قيد العمود الأول من مصفوفة النقل في نفس الوقت، ومن تم حدف كلا من الصف الأول والعمود الأول، ثم نتحرك قطرياً إلى الخلية (σ_{22}) في الخطوة الآتية.

ومن تم فإنه نلاحظ دائما أن ($X_{11} = Min\ (S_1, D_1)$).

- يتم الاستمرار في هذه الخطوات بالانتقال التدريجي من خلال الخلايا الواقعة في الشمال الغربي نحو الخلايا الواقعة في الجنوب الشرقي من مصفوفة المعاملات الفنية لنموذج النقل حتى يتم الانتهاء من توزيع (نقل) كل الكميات المعروضة من المصادر المختلفة وفقا لاحتياجات الطلب من جهات الاستخدام المختلفة.

في النهاية سوف نصل إلى مرحلة يكون لدينا خلية واحدة وسوف تكون قيمة العرض في هذه الخلية مساوية لقيمة الطلب، ونضع هذه القيمة في هذه الخلية، وبذلك تنتهي طريقة الركن الشمالي الغربي، ونكون قد حصلنا على حل أساسي مبدئي.[1] فتضمن طريقة الزاوية الشمالية الغربية أن جميع المتغيرات الأساسية

[1] – **إبراهيم بن صالح العليان**، مرجع سابق، ص: 254.

لن تأخذ قيماً سالبة، كما أن جميع قيود الطلب والعرض سوف تكون محققة، ولهذا فإن الحل الناتج يكون حلاً مقبولاً.[1]

مثال (8-3): مؤسسة لإنتاج الأسمنت لديها ثلاثة (03) مصانع للإنتاج (A) و(B) و(C) وتبلغ الطاقة الإنتاجية الشهرية للمصانع الثلاث: 600، 500، 300 طن على التوالي.

تقوم هذه المؤسسة يتوزيع إنتاجها من الأسمنت إلى أربع جهات بيع رئيسية (R) و(T) و(V) و(W) وتبلغ احتاجاتها الشهرية: 400، 350، 400، 250 طن على التوالي.

وكانت تكلفة نقل الطن الواحد (و ن) من الأسمنت من المصانع إلى مراكز البيع الرئيسية كما يلي:

مراكز البيع / المصانع	المركز (R)	المركز (T)	المركز (V)	المركز (W)
المصنع (A)	70	50	100	80
المصنع (B)	30	60	120	40
المصنع (C)	40	70	90	150

المطلوب: إيجاد الحل المبدئي (الأساسي)، لنموذج النقل مستخدما طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

الإجابة:

- التأكد من أن مجموع الكميات المعروضة يساوي مجموع الكميات المطلوبة:

$$\sum_{i=1}^{3} S_i = 600 + 500 + 300 = 1400$$
$$\sum_{j=1}^{4} D_j = 400 + 350 + 400 + 250 = 1400$$
$$\sum_{i=1}^{3} S_i = \sum_{j=1}^{4} D_j = 1400$$

نلاحظ أن مجموع الكميات المعروضة يساوي مجموع الكميات المطلوبة.

[1] - **إبراهيم بن صالح العليان**، مرجع سابق، ص: 259/258.

- تكوين جدول النقل:

إلى / من	المركز (R)	المركز (T)	المركز (V)	المركز (W)	S_i
المصنع (A)	70 400	50 200	100 *	80 *	~~600~~ 200
المصنع (B)	30 *	60 150	120 350	40 *	~~500~~ 350
المصنع (B)	40 *	70 *	90 50	150 250	~~300~~ 250
D_j	400	~~350~~ 150	~~400~~ 50	250	1400

ومنه فالخانات المملوءة هي:

$X_{11} = 400, X_{12} = 200, X_{22} = 150, X_{23} = 350, X_{33} = 50, X_{34} = 250$

عدد الخانات المملوءة هو: 6، والتي تمثل المتغيرات الأساسية أو المتغيرات داخل الأساس ضمن جداول السيمبلكس، بينما المتغيرات الأخرى تعتبر متغيرات خارج الأساس وتساوي الصفر.

$X_{13} = X_{14} = X_{21} = X_{24} = X_{31} = X_{32} = 0$

تجدر الإشارة إلى أن عدد المتغيرات الأساسية (الداخلة في الحل الأساسي) هو $(m + n - 1)$، حيث أن (m) هو عدد المصادر و(n) هو عدد المصبات، وهي القاعدة الأساسية التي ينبغي توفرها لأجل سيرورة إيجاد الحل الأمثل، وباقي المتغيرات تعتبر متغيرات غير أساسية (خارج الأساس) وتساوي الصفر (0).[1]

التأكد من أن عدد الخانات المملوءة يساوي عدد المصادر زائد عدد المصبات ناقص واحد، أي:

$m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$

وهو عدد الخانات المملوئة.

ووفقاً لهذه الطريقة فإن التكاليف الكلية هي:

$Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23} + C_{33}X_{33} + C_{34}X_{34}$

$Z = 70(400) + 50(200) + 60(150) + 120(350) + 90(50) + 150(250)$

$Z = 28000 + 10000 + 9000 + 42000 + 4500 + 37500$

$Z = 131000$ Um

بالرغم من سهولة استخدام هذه الطريقة في إيجاد الحل المبدئي، إلا أنه يعاب عليها أنها لا تأخذ بعين الاعتبار عامل التكلفة وهو الأهم.

[1] – **محمد راتول**، مرجع سابق، ص: 113.

2.1.3. طريقة أقل (أدنى) تكلفة (Least Cost Method): تسمى كذلك بطريقة التكاليف الدنيا، وتعتمد هذه الطريقة على اختيار الخلية ذات التكلفة الأقل في كل صف وفي كل عمود أي في المصفوفة كلها. إذ يتم البحث في المصفوفة كلها عن تلك الخلية التي تكون فيها تكلفة نقل الوحدة أدنى تكلفة بالمصفوفة كلها، عندئذ يتم شغل الخلية بكمية صفها أو كمية عمودها أيهما أقل، ثم يتم البحث بعد ذلك عن أقل تكلفة نقل للوحدة بعد تكلفة النقل للخلية السابقة، ويتم الاستمرار في هذا العمل حتى يتم مقابلة كل قيود العرض وقيود الطلب.[1] ويجب ملاحظة أنه عندما تتساوى أقل تكلفتين في الجدول فإن الاختيار بينهما يكون عشوائياً.[2]

مثال (8-4): ليكن لدينا جدول النقل الآتي:

إلى / من	المصب (01)	المصب (02)	المصب (03)	S_i
المصدر (01)	6	8	5	**1000**
المصدر (02)	9	3	10	**600**
المصدر (03)	4	12	7	**800**
D_j	**600**	**700**	**1100**	

المطلوب: إيجاد الحل المبدئي (الأساسي)، لنموذج النقل مستخدما طريقة الزاوية الشمالية الغربية ثم طريقة أذنى تكلفة.

الإجابة:

- التأكد من أن مجموع الكميات المعروضة يساوي مجموع الكميات المطلوبة:

$$\sum_{i=1}^{3} S_i = 1000 + 600 + 800 = 2400$$
$$\sum_{j=1}^{3} D_j = 600 + 700 + 1100 = 2400$$
$$\sum_{i=1}^{3} S_i = \sum_{j=1}^{3} D_j = 2400$$

نلاحظ أن مجموع الكميات المعروضة يساوي مجموع الكميات المطلوبة.

[1] – **إبراهيم محمد مهدي**، مقدمة في: بحوث العمليات (الطرق الكمية في الإدارة)، د ط، مكتبة الجلاء الجديدة، المنصورة، مصر، 2006-2007، ص: 228/227.

[2] – **دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال**، مرجع سابق، ص: 146.

طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

من \ إلى	المصب (01)	المصب (02)	المصب (03)	S_i
المصدر (01)	6 **600**	8 **400**	5 *	~~**1000**~~ **400**
المصدر (02)	9 *	3 **300**	10 **300**	~~**600**~~ **300**
المصدر (03)	4 *	12 *	7 **800**	**800**
D_j	**600**	~~**700**~~ **300**	~~**1100**~~ **800**	**2400**

ومنه فالخانات المملوءة أي متغيرات داخل الأساس هي:

$X_{11} = 600, X_{12} = 400, X_{22} = 300, X_{23} = 300, X_{33} = 800$

عدد الخانات المملوءة هو: 5.

التأكد من أن عدد الخانات المملوءة يساوي عدد المصادر زائد عدد المصبات ناقص واحد، أي:

$m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$

وهو عدد الخانات المملوئة.

والخانات الفارغة أي المتغيرات خارج الأساس هي:

$X_{13} = X_{21} = X_{31} = X_{32} = 0$

ووفقاً لهذه الطريقة فإن التكاليف الكلية هي:

$Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23} + C_{33}X_{33}$
$Z = 6(600) + 8(400) + 3(300) + 10(300) + 7(800)$
$Z = 3600 + 3200 + 900 + 3000 + 5600$
$Z = 16300$ Um

طريقة أذنى تكلفة:

إلى / من	المصب (01)	المصب (02)	المصب (03)	S_i
المصدر (01)	6 *	8 *	5 1000	1000
المصدر (02)	9 *	3 600	10 *	600
المصدر (03)	4 600	12 100	7 100	~~800~~ ~~200~~ 100
D_j	600	~~700~~ 100	~~1100~~ 100	2400

أقل تكلفة في الجدول موجودة بالخلية (σ_{22})، أي نبدأ بها، فيتشبع السطر (الصف) الثاني، أي جميع الكمية المنقولة من المصدر (02) سوف تذهب إلى المصب (02)، ويبقى المصب الثاني يحتاج 100 وحدة سوف يتم الحصول عليها من مصدر أخر وهكذا، ننتقل إلى أقل تكلفة أخرى وهي موجودة بالخانة (σ_{13}) وهكذا إلى أن ننتهي.

ومنه فالخانات المملوءة هي:

$X_{13} = 1000, X_{22} = 600, X_{31} = 600, X_{32} = 100, X_{33} = 100$

عدد الخانات المملوءة هو: 5.

التأكد من أن عدد الخانات المملوءة يساوي عدد المصادر زائد عدد المصبات ناقص واحد، أي:

$m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$

وهو عدد الخانات المملوئة.

والخانات الفارغة أي المتغيرات خارج الأساس هي:

$X_{11} = X_{12} = X_{21} = X_{23} = 0$

ووفقاً لهذه الطريقة فإن التكاليف الكلية هي:

$Z = C_{13}X_{13} + C_{22}X_{22} + C_{31}X_{31} + C_{32}X_{32} + C_{33}X_{33}$
$Z = 5(1000) + 3(600) + 4(600) + 12(100) + 7(100)$
$Z = 5000 + 1800 + 2400 + 1200 + 700$
$Z = 11100$ Um

نظرًا لأن الهدف الرئيسي هو تقليل تكلفة النقل الإجمالية، فإنه يتم اختيار الطرق (الخلايا) حيث تكون تكلفة نقل الوحدة أقل، فتأخذ هذه الطريقة في الاعتبار الحد الأدنى لتكلفة النقل للحصول على الحل الأولي.[1]

ونلاحظ بأن طريقة أقل تكلفة سوف تقود حتماً إلى حل مبدئي قيمة دالة الهدف فيه أقل من قيمة دالة الهدف للحل المبدئي الذي يتم الحصول عليه باستعمال طريقة الزاوية الشمالية الغربية نظراً لأن طريقة أدنى تكلفة تأخذ بعين الاعتبار عنصر التكلفة عند اختيار الخلية المرشحة لأن يتم شغلها. فتعتبر هذه الطريقة أفضل من الطريقة السابقة، لأنها تأخذ بعين الاعتبار الأقل تكلفة،[2] وهو هدفنا دائماً في حل مشاكل النقل.[3] ولهذا تهدف إلى إيجاد حل أولي ممكن عبر تخفيض تكلفة النقل على أمل أن يساهم ذلك في تقليل عدد الجداول اللازمة للوصول للحل الأمثل إن وجد.[4]

3.1.3. طريقة فوڤل التقريبية (Vogel's Approximation Method): وتسمى كذلك بطريقة الجزاءات، وتقوم هذه الطريقة على أساس الأخذ في الاعتبار تكلفة الفرصة أو التكلفة الإضافية التي من الممكن تكبدها في حالة عدم التخصيص للخلايا المعنية مع الحد الأدنى لتكلفة نقل الوحدة الواحدة، ومن تم يتم إجراء التخصيص بطريقة أقل تكلفة.[5]

وتتلخص طريقة فوڤل لإيجاد الحل المبدئي لنموذج النقل في الخطوات الآتية:[6]

- يحسب الفرق المطلق بين أصغر تكلفة والتكلفة الموالية لها مباشرة وذلك لكل صف ولكل عمود ويكتب هذا الفرق في نهاية كل صف وكل عمود.
- يتم اختيار أكبر فرق مطلق للتكلفة ويحدد الصف أو العمود الذي ينتمي إليه أكبر فرق مطلق، ثم نختار الخلية ذات الأقل تكلفة بهذا الصف أو هذا العمود ويتم شغلها (ملؤها)، وفي حالة التساوي يتم الاختيار عشوائيا.
- نعيد حساب الفرق المطلق بين أصغر تكلفة والتكلفة الموالية لكل صف ولكل عمود بذون أخذ الصف أو العمود المختار سابقا.

---

[1] - **J K SHARMA**, Op-Cit, P: 260.

[2] – **أكرم محمد عرفان المهتدي**، مرجع سابق، ص: 131.

[3] – **محمد دباس الحميد**، مرجع سابق، ص: 208.

[4] – **خالد بن موسى الطاسان**، المدخل إلى البرمجة الخطية وتطبيقاتها في الإدارة، د ط، دار جامعة الملك سعود، الرياض، المملكة العربية السعودية، 2019، ص: 178.

[5] - **J K SHARMA**, Op-Cit, P: 262.

[6] – **إبراهيم موسى عبد الفتاح**، مرجع سابق، ص: 215-217.

- نستمر في هذه العملية حتى يتم الانتهاء من توزيع جميع الكميات المعروضة من المصادر وفقا لاحتياجات الطلب في جهات الاستخدام المختلفة.

مثال (8-5): تقوم مؤسسة بتوزيع انتاجها من ثلاثة مصانع إلى أربعة أسواق وفقا للجدول الآتي:

من \ إلى	السوق (01)	السوق (02)	السوق (03)	السوق (04)	S_i
المصنع (01)	19	7	3	21	100
المصنع (02)	15	21	18	6	300
المصنع (03)	11	14	15	21	200
D_j	100	150	200	150	

المطلوب: إيجاد الحل المبدئي (الأساسي)، لنموذج النقل مستخدما طريقة فوقل التقريبية.

الإجابة:

- التأكد من أن مجموع الكميات المعروضة يساوي مجموع الكميات المطلوبة:

$\sum_{i=1}^{3} S_i = 100 + 300 + 200 = 600$

$\sum_{j=1}^{4} D_j = 100 + 150 + 200 + 150 = 600$

$\sum_{i=1}^{3} S_i = \sum_{j=1}^{4} D_j = 600$

نلاحظ أن مجموع الكميات المعروضة يساوي مجموع الكميات المطلوبة.

من \ إلى	السوق (01)	السوق (02)	السوق (03)	السوق (04)	S_i				
المصنع (01)	19 *	7 *	3 **100**	21 *	**100**	**4**	**4**	*	*
المصنع (02)	15 **50**	21 *	18 **100**	6 **150**	~~**300**~~ **150**	**9**	**3**	**3**	**3**
المصنع (03)	11 **50**	14 **150**	15 *	21 *	~~**200**~~ **50**	**3**	**3**	**3**	**4**
D_j	~~**100**~~ **50**	**150**	~~**200**~~ **100**	**150**	**600**				
	4	**7**	**12**	**15**					
	4	**7**	**12**	*					
	4	**7**	**3**	*					
	4	*	**3**	*					

ومنه فالخانات المملوءة هي:

$X_{13} = 100, X_{21} = 50, X_{23} = 100, X_{24} = 150, X_{31} = 50, X_{32} = 150$

عدد الخانات المملوءة هو: 6.

التأكد من أن عدد الخانات المملوءة يساوي عدد المصادر زائد عدد المصبات ناقص واحد، أي:

$m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$

وهو عدد الخانات المملوئة.

والخانات الفارغة أي المتغيرات خارج الأساس هي:

$X_{11} = X_{12} = X_{14} = X_{22} = X_{33} = X_{34} = 0$

ووفقاً لهذه الطريقة فإن التكاليف الكلية هي:

$Z = C_{13}X_{13} + C_{21}X_{21} + C_{23}X_{23} + C_{24}X_{24} + C_{31}X_{31} + C_{32}X_{32}$

$Z = 3(100) + 15(50) + 18(100) + 6(150) + 11(50) + 14(150)$

$Z = 300 + 750 + 1800 + 900 + 550 + 2100$

$Z = 6400$ Um

طريقة فوقل أو الطريقة التقريبية في أغلب الحالات تكون أفضل من الطريقتين السابقتين، حيث أنها تعطي حلاً مبدئياً لنموذج النقل أكثر قرباً من الحل الأمثل، إن لم يكن هو نفسه الحل الأمثل، وذلك من خلال أنها تعطي أقل تكلفة كلية مقارنة بالطريقتين السابقتين.

غير أن الحصول على الحل الإبتدائي الأساسي الأولي الممكن لا يعني نهاية المشكلة وإنما يجب استخدام أساليب أخرى لاختبار هذا الحل الأساسي الذي تم الحصول عليه بأنه الحل الأمثل أم يجب تحسينه للحصول على الحل الأمثل إن وجد.

2.3. اختبار أمثلية الحل: يقصد باختبار أمثلية الحل التعرف على ما إذا كان هذا الحل هو الحل الأمثل أم أن هناك حل أو حلول أخرى أفضل منه، وبعبارة أخرى تحديد ما إذا كان يمكن تخفيض تكلفة النقل بملأ خلية أو أكثر خلاف تلك الخلايا التي تم شغلها في الحل السابق المبدئي، أي إدخال متغيرات غير أساسية في الحل لتصبح متغيرات أساسية.[1]

وللوصول إلى الحل الأمثل لنموذج النقل، فإن ذلك يتطلب أولاً تحديد الحل المبدئي للنموذج الذي يمكن التوصل إليه بإحدى الطرق السابقة الذكر، ثم يلي ذلك اختبار أمثلية هذا الحل المبدئي الذي تم التوصل إليه، فإذا وجد أن هذا الحل المبدئي هو نفسه الحل الأمثل فنكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل المنشود لنموذج النقل، أما إذا كان هذا الحل المبدئي غير أمثلا، فيلي ذلك عملية تحسين الحل المبدئي

[1] – **عبد المنعم فليح عبد الله وآخرون**، مرجع سابق، ص: 194.

وذلك من خلال اختيار المتغير الداخل والمتغير الخارج والانتقال إلى جدول جديد،[1] وهناك طرقتين لاختبار أمثلية الحل المبدئي وتحسينه، وتوجد طريقتين لتحسين الحل والحصول على الحل الأمثل هما:

- طريقة الحجر المتنقل.
- طريقة التوزيع المعدل.

1.2.3. طريقة الحجر المتنقل (Stepping Stone Method): تسمى كذلك بطريقة الحلقات المغلقة أو طريقة المسار المغلق أو طريقة القفز على الصخور أو المسار المتعرج أو طريقة حجر الوطء أو طريقة التجريب، ويتمثل محتوى هذه الطريقة في أننا نجرب كل طرق النقل غير المستعملة في الحل الإبتدائي وذلك بإدخالها إلى الحل واحدة بعد الأخرى ونرى مدى تأثيرها على تخفيض الكتلفة الكلية للنقل المتحصل عليها في الحل الإبتدائي.

ففكرة هذه الطريقة هي البحث عن الخلايا غير المشغولة (غير الداخلة في الحل) والتي من شأنها أن تدني الكتلفة الكلية في حالة إدخالها إلى الحل الأساسي، أي ينبغي إيجاد ما يصطلح عليه بالتكاليف الحدية (تكاليف نقل الوحدة الواحدة) لكل خلية غير أساسية في الحل.[2]

وتتطلب هذه الطريقة تقييم كل خلية غير مشغولة (غير أساسية) والتي نرمز لها بالرمز (σ_{ij}) ضمن جدول الحل الابتدائي الأساسي الأولي لمعرفة ماذا سيحدث لتكاليف النقل الكلية إذا تم نقل وحدة واحدة إلى أحد الخلايا غير المشغولة، فإذا وجدنا أن استغلال هذا الطريق سيؤدي إلى تقليل التكاليف يتم تعديل الحل الراهن وتستمر عملية التقييم لجميع الخلايا غير المشغولة إلي أن نتوصل إلى أن اشغال أي خلية غير مشغولة لا يؤذي إلى تقليل تكاليف النقل بل سيؤدي إلى زيادتها.[3]

أي سوف نعتبر أن الخلايا المشغولة في مصفوفة النقل خلايا أساسية، أي كمتغيرات أساسية في الحل بطريقة السيمبلكس، بينما نعتبر باقي الخلايا غير المشغولة في مصفوفة النقل خلايا غير أساسية، كمتغيرات خارج الأساس في الحل بطريقة السيمبلكس، وينبغي ملاحظة العلاقات الآتية في مصفوفة النقل:[4]

- مجموع خلايا المصفوفة يساوي **(m x n)**.
- مجموع الخلايا الأساسية أي المشغولة ينبغي أن يساوي **(m + n - 1)**.

---

[1] – **إبراهيم موسى عبد الفتاح**، مرجع سابق، ص: 223/222.

[2] – **محمد راتول**، مرجع سابق، ص: 114.

[3] – **دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال**، مرجع سابق، ص: 149.

[4] – **إبراهيم موسى عبد الفتاح**، مرجع سابق، ص: 224/223.

- مجموع الخلايا غير الأساسية أي غير المشغولة يساوي $(mn - m - n + 1)$، بحيث:

$$mn - m - n + 1 = (m - 1)(n - 1)$$

وفقاً لهذه الطريقة يتم إجراء عملية تقييم للخلايا غير الأساسية في جدول الحل الأساسي، حيث يتم اختيار الأثر المحتمل على قيمة دالة الهدف (Z) عند تحويل الخلية غير الأساسية موضع التقييم إلى خلية أساسية وذلك بدراسة أثر زيادة تكلفة النقل بمقدار تكلفة نقل الوحدة من نفس الصنف وهذا يستلزم بدوره زيادة التكلفة في خلية أساسية في نفس العمود ويتم ذلك في سلسلة تكون إشاراتها كالآتي: (+)، (−)، (+)، (−)، .... وهكذا حتى نصل إلى نهاية الحلقة المغلقة وذلك حتى يتم إعادة التوازن لمصفوفة النقل.[1]

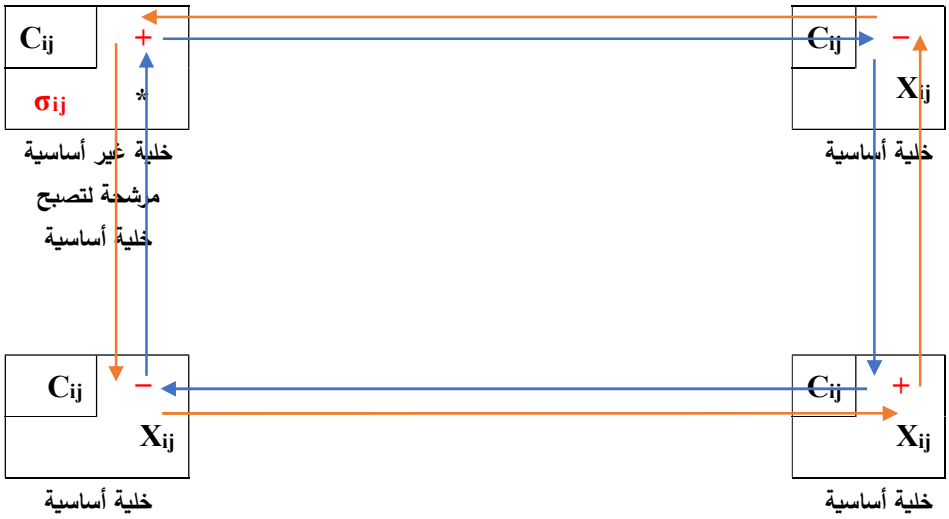
فمسار الحلقة المغلقة يكون عبارة عن مضلع مغلق تكون نقطة البداية فيه هي الخلية غير الأساسية موضع التقييم بينما تكون جميع الخلايا الأخرى المشكلة للمضلع أساسية، وتكون نقطة النهاية في المسار هي نفس الخلية غير الأساسية موضع التقييم، ويلاحظ أن لكل خلية غير أساسية مسار مغلق واحد في الحل، ويراعى في تشكيل الحلقة المغلقة ما يلي:[2]

- كل زوج من الخلايا المتتالية يقع إما في نفس الصف أو نفس العمود.
- لا تقع ثلاث خلايا متتالية في نفس الصف أو نفس العمود.
- تقع الخلايا الأولى والأخيرة في نفس الصف أو نفس العمود.
- لا تظهر أية خلية أكثر من مرة واحدة في التسلسل.

[1] – **إبراهيم موسى عبد الفتاح**، مرجع سابق، ص: 224.

[2] – **نفس المرجع**، ص: 225/224.

طريقة الحجر المتنقل.



والقيمة النهائية في الحلقة المغلقة تعبر عن الأثر المحتمل على دالة الهدف في حالة تحويل الخلية موضع التقييم إلى خلية أساسية وهو يعرف أحياناً بتكلفة الفرصة البديلة.[1]

وحيث أن الهدف هو تذنية تكلفة النقل إلى حدها الأدنى فإن الحل المبدئي يعد حل أمثل إذا كانت نتائج عملية التقييم لجميع الخلايا غير الأساسية كلها قيماً موجبه أو صفر، أما في حالة ظهور قيماً سالبة فإن ذلك أن الحل المبدئي ليس هو الحل الأمثل، حيث يمكن تذنية قيمة دالة الهدف باختيار الخلية غير الأساسية التي أعطت قيمة سالبة وتحويلها إلى خلية أساسية.[2]

وفي حالة وجود أكثر من خلية غير أساسية لها نتائج تقييم سالبة فتؤخذ أولاً الخلية التي لها أكبر قيمة سالبة ويتم تحويلها إلى خلية أساسية حيث أنها تحقق تذنية أكبر في إجمالي تكاليف نموذج النقل.[3]

وعدد الوحدات الواجب نقلها إلى الخلية غير المشغولة تتحدد من المسار المغلق (الحلقة المغلقة)، إذ أن أقل عدد من الوحدات في هذا المسار في الخلايا التي تحمل الإشارة السالبة (−)، فيتم إضافة هذه القيمة إلى الخلايا التي تحمل الإشارة الموجبة (+) طرحها من الخلايا التي تحمل الإشارة السالبة (−) وبذلك تتغير قيم الخلايا في المسار المغلق،[4] أما الكميات الموجودة بالخلايا الأساسية غير الواقعة على هذا المسار فتظل كما هي بدون تعديل.

---

[1] – **إبراهيم موسى عبد الفتاح**، مرجع سابق، ص: 225.

[2] – **نفس المرجع**، ص: 225.

[3] – **نفس المرجع**، ص: 226.

[4] – **دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال**، مرجع سابق، ص: 153.

مثال (8-6): مؤسسة وطنية لديها ثلاث مخازن رئيسية، مكلفة بتموين ثلاث مناطق من البلاد، والكميات المتاحة وقدرات استقبال المناطق الثلاث وتكاليف نقل الوحدة الواحدة من كل مخزن إلى كل منطقة يعطيها الجدول الآتي:

تكلفة نقل الوحدة الواحدة	المخزن 01	المخزن 02	المخزن 03	قدرات الاستقبال
المنطقة 01	**7**	**8**	**5**	**400**
المنطقة 02	**3**	**7**	**4**	**300**
المنطقة 03	**3**	**5**	**10**	**300**
متاحات المخازن	**200**	**200**	**600**	

المطلوب:

- إيجاد الحل المبدئي باستعمال طريقة التكاليف الدنيا.
- إيجاد الحل الأمثل باستعمال طريقة الحجر المتنقل.

الإجابة:

- التأكد من أن الكمية الكلية المطلوبة تساوي الكمية الكلية المعروضة:

$\sum_{i=1}^{3} S_i = 200 + 200 + 600 = 1000$

$\sum_{j=1}^{3} D_j = 400 + 300 + 300 = 1000$

$\sum_{i=1}^{3} S_i = \sum_{j=1}^{3} D_j = 1000$

نلاحظ أن مجموع الكميات المعروضة يساوي مجموع الكميات المطلوبة.

- إيجاد الحل المبديئ باستعمال طريقة التكاليف الدنيا:

إلى / من	المنطقة (01)	المنطقة (02)	المنطقة (03)	S_i
المخزن (01)	7 *	8 **100**	5 **300**	~~**400**~~ **100**
المخزن (02)	3 *	7 *	4 **300**	**300**
المخزن (03)	3 **200**	5 **100**	10 *	~~**300**~~ **100**
D_j	**200**	~~**200**~~ **100**	~~**600**~~ **300**	**1000**

ومنه فالخانات المملوءة هي:

$X_{12} = 100, X_{13} = 300, X_{23} = 300, X_{31} = 200, X_{32} = 100$

عدد الخانات المملوءة هو: 5.

التأكد من أن عدد الخانات المملوءة يساوي عدد المصادر زائد عدد المصبات ناقص واحد، أي:

$m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$

وهو عدد الخانات المملوئة.

والخانات الفارغة أي المتغيرات خارج الأساس هي:

$X_{11} = X_{21} = X_{22} = X_{33} = 0$

ووفقاً لهذه الطريقة فإن التكاليف الكلية هي:

$Z = C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + C_{23}X_{23} + C_{31}X_{31} + C_{32}X_{32}$
$Z = 8(100) + 5(300) + 4(300) + 3(200) + 5(100)$
$Z = 800 + 1500 + 1200 + 600 + 500$
$Z = 4600$ Um

- إيجاد الحل الأمثل باستعمال طريقة الحجر المتنقل:

من \ إلى	المنطقة (01)	المنطقة (02)	المنطقة (03)	S_i
المخزن (01)	7 σ_{11}	8 100	5 300	400
المخزن (02)	3 σ_{21}	7 σ_{22}	4 300	300
المخزن (03)	3 200	5 100	10 σ_{33}	300
D_j	200	200	600	1000

σ_{11} : $C'_{11} = + C_{11} - C_{12} + C_{32} - C_{31} = + 7 - 8 + 5 - 3 = + 1$
σ_{21} : $C'_{21} = + C_{21} - C_{31} + C_{32} - C_{12} + C_{13} - C_{23} = + 3 - 3 + 5 - 8 + 5 - 4 = -2$
σ_{22} : $C'_{22} = + C_{22} - C_{23} + C_{13} - C_{21} = + 7 - 4 + 5 - 8 = 0$
σ_{33} : $C'_{33} = + C_{33} - C_{13} + C_{12} - C_{32} = + 10 - 5 + 8 - 5 = + 8$

فإذا كانت نتيجة التغير في التكاليف أكبر من الصفر، فهذا يعني أن هذه الخلية لو دخلت إلى الحل سوف تؤذي إلى زيادة التكاليف فيتم ترك هذه الخلية؛ أما إذا كانت نتيجة التغير في التكاليف تساوي صفر، فهذا يعني أن هذه الخلية لو دخلت إلى الحل فلا تؤثر على التكاليف لا بالزيادة ولا بالنقصان؛ أما إذا كانت نتيجة التغير أقل من الصفر، فهذا يعني أن دخول هذه الخلية إلى الحل يؤذي إلى تخفيض التكاليف.[1]

[1] – **محمد الفاتح محمود بشير المغربي**، الأساليب الكمية في إدارة الأعمال، الطبعة الأولى، دار الجنان، عمان، الأردن، 2017، ص: 206.

وعموما يكون الحل غير أمثلا إذا كانت إحدى أو بعض التكاليف الحدية سالبة ($\text{Min } C'_{ij} < 0$) والخلية المرشحة للدخول إلى الأساس هي المقابلة لأكبر تكلفة حدية سالبة.[1]

يتم الانتقال إلى حل أفضل باختيار الخلية الفارغة (متغير غير أساسي) التي توفر أكثر من غيرها لو استخدمت في الحل، وبهذا نكون قد حصلنا على حل أساسي جديد، ونعيد نفس الخطوات السابقة لاختباره، وهكذا حتى نحصل على الحل الأمثل.[2]

المتغير الداخل إلى الأساس هو (X_{21}) والذي يقابل أقل قيمة (أكبر قيمة بالسالب والتي هي هنا ($\text{Min } C'_{ij} = -2 < 0$))، أي سوف تنخفض تكلفة نقل الوحدة بستة واحدات نقدية.

تشكيل الجدول الجديد

من \ إلى	المنطقة (01)	المنطقة (02)	المنطقة (03)	S_i
المخزن (01)	7 σ_{11} *	8 σ_{12} *	5 400	400
المخزن (02)	3 100	7 σ_{22} *	4 200	300
المخزن (03)	3 100	5 200	10 σ_{33} *	300
D_j	200	200	600	1000

σ_{11} : $C'_{11} = + C_{11} - C_{13} + C_{23} - C_{21} = + 7 - 5 + 4 - 3 = + 3$

σ_{12} : $C'_{12} = + C_{12} - C_{13} + C_{23} - C_{21} + C_{31} - C_{32} = + 8 - 5 + 4 - 3 + 3 - 5 = + 2$

σ_{22} : $C'_{22} = + C_{22} - C_{32} + C_{31} - C_{21} = + 7 - 5 + 3 - 3 = + 2$

σ_{33} : $C'_{33} = + C_{33} - C_{23} + C_{21} - C_{31} = + 10 - 4 + 3 - 3 = + 6$

نلاحظ أنه لا توجد قيمة سالبة ($\text{Min } C'_{ij} = +2 > 0$) ومنه هذا هو جدول الحل الأمثل.

ومنه فالحل الأمثل هو:

$X_{13} = 400, X_{21} = 100, X_{23} = 200, X_{31} = 100, X_{32} = 200$

$X_{11} = X_{12} = X_{22} = X_{33} = 0$

ووفقاً لهذه الطريقة فإن التكاليف الكلية هي:

$Z = C_{13}X_{13} + C_{21}X_{21} + C_{23}X_{23} + C_{31}X_{31} + C_{32}X_{32}$

$Z = 5(400) + 3(100) + 4(200) + 3(100) + 5(200)$

$Z = 2000 + 300 + 800 + 300 + 1000$

$Z = 4400$ Um

[1] – **محمد راتول**، مرجع سابق، ص: 118.

[2] – **محمد دباس الحميد**، مرجع سابق، ص: 205.

نلاحظ أن قيمة التكلفة الكلية الآن أصبحت 4400 ون بعدما كانت 4600 ون.

يتضح مما سبق في طريقة الحجر المتنقل أنه لتقييم الخلايا غير المملوءة يلزم حساب تكلفة الفرصة الضائعة لكل خلية فارغة، وذلك بتحديد المسار المغلق لكل خلية فارغة وحساب الأثر على التكلفة، وتنفيذ ذلك يتطلب جهدا ووقتا ليس بالقصير، لذا فإن طريقة التوزيع المتعادل تحاول تجنب ذلك، وذلك بعدم تحديد المسار المغلق لجميع الخلايا الفارغة، بل يتم الإكتفاء بتحديد المسار المغلق لخلية واحدة وهي الخلية الفارغة المرشحة للدخول إلى الحل الجديد.

2.2.3. طريقة التوزيع المعدل (Modified Distribution Method): تسمى كذلك بطريقة المضاريب أو طريقة عوامل الضرب أو طريقة (UV) لاعتمادها في الحل على حساب قيم المؤشرات (U_i) و(V_j) للخانات المملوءة (المتغيرات الأساسية). وفكرة هذه الطريقة هي نفس فكرة الطريقة السابقة، غير أن الإختلاف في منهجية التطبيق، إذ أن هذه الطريقة تفرض وجود مغيرين مجهولين هما (U_i) يعبر عن كل صف (سطر) و(V_j) يعبر عن كل عمود، حيث أن حاصل جمعهما بالنسبة للخلايا المملوءة يجب أن يساوي تكلفة نقل الوحدة الواحدة عبر تلك الخلايا.[1]

كما أن هدف هذه الطريقة لا يختلف عن هدف طريقة المسار المتعرج والمتمثل في تقييم الفعالية الاقتصادية للمسارات غير المستخدمة لإظهار تأثيرها في حالة استخدامها أملاً في تحقيق الحل الأمثل، إلا أن ما يميز هذه الطريقة عن السابقة هو عدم الحاجة إلى رسم جميع المسارات المتعرجة مما ينتج عن ذلك اختصار في الجهد والوقت.[2]

فنرفق بكل صف (i) متغير نرمز له بالرمز (U_i) وبكل عمود (j) متغير نرمز له بالرمز (V_j)، فيكون من أجل كل خلية مملوءة (متغير أساسي) تحقيق المعادلة ($C_{ij} = U_i + V_j$).[3]

ضمن مشكل النقل يكون لدينا ($m + n$) قيد، حيث أن (m) هو عدد قيود العرض و(n) هو عدد قيود الطلب، ويكون لدينا ($m \times n$) متغير،[4] وبما أن عدد المتغيرات الأساسية يكون ($m + n - 1$) فإننا نحصل على ($m + n - 1$) معادلة، بينما عدد المتغيرات (U_i) و(V_j) يكون ($m + n$)، لذلك لابد من أن نعطي أحد

[1] – **محمد راتول**، مرجع سابق، ص: 122.

[2] – **أكرم محمد عرفان المهتدي**، مرجع سابق، ص: 146.

[3] – **محمد دباس الحميد**، مرجع سابق، ص: 217.

[4] - **J K SHARMA**, Op-Cit, P: 259.

المتغيرات قيمة اختيارية ثم نحل هذه المعادلات وفق هذه القيمة. وافتراضا يتم منح المتغير (U_1) القيمة صفر (0)، أي ($U_1 = 0$).[1]

وبعد إيجاد جميع قيم المتغيرات (U_i) و(V_j)، فإنه من أجل كل خلية غير أساسية (الخلايا الفارغة) نحسب التكلفة المقدرة بالعلاقة ($C'_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$).[2] ويمكن اتباع الخطوات الآتية لاستخدام هذه الطريقة:[3]

- التأكد من أن عدد الخلايا المشغولة (المملوءة) يساوي ($m + n - 1$).
- يتم تكوين معادلة لكل خلية مشغولة في جدول الحل الإبتدائي الأساسي الأولى على أساس المعادلة الآتية:

$$C_{ij} = U_i + V_j$$

حيث:

U_i: المتغير الخاص بالسطر (i) والذي تقع فيه الخلية المعنية.

V_j: المتغير الخاص بالعمود (j) والذي تقع فيه الخلية المعنية.

C_{ij}: تكلفة الخلية التي تقع في السطر (i) والعمود (j).

- إيجاد الحل للمعادلات للخلايا المشغولة وحسب الصيغة التي تم ذكرها سابقاً.
- حساب تكلفة الفرصة البديلة (المقدرة) للخلايا غير المشغولة وفقا للمعادلة الآتية:

$$C'_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$$

فإذا كانت هناك خلية أو أكثر من خلية غير مشغولة تكون التكلفة غير المباشرة لها سالبة، فهذا يعني أن هناك إمكانية لتطوير الحل وتحسينه وتخفيض التكاليف، وتعطى الأولوية للخلية التي لها أكبر قيمة سالبة، ويتم رسم المسار أو الحلقة المغلقة كما تم في الطريقة السابقة.

مثال (8-7): فلاح يمتلك ثلاثة مزارع لإنتاج البطاطا وكانت الطاقة الإنتاجية السنوية القصوى (بالطن) للمزارع الثلاث هي على الترتيب: 80، 100، 120، يقوم بنقل إنتاج هذه المزارع الثلاث إلى ثلاثة مراكز رئيسية للتوزيع طاقتها الاستيعابية السنوية القصوى (بالطن) هي على الترتيب: 60، 140، 100، فإذا علمت أن تكلفة نقل الطن الواحد من المزارع إلى مراكز التوزيع (ون) موضحة بمصفوفة النقل الآتية:

---

[1] – **محمد دباس الحميد**، مرجع سابق، ص: 218/217.

[2] – **نفس المرجع**، ص: 218.

[3] – **دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال**، مرجع سابق، ص: 158/157.

مركز التوزيع / المزرعة	المركز (01)	المركز (02)	المركز (03)
المزرعة (01)	**118**	**120**	**114**
المزرعة (02)	**113**	**122**	**123**
المزرعة (03)	**117**	**115**	**110**

المطلوب:

- تحديد الحل المبدئي لنموذج النقل باستعمال طريقة الزاوية الشمالية الغربية.
- تحديد الحل الأمثل باستعمال طريقة التوزيع المتعادل.

الإجابة:

- التأكد من أن الكمية الكلية المطلوبة تساوي الكمية الكلية المعروضة:

$\sum_{i=1}^{3} S_i = 80 + 100 + 120 = 300$
$\sum_{j=1}^{3} D_j = 60 + 140 + 100 = 300$
$\sum_{i=1}^{3} S_i = \sum_{j=1}^{3} D_j = 300$

نلاحظ أن مجموع الكميات المعروضة يساوي مجموع الكميات المطلوبة.

- إيجاد الحل المبدييئ باستعمال طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

إلى / من	المركز (01)	المركز (02)	المركز (03)	S_i
المزرعة (01)	118 **60**	120 *	114 **20**	~~**80**~~ **20**
المزرعة (02)	113 *	122 **100**	123 *	**100**
المزرعة (03)	117 *	115 **40**	110 **80**	~~**120**~~ **80**
D_j	**60**	~~**140**~~ **40**	~~**100**~~ **80**	**300**

ومنه فالخانات المملوءة هي:

$X_{11} = 60, X_{13} = 20, X_{22} = 100, X_{32} = 40, X_{33} = 80$

عدد الخانات المملوءة هو: 5.

التأكد من أن عدد الخانات المملوءة يساوي عدد المصادر زائد عدد المصبات ناقص واحد، أي:

$m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$

وهو عدد الخانات المملوئة.

إذن عدد الخلايا الفارغة (المتغيرات غير الأساسية) هو 4، كالآتي:

$X_{12} = X_{21} = X_{23} = X_{31} = 0$

ووفقاً لهذه الطريقة فإن التكاليف الكلية هي:

$Z = C_{11}X_{11} + C_{13}X_{13} + C_{22}X_{22} + C_{32}X_{32} + C_{33}X_{33}$
$Z = 118(60) + 114(20) + 122(100) + 115(40) + 110(80)$
$Z = 7080 + 2280 + 12200 + 4600 + 8800$
$Z = 34960$ Um

- إيجاد الحل الأمثل باستعمال طريقة الحجر المتنقل:

		$V_1 = 118$	$V_2 = 119$	$V_3 = 114$	
	إلى / من	المركز (01)	المركز (02)	المركز (03)	S_i
$U_1 = 0$	المزرعة (01)	118 - 60	120 *	114 + 20	80
$U_2 = 3$	المزرعة (02)	113 + *	122 - 100	123 *	100
$U_3 = -4$	المزرعة (03)	117 *	115 + 40	110 - 80	120
	D_j	60	140	100	300

نحسب قيم (U_i) و(V_j) بالاعتماد على (C_{ij}) للخلايا المملوءة انطلاقا من العلاقة الآتية:

$$C_{ij} = Ui + Vj$$

نفرض أن:

$U_1 = 0$

$C_{11} = U_1 + V_1, U_1 = 0 \Rightarrow V_1 = C_{11} - U_1 \Rightarrow V_1 = 118 - 0 \Rightarrow \mathbf{V_1 = 118}$
$C_{13} = U_1 + V_3, U_1 = 0 \Rightarrow V_3 = C_{13} - U_1 \Rightarrow V_3 = 114 - 0 \Rightarrow \mathbf{V_3 = 114}$
$C_{33} = U_3 + V_3, V_3 = 114 \Rightarrow U_3 = C_{33} - V_3 \Rightarrow U_3 = 110 - 114 \Rightarrow \mathbf{U_3 = -4}$
$C_{32} = U_3 + V_2, U_3 = -4 \Rightarrow V_2 = C_{32} - U_2 \Rightarrow V_2 = 115 - (-4) \Rightarrow \mathbf{V_2 = 119}$
$C_{22} = U_2 + V_2, V_2 = 119 \Rightarrow U_2 = C_{22} - V_2 \Rightarrow U_2 = 122 - 119 \Rightarrow \mathbf{U_2 = 3}$

نحسب التكلفة المقدرة للخلايا الفارغة انطلاقا من العلاقة الآتية:

$$C'_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$$

σ_{12} : $C'_{12} = C_{12} - (U_1 + V_2) \Rightarrow C'_{12} = 120 - (0 + 119) \Rightarrow \mathbf{C'_{12} = +1}$
σ_{21} : $C'_{21} = C_{21} - (U_2 + V_1) \Rightarrow C'_{21} = 113 - (3 + 118) \Rightarrow \mathbf{C'_{12} = -8}$
σ_{23} : $C'_{23} = C_{23} - (U_2 + V_3) \Rightarrow C'_{23} = 123 - (3 + 114) \Rightarrow \mathbf{C'_{12} = +6}$
σ_{31} : $C'_{31} = C_{31} - (U_3 + V_1) \Rightarrow C'_{31} = 117 - (-4 + 118) \Rightarrow \mathbf{C'_{12} = +3}$

عادة ما يتم إجراء جميع الحسابات السابقة مباشرة على جدول النقل كما هو موضح في الجدول، مما يعني أنه ليس من الضروري كتابة معادلات (U_i, V_j)، كما أنه من أجل تمكين عملية الحساب يتم وضع $(U_1 = 0)$، لأن عدد المتغيرات (U_i, V_j) لا يساوي عدد المعادلات.

نأخذ أقل قيمة سالبة ($\text{Min } C'_{ij} = -8 < 0$) ونقوم برسم المسار إنطلاقا من هذه الخلية الفارغة عبر الخلايا المملوءة والعودة إلى نفس الخلية الفارغة بتشكيل حلقة مغلقة، ومنه فالمتغير الداخل إلى الأساس هو (X_{21})، والمتغير الخارج من الأساس هو (X_{11}).

نشكل الجدول الجديد:

		$V_1 = 110$	$V_2 = 119$	$V_3 = 114$	
	من \ إلى	المركز (01)	المركز (02)	المركز (03)	S_i
$U_1 = 0$	المزرعة (01)	118 *	120 *	114 **80**	**80**
$U_2 = 3$	المزرعة (02)	113 **60**	122 **40**	123 *	**100**
$U_3 = -4$	المزرعة (03)	117 *	115 **100**	110 **20**	**120**
	D_j	**60**	**140**	**100**	**300**

قد يكون الحل المحقق في هذا الجدول هو الحل الأمثل، إلا أن ذلك يتطلب اختبار أمثلية هذا الجدول الذي تم التوصل إليه طبقاً لنفس القواعد السابقة.

التأكد من أن عدد الخانات المملوءة يساوي عدد المصادر زائد عدد المصبات ناقص واحد، أي:

$m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$

وهو عدد الخانات المملوئة.

إذن عدد الخلايا الفارغة (غير المشغولة) هو 4.

نحسب قيم (U_i) و(V_j) بالاعتماد على (C_{ij}) للخلايا المملوءة انطلاقا من العلاقة الآتية:

$$\mathbf{C_{ij} = Ui + Vj}$$

نفرض أن:

$\mathbf{U_1 = 0}$

$C_{13} = U_1 + V_3, U_1 = 0 \Rightarrow V_3 = C_{13} - U_1 \Rightarrow V_3 = 114 - 0 \Rightarrow \mathbf{V_3 = 114}$

$C_{33} = U_3 + V_3, V_3 = 114 \Rightarrow U_3 = C_{33} - V_3 \Rightarrow U_3 = 110 - 114 \Rightarrow \mathbf{U_3 = -4}$

$C_{32} = U_3 + V_2, U_3 = -4 \Rightarrow V_2 = C_{32} - U_2 \Rightarrow V_2 = 115 - (-4) \Rightarrow \mathbf{V_2 = 119}$

$C_{22} = U_2 + V_2, V_2 = 119 \Rightarrow U_2 = C_{22} - V_2 \Rightarrow U_2 = 122 - 119 \Rightarrow \mathbf{U_2 = 3}$

$C_{21} = U_2 + V_1, U_2 = 3 \Rightarrow V_1 = C_{22} - U_2 \Rightarrow V_1 = 113 - 3 \Rightarrow \mathbf{V_1 = 110}$

نحسب التكلفة المقدرة للخلايا الفارغة انطلاقا من العلاقة الآتية:

$$\mathbf{C'_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)}$$

σ_{11} : $C'_{11} = C_{11} - (U_1 + V_1) \Rightarrow C'_{11} = 118 - (0 + 110) \Rightarrow \mathbf{C'_{12} = +8}$

σ_{12} : $C'_{12} = C_{12} - (U_1 + V_2) \Rightarrow C'_{12} = 120 - (0 + 119) \Rightarrow \mathbf{C'_{12} = +1}$

σ_{23} : $C'_{23} = C_{23} - (U_2 + V_3) \Rightarrow C'_{23} = 123 - (3 + 114) \Rightarrow \mathbf{C'_{12} = +6}$

σ_{31} : $C'_{31} = C_{31} - (U_3 + V_1) \Rightarrow C'_{31} = 117 - (-4 + 110) \Rightarrow \mathbf{C'_{12} = +11}$

نلاحظ أنه لا توجد قيم سالبة ($\text{Min } C'_{ij} = +1 > 0$)، وبالتالي فهذا الجدول هو جدول الحل الأمثل.

الحل الأمثل هو:

$X_{13} = 80, X_{21} = 60, X_{22} = 40, X_{32} = 100, X_{33} = 20$

$X_{11} = X_{12} = X_{23} = X_{31} = 0$

ووفقاً لهذا الحل الأمثل فإن التكاليف الكلية هي:

$Z = C_{13}X_{13} + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + C_{32}X_{32} + C_{33}X_{33}$

$Z = 114(80) + 113(60) + 122(40) + 115(100) + 110(20)$

$Z = 9120 + 6780 + 4880 + 11500 + 2200$

$Z = 34480$ Um

نلاحظ أن الفرق بين طريقة المسار المتعرج وطريقة التوزيع المعدل هو في أسلوب الوصول إلى دلائل التحسين، أما باقي الخطوات فهي متماثلة، كما أن اختبار أمثلية الحل المبدئي في نموذج النقل بنفس الفكرة المتبعة في طريقة السيمبلكس والتي تعتمد على فكرة تحويل المتغيرات غير الأساسية في الحل إلى متغيرات أساسية ويتم ذلك في نموذج النقل بطريقة تتناسب وخصائص هذا النموذج.

<u>ملاحظات:</u>

- عندما يكون إجمالي العرض مساوياً لإجمالي الطلب، فإن مشكلة النقل في هذه الحالة تعتبر متوازنة، وغير ذلك فإنها تعتبر غير متوازنة، ويمكن جعلها متوازنة عن طريق إضافة مركز عرض (صف) أو مركز طلب (عمود) وهمي حسب الحاجة.
- عندما يكون عدد التخصيصات (عدد المتغيرات الأساسية) في أي مرحلة ممكنة للحل أقل من العدد المطلوب ($m + n - 1$)، يقال عن هذا الحل بأنه متحلل (متدهور).
- الخلايا الموجودة في جدول النقل ذات التخصيص الإيجابي ($X_{ij} > 0$) تسمى الخلايا المشغولة (المملوؤة)، وبخلاف ذلك تسمى الخلايا غير المشغولة (الفارغة) وتكون متغيراتها تساوي الصفر ($X_{ij} = 0$).

4. الحالات الخاصة لمشكل النقل.

في الواقع العملي فإن شرط التوازن قد لا يتحقق في أغلب الأحوال، إذ قد تزيد الكميات المعروضة عن الكميات المطلوبة أو العكس، ويكون هناك فائض أو عجز، كما يمكن أن تكون إحدى طرق النقل مقطوعة لأسباب طبيعية أو اقتصادية أو سياسية تمنع من استعمال هذه الطرق في النقل، هذا بالإضافة إلى أنه في بعض الحالات لا نتحصل على عدد المتغيرات الأساسية أي الخلايا المشغولة لا يساوي العدد المطلوب $(m + n - 1)$ فنقع فيما يعرف بحالة التحلل أو التفكك، أو نتحصل على أكثر من حل أمثل والذي يعرف بتعدد الحلول المثلى، كما أن نموذج النقل أصبح يستعمل في تعظيم الربح الناتج عن عملية النقل وليس لتخفيض التكاليف فقط، وهذا ما سوف نتطرق إليه.

1.4. حالة عدم التوازن (Unbalanced): كانت التطبيقات السابقة في حالة التعادل بين الكمية المعروضة والكمية المطلوبة، وهي حالة نادراً ما تحدث، أي فيما سبق كان مجموع كمية العرض مساوي لمجموع كمية الطلب، أي أنها مشكلة نقل متوازنة، لكن في بعض الحالات قد تكون هذه القيم غير متساوية وبالتالي يكون النموذج غير متوازن، فتساوي العرض مع الطلب عمليا شرط يصعب تحقيقه في الواقع، إذ يكون إما العرض أكبر من الطلب أو الطلب أكبر من العرض وفي هذه الحالة ينبغي العمل على توفير هذا الشرط.[1] ويتم معالجة هذه الحالة باستخدام مصدر وهمي في حالة كثرة الطلب أو مصب وهمي في حالة كثرة العرض، حيث نعادل الفرق بين العرض والطلب بالقيمة الوهمية للطلب الفائض أو العرض الفائض وفي كلتا الحالتين تكون تكلفة النقل لكل خلية وهمية صفر (0)، حيث لا يتم فعلاً النقل من المصدر الوهمي أو إلى المصب الوهمي.[2]

1.1.4. حالة الطلب أكبر من العرض: نقوم في هذه الحالة بإضافة مصدر وهمي يعرض الفرق بين الطلب الزائد عن العرض الفعلي وجعل تكلفة النقل من المصدر الوهمي إلى كل مصب تساوي الصفر.[3]

---

[1] – **محمد راتول**، مرجع سابق، ص: 135.

[2] – **محمود علي متولي عجوز**، بحوث العمليات والإحصاء، الطبعة الأولى، دار الفكر الجامعي، الإسكندرية، مصر، 2007، ص: 237.

[3] – **نفس المرجع**، ص: 239.

مثال (8-8): ليكن لدينا جدول النقل الآتي:

إلى / من	المصب (01)	المصب (02)	المصب (03)	S_i
المصدر (01)	5	6	4	**250**
المصدر (02)	5	5	5	**300**
المصدر (03)	3	4	3	**250**
D_j	**300**	**200**	**400**	

المطلوب: إيجاد الحل الابتدائي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية.

الإجابة:

- التأكد من أن الكمية الكلية المطلوبة تساوي الكمية الكلية المعروضة:

$\sum_{i=1}^{3} S_i = 250 + 300 + 250 = 800$

$\sum_{j=1}^{3} D_j = 300 + 200 + 400 = 900$

$\sum_{j=1}^{3} D_j \neq \sum_{i=1}^{3} S_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{3} D_j - \sum_{i=1}^{3} S_i = \mathbf{100}$

نلاحظ أن مجموع الكميات المطلوبة أكبر من مجموع الكميات المعروضة، وبذلك يجب إضافة سطر وهمي بالفرق بين الكمية المطلوبة والكمية المعروضة والتي هي: 100.

- التأكد من أن الكمية الكلية المطلوبة تساوي الكمية الكلية المعروضة:

$\sum_{i=1}^{4} S_i = 250 + 300 + 250 + \mathbf{100} = 900$

$\sum_{j=1}^{3} D_j = 300 + 200 + 400 = 900$

$\sum_{i=1}^{4} S_i = \sum_{j=1}^{3} D_j = 900$

نلاحظ الآن أن مجموع الكميات المعروضة يساوي مجموع الكميات المطلوبة.

- إيجاد الحل المبديئ باستعمال طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

إلى / من	المصب (01)	المصب (02)	المصب (03)	S_i
المصدر (01)	5 **250**	6 *	4 *	**250**
المصدر (02)	5 **50**	5 **200**	5 **50**	~~**300**~~ ~~**250**~~ **50**
المصدر (03)	3 *	4 *	3 **250**	**250**
وهمي (04)	0 *	0 *	0 **100**	**100**
D_j	~~**300**~~ **50**	**200**	~~**400**~~ ~~**350**~~ **100**	**900**

ومنه فالخانات المملوءة هي:

$X_{11} = 250, X_{21} = 50, X_{22} = 200, X_{23} = 50, X_{33} = 250, X_{44} = 100$

عدد الخانات المملوءة هو: 6.

التأكد من أن عدد الخانات المملوءة يساوي $(m + n -1)$، أي:

$m + n -1 = 4 + 3 -1 = 7$

وهو عدد الخانات المملوئة.

إذن عدد الخلايا الفارغة (غير المشغولة) هو 6.

$X_{12} = X_{13} = X_{31} = X_{32} = X_{41} = X_{42} = 0$

ووفقاً لهذه الطريقة فإن التكاليف الكلية هي:

$Z = C_{11}X_{11} + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23} + C_{33}X_{33} + C_{44}X_{44}$
$Z = 5(250) + 5(50) + 5(200) + 5(50) + 3(250) + 0(100)$
$Z = 1250 + 250 + 1000 + 250 + 750 + 0$
$Z = 3500$ Um

2.1.4. حالة العرض أكبر من الطلب: الآن يمكن لنا التعامل مع حالة الكمية المعروضة أكبر من الكمية المطلوبة، والتعامل مع هذه الحالة لا يختلف عما سبق إلا في شيء واحد فقط وهو إضافة عمود وهمي بالكمية المعروضة التي تفوق الكمية المطلوبة وقيمة التكلفة الخاصة بالنقل فيه تساوي صفر.[1]

مثال (8-9): ليكن لدينا جدول النقل الآتي:

[1] – **خالد بن موسى الطاسان**، مرجع سابق، ص: 194.

من \ إلى	المصب (01)	المصب (02)	المصب (03)	المصب (04)	S_i
المصدر (01)	110	110	150	118	**50**
المصدر (02)	70	120	150	170	**30**
المصدر (03)	120	140	140	160	**50**
D_j	**35**	**30**	**30**	**25**	

المطلوب: إيجاد الحل الابتدائي بطريقة التكاليف الدنيا.

الإجابة:

- التأكد من أن الكمية الكلية المطلوبة تساوي الكمية الكلية المعروضة:

$\sum_{i=1}^{3} S_i = 50 + 30 + 50 = 130$

$\sum_{j=1}^{4} D_j = 35 + 30 + 30 + 25 = 120$

$\sum_{i=1}^{3} S_i \neq \sum_{j=1}^{4} D_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} S_i - \sum_{j=1}^{4} D_j = \mathbf{10}$

نلاحظ أن مجموع الكميات المعروضة أكبر من مجموع الكميات المطلوبة، وبذلك يجب إضافة عمود وهمي بالفرق بين الكمية المعروضة والكمية المطلوبة والتي هي: 10.

- التأكد من أن الكمية الكلية المطلوبة تساوي الكمية الكلية المعروضة:

$\sum_{i=1}^{3} S_i = 50 + 30 + 50 = 130$

$\sum_{j=1}^{5} D_j = 35 + 30 + 30 + 25 + \mathbf{10} = 130$

$\sum_{i=1}^{3} S_i = \sum_{j=1}^{5} D_j = 130$

نلاحظ الآن أن مجموع الكميات المعروضة يساوي مجموع الكميات المطلوبة.

- إيجاد الحل المبديئ باستعمال طريقة التكاليف الدنيا:

من \ إلى	المصب (01)	المصب (02)	المصب (03)	المصب (04)	وهمي (05)	S_i
المصدر (01)	110 **5**	110 **30**	150 *	118 **15**	0 *	~~**50**~~ ~~**45**~~ **15**
المصدر (02)	70 **30**	120 *	150 *	170 *	0 *	**30**
المصدر (03)	120 *	140 *	140 **30**	160 **10**	0 **10**	~~**50**~~ ~~**40**~~ **10**
D_j	~~**35**~~ **5**	**30**	**30**	~~**25**~~ **10**	**10**	**130**

ومنه فالخانات المملوءة هي:

$X_{11} = 5, X_{12} = 30, X_{14} = 15, X_{21} = 30, X_{33} = 30, X_{34} = 10, X_{35} = 10$

عدد الخانات المملوءة هو: 7.

التأكد من أن عدد الخانات المملوءة يساوي عدد المصادر زائد عدد المصبات ناقص واحد، أي:

$m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$

وهو عدد الخانات المملوئة.

إذن عدد الخلايا الفارغة (غير المشغولة) هو: 8، كالآتي:

$X_{13} = X_{15} = X_{22} = X_{23} = X_{24} = X_{25} = X_{31} = X_{32} = 0$

ووفقاً لهذه الطريقة فإن التكاليف الكلية هي:

$Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{14}X_{14} + C_{21}X_{21} + C_{33}X_{33} + C_{34}X_{34} + C_{35}X_{35}$
$Z = 110(5) + 110(30) + 118(15) + 70(30) + 140(30) + 160(10) + 0(10)$
$Z = 550 + 3300 + 1770 + 2100 + 4200 + 1600 + 0$
$Z = 13520$ Um

<u>ملاحظات:</u>

- تعتبر تكاليف المصدر الوهمي أو المصب الوهمي المضاف (السطر أو العمود الوهمي) مثل غيرها من التكاليف الوحدوية للنقل في الجدول، فهي تعتبر التكاليف الدنيا في السطر أو العمود الذي توجد فيه.
- في طريقة التكاليف الدنيا، التكلفة الصفرية تعتبر أقل تكلفة ممكنة في السطر أو العمود الموجودة فيه والخانة الموجودة فيها هاته الكتلفة هي التي تبدأ منها عملية التحويل.
- في طريقة فوڤل (طريقة الجزاءات) حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل سطر أو في كل عمود يلزم أن يأخذ بعين الاعتبار التكلفة الصفرية.

2.4. حالة التحلل في مشكل النقل (Degeneracy): تسمى كذلك بحالة الحل غير المنتظم أو حالة التفكك، ويحدث التحلل عندما يكون عدد الخلايا المستغلة (المملوءة) في جدول النقل الخاص بالحل الإبتدائي الأساسي الأولي أقل من $(m + n - 1)$، وقد يظهر هذا الموقف في أي جدول حل تالي ويتطلب التحلل إجراء خاص حتى يتم حل المشكلة، فبدون عدد كافي من الخلايا المستغلة لتتبع المسار المغلق (الحلقة المغلقة) لكل مسار غير مستغل قد يستحيل تطبيق اختبار أمثلية الحل وتحسينه.[1]

[1] – **محمود علي متولي عجوز**، مرجع سابق، ص: 240/239.

ولعلاج هذه المشكلة ننشيء خلية وهمية، أي نضع فيها وحدات صفرية (0) أي تشغيلها وهميا لتمكن من إتمام كافة المسارات المغلقة وهناك قدر من المرونة في اختيار هذه الخلايا غير المستغلة.[1]

قد يحدث حالة التحلل في مشاكل النقل في حالتين:[2]

- **الحالة الأولى:** ضمن الحل الإبتدائي الأولي الممكن، فقد يكون عدد الخلايا المشغولة (المملوءة) أقل من التخصيصات اللازمة $(m + n - 1)$.
- **الحالة الثانية:** أثناء البحث عن الحل الأمثل، فقد تصبح خليتان أو أكثر من الخلايا المشغولة (المملوءة) غير مشغولة في نفس الوقت.

ففي الحالة الأولى يتم ملأ إحدى الخلايا الفارغة بكمية قيمتها صفر(0) ويتم اختيارها عشوائيا، ولكن من أجل التوصل إلى الحل الأمثل بصورة أسرع يمكن اختيار الخلية الفارغة التي تكون لها أقل تكلفة نقل في الجدول.[3]

أما إذا ظهرت هذه المشكلة في الحالة الثانية، أي مرحلة تحسين الحل الإبتدائي من أجل الوصول إلى الحل الأمثل، فيمكن علاجها بملأ خلية (أو عدد من الخلايا) تكون غير مشغولة بكمية صفر، وتعامل هذه الخلية (أو الخلايا) نفس معاملة الخلايا المشغولة ويتم الاختيار عشوائياً، أو تخصص الكمية صفر لإحدى الخليتين اللتين أصبحتا فارغتين نتيجة عملية تحسين الحل، وذلك عندما تتساوى الكميات التي تحتويها الخلايا المرشحة للخروج من الحل، أي الخلايا التي تحمل الإشارة السالبة ضمن المسار المغلق.[4]

هذا وعند تحسين الحل غير المنتظم توجد ثلاثة احتمالات وهي:[5]

- الخلية التي تحتوي على الكمية صفر تظل كما هي ولا تتأثر بعملية تحسين الحل وذلك إذا لم تقع ضمن خلايا المسار المغلق للخلية المرشحة للدخول في الحل الجديد.
- الخلية التي تحتوي على الكمية صفر تملأ بكمية فعلية وتصبح متغير أساسي في الحل، وذلك إذا كانت ضمن الخلايا التي إشارتها موجبة ضمن المسار المغلق للخلية المرشحة للدخول إلى الحل الجديد.

---

[1] – **نفس المرجع**، ص: 240.

[2] - **J K SHARMA**, Op-Cit, P: 283.

[3] – **عبد المنعم فليح عبد الله وآخرون**، مرجع سابق، ص: 216.

[4] – **نفس المرجع**، ص: 216.

[5] – **نفس المرجع**، ص: 217/216.

- تنتقل الخلية التي تحتوي على الكمية صفر من مكانها دون أن يتأثر الحل وتظل تكلفة النقل كما هي، وذلك إذا كانت هذه الخلية ضمن الخلايا التي إشارتها سالبة ضمن المسار المغلق للخلية المرشحة للدخول في الحل الجديد.

مثال (8-10): ليكن جدول النقل الآتي والذي يمثل جدول الحل الإبتدائي باستعمال طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

من \ إلى	المصب (01)	المصب (02)	المصب (03)	المصب (04)	S_i
المصدر (01)	5 **10**	5 *	10 *	12 *	**10**
المصدر (02)	10 *	12 **20**	8 *	10 *	**20**
المصدر (03)	6 *	8 *	12 **30**	10 **25**	**55**
D_j	**10**	**20**	**30**	**25**	**85**

المطلوب: إيجاد الحل الأمثل باستعمال طريقة الحجر المتنقل.

الإجابة:

الحل الإبتدائي لهذا الجدول هو:

$X_{11} = 10, X_{22} = 20, X_{33} = 30, X_{34} = 25$
$X_{12} = X_{13} = X_{14} = X_{21} = X_{23} = X_{24} = X_{31} = X_{32} = 0$

ووفقاً لهذه لهذا الحل الإبتدائي فإن التكاليف الكلية هي:

$Z = C_{11}X_{11} + C_{22}X_{22} + C_{33}X_{33} + C_{34}X_{34}$
$Z = 5(10) + 12(20) + 12(30) + 10(25)$
$Z = 50 + 240 + 360 + 250$
$Z = 900$ Um

يلاحظ وجود حالة التحلل، لأن عدد الخلايا المستغلة أربعة (4) فقط، بينما يجب أن تكون ستة (6)، أي:

$m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$

وبالتالي من أجل تحسين هذا الحل الإبتدائي وإيجاد الحل الأمثل إن وجد لا بد من ملأ خليتين فارغتين بالكمية صفر (0)، ويتم اختيارهما بأنهما تحملان أقل تكلفة للنقل أي الخليتين (σ_{12}) و(σ_{31}) كالآتي:

من \ إلى	المصب (01)	المصب (02)	المصب (03)	المصب (04)	S_i
المصدر (01)	5 **-** **10**	5 **+** **0**	10 σ_{13} *	12 σ_{14} *	**10**
المصدر (02)	10 σ_{21} *	12 **-** **20**	8 **+** σ_{23} *	10 σ_{24} *	**20**
المصدر (03)	6 **+** **0**	8 σ_{32} *	12 **-** **30**	10 **25**	**55**
D_j	**10**	**20**	**30**	**25**	**85**

σ_{13} : $C'_{13} = + C_{13} - C_{33} + C_{31} - C_{11} = + 10 - 12 + 6 - 5 = - 1$
σ_{14} : $C'_{14} = + C_{14} - C_{34} + C_{31} - C_{11} = + 12 - 10 + 6 - 5 = + 3$
σ_{21} : $C'_{21} = + C_{21} - C_{22} + C_{12} - C_{11} = + 10 - 12 + 5 - 5 = - 2$
σ_{23} : $C'_{23} = + C_{23} - C_{33} + C_{31} - C_{11} + C_{21} - C_{22} = + 8 - 12 + 6 - 5 + 5 - 12 =$ **- 10**
σ_{24} : $C'_{24} = + C_{24} - C_{44} + C_{31} - C_{11} + C_{21} - C_{22} = + 10 - 10 + 6 - 5 + 5 - 12 = - 6$
σ_{32} : $C'_{32} = + C_{32} - C_{12} + C_{11} - C_{31} = + 8 - 5 + 5 - 6 = + 2$

نلاحظ أن ($\text{Min } C'_{ij} =$ **- 10** < 0)، وبالتالي فهذا الجدول ليس هو جدول الحل الأمثل، والمتغير الداخل إلى الأساس هو (X_{23}) والمتغير الخارج من الأساس هو (X_{11}).

تشكيل الجدول الجديد:

من \ إلى	المصب (01)	المصب (02)	المصب (03)	المصب (04)	S_i
المصدر (01)	5 σ_{11} *	5 **10**	10 σ_{13} *	12 σ_{14} *	**10**
المصدر (02)	10 σ_{21} *	12 **-** **10**	8 **+** **10**	10 σ_{24} *	**20**
المصدر (03)	6 **10**	8 **+** σ_{32} *	12 **-** **20**	10 **25**	**55**
D_j	**10**	**20**	**30**	**25**	**85**

σ_{11} : $C'_{11} = + C_{11} - C_{12} + C_{22} - C_{23} + C_{33} - C_{31} = + 5 - 5 + 12 - 8 + 12 - 6 = + 10$
σ_{13} : $C'_{13} = + C_{13} - C_{23} + C_{22} - C_{12} = + 10 - 8 + 12 - 5 = + 9$
σ_{14} : $C'_{14} = + C_{14} - C_{34} + C_{33} - C_{23} + C_{22} - C_{12} = + 12 - 10 + 12 - 8 + 12 - 5 = + 13$
σ_{21} : $C'_{21} = + C_{21} - C_{31} + C_{33} - C_{23} = + 10 - 6 + 8 - 12 = 0$
σ_{24} : $C'_{24} = + C_{24} - C_{34} + C_{33} - C_{23} = + 10 - 10 + 12 - 8 = + 4$
σ_{32} : $C'_{32} = + C_{32} - C_{33} + C_{23} - C_{22} = + 8 - 12 + 8 - 12 =$ **- 8**

تشكيل الجدول الجديد:

من \ إلى	المصب (01)	المصب (02)	المصب (03)	المصب (04)	S_i
المصدر (01)	5 σ_{11} *	5 **10**	10 σ_{13} *	12 σ_{14} *	**10**
المصدر (02)	10 σ_{21} *	12 σ_{22} *	8 **20**	10 σ_{24} *	**20**
المصدر (03)	6 **10**	8 **10**	12 **10**	10 **25**	**55**
D_j	**10**	**20**	**30**	**25**	**85**

σ_{11} : $C'_{11} = + C_{11} - C_{12} + C_{32} - C_{31} = + 5 - 5 + 8 - 6 = + 2$
σ_{13} : $C'_{13} = + C_{13} - C_{33} + C_{32} - C_{12} = + 10 - 12 + 8 - 5 = + 1$
σ_{14} : $C'_{14} = + C_{14} - C_{34} + C_{32} - C_{12} = + 12 - 10 + 8 - 5 = + 5$
σ_{21} : $C'_{21} = + C_{21} - C_{23} + C_{33} - C_{31} = + 10 - 8 + 12 - 6 = + 8$
σ_{22} : $C'_{22} = + C_{22} - C_{32} + C_{33} - C_{23} = + 12 - 8 + 12 - 8 = + 8$
σ_{24} : $C'_{24} = + C_{24} - C_{34} + C_{33} - C_{23} = + 10 - 10 + 12 - 8 = + 4$

نلاحظ أن جميع القيم موجبة ($\text{Min } C'_{ij} = + 1 > 0$) وبالتالي هذا هو الحل الأمثل.

$X_{12} = 10, X_{23} = 20, X_{31} = 10, X_{32} = 10, X_{33} = 10, X_{34} = 25$
$X_{11} = X_{13} = X_{14} = X_{21} = X_{22} = X_{24} = 0$

ووفقاً لهذه لهذا الحل الأمثل فإن التكاليف الكلية هي:

$Z = C_{12}X_{12} + C_{23}X_{23} + C_{31}X_{31} + C_{32}X_{32} + C_{33}X_{33} + C_{34}X_{34}$
$Z = 5(10) + 8(20) + 6(10) + 8(10) + 12(10) + 10(25)$
$Z = 50 + 260 + 60 + 80 + 120 + 250$
$Z = 820$ Um

ملاحظة: في حالة التحلل عند اختيار الخلية الفارغة (غير المشغولة) والتي سوف نجعلها خلية مملوءة بالقيمة صفر (0) لتحقيق الشرط أن عدد الخلايا المشغولة يساوي $(m + n - 1)$، فإنه يمكن ملؤها بالكمية (ε) أي قيمة صغيرة جداً أو بالقيمة (Δ)، هذه الكمية لن تؤثر على التكلفة الإجمالية ولا على قيمتي الطلب والعرض، بل لتبيان أن هذه الخلية تم اضافتها من أجل القدرة على تحسين الحل الإبتدائي الحالي والحصول على الحل الأمثل.

3.4. حالة تعدد الحلول المثلى (Multiple Optimal Solutions): يمكن تحديد وجود حلول مثلى بديلة (Alternative Optimal Solutions) من خلال فحص تكاليف الفرصة البديلة للخلايا غير المشغولة. إذا كانت $(\text{Min } C'_{ij} = 0)$، لخلية غير مشغولة أو لعدة خلايا غير مشغولة في جدول الحل الأمثل، فإن الحل

الأمثل البديل موجود ويمكن الحصول عليه عن طريق تحويل هذه الخلية غير المشغولة إلى خلية مشغولة في مزيج الحل الأمثل دون تغير تكلفة النقل الإجمالية.[1]

وفي هذه الحالة تعطي الإدارة فرصة اختيار برنامج النقل الذي يناسب ظروفها وإمكانياتها ويراعى العوامل الأخرى التي لا تقاس ماليا مثل النواحي النفسية ومراعاة رغبات منافذ التوزيع إلى غير ذلكمن الاعتبارات دون تحمل تكاليف نقل أكثر.[2]

مثال (8-11): ليكن لدينا إحدى جداول النقل المرحلي لتحسين الحل من أجل الحصول على الحل الأمثل الآتي:

إلى / من	المصب (01)	المصب (02)	المصب (03)	وهمي (04)	S_i
المصدر (01)	4 *	8 **76**	8 *	0 *	**76**
المصدر (02)	16 *	24 **21**	16 **41**	0 **20**	**82**
المصدر (03)	8 **72**	16 **5**	24 *	0 *	**77**
D_j	**72**	**102**	**41**	**20**	**235**

المطلوب:

- اختبار هذا الحل وإيجاد الحل الأمثل باستعمال طريقة التوزيع المعدل.
- ماذا تلاحظ.
- إذا كان هناك حل أمثل آخر فأوجده.

الإجابة:

الحل المرافق لهذا الجدول هو:

$X_{12} = 76, X_{22} = 21, X_{23} = 41, X_{24} = 20, X_{31} = 72, X_{32} = 5$
$X_{11} = X_{13} = X_{14} = X_{21} = X_{33} = X_{34} = 0$

عدد الخانات المملوءة هو: 6.

التأكذ من أن عدد الخانات المملوءة يساوي $(m + n -1)$، أي:

$m + n -1 = 3 + 4 -1 = 6$

وهو عدد الخانات المملوئة.

---

[1] - **J K SHARMA** Op-Cit, P: 287.

[2] – **عبد المنعم فليح عبد الله وآخرون**، مرجع سابق، ص: 215.

إذن عدد الخلايا الفارغة (غير المشغولة) هو: 6.

ووفقاً لهذه لهذا الحل فإن التكاليف الكلية هي:

$Z = C_{12}X_{12} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23} + C_{24}X_{24} + C_{31}X_{31} + C_{32}X_{32}$
$Z = 8(76) + 24(21) + 16(41) + 0(20) + 8(72) + 16(5)$
$Z = 608 + 504 + 656 + 0 + 576 + 80$
$Z = 2424$ Um

- اختبار هذا الحل:

		$V_1 = 0$	$V_2 = 8$	$V_3 = 0$	$V_4 = -16$	
	من \ إلى	المصب (01)	المصب (02)	المصب (03)	وهمي (04)	S_i
$U_1 = 0$	المصدر (01)	4 **+4** *	8 **76**	8 **+8** *	0 **+16** *	**76**
$U_2 = 16$	المصدر (02)	16 **0** + *	24 **21** -	16 **41**	0 **20**	**82**
$U_3 = 8$	المصدر (03)	8 **72** -	16 **5** +	24 **+16** *	0 **+8** *	**77**
	D_j	**72**	**102**	**41**	**20**	**235**

نلاحظ أن ($\text{Min } C'_{ij} = 0$) وبالتالي فهذا الجدول هو جدول الحل الأمثل.

نلاحظ كذلك أن هذه الحالة هي حالة حلول مثلى متعددة.

- إيجاد حل آخر أمثل:

		$V_1 = 0$	$V_2 = 8$	$V_3 = 0$	$V_4 = -16$	
	من \ إلى	المصب (01)	المصب (02)	المصب (03)	وهمي (04)	S_i
$U_1 = 0$	المصدر (01)	4 **+4** *	8 **76**	8 **+8** *	0 **+16** *	**76**
$U_2 = 16$	المصدر (02)	16 **21**	24 **0** *	16 **41**	0 **20**	**82**
$U_3 = 8$	المصدر (03)	8 **51**	16 **26**	24 **+16** *	0 **+8** *	**77**
	D_j	**72**	**102**	**41**	**20**	**235**

نلاحظ أن ($\text{Min } C'_{ij} = 0$) وبالتالي فهذا الجدول هو جدول الحل الأمثل آخر.

الحل الأمثل الآخر هو:

$X_{12} = 76, X_{21} = 21, X_{23} = 41, X_{24} = 20, X_{31} = 51, X_{32} = 26$
$X_{11} = X_{13} = X_{14} = X_{22} = X_{33} = X_{34} = 0$

ووفقاً لهذه لهذا الحل الأمثل الآخر فإن التكاليف الكلية هي:

$Z = C_{12}X_{12} + C_{21}X_{21} + C_{23}X_{23} + C_{24}X_{24} + C_{31}X_{31} + C_{32}X_{32}$
$Z = 8(76) + 16(21) + 16(41) + 0(20) + 8(51) + 16(26)$
$Z = 608 + 336 + 656 + 0 + 408 + 416$
$Z = 2424$ Um

نلاحظ أننا تحصلنا على نفس قيمة التكاليف الكلية، وبالتالي لهذا المشكل حلول مثلى متعددة.

4.4. حالة طريق مقطوع (Prohibited Transportation Route): قد يصعب في بعض الحالات العملية تلبية احتياجات كل منافذ التوزيع من كل مصدر من المصادر إلى كل مصب من المصبات، فقد تمنع الظروف من نقل كميات من مصدر معين إلى منفذ أو مصب معين والذي يدعى بطريق مقطوع.

فقد تحدث مواقف مثل مخاطر طبيعية كالثلوج والفيضانات وأنظمة المرور وما إلى ذلك، فقد تمنع نقل البضائع من مصادر معينة إلى وجهات معينة، فيمكن التعامل مع مثل هذه المواقف بجعل تكلفة النقل كبيرة جداً ويمكن الرمز لها بالرمز (M) أو (∞) والتي تعبر عن تكلفة النقل عبر هذه المسارات المقطوعة.[1]

مثال (8-12): لدينا جدول النقل الآتي والذي يحتوي على طريق مقطوع:

إلى / من	المصب (01)	المصب (02)	المصب (03)	S_i
المصدر (01)	5	7	8	100
المصدر (02)	4	7	M *	30
المصدر (03)	3	9	15	50
D_j	50	90	40	

المطلوب: إيجاد الحل الإبتدائي باستعمال طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

الإجابة:

- التأكد من أن الكمية الكلية المطلوبة تساوي الكمية الكلية المعروضة:

$\sum_{i=1}^{3} S_i = 100 + 30 + 50 = 180$
$\sum_{j=1}^{3} D_j = 50 + 90 + 40 = 180$
$\sum_{i=1}^{3} S_i = \sum_{j=1}^{3} D_j = 180$

نلاحظ أن مجموع الكميات المعروضة يساوي مجموع الكميات المطلوبة.

- إيجاد الحل المبدييئ باستعمال طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

[1] - **J K SHARMA**, Op-Cit, P: 290.

إلى / من	المصب (01)	المصب (02)	المصب (03)	S_i
المصدر (01)	5 **50**	7 **50**	8 *	~~100~~ 50
المصدر (02)	4 *	7 **30**	M *	30
المصدر (03)	3 *	9 **10**	15 **40**	~~50~~ 40
D_j	50	~~90~~ ~~40~~ 10	40	180

ومنه فالخانات المملوءة هي:

$X_{11} = 50, X_{12} = 50, X_{22} = 30, X_{32} = 10, X_{33} = 40$
$X_{13} = X_{21} = X_{23} = X_{31} = 0$

عدد الخانات المملوءة هو: 5.

التأكد من أن عدد الخانات المملوءة يساوي عدد المصادر زائد عدد المصبات ناقص واحد، أي:

$m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$

وهو عدد الخانات المملوئة.

إذن عدد الخلايا الفارغة (غير المشغولة) هو: 4.

ووفقاً لهذه الطريقة فإن التكاليف الكلية هي:

$Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{22}X_{22} + C_{32}X_{32} + C_{33}X_{33}$
$Z = 5(50) + 7(50) + 7(30) + 9(10) + 15(40)$
$Z = 250 + 350 + 210 + 90 + 600$
$Z = 1500$ Um

مثال (8-13): لدينا جدول النقل والذي يحتوي على الحل الأمثل، لكن بعد الحصول على هذا الحل الأمثل تبين أنه هناك طريق مقطوع بين المصدر (2) والمصب (3) كالآتي:

إلى / من	المصب (01)	المصب (02)	المصب (03)	S_i
المصدر (01)	1 **40**	4 **15**	5 *	55
المصدر (02)	5 *	7 *	M **45**	45
المصدر (03)	10 *	8 **15**	9 **5**	20
D_j	40	30	50	120

حيث: $M > 0$، وكبير جداً.

المطلوب: إعادة إيجاد الحل الأمثل إن وجد بطريقة الحجر المتنقل.

الإجابة:

الخانات المملوءة هي:

$X_{11} = 40, X_{12} = 15, X_{23} = 45, X_{32} = 15, X_{33} = 5$
$X_{13} = X_{21} = X_{22} = X_{31} = 0$

عدد الخانات المملوءة هو: 5.

التأكد من أن عدد الخانات المملوءة يساوي عدد المصادر زائد عدد المصبات ناقص واحد، أي:

$m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$

وهو عدد الخانات المملوئة.

إذن عدد الخلايا الفارغة (غير المشغولة) هو: 4.

ووفقاً لهذه الطريقة فإن التكاليف الكلية هي:

$Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{23}X_{23} + C_{32}X_{32} + C_{33}X_{33}$
$Z = 1(40) + 4(15) + 3(45) + 8(15) + 9(5)$
$Z = 40 + 60 + 135 + 120 + 45$
$Z = 400$ Um

- اختبار الحل وتحسينه: باعتبار الطريق مقطوع بين المصدر (02) إلى المصب (03) كالآتي:

من \ إلى	المصب (01)	المصب (02)	المصب (03)	S_i
المصدر (01)	1 — **40**	4 — **15**	5 — σ_{13} *	**55**
المصدر (02)	5 — σ_{21} *	7 — σ_{22} + *	M — - **45**	**45**
المصدر (03)	10 — σ_{31} *	8 — - **15**	9 — + **5**	**20**
D_j	**40**	**30**	**50**	**120**

σ_{13} : $C'_{13} = + C_{13} - C_{33} + C_{32} - C_{12} = + 5 - 9 + 8 - 4 = 0$
σ_{21} : $C'_{21} = + C_{21} - C_{23} + C_{33} - C_{32} + C_{12} - C_{11} = + 5 - M + 9 - 8 + 4 - 1 = 9 - M$
σ_{22} : $C'_{22} = + C_{22} - C_{23} + C_{33} - C_{32} = + 7 - M + 9 - 8 =$ **8 - M**
σ_{31} : $C'_{31} = + C_{31} - C_{32} + C_{12} - C_{11} = + 10 - 8 + 4 - 1 = + 5$

نلاحظ أن ($\text{Min } C'_{ij} =$ **8 - M** < 0)، وبالتالي فهذا الجدول ليس هو جدول الحل الأمثل، والمتغير الداخل إلى الأساس هو (X_{22}) والمتغير الخارج من الأساس هو (X_{32}).

تشكيل الجدول الجديد:

من \ إلى	المصب (01)	المصب (02)	المصب (03)	S_i
المصدر (01)	1 **40**	4 - **15**	5 + σ_{13} *	**55**
المصدر (02)	5 σ_{21} *	7 + **15**	M - **30**	**45**
المصدر (03)	10 σ_{31} *	8 σ_{32} *	9 **20**	**20**
D_j	**40**	**30**	**50**	**120**

$\sigma_{13} = + C_{13} - C_{23} + C_{22} - C_{12} = + 5 - M + 7 - 4 = 8$ **- M**
$\sigma_{21} = + C_{21} - C_{22} + C_{12} - C_{11} = + 5 - 7 + 4 - 1 = + 1$
$\sigma_{31} = + C_{31} - C_{33} + C_{32} - C_{22} + C_{12} - C_{11} = + 10 - 9 + M - 7 + 4 - 1 = + M - 3$
$\sigma_{32} = + C_{32} - C_{33} + C_{23} - C_{22} = + 8 - 9 + M - 7 = + M - 8$

نلاحظ أن ($\text{Min } C'_{ij} = \mathbf{8 - M} < 0$)، وبالتالي فهذا الجدول ليس هو جدول الحل الأمثل، والمتغير الداخل إلى الأساس هو (X_{13}) والمتغير الخارج من الأساس هو (X_{12}).

تشكيل الجدول الجديد:

من \ إلى	المصب (01)	المصب (02)	المصب (03)	S_i
المصدر (01)	1 - **40**	4 σ_{12} *	5 + **15**	**55**
المصدر (02)	5 + σ_{21} *	7 **30**	M - **15**	**45**
المصدر (03)	10 σ_{31} *	8 σ_{32} *	9 **20**	**20**
D_j	**40**	**30**	**50**	**120**

$\sigma_{12} = + C_{12} - C_{13} + C_{23} - C_{22} = + 4 - 5 + M - 7 = + M - 8$
$\sigma_{21} = + C_{21} - C_{23} + C_{13} - C_{11} = + 5 - M + 5 - 1 =$ **+ 9 - M**
$\sigma_{31} = + C_{31} - C_{33} + C_{13} - C_{11} = + 10 - 9 + 5 - 1 = + 5$
$\sigma_{32} = + C_{32} - C_{33} + C_{23} - C_{22} = + 8 - 9 + M - 7 = M - 8$

نلاحظ أن ($\text{Min } C'_{ij} = \mathbf{9 - M} < 0$)، وبالتالي فهذا الجدول ليس هو جدول الحل الأمثل، والمتغير الداخل إلى الأساس هو (X_{21}) والمتغير الخارج من الأساس هو (X_{23}).

تشكيل الجدول الجديد:

إلى / من	المصب (01)	المصب (02)	المصب (03)	S_i
المصدر (01)	1 — 25	4 — σ_{12} *	5 — 30	55
المصدر (02)	5 — 15	7 — 30	M — σ_{23} *	45
المصدر (03)	10 — σ_{31} *	8 — σ_{32} *	9 — 20	20
D_j	40	30	50	120

$\sigma_{12} = + C_{12} - C_{22} + C_{21} - C_{11} = + 4 - 7 + 5 - 1 = + 1$
$\sigma_{23} = + C_{23} - C_{21} + C_{11} - C_{13} = + M - 5 + 1 - 5 = + M - 9$
$\sigma_{31} = + C_{31} - C_{33} + C_{13} - C_{11} = + 10 - 9 + 5 - 1 = + 5$
$\sigma_{32} = + C_{32} - C_{33} + C_{13} - C_{11} + C_{21} - C_{22} = + 8 - 9 + 5 - 1 + 5 - 7 = + 1$

نلاحظ أن جميع القيم موجبة ($\text{Min } C'_{ij} > 0$) وبالتالي هذا هو الحل الأمثل.

$X_{11} = 25, X_{13} = 30, X_{21} = 15, X_{22} = 30, X_{33} = 20$
$X_{12} = X_{23} = X_{31} = X_{32} = 0$

ووفقاً لهذا الحل الأمثل، فإن التكاليف الكلية هي:

$Z = C_{11}X_{11} + C_{13}X_{13} + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + C_{33}X_{33}$
$Z = 1(25) + 5(30) + 5(15) + 7(30) + 9(20)$
$Z = 25 + 150 + 75 + 210 + 180$
$Z = 640 \text{ Um}$

5.3. حالة التعظيم (Profit Maximization Transportation): يتم استخدام نموذج النقل لمشاكل تقليل التكلفة بشكل عام، ومع ذلك يمكن استخدامه أيضًا لحل المشاكل التي يكون الهدف فيها تعظيم إجمالي الربح، أي بدلاً من تكلفة الوحدة (C_{ij})، يتم إعطاء ربح الوحدة (P_{ij}) أو المردود المرتبط بكل مسار، ويتم بعد ذلك تحديد دالة الهدف من حيث إجمالي الربح (أو العائد) على النحو الآتي:[1]

$$\text{Max } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P_{ij} X_{ij}$$

ونظرًا لأنها مشكلة تعظيم، فإن معيار الأمثلية هو عكس قاعدة التدنية، فالقاعدة هي نتحصل على الحل الأمثل إذا كانت جميع تكاليف الفرصة البديلة للخلايا غير المشغولة سالبة الإشارة أو تساوي صفرًا ($\text{Min } P'_{ij} \leq 0$).[2] وتعظيم الأرباح في حالة النقل يختلف عن تخفيض التكاليف وذلك في النقاط الآتية:[3]

[1] - **J K SHARMA**, Op-Cit, P: 294.
[2] - **Ibid**, P: 294.
[3] – **محمد الفاتح محمود بشير المغربي**، مرجع سابق، ص: 229.

- عند استخدام طريقة أقل تكلفة لإيجاد الحل الإبتدائي الأساسي الأولي الممكن كان يتم اختيار أقل تكلفة ضمن الجدول (مصفوفة التكاليف)، وذلك بهدف تخفيض التكاليف؛ أما في حالة الأرباح فيتم اختيار الخلية التي تحمل أكبر ربح في الجدول لنبدأ بها وتسمى هذه الطريقة في هذه الحالة بطريقة أقصى ربح (Maximum Profit Method) وذلك بهدف تعظيم الأرباح.
- عند استخدام طريقة فوقل التقريبية كان يتم حساب الفرق بين اقل تكلفتين متتاليتين لكل صف ولكل عمود وذلك بهدف تخفيض التكاليف؛ أما في حالة تعظيم الأرباح، فيتم حساب الفرق بين أكبر ربحين متتاليين لكل صف ولكل عمود ويلي ذلك اختيار أكبر فرق ويتم تحميل الخلية التي تحتوي على أكبر ربح وليست التي تحتوي على أقل ربح.
- عند تقييم أمثلية الحل بطريقة الحجر المتنقل يتم اختيار الخلايا صاحبة أكبر رقم موجب في التقييم؛ والحل الأمثل يتمثل عند الحصول على تقييم الخلايا الفارغة يكون قيماً سالبة أو أصفاراً.

الخاتمة

تعتبر البرمجة الخطية نوع خاص من البرمجة الرياضية، حيث يمكن التعبير عن دالة الهدف والقيود بمعادلات خطية لمتغيرات القرار، وبمجرد صياغة المشكلة على شكل برنامج خطي والتحقق من طبيعة المشكلة، يمكن حل هذا البرنامج بالطريقة البيانية إذا كان عدد المتغيرات إثنين فقط، وإما يمكن الحل باستعمال طريقة السيمبلكس بشكل عام، وقد تحتوي مشاكل البرمجة الخطية على حل أمثل وحيد، وقد تمتلك حلول متلى متعددة أو قد تكون ليس لديها حل عملي ممكن.

كما أنه لكل مشكلة من مشاكل البرمجة الخطية مشكلة ثنائية مرافقة لها، والتي غالباً ما توفر تفسيراً بديلاً لحل المشكلة الأصلية، فترتبط أي مشكلة من مشاكل البرمجة الخطية بمشكلة ثنائية أخرى، فهذه الأخيرة تساعد على تحليل وفهم المشكلة الأساسية، فالتفسير الاقتصادي للمشكلة الثنائية يبين قيم أسعار الظل التي تقيس القيم الهامشية للموارد ضمن المكشلة الأساسية وتوفر تفسيراً لنتائج لطريقة السيمبلكس، حيث أنه يمكن حل أي من البرنامجين الأصلي والثنائي باستعمال طريقة السيمبلكس في نفس الوقت، إلا أنه لتوفير الوقت يتم حل إحد البرنامجين واستنتاج حلول البرنامج الأخر، كما تساعد المشكلة الثنائية في تحليل وتحديد مدى حساسية الحل الأمثل تجاه التغييرات الطفيفة في معلمات المشكلة.

وتعتبر المعلومات المتحصل عليها من تحليل الحساسية، معلومات قيمة ومفيدة خاصة للإدارة، خاصة لأنها توفر مؤشراً على درجة المرونة الكامنة ضمن بيئة التشغيل، فهذه المعرفة مفيدة في عملية التخطيط واتخاذ القرارات وصياغة السياسات والتعامل مع التقلبات المتعلقة بالأسعار والأنشطة ومدى توافر الموارد المستخدمة في صياغة نماذج مشاكل البرمجة الخطية.

هذا ونجد حالات خاصة من مشاكل البرمجة الخطية التي يمكن حلها بطريقة السيمبلكس، لكن لطبيعتها الخاصة هناك عدة طرق خاصة يمكن حلها بها ومن بين هذه المشاكل نجد مشكل النقل الذي يعالج كيفية نقل المنتجات والسلع والموارد من مراكز العرض نحو مراكز الطلب بأقل تكلفة كلية ممكنة.

المراجع

1. باللغة العربية:

- **بني هاني جهاد صياح، الملكاوي نازم محمود، الحوري فالح عبد القادر**، "بحوث العمليات والأساليب الكمية: نظرية وتطبيق"، الطبعة الأولى، دار جليس الزمان، عمان، الأردن، 2009.
- **الجواد دلال صادق، الفتال حميد ناصر**، بحوث العمليات، الطبعة الأولى، دار اليازوري، عمان، الأردن، 2008.
- **الحميد محمد دباس**، البرمجة الرياضية، د ط، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، منشورات جامعة حلب، سوريا، 2010.
- **الحميد محمد دباس**، البرمجة الرياضية، د ط، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، منشورات جامعة حلب، سوريا، 2010.
- **راتول محمد**، "بحوث العمليات"، الطبعة الرابعة، ديوان المطبوعات الجامعية، بن عكنون، الجزائر، 2011.
- **سعيد سهيلة عبد الله**، "الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات"، الطبعة الأولى، دار الحامد، الأردن، 2007.
- **الشمرتي حامد سعد نور**، "بحوث العمليات مفهوماً وتطبيقاً"، الطبعة الأولى، مكتبة الذاكرة، بغداد، 2010.
- **الطاسان خالد بن موسى**، المدخل إلى البرمجة الخطية وتطبيقاتها في الإدارة، د ط، دار جامعة الملك سعود، الرياض، المملكة العربية السعودية، 2019.
- **الطراونة محمد، عبيدات سليمان**، "مقدمة في بحوث العمليات"، الطبعة الأولى، دار الميسرة، عمان، الأردن، 2009.
- **العامري صالح مهدي محسن، الحداد عواطف إبراهيم**، "تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة"، الطبعة الأولى، دار إثراء، الأردن، 2009.
- **عبد الفتاح إبراهيم موسى**، مقدمة في بحوث العمليات (نماذج وتطبيقات)، د ط، المكتبة العلمية، الزقازيق، مصر، 2005-2006.

- **عبد الله عبد المنعم فليح وآخرون**، بحوث العمليات في المحاسبة، الطبعة الأولى، جهاز الكتب، جامعة القاهرة، القاهرة، مصر، 2017.
- **عجوز محمود علي متولي**، بحوث العمليات والإحصاء، الطبعة الأولى، دار الفكر الجامعي، الإسكندرية، مصر، 2007.
- **العشاري عمر محمد ناصر حسين**، استخدام البرمجة الخطية في حل مشكلة النقل المتعددة المراحل، مجلة ديالى للعلوم الصرفة، المجلد 07، العدد 04، أكتوبر 2011.
- **العليان إبراهيم بن صالح**، مقدمة في البرمجة الخطية، د ط، جامعة الملك سعود، الرياض، المملكة العربية السعودية، 2007.
- **المحمد صبحي وآخرون**، "بحوث العمليات"، د ط، منشورات جامعة حلب، سوريا، 2008.
- **المغربي محمد الفاتح محمود بشير**، الأساليب الكمية في إدارة الأعمال، الطبعة الأولى، دار الجنان، عمان، الأردن، 2017.
- **المهتدي أكرم محمد عرفان**، الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية (بحوث العمليات)، الطبعة الأولى، دار صفاء، عمان، الأردن، 2004.
- **مهدي إبراهيم محمد**، مقدمة في: بحوث العمليات (الطرق الكمية في الإدارة)، د ط، مكتبة الجلاء الجديدة، المنصورة، مصر، 2006-2007.

2. باللغة الأجنبية:

- **CARTER Michael W., PRICE Camille C., RABADI Ghaith**, "Operations Research: A Practical Introduction", Second Edition, CRC Press, Taylor & Francis Group, New York, USA, 2019.
- **EISELT H.A., SANDBLOM C.-L.**, "Operations Research: A Model-Based Approach", First Edition, Springer-Verlag Heidelberg, Berlin, Germany, 2010.
- **FINKE Gerd**, "Operations research and networks", First Edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, USA, 2008.
- **HILLIER Frederick S., LIEBERMAN Gerald J.**, "Introduction to operations research", Tenth edition, McGraw-Hill Education, New York, USA, 2015.
- **MURTHY P. Rama**, "Operations research", Second Edition, New Age International (P) Ltd., New Delhi, India, 2007.
- **SHARMA J K**, Operations Research: Theory and Applications, Sixth Edition, Trinity Press, New Delhi, India, 2016.

- **TAHA Hamdy A.**, "Operations Research: An Introduction", Tenth edition, Pearson Education Limited, Harlow, England, 2017.