

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE « M'HAMED BOUGARA »

BOUMERDES



FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

Projet de fin d'étude

En vue de l'obtention du diplôme de Master Académique en Génie Civil

OPTION : STRUCTURES

 **Thème** 

Analyse numérique des déformations et contraintes
planes de la théorie d'élasticité utilisant
Mathcad

Réalisé par :

**ALILAHMAR SIHAM
AMIAR ANYA**

Promoteur :

A. ROUABHI

Promotion :
2018/2019

Remerciements

Tout d'abord, nous tenons à remercier :

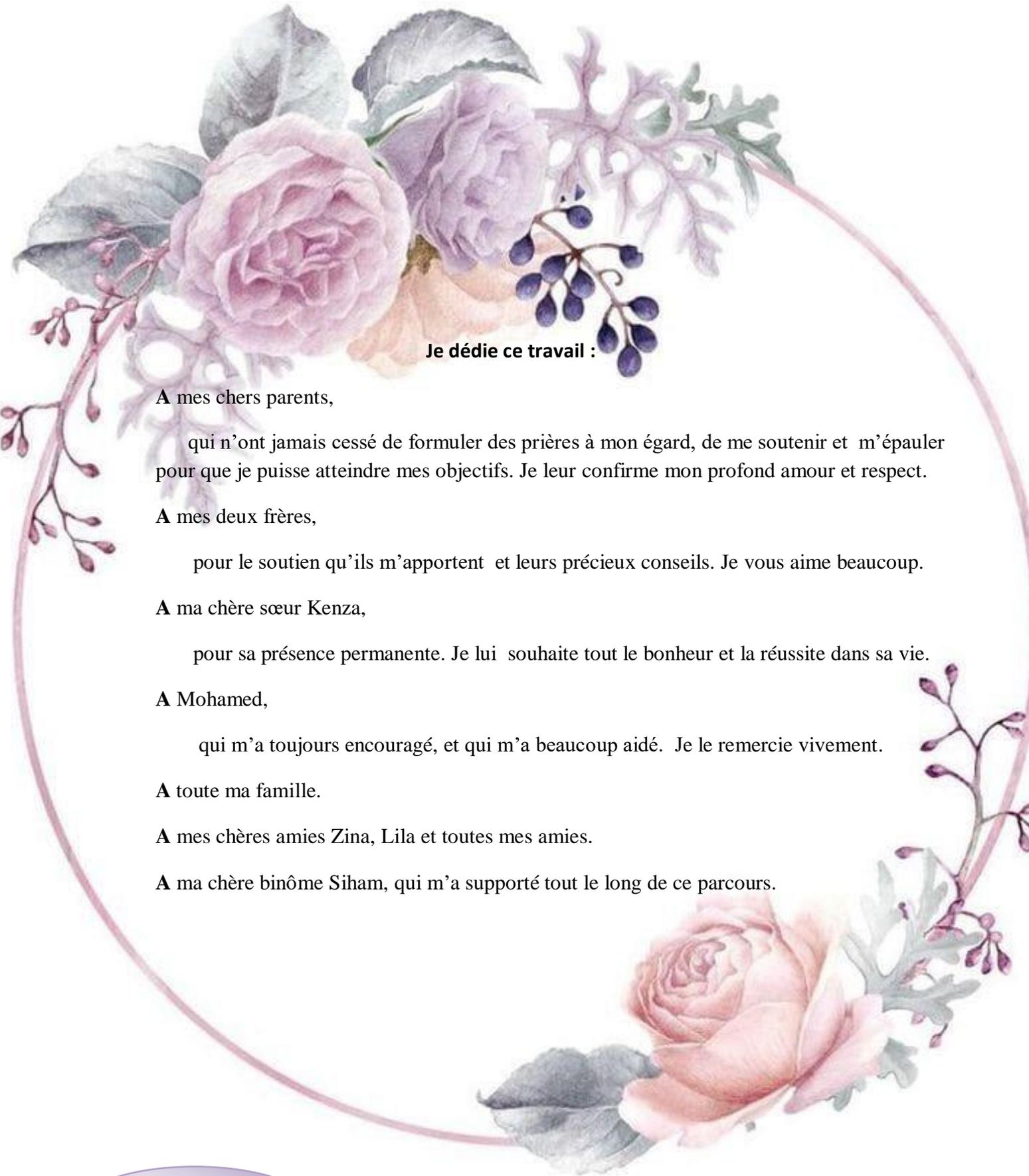
Dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé, la volonté et la patience pour accomplir ce modeste travail.

Nos remerciements particuliers à notre encadreur A.ROUABHI, qui nous a incité à faire ce choix de recherche, tout au long de ce travail, nous avons subi une formation et un perfectionnement distingués dans plusieurs domaines. Ses vastes connaissances, sa pédagogie durant toute la période de préparation de ce travail nous ont énormément facilité la tâche. Nous le remercions vivement.

Nous tenons également à remercier d'avance tous les membres du jury et nos enseignants en particulier Mr.Ghernouti, Mr.Bediar, Mr.Bengrab

Enfin, nous remercions tous ceux qui ont Contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicaces



Je dédie ce travail :

A mes chers parents,

qui n'ont jamais cessé de formuler des prières à mon égard, de me soutenir et m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs. Je leur confirme mon profond amour et respect.

A mes deux frères,

pour le soutien qu'ils m'apportent et leurs précieux conseils. Je vous aime beaucoup.

A ma chère sœur Kenza,

pour sa présence permanente. Je lui souhaite tout le bonheur et la réussite dans sa vie.

A Mohamed,

qui m'a toujours encouragé, et qui m'a beaucoup aidé. Je le remercie vivement.

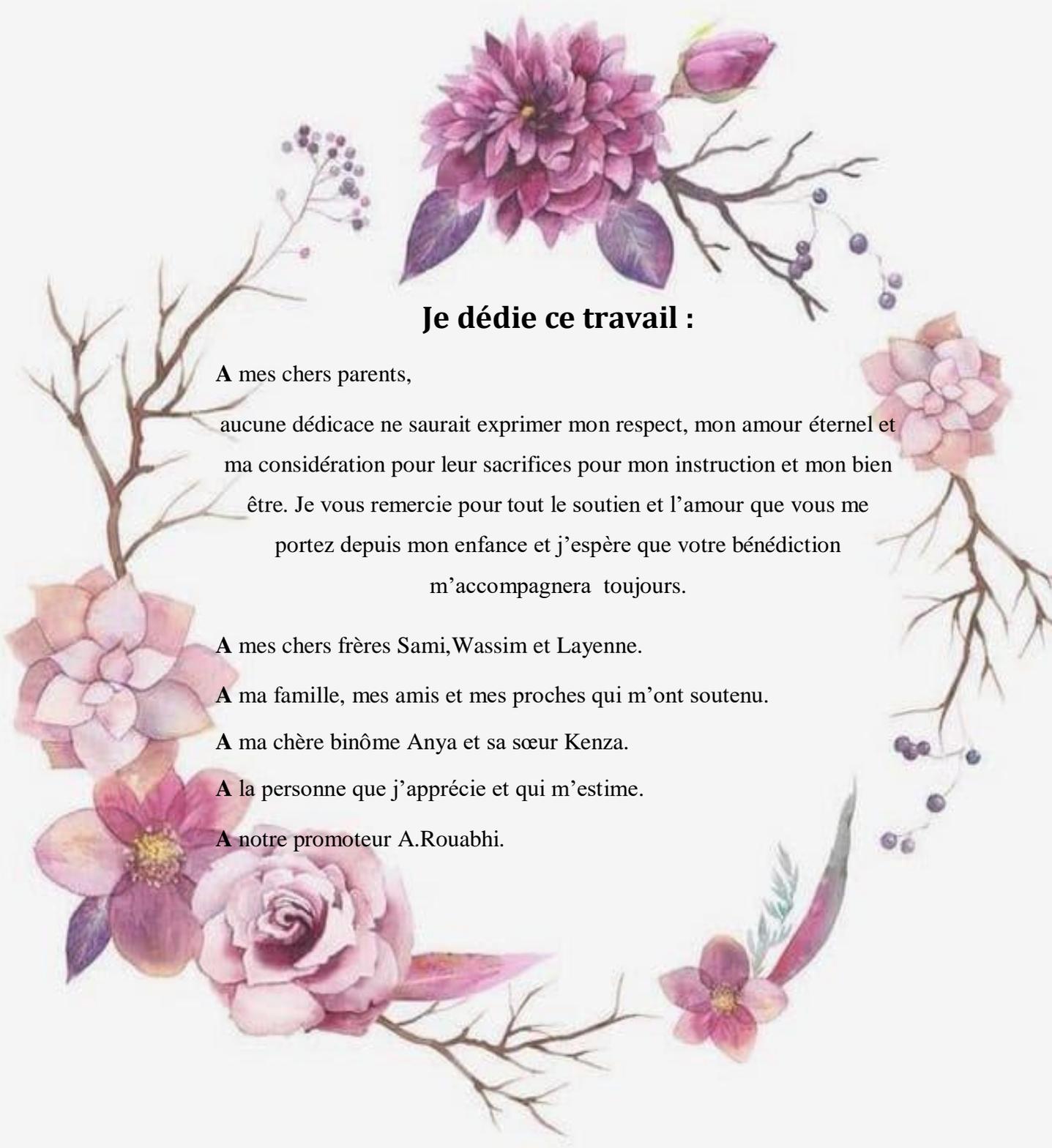
A toute ma famille.

A mes chères amies Zina, Lila et toutes mes amies.

A ma chère binôme Siham, qui m'a supporté tout le long de ce parcours.

Anya

Dédicaces



Je dédie ce travail :

A mes chers parents,

aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour leur sacrifices pour mon instruction et mon bien être. Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagnera toujours.

A mes chers frères Sami, Wassim et Layenne.

A ma famille, mes amis et mes proches qui m'ont soutenu.

A ma chère binôme Anya et sa sœur Kenza.

A la personne que j'apprécie et qui m'estime.

A notre promoteur A.Rouabhi.

SIHAM

SOMMAIRE

Introduction générale.....	1
Chapitre I : Formulation mathématique du problème plan d'élasticité	
I-1 Introduction.....	3
I-2 Equations aux dérivées partielles de la théorie d'élasticité.....	3
I-2-1 Equations aux dérivées partielles de l'équilibre.....	4
I-2-2 Equations géométriques.....	6
I-2-3 Equations physiques.....	8
I-3 La fonctionnelle de l'énergie potentielle totale.....	8
Chapitre II : discrétisation par la méthode des éléments finis	
II -1 Elément fini triangulaire.....	11
Chapitre III : Programmation et application numérique	
III -1 Introduction.....	20
III -2 Programme de calcul des matrices de rigidité des éléments fini	20
III -3 Programme de calcul effectuant l'assemblage des matrices des éléments finis	22
III-4 Programme de calcul des déplacements par la méthode de Gauss.....	23
III -5 Programme de calcul des contraintes.....	25
III -6 Application numérique	25
III -6-1 Maillage à huit triangles	26
III -6-1-1 Calcul des matrices de rigidité des éléments finis.....	27
III -6-1-2 Assemblage des matrices de rigidité des éléments finis.....	28
III -6-1-3 Calcul des déplacements.....	30
III -6-1-4 Calcul des contraintes.....	31
III -6-2 Maillage à douze triangles.....	33
III -6-2-1 Calcul des matrices de rigidité des éléments finis.....	34

III -6-2-2 Assemblage des matrices de rigidité des éléments finis.....	34
III -6-2-3 Calcul des déplacements.....	37
III -6-2-4 Calcul des contraintes.....	38
III -6-3 Maillage à seize triangles.....	39
III -6-3-1 Calcul des matrices de rigidité des éléments finis.....	40
III -6-3-2 Assemblage des matrices de rigidité des éléments finis.....	41
III -6-3-3 Calcul des déplacements.....	44
III -6-3-4 Calcul des contraintes.....	45
III -6-4 Maillage à vingt triangles.....	47
III -6-4-1 Calcul des matrices de rigidité des éléments finis.....	48
III -6-4-2 Assemblage des matrices de rigidité des éléments finis.....	49
III -6-4-3 Calcul des déplacements.....	53
III -6-4-4 Calcul des contraintes.....	54
III -7 Comparaison des résultats.....	55
Conclusion générale.....	58

Bibliographie

Annexe

Introduction générale

La résistance des matériaux en général, et l'élasticité en particulier, sont des théories indispensables pour l'analyse des structures pour assurer leurs résistances, rigidité, et stabilité. Ces structures peuvent être des structures de barres, de poutres, de plaques de coques, de différents massifs et corps solides déformables ou leurs combinaisons.

La résistance des matériaux ne permet d'obtenir que des sollicitations intégrales relatives aux sections à savoir, et de façon générale, les moments fléchissants, les efforts normaux et les efforts tranchants, ainsi que les déplacements, contraintes et de fonctions correspondantes. Une analyse détaillée des contraintes et de déformations de beaucoup de problèmes ne peut être effectuée qu'au moyen de la théorie de l'élasticité. Cette dernière est largement utilisée dans beaucoup de domaines à savoir le domaine de génie civil, génie mécanique, l'aéronautique, la construction des bateaux...etc.

La résolution analytique d'un problème plan d'élasticité est généralement assez difficile à réaliser manuellement. Elle requiert l'utilisation de méthodes de discrétisation comme la méthode des éléments finis et celle des différences finies, ainsi que des méthodes numériques de l'algèbre linéaire comme la méthode de Gauss et celle de Cholesky ou itératives comme la méthode de Jacobi ou de Gauss-Seidel. Ces méthodes permettent de résoudre, de façon générale, numériquement les systèmes des équations algébriques résultant de la discrétisation du problème mathématique continu. La discrétisation des problèmes mathématiques aboutit généralement à des systèmes d'équations algébriques d'ordre élevé ou très élevé qui nécessite l'élaboration d'algorithmes optimisés et de codes de calcul.

La méthode des différences finies s'utilise largement et essentiellement pour la résolution numérique des équations différentielles et des équations aux dérivés partielles, ainsi que des équations intégrales.

La méthode des éléments finis est une méthode variationnelle, basée sur la minimisation d'une certaine fonctionnelle. En mécanique des structures, cette fonctionnelle est obtenue sur la base de considérations physiques ou plus particulièrement énergétiques. Pour la méthode des déplacements, la fonctionnelle utilisée par la méthode des éléments finis est celle de Lagrange. Sa minimisation permet d'obtenir la matrice de rigidité.

Pour la méthode des forces ou des contraintes, la fonctionnelle utilisée par la méthode des éléments finis est celle de Castigliano. Sa maximisation permet d'obtenir ce que l'on appelle la matrice de souplesse.

En ce qui concerne les solutions analytiques, le minimum de la fonctionnelle de Lagrange et le maximum de la fonctionnelle de Castigliano se confondent. Il est intéressant de noter que les déplacements obtenus sur la base de la fonctionnelle de Lagrange pour le même maillage sont plus précis que ceux obtenus au moyen de la fonctionnelle de Castigliano et tout à fait l'inverse pour les contraintes.

Dans certains cas il est nécessaire d'utiliser des fonctionnelles mixtes comme celles de Reissner et Washidzu qui utilisent des combinaisons des fonctions inconnues de contraintes, de déformations et de déplacements, ou également des fonctionnelles hybrides.

La précision de la solution numérique obtenue par la méthode des éléments finis dépend essentiellement du maillage effectué. Plus le maillage est raffiné plus la précision des calculs augmente.

Les éléments finis les plus couramment utilisés pour résoudre le problème plan d'élasticité sont l'élément triangulaire et celui rectangulaire.

Si l'élément rectangulaire s'utilise habituellement pour discrétiser des géométries régulières, l'élément triangulaire s'utilise de préférence ou parfois nécessairement pour réaliser le maillage des géométries complexes à contour irrégulier.

Dans notre travail, nous allons analyser toutes les étapes nécessaires de résolution d'un problème plan d'élasticité, à savoir, la formulation mathématique opérationnelle et celle variationnelle, la discrétisation par la méthode des éléments finis. Formulation des matrices de rigidité des éléments finis, et leur assemblage, techniques d'introduction des conditions aux limites et l'élaboration de programmes Mathcad pour effectuer les calculs nécessaires. Une application numérique concernant la détermination de l'état de contrainte et de déformation d'une poutre-cloison est présentée pour illustrer la réalisation de toutes ces étapes citées précédemment.

I-1 Introduction:

En raison de la complexité des équations aux dérivées partielles de la théorie d'élasticité, il est très difficile de façon générale d'aboutir à des solutions analytiques exactes pour des problèmes tridimensionnels. Ainsi, la majorité des solutions analytiques de la théorie d'élasticité publiées dans la littérature concernent les problèmes unidimensionnel et bidimensionnel, et ceux axisymétriques. Les figures qui suivent illustrent quelques exemples des problèmes plans d'élasticité :

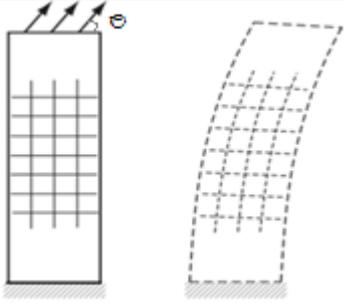
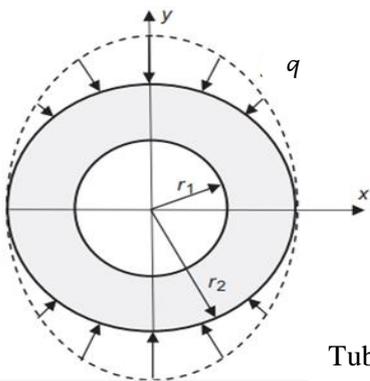
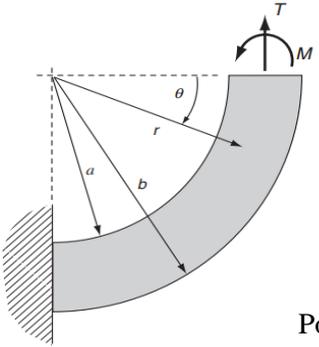
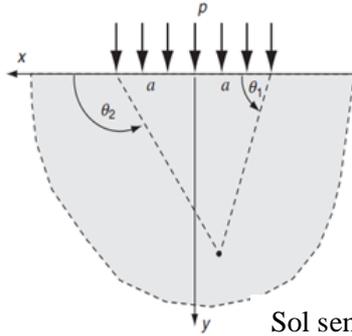
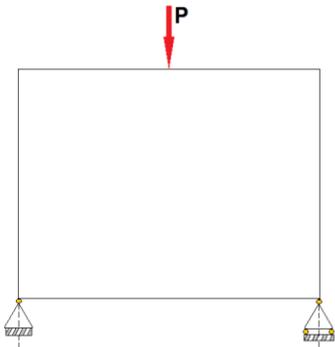
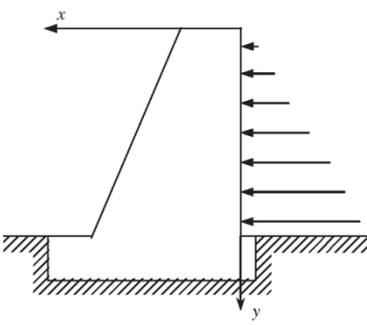
Problème de contrainte plane	Problème de déformation plane
 <p>Voile</p>	 <p>Tube</p>
 <p>Poutre</p>	 <p>Sol semi-infinie</p>
 <p>Poutre-cloison</p>	 <p>Barrage</p>

Tableau I-1 : exemples des problèmes plans l'élasticité.

I-2 Equations aux dérivées partielles de la théorie d'élasticité :

La solution d'un problème selon la théorie d'élasticité consiste à déterminer les composantes de contraintes satisfaisant les équations différentielles de l'équilibre, les composantes de déformations satisfaisant les conditions de compatibilité. Tout cela est évidemment mathématiquement très complexe.

I-2-1 Equations aux dérivées partielles de l'équilibre :

Pour le cas général tridimensionnel, nous considérons l'équilibre des forces qui agissent sur un élément infinitésimal dans la direction x seulement. Les autres directions y et z peuvent être traitées de la même façon.

Etudiant l'équilibre d'un parallélépipède rectangle de longueurs dx, dy, dz représenté dans la (figure I-1), l'ensemble des contraintes agissant sur cet élément sont représentées dans la même figure.

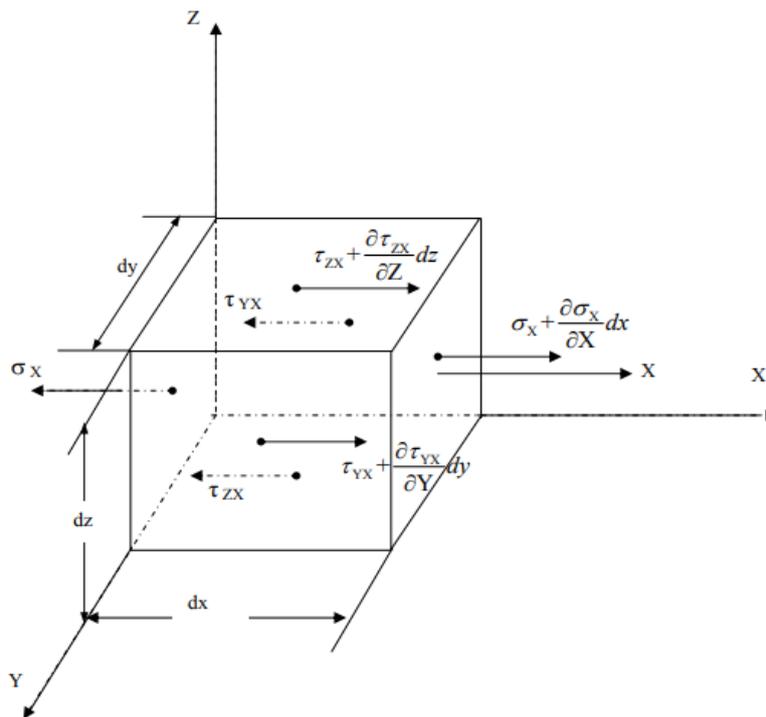


Figure I-1 : composantes du tenseur des contraintes

Soit un élément infiniment petit de cotés dx, dy et dz , enlevé d'un corps solide déformable soumis à des charges extérieures. Cet élément est soumis à un état de contraintes imposé par les composantes de ce qu'on appelle tenseur des contraintes comme le montre la figure I-1 :

Considérons donc l'équilibre de cet élément, selon la loi de Newton, la somme de toutes les forces agissant sur l'élément dans la direction x doit être égale à zéro :

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} \cdot dx \right) \cdot dy \cdot dz - \sigma_x \cdot dz \cdot dy + \left(\tau_{yx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} \cdot dy \right) \cdot dx \cdot dz - \tau_{yx} \cdot dz \cdot dx + \\ & \left(\tau_{zx} + \frac{d\tau_{zx}}{dz} \cdot dz \right) \cdot dx \cdot dy - \tau_{zx} \cdot dx \cdot dy + X \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0 \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Avec :

X : composante de la force volumique dans la direction x .

Après avoir simplifiée l'expression (1.2.1) précédente nous avons obtenu ;

$$\left(\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} + \frac{d\tau_{zx}}{dz} + X \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0 \quad (1.2.2)$$

Ce qui nous donne finalement

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{xy}}{dy} + \frac{d\tau_{zx}}{dz} + X = 0 \quad (1.2.3)$$

Par analogie, nous pourrions obtenir les autres équations selon l'axe des y et z :

$$\frac{d\tau_{xy}}{dx} + \frac{d\sigma_{yy}}{dy} + \frac{d\tau_{yz}}{dz} + Y = 0 \quad (1.2.4)$$

$$\frac{d\tau_{zx}}{dx} + \frac{d\sigma_{zy}}{dy} + \frac{d\tau_{zz}}{dz} + Z = 0 \quad (1.2.5)$$

Avec :

Y et Z sont les composantes de la force volumique respectivement dans les directions y et z .

Pour assurer l'équilibre, il faut que ces trois équations aux dérivées partielles soient satisfaites en tout point du corps élastique considéré.

Pour obtenir les équations d'équilibre du problème plan d'élasticité, il est nécessaire d'annuler tout les membres relatifs à l'axe z dans les équations aux dérivées partielles précédentes, ainsi nous aurons :

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{xy}}{dy} + x = 0 \quad (1.2.6)$$

$$\frac{d\tau_{xy}}{dx} + \frac{d\sigma_y}{dy} + y = 0$$

Ces équations d'équilibre montrent clairement que le problème plan d'élasticité est un problème hyperstatique.

I-2-2 Equations géométriques :

Comme selon le principe des travaux réciproques $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, alors les équations d'équilibres du problème plan d'élasticité contiennent trois fonctions inconnues à savoir $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, et $\tau_{xy}(x, y)$, et par conséquent le problème plan d'élasticité, que ce soit contrainte plane ou déformation plane est un problème hyperstatique, c'est-à-dire qu'il y'a manqué d'équations pour résoudre le problème. Dans ces conditions pour compléter ce manque nous avons trouvés dans l'obligation d'établir d'autres équations différentielles où aux dérivées partielles basées sur les déformations du solide déformable étudié. Pour ce faire, nous allons établir dans ce qui suit des équations exprimant des relations entre les déplacements et les déformations. Ces relations s'appellent équations géométriques.

Concédons maintenant un élément rectangulaire ABCD, Figure I-2, infiniment petit (différentiel) d'une plaque mince déformable soumise à une charge extérieure agissant dans son plan associé à un repère de coordonnées (O, x, y) . Cet élément avant et après déformation est représenté à la figure suivante :

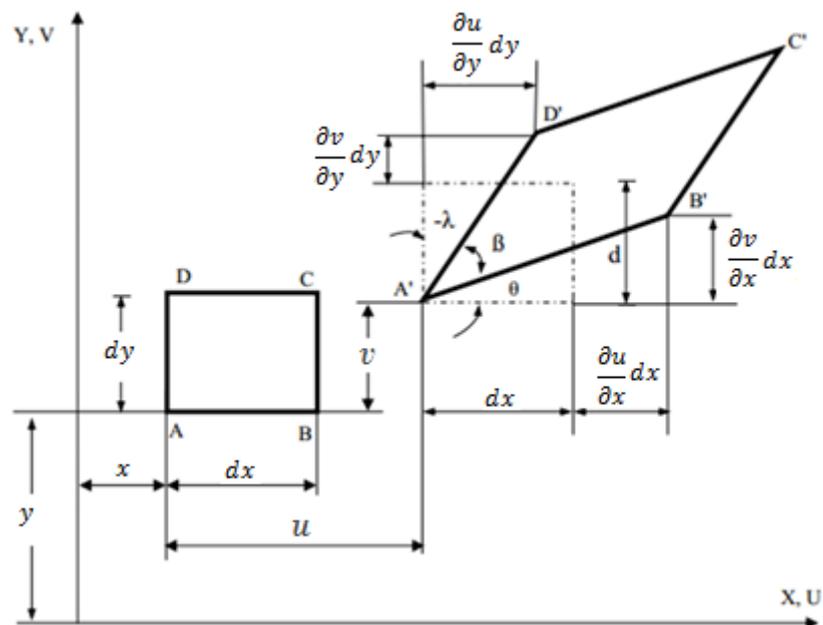


Figure I-2 : élément différentiel plan d'un corps déformable avant et après déformation.

Soit A le point de référence de coordonnées x, y . Les composantes du vecteur des déplacements dans le plan (x, y) sont $u(x, y)$ et $v(x, y)$. Les déplacements correspondant au point B sont

$u(x + dx, y)$ et $v(x + dx, y)$. Par analogie nous déduisons les déplacements pour les autres points caractéristiques du rectangle.

Conformément à la théorie des petites déformations

$$u(x + dx, y) \approx u(x, y) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx .$$

Par analogie nous écrivons l'expression relative à l'autre fonction des déplacements dans la direction des y

$$v(x + dx, y) \approx v(x, y) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) dy .$$

Une déformation normale dans une direction n est définie comme un allongement d'une longueur unitaire d'une fibre orientée dans la direction n . par convention les déformations normales sont supposées positives pour les allongements et négatives pour les raccourcissements.

On se servant de la Figure I-2, il est possible d'établir l'expression de la déformation longitudinale dans le sens x sous la forme suivante :

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB}$$

Avec :

$$A'B' = \sqrt{\left(dy + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} dx\right)^2} = \sqrt{1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} dx \approx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$$

Conformément à la théorie des petites déformations où la théorie linéaire d'élasticité, nous négligeons les termes d'ordre supérieur. Ainsi nous pouvons confondre AB avec dx et par suite la déformation normale dans la direction x sera:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.2.7)$$

De façon analogue nous obtenons la déformation longitudinale selon y et celle de cisaillement :

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.2.8)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.2.9)$$

I-2-3 Equations physiques :

Les équations d'équilibre et géométriques qui sont au nombre de cinq équations au dérivées partielles contiennent huit fonctions inconnues. Ce manque d'équations peut être complété en rajoutant trois équations basées sur des considérations physiques qui représentent dans le cas de la théorie de l'élasticité linéaire ce qu'on appelle la loi de Hooke.

La théorie d'élasticité comprend deux types de problèmes plans à savoir, la déformation plane et la contrainte plane, pour lesquelles les équations d'équilibre et géométriques sont les mêmes, tant dit que les équations physiques ou matérielles se différent.

En ce qui concerne le problème de la déformation plane ces équations ont la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{pmatrix} = \frac{E}{[(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)]} \begin{pmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 2\nu/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{pmatrix}$$

Et pour celui de la contrainte plane, les équations correspondantes s'écrivent sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{pmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{pmatrix}$$

L'analyse des équations physiques des problèmes de la déformation plane et celui de la contrainte plane, montre que ce sont les mêmes à une constante près.

I-3 Fonctionnelle de l'énergie potentielle totale :

Le problème plan d'élasticité considère deux cas particuliers des états de contrainte – la déformation plane et l'état plan des contraintes. Dans les deux cas tous les paramètres de l'état plan des déformations et de contraintes dépendent seulement de deux coordonnées, c'est-à-dire, on considère un problème bidimensionnel. Comme les principales relations de la déformation plane et de l'état plan de contraintes ne se diffèrent que par des constantes élastiques, la résolution du problème plan d'élasticité par la méthode des éléments finis sera basée sur l'état plan des contraintes et par suite la fonctionnelle pour cet état aura la forme suivante :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) d\Omega - \int_L (p_x u + p_y v) dL \quad (1.3.1)$$

Ou :

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – Contraintes normales et tangentielle ;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ – Déformations linéaires et angulaire ;

u, v – Déplacements linéaires des points de la surface moyenne de la plaque le long des axes x et y respectivement ;

p_x, p_y – Composantes du vecteur de la charge extérieure dans les directions des axes x et y respectivement ;

$d\Omega, dL$ – Éléments infiniment petits d'un domaine bidimensionnel et un contour.

Pour le problème plan de la théorie d'élasticité les vecteurs des déplacements et de la charge extérieure contiennent deux composantes chacun, tandis que les vecteurs des déformations et des contraintes contiennent trois composantes chacun :

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}; \{p\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix}; \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}; \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.3.2)$$

Pour un matériau isotrope les relations principales de l'état plan des contraintes peuvent être écrites sous forme matricielle comme suit :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.3.3)$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (1.3.4)$$

Les relations matricielles (3.3) et (3.4) peuvent être écrites de façon compacte sous la forme suivante :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}; \{\varepsilon\} = [B]\{q\} \quad (1.3.5)$$

Ou :

[D] – Matrice d'élasticité ;

[B] – Matrice des opérateurs différentiels.

Alors la fonctionnelle de l'énergie potentielle totale de déformation peut être maintenant écrite sous la forme compacte suivante :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} d\Omega - \int_L \{P\}^T \{q\} dL \quad (1.3.6)$$

Les expressions (1.3.6) servent de base pour l'obtention de la matrice de rigidité des éléments finis des corps bidimensionnels à l'état plan de contrainte.

II -2 Élément fini triangulaire [14] :

Pour que la fonctionnelle de l'énergie potentielle totale puisse exister, les fonctions d'approximation des déplacements doivent contenir des membres du premier ordre au moins. Un polynôme linéaire à deux variables comprend trois membres. Ce nombre se trouve bien en conformité avec le nombre de sommets de l'élément fini triangulaire (Figure II-1).

Considérons une loi linéaire de répartition des déplacements le long des axes de coordonnées x et y et prenons des fonctions d'approximation des déplacements sous forme de polynômes linéaires :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x, y) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

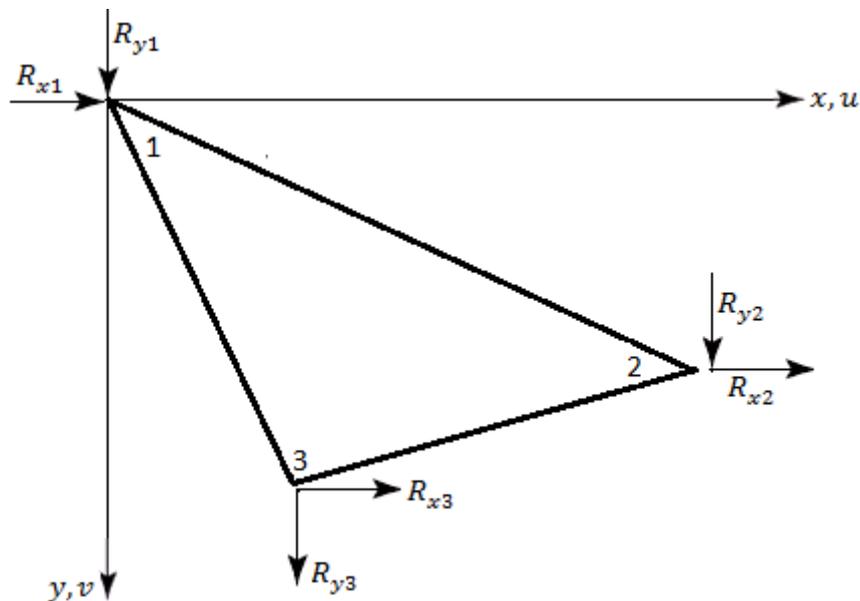


Figure II-1

Les fonctions d'approximation contiennent six coefficients indépendants. Par suite il faut avoir en chaque nœud de l'élément fini triangulaire deux degrés de liberté. Ces degrés de liberté ont un sens physique bien précis : déplacements linéaires des nœuds dans les directions des axes x et y . Ainsi, l'élément fini aura six degrés de liberté. Le vecteur des déplacements nodaux doit avoir six composantes qui correspondent aux six réactions des liaisons supplémentaires dans les directions des degrés de liberté (Figure II-1) :

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}; \quad \{R\} = \begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{x2} \\ R_{y2} \\ R_{x3} \\ R_{y3} \end{Bmatrix}. \quad (2.1.2)$$

La matrice de rigidité de l'élément fini contiendra les coefficients des relations entre le vecteur des réactions nodales et le vecteur des déplacements nodaux :

$$\{R\} = [k]\{q\}. \quad (2.1.3)$$

Par conséquent, cette dernière sera d'ordre six.

Sans difficulté, les déplacements nodaux sont liés avec les coefficients constants des fonctions d'approximation (2.1.1) par des équations linéairement indépendants. En effet, si nous portons dans l'expression (2.1.1) les coordonnées x_1, y_1 du premier nœud [alors $u(x, y) = u_1$], ensuite faisons la même chose pour le second nœud et les autres, alors comme résultat un système de trois équations algébriques linéaires par rapport aux coefficients constants α_i ($i = 1, 2, 3$);

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix},$$

Ou sous forme compacte :

$$\{q\} = [C]\{\alpha\}. \quad (2.1.4)$$

En résolvant le système (2.1.3), nous obtenons les coefficients constants α_i ($i = 1, 2, 3$).

$$\{\alpha\} = [C]^{-1}\{q\}. \quad (2.1.5)$$

L'opération (2.1.5) permet d'exprimer les fonctions d'approximation (2.1.1) sous forme facilitant l'obtention des coefficients de rigidité

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^3 q_i f_i ;$$

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^3 q_i f_i . \quad (2.1.6)$$

Ou :

$q_i (i = 1,2,3,4,5,6)$ – Degrés de liberté de l'élément fini ;

$f_i (i = 1,2,3,4,5,6)$ – Fonctions de forme ;

Le système des équations algébriques linéaires (2.1.3) par rapport aux coefficients $\alpha_i (i = 1,2,3)$ montre, que les déplacements $u(x,y)$ le long de l'axe x ne dépendent que des déplacements horizontaux u_1, u_2, u_3 . En résolvant le système des équations (2.1.3) par la méthode de Cramer nous obtenons :

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & x_1 & y_1 \\ u_2 & x_2 & y_2 \\ u_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_1 & y_1 \\ 1 & u_2 & y_2 \\ 1 & u_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad \alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & u_1 \\ 1 & x_2 & u_2 \\ 1 & x_3 & u_3 \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad (2.1.7)$$

et

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Ou :

Δ – Aire double de celle du triangle 1 – 2 – 3; et les parenthèses droites désignent un déterminant.

En portant les coefficients obtenus dans l'expression (2.1.1), calculant les déterminants et regroupant les coefficients des déplacements nodaux, nous obtenons, comme approximation des déplacements horizontaux $u(x,y)$, l'expression suivante :

$$u(x,y) = (a_1 + b_1x + c_1y)u_1 + (a_2 + b_2x + c_2y)u_2 + (a_3 + b_3x + c_3y)u_3 \quad (2.1.8)$$

Ou :

$$a_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}; \quad b_1 = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix}; \quad c_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix}$$

Les valeurs des autres coefficients $a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ s'obtiennent par une simple permutation circulaire des indices des nœuds :

$$a_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}; \quad b_2 = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & y_3 \\ 1 & y_1 \end{vmatrix}; \quad c_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix};$$

$$a_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}; \quad b_3 = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix}; \quad c_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

La fonction $v(x,y)$ dépend des déplacements v_1, v_2, v_3 de façon analogue, ce qui résulte du caractère d'approximation par les fonctions (2.1.1) :

$$v(x,y) = (a_1 + b_1x + c_1y)v_1 + (a_2 + b_2x + c_2y)v_2 + (a_3 + b_3x + c_3y)v_3 \quad (2.1.9)$$

D'où nous obtenons les expressions des trois fonctions de formes de l'élément fini :

$$f_1(x, y) = a_1 + b_1x + c_1y$$

$$f_2(x, y) = a_2 + b_2x + c_2y$$

$$f_3(x, y) = a_3 + b_3x + c_3y$$

Les fenêtres de Mathcad présentées ci-dessous illustrent les calculs effectués pour vérifier les propriétés des fonctions de formes ;

Première propriété : Chaque fonction de forme est égale l'unité en un nœud et à zéro aux autres

Mathcad - [vérification de la première propriété.xmcd]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

100%

$x_1 := 0$ $y_1 := 0$
 $x_2 := 0$ $y_2 := -\frac{1}{2}$
 $x_3 := \frac{1}{2}$ $y_3 := -\frac{1}{2}$

$\Delta := \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

$a_1 := \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ $b_1 := -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix}$ $c_1 := \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix}$

$a_2 := \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$ $b_2 := -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & y_3 \\ 1 & y_1 \end{vmatrix}$ $c_2 := \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}$

$a_3 := \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ $b_3 := -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix}$ $c_3 := \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}$

$F_1(x,y) := a_1 + b_1 \cdot x + c_1 \cdot y$ $F_2(x,y) := a_2 + b_2 \cdot x + c_2 \cdot y$ $F_3(x,y) := a_3 + b_3 \cdot x + c_3 \cdot y$

$F_1(0,0) \rightarrow 1$ $F_2\left(0, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow 1$ $F_3\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow 1$

$F_2(0,0) \rightarrow 0$ $F_1\left(0, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow 0$ $F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow 0$

$F_3(0,0) \rightarrow 0$ $F_3\left(0, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow 0$ $F_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow 0$

Press F1 for help. AUTO NUM Page 1

Deuxième propriété : la somme de toutes les fonctions de forme de l'élément fini doit être égale à l'unité

Mathcad - [vérification de la deuxième propriété.xmcd]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

100%

$x_1 := 0$ $y_1 := 0$
 $x_2 := 0$ $y_2 := -\frac{1}{2}$
 $x_3 := \frac{1}{2}$ $y_3 := -\frac{1}{2}$

$\Delta := \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

$a_1 := \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ $b_1 := -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix}$ $c_1 := \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix}$
 $a_2 := \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$ $b_2 := -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & y_3 \\ 1 & y_1 \end{vmatrix}$ $c_2 := \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}$
 $a_3 := \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ $b_3 := -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix}$ $c_3 := \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}$

$F_1(x,y) := a_1 + b_1 \cdot x + c_1 \cdot y$ $F_2(x,y) := a_2 + b_2 \cdot x + c_2 \cdot y$ $F_3(x,y) := a_3 + b_3 \cdot x + c_3 \cdot y$

$F_1(x,y) \rightarrow 2 \cdot y + 1$ $F_2(x,y) \rightarrow -2 \cdot x - 2 \cdot y$ $F_3(x,y) \rightarrow 2 \cdot x$

$\sum F(x,y) \Rightarrow 2 \cdot x + -2 \cdot x - 2 \cdot y + 2 \cdot y + 1 \rightarrow 1$

L'obtention des fonctions d'approximation sous la forme (2.1.6) représente l'étape la plus importante de déduction de la matrice de rigidité résolution du problème entier de l'état de contrainte-déformation d'une plaque d'un matériau isotrope en état plan de contraintes. Il est possible ensuite d'obtenir les coefficients de rigidité en utilisant la relation suivante [14] :

$$k_{ij} = h \int_0^a \int_0^b ([D] \{\varepsilon\}_i)^T \{\varepsilon\}_j dx dy. \quad (2.1.10)$$

Ou :

h –Épaisseur de la plaque ;

$\{\varepsilon\}_i (i = 1,2,3,4,5,6)$ – Vecteur de déformation (1.3.4) de l'élément fini, quand le déplacement nodal de numéro i est égal à l'unité, et tous les autres degrés de liberté sont nuls ;

$\{\varepsilon\}_j (j = 1,2,3,4,5,6)$ – Vecteur de déformation (1.3.4) de l'élément fini, quand le déplacement nodal de numéro j est égal à l'unité, et tous les autres degrés de liberté sont nuls.

Les éléments de la matrice de rigidité se déterminent par une application formelle de la formule (2.1.10). Déterminons par exemple l'expression de la réaction, produite au nœud 1 dans la direction de l'axe x due à un déplacement unitaire du nœud 2 dans la direction de l'axe y , c.à.d. de l'élément ($k_{14} = k_{u_1 u_2}$). Par conséquent, en utilisant la formule (2.1.10) nous posons $i = 1, j = 4$.

Au début nous déterminons le vecteur des réactions $\{\varepsilon\}_i = \{\varepsilon\}_{u_1}$, qui correspond à un état de déformation dans le domaine de l'élément fini dû à un déplacement unitaire u_1 , quand tous les autres déplacements sont nuls. Dans ce cas le vecteur des fonctions d'approximation (2.1.6) s'obtient de (2.1.8) pour $u_1 = 1, u_2 = u_3 = 0$ et de (2.1.9) pour $v_1 = v_2 = v_3 = 0$:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (a_1 + b_1 x + c_1 y); \\ v(x, y) &= 0, \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Ou sous forme développée :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{\Delta} (x_2 y_3 - x_3 y_2) - \frac{1}{\Delta} (y_3 - y_2) x + \frac{1}{\Delta} (x_3 - x_2) y \\ v(x, y) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Alors le vecteur des déformations $\{\varepsilon\}_1$, Se détermine conformément à l'expression (1.3.4) :

$$\{\varepsilon\}_1 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{\Delta} (y_3 - y_2) \\ 0 \\ \frac{1}{\Delta} (x_3 - x_2) \end{Bmatrix}. \quad (2.1.13)$$

De la même façon nous déterminons le vecteur des déformations $\{\varepsilon\}_4 = \{\varepsilon\}_{v_2}$, qui correspond à un état de déformation dans le domaine de l'élément fini dû à un déplacement unitaire v_2 , quand tous les autres déplacements nodaux sont nuls :

$$\{\varepsilon\}_4 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\Delta}(x_3 - x_1) \\ \frac{1}{\Delta}(y_3 - y_1) \end{Bmatrix}. \quad (2.1.14)$$

En portant les vecteurs (2.1.8) et (2.1.9) dans la formule (2.1.10), nous obtenons finalement :

$$k_{14} = h \iint_{\Omega} \left\{ -\frac{\nu E}{1 - \nu^2} \frac{1}{\Delta} (y_3 - y_2) \left[-\frac{1}{\Delta} (x_3 - x_1) \right] + \frac{E}{2(1 + \nu)} \left[\frac{1}{\Delta} (x_3 - x_2) \frac{1}{\Delta} (y_3 - y_1) \right] \right\} d\Omega,$$

Ou :

$d\Omega$ – Élément infiniment petit de l'aire du triangle. Après quelques transformations nécessaires, en tenant compte, que :

$$\iint_{\Omega} d\Omega = \frac{\Delta}{2} \quad \text{et} \quad x_1 = y_1 = 0.$$

Nous obtenons :

$$k_{14} = \frac{h}{2\Delta} \left[\frac{\nu E}{1 - \nu^2} (y_3 - y_2)x_3 + G(x_3 - x_2)y_2 \right].$$

De façon analogue s'obtiennent tous les autres éléments restant de la matrice de rigidité de l'élément triangulaire :

$$k_{11} = \frac{h}{2\Delta} \left[\frac{E}{1 - \nu^2} (y_2 - y_3)^2 + G(x_3 - x_2)^2 \right];$$

$$k_{12} = \frac{h}{2\Delta} \left[\left(\frac{\nu E}{1 - \nu^2} + G \right) (x_3 - x_2)(y_2 - y_3) \right];$$

$$k_{13} = \frac{h}{2\Delta} \left[\frac{\nu E}{1 - \nu^2} (y_3 - y_2)y_3 - G(x_3 - x_2)x_3 \right];$$

$$k_{15} = \frac{h}{2\Delta} \left[\frac{\nu E}{1 - \nu^2} (y_3 - y_2)y_2 + G(x_3 - x_2)x_2 \right];$$

$$k_{16} = \frac{h}{2\Delta} \left[\frac{\nu E}{1 - \nu^2} (y_2 - y_3)x_2 + G(x_3 - x_2)y_2 \right];$$

$$k_{22} = \frac{h}{2\Delta} \left[\frac{E}{1 - \nu^2} (x_3 - x_2)^2 + G(y_3 - y_2)^2 \right];$$

$$k_{23} = \frac{h}{2\Delta} \left[\frac{\nu E}{1-\nu^2} (x_3 - x_2)y_3 + G(y_2 - y_3)x_3 \right];$$

$$k_{24} = \frac{h}{2\Delta} \left[\frac{E}{1-\nu^2} (x_2 - x_3)x_3 + G(y_2 - y_3)y_3 \right];$$

$$k_{25} = \frac{h}{2\Delta} \left[\frac{E}{1-\nu^2} (x_2 - x_3)y_2 + G(y_2 - y_3)x_2 \right];$$

$$k_{26} = \frac{h}{2\Delta} \left[\frac{E}{1-\nu^2} (x_2 - x_3)x_2 + G(y_2 - y_3)y_2 \right];$$

$$k_{33} = \frac{h}{2\Delta} \left[\frac{E}{1-\nu^2} y_3^2 + Gx_3^2 \right];$$

$$k_{34} = \frac{h}{2\Delta} \left[\left(\frac{\nu E}{1-\nu^2} + G \right) (-x_3y_3) \right];$$

$$k_{35} = \frac{h}{2\Delta} \left[-\frac{E}{1-\nu^2} y_2y_3 - Gx_2x_3 \right];$$

$$k_{36} = \frac{h}{2\Delta} \left[-\frac{\nu E}{1-\nu^2} x_2y_3 + Gx_3y_2 \right];$$

$$k_{44} = \frac{h}{2\Delta} \left[\frac{E}{1-\nu^2} x_3^2 - Gy_3^2 \right];$$

$$k_{45} = \frac{h}{2\Delta} \left[\frac{\nu E}{1-\nu^2} x_3y_2 + Gx_2y_3 \right];$$

$$k_{46} = \frac{h}{2\Delta} \left[-\frac{E}{1-\nu^2} x_2x_3 - Gy_2y_3 \right];$$

$$k_{55} = \frac{h}{2\Delta} \left[-\frac{E}{1-\nu^2} y_2^2 + Gx_2^2 \right];$$

$$k_{56} = \frac{h}{2\Delta} \left[\left(\frac{\nu E}{1-\nu^2} + G \right) (-x_2y_2) \right];$$

$$k_{66} = \frac{h}{2\Delta} \left[-\frac{E}{1-\nu^2} x_2^2 + Gy_2^2 \right].$$

Et donc :

$$\begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{x2} \\ R_{y2} \\ R_{x3} \\ R_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ \text{Symétrique} & & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}. \quad (2.1.15)$$

Après avoir déterminé les déplacements nodaux, il est possible de calculer les contraintes dans le domaine de l'élément fini. Cependant, il ne faut pas perdre de vue, que les premières dérivées des fonctions d'approximation sont constantes. C'est pour cela que les contraintes dans le domaine de l'élément fini sont également constantes. D'habitude elles sont calculées relativement au centre de gravité de l'élément.

Afin d'utiliser la formule (2.1.12), les fonctions d'approximation (2.1.1) et (2.1.2) sont écrites sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a_1 + b_1x + c_1y & 0 & a_2 + b_2x + c_2y & 0 & a_3 + b_3x + c_3y & 0 \\ 0 & a_1 + b_1x + c_1y & 0 & a_2 + b_2x + c_2y & 0 & a_3 + b_3x + c_3y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (2.1.16)$$

En portant les expressions (1.3.3), (1.3.4), (2.1.16) dans la formule (2.1.12), nous obtenons finalement :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)\Delta} \begin{bmatrix} (y_2-y_3) & \nu(x_3-x_2) & (y_3-y_1) & \nu(x_1-x_3) & (y_1-y_2) & \nu(x_2-x_1) \\ \nu(y_2-y_3) & (x_3-x_2) & \nu(y_3-y_1) & (x_1-x_3) & \nu(y_1-y_2) & (x_2-x_1) \\ \frac{1-\nu}{2}(x_3-x_2) & -\frac{1-\nu}{2}(y_3-y_2) & -\frac{1-\nu}{2}(x_3-x_1) & \frac{1-\nu}{2}(y_3-y_1) & \frac{1-\nu}{2}(x_2-x_1) & -\frac{1-\nu}{2}(y_3-y_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (2.1.17)$$

III -1 Introduction :

Comme nous avons mentionné précédemment la discrétisation d'un problème de la mécanique des structures pourrait engendrer des matrices d'ordre élevé ou très élevé qui nécessitent l'utilisation de logiciels ou élaboration de programmes de calcul. Dans ce chapitre, nous présentons quelques programmes Mathcad permettant d'automatiser les calculs des étapes principales de résolution du problème à savoir, les codes de calcul des matrices de rigidité des éléments finis, d'assemblage et de résolution des systèmes d'équations algébriques obtenus.

III-2 Programme de calcul des matrices de rigidité des éléments finis:

Le programme suivant, préparé au moyen du logiciel de calcul symbolique Mathcad, sert à calculer la matrice de rigidité de chaque élément fini. En appelant la fonction-programme, il est nécessaire de lui transmettre l'ensemble des paramètres physiques et géométriques comme le montre la fenêtre ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 k(x1,y1,x2,y2,x3,y3) := & \begin{cases} E \leftarrow 1 \\ h \leftarrow 1 \\ \nu \leftarrow \frac{1}{6} \\ \Delta \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & x1 & y1 \\ 1 & x2 & y2 \\ 1 & x3 & y3 \end{pmatrix} \\ k_{1,1} \leftarrow \frac{h}{2 \cdot \Delta} \left[\frac{E}{1 - \nu^2} (y2 - y3)^2 + \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} (x3 - x2)^2 \right] \\ k_{1,2} \leftarrow \frac{h}{2 \cdot \Delta} \left[\frac{\nu \cdot E}{1 - \nu^2} + \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \right] \cdot (y2 - y3) \cdot (x3 - x2) \\ k_{1,3} \leftarrow \frac{h}{2 \cdot \Delta} \left[\frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (y2 - y3) \cdot y3 - \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot (x3 - x2) \cdot x3 \right] \\ k_{1,4} \leftarrow \frac{h}{2 \cdot \Delta} \left[\frac{\nu \cdot E}{1 - \nu^2} \cdot (y3 - y2) \cdot x3 + \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot (x3 - x2) \cdot y2 \right] \\ k_{1,5} \leftarrow \frac{h}{2 \cdot \Delta} \left[\frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (y3 - y2) \cdot y2 + \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot (x3 - x2) \cdot x2 \right] \\ k_{1,6} \leftarrow \frac{h}{2 \cdot \Delta} \left[\frac{\nu \cdot E}{1 - \nu^2} \cdot (y2 - y3) \cdot x2 - \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot (x3 - x2) \cdot y2 \right] \\ k_{2,2} \leftarrow \frac{h}{2 \cdot \Delta} \left[\frac{E}{1 - \nu^2} (x3 - x2)^2 + \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} (y2 - y3)^2 \right] \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$k_{2,3} \leftarrow \frac{h}{2 \cdot \Delta} \left[\frac{\nu \cdot E}{1 - \nu^2} \cdot (x_3 - x_2) \cdot y_3 + \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot (y_3 - y_2) \cdot x_3 \right]$$

$$k_{2,4} \leftarrow \frac{h}{2 \cdot \Delta} \left[\frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (x_2 - x_3) \cdot x_3 - \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot (y_3 - y_2) \cdot y_3 \right]$$

$$k_{2,5} \leftarrow \frac{h}{2 \cdot \Delta} \left[\frac{\nu \cdot E}{1 - \nu^2} \cdot (x_2 - x_3) \cdot y_2 - \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot (y_3 - y_2) \cdot x_2 \right]$$

$$k_{2,6} \leftarrow \frac{h}{2 \cdot \Delta} \left[\frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (x_3 - x_2) \cdot x_2 + \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot (y_3 - y_2) \cdot y_2 \right]$$

$$k_{3,3} \leftarrow \frac{h}{2 \cdot \Delta} \left[\frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (y_3)^2 + \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot (x_3)^2 \right]$$

$$k_{3,4} \leftarrow \frac{h}{2 \cdot \Delta} \left[\left[\frac{\nu \cdot E}{1 - \nu^2} + \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \right] \cdot (-y_3 \cdot x_3) \right]$$

$$k_{3,5} \leftarrow \frac{h}{2 \cdot \Delta} \left[\frac{-E}{1 - \nu^2} \cdot y_3 \cdot y_2 - \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot x_3 \cdot x_2 \right]$$

$$k_{3,6} \leftarrow \frac{h}{2 \cdot \Delta} \left[\frac{\nu \cdot E}{1 - \nu^2} \cdot y_3 \cdot x_2 + \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot x_3 \cdot y_2 \right]$$

$$k_{4,4} \leftarrow \frac{h}{2 \cdot \Delta} \left[\frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (x_3)^2 + \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot (y_3)^2 \right]$$

$$k_{4,5} \leftarrow \frac{h}{2 \cdot \Delta} \left[\frac{\nu \cdot E}{1 - \nu^2} \cdot x_3 \cdot y_2 + \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot y_3 \cdot x_2 \right]$$

$$k_{4,6} \leftarrow \frac{h}{2 \cdot \Delta} \left[\frac{-E}{1 - \nu^2} \cdot x_3 \cdot x_2 - \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot y_3 \cdot y_2 \right]$$

$$k_{5,5} \leftarrow \frac{h}{2 \cdot \Delta} \left[\frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (y_2)^2 + \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot (x_2)^2 \right]$$

$$k_{5,6} \leftarrow \frac{h}{2 \cdot \Delta} \left[\left[\frac{\nu \cdot E}{1 - \nu^2} + \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \right] \cdot (-y_2 \cdot x_2) \right]$$

$$k_{6,6} \leftarrow \frac{h}{2 \cdot \Delta} \left[\frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (x_2)^2 + \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot (y_2)^2 \right]$$

$$k_{2,1} \leftarrow k_{1,2}$$

$$k_{3,1} \leftarrow k_{1,3}$$

$$k_{4,1} \leftarrow k_{1,4}$$

$$k_{5,1} \leftarrow k_{1,5}$$

$$k_{6,1} \leftarrow k_{1,6}$$

$$k_{3,2} \leftarrow k_{2,3}$$

$$k_{4,2} \leftarrow k_{2,4}$$

$$k_{5,2} \leftarrow k_{2,5}$$

$$k_{6,2} \leftarrow k_{2,6}$$

$$k_{4,3} \leftarrow k_{3,4}$$

$$k_{5,3} \leftarrow k_{3,5}$$

$$k_{6,3} \leftarrow k_{3,6}$$

$$k_{5,4} \leftarrow k_{4,5}$$

$$\left. \begin{array}{l} k_{6,4} \leftarrow k_{4,6} \\ k_{6,5} \leftarrow k_{5,6} \\ k \end{array} \right\}$$

III-3 programme de calcul effectuant l'assemblage des matrices de rigidité des éléments finis:

La fonction Mathcad Assemble(K,KE,i,j,m), s'utilise après l'obtention de toutes les matrices de rigidité des éléments finis composant notre structures. Le calcul de ces matrices s'effectue au moyen du programme présenté ci-dessus.

L'utilisation de la fonction Assemble(K,KE,i,j,m), nécessite le transfert de la matrice de rigidité de l'élément fini et les données topologiques rassemblées dans la matrice des indices relative à la numérotation des nœuds utilisée.

$$\text{Assemble}(K,KE,i,j,m) := \left. \begin{array}{l} K_{2-i-1,2-i-1} \leftarrow K_{2-i-1,2-i-1} + KE_{1,1} \\ K_{2-i-1,2-i} \leftarrow K_{2-i-1,2-i} + KE_{1,2} \\ K_{2-i-1,2-j-1} \leftarrow K_{2-i-1,2-j-1} + KE_{1,3} \\ K_{2-i-1,2-j} \leftarrow K_{2-i-1,2-j} + KE_{1,4} \\ K_{2-i-1,2-m-1} \leftarrow K_{2-i-1,2-m-1} + KE_{1,5} \\ K_{2-i-1,2-m} \leftarrow K_{2-i-1,2-m} + KE_{1,6} \\ K_{2-i,2-i-1} \leftarrow K_{2-i,2-i-1} + KE_{2,1} \\ K_{2-i,2-i} \leftarrow K_{2-i,2-i} + KE_{2,2} \\ K_{2-i,2-j-1} \leftarrow K_{2-i,2-j-1} + KE_{2,3} \\ K_{2-i,2-j} \leftarrow K_{2-i,2-j} + KE_{2,4} \\ K_{2-i,2-m-1} \leftarrow K_{2-i,2-m-1} + KE_{2,5} \\ K_{2-i,2-m} \leftarrow K_{2-i,2-m} + KE_{2,6} \\ K_{2-j-1,2-i-1} \leftarrow K_{2-j-1,2-i-1} + KE_{3,1} \\ K_{2-j-1,2-i} \leftarrow K_{2-j-1,2-i} + KE_{3,2} \\ K_{2-j-1,2-j-1} \leftarrow K_{2-j-1,2-j-1} + KE_{3,3} \\ K_{2-j-1,2-j} \leftarrow K_{2-j-1,2-j} + KE_{3,4} \\ K_{2-j-1,2-m-1} \leftarrow K_{2-j-1,2-m-1} + KE_{3,5} \\ K_{2-j-1,2-m} \leftarrow K_{2-j-1,2-m} + KE_{3,6} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
K_{2,j,2-i-1} &\leftarrow K_{2,j,2-i-1} + KE_{4,1} \\
K_{2,j,2-i} &\leftarrow K_{2,j,2-i} + KE_{4,2} \\
K_{2,j,2-j-1} &\leftarrow K_{2,j,2-j-1} + KE_{4,3} \\
K_{2,j,2-j} &\leftarrow K_{2,j,2-j} + KE_{4,4} \\
K_{2,j,2-m-1} &\leftarrow K_{2,j,2-m-1} + KE_{4,5} \\
K_{2,j,2-m} &\leftarrow K_{2,j,2-m} + KE_{4,6} \\
K_{2-m-1,2-i-1} &\leftarrow K_{2-m-1,2-i-1} + KE_{5,1} \\
K_{2-m-1,2-i} &\leftarrow K_{2-m-1,2-i} + KE_{5,2} \\
K_{2-m-1,2-j-1} &\leftarrow K_{2-m-1,2-j-1} + KE_{5,3} \\
K_{2-m-1,2-j} &\leftarrow K_{2-m-1,2-j} + KE_{5,4} \\
K_{2-m-1,2-m-1} &\leftarrow K_{2-m-1,2-m-1} + KE_{5,5} \\
K_{2-m-1,2-m} &\leftarrow K_{2-m-1,2-m} + KE_{5,6} \\
K_{2-m,2-i-1} &\leftarrow K_{2-m,2-i-1} + KE_{6,1} \\
K_{2-m,2-i} &\leftarrow K_{2-m,2-i} + KE_{6,2} \\
K_{2-m,2-j-1} &\leftarrow K_{2-m,2-j-1} + KE_{6,3} \\
K_{2-m,2-j} &\leftarrow K_{2-m,2-j} + KE_{6,4} \\
K_{2-m,2-m-1} &\leftarrow K_{2-m,2-m-1} + KE_{6,5} \\
K_{2-m,2-m} &\leftarrow K_{2-m,2-m} + KE_{6,6} \\
K
\end{aligned}$$

III -4 Programme de calcul des déplacements par la méthode de Gauss:

La résolution des systèmes d'équations algébriques nécessite l'utilisation d'une des méthodes de l'algèbre linéaire. Dans ce qui suit nous allons utiliser la méthode de Gauss. Le programme suivant qui a été préparé par notre promoteur au moyen de Mathcad correspond à cette méthode. Il permet d'obtenir les déplacements nodaux de chaque maillage utilisé.

Mathcad - [programme des déplacement par methode de gauss Gauss (1).xmcd]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

\times_n \times^{-1} $|\times|$ $\vec{i(n)}$ $\vec{M}^{\langle \rangle}$ M^T $m..n$ $\hat{\sigma} \cdot \vec{v}$ $\hat{\sigma} \times \vec{v}$ ΣU

100%

```

Simplex(A,b) :=
  N ← rows(A)
  C ← augment(A,b)
  i ← 0
  for i ∈ 0..N - 2
    for j ∈ 0..N
      Ci,N-j ←  $\frac{C_{i,N-j}}{C_{i,i}}$ 
    for m ∈ i + 1..N - 1
      α ← Cm,i
      for j ∈ i..N
        Cm,j ← Cm,j - α Ci,j
  CN-1,N ←  $\frac{C_{N-1,N}}{C_{N-1,N-1}}$ 
  CN-1,N-1 ← 1
  C

Gauss(A,b) :=
  C ← Simplex(A,b)
  N ← rows(A) - 1
  vN ← CN,N+1
  for j ∈ 1..N
    vN-j ←  $\frac{1}{C_{N-j,N-j}} \left[ C_{N-j,N+1} - \sum_{k=0}^{j-1} (C_{N-j,N-k} \cdot v_{N-k}) \right]$ 
  v

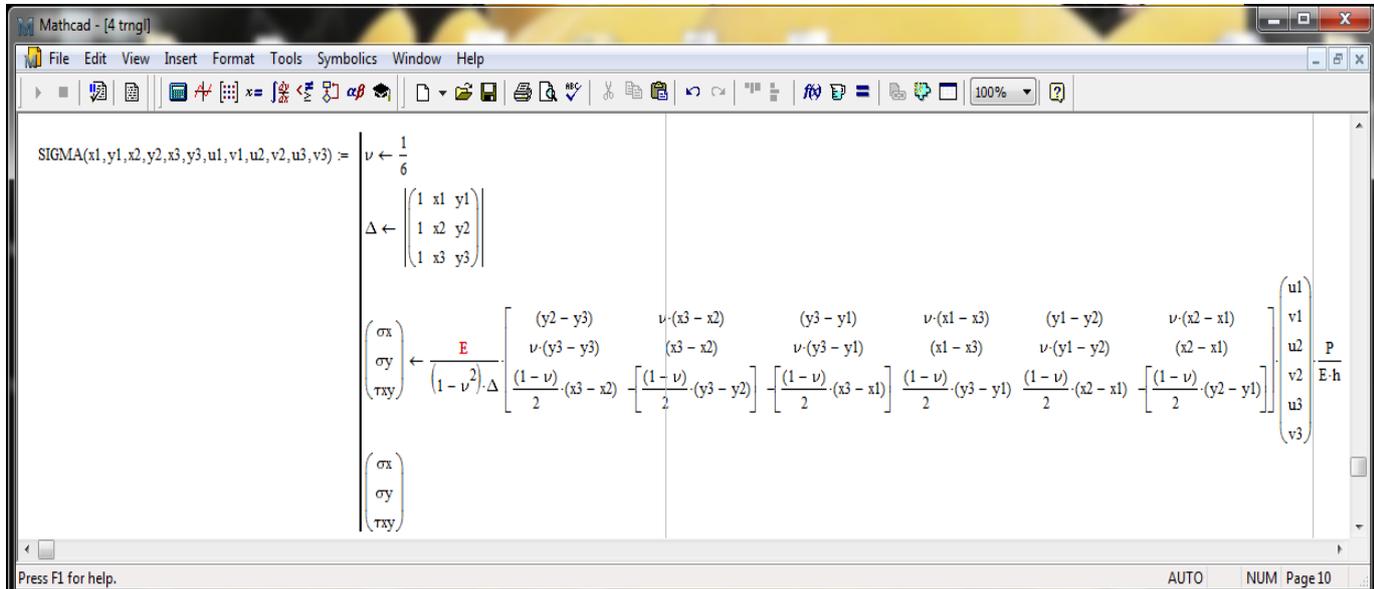
```

Press F1 for help. AUTO NUM Page 1

Programme Mathcad de calcul des déplacements

III-5 Programme de calcul des contraintes:

La fenêtre suivante du logiciel Mathcad montre la fonction-programme SIGMA qui va être utilisée par la suite pour automatiser les opérations de calcul des contraintes.



Programme Mathcad de calcul des contraintes

III-6 Application numérique:

Le problème traité ici est un problème plan d'élasticité ou plus exactement un problème de contrainte plane. Il s'agit d'une poutre-cloison de longueur ℓ , de hauteur ℓ et d'épaisseur h . elle est appuyée simplement et soumise à une force concentrée \mathbf{P} appliquée au milieu comme le montre la figure III-1 ci-dessous. Dans tous les calculs qui suivent la symétrie de la structure est prise en considération.

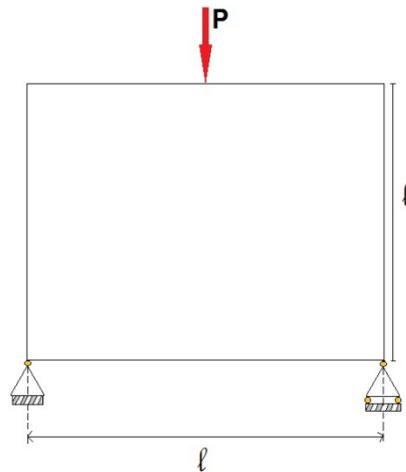


Figure III-1 : poutre-cloison soumise à une force concentrée

La discrétisation du schéma de calcul est réalisée en utilisant de différents maillages qui seront présentés en détail ci-dessous

III -6-1 Maillage à huit triangles :

En prenant en considération la symétrie géométrique, celle du chargement, ce premier cas correspond à la subdivision de la moitié de la structure en quatre éléments triangulaire à douze degré de liberté. Et par conséquent le nombre d'équations algébriques pour ce cas sera au nombre de douze. Les numérotations des éléments et des nœuds ainsi que les coordonnées x et y de ces derniers sont montrés sur la Figure III-2

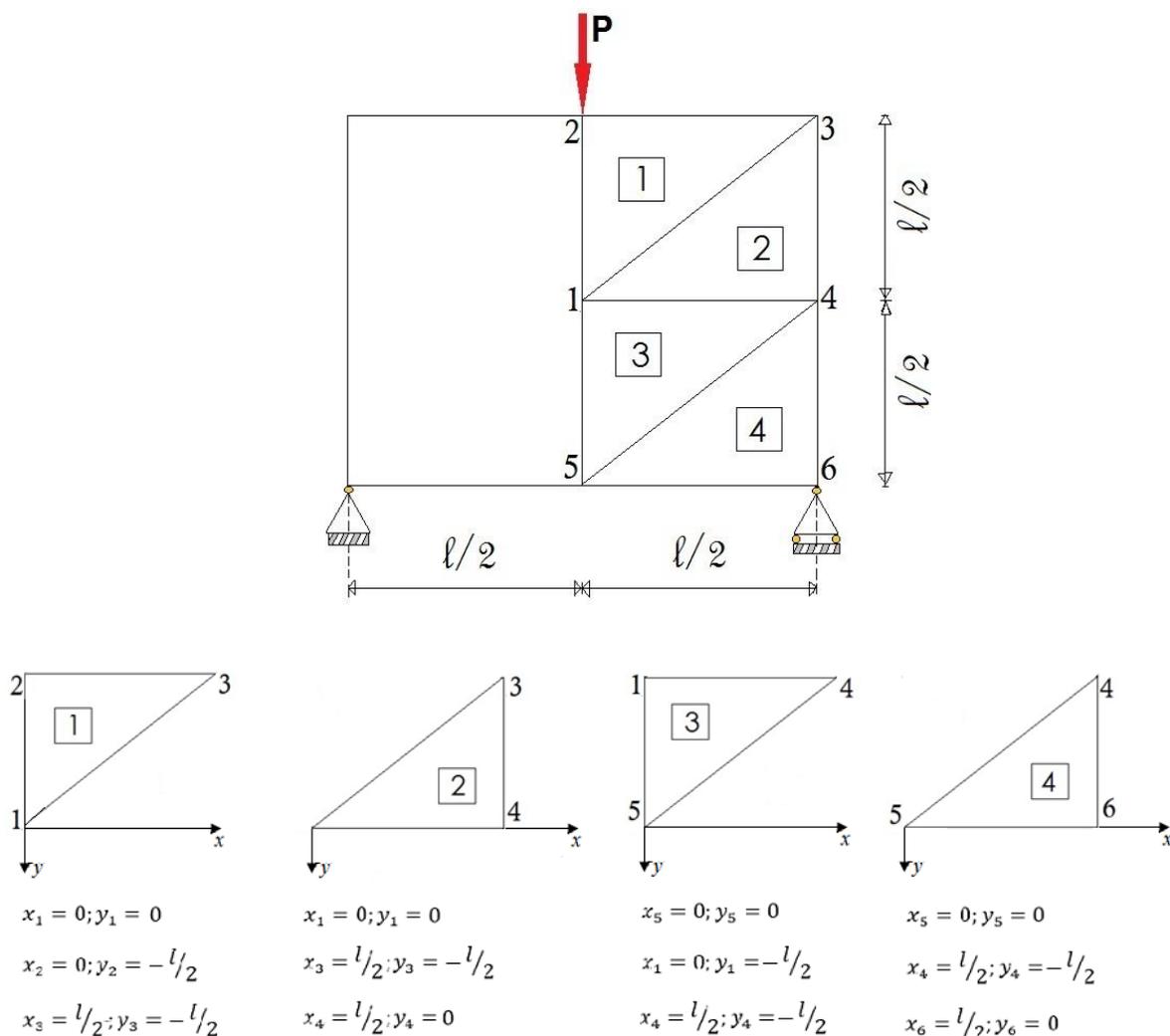


Figure III-2 : Maillage à huit triangles de la poutre-cloison

III-6-1-1 Calcul des matrices de rigidité des éléments finis :

L'exécution de la fonction-programme K pour ce cas nous a donné les résultats numériques présentés dans la fenêtre suivante :

The screenshot shows the Mathcad interface with the following calculations:

$$KE1 := k\left(0, 0, 0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0.2143 & 0.0000 & -0.2143 & -0.2143 & 0.0000 & 0.2143 \\ 0.0000 & 0.5143 & -0.0857 & -0.5143 & 0.0857 & 0.0000 \\ -0.2143 & -0.0857 & 0.7286 & 0.3000 & -0.5143 & -0.2143 \\ -0.2143 & -0.5143 & 0.3000 & 0.7286 & -0.0857 & -0.2143 \\ 0.0000 & 0.0857 & -0.5143 & -0.0857 & 0.5143 & 0.0000 \\ 0.2143 & 0.0000 & -0.2143 & -0.2143 & 0.0000 & 0.2143 \end{pmatrix}$$

$$KE2 := k\left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0.5143 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0857 & -0.5143 & -0.0857 \\ 0.0000 & 0.2143 & 0.2143 & 0.0000 & -0.2143 & -0.2143 \\ 0.0000 & 0.2143 & 0.2143 & 0.0000 & -0.2143 & -0.2143 \\ 0.0857 & 0.0000 & 0.0000 & 0.5143 & -0.0857 & -0.5143 \\ -0.5143 & -0.2143 & -0.2143 & -0.0857 & 0.7286 & 0.3000 \\ -0.0857 & -0.2143 & -0.2143 & -0.5143 & 0.3000 & 0.7286 \end{pmatrix}$$

$$KE3 := k\left(0, 0, 0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0.2143 & 0.0000 & -0.2143 & -0.2143 & 0.0000 & 0.2143 \\ 0.0000 & 0.5143 & -0.0857 & -0.5143 & 0.0857 & 0.0000 \\ -0.2143 & -0.0857 & 0.7286 & 0.3000 & -0.5143 & -0.2143 \\ -0.2143 & -0.5143 & 0.3000 & 0.7286 & -0.0857 & -0.2143 \\ 0.0000 & 0.0857 & -0.5143 & -0.0857 & 0.5143 & 0.0000 \\ 0.2143 & 0.0000 & -0.2143 & -0.2143 & 0.0000 & 0.2143 \end{pmatrix}$$

$$KE4 := k\left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0.5143 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0857 & -0.5143 & -0.0857 \\ 0.0000 & 0.2143 & 0.2143 & 0.0000 & -0.2143 & -0.2143 \\ 0.0000 & 0.2143 & 0.2143 & 0.0000 & -0.2143 & -0.2143 \\ 0.0857 & 0.0000 & 0.0000 & 0.5143 & -0.0857 & -0.5143 \\ -0.5143 & -0.2143 & -0.2143 & -0.0857 & 0.7286 & 0.3000 \\ -0.0857 & -0.2143 & -0.2143 & -0.5143 & 0.3000 & 0.7286 \end{pmatrix}$$

Les matrices des résultats de calcul obtenues correspondent chacune à un élément fini. Chaque matrice est de dimension (6x6). Maintenant il est nécessaire d'assembler toutes ces matrices pour en obtenir celle globale de toute la structure. Pour ce faire nous nous servons dans ce qui suit du programme **Assemble** présenté ci-dessus.

Et finalement la somme de toutes les matrices obtenues précédemment permet d'obtenir la matrice globale de la structure, c'est-à-dire :

$$K_{[globale]} = K_1 + K_2 + K_3 + K_4$$

$$K_{[globale]} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1.457	0.3	-0.214	-0.214	0	0.3	-1.029	-0.3	-0.214	-0.086	0	0
2	0.3	1.457	-0.086	-0.514	0.3	0	-0.3	-0.429	-0.214	-0.514	0	0
3	-0.214	-0.086	0.729	0.3	-0.514	-0.214	0	0	0	0	0	0
4	-0.214	-0.514	0.3	0.729	-0.086	-0.214	0	0	0	0	0	0
5	0	0.3	-0.514	-0.086	0.729	0	-0.214	-0.214	0	0	0	0
6	0.3	0	-0.214	-0.214	0	0.729	-0.086	-0.514	0	0	0	0
7	-1.029	-0.3	0	0	-0.214	-0.086	1.457	0.3	0	0.3	-0.214	-0.214
8	-0.3	-0.429	0	0	-0.214	-0.514	0.3	1.457	0.3	0	-0.086	-0.514
9	-0.214	-0.214	0	0	0	0	0	0.3	0.729	0	-0.514	-0.086
10	-0.086	-0.514	0	0	0	0	0.3	0	0	0.729	-0.214	-0.214
11	0	0	0	0	0	0	-0.214	-0.086	-0.514	-0.214	0.729	0.3
12	0	0	0	0	0	0	-0.214	-0.514	-0.086	-0.214	0.3	...

Cette dernière matrice $K_{globale}$ est symétrique en raison du principe des travaux réciproques, définie positive car elle dérive d'un potentiel et singulière parce que la structure étudiée n'est pas encore fixée. Par conséquent le déterminant de cette matrice est nul et il est impossible ainsi de résoudre le système des équations algébriques obtenu. Pour résoudre ce problème il est nécessaire d'enlever la singularité de cette matrice. Pour ce faire il est indispensable de prendre en compte les conditions aux limites.

Pour notre premier cas les conditions aux limites sont les valeurs nulles des déplacements au niveau des appuis et ceux horizontaux des nœuds situés sur l'axe de symétrie de la structure,

et qui sont : $u_1 = u_2 = u_5 = v_6 = 0$. Dans la littérature, on utilise plusieurs techniques de prise en considération des conditions aux limites. Dans notre cas nous allons éliminer dans la matrice de la structure les colonnes et les lignes qui correspondent aux déplacements nuls. Cette technique est illustrée dans le tableau III-1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1.457	0.3	-0.214	-0.214	0	0.3	-1.029	-0.3	-0.214	-0.086	0	0
2	0.3	1.457	-0.086	-0.514	0.3	0	-0.3	-0.429	-0.214	-0.514	0	0
3	-0.214	-0.086	0.729	0.3	-0.514	-0.214	0	0	0	0	0	0
4	-0.214	-0.514	0.3	0.729	-0.086	-0.214	0	0	0	0	0	0
5	0	0.3	-0.514	-0.086	0.729	0	-0.214	-0.214	0	0	0	0
6	0.3	0	-0.214	-0.214	0	0.729	-0.086	-0.514	0	0	0	0
7	-1.029	-0.3	0	0	-0.214	-0.086	1.457	0.3	0	0.3	-0.214	-0.214
8	-0.3	-0.429	0	0	-0.214	-0.514	0.3	1.457	0.3	0	-0.086	-0.514
9	-0.214	-0.214	0	0	0	0	0	0.3	0.729	0	-0.514	-0.086
10	-0.086	-0.514	0	0	0	0	0.3	0	0	0.729	-0.214	-0.214
11	0	0	0	0	0	0	-0.214	-0.086	-0.514	-0.214	0.729	0.3
12	0	0	0	0	0	0	-0.214	-0.514	-0.086	-0.214	0.3	...

Tableau III-1: élimination des lignes et colonnes correspondant aux déplacements connus

D'où on obtient la matrice finale suivante :

	2	4	5	6	7	8	10	11
2	1.457	-0.514	0.3	0	-0.3	-0.429	-0.514	0
4	-0.514	0.729	-0.086	-0.214	0	0	0	0
5	0.3	-0.086	0.729	0	-0.214	-0.214	0	0
6	0	-0.214	0	0.729	-0.086	-0.514	0	0
7	-0.3	0	-0.214	-0.086	1.457	0.3	0.3	-0.214
8	-0.429	0	-0.214	-0.514	0.3	1.457	0	-0.086
10	-0.514	0	0	0	0.3	0	0.729	-0.214
11	0	0	0	0	-0.214	-0.086	-0.214	0.729

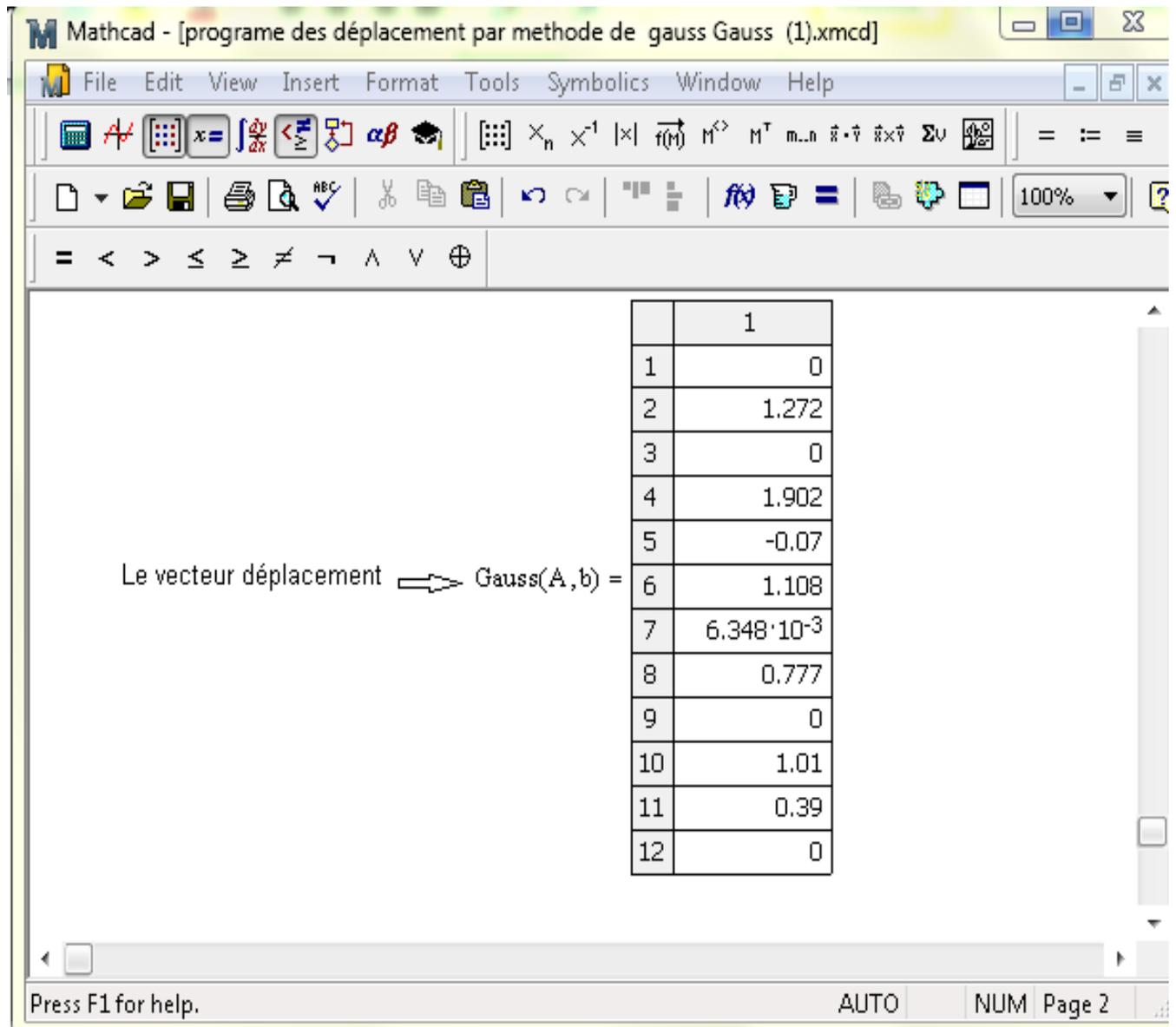
Tableau III -2: matrice de rigidité globale de la structure non singulière

III-6-1-3 Calcul des déplacements :

Le vecteur des forces représentant la charge extérieure appliquée est :

$$F^T = (0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

L'exécution du programme **Gauss** utilisant la matrice de rigidité de la structure obtenue précédemment après avoir appliqué les conditions aux limites ainsi que le vecteur **F** nous donne les déplacements inconnus comme le montre la fenêtre de Mathcad ci-dessous .



Résultats obtenus par l'exécution du programme Gauss

III-6-1-4 Calcul des contraintes :

Après avoir déterminé les déplacements nodaux, nous pouvons calculer les contraintes au centre des éléments finis au moyen du programme SIGMA présenté précédemment. L'application de ce programme requiert comme données la matrice de rigidité de l'élément finis et les déplacements nodaux correspondants. Les résultats ainsi obtenus sont :

$$\begin{array}{l} \text{Elément 1 :} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{0.3594 \cdot P}{h} \\ \frac{1.3199 \cdot P}{h} \\ \frac{0.6801 \cdot P}{h} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Elément 2 :} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{0.1007 \cdot P}{h} \\ \frac{0.6800 \cdot P}{h} \\ \frac{0.3592 \cdot P}{h} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Elément 3 :} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{0.4197 \cdot P}{h} \\ \frac{2.5937 \cdot P}{h} \\ \frac{0.4244 \cdot P}{h} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Elément 4 :} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{0.5366 \cdot P}{h} \\ \frac{1.4642 \cdot P}{h} \\ \frac{0.5366 \cdot P}{h} \end{pmatrix} \end{array}$$

De la même façon nous allons résoudre le même problème en utilisant d'autres maillages. Ces derniers ainsi que les résultats correspondants obtenus au moyen des programmes K, Assemble, Gauss, SIGMA et du logiciel de calcul symbolique Mathcad sont présentés ci-dessous :

III -6-2- maillage à douze triangles :

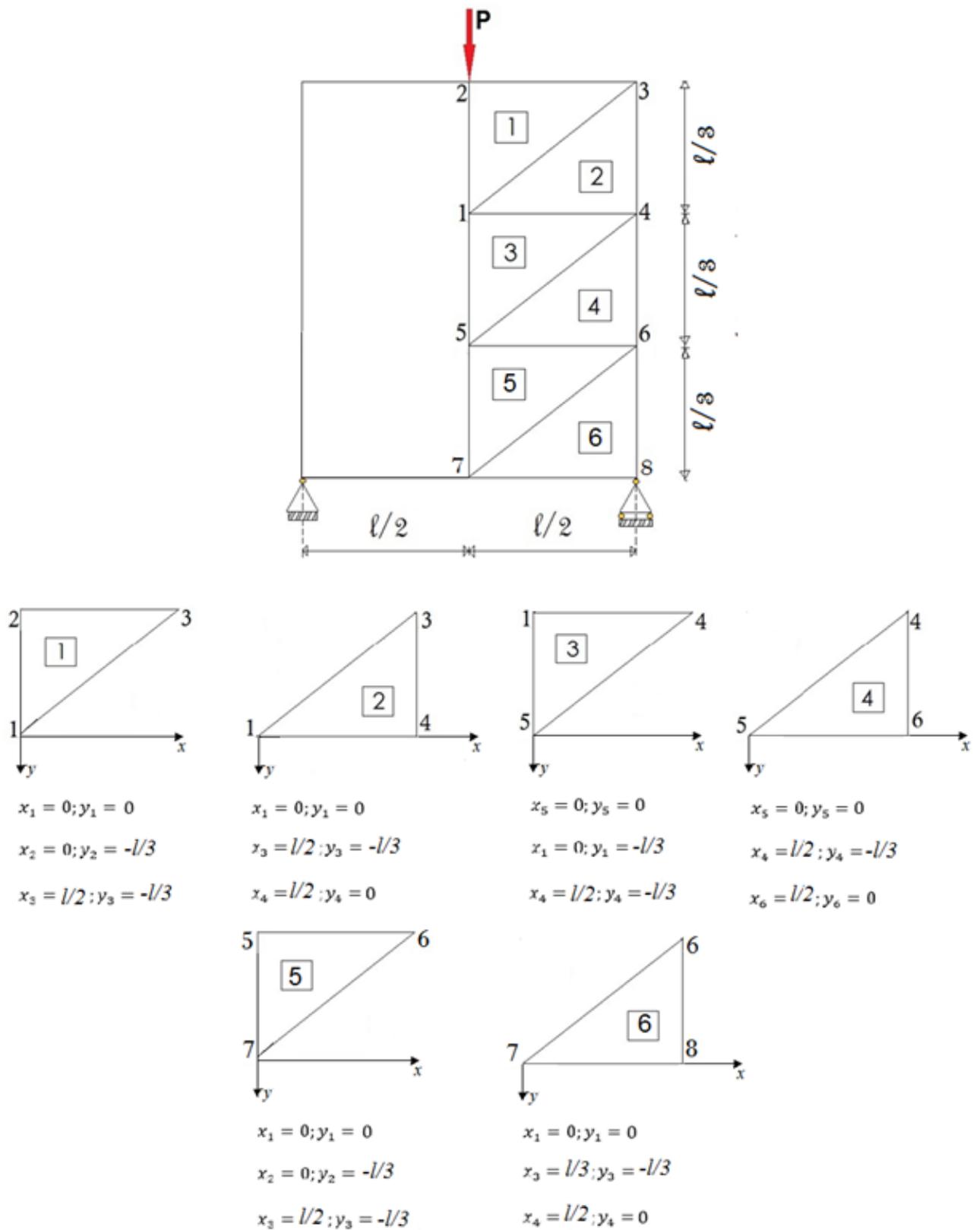
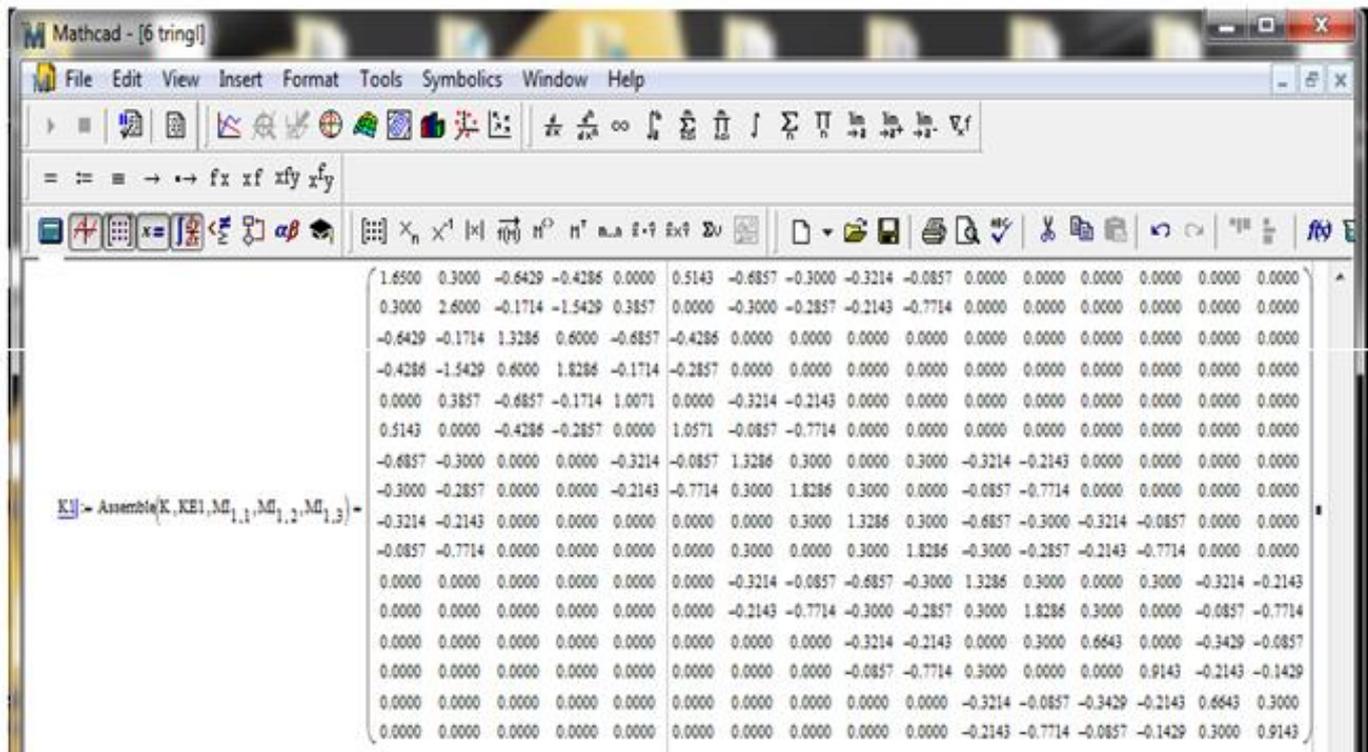


Figure III-3: Maillage à douze triangles de la poutre-claison

III-6-2-1 Calcul des matrices de rigidité des éléments finis :

$$\begin{aligned}
 KE1 &:= k \begin{pmatrix} 0,0,0, \frac{-1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3214 & 0.0000 & -0.3214 & -0.2143 & 0.0000 & 0.2143 \\ 0.0000 & 0.7714 & -0.0857 & -0.7714 & 0.0857 & 0.0000 \\ -0.3214 & -0.0857 & 0.6643 & 0.3000 & -0.3429 & -0.2143 \\ -0.2143 & -0.7714 & 0.3000 & 0.9143 & -0.0857 & -0.1429 \\ 0.0000 & 0.0857 & -0.3429 & -0.0857 & 0.3429 & 0.0000 \\ 0.2143 & 0.0000 & -0.2143 & -0.1429 & 0.0000 & 0.1429 \end{pmatrix} &
 KE4 &:= k \begin{pmatrix} 0,0, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{2}, 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3429 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0857 & -0.3429 & -0.0857 \\ 0.0000 & 0.1429 & 0.2143 & 0.0000 & -0.2143 & -0.1429 \\ 0.0000 & 0.2143 & 0.3214 & 0.0000 & -0.3214 & -0.2143 \\ 0.0857 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7714 & -0.0857 & -0.7714 \\ -0.3429 & -0.2143 & -0.3214 & -0.0857 & 0.6643 & 0.3000 \\ -0.0857 & -0.1429 & -0.2143 & -0.7714 & 0.3000 & 0.9143 \end{pmatrix} \\
 KE2 &:= k \begin{pmatrix} 0,0, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{2}, 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3429 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0857 & -0.3429 & -0.0857 \\ 0.0000 & 0.1429 & 0.2143 & 0.0000 & -0.2143 & -0.1429 \\ 0.0000 & 0.2143 & 0.3214 & 0.0000 & -0.3214 & -0.2143 \\ 0.0857 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7714 & -0.0857 & -0.7714 \\ -0.3429 & -0.2143 & -0.3214 & -0.0857 & 0.6643 & 0.3000 \\ -0.0857 & -0.1429 & -0.2143 & -0.7714 & 0.3000 & 0.9143 \end{pmatrix} &
 KE5 &:= k \begin{pmatrix} 0,0,0, \frac{-1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3214 & 0.0000 & -0.3214 & -0.2143 & 0.0000 & 0.2143 \\ 0.0000 & 0.7714 & -0.0857 & -0.7714 & 0.0857 & 0.0000 \\ -0.3214 & -0.0857 & 0.6643 & 0.3000 & -0.3429 & -0.2143 \\ -0.2143 & -0.7714 & 0.3000 & 0.9143 & -0.0857 & -0.1429 \\ 0.0000 & 0.0857 & -0.3429 & -0.0857 & 0.3429 & 0.0000 \\ 0.2143 & 0.0000 & -0.2143 & -0.1429 & 0.0000 & 0.1429 \end{pmatrix} \\
 KE3 &:= k \begin{pmatrix} 0,0,0, \frac{-1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3214 & 0.0000 & -0.3214 & -0.2143 & 0.0000 & 0.2143 \\ 0.0000 & 0.7714 & -0.0857 & -0.7714 & 0.0857 & 0.0000 \\ -0.3214 & -0.0857 & 0.6643 & 0.3000 & -0.3429 & -0.2143 \\ -0.2143 & -0.7714 & 0.3000 & 0.9143 & -0.0857 & -0.1429 \\ 0.0000 & 0.0857 & -0.3429 & -0.0857 & 0.3429 & 0.0000 \\ 0.2143 & 0.0000 & -0.2143 & -0.1429 & 0.0000 & 0.1429 \end{pmatrix} &
 KE6 &:= k \begin{pmatrix} 0,0, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{2}, 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3429 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0857 & -0.3429 & -0.0857 \\ 0.0000 & 0.1429 & 0.2143 & 0.0000 & -0.2143 & -0.1429 \\ 0.0000 & 0.2143 & 0.3214 & 0.0000 & -0.3214 & -0.2143 \\ 0.0857 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7714 & -0.0857 & -0.7714 \\ -0.3429 & -0.2143 & -0.3214 & -0.0857 & 0.6643 & 0.3000 \\ -0.0857 & -0.1429 & -0.2143 & -0.7714 & 0.3000 & 0.9143 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

III-6-2-2 Assemblage des matrices de rigidité des éléments finis :



III-6-2-3 Calcul des déplacements :

Le vecteur déplacement \Rightarrow Gauss(A, b) =

	1
1	0
2	1.529
3	0
4	2
5	-0.12
6	1.118
7	0.011
8	0.953
9	0
10	1.22
11	0.064
12	0.605
13	0
14	1.118
15	0.47
16	0

Press F1 for help. AUTO NUM Page 2

Résultats obtenus par l'exécution du programme Gauss

III-6-2-4 Calcul des contraintes :

Mathcad - [contarinte 6 elemt.xmcd]

élément1 $\text{SIGMA}\left(0, 0, 0, \frac{-1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, 0, 0, 0, 0, 1.5287, 0, 0, 0, 0, 2.0001, -0.1197, 1.1176\right) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{0.4837 \cdot P}{h} \\ -\frac{1.4956 \cdot P}{h} \\ \frac{0.7564 \cdot P}{h} \end{pmatrix}$

élément2 $\text{SIGMA}\left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 1.5287, -0.1197, 1.1176, 0, 0, 0, 0, 0.0108, 0.9529\right) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{0.0625 \cdot P}{h} \\ -\frac{0.5045 \cdot P}{h} \\ \frac{0.3258 \cdot P}{h} \end{pmatrix}$

élément3 $\text{SIGMA}\left(0, 0, 0, \frac{-1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, 0, 0, 0, 0, 1.2200, 0, 0, 0, 0, 1.5287, 0, 0, 0, 0, 0.0108, 0.9529\right) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{0.1365 \cdot P}{h} \\ \frac{0.9489 \cdot P}{h} \\ -\frac{0.4935 \cdot P}{h} \end{pmatrix}$

Press F1 for help. AUTO NUM Page 1

Mathcad - [contarinte 6 elemt.xmcd]

élément4 $\text{SIGMA}\left(0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 1.2200, 0, 0, 0, 0, 0.0108, 0.9529, 0, 0, 0, 0, 0.0640, 0.6054\right) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{0.2557 \cdot P}{h} \\ -\frac{0.5768 \cdot P}{h} \\ \frac{0.4560 \cdot P}{h} \end{pmatrix}$

élément5 $\text{SIGMA}\left(0, 0, 0, \frac{-1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, 0, 0, 0, 0, 1.1185, 0, 0, 0, 0, 1.2200, 0, 0, 0, 0, 0.0640, 0.6054\right) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{0.0795 \cdot P}{h} \\ -\frac{0.2913 \cdot P}{h} \\ \frac{0.5268 \cdot P}{h} \end{pmatrix}$

élément6 $\text{SIGMA}\left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 1.1185, 0, 0, 0, 0, 0.0640, 0.6054, 0, 0, 0, 0, 0.4699, 0.0000\right) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{0.6553 \cdot P}{h} \\ -\frac{1.7070 \cdot P}{h} \\ \frac{0.4368 \cdot P}{h} \end{pmatrix}$

Press F1 for help. AUTO NUM Page 2

III -6-3 Maillage à seize triangles :

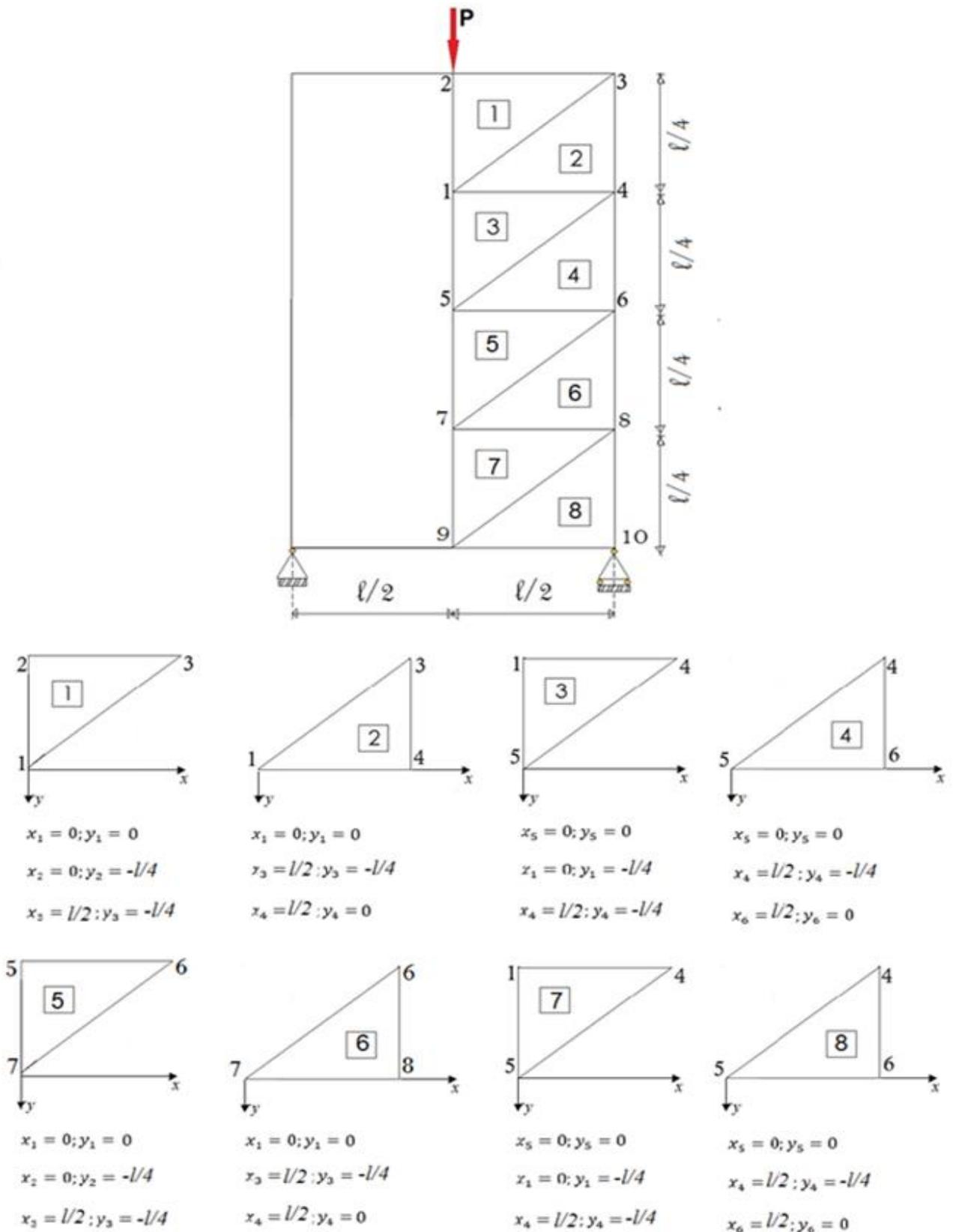


Figure III-4 : Maillage à seize triangles de la poutre-cloison

III-6-3-1 Calcul des matrices de rigidité des éléments finis :

$$KE1 :- \begin{pmatrix} 0.4286 & 0.0000 & -0.4286 & -0.2143 & 0.0000 & 0.2143 \\ 0.0000 & 1.0286 & -0.0857 & -1.0286 & 0.0857 & 0.0000 \\ -0.4286 & -0.0857 & 0.6857 & 0.3000 & -0.2571 & -0.2143 \\ -0.2143 & -1.0286 & 0.3000 & 1.1357 & -0.0857 & -0.1071 \\ 0.0000 & 0.0857 & -0.2571 & -0.0857 & 0.2571 & 0.0000 \\ 0.2143 & 0.0000 & -0.2143 & -0.1071 & 0.0000 & 0.1071 \end{pmatrix} \quad KE5 :- \begin{pmatrix} 0.4286 & 0.0000 & -0.4286 & -0.2143 & 0.0000 & 0.2143 \\ 0.0000 & 1.0286 & -0.0857 & -1.0286 & 0.0857 & 0.0000 \\ -0.4286 & -0.0857 & 0.6857 & 0.3000 & -0.2571 & -0.2143 \\ -0.2143 & -1.0286 & 0.3000 & 1.1357 & -0.0857 & -0.1071 \\ 0.0000 & 0.0857 & -0.2571 & -0.0857 & 0.2571 & 0.0000 \\ 0.2143 & 0.0000 & -0.2143 & -0.1071 & 0.0000 & 0.1071 \end{pmatrix}$$

$$KE2 :- \begin{pmatrix} 0.2571 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0857 & -0.2571 & -0.0857 \\ 0.0000 & 0.1071 & 0.2143 & 0.0000 & -0.2143 & -0.1071 \\ 0.0000 & 0.2143 & 0.4286 & 0.0000 & -0.4286 & -0.2143 \\ 0.0857 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0286 & -0.0857 & -1.0286 \\ -0.2571 & -0.2143 & -0.4286 & -0.0857 & 0.6857 & 0.3000 \\ -0.0857 & -0.1071 & -0.2143 & -1.0286 & 0.3000 & 1.1357 \end{pmatrix} \quad KE6 :- \begin{pmatrix} 0.2571 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0857 & -0.2571 & -0.0857 \\ 0.0000 & 0.1071 & 0.2143 & 0.0000 & -0.2143 & -0.1071 \\ 0.0000 & 0.2143 & 0.4286 & 0.0000 & -0.4286 & -0.2143 \\ 0.0857 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0286 & -0.0857 & -1.0286 \\ -0.2571 & -0.2143 & -0.4286 & -0.0857 & 0.6857 & 0.3000 \\ -0.0857 & -0.1071 & -0.2143 & -1.0286 & 0.3000 & 1.1357 \end{pmatrix}$$

$$KE3 :- \begin{pmatrix} 0.4286 & 0.0000 & -0.4286 & -0.2143 & 0.0000 & 0.2143 \\ 0.0000 & 1.0286 & -0.0857 & -1.0286 & 0.0857 & 0.0000 \\ -0.4286 & -0.0857 & 0.6857 & 0.3000 & -0.2571 & -0.2143 \\ -0.2143 & -1.0286 & 0.3000 & 1.1357 & -0.0857 & -0.1071 \\ 0.0000 & 0.0857 & -0.2571 & -0.0857 & 0.2571 & 0.0000 \\ 0.2143 & 0.0000 & -0.2143 & -0.1071 & 0.0000 & 0.1071 \end{pmatrix} \quad KE7 :- \begin{pmatrix} 0.4286 & 0.0000 & -0.4286 & -0.2143 & 0.0000 & 0.2143 \\ 0.0000 & 1.0286 & -0.0857 & -1.0286 & 0.0857 & 0.0000 \\ -0.4286 & -0.0857 & 0.6857 & 0.3000 & -0.2571 & -0.2143 \\ -0.2143 & -1.0286 & 0.3000 & 1.1357 & -0.0857 & -0.1071 \\ 0.0000 & 0.0857 & -0.2571 & -0.0857 & 0.2571 & 0.0000 \\ 0.2143 & 0.0000 & -0.2143 & -0.1071 & 0.0000 & 0.1071 \end{pmatrix}$$

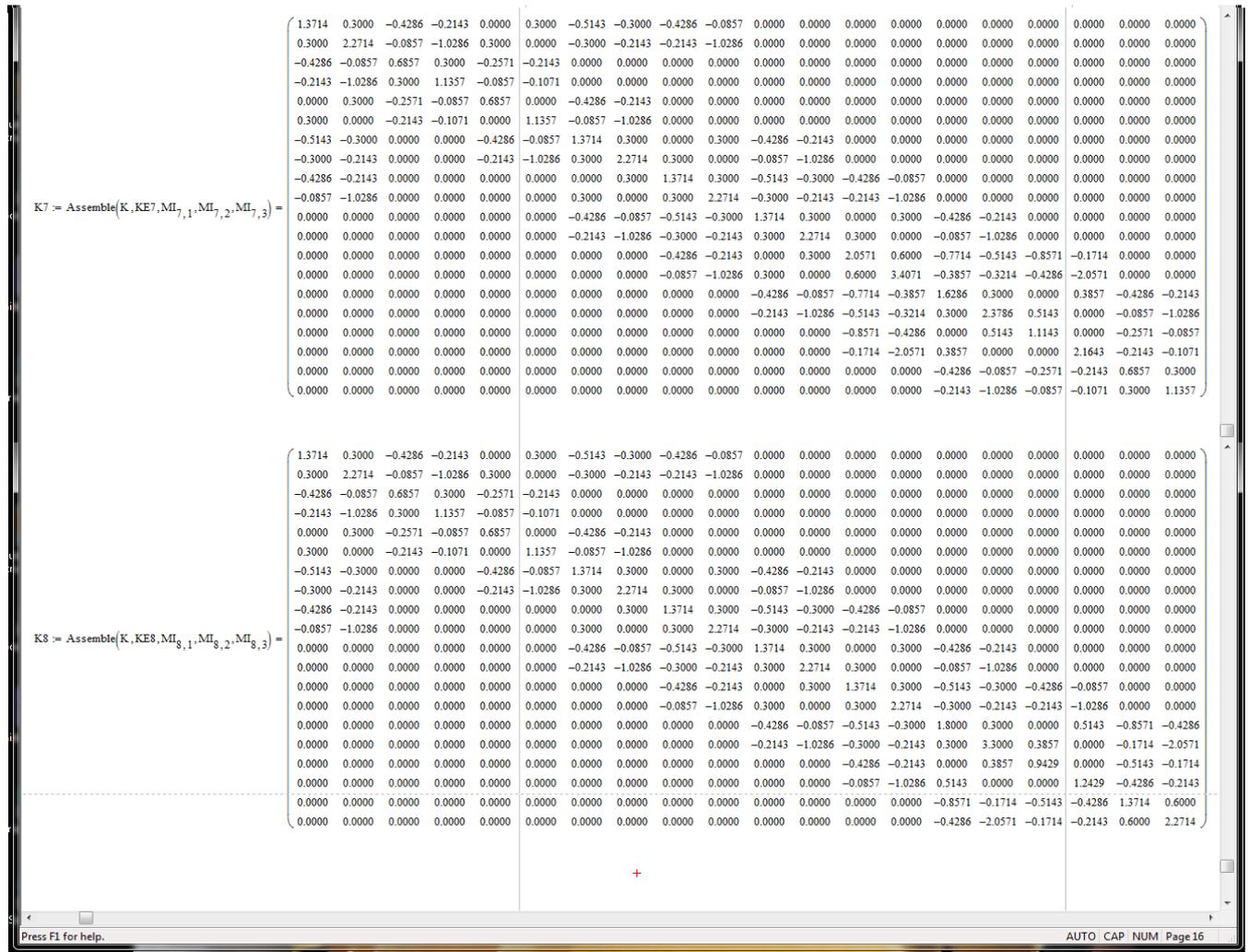
$$KE4 :- \begin{pmatrix} 0.2571 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0857 & -0.2571 & -0.0857 \\ 0.0000 & 0.1071 & 0.2143 & 0.0000 & -0.2143 & -0.1071 \\ 0.0000 & 0.2143 & 0.4286 & 0.0000 & -0.4286 & -0.2143 \\ 0.0857 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0286 & -0.0857 & -1.0286 \\ -0.2571 & -0.2143 & -0.4286 & -0.0857 & 0.6857 & 0.3000 \\ -0.0857 & -0.1071 & -0.2143 & -1.0286 & 0.3000 & 1.1357 \end{pmatrix} \quad KE8 :- \begin{pmatrix} 0.2571 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0857 & -0.2571 & -0.0857 \\ 0.0000 & 0.1071 & 0.2143 & 0.0000 & -0.2143 & -0.1071 \\ 0.0000 & 0.2143 & 0.4286 & 0.0000 & -0.4286 & -0.2143 \\ 0.0857 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0286 & -0.0857 & -1.0286 \\ -0.2571 & -0.2143 & -0.4286 & -0.0857 & 0.6857 & 0.3000 \\ -0.0857 & -0.1071 & -0.2143 & -1.0286 & 0.3000 & 1.1357 \end{pmatrix}$$

III-6-3-2 Assemblage des matrices de rigidité des éléments finis :

The image displays three global stiffness matrices, K1, K2, and K3, assembled in Mathcad. Each matrix is a 20x20 grid of numerical values. The matrices are symmetric and banded, with non-zero values concentrated in the middle 8 columns and rows, and zeros elsewhere. The matrices are defined as follows:

- $K1 = \text{Assemble}(K, KE1, MI_{1,1}, MI_{1,2}, MI_{1,3})$
- $K2 = \text{Assemble}(K, KE2, MI_{2,1}, MI_{2,2}, MI_{2,3})$
- $K3 = \text{Assemble}(K, KE3, MI_{3,1}, MI_{3,2}, MI_{3,3})$

The matrices are displayed in a grid format, with the first 6 columns and last 6 columns being mostly zeros, and the middle 8 columns containing non-zero values. The matrices are symmetric and banded, with non-zero values concentrated in the middle 8 columns and rows, and zeros elsewhere.

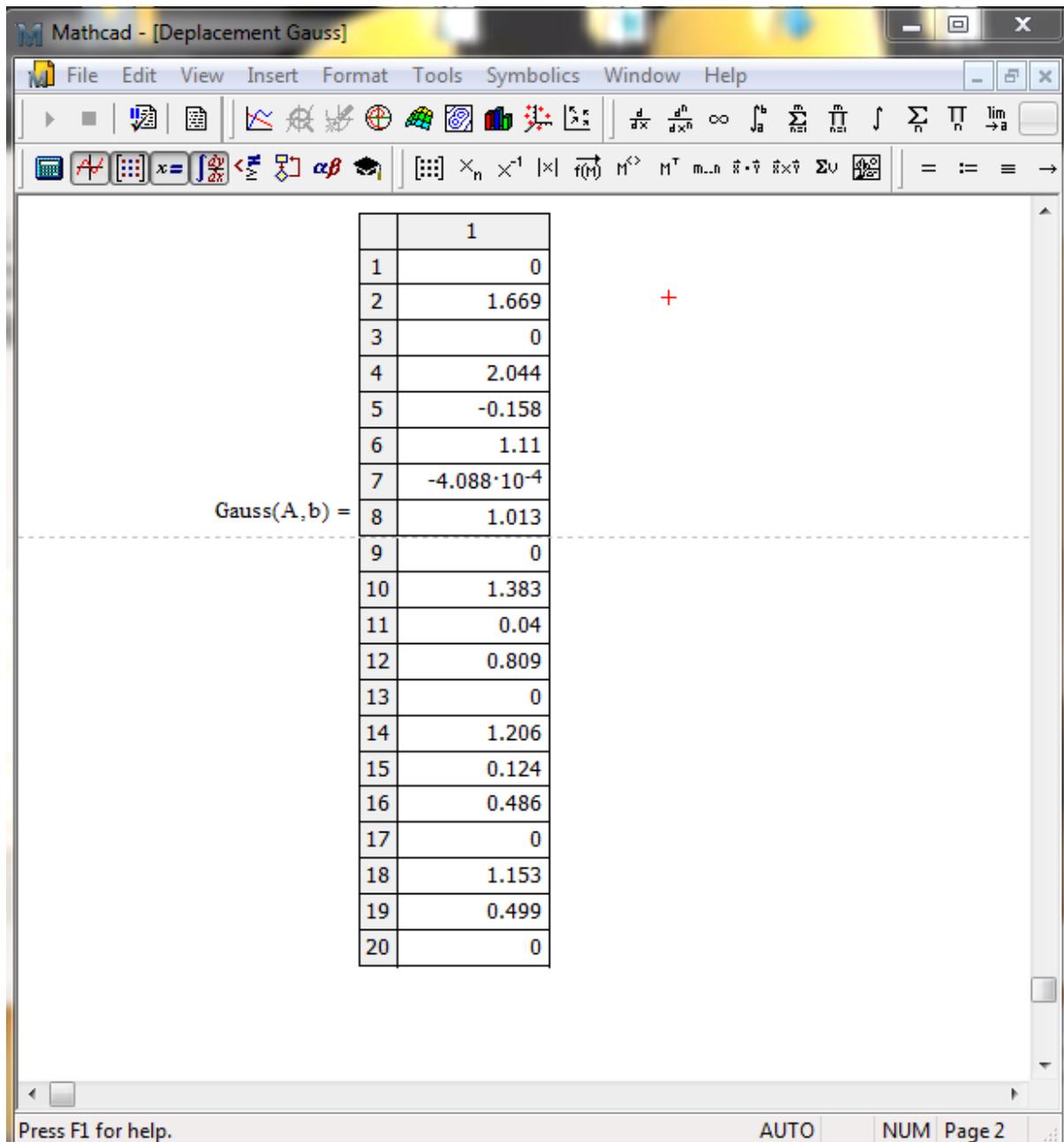


La somme des matrices precedentes permet d’obtenir la matrice de rigidité globale :

$K_{\text{globale}} =$

1.3714	0.3000	-0.4286	-0.2143	0.0000	0.3000	-0.5143	-0.3000	-0.4286	-0.0857	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.3000	2.2714	-0.0857	-1.0286	0.3000	0.0000	-0.3000	-0.2143	-0.2143	-1.0286	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.4286	-0.0857	0.6857	0.3000	-0.2571	-0.2143	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.2143	-1.0286	0.3000	1.1357	-0.0857	-0.1071	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.3000	-0.2571	-0.0857	0.6857	0.0000	-0.4286	-0.2143	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.3000	0.0000	-0.2143	-0.1071	0.0000	1.1357	-0.0857	-1.0286	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.5143	-0.3000	0.0000	0.0000	-0.4286	-0.0857	1.3714	0.3000	0.0000	0.3000	-0.4286	-0.2143	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.3000	-0.2143	0.0000	0.0000	-0.2143	-1.0286	0.3000	2.2714	0.3000	0.0000	-0.0857	-1.0286	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.4286	-0.2143	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3000	1.3714	0.3000	-0.5143	-0.3000	-0.4286	-0.0857	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0857	-1.0286	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3000	0.0000	0.3000	2.2714	-0.3000	-0.2143	-1.0286	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.4286	-0.0857	-0.5143	-0.3000	1.3714	0.3000	0.0000	0.3000	-0.4286	-0.2143	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.2143	-1.0286	-0.3000	-0.2143	0.3000	2.2714	0.3000	0.0000	-0.0857	-1.0286	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.4286	-0.2143	0.0000	0.3000	1.3714	0.3000	-0.5143	-0.3000	-0.4286	-0.0857	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0857	-1.0286	0.3000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.2143	-0.2143	-1.0286	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.4286	-0.0857	-0.5143	-0.3000	1.8000	0.3000	0.0000	0.0000	0.5143	-0.8571	-0.4286
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.2143	-1.0286	-0.3000	-0.2143	3.3000	3.3000	0.3857	0.0000	-0.1714	-2.0571
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.4286	-0.2143	0.0000	0.3857	0.9429	0.0000	-0.5143	-0.1714	0.0000	-0.1714
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0857	-1.0286	0.5143	0.0000	0.0000	1.2429	-0.4286
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.4286	-0.0857	-0.2571	-0.2143	0.6857	0.3000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.2143	-1.0286	-0.0857	-0.1071	0.3000	1.1357

III-6-3-3 Calcul des déplacements :



Résultats obtenus par l'exécution du programme Gauss

III-6-3-4 Calcul des contraintes :

Mathcad - [contarnt 8 triengl.xmcd]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

élément1 $\text{SIGMA}\left(0,0,0,\frac{-1}{4},\frac{1}{2},\frac{-1}{4},0,0000,1.6685,0.0000,2.0442,-0.1581,1.1104\right) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{0.5829 \cdot P}{h} \\ -\frac{1.5999 \cdot P}{h} \\ \frac{0.8004 \cdot P}{h} \end{pmatrix}$

élément2 $\text{SIGMA}\left(0,0,\frac{1}{2},\frac{-1}{4},\frac{1}{2},0,0,0000,1.6685,-0.1581,1.1104,-0.0004,1.0132\right) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{0.0675 \cdot P}{h} \\ -\frac{0.4000 \cdot P}{h} \\ -\frac{0.2913 \cdot P}{h} \end{pmatrix}$

élément3 $\text{SIGMA}\left(0,0,0,\frac{-1}{4},\frac{1}{2},\frac{-1}{4},0,0000,1.3832,0.0000,1.6685,-0.0004,1.0132\right) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{0.1965 \cdot P}{h} \\ \frac{1.1739 \cdot P}{h} \\ \frac{0.5617 \cdot P}{h} \end{pmatrix}$

élément4 $\text{SIGMA}\left(0,0,\frac{1}{2},\frac{-1}{4},\frac{1}{2},0,0,0000,1.3832,-0.0004,1.0132,0.0398,0.8089\right) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{0.0582 \cdot P}{h} \\ \frac{0.8269 \cdot P}{h} \\ \frac{0.4233 \cdot P}{h} \end{pmatrix}$

Press F1 for help. AUTO NUM Page 2

The screenshot shows the Mathcad interface with four constraint equations, each followed by a 'simplify' operation and its result. The results are presented as column vectors.

élément5 $\text{SIGMA}\left(0,0,0,\frac{-1}{4},\frac{1}{2},\frac{-1}{4},0,0,0,0,1,2056,0,0,0,0,1,3832,0,0,398,0,8089\right) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{0.0399 \cdot P}{h} \\ -\frac{0.7171 \cdot P}{h} \\ -\frac{0.4923 \cdot P}{h} \end{pmatrix}$

éléments6 $\text{SIGMA}\left(0,0,\frac{1}{2},\frac{-1}{4},\frac{1}{2},0,0,0,0,0,1,2056,0,0,398,0,8089,0,1239,0,4863\right) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{0.0337 \cdot P}{h} \\ -\frac{1.2848 \cdot P}{h} \\ \frac{0.4724 \cdot P}{h} \end{pmatrix}$

élément7 $\text{SIGMA}\left(0,0,0,\frac{-1}{4},\frac{1}{2},\frac{-1}{4},0,0,0,0,1,1533,0,0,0,0,1,2056,0,1239,0,4863\right) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{0.2190 \cdot P}{h} \\ -\frac{0.1727 \cdot P}{h} \\ -\frac{0.6165 \cdot P}{h} \end{pmatrix}$

élément8 $\text{SIGMA}\left(0,0,\frac{1}{2},\frac{-1}{4},\frac{1}{2},0,0,0,0,0,1,1533,0,1239,0,4863,0,4987,0,0,0,0\right) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{0.6924 \cdot P}{h} \\ -\frac{1.8298 \cdot P}{h} \\ -\frac{0.3460 \cdot P}{h} \end{pmatrix}$

Press F1 for help. AUTO NUM Page 2

Résultats des contraintes donnés par Mathcad

III -6-4- maillage à vingt triangles :

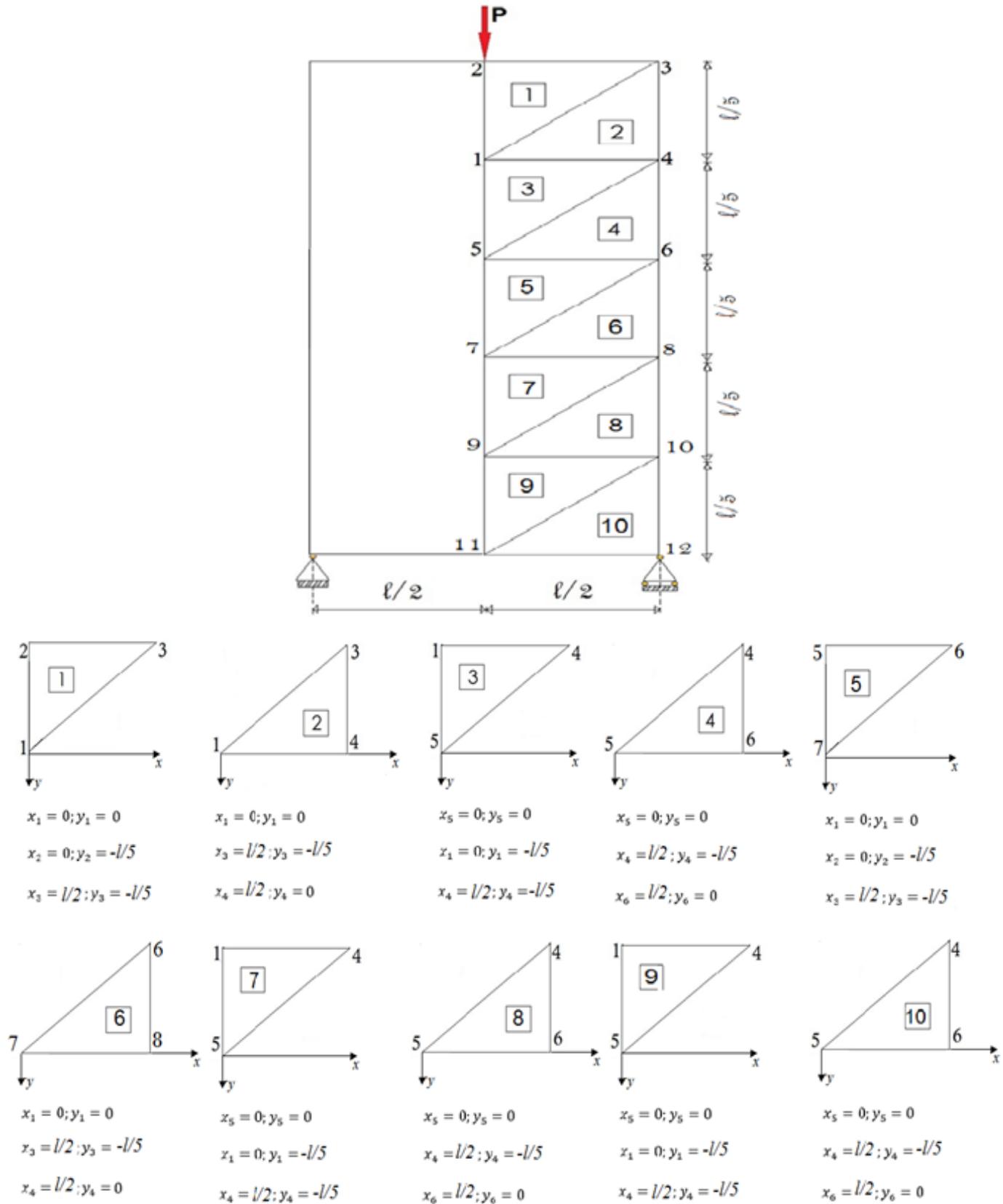


Figure III -5: Maillage à vingt triangles de la poutre-cloison

III-6-4-2 Assemblage des matrices de rigidité des éléments finis:

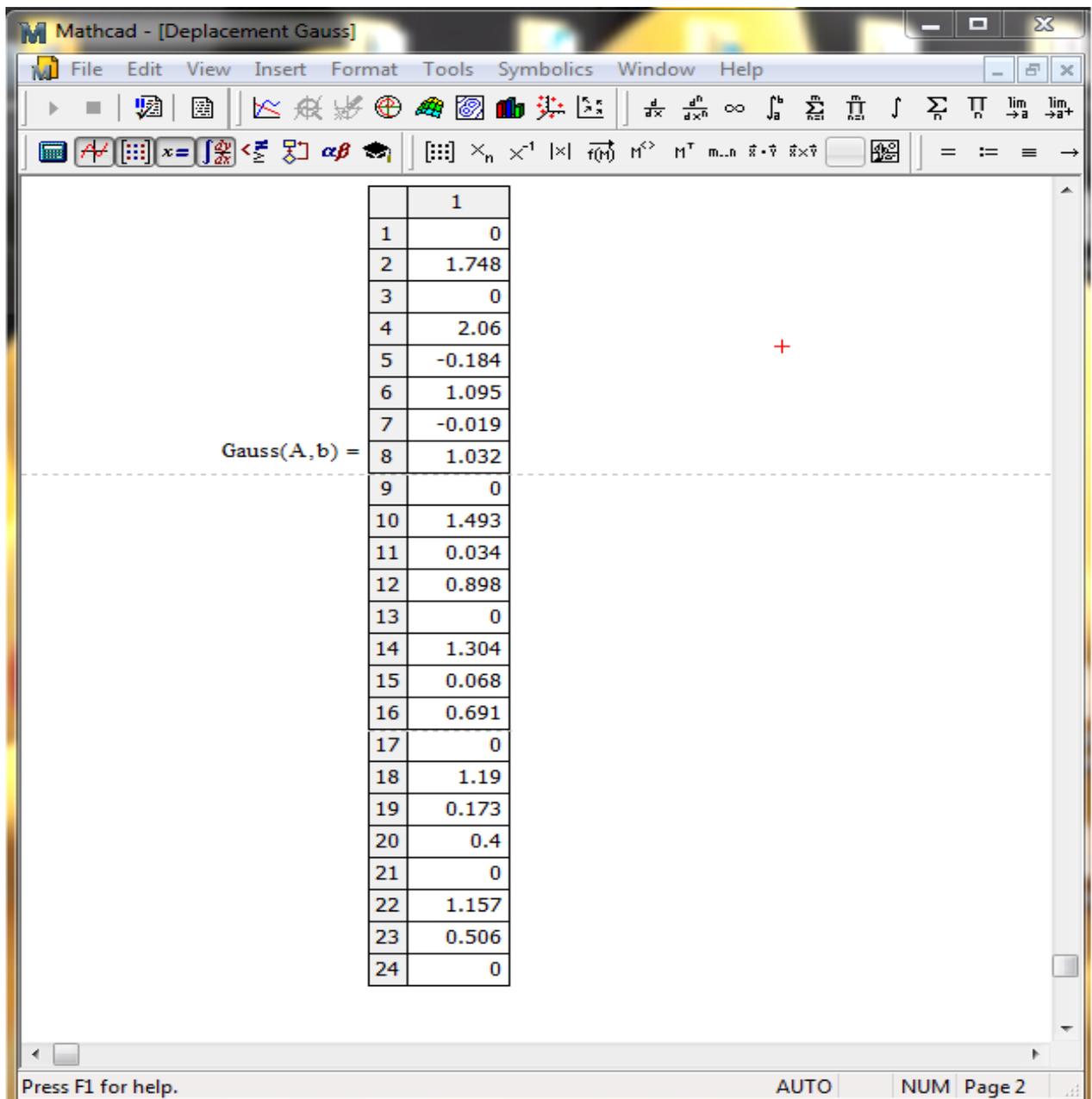
The image displays three global stiffness matrices, K1, K2, and K3, assembled in Mathcad. Each matrix is a square grid of numerical values, representing the stiffness of a finite element structure. The matrices are arranged vertically, with K1 at the top, K2 in the middle, and K3 at the bottom. The software interface includes a menu bar, a toolbar, and a status bar.

K1 - Assemblage(K, KE1, $M_{1,1}$, $M_{1,2}$, $M_{1,3}$)

K2 - Assemblage(K, KE2, $M_{2,1}$, $M_{2,2}$, $M_{2,3}$)

K3 - Assemblage(K, KE3, $M_{3,1}$, $M_{3,2}$, $M_{3,3}$)

III-6-4-3 Calcul des déplacements :



Résultats obtenus par l'exécution du programme Gauss

III-6-4-4 Calcul des contraintes :

Mathcad - [contarint 10 triengl.xmcd]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

100%

élément1 $\text{SIGMA}\left(0,0,0,\frac{-1}{5},\frac{1}{2},\frac{-1}{5},0,0,0,0,1.7480,0,0,0,0,2.0602,-0.1842,1.0951\right)$ simplify \rightarrow $\begin{pmatrix} 0.6465 \cdot P \\ h \\ 1.6688 \cdot P \\ h \\ 0.8272 \cdot P \\ h \end{pmatrix}$

élément2 $\text{SIGMA}\left(0,0,\frac{1}{2},\frac{-1}{5},\frac{1}{2},0,0,0,0,0,1.7480,-0.1842,1.0951,-0.0185,1.0320\right)$ simplify \rightarrow $\begin{pmatrix} 0.0921 \cdot P \\ h \\ 0.3309 \cdot P \\ h \\ 0.2586 \cdot P \\ h \end{pmatrix}$

élément3 $\text{SIGMA}\left(0,0,0,\frac{-1}{5},\frac{1}{2},\frac{-1}{5},0,0,0,0,1.4926,0,0,0,0,1.7480,-0.0185,1.0320\right)$ simplify \rightarrow $\begin{pmatrix} 0.2570 \cdot P \\ h \\ 1.3198 \cdot P \\ h \\ 0.6137 \cdot P \\ h \end{pmatrix}$

+

élément 4 $\text{SIGMA}\left(0,0,\frac{1}{2},\frac{-1}{5},\frac{1}{2},0,0,0,0,0,1.4926,-0.0185,1.0320,0.0336,0.8977\right)$ simplify \rightarrow $\begin{pmatrix} 0.0460 \cdot P \\ h \\ 0.6792 \cdot P \\ h \\ 0.3983 \cdot P \\ h \end{pmatrix}$

element 5 $\text{SIGMA}\left(0,0,0,\frac{-1}{5},\frac{1}{2},\frac{-1}{5},0,0,0,0,1.3045,0,0,0,0,1.4926,0.0336,0.8977\right)$ simplify \rightarrow $\begin{pmatrix} 0.0921 \cdot P \\ h \\ 0.9559 \cdot P \\ h \\ 0.5099 \cdot P \\ h \end{pmatrix}$

élément6 $\text{SIGMA}\left(0,0,\frac{1}{2},\frac{-1}{5},\frac{1}{2},0,0,0,0,0,1.3045,0.0336,0.8977,0.0676,0.6905\right)$ simplify \rightarrow $\begin{pmatrix} 0.0385 \cdot P \\ h \\ 1.0424 \cdot P \\ h \\ 0.4534 \cdot P \\ h \end{pmatrix}$

élément7	$\text{SIGMA}\left(0,0,0,\frac{-1}{5},\frac{1}{2},\frac{-1}{5},0,0,0,0,1.1904,0.0000,1.3045,0.0676,0.6905\right)$	simplify	\rightarrow	$\begin{pmatrix} \frac{0.0413 \cdot P}{h} \\ \frac{0.5636 \cdot P}{h} \\ \frac{0.5263 \cdot P}{h} \end{pmatrix}$
élément8	$\text{SIGMA}\left(0,0,\frac{1}{2},\frac{-1}{5},\frac{1}{2},0,0,0,0,0,1.1904,0.0676,0.6905,0.1727,0.4003\right)$	simplify	\rightarrow	$\begin{pmatrix} \frac{0.1065 \cdot P}{h} \\ \frac{1.4332 \cdot P}{h} \\ \frac{0.4520 \cdot P}{h} \end{pmatrix}$
élément9	$\text{SIGMA}\left(0,0,0,\frac{-1}{5},\frac{1}{2},\frac{-1}{5},0,0,0,0,1.1572,0.0000,1.1904,0.1727,0.4003\right)$	simplify	\rightarrow	$\begin{pmatrix} \frac{0.3268 \cdot P}{h} \\ \frac{0.1115 \cdot P}{h} \\ \frac{0.6772 \cdot P}{h} \end{pmatrix}$
élément10	$\text{SIGMA}\left(0,0,\frac{1}{2},\frac{-1}{5},\frac{1}{2},0,0,0,0,0,1.1572,0.1727,0.4003,0.5056,0.0000\right)$	simplify	\rightarrow	$\begin{pmatrix} \frac{0.6970 \cdot P}{h} \\ \frac{1.8853 \cdot P}{h} \\ \frac{0.2785 \cdot P}{h} \end{pmatrix}$

Press F1 for help. AUTO NUM Page 2

Résultats des contraintes pour maillage à dix éléments

III -7 Comparaison des résultats :

Le schéma suivant illustre les nœuds caractéristiques A, B et C qui sont sélectionnés pour comparer les résultats obtenus pour les différents cas de maillage considérés.

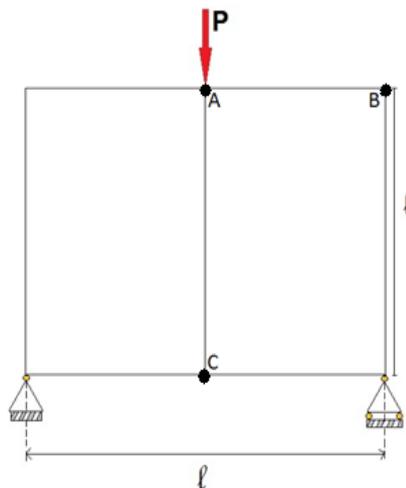


Figure III-6 : points caractéristiques utilisés pour la comparaison des résultats

Le tableau III-3 présenté ci-dessous rassemble les résultats des déplacements obtenus par l'exécution du programme **Gauss** pour les quatre cas de maillage aux points caractéristiques de la poutre-cloison, afin de faire des comparaisons des résultats de tout les cas étudiés.

Nœuds	déplacements	Maillage à 8 éléments	Maillage à 12 éléments	Maillage à 16 éléments	Maillage à 20 éléments
A	Suivant x	0	0	0	0
	Suivant y	1.9019	2.00	2.04	2.06
B	Suivant x	-0.0697	-0.11	-0.15	-0.18
	Suivant y	1.1084	1.11	1.11	1.09
C	Suivant x	0	0	0	0
	Suivant y	1.0100	1.11	1.15	1.15

Tableau III-3 : les déplacements des points caractéristiques de la poutre-cloison

Le tableau III-4 présenté ci-dessous rassemble les contraintes des éléments finis qui contiennent les points caractéristiques de la poutre-cloison, ces résultats sont obtenus par l'exécution du programme **SIGMA**, pour les quatre cas de maillage

élément		maillage à 8 éléments	élément		maillage à 12 éléments	élément		maillage à 16 éléments	élément		maillage à 20 éléments
contrainte			contrainte			contrainte			contrainte		
1	σ_x	-0.3594	1	σ_x	- 0.488	1	σ_x	- 0.5829	1	σ_x	-0.6465
	σ_y	- 1.3199		σ_y	- 1.459		σ_y	- 1.5999		σ_y	- 1.6688
	τ_{xy}	- 0.6801		τ_{xy}	- 0.7564		τ_{xy}	- 0.8004		τ_{xy}	- 0.8272
4	σ_x	0.5366	6	σ_x	0.6553	8	σ_x	0.6924	10	σ_x	0.6970
	σ_y	- 1.4642		σ_y	- 1.7070		σ_y	- 1.8298		σ_y	-1.8853
	τ_{xy}	- 0.5366		τ_{xy}	- 0.4368		τ_{xy}	-0.3460		τ_{xy}	- 0.2785

N.B Multiplication (P/h)

Tableau III-4 : montrant les contraintes des extrémités de la poutre-cloison

Conclusion générale

Cette initiation à la recherche qui va de la modélisation mathématique de notre problème, qui est celui de la théorie de l'élasticité plane, jusqu'à sa réalisation numérique et son implémentation sur micro-ordinateur. Ainsi nous avons trouvé une véritable possibilité qui nous a permis de nous servir de l'ensemble des connaissances théoriques et techniques que nous avons apprises tout au long de notre parcours universitaire, ainsi que de nouvelles connaissances acquises durant la préparation de ce mémoire à savoir ; la maîtrise de la théorie d'élasticité et son application et notamment le problème plan d'élasticité.

La bonne compréhension de la méthode des éléments finis et son utilisation pour la résolution du problème plan d'élasticité, ainsi que de différentes techniques de programmation.

La maîtrise du logiciel de calcul symbolique Mathcad et son utilisation pour effectuer tous les calculs rencontrés et notamment pour la préparation des codes de calculs utilisés pour l'automatisation des étapes principales de la méthode des éléments finis, à savoir, le calcul des matrices de rigidité des éléments finis, leur assemblage et la résolution des systèmes des équations des différents cas de maillage considérés.

L'utilisation de différents schémas de maillage de notre structure nous a donné des résultats comparables ce qui permet de conclure que les étapes de l'algorithme de résolution appliquées sont correctes. Nous avons également constaté en analysant les résultats que les dimensions géométriques des éléments finis triangulaires utilisés ont une influence sur les résultats.

BIBLIOGRAPHIE

- [01] ATANACKOVIC M., theory of elasticity for scientists and engineers, Birkhäuser, 2012, ISBN-10: 081764072X.
- [02] BARBER J. R., elasticity, solid mechanics and its applications, DOI 10.1007/978-90-481-3809_33, Springer Science+Business Media B.V.2010
- [03] BIRKELAND B., calculus and algebra with Mathcad 2000, printed in sweden, student litteratur, Lund. Art. No. 7193. ISBN 91-44-01356-6.
- [04] BONNET M. & FRANGI A., analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis. Edition de l'école polytechnique, décembre-2007. 91128 Palaiseau Cedex. ISBN 273021349x.
- [05] CAPECCHI D. & GIUSEPPE R., strength of materials and theory of elasticity in 19th century Italy, Springer international publishing Swizerland 2015. ISBN 978-3-319-05523-7.
- [06] CARROLL W.F., a primer for finite elements in elastic structures. ISBN 0-471-28345-2 (cloth :alk. Paper) 1. elastic analysis (Engineering) 2. finite element method. TA 653.C37 1998.
- [07] CUILLIERE J-C., introduction à la méthode des éléments finis. Dunod, Paris, 2011 ISBN 978-2-10-056438-5
- [08] DESTUYNDER P., une théorie asymptotique des plaques minces en élasticité linéaire. MASSON, janvier 1986.
- [09] GAY.D & GAMBELIN J., une approche simple du calcul des structures par la méthode des éléments finis. Hermès, Paris, 1989.
- [10] HETNARSKI B., (2010-10-18), the mathematical theory of elasticity, second edition, Editeur : CRC Press (1657), ASIN: B01FJ1DTPC.
- [11] MACERI A., theory of elasticity, Springer, 1769, ASIN: B01JXTZ8EQ.
- [12] NASH A W., RDM série schaum T. 1 & T. 2. Edition française, Mc Graw-Hill, 1975, New York.
- [13] PATRON V. & PERLINE P., méthodes de la théorie mathématique de l'élasticité T. 1, traduit du russe par DER-MEGREDITCHIAN C., edition Mir, 1984, U.R.S.S.
- [14] ROUABHI A., méthode des éléments finis, polycopié, septembre 2014, Boumerdes.
- [15] SADD H M., elasticity theory, applications, and numerics. Elsevier Inc. ISBN 0-12-605811-3.
- [16] SOLOMON L., élasticité linéaire, éditeurs 120 boulevard Saint Germain, Paris 1968.

[17] TIMOSHENKO S.P., theory of elasticity, third edition. Indian edition.

[18] ZIENKIEWICZ O C. & TAYLOR R L. & ZHU J Z., the finite element methode. Sixth edition. Elsevier, 2005. First published in 1967 by McGraw-Hill.



A. Wöhler : né le 22 juin 1819 à Soltau, mort le 21 mars 1914 à Hanovre, était un ingénieur allemand spécialisé dans le comportement mécanique des fontes et des aciers, notamment connu pour ses travaux sur la fatigue des métaux. Il a laissé son nom à la courbe de Wöhler, qui donne la contrainte appliquée en fonction du nombre de cycles à rupture



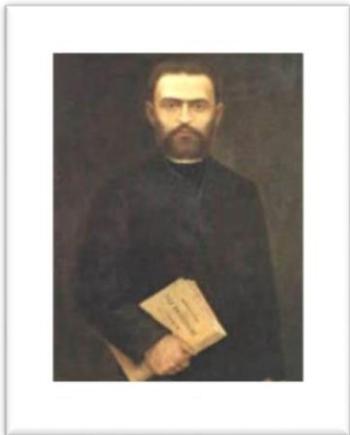
R. Hooke : est un scientifique anglais né le 18 juillet 1635 et mort le 3 mars 1703. Il est considéré comme l'un des plus grands scientifiques expérimentaux et l'une des figures clés de la Révolution scientifique de l'époque moderne. En 1660, Hooke découvrit la loi d'élasticité qui porte son nom et qui décrit la variation linéaire de la tension avec l'extension dans un ressort élastique. Il a d'abord décrit cette découverte dans l'anagramme.



A.L. Cauchy, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux le 23 mai 1857, est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique. La prédominance de Cauchy en sciences s'explique par la multitude de ses domaines d'études : ses travaux « embrassent à peu près toutes les branches des sciences mathématiques, depuis la théorie des nombres et la géométrie pure.

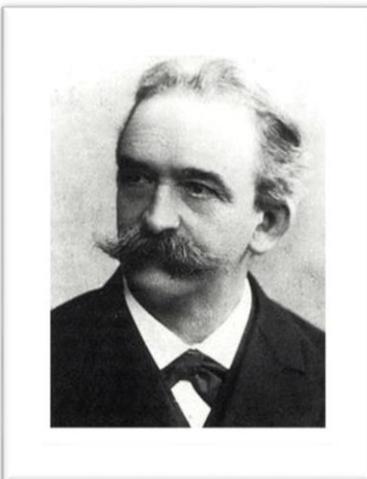


J.Maxwell (13 juin 1831 à Édimbourg en Écosse - 5 novembre 1879 à Cambridge en Angleterre) est un physicien et mathématicien. Il est principalement connu pour avoir unifié en un seul ensemble d'équations, les équations de Maxwell : l'électricité, le magnétisme, en incluant une importante modification du théorème d'Ampère. Il a notamment démontré que les champs électriques et magnétiques se propagent dans l'espace sous la forme d'une onde et à la vitesse de la lumière.



C.Castiglione (né à Asti le 9 novembre 1847, est un ingénieur et un mathématicien italien qui s'illustra par ses travaux en théorie mathématique de l'élasticité et en mécanique des structures déformables.

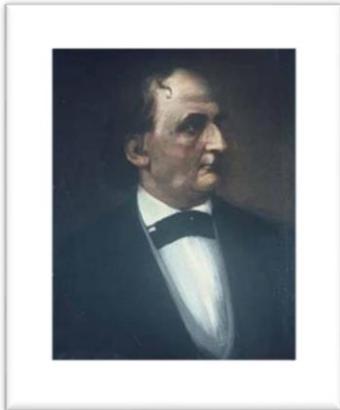
Le théorème de Castiglione, outil fondamental pour la résolution des structures hyperstatiques en élasticité.



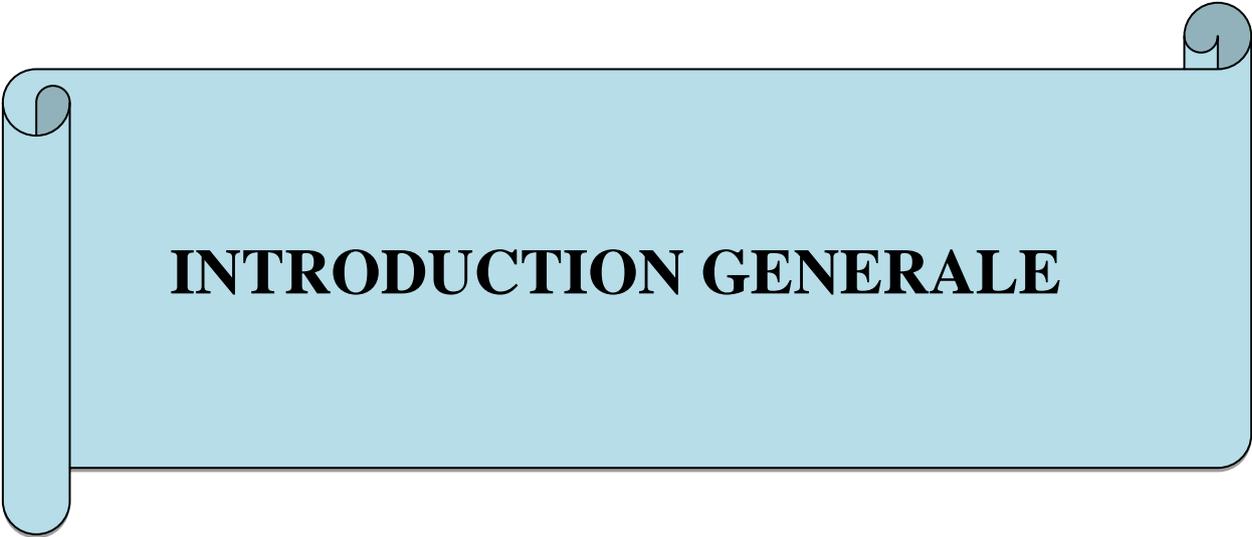
C.Mohr (8 octobre 1835 - 2 octobre 1918) est un ingénieur, un mécanicien et un professeur allemand, connu pour ses contributions à la résistance des matériaux et notamment sa méthode pour représenter l'état de contrainte dans un solide. Mohr se passionnait pour la statique graphique et fit connaître la méthode de représentation de l'état de contrainte tridimensionnel dans un solide. En 1882, il publia la méthode de représentation des contraintes dans un solide par un cercle



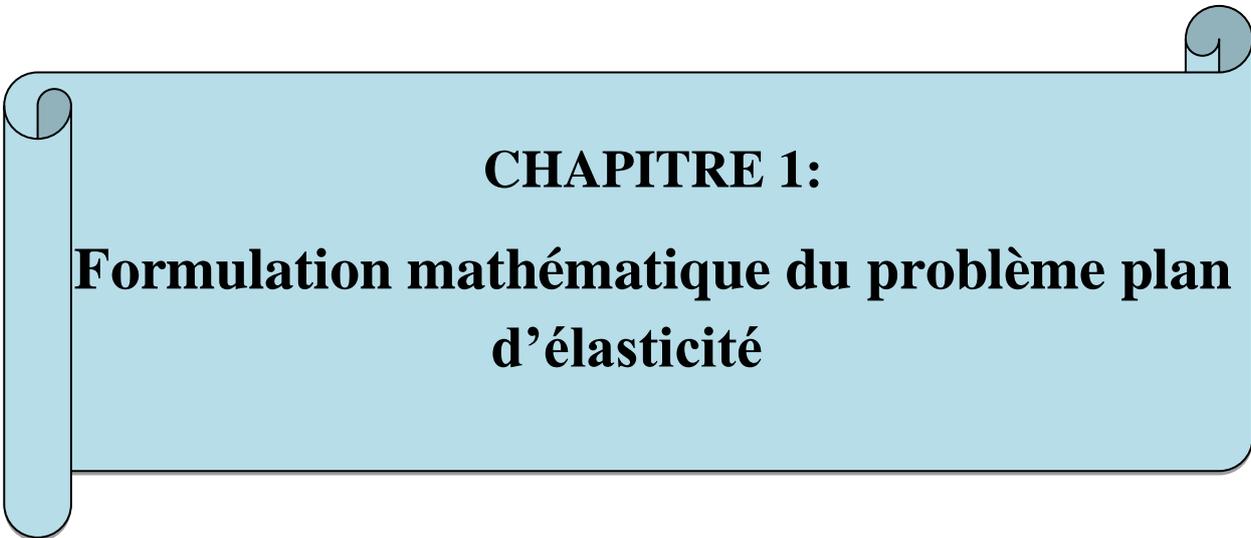
N. Newmark : (né à (New Jersey) le 22 septembre 1910 – mort le 25 janvier 1981) est un expert en structures et universitaire américain, considéré comme l'un des pères du génie parasismique. Il obtient sa licence en génie civil (1930). Il occupe ensuite différents postes au sein de l'université de l'Illinois avant d'obtenir la chaire de Génie Civil en 1943. En 1965 Newmark propose une méthode d'intégration permettant d'évaluer le déplacement final lors d'un séisme d'une masse de sol en rupture plane.



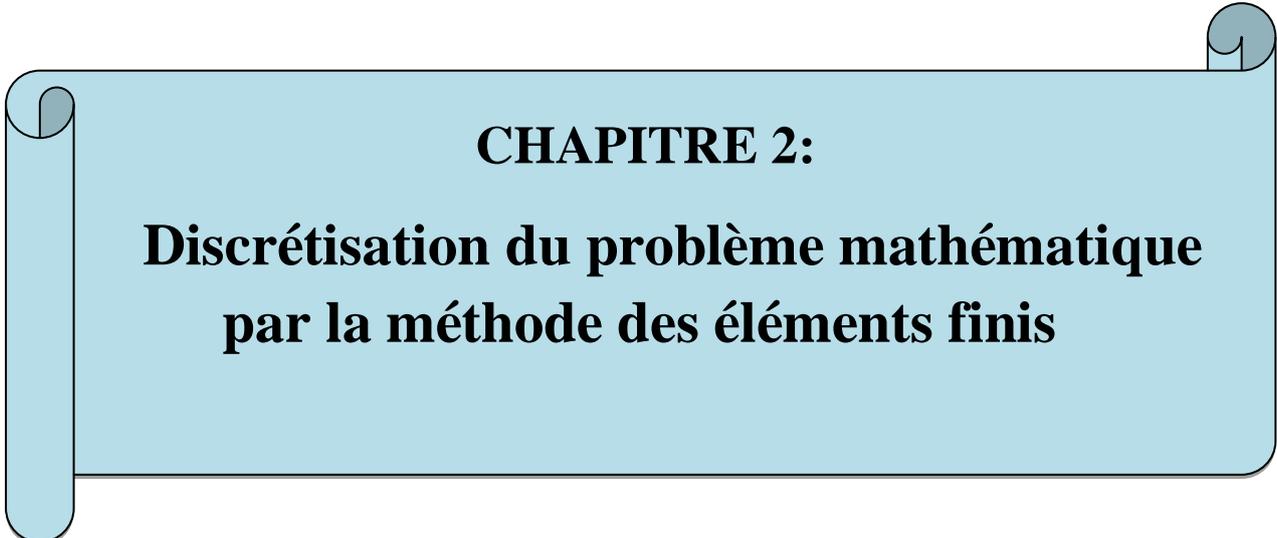
P.L. Seidel, né le 24 octobre 1821 à Deux-Ponts et mort le 13 août 1896 à Munich, était un mathématicien, physicien de l'optique et astronome allemand. Seidel est connu pour la méthode de Gauss-Seidel sur la résolution des équations numériques. Il étudia les aberrations optiques du premier ordre qu'il décompose en cinq polynômes dits polynômes de Seidel.



INTRODUCTION GENERALE

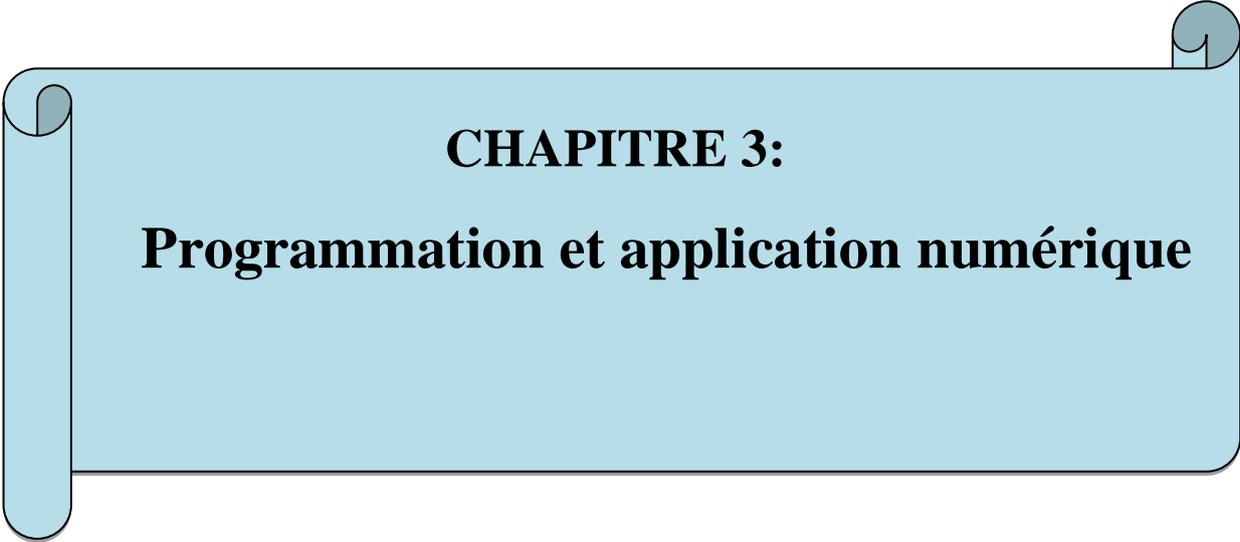


CHAPITRE 1:
**Formulation mathématique du problème plan
d'élasticité**

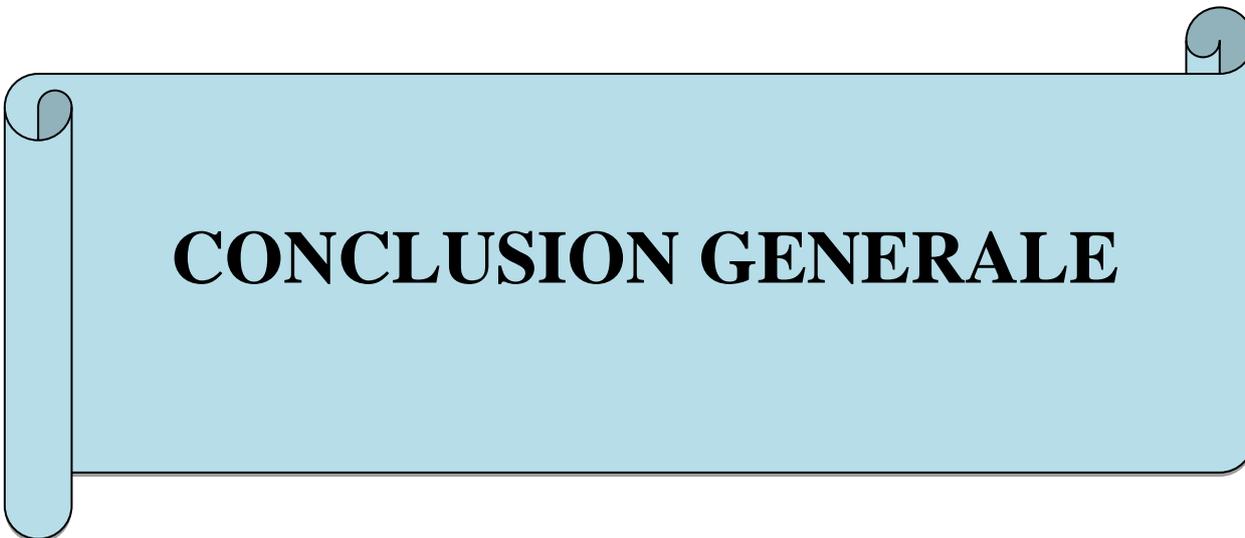


CHAPITRE 2:

Discrétisation du problème mathématique par la méthode des éléments finis



CHAPITRE 3:
Programmation et application numérique

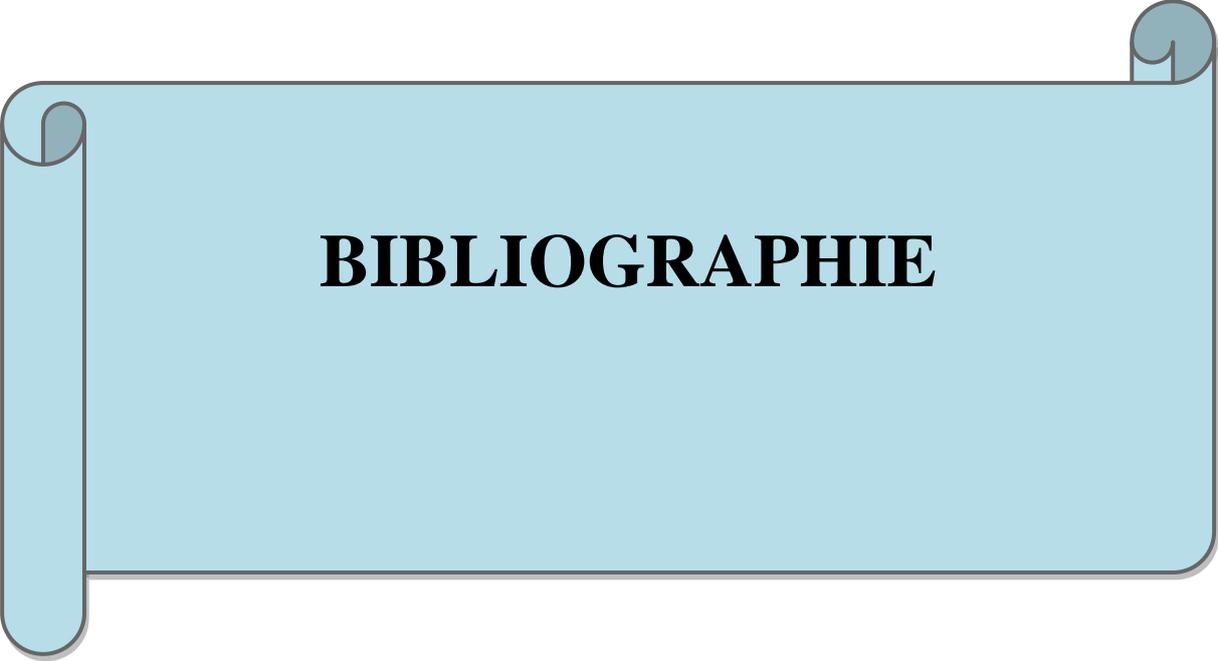


CONCLUSION GENERALE



ANNEXES

PORTRAITS DE QUELQUES SAVANTS



BIBLIOGRAPHIE

Résumé

Ce travail consiste à résoudre le problème plan d'élasticité que ce soit problème de déformation plane ou de contrainte plane. Il comprend une formulation différentielle du problème représenté par les équations aux dérivées partielles de l'équilibre, celles géométriques et physiques, ainsi qu'une formulation variationnelle basée sur la fonctionnelle de Lagrange.

La discrétisation du problème est effectuée par la méthode des éléments finis. Quelques programmes sont élaborés au moyen de Mathcad pour effectuer les calculs des étapes principales à savoir, le calcul des matrices de rigidité, l'assemblage de ces dernières, la résolution des systèmes des équations algébriques de l'application considérée dans le mémoire.

المخلص

الهدف من هذا البحث دراسة مشكل المرونة السطحية، سواء كان مشكل التشوهات السطحية او القوة السطحية يتضمن هذا العمل تكوين معادلة تفاضلية متمثلة في معادلات ذات اشتقاق جزئي للتوازن و الهندسة والفزياء كذلك صياغة متغيرة قائمة على معادلة لاغرانج و تفريد المشكل يكون بواسطة طريقة العناصر المحددة . بعض البرامج مصممة بواسطة ماطكاد لانجاز حسابات المراحل الاساسية التي تتمثل في حساب مصفوفات الصلابة، تجميعها و حل مجموعة المعادلات الجبرية للمثال المتخذ في المذكرة .

Abstract

This work consists of solving the problem plane of elasticity which is a problem of plane strain or plane stress. It includes a differential formulation of the problem represented by the partial differential equations of equilibrium, the geometric and physical equations, as well as a variational formulation based on the Lagrange functional.

The discretization of the problem is carried out by the finite element method. Some programs are elaborated by means of Mathcad to solve the calculations of the principal. The formulation of the matrix of rigidity, the assembly of these last ones, the resolution of the systems of the algebraic equations of the application considered in the dissertation.