

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ M'HAMED BOUGARA-BOUMERDES
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : **Mathématiques Financières**

Présenté par : **DICHOU** Soumaya

Et **HIRECHE** Nour El-Houda

THÈME

Modèle d'évaluation des prix en temps continu à volatilité stochastique

Soutenue publiquement, le 15 décembre 2020 devant le jury composé de :

Mr.K.KHALDI *UMBB* *Président*

Mr.M.TAZEROUTI *UMBB* *Examineur*

Mme.S.MEDDAHI *UMBB* *Promotrice*

❀ *Dédicaces* ❀

*A **Dieu** ,source de toute vie et tout amour.*

Au meilleur des pères.

A ma très chère maman.

Qu'ils trouvent en moi la source de leur fierté.

A qui je dois tout.

*A mes chères sœurs **Meriem, Asmaa, Zineb et Bouchra** ... pour leurs*

encouragements constants et leur soutien moral.

*A mon cher frère **Sidali** ... pour son soutien et ses encouragements.*

A la mémoire de mes grands parents.

*A ma binôme **Houda** qui m'ont soutenue jusqu'au bout.*

A tous ceux qui me sont chers.

Je dédie ce travail.

DICHOU ❀ SOUMAYA

*Avec l'aide d **Allah** le tous puissant.*

*Je dédie ce modeste travail avec tous les sentiments de respect, d'amour et d'attention aux deux plus chers du monde, et pour tous les sacrifices qu'ils ont faits pour me permettre de poursuivre mes études dans les meilleures conditions possibles et de me soutenir tout au long de mon parcours, je leur serai reconnaissante toute ma vie, merci maman "**Belabbas Fatema**" et mon père "**Rachid**".*

*A mon très cher frère :**Billel**.*

*A mon fiancé **Khaled** et sa famille.*

A mes grands parents.

A Tous mes oncles et tantes, tous mes cousins et cousines.

*Mes proches amies : **Amina, Hanane, Sara, Sawsan, Amira, Hayat, Zineb, Soumia et Zakia**, vous avez toujours été là pour moi dans mes joies comme mes peines.*

*A ma binôme **Soumaya** et sa famille.*

A toutes personnes qui me sont chère.

HIRECHE ❀ NOUR.EL – HOUDA

❀Remerciements ❀

Toute nos gratitude, grâce et remerciements vont à Dieu le tout puissant qui nous a donné la force, la patience le courage et la volonté pour élaborer ce modeste travail.

*Nos remerciements s'adressent tout naturellement à notre promotrice, Madame **S.MEDDAHI**, pour sa patience, et surtout pour sa confiance et ses conseils, sa disponibilité et sa bienveillance.*

*Nous remercions vivement Monsieur **K.KHALDI** professeur à l'université de M'hamed Bougara Boumerdes, pour l'intérêt qu'il a apporté à ce sujet en acceptant d'être le président du jury.*

*Nos remerciements et de notre profonde gratitude vont aussi à Monsieur **M.TAZEROUTI** professeur à l'université de M'hamed Bougara Boumerdes, pour avoir accepté d'évaluer ce travail et participer à ce jury.*

Nous témoignons une reconnaissance particulière à l'ensemble des enseignants du département des mathématiques pour leur soutien inestimable et leur instruction.

Enfin, nous devons beaucoup à tous ceux qui nous ont aidés et qui de près ou de loin ont participé à la réalisation de ce travail.

RÉSUMÉ

L'objectif de ce mémoire est d'étudier les modèles d'évaluation des options financières dont la volatilité est constante (le modèle de Black-Scholes 1973) ou elle est stochastique (le modèle de Heston 1993).

Nous présentons, dans ce travail, les techniques d'estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance des deux modèles, et la simulation des prix du sous-jacent et de la variance stochastique. Nous utilisons la discrétisation d'Euler et de Milstein afin de calculer les prix des options d'achat (Call) et de vente (Put).

Nous illustrons ces méthodes par une application sur un exemple. Nous utilisons le programme Matlab.

Mots-clés

Mouvement Brownien, équations différentielles stochastiques, Volatilité, Modèle de Black-Scholes, Modèle de Heston, Euler, Milstein, option européenne d'achat et de vente.

ABSTRACT

The objective of this paper is to study financial option pricing models with constant volatility (the Black-Scholes 1973 model) or stochastic volatility (the Heston 1993 model). In this paper, we present techniques for estimating the parameters by the maximum likelihood method of the two models, and the simulation of the prices of the underlying and the stochastic variance use Euler and Milstein discretization to calculate the prices of call and put options.

We illustrate these methods by an application on an example using the Matlab program.

Keywords

Brownian motion, stochastic differential equations, Volatility, Black-Scholes model, Heston, Euler, Milstein model, European call and put options.

ABRÉVIATIONS

<i>EDO</i>	Equation différentielle ordinaire.
<i>EDS</i>	Equation différentielle stochastique.
<i>EDS_s</i>	Equations différentielles stochastiques.
<i>MB</i>	Mouvement Brownien.
<i>BS</i>	Black-Scholes.
<i>EMV</i>	Estimation du Maximum de Vraisemblance.
<i>EMVN</i>	Estimation du Maximum de Vraisemblance Normale.
i.i.d	Indépendantes et identiquement distribuées.
<i>MEM</i>	Martingale équivalente mesure.

LISTE DES SYMBOLES

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	Ensemble des réels positifs.
Ω	Un ensemble.
$\mathcal{F}$	Une tribu sur Ω .
$\mathbb{P}$	Probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
W	Mouvement brownien.
$p.s$	Presque sûrement.
$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$	Tribu borélienne sur $\mathbb{R}$.
Δ	Pas de temps dans la discrétisation.
$\mathbb{Q}$	Mesure neutre sur le plan des risques.
X	Processus Martingale.
t	Temps.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GENERALE	12
1 ÉVALUATIONS DES OPTIONS AVEC LE MODÈLE DE BLACK-SCHOLES	14
1.1 Mouvement Brownien : définition et construction	15
1.1.1 Processus stochastiques en temps continu	15
1.1.2 Mouvement Brownien	16
1.2 Options	17
1.2.1 Définition	17
1.2.2 Les deux formes d'option	17
1.2.3 Parité Put-Call	18
1.2.4 Les problèmes liés aux options	19
1.2.5 Caractéristiques	20
1.3 Equations différentielles stochastiques	21
1.3.1 Définition	22
1.3.2 Théorème (d'existence et d'unicité)	23
1.3.3 Solution d'une équation différentielle stochastique (EDS)	23

1.3.4	Solution forte	24
1.3.5	Solution faible	24
1.3.6	Théorème de Girzanov	24
1.3.7	Lemme d'Itô	25
1.3.8	Règle de l'extrémité gauche	25
1.3.9	Simulation de l'EDS	26
1.4	Modèle à volatilité locale (constante) : Le modèle de Black-Scholes	30
1.4.1	Présentation de modèle	30
1.4.2	Une mesure neutre sur le plan des risques	31
1.4.3	Equation de Black-Scholes	33
1.4.4	Conditions aux limites pour un Call	33
1.4.5	Conditions aux limites pour un Put	34
1.4.6	Formule de Black-Scholes	35
1.4.7	Estimation des paramètres du modèle de Black-Scholes	36
1.4.8	Simulation	37
2	LA VOLATILITÉ ET SÉRIE DE RENDEMENTS	40
2.1	Série des rendements	41
2.1.1	Taux de rendement arithmétique	41
2.1.2	Taux de rendement géométrique	42
2.2	Loi jointe des rendements	42
2.3	Propriétés des séries financières	42
2.3.1	Non stationnarité	42
2.3.2	Stationnarité	43
2.3.3	Aplatissement	43
2.3.4	Asymétrie	43
2.3.5	Hétéroscédasticité	44
2.3.6	Autocorrélation	44
2.4	La volatilité	44
2.4.1	Estimation de la volatilité	45

2.4.2	Smile	51
2.4.3	Importance de la volatilité	52
3	MODÈLE à VOLATILITÉ STOCHASTIQUE DE HESTON et ÉVALUA-	
	TIONS DES OPTIONS	54
3.1	Volatilité stochastique	55
3.1.1	Introduction	55
3.1.2	La forme générale	56
3.2	Modèle de Heston	58
3.2.1	Présentation de modèle	58
3.2.2	Mesure neutre du point de vue du risque	59
3.2.3	Fonction caractéristique de Heston	61
3.2.4	La solution à forme fermée (closed-form)	62
3.2.5	Formulation du problème	63
3.2.6	Estimation des paramètres du modèle de Heston	64
3.2.7	Simulation	68
4	APPLICATION : SIMULATION ET ÉVALUATION DES OPTIONS AVEC	
	DEUX MODELES	73
4.1	Simulation du mouvement brownien (standard)	74
4.2	Simulation de modèle du Black-Scholes	76
4.3	Calcul de Call et Put avec le modèle de Black-Scholes	79
4.4	Simulation de modèle de Heston	83
4.5	Calcul du Call et Put avec le modèle de Heston	87
	CONCLUSION GENERALE	92
	Bibliographie	106

TABLE DES FIGURES

4.1	Simulation d'une trajectoire du Mouvement Brownien	75
4.2	Simulation de 1000 trajectoires du Mouvement Brownien	75
4.3	Simulation d'une trajectoire de Black-Scholes (Solution Analytique)	76
4.4	Discrétisation d'Euler du modèle de Black-Scholes	77
4.5	Discrétisation de Milstein pour le modèle Black-Scholes	77
4.6	Comparaison entre la Solution Analytique avec les deux schémas de discrétisations	78
4.7	Prix des options d'achats en fonction du prix du sous-jacent à l'instant $t = 0$ pour $S_0 = 100$, $K = 70$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.05$, $N = 1000$, $T = 1$	82
4.8	Prix des options de ventes en fonction du prix du sous-jacent à l'instant $t = 0$ pour $S_0 = 100$, $K = 130$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.05$, $N = 1000$, $T = 1$	82
4.9	Discrétisation d'Euler des prix du sous-jacent du modèle de Heston.	84
4.10	Discrétisation d'Euler de la variance stochastique du modèle de Heston.	84
4.11	Discrétisation de Milstein des prix du sous-jacent du modèle de Heston.	85
4.12	Discrétisation de Milstein de la variance du modèle de Heston.	85
4.13	Discrétisation d'Euler et Milstein des prix sous-jacent du modèle de Heston.	86
4.14	Discrétisation d'Euler et Milstein des variances du modèle de Heston.	86

4.15	Prix des options d'achats en fonction du prix du sous-jacent à l'instant $t = 0$ pour $S_0 = 100$, $K = 125$, $v_0 = 0.01$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.05$, $\theta = 0.01$, $\rho = -0.7$, $\kappa = 2$, $\lambda = 0.05$, $N = 1000$, $T = 1$	90
4.16	Prix des options de ventes en fonction du prix du sous-jacent à l'instant $t = 0$ pour $S_0 = 100$, $K = 125$, $v_0 = 0.01$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.05$, $\theta = 0.01$, $\rho = -0.7$, $\kappa = 2$, $\lambda = 0.05$, $N = 1000$, $T = 1$	90
4.17	Code Matlab de l'exemple appliqué	95
4.18	Code Matlab de la simulation d'une trajectoire de Black-Scholes (solution analytique).	95
4.19	Code Matlab de la discrétisation d'Euler du Black-Scholes.	96
4.20	Code Matlab de la discrétisation de Milstein du Black-Scholes.	97
4.21	Code Matlab de la discrétisation de la Solution Analytique ,Euler et Milstein du Black-Scholes.	99
4.22	Code Matlab de la discrétisation d'Euler du Heston.	100
4.23	Code Matlab de la discrétisation de Milstein du Heston.	101
4.24	Code Matlab de la discrétisation d'Euler et Milstein du Heston.	103
4.25	Code Matlab pour calculer le Call et Put du modèle de Black-Scholes.	103
4.26	Code Matlab pour calculer le Call et Put du modèle de Heston.	105

LISTE DES TABLEAUX

4.1	Prix des options d'achats et de ventes en fonction du prix du sous-jacent simulé par la solution analytique, Euler et Milstein du Black-Scholes à l'instant $t = 0$ pour $S_0 = 100$, $K = 100$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.05$, $N = 1000$, $T = 1$	79
4.2	Prix des options d'achats et de ventes en fonction du prix du sous-jacent simulé par la solution analytique, Euler et Milstein du Black-Scholes à l'instant $t = 0$ pour $S_0 = 100$, $K = 70$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.05$, $N = 1000$, $T = 1$	80
4.3	Prix des options d'achats et de ventes en fonction du prix du sous-jacent simulé par la solution analytique, Euler et Milstein du Black-Scholes à l'instant $t = 0$ pour $S_0 = 100$, $K = 130$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.05$, $N = 1000$, $T = 1$	81
4.4	Prix des options d'achats et de ventes en fonction du prix du sous-jacent simulé par Euler et Milstein du Heston à l'instant $t = 0$ pour $S_0 = 100$, $K = 100$, $v_0 = 0.01$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.05$, $\theta = 0.01$, $\rho = -0.7$, $\kappa = 2$, $\lambda = 0.05$, $N = 1000$, $T = 1$	87
4.5	Prix des options d'achats et de ventes en fonction du prix du sous-jacent simulé par Euler et Milstein du Heston à l'instant $t = 0$ pour $S_0 = 100$, $K = 75$, $v_0 = 0.01$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.05$, $\theta = 0.01$, $\rho = -0.7$, $\kappa = 2$, $\lambda = 0.05$, $N = 1000$, $T = 1$	88

4.6	Prix des options d'achats et de ventes en fonction du prix du sous-jacent simulé par Euler et Milstein du Heston à l'instant $t = 0$ pour $S_0 = 100$, $K = 125$, $v_0 = 0.01$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.05$, $\theta = 0.01$, $\rho = -0.7$, $\kappa = 2$, $\lambda = 0.05$, $N = 1000$, $T = 1$.	89
-----	--	----

INTRODUCTION GENERALE

Les contrats d'options financières sont l'un des types de produits dérivés les plus créatifs et innovants, car ils ont été largement pris en compte par les pionniers de l'ingénierie financière et les chercheurs en gestion financière, et les contrats d'options ont acquis une position privilégiée en raison de leur grand rôle dans la gestion des risques résultant de fortes fluctuations des prix de divers investissements financiers de sorte qu'ils sont considérés comme de solides outils de couverture.

Il existe de nombreuses méthodes et modèles variés d'évaluation des options, dont le plus important est le modèle **Black-Scholes (1973)**, qui est le premier modèle utilisé à grande échelle pour l'évaluation des options, dans lequel la volatilité est constante et le prix de l'action est un processus stochastique en temps continu. Cependant, l'hypothèse de la constance de la volatilité dans la formule de Black-Scholes était rejetée depuis le début tel que démontré dans les travaux de Black (1976), Schmalensee et Trippi (1978) et ceux de Christie (1982); et surtout après le crash de 1987, qui a mis en évidence l'effet "Smile" qui pourtant ne devrait pas apparaître sous les hypothèses de Black-Scholes. Ces constatations nous amènent à considérer la volatilité comme processus de diffusion, ce qui a donné naissance aux modèles à volatilité stochastique dont le plus important est le modèle **Heston (1993)**. Dans ce mémoire, on s'intéresse à la simulation et l'évaluation des options Européenne d'achat

et de vente dans le cadre du modèle à volatilité stochastique : modèle de Heston.

Ce travail est organisé de la façon suivante :

Le premier chapitre introduit les équations différentielles stochastiques, le modèle de Black Scholes et l'évaluation des options avec ce modèle.

Le deuxième chapitre est consacré à la définition et l'estimation de la volatilité ainsi que les séries des rendements et ses propriétés.

Le troisième chapitre est réservé à la définition de la volatilité stochastique et la représentation du modèle de Heston avec l'évaluation les options.

Le quatrième chapitre présente l'application des méthodes et les graphes de simulation des prix du sous-jacent et, ainsi les formules de calcul des options d'achat (Call) et de vente (Put) des deux modèles Black-Scholes et Heston. Nous utilisons le logiciel MATLAB pour faire les simulations et l'évaluation d'option.

CHAPITRE

1

ÉVALUATIONS DES OPTIONS AVEC LE MODÈLE DE BLACK-SCHOLES

Introduction

Dans ce chapitre nous présenterons les principales notions de calcul stochastique et de l'évaluation des options, en insistant particulièrement sur le modèle à volatilité locale : le modèle de Black-Scholes.

Ce chapitre est divisé en trois sections : la première section est consacrée à l'étude de quelques notions de calcul stochastique et les options qui nous seront utiles tout au long de ce travail, la deuxième section est réservée aux équations différentielles stochastiques, et la troisième section de ce chapitre est consacrée à la présentation de modèle à volatilité locale qui est le modèle de Black-Scholes et sa formule d'évaluation.

1.1 Mouvement Brownien : définition et construction

1.1.1 Processus stochastiques en temps continu

On supposera donné un espace probabilisé est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- Ω : est un ensemble.
- $\mathcal{F}$: est une tribu contenue dans l'ensemble des parties de Ω .
- $\mathbb{P}$: est une probabilité sur la tribu $\mathcal{F}$.

Définition 1.1.1 (*tribu*)

Une tribu (où σ -algèbre) sur est une famille $\mathcal{F}$ de sous ensembles de Ω tels que :

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$.
2. $\forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$. (*Stable par passage au complémentaire*)
3. $(A_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{F}$. (*Stable par union et intersection dénombrable*)

Définition 1.1.2 (*Filtration*)[59]

Une filtration $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq +\infty\}$ est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$: pour $0 \leq s \leq t \leq +\infty$, $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.

Définition 1.1.3 (*Processus stochastique*)[59]

Un processus stochastique X est la donnée de $\{X_t, 0 \leq t \leq +\infty\}$. Á t fixé, X_t est une variable

aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ désigne la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$.

A $\omega \in \Omega$ fixés, la fonction $t \mapsto X_t(\omega); t \geq 0$ est une trajectoire du processus X . X_t peut représenter par exemple le nombre de clients qui attendent à un guichet ou le prix d'une action, à l'instant t .

1.1.2 Mouvement Brownien

Définition et premières propriétés

Définition 1.1.4 *Le processus $(W_t, t \geq 0)$ est un Mouvement Brownien (standard) si :*

- a) $P(W_0 = 0) = 1$ (le mouvement Brownien est issu de l'origine).
- b) $\forall s \leq t, W_t - W_s$ est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance $(t - s)$. (est la stationnarité des accroissements du mouvement Brownien)
- c) $\forall n, \forall t_i, 0 \leq t_0 \leq t_1 \dots \leq t_n$, les variables $(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, \dots, W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_0})$ sont indépendantes. (traduit que le mouvement Brownien est à accroissements indépendants)

Dans tout ce qui suit, sauf mention explicite du contraire nous supposons $W_0 = 0$.

On notera de façon indifférenciée $W_t, W_t(\omega), W(t), W(t, \omega)$.

Proposition 1.1.1 *(W_t) est un mouvement brownien si et seulement si c'est un processus gaussien centré de covariance $\text{cov}(W_t, W_s) = \min(t, s)$.*

Proposition 1.1.2 [9]

Soit W un mouvement Brownien standard et $\lambda \in \mathbb{R}$ une constante. Chacun des processus suivants est une martingale :

- (i) : $\{W_t, t \geq 0\}$,
- (ii) : $\{W_t^2 - t, t \geq 0\}$,
- (iii) : $\{e^{\lambda W_t - \lambda^2 t/2}, t \geq 0\}$.

Intégrale de Wiener et intégrale stochastique

Soit W le mouvement brownien standard défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique continu adapté à $\mathcal{F}$. On suppose par ailleurs que X_t vérifie :

$$E \left(\int_0^T X_s^2 ds \right) < \infty$$

Alors, l'intégrale stochastique de X_t par rapport à W est la variable aléatoire se définit comme suit :

$$\left(\int_0^T X_s dW_s \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_n^N X_{n-1} (W_n - W_{n-1})$$

Propriété 1.1.1 [47]

L'intégrale stochastique vérifie les propriétés suivantes :

- $\int_0^t X_s dW_s$ est une martingale ;
- $E \left[\int_0^t X_s dW_s \right] = 0$;
- $\text{Var} \left(\int_0^t X_s dW_s \right) = \int_0^t \|X_s\|^2 ds$.

1.2 Options

1.2.1 Définition

Définition 1.2.1 *Une option est un titre qui donne à son détenteur le droit, mais non l'obligation d'acheter (ou de vendre) un titre à un prix déterminé à l'avance (le prix d'exercice ou prix de levée de l'option) pendant une certaine période de temps, passe cette période, l'option ne vaut plus rien.*

1.2.2 Les deux formes d'option

Option d'achat (Call Européen)

Une option d'achat (Call) donne le droit à son détenteur d'acheter une certaine quantité d'actif sous-jacent (de valeur S_t à l'instant t) à une certaine date futur, appelée « maturité », noté T et à un prix fixé dans le contrat, noté K appelée « Strike » prix d'exercice. L'acheteur

ayant donc le droit et non le devoir d'exercer l'option à la maturité, il va exercer son option si $S_t > K$ sinon il ne fait rien. La valeur réelle donc échangée à la maturité, appelée le "pay-off" de l'option, est donc :

$$(S_t - K)^+ = \max(S_t - K, 0).$$

Option de vente (Put Européen)

Une option de vente (Put) donne le droit à son détenteur de vendre une certaine quantité d'actif sous-jacent (de valeur S_t à l'instant t) à une certaine date futur, appelée «maturité», noté T et à un prix fixé dans le contrat. Avec les mêmes notations que pour le Call, on obtient que le "pay-off" du Put est :

$$(K - S_t)^+ = \max(K - S_t, 0).$$

1.2.3 Parité Put-Call

La parité d'achat est la relation entre les options d'achat européennes (Call) et les options de vente (Put) qui ont le même prix d'option d'exercice et se terminent en même temps. Cette relation est très utile pour déterminer le prix de l'un des deux dans le modèle Black-Scholes. En effet, il suffit de calculer l'un des deux à partir du modèle de Black-Scholes, la seconde se déduit immédiatement grâce à cette relation.

La relation est donnée par :

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Avec :

- S_t : est la valeur de l'actif sous-jacent à l'instant t .
- C_t : est la valeur du Call à un instant t .
- P_t : est la valeur du Put à un instant t .
- K : est le prix d'exercice.
- T : est la maturité.

Peut profiter sans risque si nous avons, par exemple :

$$C_t - P_t > S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Au temps t , achetons des actions et des options de vente (Put) et vendons des options d'achat (Call). A l'instant t , cette opération dégage un profit net égal à

$$C_t - P_t - S_t$$

Si la somme est positive, on la place au taux r jusqu'à la date T . A la date T , nous obtenons deux cas :

- $S_T > K$: donc, le Call est exercée, on livre l'action, on encaisse la somme K et on solde l'emprunt ou le prêt, de sorte qu'on se retrouve avec une richesse égale à :

$$K + e^{r(T-t)}(C_t - P_t - S_t) > 0.$$

- $S_T \leq K$: donc, on exerce son Put en vendant notre action, on encaisse la somme K et comme précédemment, on se retrouve avec une richesse :

$$K + e^{r(T-t)}(C_t - P_t - S_t) > 0.$$

Dans les deux cas, un profit positif est réalisé sans mise de fond initiale : c'est un exemple d'arbitrage.

1.2.4 Les problèmes liés aux options

Il est naturel qu'en mathématiques financières le problème de la détermination du prix de l'option (pricing) à toute date ainsi que le problème de la couverture (hedging) soient majeur.

1 - Le problème de la couverture (hedging)

La couverture est une protection contre tout risque éventuelle liée à l'exercice de l'option, ce qui garantit à l'investisseur la limitation maximale de ses pertes ; Le problème de couverture d'une option consiste donc à trouver une stratégie basée sur les actifs du marché dont la valeur à chaque date t est égale au pay-off de l'option.

Pour cela on doit supposer quelques hypothèses qui sont :

Une hypothèse de modélisation des marchés, en particulier du cours des actifs financiers.

Une hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), par conséquent la valeur de l'option est égale à la somme des valeurs de ces positions (observables sur le marché).

2 - Problème de la valorisation (Pricing)

La valorisation (pricing) d'un titre financier est l'évaluation de sa valeur. Quelle est la prime de l'option, c'est-à-dire le prix du contrat payé par l'acheteur au vendeur de l'option ? Autrement dit comment évaluer à la date de signature du contrat, prise comme origine des temps $t = 0$, une valeur $(S_T - E)^+$ (dans le cas du Call) à la maturité $T > 0$.

L'évaluation des produits dérivés se ramène souvent au calcul du prix aujourd'hui d'un actif dont on ne connaît le prix qu'à une date future.

Définition 1.2.2 (portefeuille)[55]

Un portefeuille est un ensemble d'investissement possédé par un intervenant sur le marché. Ce sont des positions sur le marché, c-à-d le nombre d'actifs et de produit dérivé qu'il possède. Il peut contenir des actions, des options, des devises... On peut appeler cela un portefeuille initial sans l'action de gestion des risques.

1.2.5 Caractéristiques

Actif sous-jacent[12]

C'est l'actif sur lequel porte l'option de vente ou d'achat. L'actif sous-jacent d'un contrat d'options peut être un actif physique (matières premières ou agricoles), un instrument financier (actions, obligations, taux d'intérêt, cours de change) ou encore un indice boursier ou climatique.

Echéance [12]

C'est la date de fin de validité du contrat. Pour les contrats d'options, les dates d'échéance sont standardisées (le 3ème vendredi du mois d'échéance).

Par ailleurs, il faut distinguer deux types d'options selon le mode d'exercice :

- Européenne : l'exercice se fait à l'échéance uniquement.

- Américaine : l'exercice se fait jusqu'à l'échéance. L'option peut être exercée pendant toute la durée du contrat.

Le prix d'exercice (ou Strike) [41]

Il correspond au prix auquel le détenteur de l'option peut exercer son droit, c'est-à-dire au prix auquel l'acheteur peut acquérir l'actif sous-jacent durant la période de vie, c'est un prix de référence, en fonction de l'évolution du prix du sous-jacent, l'option peut être levée si le prix d'exercice est avantageux et que l'investisseur peut réaliser un profit.

La prime : le prix de l'option [12]

En contrepartie de l'engagement d'acheter ou de vendre des actions à un prix déterminé, le vendeur de l'option demande une rétribution : la prime, c'est-à-dire le prix de l'option. La prime est versée par l'acheteur au vendeur lors de la conclusion de l'engagement et reste acquise au vendeur de l'option même si l'acheteur décide de ne pas exercer son droit. Contrairement au prix d'exercice, la prime de l'option n'est jamais fixe ; elle varie au gré des transactions selon l'offre et la demande

1.3 Equations différentielles stochastiques

On appelle l'équation différentielle stochastique (EDS) est une perturbation de l'équation différentielle ordinaire (EDO) par un terme dépendant d'une variable de bruit blanc.

Les équations différentielles s'écrivent sur la forme suivante :

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{1.3.1}$$

où l'inconnue est une fonction $x(t)$ qui doit vérifier une équation impliquant sa dérivée $x'(t)$ et elle-même. Les cas les plus simples sont les équations différentielles d'ordre 1 comme en (1.3.1) (seule la dérivée 1 ère est impliquée) avec $f(t, x) = a + bx$ indépendant de t et affine par rapport à x . Symboliquement, l'équation (1.3.1) se réécrit

$$dx(t) = f(t, x(t)) dt \tag{1.3.2}$$

Les EDS sont des généralisations des équations (1.3.2) où la dynamique déterministe d'évolution f est perturbée par un terme aléatoire (stochastique). On parle alors d'équation différentielle stochastique. En général la perturbation aléatoire est considérée comme un bruit. Il est légitime de considérer que ce bruit est un processus gaussien et en général il est modélisé par un Mouvement Brownien W et une intensité de bruit $\sigma(t, x)$:

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t \quad (1.3.3)$$

Où σ est une fonction du temps t et de l'inconnue au temps t (X_t), mais peut ne dépendre que du temps (σ_t) ou de la valeur (X_t) en temps t ($\sigma_{(X_t)}$) ou même de la constante σ .

1.3.1 Définition

Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme :

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.3.4)$$

Ou sous sa forme différentielle :

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t \\ X_0 = x_0. \end{cases} \quad (1.3.5)$$

dW_t est la différentielle d'un mouvement brownien $(W_t)_{t \geq 0}$, μ et σ sont les coefficients de l'équation (1.3.5) (ce sont des fonctions de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et $X_0 \in \mathbb{R}$ est la valeur initiale.

- La solution de l'équation (1.3.5) est appelé processus de diffusion, ou simplement, une diffusion.
- L'inconnu est le processus $(X_t)_{t \geq 0}$. Pour les équations différentielles ordinaires, le problème est de montrer que l'équation différentielle a une solution unique pour les coefficients μ et σ sous certaines conditions. Il est utile de spécifier des données.
- Une solution de (1.3.5) est un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ continu $\mathcal{F}_t$ -adapté tel que les intégrales :

$$\int_0^t \mu(s, X_s) ds \text{ et } \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$$

aient un sens et l'égalité

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$$

est satisfaite pour tout t p.s.

1.3.2 Théorème (d'existence et d'unicité)

On suppose que

1. les fonctions μ et σ sont continues.
2. Il existe k tel que pour tout $t \in [0, T], x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$
 - (a) (condition de Lipschitz) $|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq k |x - y|$
 - (b) (la croissance spatiale) $|\mu(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq k^2(1 + |x|)^2$
3. La condition initiale X_0 est indépendante de $(W_t, t \geq 0)$ est de carré intégrable, alors il existe une unique solution de (1.3.4) à trajectoires continues pour $t \leq T$. De plus cette solution vérifie :

$$E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2\right) < \infty$$

1.3.3 Solution d'une équation différentielle stochastique (EDS)

Définition 1.3.1 Nous appelons la solution de EDS $E(\mu, \sigma)$ comme

- Un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ satisfaisant les conditions habituelles.
- Un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -Mouvement Brownien $W = (W^1, \dots, W^m)$ dans $\mathbb{R}^m$ défini sur cet espace de probabilité.
- Un processus $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adapté continu $X = (X^1, \dots, X^d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que (1.3.4) soit vérifiée, c'est à dire, coordonnée par coordonnée, pour tout $1 \leq i \leq d$.

Lorsque de plus $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^d$, on dira que le processus X est solution de $E_x(\mu, \sigma)$.

On remarquera que lorsqu'on parle de solution de $E(\mu, \sigma)$, on ne fixe pas μ à priori l'espace de probabilité filtré ni le Mouvement Brownien W . Il existe plusieurs notions d'existence et d'unicité pour les équations différentielles stochastiques.

1.3.4 Solution forte

Une solution X de l'EDS est un processus continu qui vérifie :

1. X est mesurable adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$.
2. $\mathbb{P}$ -p.s. $\int_0^t \{ |\mu(s, X_s)| + |\sigma(s, X_s)|^2 \} ds < \infty$.
3. $\mathbb{P}$ -p.s on a : $X_t = \xi + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, 0 \leq t \leq T$

où la filtration est définie pour tout t positif par :

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{\sigma(\xi, W_s; s \leq t) \cup \mathcal{N}\}.$$

1.3.5 Solution faible

La solution faible de formule (1.3.4) est un triplet :

1. $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, un espace de probabilité filtré.
2. W un $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien (standard).
3. X , un processus $\mathcal{F}_t$ -adapté

Les processus X et W sont définis sur le même espace donné et vérifient :

$$P\left(\int_0^t [|\mu(s, X_s)|^2 + |\sigma(s, X_s)|^2] ds < \infty\right) = 1, \quad t \geq 0$$

et

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \quad X_0 = \xi$$

1.3.6 Théorème de Girzanov

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé dont la filtration est la filtration naturelle d'un Mouvement Brownien standard $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$, et soit $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus adapté vérifiant $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$ p.s tel que le processus $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par :

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds\right)$$

soit une $\mathcal{F}_t$ -martingale, Alors il existe une probabilité $\mathbb{P}^{(L)}$ de densité L_t équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle le processus $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par

$$B_t = W_t - \int_0^t \theta_s ds$$

est un $\mathcal{F}_t$ -Mouvement Brownien standard.

1.3.7 Lemme d'Itô

Considérons maintenant que X est un processus stochastique satisfaisant à l'équation différentielle stochastique (EDS),

$$dX = \mu dt + \sigma dW_t$$

où W est MB, ce qui signifie

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t$$

ou de manière équivalente

$$X_t = X_0 + \int_{t_0}^t \mu(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, X_s) dW_s$$

Avec $\mu(t, X_t) = \mu_t$ et $\sigma(t, X_t) = \sigma_t$, μ et σ sont des fonctions de X_t et du temps t .

Si $f(t, x) : [0, \infty) \times R \longrightarrow R$ est une fonction $C^{1,2}$ et $Z_t := f(t; X_t)$ alors

$$\begin{aligned} dZ_t &= \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f(t, X_t)}{\partial x^2} (dX_t)^2 \right) \\ &= \left(\frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} \mu_t + \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, X_t)}{\partial x^2} \sigma_t^2 \right) dt + \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} \sigma_t dW_t \end{aligned}$$

Cette équation est donc l'application du lemme d'Itô à une fonction du temps et d'une seule variable d'état.

1.3.8 Règle de l'extrémité gauche

Définition 1.3.2 nous rapprocher d'une intégrale définie

$$\int_a^b f(x) dx$$

où $f(x)$ est une fonction continue. D'abord, nous choisissons des points $\{x_i\}$ qui se subdivisent $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$$

Nous pouvons prendre $\{x_i\}$ pour être uniformément espacés, chaque intervalle ayant la même largeur :

$$\Delta x = \frac{b - a}{N}$$

où n est le nombre de sous-intervalles. Alors L_n se simplifie pour

$$\int_a^b f(x)dx \approx L_n = \Delta x \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) = \Delta x (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{N-1}))$$

et pour sous-intervalles égaux $[x_i, x_{i+1}]$, pour $i = 0, 1, \dots, N - 1$, avec $a_i = a + i\Delta x$ Zones de sous-intervalles approximatifs avec des zones rectangulaires à gauche

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \Delta x f(x_i)$$

1.3.9 Simulation de l'EDS

Nous supposons que le prix de l'action S_t est déterminé par l'équation différentielle stochastique (EDS) :

$$dS_t = \mu(t, S_t) dt + \sigma(t, S_t) dW_t \quad (1.3.6)$$

où W_t est le Mouvement Brownien. Nous simulons S_t sur l'intervalle de temps $[0, T]$, que nous supposons être discrétisé comme $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_m = T$, où l'incrément de temps et la largeur dt sont équidistants.

Les incréments de temps équidistants sont principalement utilisés pour la commodité de la notation, car ils nous permettent d'écrire $t_i - t_{i-1}$ comme étant simplement Δt ($\Delta t = t_i - t_{i-1}$).

L'intégration de dS_t de t à $t + \Delta t$ produit

$$S_{t+\Delta t} = S_t + \int_t^{t+\Delta t} \mu(u, S_u) du + \int_t^{t+\Delta t} \sigma(u, S_u) dW_u \quad (1.3.7)$$

L'équation (1.3.7) représente le point de départ de tout Schéma de discrétisation. Au temps t , la valeur de S_t est connue et nous voulons obtenir la valeur suivante $S_{t+\Delta t}$.

1 - Schème d'Euler :

L'un des moyens les plus simples de discrétiser de processus dans l'équation (1.3.7) consiste à utiliser la discrétisation d'Euler, qui équivaut à approximer les intégrales en utilisant la

règle du point de gauche. À partir de là, la première intégrale est approchée comme le produit de l'intégrale au temps t et de l'intervalle intégral Δt

$$\begin{aligned}\int_t^{t+\Delta t} \mu(u, S_u) du &\approx \mu(t, S_t) \int_t^{t+\Delta t} du \\ &= \mu(t, S_t) \Delta t\end{aligned}$$

Nous utilisons la règle du point gauche puisqu'au temps t , la valeur $\mu(t, S_t)$ est connue. La règle de droite exigera que $\mu(t + \Delta t, S_{t+\Delta t})$ soit connu au temps t . De la même manière, l'approximation de la deuxième intégrale est la suivante :

$$\begin{aligned}\int_t^{t+\Delta t} \sigma(u, S_u) dW_u &\approx \sigma(t, S_t) \int_t^{t+\Delta t} dW_u \\ &= \sigma(t, S_t) (W_{t+\Delta t} - W_t) \\ &= \sigma(t, S_t) \sqrt{\Delta t} Z\end{aligned}$$

Où

- Z : est une variable normale standard ($Z \sim N(0, 1)$).
- $W_{t+\Delta t} - W_t$ et $\sqrt{\Delta t}Z$ sont identiques dans la distribution.
- $\Delta t = t_i - t_{i-1}$.

La discrétisation d'Euler de (1.3.7) est donné :

$$S_{t+\Delta t} = S_t + \mu(t, S_t) \Delta t + \sigma(t, S_t) \sqrt{\Delta t} Z \quad (1.3.8)$$

2 - Schème de Milstein

Le schéma de Milstein utilise plus d'informations sur la distribution de densité du processus que le schéma d'Euler. Il s'agit d'une approche générale qui peut être appliquée à plusieurs processus. Nous supposons donc que le prix de l'action S_t est déterminé par l'EDS :

$$\begin{aligned}dS_t &= \mu(t, S_t) dt + \sigma(t, S_t) dW_t \\ &= \mu_t dt + \sigma_t dW_t\end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Sous forme intégrale

$$S_{t+\Delta t} = S_t + \int_t^{t+\Delta t} \mu_s ds + \int_t^{t+\Delta t} \sigma_s dW_s \quad (1.3.10)$$

La clé du schéma de Milstein est d'augmenter la précision de la discrétisation en considérant l'expansion des coefficients $\mu_t = \mu(t, S_t)$ et $\sigma_t = \sigma(t, S_t)$ via le lemme d'Itô. On applique le lemme d'Itô aux fonctions μ_t et σ_t . Comme nous le faisons avec toute fonction différentielle de S . Donc, à travers le lemme d'Itô, l'EDS du coefficient est :

$$d\mu_t = \left(\mu'_t \mu_t + \frac{1}{2} \mu''_t \sigma_t^2 \right) dt + (\mu'_t \sigma_t) dW_t$$

Et

$$d\sigma_t = \left(\sigma'_t \mu_t + \frac{1}{2} \sigma''_t \sigma_t^2 \right) dt + (\sigma'_t \sigma_t) dW_t$$

Où

$$\frac{\partial \mu}{\partial S_t} = \mu'_t, \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial S_t^2} = \mu''_t, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial S_t} = \sigma'_t, \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial S_t^2} = \sigma''_t$$

Où le premier renvoie à la différenciation en S et où les dérivés par rapport à t sont nuls ici car on suppose que μ_t et σ_t n'ont pas de dépendance directe par rapport à t . La forme intégrale des coefficients au temps s (avec $t < s < t + \Delta t$)

$$\mu_s = \mu_t + \int_t^s \left(\mu'_u \mu_u + \frac{1}{2} \mu''_u \sigma_u^2 \right) du + \int_t^s (\mu'_u \sigma_u) dW_u$$

$$\sigma_s = \sigma_t + \int_t^s \left(\sigma'_u \mu_u + \frac{1}{2} \sigma''_u \sigma_u^2 \right) du + \int_t^s (\sigma'_u \sigma_u) dW_u$$

Remplacer μ_s et σ_s dans (1.3.10) pour produire

$$\begin{aligned} S_{t+\Delta t} = & S_t + \int_t^{t+\Delta t} \left(\mu_t + \int_t^s \left(\mu'_u \mu_u + \frac{1}{2} \mu''_u \sigma_u^2 \right) du + \int_t^s (\mu'_u \sigma_u) dW_u \right) ds \\ & + \int_t^{t+\Delta t} \left(\sigma_t + \int_t^s \left(\sigma'_u \mu_u + \frac{1}{2} \sigma''_u \sigma_u^2 \right) du + \int_t^s (\sigma'_u \sigma_u) dW_u \right) dW_s \end{aligned}$$

Les termes supérieurs au premier ordre sont $ds du = \mathcal{O}((\Delta t)^2)$ et $ds dW_u = \mathcal{O}((\Delta t)^{\frac{3}{2}})$ et sont ignorés. Le terme impliquant $dW_u dW_s$ est conservé puisque $dW_u dW_s = \mathcal{O}(\Delta t)$ est d'ordre un. Maintenant, l'équation (1.3.8) devient :

$$S_{t+\Delta t} = S_t + \mu_t \int_t^{t+\Delta t} ds + \sigma_t \int_t^{t+\Delta t} dW_s + \int_t^{t+\Delta t} \int_t^s (\sigma'_u \sigma_u) dW_u dW_s. \quad (1.3.11)$$

Appliquer la discrétisation d'Euler au dernier terme pour obtenir

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \int_t^s \sigma'_u \sigma_u dW_u dW_s &\approx \sigma'_t \sigma_t \int_t^{t+\Delta t} \int_t^s dW_u dW_s \\
 &= \sigma'_t \sigma_t \int_t^{t+\Delta t} (W_s - W_t) dW_s \\
 &= \sigma'_t \sigma_t \left(\int_t^{t+\Delta t} W_s dW_s - W_t W_{t+\Delta t} + W_t^2 \right) \\
 &= \sigma'_t \sigma_t \left(\frac{1}{2} (W_{t+\Delta t} - W_t)^2 - \Delta t \right)
 \end{aligned} \tag{1.3.12}$$

Définissez maintenant $dY_t = W_t dW_t$. En utilisant Lemme d'Itô, il est facile de montrer que Y_t a la solution $Y_t = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$ de sorte que

$$\int_t^{t+\Delta t} W_s dW_s = Y_{t+\Delta t} - Y_t = \frac{1}{2}W_{t+\Delta t}^2 - \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}\Delta t \tag{1.3.13}$$

Remplacer par (1.3.12) pour obtenir

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \int_t^s \sigma'_u \sigma_u dW_u dW_s &\approx \frac{1}{2} \sigma'_u \sigma_u [(W_{t+\Delta t} - W_t)^2 - \Delta t] \\
 &= \frac{1}{2} \sigma'_u \sigma_u [(\Delta W_t)^2 - \Delta t]
 \end{aligned}$$

Où $\Delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t$, qui est égal en distribution à $\sqrt{\Delta t}Z$ avec Z distribué comme normal standard. En combinant les équations (1.3.11) et (1.3.13), la forme générale de la discrétisation de Milstein est donc

$$S_{t+\Delta t} = S_t + \mu_t \Delta t + \sigma_t \sqrt{\Delta t} Z + \frac{1}{2} \sigma'_t \sigma_t \Delta t (Z^2 - 1) \tag{1.3.14}$$

Par rapport à la discrétisation d'Euler, la précision est plus élevée en raison de l'expansion de μ et σ

1.4 Modèle à volatilité locale (constante) : Le modèle de Black-Scholes

Modèle à volatilité locale :

Un modèle de volatilité locale, en finance mathématique et en ingénierie financière, est un modèle qui traite la volatilité en fonction à la fois du niveau d'actif courant S_t et du temps t . En tant que tel, un modèle de volatilité locale est une généralisation du modèle de Black-Scholes, où la volatilité est une constante (c'est-à-dire une fonction triviale de S_t et t).

1.4.1 Présentation de modèle

En 1973, Fisher Black et Myron Scholes ont publié le modèle Black-Scholes que la plupart des investisseurs utilisent pour estimer la valeur des options à terme et évaluer le risque. Le modèle Black-Scholes est un modèle de changement de prix dans le temps pour les instruments financiers tels que les actions qui sont utilisés pour déterminer le prix d'une option d'achat européenne. Ce modèle est basé sur les hypothèses suivantes :

- Le marché est complet,
- Le temps est continu, la volatilité constante
- le sous-jacent est infiniment divisible (par exemple on peut acheter 1/1000 de sous-jacent),
- les ventes à découvert sont autorisées,
- il n'y a pas de coup de transaction,
- il existe un taux d'intérêt constant,
- il n'y a pas de dividende (bénéfices distribués aux détenteurs d'actions).

C'est le modèle des prix des actifs donné par l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t = \mu(t) S_t dt + \sigma(t) S_t dW_t \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.4.1)$$

Avec $\mu, \sigma : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

Où

- S_t : est le prix de l'action au temps t .
- μ : est le rendement espéré.
- σ : est la volatilité.
- $\{W_t\}_{t \leq 0 \leq T}$ le processus de Wiener défini sur l'espace de probabilité avec filtration $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$.

Le prix initial d'une action $S(0) = S_0$, est supposé connu. Conformément aux conditions établies, les deux paramètres μ et σ sont constants. L'équation (1.4.1) peut également être écrite sous forme intégrale comme :

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu(s) S_s ds + \int_0^t \sigma(s) S_s dW_s \quad (1.4.2)$$

1.4.2 Une mesure neutre sur le plan des risques

Sous la probabilité historique $\mathbb{P}$. Une mesure neutre du point de vue du risque est une mesure $\tilde{\mathbb{P}}$ équivalente à $\mathbb{P}$ telle que le prix actualisé de l'action est une martingale sous $\tilde{\mathbb{P}}$. On a :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Proposition 1.1 *Il existe une mesure neutre en termes de risque, définie par :*

$$\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right)_t = \exp \left(-\frac{\mu - r}{\sigma} \hat{W}_t - \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} t \right)$$

Où le processus $\hat{W}_t = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$ est une mouvement brownienne sous $\mathbb{P}$.

Preuve 1.4.1 voir [65]

Le cours de l'action S_t évolue selon l'équation :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma \hat{W}_t \quad (1.4.3)$$

Théorème 1.4.1 *La solution de l'équation (1.4.3) en utilisant le lemme d'Itô est donnée par*

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right), \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.4.4)$$

Preuve 1.4.2 *L'équation 1.4.3 peut être écrite sous forme intégrale comme*

$$S_t = S_0 + r \int_0^t S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dW_s, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

En appliquant la formule d'Itô à $f(S_t) = \log S_t$ avec $f(x) = \log x$, nous avons

$$\begin{aligned} d \log S_t &= r S_t f'(S_t) dt + \sigma S_t f'(S_t) dW_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 f''(S_t) dt \\ &= r dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \\ &= \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t. \end{aligned}$$

C'est pourquoi,

$$\begin{aligned} \log S_t - \log S_0 &= \int_0^t d \log S_x \\ &= \int_0^t \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dx + \int_0^t \sigma dW_x \\ &= \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t, \quad t \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

et

$$S_t = S_0 e^{(r - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma W_t}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Les prix des actifs peuvent être modélisés par l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t W_t, \quad t \geq 0.$$

où

- S_t : est le prix de l'action au temps t .
- r : est le taux de dérive $r > 0$.

- σ : est la volatilité.
- $\{W_t\}_{t \leq 0 \leq T}$ est un mouvement brownien.

Lemme 1.4.1 *Si S satisfait à l'EDS ci-dessus, alors la fonction de valeur $V(S, t)$ satisfait à ce qui suit*

$$dV = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW + \left(rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt$$

1.4.3 Equation de Black-Scholes

C'est une équation aux dérivées partielles qui permet de calculer la valeur d'une option européenne en fonction du temps et de la valeur de l'action sous-jacente. Le modèle est le suivant :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + rV = 0 \quad (1.4.5)$$

C'est une équation aux dérivées partielles (EDP) d'ordre 2, du type parabolique, et il est nécessaire de préciser une condition initiale (ou finale) en temps, et des conditions aux limites en espace [23].

1.4.4 Conditions aux limites pour un Call

Dans le cas d'un "Call" (option d'achat) pour une option européenne, on a une condition finale, à l'instant $t = T$ correspondant à l'échéance de l'option à $t = T$, la valeur du Call est donnée par la formule :

$$C(S, t) = \max(K - S, 0) \quad , \forall S$$

En effet, si S est inférieur au prix d'exercice au terme de l'option, il est inintéressant d'exercer l'option (sous peine de perdre $K - S$). Dans le cas contraire, le bénéfice du Call est $S - K$. Le domaine d'étude en "espace" (variable S) est théoriquement $[0, +\infty[$, et il faut donc fixer les conditions aux limites sur la fonction C . Si $S = 0$, alors le bénéfice à terme est forcément nul. Il n'y a donc aucun intérêt à exercer l'option d'achat dans ce cas, même s'il reste du temps avant son expiration. On a donc la condition suivante :

$$C(0, t) = 0, \quad \forall t$$

Si au contraire le prix de l'action augmente considérablement ($S \rightarrow +\infty$), il est clair que l'option sera exercée et que le prix d'exercice de l'option sera négligeable. On a donc la condition suivante :

$$C(S, t) \sim S, \quad t \rightarrow +\infty \quad (1.4.6)$$

L'ensemble des équations (1.4.5)- (1.4.6) peut être résolu afin de déterminer la valeur d'une option d'achat (Call) [23].

1.4.5 Conditions aux limites pour un Put

Dans le cas d'une option du type "Put" (option de vente), la condition finale est le bénéfice

$$P(S, t) = \max(K - S, 0), \quad \forall S \quad (1.4.7)$$

En effet, si S est supérieur au prix d'exercice au terme de l'option, il est inintéressant d'exercer l'option (sous peine de perdre $S - K$). Dans le cas contraire, le bénéfice du Put est $K - S$.

Le domaine d'étude en "espace" (variable S) est toujours $[0 + \infty[$, et il faut donc fixer les conditions aux limites sur la fonction P . Si le prix de l'action augmente considérablement ($S \rightarrow +\infty$), il est clair que l'option de vente ne sera pas exercée, et donc on a la condition suivante :

$$P(S, t) \rightarrow 0, \quad S \rightarrow +\infty.$$

Si au contraire, on considère le cas d'une action dont le prix est nul ($S = 0$), alors le bénéfice à terme est forcément E . Il faut tenir compte du taux d'intérêt r pour en déduire la valeur de $P(0, T)$ sachant qu'à l'instant T , $P(0, T) = E$. Dans le cas d'un taux d'intérêt constant, on trouve assez facilement la condition suivante en résolvant l'équation (1.4.5) dans le cas $S = 0$:

$$P(0, t) = Ke^{-r(T-t)}, \forall t \quad (1.4.8)$$

On peut généraliser cette formule dans le cas de taux non constants :

$$P(0, t) = Ke^{-\int_t^T r(\tau) d\tau}, \forall t$$

L'ensemble des équations (1.4.5) et (1.4.7)-(1.4.8) peut être résolu afin de déterminer la valeur d'une option de vente (Put) [23].

1.4.6 Formule de Black-Scholes

L'équation donnée par Black-Scholes pour l'évaluation des options est la suivante :

$$C(S, t) = SN(d1) - K \exp(-r(T-t))N(d2)$$

$$P(S, t) = -SN(-d1) + K \exp(-r(T-t))N(-d2)$$

$d1$ et $d2$ donne par :

$$d1 = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d2 = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = d1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

Avec

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

Où

- C/P : Prix de l'option d'achat/de vente. C'est le prix de l'option au moment de la transaction.
- $N(\cdot)$: est la fonction de densité normale cumulative.
- S : prix de l'action sous-jacente. C'est le prix de l'indice au moment de la transaction.
- T : Maturité de l'option
- $(T-t)$: années jusqu'à l'échéance. C'est la différence entre la date d'échéance de l'option et la date de la transaction.

- σ : volatilité des actions. C'est l'écart type des rendements logarithmiques de l'action.
- K : prix d'exercice de l'option à l'échéance. Sur les marchés financiers, un nombre discret de grèves est utilisé pour les options d'achat et de vente.

1.4.7 Estimation des paramètres du modèle de Black-Scholes

Utilisons la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres de notre modèle. Nous avons les données suivantes : Prix $S(0) = S_0, S(h) = S_h, \dots, S(Nh) = S_N, 1 \leq j \leq N$, d'où on extrait les rendements $R_j = \ln(S_j) - \ln(S_{j-1}), 1 \leq j \leq N$.

Proposition 1.4.1 *Les estimations de μ et σ , par la méthode du maximum de vraisemblance, dépendent seulement des rendements $R_1, \dots, R_N$, et sont données par*

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{R}}{h} + \frac{S_N^2}{2h}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{S_N}{\sqrt{h}}$$

Où

$$\bar{R} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N R_j \quad \text{et} \quad S_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (R_j - \bar{R})^2$$

Preuve 1.4.3 *D'après la loi jointe des rendements, les rendements forment un bruit blanc (i.e. des observations indépendantes de même loi), gaussien. La fonction de densité jointe des rendements, étant donné S_0 , est le produit des densités gaussiennes*

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2h}} e^{-\frac{\left(R_j - h\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)^2}{2\sigma^2h}}$$

Que l'on veut maximiser, pour $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, cela équivaut à minimiser

$$\begin{aligned}
 g(\mu, \sigma) &= -\ln(L(\mu, \sigma)) \\
 &= -\ln \left(\prod_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2h}} e^{-\frac{\left(R_j - h\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)^2}{2\sigma^2h}} \right) \\
 &= -\ln \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2h}} \right)^N \prod_{j=1}^N e^{-\frac{\left(R_j - h\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)^2}{2\sigma^2h}} \right) \tag{1.4.9}
 \end{aligned}$$

On voit que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g}{\partial \mu} &= \frac{N}{\sigma^2} \left(\mu h - \frac{\sigma^2 h}{2} - \bar{R} \right) \\
 \frac{\partial g}{\partial \sigma} &= \frac{N}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^3 h} \sum_{j=1}^N \left(R_j - \mu h - \frac{\sigma^2 h}{2} \right)^2 - \frac{N}{\sigma} \left(\mu h - \frac{\sigma^2 h}{2} - \bar{R} \right)
 \end{aligned}$$

Les deux dérivées sont nulles donc

$$\begin{aligned}
 \frac{N}{\sigma^2} \left(\mu h - \frac{\sigma^2 h}{2} - \bar{R} \right) &= 0 \\
 \frac{N}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^3 h} \sum_{j=1}^N \left(R_j - \mu h - \frac{\sigma^2 h}{2} \right)^2 - \frac{N}{\sigma} \left(\mu h - \frac{\sigma^2 h}{2} - \bar{R} \right) &= 0
 \end{aligned}$$

$\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}$ sont données par :

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \frac{\bar{R}}{h} + \frac{(\sigma)}{2} = \frac{\bar{R}}{h} + \frac{S_N^2}{2h} = \frac{1}{2h} (2\bar{R} + S_N^2) \\ \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{Nh} \sum_{j=1}^N R_j} = \frac{S_N}{\sqrt{h}} \end{cases}$$

1.4.8 Simulation

1 - Schéma d'Euler

La dynamique des cours des actions Black-Scholes dans le cadre de la mesure de neutralité du risque .Nous avons vu que le modèle de Black-Scholes avec volatilité locale suppose que

l'évolution des prix des actifs est régie par l' équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1.4.10)$$

L'application de l'équation (1.3.8) a produit la discrétisation d'Euler du modèle de Black-Scholes

$$S_{t+\Delta t} = S_t + r S_t \Delta t + \sigma S_t \sqrt{\Delta t} Z \quad (1.4.11)$$

Nous pouvons également générer des prix logarithmiques et générer des résultats sous forme exponentielle .Par lemme d'Itô $\ln S_t$ suit le processus :

$$d \ln S_t = \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma dW_t \quad (1.4.12)$$

La discrétisation d'Euler via l'équation (1.3.8) produit

$$\ln S_{t+\Delta t} = \ln S_t + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z$$

Pour que

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z \right) \quad (1.4.13)$$

Où $\Delta t = t_i - t_{i+1}$.

2 - Schéma de Milstein

Dans l'équation du modèle de Black-Scholes (1.4.10) , nous avons $\mu(S_t) = rS_t$ et $\sigma(S_t) = \sigma S_t$. Par conséquent, le schème de Milstein (1.3.14) est donné par :

$$S_{t+\Delta t} = S_t + r S_t \Delta t + \sigma S_t \sqrt{\Delta t} Z + \frac{1}{2} \sigma^2 \Delta t (Z^2 - 1)$$

qui ajoute le terme de correction $\frac{1}{2} \sigma^2 \Delta t (Z^2 - 1)$ au schéma d'Euler dans (1.4.11). Dans le modèle de Black-Scholes pour le prix du logarithme des actions, l'équation (1.4.12), nous avons $\mu(S_t) = (r - \frac{1}{2} \sigma^2)$ et $\sigma(S_t) = \sigma$ que $\mu'_t = \sigma'_t = 0$. Le schéma de Milstein (1.3.14) est donc

$$\ln S_{t+\Delta t} = \ln S_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z \quad (1.4.14)$$

Qui est identique au schème d'Euler en (1.4.13). Ainsi, si le schéma de Milstein améliore la discrétisation de S_t dans le modèle de Black-Scholes, il n'améliore pas la discrétisation de $\ln S_t$.

CHAPITRE

2

LA VOLATILITÉ ET SÉRIE DE RENDEMENTS

Introduction

Le prix des actifs financiers varie constamment, de sorte qu'il peut augmenter ou diminuer, ce qui peut présenter un risque pour les investissements et les rendements financiers. Ce risque est mesuré par la volatilité.

Le but de ce chapitre est la représentation des différentes propriétés des séries financières et l'explication en détail le concept de volatilité.

La première section présente la définition des séries des rendements, la deuxième section introduit la notion de la loi joint des rendements .la troisième section représente les propriétés des séries financières. Et la dernière section de ce chapitre définit en détail le concept de volatilité.

2.1 Série des rendements

En général il n'est pas très intéressant de voir juste le prix d'un investissement, à savoir un titre financier. Du point de vue d'un investisseur, le rendement de l'investissement est beaucoup plus intéressant. Principalement à cause qu'un investisseur insiste plus sur le gain relatif réalisable, plutôt que sur le prix nominal de l'investissement, mais par ce que le rendement comme indice de changement du prix relatif permet des comparaisons entre compagnies, titres boursiers et monnaie. Le rendement d'un titre varie donc en fonction du cours du titre, c'est une valeur financière, à la différence de la rentabilité financière, qui est une valeur comptable se calcule différemment selon le type de placement. Soit S_t le prix d'un actif à la date t . On va s'intéresser à une transformation de ce prix par rapport à une durée, ou une fréquence d'échantillonnage. Le rendement à l'instant t peut être défini par :

2.1.1 Taux de rendement arithmétique

$$R_{(1,t)} = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}.$$

2.1.2 Taux de rendement géométrique

$$R_{(2,t)} = \log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right).$$

Les deux rendements sont liés par la formule suivante :

$$R_{(1,t)} = \exp(R_{(2,t)}) - 1 \approx R_{(2,t)}.$$

2.2 Loi jointe des rendements

On note : $m = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$

pour tout $(\tau > 0)$ fixé, les rendements R_j sont indépendants, identiquement distribués, et $R_j \sim N(m\tau, \sigma^2\tau)$, C'est-à-dire R_j est distribué selon une loi normale de moyenne $m\tau$ et de variance $\sigma^2\tau$. pour $1 \leq j \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{S(j\tau)}{S((j-1)\tau)} &= \frac{S_0 \exp(\mu j\tau - \frac{j\tau\sigma^2}{2} + \sigma B(j\tau))}{S_0 \exp(\mu(j-1)\tau - \frac{(j-1)\tau\sigma^2}{2} + \sigma B((j-1)\tau))} \\ &= \exp\left(\mu\tau - \frac{\tau\sigma^2}{2}[B(j\tau) - B((j-1)\tau)]\right) \end{aligned}$$

En appliquant le logarithme de chaque côté :

$$\begin{aligned} R_j &= \ln S(j\tau) - \ln(S((j-1)\tau)) \\ &= \mu\tau - \frac{\sigma^2}{2}\tau + \sigma B(j\tau) - B((j-1)\tau) \\ N &\sim (\mu\tau, \sigma^2\tau) \end{aligned}$$

Les incréments $B(j\tau) - B((j-1)\tau)$ sont indépendants, les R_j sont donc aussi indépendants. Une contrainte très importante du modèle de Black-Scholes est que les rendements R_j , $1 \leq j \leq n$ sont indépendants et de même loi gaussienne.

2.3 Propriétés des séries financières

2.3.1 Non stationnarité

Les séries financières S_t associés aux prix d'actifs ont généralement non stationnaires au sens de la stationnarité du second ordre, tandis que les processus associés aux rendements

sont compatibles avec la propriété de stationnarité au second ordre.

2.3.2 Stationnarité

Un processus $(x_t, t \in Z)$ est dit stationnaire au second ordre, ou stationnaire au sens faible, ou stationnaire d'ordre deux si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) $\forall t \in Z, E(X_t^2) < \infty$.
- (ii) $\forall t \in Z, E(X_t) = m$, indépendant de t .
- (iii) $\forall (t, h) \in Z^2, cov(X_t, X_{t+h}) = E[(X_{t+h} - m)(X_t - m)] = \gamma(h)$, indépendant de t .

2.3.3 Aplatissement

L'aplatissement (kurtosis) d'une distribution est mesuré par le coefficient d'aplatissement :

$$K = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

K est positif ($K > 0$), Il vaut 3 pour une distribution normale, et (-1.2) pour une distribution uniforme continue (normalisé). Un coefficient d'aplatissement élevé indique que la distribution est plutôt pointue à sa moyenne avec nécessairement des queues de distribution épaisses. En effet, comme l'intégrale sous la densité vaut toujours 1, plus la distribution est pointue près de la moyenne plus les queues de la distribution ont chargées, et donc plus le moment d'ordre 4 est important par rapport au carré du moment d'ordre 2. La distribution normale servant de référence, on a introduit l'excès de kurtosis : $K - 3$. Une distribution plus pointue que la normale est dite leptokurtique et une distribution moins pointue est dite platykurtique.

2.3.4 Asymétrie

L'asymétrie (skewness) d'une distribution de probabilité est mesurée par le coefficient d'asymétrie :

$$SK = \frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}}$$

SK égale zéro pour une distribution symétrique (autour de la moyenne), c'est le cas de la loi normale. Un coefficient positif indique une distribution peu dispersée vers la gauche avec une queue de distribution étalée vers la droite : on dit que la distribution est positivement

asymétrique (positively skewed), c'est le cas de la loi log -normale. Dans une distribution positivement asymétrique, des valeurs supérieures à la moyenne ont plus de chances d'apparaître que des valeurs inférieures à la moyenne.

2.3.5 Hétéroscédasticité

L'hétéroscédasticité est une des caractéristiques des séries financières, elle représente le caractère non constant de la variance d'une série dans le temps. Pour démontrer facilement l'hétéroscédasticité d'une série financière, il est plus intéressant de subdiviser notre série de données et ensuite de calculer la déviation standard (l'écart type) de chacune de nos sous-séries et les comparer.

2.3.6 Autocorrélation

Les rendements ne démontrent qu'une faible autocorrélation, tandis que les carrés des rendements sont autocorrélés à niveau significatif. L'autocorrélation d'un processus X_t désigne la corrélation du processus par rapport à une version décalée dans le temps de lui-même. L'absence d'autocorrélation des rendements renvoie à la notion d'efficacité des marchés. Nous rappelons que sous cette hypothèse, le prix d'une action incorpore toute l'information disponible. Elle signifie que les cours ne peuvent varier entre t et $t + 1$ qu'en raison de l'arrivée de nouvelles informations non anticipées. Ce qui implique qu'après une hausse des prix d'hier, il a à peu près autant de chances d'observer une hausse ou une baisse des prix aujourd'hui. Pour l'investisseur, cela signifie qu'il est à priori difficile d'utiliser l'information dans les prix passés pour prévoir les prix futurs.

2.4 La volatilité

Définition 2.4.1 *La volatilité est une notion fondamentale qui constitue de mesure le risque associé au rendement de l'actif sous-jacent à une période donnée sur la marche financière. L'estimation de la volatilité est le point le plus délicat dans l'établissement d'un prix. De plus, la valeur des options est très sensible aux changements de volatilité.*

La volatilité d'un actif est définie comme étant l'écart type de sa rentabilité. Elle représente un indicateur de mesure de risque. Plus la volatilité d'un actif est importante, plus il est risqué. Elle est un des principaux facteurs de détermination de la prime, avec le cours de l'actif sous-jacent. La volatilité est inobservable.

Par conséquent, la volatilité est un paramètre très important pour déterminer la valeur d'une option et la précision de son estimation détermine la précision de l'évaluation des options.

En d'autres termes, il ne suffit pas d'avoir un bon modèle d'évaluation d'une option, mais il faut aussi l'estimation la plus précise de la volatilité.

Et il y a deux estimateurs principaux pour ce paramètre sont la volatilité historique (utilisant les données historiques sur les cours de l'action) et volatilité implicite (basées sur l'observation des prix des options).

2.4.1 Estimation de la volatilité

L'estimation de la volatilité est l'un des sujets les plus étudiés dans le monde financier. Il devient vital d'estimer avec précision son importance lorsqu'il s'agit d'évaluer des produits dérivés (par exemple, des options exotiques ou encore de construire des stratégies renfermant des positions sur option).

L'utilisation d'un simple modèle Black-Scholes peut entraîner des erreurs d'évaluation assez importantes. Plusieurs modèles peuvent être utilisés pour estimer la volatilité du marché. Parmi ces modèles, les plus importants sont la volatilité historique et la volatilité implicite

1 - La Volatilité Historique

Aussi appelée volatilité statistique. En utilisant les données historiques du cours sous-jacent $(S_t)_t$ des Méthodes statistiques d'estimation pour la moyenne et la variance, on en déduit le paramètre de volatilité.

Estimation de la Volatilité Historique

Pour estimer la volatilité en utilisant les données historiques du cours sous-jacent $(S_t)_t$, il a été utilisé par plusieurs chercheurs comme : Black-Scholes(1972), Galai(1977) et Finnerty(1978).

Le rendement instantané du sous-jacent est supposé suivre un mouvement brownien géométrique suivant l'équation :

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW.$$

Il est équivalent d'affirmer que R_t suit une loi log-normal. La volatilité σ du rendement instantané est supposée être constante dans le modèle de Black-Scholes. Il est possible d'estimer la volatilité instantanée.

Avec des observations rapprochées du cours du sous-jacent. La racine carrée de la variance empirique sans biais ($\hat{\sigma}_{historique}^2$) est la meilleure estimation de la volatilité. Donnée par les formules suivantes :

$$\hat{\sigma}_{historique}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) - \bar{R} \right)^2$$

donc

$$\hat{\sigma}_{historique} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) - \bar{R} \right)^2}.$$

Ou :

$$\bar{R} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \right)$$

Avec :

S_t : le cours de l'actif sous-jacent à la date t .

N : le nombre jours passés et par conséquent le nombre d'observation à considérer pour le calcul de la volatilité.

$\bar{R}$: la moyenne des rendements.

S_{t-1} : le cours de l'actif sous-jacent à la date $t-1$.

Par conséquent, nous pouvons utiliser la formule suivante pour calculer la volatilité historique annuelle :

$$\hat{\sigma}_{historique} = \sqrt{\frac{252}{(N-1)} \sum_{i=1}^N \left(\ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) - \bar{R} \right)^2}.$$

2 - La volatilité implicite

Bien qu'il soit impossible d'observer les volatilités futures du marché, il est encore possible d'extraire des prévisions de marché des transactions publiques.

La volatilité implicite consiste à utiliser les prix observés sur les marchés pour extraire une volatilité, elle est liée à la valeur présente du marché et se base sur le prix présent de l'option qui inclue les prévisions des événements futurs, elle est liée intimement avec le processus de diffusion du sous-jacent, dans le cas du modèle de Black-Scholes, celui-ci est brownien géométrique, ce qui ne correspond pas avec la réalité. Il suffit de trouver la volatilité notée σ_{imp} telle que l'estimation donnée par le modèle de BS corresponde à celle du marché. Plus généralement, la volatilité implicite d'une option est la volatilité permettant de compléter le modèle de Black-Scholes pour donner le prix réel de l'option sur le marché.

L'outil de référence essentiel est la volatilité implicite, obtenue en inversant la formule de Black-Scholes qui donne le prix C^{BS} du call par rapport au prix C^{obs} du call observé sur le marché et la fonction de paramètres connus à l'instant ie t , S_t , K , T et d'un paramètre inconnu : la volatilité σ_{imp} .

On vérifie que la formule de Black-Scholes est une fonction strictement croissante et continue de sigma, bijective sur l'ensemble des valeurs a priori possibles de l'option. On utilise alors le prix de marché pour extraire numériquement la volatilité implicite, solution unique à l'instant t de l'équation :

$$C^{BC}(t, S_t, T, K, \sigma_{imp}) = C^{Obs}(t, x, K, T)$$

(pour une cotation de l'actif S_t).

La volatilité implicite peut s'écarter considérablement de la volatilité historique, car elle est censée refléter la volatilité future attendue du marché. Il contient également toutes les incertitudes sur la qualité du modèle utilisé.

Estimation de la Volatilité Implicite

Pour obtenir une expression de la volatilité d'après la formule de Black-Scholes, reprenons donc la formule de Black-Scholes pour un Call-européen :

$$C(S, t) = SN(d_1) - K \exp(-r(T - t)) N(d_2)$$

Or : $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}S^2} ds$. on a alors : $N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ et

$$\begin{aligned}
N'(d_1) &= S \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2} \\
&= S \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \right)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K e^{\ln(\frac{S}{K})} e^{-\frac{1}{2} \frac{\ln^2(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})^2(T-t)^2 + 2(r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t) \ln(\frac{S}{K})}{\sigma^2(T-t)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln^2(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})^2(T-t)^2 + (2r + \sigma^2 - 2\sigma^2)(T-t) \ln(\frac{S}{K})}{\sigma^2(T-t)} \right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln^2(\frac{S}{K}) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2(T-t)^2 + 2 \ln(\frac{S}{K}) \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma^2(T-t)} \right)}
\end{aligned}$$

D'autre par :

$$\begin{aligned}
K e^{-r(T-t)} N'(d_2) &= K e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_2^2} \\
&= K e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(\frac{S}{K}) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \right)^2} \\
&= K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln^2(\frac{S}{K}) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2(T-t)^2 + 2\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \ln(\frac{S}{K})}{\sigma^2(T-t)} + 2r(T-t) \right)} \\
&= K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln^2(\frac{S}{K}) + 2 \ln(\frac{S}{K}) \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2(T-t)^2 - 2r(T-t)^2 \sigma^2}{\sigma^2(T-t)} \right)} \\
&= K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln^2(\frac{S}{K}) + 2 \ln(\frac{S}{K}) \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + (T-t)^2 \left(r^2 + \frac{\sigma^4}{4} - r\sigma^2 + 2r\sigma^2\right)}{\sigma^2(T-t)} \right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln^2(\frac{S}{K}) + 2 \ln(\frac{S}{K}) \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + (T-t)^2 \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{\sigma^2(T-t)} \right)}
\end{aligned}$$

Et donc, on a :

$$SN'(d_1) = K \exp(-r(T-t)) N'(d_2). \quad (2.4.1)$$

On pose en suite :

$$\begin{aligned} C^{(1)} &= \frac{\partial C}{\partial (\ln S)} . \\ C^{(2)} &= \frac{\partial^2 C}{\partial (\ln S)^2} . \\ \xi &= C^{(1)} - C^{(2)} . \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} C^{(1)} &= SN(d_1) + \frac{S}{\sigma(T-t)} N'(d_1) - \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sigma(T-t)} N'(d_2) . \\ C^{(2)} &= SN(d_1) + 2\frac{S}{\sigma(T-t)} N'(d_1) + \frac{S}{(\sigma(T-t))^2} N''(d_1) - \frac{Ke^{-r(T-t)}}{(\sigma(T-t))^2} N''(d_2) \end{aligned}$$

Donc :

$$\xi = \frac{S}{\sigma(T-t)} N'(d_1) + \frac{S}{(\sigma(T-t))^2} N''(d_1) - \frac{Ke^{-r(T-t)}}{(\sigma(T-t))^2} N''(d_2)$$

$N''(d) = -dN(d)$, $d_1 = d_2 + \sigma(T-t)$ et en utilisant (2.4.1) on a :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{S}{\sigma(T-t)} N'(d_1) + \frac{1}{(\sigma(T-t))^2} (Ke^{-r(T-t)} d_2 N'(d_2) - S d_1 N'(d_1)) \\ &= \frac{S}{\sigma(T-t)} N'(d_1) + \frac{1}{(\sigma(T-t))^2} Ke^{-r(T-t)} \sigma(T-t) N'(d_2) \\ &= \frac{S}{\sigma(T-t)} N'(d_1) + \frac{Ee^{-r(T-t)}}{(\sigma(T-t))^2} N'(d_2) \\ &= \frac{2S}{\sigma(T-t)} N'(d_1) = \frac{2Ke^{-r(T-t)}}{(\sigma(T-t))^2} N'(d_2) \end{aligned}$$

Soit K_ξ l'élasticité de la fonction auxiliaire ξ par rapport à S :

$$K_\xi = \frac{\partial \ln |\xi|}{\partial \ln S} .$$

$$\ln |\xi| = \ln(2) + \ln(S) - \ln(\sigma(T-t)) - \ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{d_1^2}{2} .$$

D'où :

$$\begin{aligned} K_\xi &= 1 - \frac{d_1}{\sigma(T-t)} \\ &= -\frac{d_1}{\sigma(T-t)} + \frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \\ &= -\frac{d_1}{\sigma(T-t)} + \frac{\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma^2(T-t)} + \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \\ &= -\frac{1}{\sigma^2(T-t)} \ln\left(\frac{S}{K}\right) + \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \end{aligned}$$

Et :

$$\sigma^2 (T - t) \left(K_\xi - \frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2} \right) = \ln \left(\frac{K}{S} \right) \Leftrightarrow \sigma^2 (T - t) \left(K_\xi - \frac{1}{2} \right) = \ln \left(\frac{K}{S} \right) - r (T - t).$$

D'où :

$$\sigma_{imp} = \sqrt{\frac{\ln \left(\frac{K}{S} \right) - r (T - t)}{(T - t) \left(K_\xi - \frac{1}{2} \right)}}.$$

On a donc une expression de la volatilité en fonction des autres paramètres et de K_ϵ qui n'est autre qu'une combinaison des différentielles premières et secondes du prix du Call par rapport au logarithme du sous-jacent. En connaissant donc les valeurs précédentes du Call, on en déduit la volatilité.

On remarque que la volatilité implicite dépend du Strike et de la maturité, on obtient donc une courbe qui a la forme d'un sourire, c'est le problème de "Smile de la volatilité".

En pratique, pour calculer la volatilité implicite, on ne se sert pas de cette formule trop compliquée à mettre en place, on utilise une résolution numérique. Si on appelle C_0 la valeur d'un Call à l'instant initial, pour calculer la volatilité implicite, on cherche à résoudre :

$$C_0 - SN(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) = 0.$$

3 - Les différences entre la Volatilités Historique et Implicite

La différence principale entre la volatilité historique et la volatilité implicite est la méthode dont ils sont calculés. Pour la volatilité historique, elle dépend de la prise en compte des valeurs précédentes de l'actif sous-jacent et calcul l'écart type. En ce qui concerne la volatilité implicite, nous commencerons par le prix actuel de l'option et estimer la volatilité appréciée par le marché. En comparant les deux, nous concluons que dans la plupart des cas, ils sont différents, et cette différence réside dans le fait que la volatilité implicite s'écarte considérablement la volatilité historique car elles reflètent la volatilité future attendue par le marché. Les investisseurs cherchent à évaluer la valeur d'une option en fonction de la capacité du sous-jacent à fluctuer jusqu'à la maturité.

Et la valeur calculée par le modèle *BS* est toujours inférieure à la réalité, car les coûts de transaction que le modèle n'a pas pris en compte et la nécessité de couvrir des sources de

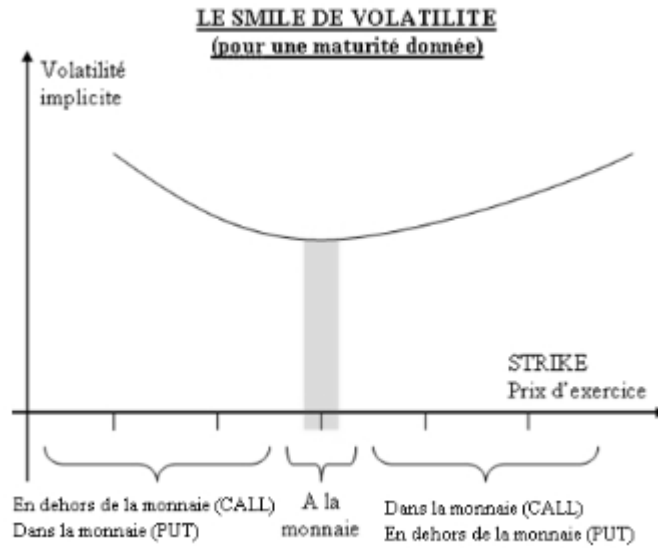
risque que le modèle BS ne prend pas en compte en ce sens qu'il réduit Black-Schole de la possibilité d'un krach boursier ou d'un mouvement de prix important en général . En fait, les traders corrigent ces facteurs en augmentant la volatilité implicite des options loin de la devise, ce qui conduit à une augmentation des prix des options.

2.4.2 Smile

Le modèle de BS est basé sur l'hypothèse que le prix du sous-jacent suit une loi log-normale à tout moment de la durée de vie future de l'option ou équivalent, le rendement continu de l'actif sous-jacent suit une loi normale. Abstraction faite du taux d'intérêt à court terme, la volatilité étant le seul paramètre non observable dans le modèle de BS , c'est l'élément le plus important de l'équation de BS . On peut considérer le prix de l'option comme une fonction de la volatilité. Si le modèle de BS est parfait, la volatilité implicite sera la même quel que soit le prix de marché de l'option.

Des recherches empiriques montrent que la volatilité implicite est étroitement liée au prix d'exercice de l'option et à sa durée de vie restante (s'il s'agit d'une option européenne). Si on représente la volatilité implicite, en fonction du prix d'exercice de l'option, pour une maturité donnée, nous obtenons une courbe convexe au lieu de la ligne horizontale supposée par le modèle de BS . Compte tenu de la forme de la courbe, ce phénomène est appelé «Smile» par les chercheurs et les praticiens.

Quoi qu'il en soit, les praticiens de la finance utilisent souvent le Smile, c'est-à-dire une représentation graphique de la volatilité implicite à l'équation de BS .



2.4.3 Importance de la volatilité

Lorsqu'un produit financier suit la loi :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t). \quad (2.4.2)$$

On dit généralement que σ représente la volatilité du produit. Dans (2.4.2) σ représente l'écart-type de $\frac{dS}{S}$ qui est lié au risque de l'actif. Il est à noter que le coefficient μ n'est pas entré dans la formule de valorisation de Black-Scholes.

Par conséquent, nous pouvons obtenir μ qui varie avec le temps ou même qui soit un processus stochastique adapté à une certaine filtration.

La formule de Black-Scholes ne donne un résultat explicite que lorsque les coefficients μ et σ sont déterministes. Si la volatilité est aléatoire, cela signifie que le marché est incomplet et que le prix de l'option est donné à ce moment là par une espérance conditionnelle.

La formule d'Itô appliquée à $C(t, S_t)$ conduit à :

$$\begin{aligned} dC_t &= \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial X} dS_t + \frac{1}{2}(\sigma S_t)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} dt. \\ &= \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial X} \mu dS_t + \frac{1}{2}(\sigma S_t)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} \right) dt + \frac{\partial C}{\partial X} \sigma S_t dW_t. \end{aligned}$$

La volatilité d'une option d'achat est $\frac{1}{C} \frac{\partial y}{\partial x} S \sigma$

Ce que nous pouvons écrire :

$$\nu_c = \frac{S}{C} \frac{\partial C}{\partial x} \nu_s.$$

En posant $\eta = \frac{S}{C}$ On obtient donc que la volatilité de l'option d'achat est proportionnelle à la volatilité de l'actif sous-jacent : $\nu_c = \nu_s$ avec $\nu_c \leq \nu_s$ ce qui justifie l'achat d'une option d'achat. Et lorsque nous comparons la valeur calculée sous le modèle de Black-Scholes avec le prix réel de l'option, c'est généralement une différence entre les deux valeurs. Ce biais dans le modèle d'évaluation est connu comme étant l'effet "Smile" : La formule d'évaluation d'option de Black-Scholes tend à sous-estimer les options hors-jeu ("out-of-the-money"), et à sur-estimer les options en jeu ("at-the-money"), ce qui implique que la volatilité implicite change avec le prix d'exercice ("Strike price").

Et dans le l'hypothèse faite dans le modèle Black-Scholes la volatilité est constante. En réalité, la volatilité n'est pas constante. Elle n'est pas non plus uniforme. Toutes ces observations nous amènent à traiter la volatilité comme une variable aléatoire.

CHAPITRE

3

MODÈLE À VOLATILITÉ STOCHASTIQUE DE HESTON ET ÉVALUATIONS DES OPTIONS

Introduction

Le modèle Heston est l'un des modèles les plus populaires pour la fixation du prix des options, et qui est un type de modèle de volatilité stochastique développé par [37] pour l'analyse des options sur obligations et devises. Dans ce chapitre nous avons défini la notion de la volatilité stochastique et présenté le modèle de Heston avec une explication en détail sur l'estimation des paramètres et la simulation des prix du sous-jacent et le processus de variance.

Ce chapitre est présenté comme suit : La première section est consacrée à une définition de la volatilité stochastique. La deuxième section présente le modèle de Heston.

3.1 Volatilité stochastique

3.1.1 Introduction

Une approche qui modélise les prix des options en fonction d'une volatilité variable dans le temps et de supposer que le prix du sous-jacent et sa volatilité suivent chacun un processus de diffusion continu. Les modèles de volatilité stochastique sont préparés parce qu'ils expliquent constamment pourquoi il existe différentes options et des échéances selon le modèle de Black-Scholes le "smile de la volatilité". La présence d'un smile de volatilité montre que le modèle de Black-Scholes est mal spécifique et que nous ne pouvons pas supposer que la volatilité est constante. La volatilité stochastique peut être écrite plus précisément la distribution réellement suivie par les rendements financiers. Nous ne supposons plus, comme dans le cadre de modèle de Black-Scholes, que les paramètres de tendance et de volatilité sont constants, mais on suppose qu'ils dépendent du temps t :

$$dS_t = S_t (\mu_t dt + \sigma_t dW_t) \tag{3.1.1}$$

Où σ_t est un processus stochastique, mais ce n'est pas inévitable en le temps ou le prix de l'actif et ce cas est le cadre de la volatilité locale.

3.1.2 La forme générale

Les modèles financiers en temps continu sont écrits comme des processus de diffusion utilisant des équations différentielles stochastiques. La forme générale des modèles que nous étudions est la suivante.

$$dS_t = \mu(t) S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1 \quad (3.1.2)$$

$$dv_t = \alpha(S, v, t) dt + \sigma \beta(S, v, t) \sqrt{v_t} dW_t^2 \quad (3.1.3)$$

Avec

$$\langle dW_t^1 dW_t^2 \rangle = \rho dt$$

où

- μ : correspond au taux de rendement du sous-jacent sous monde réel (drift).
- σ : la volatilité de la variance.
- dW_t^1 et dW_t^2 sont des processus de Wiener.
- ρ : la corrélation entre le mouvement Brownien standard de la volatilité W_t^2 et celui de l'actif sous-jacent W_t^1 (la corrélation entre les rendements aléatoires des cours des actions et les variations de $v(t)$).

Le processus suivi par la volatilité est très général, et nous ne pouvons pas faire l'hypothèse sur $\alpha(\cdot)$ et $\beta(\cdot)$.

Le processus stochastique (3.1.2) suivi par le prix de l'action est égal au processus supposé dans la dérivation de Black-Scholes. Cela garantit que la version standard de la volatilité dépendante du t de la formule de Black-Scholes peut être récupérée dans la limite $\sigma \rightarrow 0$. Dans la pratique, c'est l'exigence de base du modèle stochastique de tarification des options de volatilité, par ce que l'intuition des praticiens sur le comportement des prix des options s'exprime toujours dans le cadre de la formule de Black-Scholes.

Dans le modèle de black-Scholes il n'y avait qu'une seule source d'aléatoire, le prix du sous-jacent qui peut être couvert par une obligation. Dans ce cas, afin de constituer un portefeuille d'investissement sans risque, il est nécessaire de se couvrir contre les variations aléatoires de la volatilité. Par conséquent, nous formerons un portefeuille Π qui contient l'option en cours qui est évaluée par $V(S, v, t)$, une quantité Δ de l'action et une quantité Δ_1

d'un autre actif dont la valeur V_1 dépend de la volatilité. On a :

$$\Pi = V - \Delta S - \Delta_1 V_1$$

L'évolution de ce portefeuille dans un temps dt , en appliquant le lemme d'Itô, donc nous obtenons :

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2(t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma v\beta S(t)\frac{\partial^2 V}{\partial v\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right\} dt \\ &\quad - \Delta_1 \left\{ \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2(t)\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho\sigma v\beta S(t)\frac{\partial^2 V_1}{\partial v\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\beta^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2} \right\} dt \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial S} - \Delta \right\} dS \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial V}{\partial v} - \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial v} \right\} dv \end{aligned}$$

Ici, par souci de clarté, nous n'avons pas mentionné la dépendance des variables S_t et v_t en t et ce sont les paramètres de la fonction β . Pour que le portefeuille soit instantanément sans risque, nous devons choisir :

$$\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial S} - \Delta = 0 \quad (3.1.4)$$

Pour éliminer les termes de la dS .

Et

$$\frac{\partial V}{\partial v} - \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial v} = 0 \quad (3.1.5)$$

Pour éliminer les termes de la dv .

Ensuite, nous obtenons :

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma v\beta S\frac{\partial^2 V}{\partial v\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right\} dt \\ &\quad - \Delta_1 \left\{ \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho\sigma v\beta S\frac{\partial^2 V_1}{\partial v\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\beta^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2} \right\} dt \\ &= r\Pi dt \\ &= r(V - \Delta S - \Delta_1 V_1) dt \end{aligned}$$

Cette dernière égalité découle de l'évaluation sans risque du portefeuille en l'absence arbitrage. Lorsque nous avons utilisé que le rendement d'un portefeuille sans risque devrait

être égal au taux sans risque et c'est là que nous supposons qu'il est constant au cours du temps t . En rassemblant tous les termes en V du côté gauche et ceux en V_1 de l'autre et en utilisant les deux équations (3.1.4) et (3.1.5) nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma v\beta S\frac{\partial^2 V}{\partial v\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2v\beta^2\frac{\partial^2 V}{(\partial v^2)} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV}{\frac{\partial V}{\partial v}} \\ &= \frac{\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho\sigma v\beta S\frac{\partial^2 V_1}{\partial v\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2v\beta^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2} + rS\frac{\partial V_1}{\partial S} - rV_1}{\frac{\partial V_1}{\partial v}} \\ &\equiv f(S_t, v_t, t) \end{aligned}$$

On peut donc déduire que chaque côté de l'équation est égal à une fonction f des variables S, v et t . Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V}{(\partial S^2)} + \rho\sigma v\beta S\frac{\partial^2 V}{(\partial v\partial S)} + \frac{1}{2}\sigma^2v\beta^2\frac{\partial^2 V}{(\partial v^2)} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV \\ &= -(\alpha - \varphi\beta)\frac{\partial V}{\partial v} \end{aligned}$$

où $f(S, v, t) = k(\theta - v) + \lambda(S, v, t) = -(\alpha - \varphi\beta)$

Par convention, $\varphi(S, v, t)$ est appelé le prix du marché du risque de volatilité, car il nous indique dans quelle mesure le rendement attendu de V est expliqué par le risque (c'est-à-dire l'écart-type) de v est utilisé comme modèle d'évaluation des actifs financiers. Lorsque la volatilité détermine les prix des actifs, il semble qu'un modèle plus réaliste soit nécessaire pour représenter la volatilité. Heston a montré que le modèle BS peut être étendu pour prendre en compte la volatilité stochastique. Nous allons maintenant étudier un modèle à volatilité stochastique qui est le modèle Heston.

3.2 Modèle de Heston

3.2.1 Présentation de modèle

Le modèle de Heston suppose que le prix de l'action sous-jacente S_t suit un processus stochastique de type Black-Scholes, mais avec une variance stochastique v_t qui suit un

processus de Cox, Ingersoll et Ross (1985). Par conséquent, le modèle de Heston est représenté par le système bivarié d'équations différentielles stochastiques (*EDSs*).

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1 & (1) \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^2 & (2) \\ dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt & (3) \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Les variables du système sont définies comme suit :

- S_t et v_t : sont respectivement le prix des actions et la variance du prix au moment t .
- $\sqrt{v_t}$: la volatilité (écart-type) du prix de l'actif.
- μ : est le coefficient de dérive du prix de l'action.
- θ : est la moyenne à long terme de la variance.
- κ : est le taux de retour moyen.
- σ : est la volatilité de la volatilité.
- dt : est un incrément de temps positif indéfiniment faible.
- W_t^1 : est le mouvement brownien du prix des actifs.
- W_t^2 : est le mouvement brownien de la variance du prix de l'actif.
- ρ : est le Coefficient de corrélation pour W_t^1 et W_t^2 , $\rho \in [-1, 1]$.
- $[0; T]$ est l'intervalle de temps.

Notez que si $v_0 > 0$, et $2\kappa\theta \geq \sigma^2$, alors le processus v_t ne peut jamais atteindre zéro. Dans le cas de $2\kappa\theta < \sigma^2$, l'origine est atteignable et fortement réfléchissante ; c'est la condition de Feller [26] . Si v atteint zéro, la variance du processus de prix est égale à zéro. L'étalonnage par rapport aux données du marché conduit souvent à des paramètres qui ne satisfont pas à la condition de Feller et qui rendent cela possible. Cela correspondrait à une incertitude nulle pour certaines trajectoires simulées à certains moments. Toutefois, le processus reflète fortement et il se ramène à θ au taux κ , donc il ne prend la valeur zéro que pour un temps très court.

3.2.2 Mesure neutre du point de vue du risque

Heston est un modèle incomplet. L'exhaustivité signifie qu'il existe une mesure unique de probabilité $\mathbb{Q}$ neutre à l'égard du risque et un seul prix équitable d'un certain dérivé.

Trouver $\mathbb{Q}$ équivaut à déterminer le prix du risque sur le marché, désigné par Λ , qui peut être considéré comme une mesure de l'aversion au risque sur le marché. Dans un marché complet, la valeur de Λ est constante, quelle que soit l'option ou l'actif concerné. Heston suppose qu'il existe un prix de marché du risque de volatilité proportionnel à la volatilité (c'est-à-dire la racine carrée de la variance)

$$\begin{aligned}\Lambda(S_t, v_t, t) &= k\sqrt{v_t} \quad \text{avec } k \text{ est constante} \\ &= \lambda(S_t, v_t, t)\end{aligned}$$

Avec l'introduction de $\lambda(S_t, v_t, t)$ et en supposant un taux d'intérêt déterministe r , il est maintenant possible de passer à la mesure $\mathbb{Q}$ neutre en termes de risque à l'aide du théorème de Girsanov :

$$\begin{aligned}d\tilde{W}_t^1 &= dW_t^1 + \frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}} dt \\ d\tilde{W}_t^2 &= dW_t^2 + \lambda dt \\ \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}} \right)^2 + (\lambda(S_t, v_t, t))^2 ds - \int_0^t \left(\frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}} \right) dW_s^1 - \int_0^t \lambda(S_t, v_t, t) dW_s^2 \right\}\end{aligned}$$

Les équations (1) et (2) dans (3.2.1) puis, sous $\mathbb{Q}$, deviennent :

$$\begin{aligned}dS_t &= r S_t dt + \sqrt{v_t} S_t d\tilde{W}_t^1 \\ dv_t &= \tilde{\kappa}(\tilde{\theta} - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} d\tilde{W}_t^2 \\ d\tilde{W}_t^1 d\tilde{W}_t^2 &= \rho dt\end{aligned}$$

Avec :

$$\tilde{\kappa} = \kappa + k\sigma \quad \tilde{\theta} = \frac{\kappa\theta}{\kappa + k\sigma}$$

Ainsi, $\lambda(S_t, V_t, t)$ et μ sont "éliminés" sous $\mathbb{Q}$ et incorporés par les nouvelles MB . Néanmoins, $\mathbb{Q}$ n'est pas unique, il dépend de la valeur de λ et, par conséquent, les différentes valeurs de λ produisent des prix d'option différents. Heureusement, l'établissement des prix et le calibrage, qui se font sous $\mathbb{Q}$, ne seront pas affectés par ce problème dans la pratique. Cela est dû à la nature paramétrique du modèle et à l'existence d'une solution de forme fermée pour les options sur la vanille. Nous ne travaillerons que dans le monde neutre en termes de

risque et nous simplifions donc la notation en supprimant tous les signes ($\sim$). Ainsi, sous $\mathbb{Q}$, nous écrivons :

$$dS_t = r S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1 \quad (3.2.2)$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^2 \quad (3.2.3)$$

$$dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt \quad (3.2.4)$$

avec les conditions initiales :

$$S(0) = S_0 \geq 0$$

$$v(0) = v_0 \geq 0$$

Où :

La première équation fournit la dynamique du prix de l'action :

- S_t : désigne l'action au temps t .
- r : est la dérive neutre par rapport au risque et se trouve dans les marchés $\sqrt{v_t} = 0$.

La deuxième équation fournit l'évolution de la variance :

- θ : est la moyenne à long terme de la variance. En général, la valeur est proche de la volatilité implicite des options à la monnaie à long terme.
- κ : est le paramètre de vitesse de retour de la moyenne. C'est-à-dire la vitesse à laquelle v se déplace vers θ .
- σ : est la volatilité de la volatilité "vol-vol". Indiquant la volatilité de la variance.
- ρ : est la corrélation entre les deux mouvements browniens $\{W_t^1\}_{(t \geq 0)}$ et $\{W_t^2\}_{(t \geq 0)}$.

3.2.3 Fonction caractéristique de Heston

Chaque modèle de volatilité stochastique aura une fonction caractéristique unique qui décrit la probabilité la fonction de densité de ce modèle, la formule de la fonction caractéristique

de Heston est la suivante :

$$\begin{aligned}
 f_j(x, v_t, T, \phi) &= \exp(C(T-t, \phi) + D(T-t, \phi)v_t + i\phi x) \\
 C(T-t, \phi) &= r\phi i\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\sigma\phi i + d)\tau - 2 \ln \frac{1 - g e^{dr}}{1 - g} \right] \\
 D(T-t, \phi) &= \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{dr}}{1 - g e^{dr}} \right) \\
 g &= \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{b_j - \rho\sigma\phi i - d} \\
 d &= \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\phi i - \phi^2)}
 \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Pour $j=1,2$

$$u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = -\frac{1}{2}, a = \kappa\theta, b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma, b_2 = \kappa + \lambda.$$

Sous la martingale équivalente mesure (MEM) [61] $\mathbb{Q}$ une certaine simplification des paramètres a lieu, à savoir

$$a = \kappa^*\theta^*, b_1 = \kappa^* - \rho\sigma, b_2 = \kappa^*.$$

On peut constater que, dans les faits, le paramètre λ a été éliminé.

Une méthode d'évaluation des formules sous la forme (3.2.6) a été proposée par (Carr-Madan 1999). Cette méthode est beaucoup plus rapide que l'utilisation d'une méthode numérique pour lesdites intégrales.

3.2.4 La solution à forme fermée (closed-form)

La solution de forme fermée d'une option d'achat européenne sur un actif non rémunéré en dividendes pour le modèle Heston est la suivante :

$$C(S_t, v_t, t, T) = S_t P_1 - K \exp(-r(T-t)) P_2 \tag{3.2.6}$$

Où :

$$\begin{aligned}
 P_j(x, v_t, T, K) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left(\frac{e^{(-i\phi \ln(K))} f_j(x, v_t, T, \phi)}{i\phi} \right) d\phi, j=1,2 \\
 x &= \ln S_t
 \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Le prix de l'option de vente peut alors être calculé en utilisant la formule dite de parité put-call donné par :

$$Put(S_t, v_t, t, T) = C(S_t, v_t, t, T) + K e^{-r(T-t)} - S_t$$

et K est le prix d'exercice.

Une telle formule semble intimidante, mais en réalité, elle est "explicite" et facile à évaluer dans Matlab. La seule partie qui constitue un petit problème est la limite de l'intégrale dans (3.2.7) L'intégrale ne peut pas être évaluée avec précision, mais elle peut être approximée avec une précision raisonnable en utilisant des techniques d'intégration numérique (telles que l'intégration de Gauss-Legendre ou Gauss-Lobato).

3.2.5 Formulation du problème

Ce qui rend le modèle Heston attrayant et largement utilisé dans les institutions financières, c'est que le modèle Heston fournit une solution fermée pour fixer le prix des options européennes, qui fournit une méthode relativement simple pour fixer le prix des produits dérivés financiers.

Le modèle de Heston est considéré comme une représentation de l'espace d'état d'un système dynamique, qui se compose d'équations d'état et d'équations de mesure. Le prix de l'action S_t peut généralement être observé à partir du marché, mais v_t ne peut pas être obtenu. Par conséquent, (3.2.2) et (3.2.3) peuvent être considérés comme des mesures et des équations d'état, respectivement. Étant donné que le rendement des prix des actions a reçu plus d'attention sur les marchés réels, le logarithme du prix est déterminé par l'équation Itô, comme indiqué ci-dessous :

$$\begin{aligned} d \ln(S_t) &= \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} dS_t dS_t \\ &= \left(r - \frac{1}{2}v_t\right) dt + \sqrt{v_t} dW_t^1 \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

La forme continue du modèle Heston (3.2.2) -(3.2.4) peut s'écrire sous la forme des équations d'état et de mesure suivantes :

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_t^v \quad (3.2.9)$$

$$d \ln(S_t) = (r - \frac{1}{2}v_t)dt + \sqrt{(1 - \rho^2)v_t}dW_t^S + \rho\sqrt{v_t}dW_t^v \quad , t \in [0, T] \quad (3.2.10)$$

Où $dW_t^S dW_t^v = 0$, et la factorisation suivante tient :

$$\begin{cases} W_1(t) = \sqrt{1 - \rho^2}W_t^S + \rho W_t^v \\ W_2(t) = W_t^v \end{cases}$$

Ce système est encore inconnu en pratique. Pour pouvoir utiliser le modèle Heston, il faut d'abord estimer les paramètres $\kappa, \theta, \sigma, \rho$. Et comme la volatilité est inconnue, nous utiliserons les méthodes de filtrage pour estimer les fluctuations en temps réel. Dans ce qui suit, nous évaluerons ces paramètres.

3.2.6 Estimation des paramètres du modèle de Heston

Dans cette section, nous proposerons une nouvelle estimation du maximum de vraisemblance (EMV) du modèle Heston. Dans cette partie, une nouvelle estimation du maximum de probabilité pour le modèle Heston est proposée. Il est à noter que le processus de volatilité du modèle de Heston est différent des autres modèles de volatilité stochastique. Nous nous concentrons sur le problème de l'estimation des paramètres du modèle à volatilité stochastique. Pour estimer les paramètres du modèle de volatilité, nous avons proposé une méthode d'optimisation numérique (EMV) pour minimiser la fonction objective.

On a supposé que les paramètres du processus de diffusion étaient des coefficients constants, de sorte que nous pouvons approximer la forme de fréquence de la variabilité avec un processus gaussien. On sait que d'après la valeur précédente $v_{t-\delta}$, la distribution de la volatilité v_t un Khi-deux non central avec les degrés de liberté $df = \frac{4\kappa e^{\kappa\delta}}{\sigma^2}$ et le paramètre non central $nc = \frac{4\kappa\theta}{\sigma^2(1-e^{-\kappa\delta})}v_{t-\delta}$ (voir [20] pour plus d'informations). Il sera plus approprié de trouver une distribution gaussienne exacte qu'une distribution approximative. Selon le lemme Itô, comme suit :

$$d\sqrt{v_t} = \frac{1}{2\sqrt{v_t}} dv_t - \frac{1}{8\sqrt{v_t^3}} dv_t dv_t \quad (3.2.11)$$

Par substitution l'équation (3.2.9) à l'équation (3.2.11), on peut obtenir :

$$\begin{aligned}
 d\sqrt{v_t} &= \frac{1}{2\sqrt{v_t}} [\kappa(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^v] - \frac{1}{8\sqrt{v_t^3}} v_t \sigma^2 dt \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{v_t}} \left[\kappa\theta - \kappa v_t - \frac{1}{4}\sigma^2 \right] dt + \frac{1}{2}\sigma dW_t^v
 \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Nous savons donc que, sous réserve de $\sqrt{v_{t-\delta}}$, $\sqrt{v_t}$ est soumis à une distribution gaussienne. Depuis les mesures des états sont obtenues uniquement à des instants discrets. v_t peut être discrétisée comme $\{v_0, v_1, \dots, v_{\delta n}\}$, où $n = \frac{T}{\delta}$. En omettant l'indice, la séquence de volatilité peut être désignée par $\{v_k\}_{k=0}^n$.

Ensuite, l'équation (3.2.12) peut être écrite comme suit :

$$\sqrt{v_k} - \sqrt{v_{k-1}} = \frac{1}{2\sqrt{v_{k-1}}} \left[\kappa\theta - \kappa v_{k-1} - \frac{1}{4}\sigma^2 \right] \delta + \frac{1}{2}\sigma \Delta W_{v_k}$$

Où $\Delta W_{v_k} = W_{v_k} - W_{v_{k-1}}$ Donc :

$$\sqrt{v_k} = \sqrt{v_{k-1}} + \frac{1}{2\sqrt{v_{k-1}}} [\kappa\theta - \kappa v_{k-1} - \frac{1}{4}\sigma^2] \delta + \frac{1}{2}\sigma \Delta W_{v_k} \tag{3.2.13}$$

Théorème 3.2.6.1 *L'estimation du maximum de vraisemblance des paramètres κ , σ , θ dans l'équation (3.2.13) sont dénotés :*

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{\kappa} &= \frac{2}{\delta} \left(1 + \frac{\hat{P}\delta}{2} \frac{1}{n} \sum_{K=1}^n \frac{1}{v_{k-1}} - \frac{1}{n} \sum_{K=1}^n \sqrt{\frac{v_k}{v_{k-1}}} \right) \\ \hat{\sigma} &= \sqrt{\frac{4}{\delta} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\sqrt{v_k} - \sqrt{v_{k-1}} - \frac{\delta}{2\sqrt{v_{k-1}}} (\hat{P} - \hat{\kappa} v_{k-1}) \right]^2} \\ \hat{\theta} &= \frac{\hat{P} + \frac{1}{4}\hat{\sigma}^2}{\hat{\kappa}} \end{aligned} \right. \tag{3.2.14}$$

Où :

$$\hat{P} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{v_{k-1} v_k} - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{v_k}{v_{k-1}}} \sum_{k=1}^n v_{k-1}}{\frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2n^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{v_{k-1}} \sum_{k=1}^n v_{k-1}}$$

Preuve 3.2.1 *Conditionné le $\sqrt{v_{k-1}}$, $\sqrt{v_k}$ est soumis à la distribution gaussienne suivante :*

$$\sqrt{v_k} \sim N(m_{k-1}, \frac{\sigma^2}{4}\delta) \tag{3.2.15}$$

Où :

$$m_{k-1} = \sqrt{v_{k-1}} + \frac{1}{2\sqrt{v_{k-1}}} \left[\kappa\theta - \kappa v_{k-1} - \frac{1}{4}\sigma^2 \right] \delta$$

Désigner la fonction de vraisemblance comme suit :

$$l(\Theta) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\sigma^2}{4}\delta}} \exp \left(-\frac{(\sqrt{v_k} - m_{k-1})^2}{\frac{\sigma^2}{2}\delta} \right) \quad (3.2.16)$$

où $\Theta = (\kappa, \kappa\theta, \sigma)$

En prenant le logarithme de la fonction de vraisemblance ci-dessus (3.2.16), en omettant les constantes variables, la fonction de vraisemblance logarithmique peut s'écrire :

$$l(\Theta) = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \log \sigma^2 - \frac{(\sqrt{v_k} - m_{k-1})^2}{\frac{\sigma^2}{2}\delta} \quad (3.2.17)$$

En prenant la dérivée de la fonction $l(\Theta)$ par rapport aux paramètres, $\kappa\theta, \kappa, \sigma^2$, respectivement, on peut obtenir :

$$\begin{cases} \frac{\partial l(\Theta)}{\partial(\kappa\theta)} = -\delta \sum_{k=1}^n (\sqrt{v_k} - m_{k-1}) \frac{1}{\sqrt{v_{k-1}}}, \\ \frac{\partial l(\Theta)}{\partial \kappa} = \delta \sum_{k=1}^n (\sqrt{v_k} - m_{k-1}) \sqrt{v_{k-1}}, \\ \frac{\partial l(\Theta)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^n \frac{2(\sqrt{v_k} - m_{k-1})^2}{\sigma^4}. \end{cases} \quad (3.2.18)$$

Pour obtenir l'EMV du paramètre Θ , les dérivés des paramètres sont fixés comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial l(\Theta)}{\partial(\kappa\theta)} = 0, \\ \frac{\partial l(\Theta)}{\partial \kappa} = 0, \\ \frac{\partial l(\Theta)}{\partial \sigma^2} = 0. \end{cases} \quad (3.2.19)$$

Alors les équations de (3.2.19) impliquent que :

$$-\delta \sum_{k=1}^n (\sqrt{v_k} - m_{k-1}) \frac{1}{\sqrt{v_{k-1}}} = 0 \quad (3.2.20)$$

$$\delta \sum_{k=1}^n (\sqrt{v_k} - m_{k-1}) \sqrt{v_{k-1}} = 0 \quad (3.2.21)$$

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^n \frac{2(\sqrt{v_k} - m_{k-1})^2}{\sigma^4} = 0 \quad (3.2.22)$$

Avec une technique ingénieuse, la mise en place $P = \kappa\theta - \frac{1}{4}\sigma^2$, d'après (3.2.20) et (3.2.21) on obtient :

$$\frac{n\kappa\delta}{2} = n + \frac{P\delta}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{v_{k-1}} - \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{v_k}{v_{k-1}}}$$

$$\frac{nP\delta}{2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{v_{k-1}v_k} - \sum_{k=1}^n v_{k-1} + \frac{\kappa\delta}{2} \sum_{k=1}^n v_{k-1}$$

Les équations ci-dessus peuvent être résolues comme suit :

$$\hat{P} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{v_{k-1}v_k} - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{v_k}{v_{k-1}}} \sum_{k=1}^n v_{k-1}}{\frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2n^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{v_{k-1}} \sum_{k=1}^n v_{k-1}}$$

$$\hat{\kappa} = \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{\hat{P}\delta}{2} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{v_{k-1}} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{v_k}{v_{k-1}}} \right) \quad (3.2.23)$$

Puis selon l'équation (3.2.22),

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{4}{\delta} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\sqrt{v_k} - \sqrt{v_{k-1}} - \frac{\delta}{2\sqrt{v_{k-1}}} (\hat{P} - \hat{\kappa}v_{k-1}) \right]^2$$

Donc :

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{4}{\delta} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\sqrt{v_k} - \sqrt{v_{k-1}} - \frac{\delta}{2\sqrt{v_{k-1}}} (\hat{P} - \hat{\kappa}v_{k-1}) \right]^2} \quad (3.2.24)$$

Avec $\hat{P}, \hat{\kappa}, \hat{\sigma}^2$, nous pouvons obtenir :

$$\hat{\theta} = \frac{\hat{P} + \frac{1}{4}\hat{\sigma}^2}{\hat{\kappa}} \quad (3.2.25)$$

Ensuite (3.2.23) $\sim$ (3.2.25) sont les estimations de κ , σ^2 , σ , θ par EMV, respectivement. Puisque l'EMV des paramètres sont dérivées par la distribution gaussienne de $\sqrt{v_k}$ plutôt que par l'approximation de la distribution du khi-deux, la méthode d'estimation est appelée l'EMV normale (EMVN).

À propos du coefficient de corrélation du modèle de Heston, il existe :

$$EdW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$$

Où :

$$\begin{cases} dW_t^1 = \frac{d \ln S_t - (r - \frac{1}{2}v_t)dt}{\sqrt{v_t}} \\ dW_t^2 = \frac{dv_t - \kappa(\theta - v_t)dt}{\sigma\sqrt{v_t}} \end{cases} \quad (3.2.26)$$

La forme discrète de l'équation (3.2.26) est la suivante :

$$\begin{cases} \Delta dW_t^{1k} = \frac{\ln S_k - \ln S_{k-1} - (r - \frac{1}{2}v_{k-1})\delta}{\sqrt{v_{k-1}}} \\ \Delta dW_t^{2k} = \frac{v_k - v_{k-1} - \kappa(\theta - v_{k-1})\delta}{\sigma\sqrt{v_{k-1}}} \end{cases} \quad (3.2.27)$$

Où $\Delta W^{i_k} = W^{i_k} - W^{i_{k-1}}$, $i = 1, 2$. Alors l'estimation du moment de ρ peut être donnée comme :

$$\hat{\rho} = \frac{1}{n\delta} \sum_{k=1}^n \Delta W_t^{1_k} \Delta W_t^{2_k} \quad (3.2.28)$$

v_k suit une loi du khi-deux, donc le processus de racine carrée de v_k , $(\sqrt{v_k})$ suit une loi gaussien.

l'EMV basée sur $\sqrt{v_k}$ est plus précise que v_k i.e, puisque l'EMV de v_k , inclut simplement les erreurs de discrétisation, alors que l'EMV de $\sqrt{v_k}$ inclut l'erreur de discrétisation ainsi que l'erreur approximative.

3.2.7 Simulation

1 - Schéma d'Euler pour le modèle de Heston :

Le modèle Heston est décrit par le processus stochastique bivarié pour le prix de l'action S_t et sa variance v_t :

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1 \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^2 \end{aligned}$$

avec

$$S_{t+\Delta t} = S_t + \int_t^{t+\Delta t} rS_u du + \int_t^{t+\Delta t} \sqrt{v_u} S_u dW_t^1 \quad (3.2.29)$$

$$v_{t+\Delta t} = v_t + \int_t^{t+\Delta t} \kappa(\theta - v_u) du + \int_t^{t+\Delta t} \sigma \sqrt{v_u} dW_t^2 \quad (3.2.30)$$

Et

— Pour (3.2.29) la discrétisation d'Euler se rapproche des intégrales avec la règle du point gauche

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} S_u du &\approx S_t \Delta t \\ \int_t^{t+\Delta t} \sqrt{v_u} S_u dW_u^1 &\approx \sqrt{v_t} S_t (W_{t+\Delta t}^1 - W_t^1) \\ &= \sqrt{v_t \Delta t} S_t Z_s \end{aligned}$$

où Z_s qui a une corrélation ρ avec Z_v .

- Pour (3.2.30) la discrétisation d'Euler se rapproche des intégrales en utilisant la règle du point de gauche

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \kappa(\theta - v_u) du &\approx \kappa(\theta - v_t) \Delta t \\ \int_t^{t+\Delta t} \sigma \sqrt{v_u} dW_u^2 &\approx \sigma \sqrt{v_t} (W_{t+\Delta t}^2 - W_t^2) \\ &= \sigma \sqrt{v_t \Delta t} Z_v \end{aligned}$$

Le côté droit implique $(\theta - v_t)$ plutôt que $(\theta - v_{t+\Delta t})$ puisqu'au temps t , nous ne connaissons pas la valeur de $v_{t+\Delta t}$.

Donc :

$$S_{t+\Delta t} = S_t + r S_t dt + \sqrt{v_t \Delta t} S_t Z_s \quad (3.2.31)$$

$$v_{t+\Delta t} = v_t + \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t \Delta t} Z_v \quad (3.2.32)$$

Avec Z_v , et Z_s sont normalement distribués avec une moyenne 0 et un écart-type égale 1 (des variables aléatoires normales standards) et corrélés avec ρ , puisque $W_{t+\Delta t} - W_t = \sqrt{\Delta t} Z$. Notez que si la condition de Feller n'est pas remplie, v_t peut devenir négatif. Le calcul de la racine pose alors un problème. Cela peut être évité en remplaçant v_t par $v_t^+ = \max(v_t, 0)$. C'est le schéma de troncature complet. Le schéma de réflexion remplace v_t par sa valeur absolue $|v_t|$. Cela peut être appliqué au schéma d'Euler, ainsi qu'au schéma de Milstein, qui est expliqué ci-dessous. Le schéma de discrétisation d'Euler converge fortement avec un ordre de grandeur de moitié.

a - Processus pour le $\ln S_t$:

Par lemme d'Itô $\ln S_t$ suit la diffusion :

$$d \ln S_t = \left(r - \frac{1}{2} v_t \right) dt + \sqrt{v_t} dW_t^1$$

Ou sous forme intégrale :

$$\ln S_{t+\Delta t} = \ln S_t + \int_0^t \left(r - \frac{1}{2} v_u \right) du + \int_0^t \sqrt{v_u} dW_u^1$$

La discrétisation d'Euler du processus pour $\ln S_t$ est donc :

$$\begin{aligned}\ln S_{t+\Delta t} &= \ln S_t + \left(r - \frac{1}{2}v_t\right) \Delta t + \sqrt{v_t} (W_{t+\Delta t}^1 - W_t^1) \\ &= \ln S_t + \left(r - \frac{1}{2}v_t\right) \Delta t + \sqrt{v_t \Delta t} Z_s\end{aligned}\quad (3.2.33)$$

C'est pourquoi la discrétisation d'Euler de S_t est :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp \left(\left(r - \frac{1}{2}v_t\right) \Delta t + \sqrt{v_t \Delta t} Z_s \right)$$

b - Processus pour $(S_t; v_t)$ ou $(\ln S_t; v_t)$:

Commencez par les valeurs initiales S_0 pour le prix de l'action et v_0 pour la variance. Étant donné une valeur pour v_t au temps t , nous obtenons d'abord $v_{t+\Delta t}$ à partir de :

$$v_{t+\Delta t} = v_t + \kappa (\theta - v_t) \Delta t + \sigma \sqrt{v_t \Delta t} Z_v$$

et nous obtenons $S_{t+\Delta t}$ de :

$$S_{t+\Delta t} = S_t + r S_t \Delta t + \sqrt{v_t \Delta t} S_t Z_s$$

ou de

$$S_{t+\Delta t} = S_t + \exp \left(\left(r - \frac{1}{2}v_t\right) \Delta t + \sqrt{v(t) \Delta t} Z_s \right)$$

Pour générer Z_v et Z_s avec corrélation ρ , nous générons d'abord deux variables normales standard indépendantes Z_1 et Z_2 , et nous fixons $Z_v = Z_1$ et $Z_s = \rho Z_1 + \sqrt{(1 - \rho^2)} Z_2$.

2 - Schéma de Milstein pour le modèle de Heston :

L'application de la technique de (1.3.14) au modèle de Heston donne :

$$\begin{aligned}dS_t &= r S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1 \\ dv_t &= \kappa (\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^2\end{aligned}$$

— Les coefficients du processus de variance sont $\mu(v_t) = \kappa (\theta - v_t)$ et $\sigma(v_t) = \sigma \sqrt{v_t}$, donc une application de l'équation (1.3.14) pour v_t produit

$$v_{t+\Delta t} = v_t + \kappa (\theta - v_t) \Delta t + \sigma \sqrt{v_t \Delta t} Z_v + \frac{1}{4} \sigma^2 \Delta t (Z_v^2 - 1)$$

qui peuvent être rédigés

$$v_{t+\Delta t} = \left(\sqrt{v_t} + \frac{1}{2} \sigma \sqrt{\Delta t} Z_v \right)^2 + \kappa (\theta - v_t) \Delta t - \frac{1}{4} \sigma^2 \Delta t$$

La discrétisation du processus de variance par Milstein produit une variance beaucoup moins négative que la discrétisation d'Euler.

- Les coefficients du processus du prix de l'action sont $\mu(S_t) = rS_t$ et $\sigma(S_t) = \sqrt{v_t}S_t$ donc l'équation (1.3.14) devient :

$$S_{t+\Delta t} = S_t + rS_t\Delta t + \sigma\sqrt{v_t\Delta t}S_tZ_s + \frac{1}{4}S_t^2\Delta t(Z_s^2 - 1)$$

Donc :

$$v_{t+\Delta t} = v_t + \kappa(\theta - v_t)\Delta t + \sigma\sqrt{v_t\Delta t}Z_v + \frac{1}{4}\sigma^2\Delta t(Z_v^2 - 1) \quad (3.2.34)$$

$$S_{t+\Delta t} = S_t + rS_t\Delta t + \sigma\sqrt{v_t\Delta t}S_tZ_s + \frac{1}{4}S_t^2\Delta t(Z_s^2 - 1) \quad (3.2.35)$$

Notez que la discrétisation est similaire à celle qui découle du schéma d'Euler, mais avec un terme supplémentaire pour améliorer la précision. Le schéma de Milstein converge aussi fortement, mais avec un ordre un et avec un biais plus faible. La discrétisation de Milstein du processus de variance produit beaucoup moins de valeurs négatives pour la variance que la discrétisation d'Euler.

a - Processus pour $\ln S_t$:

Les coefficients du processus du prix de l'action sont $\mu(S_t) = rS_t$ et $\sigma(S_t) = \sqrt{v_t}S_t$ donc l'équation (3.2.35) devient :

$$S_{t+\Delta t} = S_t + rS_t\Delta t + \sigma\sqrt{v_t\Delta t}S_tZ_s + \frac{1}{4}S_t^2\Delta t(Z_s^2 - 1) \quad (3.2.36)$$

Nous pouvons également discrétiser le processus log-stock ,qui par lemme Itô suit le processus

$$d \ln S_t = \left(r - \frac{1}{2}v_t \right) \Delta t + \sqrt{v_t} dW_{1,t}$$

Les coefficients sont $\mu(S_t) = \left(r - \frac{1}{2}v_t\right)$ et $\sigma(S_t) = \sqrt{v_t}$ donc $\mu'_t = \sigma'_t = 0$.

Puisque v_t est connu au temps t , nous pouvons le traiter comme une constante dans les coefficients. Une application de (3.2.35) produit

$$\ln S_{t+\Delta t} = \ln S_t + \left(r - \frac{1}{2}v_t\right) \Delta t + \sqrt{v_t \Delta t} Z_s$$

qui est identique à l'équation (3.2.33). Par conséquent, comme dans le modèle de Black-Scholes, la discrétisation de $\ln S_t$ plutôt que S_t signifie qu'il n'y a pas de corrections supérieures à apporter à la discrétisation d'Euler. La discrétisation du prix de l'action est

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp \left(\left(r - \frac{1}{2}v_t\right) \Delta t + \sqrt{v_t \Delta t} Z_s \right) \quad (3.2.37)$$

b - Processus pour $(S_t; v_t)$ ou $(\ln S_t; v_t)$:

Étant donné une valeur pour v_t au temps t , nous mettons d'abord à jour vers $v_{t+\Delta t}$ en utilisant (3.2.35)

$$v_{t+\Delta t} = v_t + \kappa(\theta - v_t) \Delta t + \sigma \sqrt{v_t \Delta t} Z_v + \frac{1}{4} \sigma^2 \Delta t (Z_v^2 - 1)$$

et nous obtenons $S_{t+\Delta t}$ en utilisant

$$S_{t+\Delta t} = S_t + r S_t \Delta t + \sigma \sqrt{v_t \Delta t} S_t Z_s + \frac{1}{4} S_t^2 \Delta t (Z_s^2 - 1)$$

Ou de

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp \left(\left(r - \frac{1}{2}v_t\right) \Delta t + \sqrt{v_t \Delta t} Z_s \right)$$

Pour générer Z_v et Z_s avec corrélation ρ , nous générons d'abord deux variables normales standard indépendantes Z_1 et Z_2 , et nous fixons $Z_v = Z_1$ et $Z_s = \rho Z_1 + \sqrt{(1 - \rho^2)} Z_2$.

CHAPITRE

4

APPLICATION : SIMULATION ET ÉVALUATION DES OPTIONS AVEC DEUX MODELES

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons procéder de la façon suivante. Dans un premier temps nous allons appliquer quelques formules et méthodes mentionnées dans les chapitres précédents sur la simulation des prix du sous-jacent (S_t) et le processus de variance (V_t) pour les deux modèles Black-Scholes et Heston. Dans un deuxième temps, nous allons évaluer les options européennes en utilisant les formules de Call et Put avec les deux modèles.

4.1 Simulation du mouvement brownien (standard)

▷ L'algorithme

- Générer N variables aléatoires Z_n indépendantes et identiquement distribuées de loi $N(0, 1)$.
- Poser $W_0 = 0$ et $W_{n\Delta t} = W_{(n-1)\Delta t} + \sqrt{\Delta t}Z_n, n \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$.
- Approcher la trajectoire par interpolation linéaire ou par une fonction en escalier.

▷ Code Matlab

```
clear all
randn('state',10)
M=1;
N=1000;
dt=0.00001;
Z=normrnd(0,1,N,M);
w=zeros(N+1,M);
temps=zeros(N+1,1);
for i=1:N
    w(i+1,:)=w(i,:)+sqrt(dt)*Z(i,:);
    temps(i+1,1)=temps(i,1)+dt;
end
plot(temps,w)
```

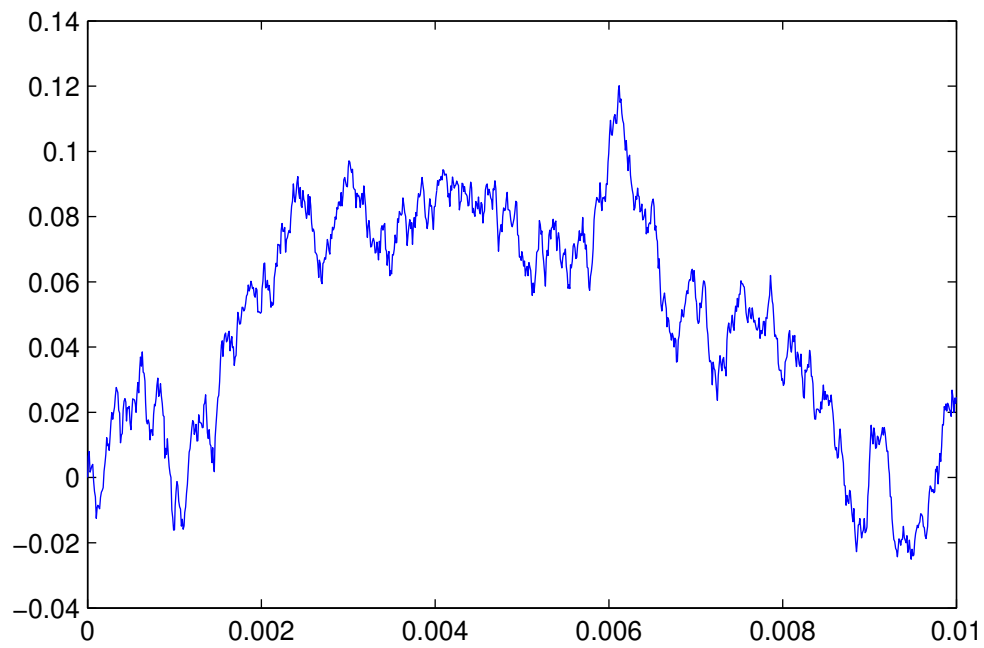


FIGURE 4.1 – Simulation d’une trajectoire du Mouvement Brownien

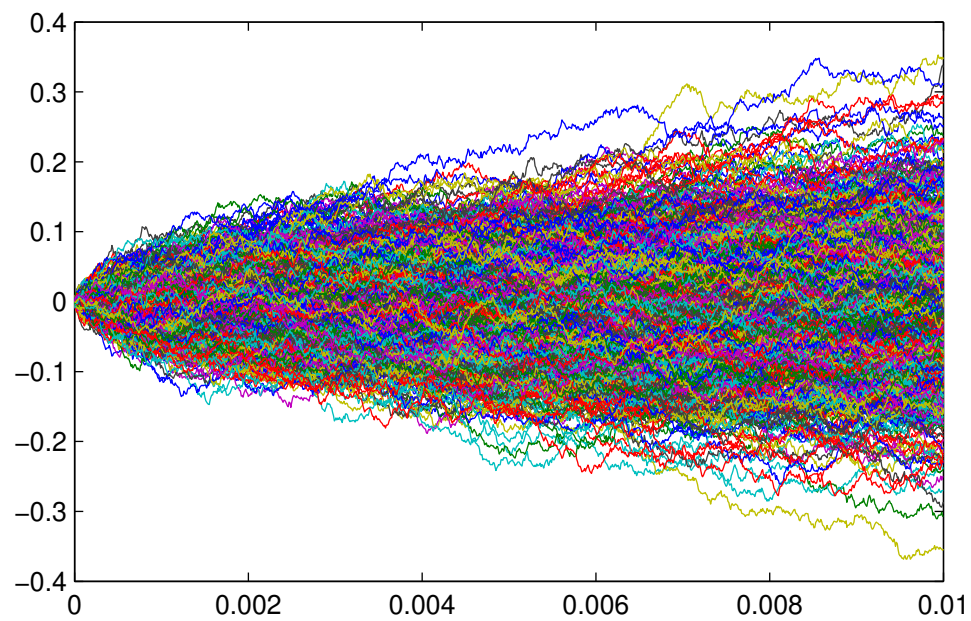


FIGURE 4.2 – Simulation de 1000 trajectoires du Mouvement Brownien

Les deux figures 4.1 et 4.2 montrent la simulation d’une trajectoire du mouvement brownien

avec $N=1$ et $N=1000$.

4.2 Simulation de modèle du Black-Scholes

Nous allons faire une étude sur l'exemple suivant : Prix du sous-jacent (S_0) = 100 ; Prix d'exercice (K) = 100 ; Volatilité (σ) = 0.1 ; Taux d'intérêt sans risque (r) = 0.05 ; Maturité (T) = 1 ; Nombre de simulations (N) = 1000 , pour simuler le prix sous-jacent, et puis calculer le prix d'achat (Call) et le prix de vente (Put) pour le modèle de Black-Scholes.

•La simulation de la Solution Analytique du modèle de Black-Scholes.

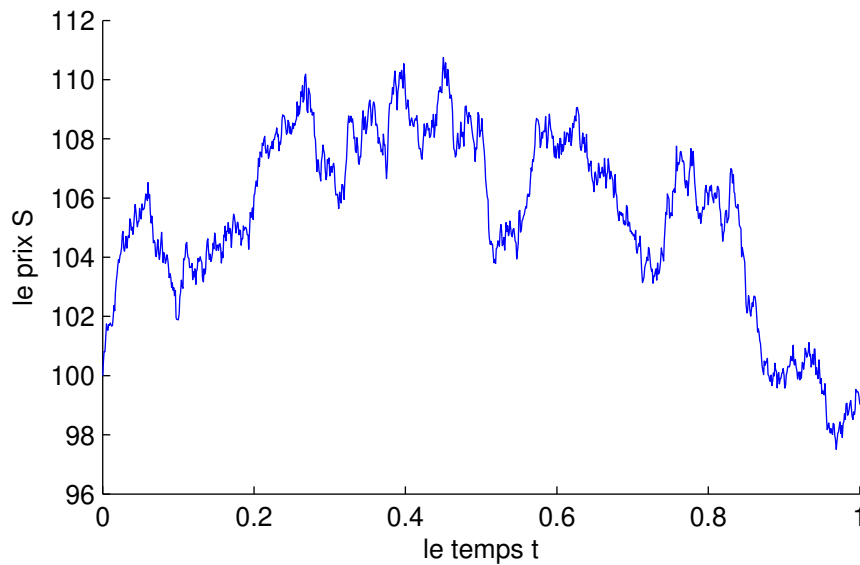


FIGURE 4.3 – Simulation d'une trajectoire de Black-Scholes (Solution Analytique)

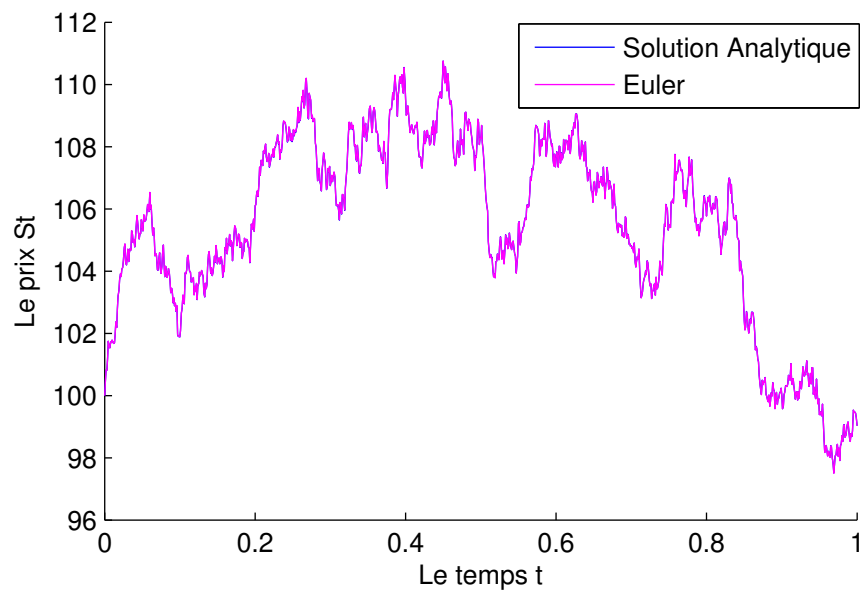
•La discrétisation d'Euler du Black-Scholes

FIGURE 4.4 – Discrétisation d'Euler du modèle de Black-Scholes

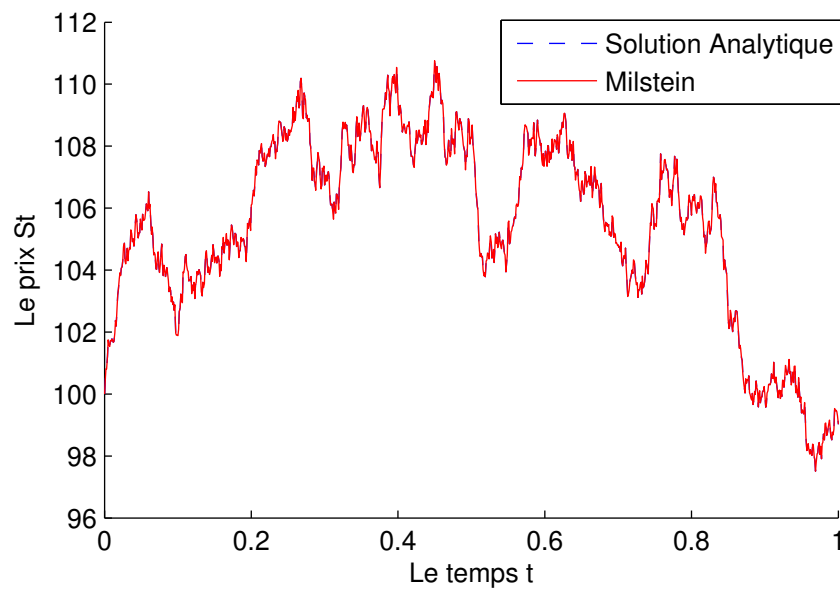
•La discrétisation de Milstein pour le modèle Black-Scholes

FIGURE 4.5 – Discrétisation de Milstein pour le modèle Black-Scholes

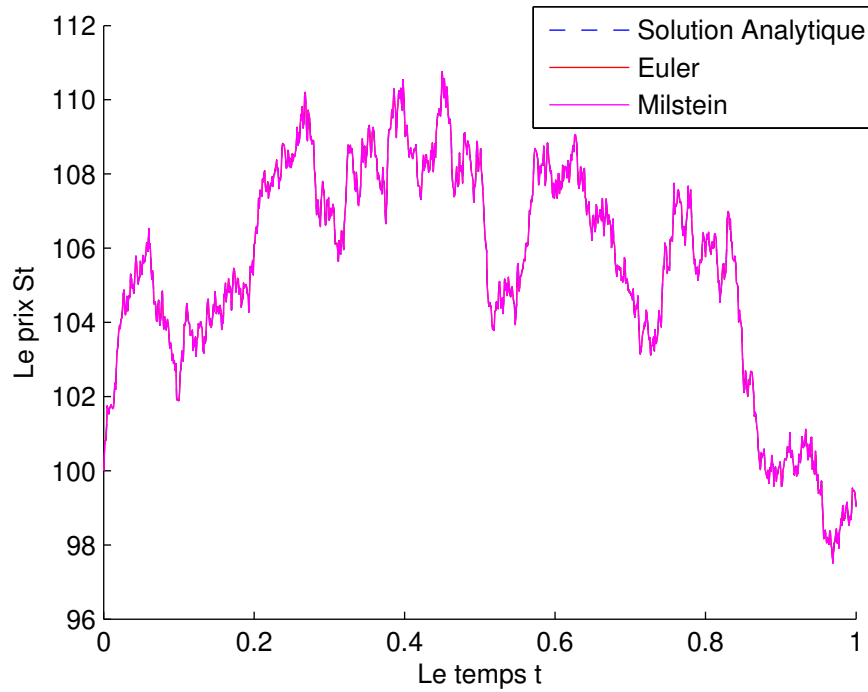


FIGURE 4.6 – Comparaison entre la Solution Analytique avec les deux schémas de discrétisations

▷ Discussion

- La figure 4.3 présente la simulation des prix sous-jacent par la solution analytique de l'équation de Black-Scholes appliqué à l'exemple mentionné précédemment.
- Les figures 4.4 et 4.5 présentent la simulation des prix sous-jacent par la discrétisation d'Euler et de Milstein du modèle de Black-Scholes appliqué à l'exemple mentionné précédemment.
- La figure 4.6 comparaison entre les trois courbes des figures 4.3, 4.4 et 4.5.

4.3 Calcul de Call et Put avec le modèle de Black-Scholes

Les tableaux suivantes 4.1, 4.2 et 4.3 présentent le prix des options d'achats et de ventes en fonction du prix du sous-jacent simulé par la Solution Analytique de l'équation de Black-Scholes, et la discrétisation d'Euler et de Milstein du modèle de Black-Scholes pour différentes valeurs du prix d'exercices K . On fixe à l'instant $t = 0$, $S_0 = 100$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.05$, $N = 1000$, $T = 1$.

- Pour $K = 100$, on trouve :

	Prix S_t			Call			Put		
t	An	Elr	Mil	An	Elr	Mil	An	Elr	Mil
0	100.0000	100.0000	100.0000	6.8050	6.8050	6.8050	1.9279	1.9279	1.9279
1	100.4534	100.4529	100.4534	7.1298	7.1295	7.1298	1.7994	1.7995	1.7994
2	100.8187	100.8180	100.8186	7.3965	7.3960	7.3965	1.7008	1.7010	1.7008
3	100.8115	100.8114	100.8115	7.3913	7.3912	7.3913	1.7027	1.7027	1.7027
4	101.2180	101.2175	101.2180	7.6931	7.6927	7.6930	1.5980	1.5981	1.5980
5	101.7470	101.7456	101.7469	8.0936	8.0925	8.0935	1.4695	1.4699	1.4696
6	101.5818	101.5808	101.5817	7.9676	7.9668	7.9675	1.5087	1.5090	1.5088
7	101.5325	101.5320	101.5325	7.9302	7.9298	7.9301	1.5206	1.5207	1.5206
8	101.7225	101.7223	101.7224	8.0749	8.0747	8.0748	1.4753	1.4753	1.4753
9	101.7024	101.7027	101.7023	8.0595	8.0597	8.0594	1.4800	1.4800	1.4801

TABLE 4.1 – Prix des options d'achats et de ventes en fonction du prix du sous-jacent simulé par la solution analytique, Euler et Milstein du Black-Scholes à l'instant $t = 0$ pour $S_0 = 100$, $K = 100$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.05$, $N = 1000$, $T = 1$.

- Pour $K=70$, on trouve :

	Prix S_t			Call			Put* 10^{-3}		
t	An	Elr	Mil	An	Elr	Mil	An	Elr	Mil
0	100.0000	100.0000	100.0000	33.4140	33.4140	33.4140	0.0432	0.0432	0.0432
1	100.4534	100.4529	100.4534	33.8674	33.8669	33.8674	0.0353	0.0353	0.0353
2	100.8187	100.8180	100.8186	34.2326	34.2319	34.2326	0.0300	0.0300	0.0300
3	100.8115	100.8114	100.8115	34.2255	34.2253	34.2255	0.0301	0.0301	0.0301
4	101.2180	101.2175	101.2180	34.6320	34.6315	34.6319	0.0251	0.0251	0.0251
5	101.7470	101.7456	101.7469	35.1610	35.1596	35.1609	0.0198	0.0198	0.0198
6	101.5818	101.5808	101.5817	34.9957	34.9947	34.9957	0.0213	0.0213	0.0213
7	101.5325	101.5320	101.5325	34.9465	34.9460	34.9464	0.0218	0.0218	0.0218
8	101.7225	101.7223	101.7224	35.1365	35.1363	35.1364	0.0200	0.0200	0.0200
9	101.7024	101.7027	101.7023	35.1164	35.1167	35.1163	0.0202	0.0202	0.0202

TABLE 4.2 – Prix des options d’achats et de ventes en fonction du prix du sous-jacent simulé par la solution analytique, Euler et Milstein du Black-Scholes à l’instant $t = 0$ pour $S_0 = 100$, $K = 70$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.05$, $N = 1000$, $T = 1$.

- Pour $K=130$, on trouve :

	Prix S_t			Call			Put		
t	An	Elr	Mil	An	Elr	Mil	An	Elr	Mil
0	100.0000	100.0000	100.0000	0.0673	0.0673	0.0673	23.7271	23.7271	23.7271
1	100.4534	100.4529	100.4534	0.0764	0.0764	0.0764	23.2829	23.2834	23.2829
2	100.8187	100.8180	100.8186	0.0845	0.0845	0.0845	22.9257	22.9264	22.9257
3	100.8115	100.8114	100.8115	0.0844	0.0844	0.0844	22.9327	22.9328	22.9327
4	101.2180	101.2175	101.2180	0.0942	0.0942	0.0942	22.5361	22.5365	22.5361
5	101.7470	101.7456	101.7469	0.1085	0.1085	0.1085	22.0214	22.0227	22.0214
6	101.5818	101.5808	101.5817	0.1039	0.1039	0.1039	22.1819	22.1829	22.1820
7	101.5325	101.5320	101.5325	0.1025	0.1025	0.1025	22.2298	22.2303	22.2299
8	101.7225	101.7223	101.7224	0.1078	0.1078	0.1078	22.0452	22.0453	22.0453
9	101.7024	101.7027	101.7023	0.1073	0.1073	0.1073	22.0647	22.0644	22.0648

TABLE 4.3 – Prix des options d’achats et de ventes en fonction du prix du sous-jacent simulé par la solution analytique, Euler et Milstein du Black-Scholes à l’instant $t = 0$ pour $S_0 = 100$, $K = 130$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.05$, $N = 1000$, $T = 1$.

- Les courbes

La figure suivante présente l'évolution des prix des options d'achats (Call) en fonction du prix sous-jacent simulé par la discrétisation d'Euler du Black-Scholes à l'instant $t = 0$ avec $S_0 = 100$ et $K = 70$.

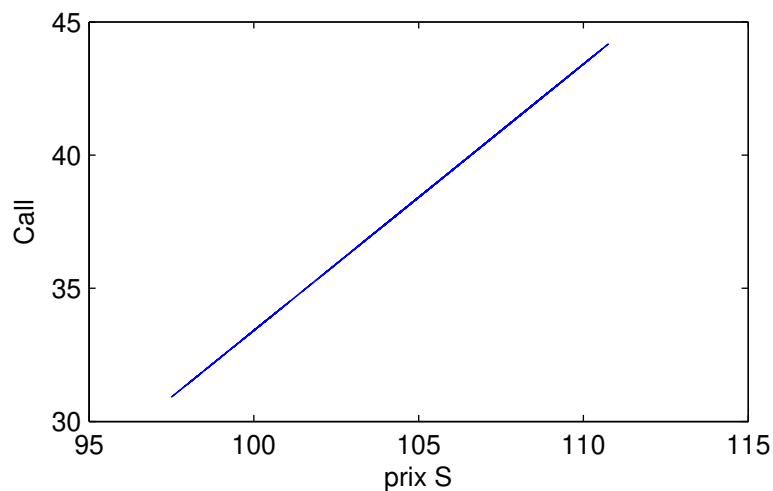


FIGURE 4.7 – Prix des options d'achats en fonction du prix du sous-jacent à l'instant $t = 0$ pour $S_0 = 100$, $K = 70$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.05$, $N = 1000$, $T = 1$.

- Pour $K=130$

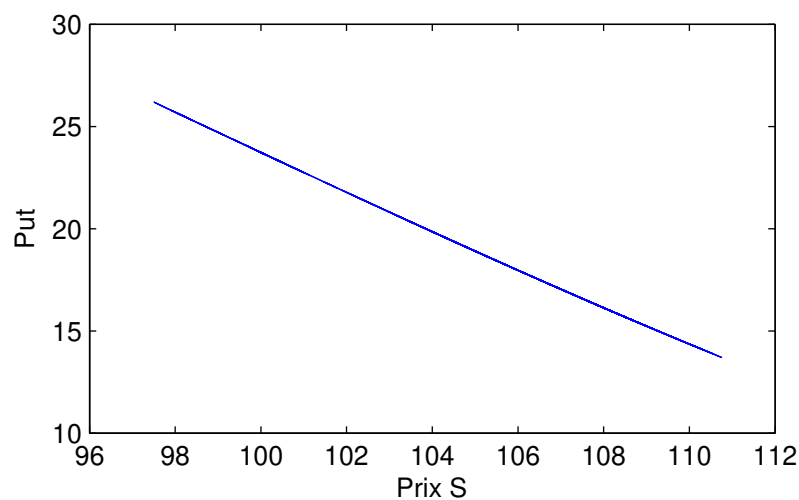


FIGURE 4.8 – Prix des options de ventes en fonction du prix du sous-jacent à l'instant $t = 0$ pour $S_0 = 100$, $K = 130$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.05$, $N = 1000$, $T = 1$.

La figure 4.8 présente l'évolution des prix des options de ventes (Put) en fonction du prix sous-jacent simulé par la discrétisation d'Euler du Black-Scholes a l'instant $t = 0$ avec $S_0 = 100$ et $K = 130$.

▷ **Interprétation**

- D'après les tableaux 4.2 et 4.3 on remarque que pour $k = 70$ les valeurs de Call sont supérieur à zéro et les valeurs de Put sont très proche à zéro (presque = 0) dans ce cas on exerce l'option d'achat(Call) et n'exercer pas l'option de vente (Put), mais pour $K = 130$ on à valeurs de Put sont supérieur à zéro et les valeurs de Call sont très proche à zéro (presque = 0) dans ce cas on exerce l'option de vente (Put) et n'exercer pas l'option d'achat (Call).
- Les deux figures 4.7 et 4.8 montrent que le prix des options d'achats augmente avec l'augmentation des prix du sous-jacent simulé par Euler du Black-Scholes (S_t) et que le prix des options de ventes(Put) augmente avec l'augmentation du prix d'exercice K .

4.4 Simulation de modèle de Heston

Nous avons appliqué le même exemple mentionné dans le modèle du Black-Scholes avec : Prix du sous-jacent (S_0) = 100, Prix d'exercice (K) = 100, Volatilité de la volatilité (σ) = 0.1, Taux d'intérêt sans risque (r) = 0.05, Maturité (T) = 1, Nombre de simulations (N) = 1000, Volatilité $v_0 = 0.01$, Taux de retour moyen $\kappa = 2$, Moyenne à long terme de la variance $\theta = 0.01$, Coefficient de corrélation $\rho = -0.7$, $\lambda = 0.05$ pour simuler le prix sous-jacent et la variance, et puis calculer le prix d'achat (Call) et le prix de vente (Put) pour le modèle de Heston.

- **La discrétisation d'Euler du modèle de Heston**

- Les figures 4.9 et 4.10 présentent la simulation des prix sous-jacent (S_t) et la variance (v_t) par la discrétisation d'Euler du modèle de Heston.

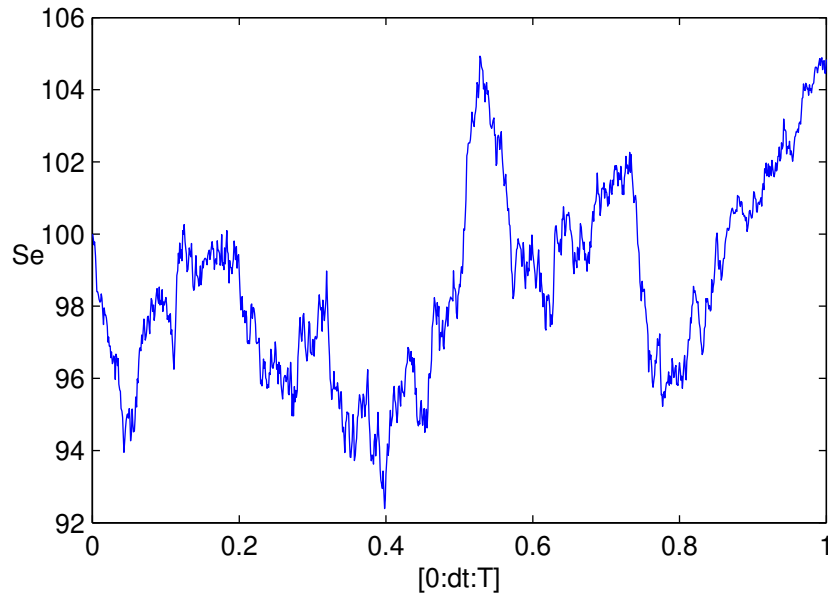


FIGURE 4.9 – Discrétisation d'Euler des prix du sous-jacent du modèle de Heston.

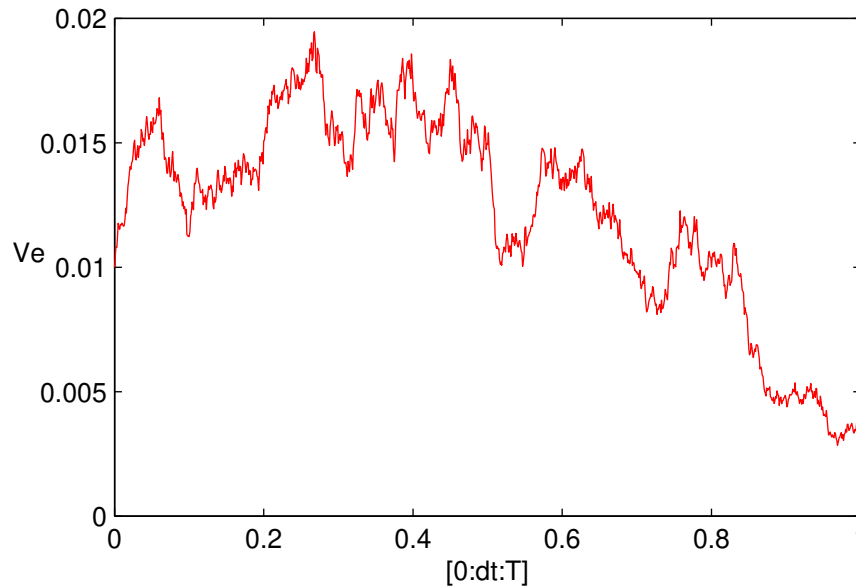


FIGURE 4.10 – Discrétisation d'Euler de la variance stochastique du modèle de Heston.

• La discrétisation de Milstein du modèle de Heston

Les figures suivantes 4.11 et 4.12 présentent la simulation des prix sous-jacent (S_t) et la variance (v_t) par la discrétisation de Milstien du modèle de Heston pour même exemple

simulée par le code Matlab.

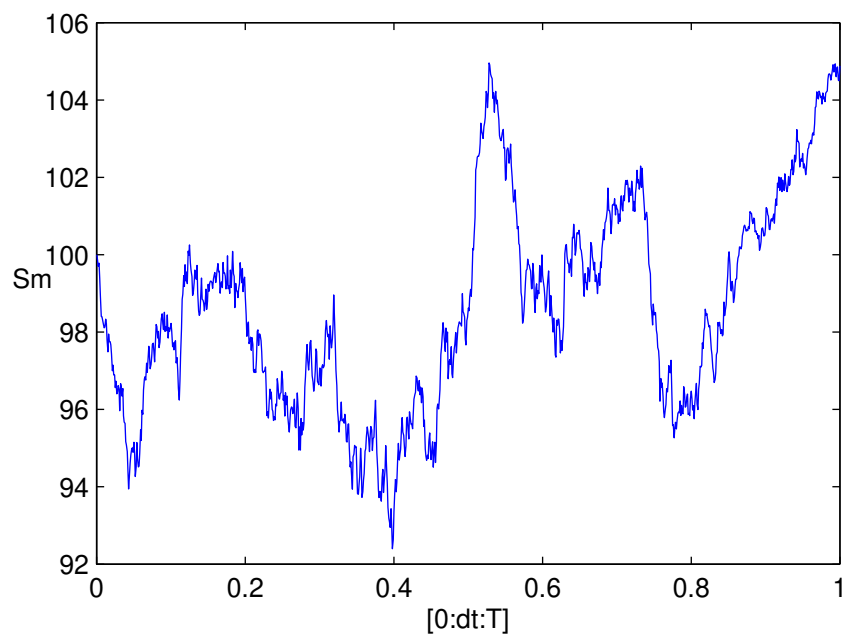


FIGURE 4.11 – Discrétisation de Milstein des prix du sous-jacent du modèle de Heston.

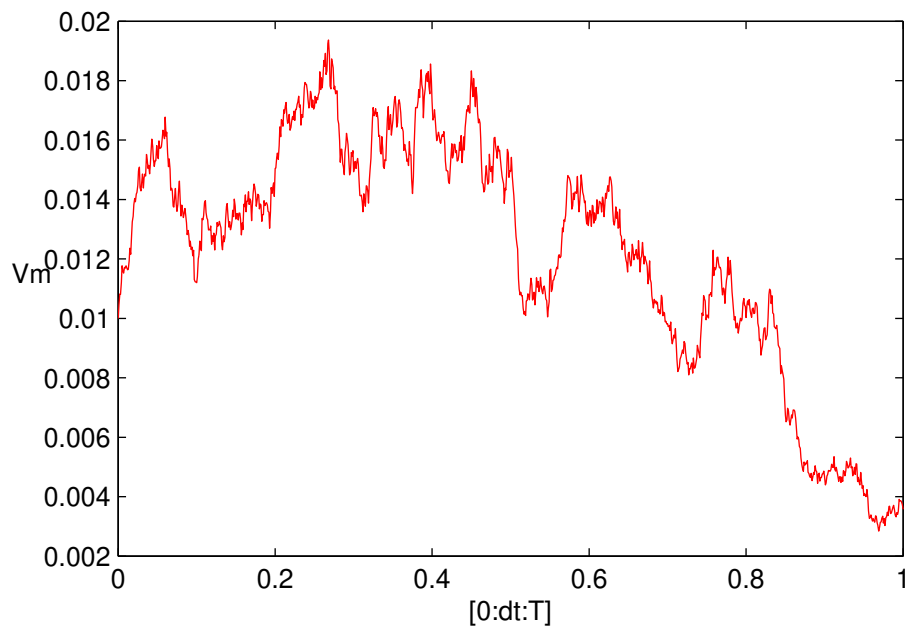


FIGURE 4.12 – Discrétisation de Milstein de la variance du modèle de Heston.

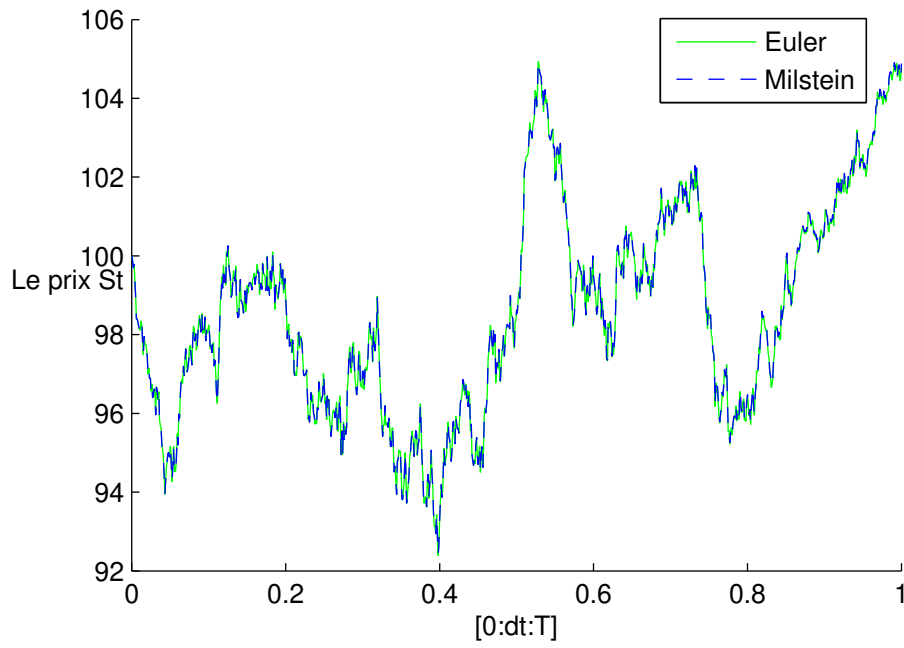


FIGURE 4.13 – Discrétisation d'Euler et Milstein des prix sous-jacent du modèle de Heston.

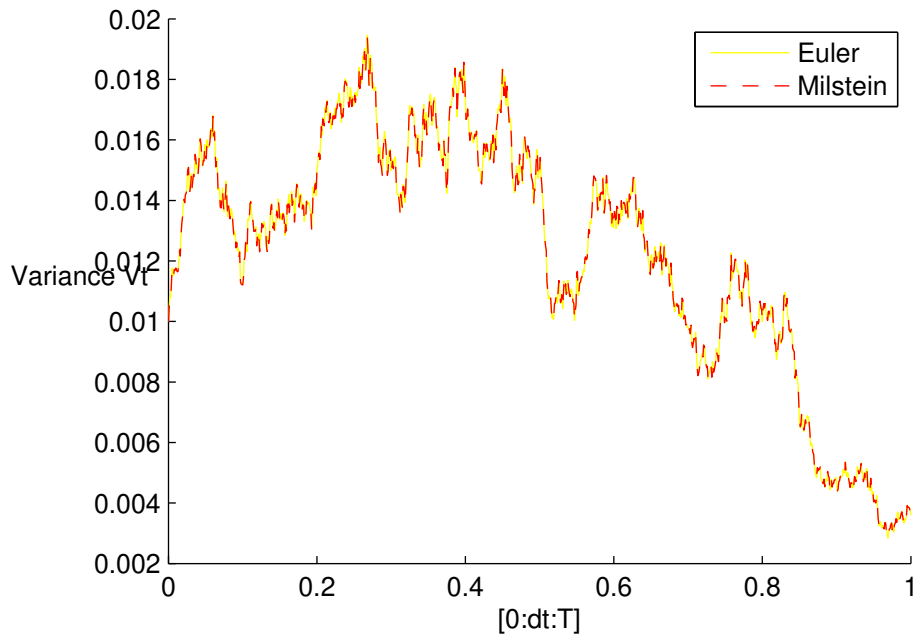


FIGURE 4.14 – Discrétisation d'Euler et Milstein des variances du modèle de Heston.

4.5 Calcul du Call et Put avec le modèle de Heston

- Pour $K = 100$, on trouve :

t	Euler				Milstein			
	V_{e_t}	S_{e_t}	Call	Put	V_{m_t}	S_{m_t}	Call	Put
0	0.0100	100.0000	6.9510	2.0739	0.0100	100.0000	6.9510	2.0739
1	0.0104	99.8725	7.0111	2.1403	0.0105	99.8721	7.0115	2.1407
2	0.0108	99.7033	7.0549	2.1923	0.0108	99.7025	7.0553	2.1927
3	0.0108	99.7816	7.0586	2.1922	0.0108	99.7803	7.0586	2.1922
4	0.0112	99.3929	7.0929	2.2454	0.0112	99.3918	7.0931	2.2457
5	0.0118	98.9297	7.1400	2.3152	0.0118	98.9291	7.1409	2.3161
6	0.0116	98.4015	7.0756	2.2765	0.0116	98.4017	7.0763	2.2772
7	0.0115	98.3947	7.0668	2.2680	0.0115	98.3942	7.0671	2.2683
8	0.0117	98.3128	7.0893	2.2945	0.0117	98.3119	7.0893	2.2946
9	0.0117	98.1927	7.0768	2.2879	0.0117	98.1912	7.0764	2.2876

TABLE 4.4 – Prix des options d’achats et de ventes en fonction du prix du sous-jacent simulé par Euler et Milstein du Heston à l’instant $t = 0$ pour $S_0 = 100$, $K = 100$, $v_0 = 0.01$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.05$, $\theta = 0.01$, $\rho = -0.7$, $\kappa = 2$, $\lambda = 0.05$, $N = 1000$, $T = 1$.

- Le tableau 4.4 présente les prix des options d’achats et de ventes en fonction du prix du sous-jacent estimé par la discrétisation d’Euler et de Milstein du modèle de Heston à l’instant $t=0$ pour $S_0 = 100$ et $K = 100$.

- Pour $K=75$, on trouve :

	Euler				Milstein			
t	Ve_t	Se_t	Call	Put	Vm_t	Sm_t	Call	Put
0	0.0100	100.0000	28.6934	0.0356	0.0100	100.0000	28.6934	0.0356
1	0.0104	99.8725	28.5698	0.0395	0.0105	99.8721	28.5694	0.0395
2	0.0108	99.7033	28.4044	0.0433	0.0108	99.7025	28.4036	0.0433
3	0.0108	99.7816	28.4821	0.0427	0.0108	99.7803	28.4808	0.0427
4	0.0112	99.3929	28.0993	0.0486	0.0112	99.3918	28.0982	0.0486
5	0.0118	98.9297	27.6444	0.0569	0.0118	98.9291	27.6439	0.0569
6	0.0116	98.4015	27.1187	0.0593	0.0116	98.4017	27.1189	0.0594
7	0.0115	98.3947	27.1113	0.0588	0.0115	98.3942	27.1109	0.0589
8	0.0117	98.3128	27.0321	0.0615	0.0117	98.3119	27.0311	0.0615
9	0.0117	98.1927	26.9127	0.0622	0.0117	98.1912	26.9112	0.0622

TABLE 4.5 – Prix des options d’achats et de ventes en fonction du prix du sous-jacent simulé par Euler et Milstein du Heston à l’instant $t = 0$ pour $S_0 = 100$, $K = 75$, $v_0 = 0.01$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.05$, $\theta = 0.01$, $\rho = -0.7$, $\kappa = 2$, $\lambda = 0.05$, $N = 1000$, $T = 1$.

- Pour un prix d'exercice $K=125$, on trouve :

	Euler				Milstein			
t	Ve_t	Se_t	Call	Put	Vm_t	Sm_t	Call	Put
0	0.0100	100.0000	0.0289	18.9326	0.0100	100.0000	0.0289	18.9326
1	0.0104	99.8725	0.0328	19.0640	0.0105	99.8721	0.0329	19.0644
2	0.0108	99.7033	0.0354	19.2357	0.0108	99.7025	0.0354	19.2366
3	0.0108	99.7816	0.0363	19.1584	0.0108	99.7803	0.0363	19.1597
4	0.0112	99.3929	0.0364	19.5472	0.0112	99.3918	0.0364	19.5483
5	0.0118	98.9297	0.0371	20.0111	0.0118	98.9291	0.0371	20.0117
6	0.0116	98.4015	0.0282	20.5303	0.0116	98.4017	0.0282	20.5302
7	0.0115	98.3947	0.0275	20.5365	0.0115	98.3942	0.0275	20.5369
8	0.0117	98.3128	0.0286	20.6195	0.0117	98.3119	0.0286	20.6205
9	0.0117	98.1927	0.0270	20.7380	0.0117	98.1912	0.0270	20.7394

TABLE 4.6 – Prix des options d'achats et de ventes en fonction du prix du sous-jacent simulé par Euler et Milstein du Heston à l'instant $t = 0$ pour $S_0 = 100$, $K = 125$, $v_0 = 0.01$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.05$, $\theta = 0.01$, $\rho = -0.7$, $\kappa = 2$, $\lambda = 0.05$, $N = 1000$, $T = 1$.

- Les tableaux 4.5 et 4.6 montrent le prix des options de ventes en fonction du prix du sous-jacent estimé par la discrétisation d'Euler et Milstein du Heston à l'instant $t = 0$ pour $S_0 = 100$, $K = 75$ et $K = 125$.

• Les courbes

La figure suivante présente l'évolution des prix des options d'achat(Call) en fonction du prix sous-jacent simulé par la discrétisation d'Euler du Heston a l'instant $t = 0$ avec $S_0 = 100$ et $K = 75$.

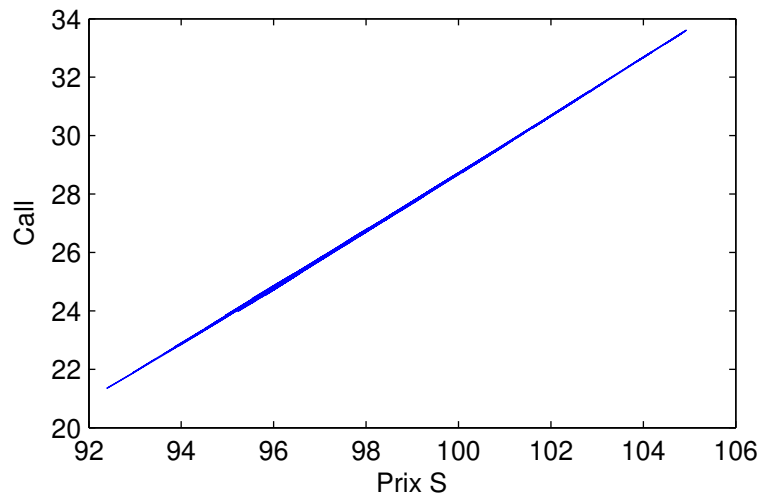


FIGURE 4.15 – Prix des options d’achats en fonction du prix du sous-jacent à l’instant $t = 0$ pour $S_0 = 100$, $K = 125$, $v_0 = 0.01$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.05$, $\theta = 0.01$, $\rho = -0.7$, $\kappa = 2$, $\lambda = 0.05$, $N = 1000$, $T = 1$.

• L’évolution des prix des options de ventes (Put) en fonction du prix sous-jacent simulé par la discrétisation d’Euler du Heston a l’instant $t = 0$ avec $S_0 = 100$ et $K = 125$ est présenté dans la figure suivante :

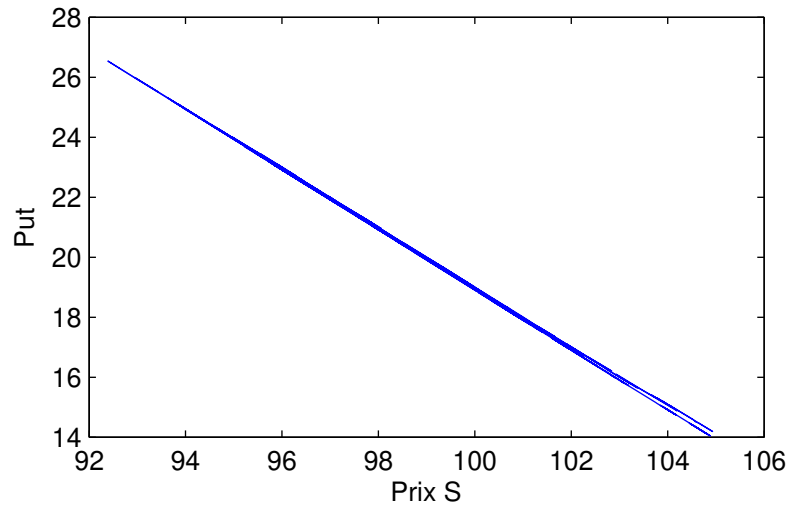


FIGURE 4.16 – Prix des options de ventes en fonction du prix du sous-jacent à l’instant $t = 0$ pour $S_0 = 100$, $K = 125$, $v_0 = 0.01$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.05$, $\theta = 0.01$, $\rho = -0.7$, $\kappa = 2$, $\lambda = 0.05$, $N = 1000$, $T = 1$.

▷ Interprétation

- Dans le tableau 4.4 on a le prix sous-jacent simulé par le modèle de Heston $S_0 = 100$ est égale au prix d'exercice $K = 100$ cela Peu nous importe que nous exercions ou non l'option d'achat (call) ou de vente (Put).
- D'après les tableaux 4.5 et 4.6 on remarque que pour $K = 75$ les valeurs de Call sont supérieur à zéro et les valeurs de Put sont très proche à zéro (presque = 0) dans ce cas on exerce l'option d'achat(Call) et n'exercer pas l'option de vente (Put), mais pour $K = 125$ on à valeurs de Put sont supérieur à zéro et les valeurs de Call sont très proche à zero (presque = 0) dans ce cas on exerce l'option de vente (Put) et n'exercer pas l'option d'achat (Call).
- Les deux figures 4.15 et 4.16 montrent que le prix des options d'achats augmente avec l'augmentation des prix du sous-jacent simulé par Euler du Heston (S_t) et que le prix des options de ventes(Put) augmente avec l'augmentation du prix d'exercice K .

CONCLUSION GENERALE

Dans ce mémoire nous avons présenté deux modèles stochastiques pour l'évaluation des prix des options à fin de prendre une décision de les exercer ou non, et pour atteindre cet objectif, nous avons suivi deux étapes : la simulation et calcul des prix des options).

Dans la partie de simulation nous avons utilisé la discrétisation d'Euler et de Milstein a fin de simuler les prix de sous-jacent de modèle de Black-Scholes et le processus de Heston ainsi sa variance stochastique.

À l'étape du calcul du prix de l'option (achat ou vente), dans lequel nous avons utilisé les formules et méthodes de calcul du prix des options mentionnés dans les premier et troisième chapitres précédents, nous pouvons conclure que l'option soit d'achat ou de vente, dépend de deux facteurs qui sont le prix de sous-jacent S_t et le prix d'exercice K .

Pour une option d'achat (Call) : lorsque le prix d'exercice est inférieur au cours du sous-jacent (je peux acheter ce sous-jacent moins cher en exerçant mon Call que si je l'achetais sur le marché) dans ce cas l'option (Call) est dans la monnaie, et si le prix d'exercice est supérieur au cours du sous-jacent (je n'ai pas intérêt à exercer mon droit d'achat) donc le Call est hors la monnaie.

À l'inverse, pour une option de vente (Put) : Lorsque le prix d'exercice est supérieur au prix du sous-jacent (je peux vendre le sous-jacent en exerçant l'option de vente (Put) au lieu de vendre sur le marché).

Comme conclusion, on pourrait dire que l'évaluation est une mission très difficile et qui comporte un important risque d'erreur.

Trouver un juste prix est une mission presque impossible car ce rôle reviendra finalement toujours au marché.

ANNEXE

Code Matlab

```
%l'exemple:

S0 = 100;           % Prix du Sous Jacent
K =130;             % Prix d'exercice
r = 0.05;           % Taux d'interets sans risque
N =1000;            %Nombre de simulation
T = 1;              % Maturite
dt = T/N;           % Interval de temps
V0 = 0.01;          % Volatilite de depart de modele heston
kappa = 2;          % Taux de retour moyen
theta = 0.01;        % Moyenne a long terme de la variance
rho = -0.7;          % Coefficient de correlation
lambda = 0.05;       %La prime de risque de volatilité
sigma = 0.1;         %pour BS est : Volatilite
```

```
%pour heston est : Volatilite de la
Volatilite
```

FIGURE 4.17 – Code Matlab de l'exemple appliqué

- Code Matlab de la simulation de la solution analytique du Black-Scholes

```
%solution analytique de l'equation differentielle stochastique
de Modele de Black-Scholes
function [SA]=BSAnal(r,sigma,S0,T,N,dt)
randn('state',80);
%Generer deux variables N(0,1) dependantes
z=randn(1,N);
dW=sqrt(dt)*z;
W=cumsum(dW);
SA=zeros(1,N);
%SA:c'est le vecture des prix sous-jacent simule par la
solution analytique de black-scholes
SAn=S0*exp(((r-0.5*sigma^2)*[dt:dt:T])+sigma*W);
SA=[S0,SAn];
hold on
plot([0:dt:T],SA,'b')
xlabel('dt')
ylabel('le prix d option')
end
```

FIGURE 4.18 – Code Matlab de la simulation d'une trajectoire de Black-Scholes (solution analytique).

- Code Matlab de la discrétisation d'Euler pour simuler les prix sous-jacent du Black-Scholes

```

%Discretisation d'Euler Black-Scholes
function[SEBS]=EulerBSSim(r,sigma,T,N,S0,dt)
randn('state',80);
dW=sqrt(dt)*randn(1,N);
W=cumsum(dW);
%[S0 SA]:c'est le vecture des prix sous-jacent simule par la
    solution analytique
%SEBS:c'est le vecture des prix sous-jacent simule par la
    Discretisation d'Euler
SA=S0*exp(((r-0.5*sigma^2)*[dt:dt:T])+sigma*W);

S=S0;
%
SE=zeros(1,N);
SEBS=zeros(1,N+1);
for j=1:N
    Winc=sum(dW((j-1)+1:j));
    S=S+dt*r*S+sigma*S*Winc;
    SE(j)=S;
end

SEBS=[S0,SE]
hold on
plot([0:dt:T],[S0,SA],'b--')
plot([0:dt:T],SEBS,'m--')
hold off

```

FIGURE 4.19 – Code Matlab de la discrétisation d’Euler du Black-Scholes.

- Code Matlab de la discrétisation de Milstein pour simuler les prix sous-jacent du Black-Scholes

```
%Discretisation de Milstein Black-Scholes
function [SMBS]=melsteinBSSim(r,sigma,S0,T,N,dt)
randn('state',80);
z=randn(1,N);
dW=sqrt(dt)*z;
W=cumsum(dW);
%[S0 SA]:c'est le vecture des prix sous-jacent simule par la
    solution analytique
%SMBS:c'est le vecture des prix sous-jacent simule par la
    Discretisation de Milstein
SA=S0*exp((r-0.5*sigma^2)*[dt:dt:T]+sigma*W);

S=S0;
SM=zeros(1,N);
SMBS=zeros(1,N+1);
for j=1:N
    Winc=sum(dW(:,(j-1)+1:j),2);
    S=S+dt*r*S+sigma*S*Winc+0.5*sigma^2*S.*(Winc.^2-dt);
    SM(j)=S;
end
SMBS=[S0,SM];
hold on
plot([0:dt:T],SMBS,'r--')
plot([0:dt:T],[S0,SA],'b--')
hold off
end
```

FIGURE 4.20 – Code Matlab de la discrétisation de Milstein du Black-Scholes.

• Code Matlab de la discrétisation de la Solution Analytique ,Euler et Milstein pour simuler les prix sous-jacent du black-scholes

```
function[SA SEBS SMBS]=EuMeBSSim(r,sigma,S0,T,N,dt)
randn('state',80);
z=randn(1,N);
dW=sqrt(dt)*z;
W=cumsum(dW);
SA=zeros(1,N);
%SA:c'est le vecteur de solution analytique
SAn=S0*exp(((r-0.5*sigma^2)*[dt:dt:T])+sigma*W);
SEu=zeros(1,N);
SMe=zeros(1,N);
SEBS=zeros(1,N+1);
SMBS=zeros(1,N+1);
S=S0;
for j=1:N
    Winc=sum(dW((j-1)+1:j));
    S=S+dt*r*S+sigma*S*Winc;
    SEu(j)=S;
end
Sm=S0;
for j=1:N
    Winc=sum(dW(:,(j-1)+1:j),2);
    Sm=Sm+dt*r*Sm+sigma*Sm*Winc+0.5*sigma^2*Sm.*(Winc.^2-dt);
    SMe(j)=Sm;
end
SA=[S0,SAn];
SEBS=[S0,SEu];
SMBS=[S0,SMe];
```

```

hold on
plot([0:dt:T],SEBS,'r--')
plot([0:dt:T],SMBS,'y--')
plot([0:dt:T],SA,'b--')
hold off
end

```

FIGURE 4.21 – Code Matlab de la discrétisation de la Solution Analytique ,Euler et Milstein du Black-Scholes.

• **Code Matlab de la discrétisation d’Euler pour simuler les prix sous-jacent et la variance du Heston**

```

%Discretisation du processus de Heston (1993)
%Euler POUR LE MODELE HESTON
function [Se Ve] = HestonEulSim(N,V0,rho,kappa,lambda,theta,dt,
    sigma,S0,r,T)
randn('state',80);
kappa_star = kappa*lambda;                % parametre risque
    neutre
theta_star = (kappa*theta)/(lambda+kappa); % parametre risque
    neutre
%remplire des vecteurs avec des zeros de dimention N+1
Ve=zeros(1,N+1);
Se=zeros(1,N+1);
%Generer deux variables N(0,1) dependantes
Z1= randn(1,N);
Z2= randn(1,N);
%les valeurs initiale
Ve(1)=V0;
Se(1)=S0;

```

```

for i=1:N
    % Discretisation d'Euler pour la variance
    Ve(i+1)=abs(Ve(i)+kappa_star*(theta_star-Ve(i))*dt+sigma*sqrt(
        Ve(i))*sqrt(dt)*Z1(i));
    % Discretisation d'Euler pour le prix de l'action
    Se(i+1)=Se(i)+r*Se(i)*dt+sqrt(Ve(i))*sqrt(dt)*Se(i)*(rho*Z1(i)+
        sqrt(1-rho^2)*Z2(i));
end
figure
plot([0:dt:T],Ve,'r')
xlabel(' [0:dt:T] '), ylabel('Ve','rot',0)
figure
plot([0:dt:T],Se,'b')
xlabel(' [0:dt:T] '), ylabel('Se','rot',0)
end

```

FIGURE 4.22 – Code Matlab de la discrétisation d'Euler du Heston.

- **Code Matlab de la discrétisation de Milstein pour simuler les prix sous-jacent et la variance du Heston**

```

%Discretisation du processus de Heston (1993)
%MILSTEIN POUR LE MODELE HESTON
function [Sm Vm] = HestonMilSim(N,V0,rho,kappa,lambda,theta,dt,
    sigma,S0,r,T)
randn('state',80);
kappa_star = kappa*lambda; % parametre risque
    neutre
theta_star = (kappa*theta)/(lambda+kappa); % parametre risque
    neutre
%remplire des vecteurs avec des zeros de dimention N+1

```

```

Vm=zeros(1,N+1);
Sm=zeros(1,N+1);
%Generer deux variables N(0,1) dependantes
Z1= randn(1,N);
Z2= randn(1,N);
%les valeurs initiale
Vm(1)=V0;
Sm(1)=S0;
for i=1:N
    % Discretisation de Milstein pour la variance
Vm(i+1)=abs(Vm(i)+kappa_star*(theta_star-Vm(i))*dt+sigma*sqrt(
    Vm(i))*sqrt(dt)*Z1(i)+(1/4)*sigma^2*dt*(((Z1(i))^2)-1));
    % Discretisation de Milstein pour le prix de l'action
Sm(i+1)=Sm(i)+r*Sm(i)*dt+sqrt(Vm(i))*sqrt(dt)*Sm(i)*(rho*Z1(i)+
    sqrt(1-rho^2)*Z2(i))+(1/2)*Vm(i)*Sm(i)*dt*(((rho*Z1(i)+sqrt
    (1-rho^2)*Z2(i))^2)-1);
end
figure
plot([0:dt:T],Vm,'r')
xlabel(' [0:dt:T] '), ylabel('Vm','rot',0)
figure
plot([0:dt:T],Sm,'b')
xlabel(' [0:dt:T] '), ylabel('Sm','rot',0)
end

```

FIGURE 4.23 – Code Matlab de la discrétisation de Milstein du Heston.

- **Code Matlab de la discrétisation d'Euler et Milstein pour simuler les prix sous-jacent et la variance du Heston.**

```

%Simulation du processus de Heston (1993)

```

```

%EULER ET MILSTEIN POUR LE MODELE HESTON
function [Sm Vm Se Ve] = HestonEulMil(N,V0,rho,kappa,lambda,
    theta,dt,sigma,S0,r,T)
randn('state',80);
kappa_star = kappa*lambda; % parametre risque
    neutre
theta_star = (kappa*theta)/(lambda+kappa); % parametre risque
    neutre
Vm=zeros(1,N+1);
Sm=zeros(1,N+1);
Ve=zeros(1,N+1);
Se=zeros(1,N+1);
Z1= randn(1,N);
Z2= randn(1,N);
Vm(1)=V0;
Sm(1)=S0;
Ve(1)=V0;
Se(1)=S0;
for i=1:N
Vm(i+1)=abs(Vm(i)+kappa_star*(theta_star-Vm(i))*dt+sigma*sqrt(
    Vm(i))*sqrt(dt)*Z1(i)+(1/4)*sigma^2*dt*(((Z1(i))^2)-1));
Sm(i+1)=Sm(i)+r*Sm(i)*dt+sqrt(Vm(i))*sqrt(dt)*Sm(i)*(rho*Z1(i)+
    sqrt(1-rho^2)*Z2(i))+(1/2)*Vm(i)*Sm(i)*dt*(((rho*Z1(i)+sqrt
    (1-rho^2)*Z2(i))^2)-1);
Ve(i+1)=abs(Ve(i)+kappa_star*(theta_star-Ve(i))*dt+sigma*sqrt(
    Ve(i))*sqrt(dt)*Z1(i));
Se(i+1)=Se(i)+r*Se(i)*dt+sqrt(Ve(i))*sqrt(dt)*Se(i)*(rho*Z1(i)+
    sqrt(1-rho^2)*Z2(i));
end
figure

```

```

hold on
plot([0:dt:T],Vm,'r--')
plot([0:dt:T],Ve,'y--')
xlabel(' [0:dt:T] '), ylabel('variance','rot',0)
hold off
figure
hold on
plot([0:dt:T],Sm,'b--')
plot([0:dt:T],Se,'g--')
xlabel(' [0:dt:T] '), ylabel('prix de l action','rot',0)
hold off
end

```

FIGURE 4.24 – Code Matlab de la discrétisation d’Euler et Milstein du Heston.

- **Code Matlab pour calculer le Call et Put du modèle de Black-Scholes**

```

%programme qui calcule le prix d'option d'achat

(Call) et d'option d'achat(Put)pour le modele de black-scholes
function [Call Put]= PutCallBS(S,K,r,T,sigma)
d1=(log(S./K) + (r + sigma.^2 /2) .* T) ./ (sigma .* sqrt(T));
d2=d1- sigma .* sqrt(T);
Ke = K .* exp(-r .* T);
N1=normcdf(d1);
N2=normcdf(d2);
Call=S .* N1 - Ke .* N2;
Put=Call+Ke -S;
end

```

FIGURE 4.25 – Code Matlab pour calculer le Call et Put du modèle de Black-Scholes.

• **Code Matlab pour calculer le Call et Put du modèle de Heston**

```
%programme qui calcule Call et Put du modele de Heston

function [Call Put] = hestonCaPu(kappa,theta,sigma,rho,lambda,
    V0,r,T,S0,K)
kappa_star = kappa*lambda;
theta_star = (kappa*theta)/(lambda+kappa);
P1 = 0.5 + 1/pi*quadl(@HestonPIntegrand,0,100,[],[],kappa_star,
    theta_star,sigma,rho,V0,r,T,S0,K,1);
P2 = 0.5 + 1/pi*quadl(@HestonPIntegrand,0,100,[],[],kappa_star,
    theta_star,sigma,rho,V0,r,T,S0,K,2);
Call = S0*P1 -K*exp(-r*T)*P2;
Put =Call+ K*exp(-r*T)-S0;
end

function ret = HestonPIntegrand(phi,kappa_star,theta_star,sigma
    ,rho,V0,r,T,S0,K,P)
if P == 1
u = 0.5;
b = kappa_star - rho*sigma;
else
u = -0.5;
b = kappa_star;
end
a = kappa_star*theta_star;
d = sqrt((rho*sigma*phi.*1i-b).^2-sigma^2*(2*u*phi.*1i-phi.^2))
;
```

```
g = (b-rho*sigma*phi*1i + d)./(b-rho*sigma*phi*1i - d);
C = r*phi.*1i*T + a/sigma^2.*((b- rho*sigma*phi*1i + d)*T - 2*
    log((1-g.*exp(d*T))./(1-g)));
D = (b-rho*sigma*phi*1i + d)./sigma^2.*((1-exp(d*T))./ (1-g.*
    exp(d*T)));
f = exp(C + D*V0 + 1i*phi*log(S0));
ret = real(exp(-1i*phi*log(K)).*f./(1i*phi));
end
```

FIGURE 4.26 – Code Matlab pour calculer le Call et Put du modèle de Heston.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Abada Nour El Houda, *Modèles financiers avec sauts*. Université de Mentouri - Constantine, 2017.
- [2] Abdiche Naima, *Les équations différentielles stochastiques en dimension finie*. Université de Saida - Dr Moulay Tahar, 2018.
- [3] Adjedj Florian, *Construction d'un modèle de profitabilité et tarification d'un contrat en unités de compte avec garantie plancher*. université de strasbourg, 2015.
- [4] Adjrad Karim, *Estimation des paramètres des processus continus*. Université de boumerdes, 2016.
- [5] Alaya Mokhtar Zahdi, *Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades et Mathématiques Financières*. Université de gabès, 2010.
- [6] Antanas LenkŠas, *Weak approximations of Heston model by discrete random variable*. Vilnius university, 2016.
- [7] Aridal Yasmine, *comparison of volatility forecasting models : Historical and Black-scholes implied volatility , evidence from the french stock market*. Al Akhawayn university, 2018.
- [8] Bc. Jiří Obhlídal, *Comparaison du modèle Black-Scholes avec le modèle Heston*. Université d'économie de prague, 2016.

-
- [9] Ben Tahar Imen, Trashorras José et Turinici Gabriel, *Éléments de calcul stochastique pour l'évaluation et la couverture des actifs dérivés*.
 - [10] Ben Tahar Imen, Trashorras José et Turinici Gabriel, *Mouvement Brownien et évaluation d'actifs contingents*. Université Paris Dauphine, M1 MMD, 2015.
 - [11] Bienvenüe-Duheille F, *Remise à niveau en processus stochastiques*. Université Claude Bernard Lyon 1, 2013.
 - [12] Binck Fr, *Comprendre la bourse. Les options*, 2013.
 - [13] Boni Ella, Genot Boris et Momein Audrey, *Un modèle de détection des sauts dans un processus de cours boursiers*. 2005.
 - [14] Bőszi Péter, *A Heston és Bates-modellek diszkretizálása*. 2016.
 - [15] Brandon Hardin, *Implementing the Heston Option Pricing Model in Object-Oriented Cython*. 2017.
 - [16] Chalabi El-Hacène, *Fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien*. Université 20 Août 1955 de Skikda, 2010.
 - [17] Chibane Rima, *Mouvement Brownien et Intégrale stochastique*. Université de Bejaia, 2016.
 - [18] Christophe Hurlin, *Modèles ARCH - GARCH, Applications à la VaR*. Université d'Orléans, 2007.
 - [19] Coulon Jérôme, *Mémoire longue, volatilité et gestion de portefeuille*. Université Claude Bernard Lyon 1, 2009.
 - [20] Cox J C, Ingersoll Jr J E, Ross S A, *A theory of the term structure of interest rates*. Econometrica J Econo, 1985 :385-407.
 - [21] Daibeche Amina et Mekla Naima, *Valorisation d'options Théorie-Simulation*. Université de M'hamed Bougerra, 2017.
 - [22] Delivorias Christos, Richtárik Peter and Takáč Martin, *Case studies in acceleration of Heston's stochastic volatility financial engineering model : GPU, cloud and FPGA implementations*. Master's thesis, The University of Edinburgh, Aug, 2012.
 - [23] Didier Auroux, *Méthodes numériques pour le pricing d'options*. Polytechnique-Sophia, MAM5 - option IMAFA, 2011.
-

-
- [24] Didion Christian et Jannaud Thomas, Durrleman Valdo, *Trading de Volatilité*. Ecole Polytechnique.
 - [25] Dunn Robin, Hauser Paloma, Seibold Tom and Hugh Gong, *Estimating option prices with Heston's stochastic volatility model*. 2014.
 - [26] Engelmann B, Koster F et Oeltz Daniel, *Calibration of the Heston Stochastic Local Volatility Model :A Finite Volume Scheme*.2011. Retrieved from [http ://rivacon.com/sites/default/files/stochlocalvol.pdf](http://rivacon.com/sites/default/files/stochlocalvol.pdf).
 - [27] Fabrice Douglas Rouah, *Euler and milstein discretization*. Documento de trabajo, Sapient Global Markets, Estados Unidos. Recuperado de [www. frouah. com](http://www.frouah.com), 2011.
 - [28] Fabrice D Rouah, *The Heston Model and Its Extensions in Matlab and C*. John Wiley & Sons, 2013.
 - [29] Gatheral Jim, Merrill Lynch, *Stochastic Volatility and Local Volatility*. 2002.
 - [30] Ghriss Ayoub et Lalami ElGhali, *Produits dérivés sur la volatilité et modèle de variance forward*. Ecole polytechnique université paris-saclay, 2017.
 - [31] Gunther Capelle-Blancard, Emmanuel Jurczenko et al, *Une application de la formule de Jarrow et Rudd aux option sur indice CAC 40*. Université de Paris I, 2000.
 - [32] Guillaume Simon, *Économétrie de la finance*. Dauphine Université Paris, 2012.
 - [33] Hadji.M.L, *Etude d'une équation différentielle stochastique a volatilité stochastique et simulations numériques*. Université Badji Mokhtar Annaba, 2013.
 - [34] Haugh Martin, *A Brief Introduction to Stochastic Calculus*. 2016.
 - [35] Henrard Marc, *Parameter risk in the Black and Scholes model*. Working Paper, 2001. Available online at : [http ://128.118. 178.162/eps/ri ...](http://128.118.178.162/eps/ri...), 2003.
 - [36] Hui Gong, *The Heston Model*, [http ://www.hompages.ucl.ac.uk/ucaggon/](http://www.hompages.ucl.ac.uk/ucaggon/) .2014.
 - [37] Heston S, *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility, with Application to Bond and Currency Options*.Review of Financial Studies,6, (1993), 327 - 343.
 - [38] Hon Robert, *Monte Carlo and Binomial Simulations for European Option Pricing*. Leeds University, 2013.
 - [39] Jeanblanc Monique, *Cours de calcul stochastique*. Dess Im Evry. Option finance, 2002.
-

-
- [40] Jeanblanc Monique, *Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY*. Lecture Notes, University of Évry. Available at http://www.maths.univ-evry.fr/pages_perso/jeanblanc, 2006.
 - [41] Jean-Etienne Palard, Céline Barrédy, *Gestion financière*. 1re édition, 2017.
 - [42] Jean-Christophe Breton, *Calcul stochastique*. M2 Mathématiques, Université de Rennes 1, 2014.
 - [43] Jerbi Yacin, *Evaluation des options et gestion des risques financiers par les réseaux de neurones et par les modèles à volatilité stochastique*. Université Paris 1 - Panthéon - Sorbonne, Université de Sfax, 2006.
 - [44] Joubert Phil et Vencatasawmy Coomaren, *Stochastic volatility models : considerations for the lay actuary*. 2005.
 - [45] Karaouzene Naila, *Équations Différentielles Stochastiques*. Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen, 2015.
 - [46] Khodja Nawel, *Évaluation d'option européenne à barrière*. Université Badji Mokhtar Annaba.
 - [47] Ksouri Najed, *Méthodes d'approximation numérique pour le pricing des options vanilles et asiatiques dans le modèle de Heston de volatilité stochastique*. 2007.
 - [48] Kouidmir Fouad, *Calibrage d'options par filtrage non linéaire*. 2012.
 - [49] Kubrom Hisho Teka, *Parameter estimation of the Black-Scholes-Merton model*. Kansas State University, 2013.
 - [50] Laporte Francis, *Méthode d'inférence utilisant la vraisemblance empirique basée sur l'entropie pour les modèles de diffusion avec sauts*. Université Laval, 2019.
 - [51] Lefevre Laurent and Longevialle Antoine, *Calibration des modeles*. Ecole internationale des sciences du traitement de l'information.
 - [52] Loulidi Sanae, *Modélisation stochastique en finance, application à la construction d'un modèle à changement de régime avec des sauts*. L'université Bordeaux I, 2008.
 - [53] Lubrano Michel, *Volatilité et risques financiers*. 2011.
 - [54] Matilde Lopes Rosa, *Numerical Methods for Stochastic Differential Equations*. University of Lisbon, Portugal, 2016.
-

-
- [55] Mazouni F et Mendas K, *Méthodes d'estimations de la volatilité des indices boursiers*. Université M'hamed Bougara Boumerdes, 2017.
 - [56] Meddahi Samia, *Estimation des Paramètres des EDS : Modèle de Black et Scholes*. Université M'hamed Bougara Boumerdes, 2009.
 - [57] Meziane Mohamed, *la modélisation financière en temps continu*. Université Dr Tahar Moulay - Saïda, 2016.
 - [58] Milan Mrázek and Jan Pospíšil, *Calibration and simulation of Heston model*. Open Mathematics, 15(1) :679–704, 2017.
 - [59] *Mouvement Brownien, Intégrale Stochastique*. Séminaire des doctorants, Bordeaux, 2003.
 - [60] Nicole El Karoui, *Couverture des risques dans les marchés financiers*. Lecture notes for master 'Probability and Finance', Paris VI university, 2003.
 - [61] Nimalin Moodley , *The Heston model : A practical approach*. Faculty of Science, University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa, 2005.
 - [62] Pham H, *Introduction aux Mathématiques et Modèles Stochastiques des Marchés Financiers*. Université Paris 7, 2007.
 - [63] Philippe Briand, *Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades*. 2001.
 - [64] Professor Whitt, *A Quick Introduction to Stochastic Calculus*. Stochastic Models in FE, 2007.
 - [65] Puig Matias, *An introduction to stochastic volatility models*. 2017.
 - [66] Rémi Tachet des Combes, *Modèles de diffusion pour produits dérivés*.
 - [67] Saïmi Nabil, *Estimation de la volatilité et filtrage non linéaire*. Université du Québec à Trois-Rivières, 2002.
 - [68] Tankov Peter, *Calibration de modèles et couverture de produits dérivés*. Université Paris-Diderot (Paris VII), 2006.
 - [69] Tankov Peter, *Surface de volatilité*. Université Paris-Diderot (Paris VII), 2015.
 - [70] Todd Young and Martin J Mohlenkamp, *Introduction to numerical methods and matlab programming for engineers*. 2020.
-

- [71] Torbjörn Odelman, *Efficient Mont Carlo simulation with stochastic volatility*. Skolan för datavetenskap och kommunikation, Kungliga Tekniska högskolan, 2009.
- [72] Van Der Weijst R.W.B, *Numerical Solutions for the Stochastic Local Volatility Model*. Delft University of Technology, 2017.
- [73] Warlop Romain, *Modèle de Black-Scholes*. Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2011.
- [74] Ximei Wang, Xingkang He, Ying Bao and Yanlong Zhao, *Parameter estimates of Heston stochastic volatility model with MLE and consistent EKF algorithm*. Science China Information Sciences,61(4), 2018.
- [75] Yves Aragon, *Rappels de statistique mathématique (compléments du Chapitre 3)*. Université Toulouse Capitole, 2020.
- [76] Zhao Ze, *Stochastic volatility models with applications in finance*. University of Iowa, 2016.

