

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université M'hamed BOUGARA - BOUMERDES
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Magister
Spécialité : Mathématiques
Option : Modèles stochastiques

Thème

**Discrétisations et résolutions numériques des équations
différentielles stochastiques rétrogrades**

Présenté par

ZITOUNI Mahieddine

Soutenu publiquement le :

Devant le jury composé de :

Président :	GUERBYENNE Hafida	Maître de Conférences. Classe A	USTHB - Alger
Promoteur :	KHALDI Khaled	Maître de Conférences. Classe A	Umhb - Boumerdes
Co-Promoteur :	ABASSOV Assim	Maître de Conférences. Classe A	Umhb - Boumerdes
Examineur :	OURBIH Megdoua	Maître de Conférences. Classe A	U.A. Mira - Bejaia
Examineur :	OSMANOV Hamid	Professeur	Umhb - Boumerdes

Année universitaire 2009 - 2010

A la mémoire de mes parents

Sommaire

Introduction Générale	6
Résumé	8
 CHAPITRE 1 : Généralités, Le Mouvement Brownien, Intégrale stochastique et la topologie de Skorkhod	
1.1 Généralités	11
1.1.1 Tribus.....	11
1.1.2 Filtration.....	11
1.1.3 Processus aléatoires, Fonctions Mesurables et progressivement mesurables	12
1.1.4 Processus Adaptés	13
1.1.5 Martingales continues	14
1.1.6 Martingales discrètes	14
1.1.7 Temps d'arrêt	14
1.1.8 Processus de Markov	16
1.2 Le Mouvement Brownien	16
1.2.1 Propriétés trajectorielles du mouvement Brownien	18
1.2.2 Propriété de Markov	19
1.2.3 Construction du Mouvement Brownien	20
1.2.4 Temps d'atteinte (Cas de Brownien)	22
1.2.5 Le Mouvement Brownien géométrique	23
1.2.6 Le Mouvement Brownien multidimensionnel	23
1.2.7 Le Mouvement Brownien généralisé	23
1.3 Intégrale stochastique	23
1.3.1 Processus d'ito	24
1.3.2 Représentation des martingales browniennes	26
1.4 La topologie de Skorkhod	27
1.4.1 Le cas déterministe	27
1.4.2 Le cas des processus aléatoires	27

Chapitre2 : Équations différentielles stochastiques et équations différentielles stochastiques rétrogrades.

2.1- Equations différentielles stochastiques.....	30
2.1.1 Existence et unicité de la Solution.....	31
2.1.2 Propriété de Markov.....	31
2.1.3 Martingale exponentielle.....	32
2.1.4 Représentation probabiliste de solutions d'équations aux dérivées partielles. Formule de Feynman-Kac.....	32
2.2 Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades.....	34
2.2.1 Existence et unicité de la solution.....	36
2.2.2 Existence de la solution sous les Conditions de Lipchitz locales.....	37
2.2.3 Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades monotones.....	39
2.2.4 Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades Linéaires.....	39
2 2.5 Relation entre EDSR et EDP .Généralisation de la formule Fynman- Kac aux EDSR.....	40
2.2.7 Equations stochastiques rétrogrades discrètes.....	41
2.2.8 Equations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies.....	43
2.2.9 Existence et unicité de la solution.....	45

Chapitre 3 : Simulation et discrétisation des processus stochastiques

3.1 Méthodes de Monte Carlo.....	46
3.1.1 principe de la méthode de M.Carlo.....	46
3.1.2 Fonction d'importance.....	48
3. 1.3 Simulation de processus.....	48
3.1.4 Simulation récursive.....	48
3.1.5 Simulation rétrograde.....	49
3.1.6 Simulation du mouvement Brownien.....	49
3.2 Discrétisation d'équations différentielles stochastiques.....	50
3.2.1 Schéma de discrétisation d'Euler (la méthode d'Euler Maruyama).....	50
3.2.2 Convergence L^p	51
3.2.3 Convergence faible.....	51
3.2.4 Exemples.....	52
3.2.5 Schéma de Milshtein.....	53
3.2.6 Théorème du point fixe	55
3.3 Discrétisation et la résolution numérique des équations différentielles Stochastiques rétrogrades.....	56
3.3.1 Discrétisation des EDSR dans le cas où le driver ne dépend que de t et Y_t	57
3.3.2 Convergence du schéma de discrétisation.....	60

3.3.3 discrétisation des EDSR dans le cas où le driver dépend de t , Y_t et Z_t	60
3.3.4 Convergence des schémas de discrétisation.....	62
3.3.5 Quelques exemples de simulation.....	63
3.3.6 Résultats numériques.....	74
3.4 Discrétisation et résolution numérique des équations différentielles Stochastiques rétrogrades réfléchies non markoviennes avec une seule barrière inférieure continue.....	76
3.4.1 Schéma réfléchi implicite	77
3.4.2 Schéma réfléchi explicite.....	77
3.4.3 Schémas de pénalisation numérique.....	77
3.4.4 Convergence des schémas de discrétisation.....	79
3.4.5 Exemple de simulation.....	80

Chapitre 4 : Discrétisations des équations différentielles stochastiques Rétrogrades markoviennes.

4.1 Discrétisation dans le cas où le driver ne dépend pas de Z	88
4.2 Majoration d'erreurs et convergence du schéma.....	91
4.3 Généralisation au cas où le driver dépend de Z	91

Chapitre 5 : Applications des EDSR dans le domaine des finances

5.1 Options financières.....	95
5.1.1 L'option européenne.....	96
5.1.2 Formule de Black et Scholes.....	97
5.2 L'approche EDSR.....	98
5.2.1 Exemples d'application des EDSR pour l'évaluation d'un call et d'un put européens.....	99
5.3 Option américaine.....	105
5.3.1 L'approche edsr réfléchies	106
Conclusion.....	115
Annexe.....	116
Résolution des équations aux dérivées partielles par la méthode des différences finies.....	116
Références.....	120

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier Monsieur KHALDI pour avoir accepté de diriger ce mémoire et pour ses conseils précieux qui m'ont été énormément utiles, j'en suis reconnaissant également envers Monsieur ABASSOV pour sa participation à la direction de ce travail.

Je remercie chaleureusement Madame GUERBYENNE d'avoir accepté de présider le jury et Madame OURBIH et Monsieur OSMANOV pour leur acceptation de juger mon travail.

Je tiens à remercier d'une façon particulière mes enseignants de l'année théorique : Monsieur ABASSOV, Monsieur HAMADACHE , Monsieur KHALDI et Monsieur OSMANOV sans oublier mes camarades de parcours qui sont la source d'une bonne ambiance de travail, en particulier, Monsieur HENNACH, Madame MEDDAHI et Monsieur TAZROUTI.

INTRODUCTION

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades, notées EDSR, edsr ou en anglais BSDE (backwards stochastic differentials equations), ont été introduites dans [13] pour la première fois en 1973 par J.M .Bismut dans le cas linéaire . Le premier résultat dans le cas général a été publié en 1990 par S.Peng et E.Pardoux dans [52] , c'est en 1997 que N.Elkaroui, S. Peng et M.C.Quenez dans [27] écrivent l'article fondateur de l'application des EDSR au domaine financier et depuis , le travail de recherche dans ce domaine s'est diversifié et une importance particulière a été donnée aux problèmes de résolution numérique des edsr (tout genres confondus) dans le cas où la filtration est brownienne , ce qui a augmenté l'importance et l'intérêt de l'application des EDSR dans plusieurs domaines tels

- Le contrôle stochastique
- La finance
- Calcul différentiel et équations aux dérivés partielles ect...

Dans ce mémoire qui se compose de cinq chapitres, et qui a pour but essentiel d'exposer quelques méthodes, exemples et applications sur la résolution numérique de quelques types d'équations différentielles stochastiques rétrogrades, par conséquent, il est peut être scindé en trois parties principales :

- Discrétisation des équations différentielles stochastiques rétrogrades
- quelques exemples de Simulation de ces équations.
- Exemples d'application dans le domaine des finances.

Dans le premier chapitre, on trouve quelques rappels de base concernant le calcul stochastique et les processus de diffusion.

Dans le second chapitre on a exposé ,en résumé, les grandes lignes concernant les équations différentielles stochastiques , les équations différentielles stochastiques rétrogrades et les équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies ,avec une seule barrière inférieure continue, et les théorèmes d'existence et d'unicité des solutions concernant ces équations.

Le troisième chapitre comporte six parties :

La première partie est consacrée aux méthodes de discrétisation des EDS tels la méthode d'Euler Maryuma et la méthode de Milstein avec quelques exemples de simulation d'EDS.

Dans la deuxième partie ,on a donné une description de quelques méthodes d'approximation d'EDSR où la méthode des marches aléatoires a été prise comme exemple. Cette méthode qui a été utilisée dans plusieurs travaux (par exemple [11],[22] , [41] , [42] , [51]) sur la résolution numérique des edsr ,se base sur l'approximation du mouvement brownien W par une suite de marches aléatoires sur un espace de probabilité de dimension fini puis l'écriture de l'équation rétrograde associée ,en temps discret.

Après la partie théorique où figure les schémas de discrétisation issues de cette méthode avec les théorèmes de convergence associés, pour un cas particulier des edsr dit cas non markovien, on a réservé une place dans la quatrième partie de ce chapitre à quelques exemples de simulation, dans des cas particuliers, suivant les schémas de discrétisation proposés.

Dans la cinquième et la sixième partie on a suivi, à peu près, les mêmes démarches vues dans la troisième et la quatrième partie, dans le cas des edsr , mais cette fois ci pour les edsr réfléchies avec une seule barrière inférieure continue.

Dans le quatrième chapitre on a exposé, en résumé, quelques travaux faits sur l'approximation d'edsr dans le cas markovien.Ce type, important, d'edsr se caractérise par la dépendance de la condition terminale et du générateur de l'edsr d'une variable aléatoire qui est la solution d'une EDS ; par conséquent la propriété de Markov pour les EDS se transmet aux edsr.

Dans le cinquième et dernier chapitre, on trouve quelques applications des edsr dans le domaine des finances tels l'évaluation du prix d'options européennes et la détermination du prix d'options et les temps d'arrêt dans le cas des options américaines avec la comparaison des valeurs approximées, par la méthode des EDSR, avec celles trouvées avec d'autres méthodes.

Abstract

In this work, that I shared in five chapters, and that has essential goal to expose some methods, examples and applications on the numeric resolution of some types of backward stochastic differential equations

In the first chapter, I gave some basics recalls concerning the stochastic calculation and processes of diffusion.

In the second chapter, I exposed, in summary, the important points in the topic of stochastic differential equations, the backward stochastic differential equations, and the reflected stochastic differential equations with one barrier and theorems of existence and uniqueness of solutions concerning these equations.

The third chapter is dedicated to discretisation methods of BSDE and reflected BSDE with only one continuous lower barrier. In the non Markovian case and I gave a description of some methods of BSDE approximation where the random walk method has been taken like example. After the theoretical part, one place of this chapter is reserved to some examples of simulation, in the particular cases, according to schemes of discretisation proposed.

In the fourth chapter, I tried to expose, in summary, some works made on the approximation of BSDE in Markovian case.

I exposed in the fifth and last chapter, some applications of BSDE in the financial domain such as the assessment of the European option price and the determination of the option price and the exit times in the case of the American options.

Résumé

A travers ce modeste travail nous avons essayé d'exposer quelques méthodes, exemples et applications sur la résolution numérique des équations différentielles stochastiques rétrogrades,

Dans le premier chapitre, on a donné quelques rappels de base concernant le calcul stochastique et les processus de diffusion Dans le second chapitre on a exposé en résumé, les grandes lignes concernant les équations différentielles stochastiques, les équations différentielles stochastiques rétrogrades et rétrogrades réfléchies avec une seule barrière et les théorèmes d'existence et d'unicité des solutions concernant ces équations.

Le troisième chapitre est consacré aux méthodes de discrétisation des EDS en général et des EDSR en particulier avec une description de quelques méthodes d'approximation d'EDSR et des EDSR réfléchies avec une seule barrière inférieure continue .

Dans ce chapitre on a donné les schémas de discrétisation avec les théorèmes de convergence associés, pour un cas particulier d'EDSR dit non markovien ,pour la discrétisation nous avons utilisé une méthode appelée la méthode des marches aléatoires.

Après l'étude théorique on a réservé une place dans ce chapitre à quelques exemples de simulation.

Dans le quatrième chapitre on a donné un petit résumé sur quelques travaux faits sur l'approximation d'EDSR dans le cas markovien.

Dans le cinquième et dernier chapitre, on trouve quelques applications des EDSR dans le domaine des finances tels l'évaluation du prix d'options européennes et la détermination du prix d'options et les temps d'arrêt dans le cas des options américaines.

ملخص

إن الهدف الأساسي لهذه المذكرة والمقسمة إلى خمسة فصول, هو عرض بعض الطرق الخاصة بالحل العددي لأصناف من المعادلات التفاضلية الستوكاستكية التراجعية.

في الفصل الأول قمنا بالتذكير ببعض التعريفات والنظريات الهامة المتعلقة بالحساب الستوكاستكي وسير النشر

في الفصل الثاني تم التطرق بإيجاز للمواضيع المتعلقة بالمعادلات التفاضلية الستوكاستكية, المعادلات التفاضلية الستوكاستكية التراجعية و المعادلات التفاضلية الستوكاستكية التراجعية المنعكسة ذات الحاجز الواحد المستمر السفلي مع ذكر نظريات وجود ووحدانية الحلول الخاصة بها.

خصص الفصل الثالث للتعريف ببعض الطرق الخاصة بتبسيط أو تقطيع المعادلات التفاضلية الستوكاستكية والمعادلات التفاضلية الستوكاستكية التراجعية و التراجعية المنعكسة حيث اعتمدنا طريقة المشي العشوائي كمثال كما نجد العرض النظري لهذه الطريقة و الخاص بالنوع الغيرماركوفي من هذه المعادلات والمحتوي على مناهج التبسيط أوالتقطيع و نظريات تقاربها كما خصصنا جانباً من هذا الفصل لبعض أمثلة محاكاة حالات خاصة من هذه المعادلات حسب هذه المناهج.

في الفصل الرابع نجد ملخص عن بعض الأعمال المنجزة في موضوع المعادلات التفاضلية الستوكاستكية التراجعية الماركوفية.

في الفصل الخامس والأخير أدرجت بعض الأمثلة عن تطبيق المعادلات التفاضلية الستوكاستكية التراجعية في الميدان المالي كتحليل الثمن في حالة الاختيار الأوروبي وتقييم الثمن وأزمة التوقف في حالة الاختيار الأمريكي.

Chapitre 1

Généralités, Le Mouvement Brownien, Intégrale Stochastique et la topologie de Skorokhod.

1.1 - GENERALITES

1.1.1 Tribus

Définition 1.1

Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace de probabilité (qu'on suppose complet) ou Ω est l'espace fondamental dont les éléments sont notés ω et \mathfrak{F} une tribu sur Ω . Une tribu ou (σ -algèbre) sur Ω est une famille de parties de Ω telle que

- a) $\emptyset \in \mathfrak{F}$
- b) $\forall A \in \mathfrak{F}$ alors $A^c \in \mathfrak{F}$ (stable par passage au complémentaire)
- c) stable par union et intersection dénombrable

Notation

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note par $\beta(\mathbb{R}^n)$ (ou $\beta_{\mathbb{R}^n}$), la tribu borélienne sur \mathbb{R}^n et par $\sigma(X)$ la plus petite tribu qui rend une variable aléatoire X mesurable et on a $\sigma(X) = \{X^{-1}(E); E \in \beta(\mathbb{R}^n)\}$.

On appelle processus stochastique, une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ définies sur cet espace.

1.1.2 Filtration

Définition 1.2

On appelle filtration, une famille croissante de sous tribus $(\mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ de \mathfrak{F} .

Cette tribu est dite complète si $\forall t \in \mathbb{R}_+$, \mathfrak{F}_t contient les ensembles négligeables N de F où $N = \{N \subset \Omega; \exists A \in \mathfrak{F}, N \subset A, p(A) = 0\}$.

Remarque : on peut toujours se ramener au cas d'une tribu complète en changeant \mathfrak{F}_t en tribu engendré par $(N \cup \mathfrak{F}_t)$, $\sigma(N \cup \mathfrak{F}_t)$.

De point de vue plus concret, \mathfrak{F}_t représente les informations existantes jusqu'à la date t , stockée dans \mathfrak{F} .

1.1.3 Processus aléatoires, Fonctions Mesurables et progressivement mesurables

Définition 1.3

Soit S un ensemble. On appelle processus stochastique indexé par S et à valeurs dans \mathbb{R}^d une famille $(X_t)_{t \in S}$ d'applications mesurables de (Ω, \mathfrak{F}) dans $(\mathbb{R}^d, \beta(\mathbb{R}^d))$; pour tout $t \in S$, $(X_t)_{t \in S}$ est une variable aléatoire.

Dans la suite on a affaire soit à $S = \mathbb{N}$, ce qui correspond au cas discret, soit à $S = \mathbb{R}$, ce qui correspond au cas continu.

La caractéristique de base d'un processus stochastique est le fait que la loi de la variable X_t soit fonction de t . Une réalisation d'un processus est appelée trajectoire. C'est donc la suite des réalisations des variables aléatoires X_t . Les réalisations d'une même variable aléatoire pouvant être différentes, les réalisations d'un même processus peuvent donner des trajectoires différentes.

Exemples : Jeu de "Pile ou Face". Après chaque lancer, le joueur gagne s'il obtient "Pile" et perd s'il obtient "Face". La variable X_n , $n \in \mathbb{N}$ représentant sa fortune après n tirages est un processus à valeurs dans \mathbb{R} , appelé marche aléatoire ou processus de Bernoulli.

Définition 1.4

Soit (Ω, \mathfrak{F}) et (Ω', \mathfrak{F}') deux espaces mesurables. Une application $f: \Omega \rightarrow \Omega'$ est dite mesurable par rapport à $(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}')$ si $f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}, \forall A \in \mathfrak{F}'$ où $f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / f(\omega) \in A\}$. Si X est une variable aléatoire \mathfrak{F} mesurable et f une fonction Borélienne alors $f(X)$ est \mathfrak{F}' mesurable.

Définition 1.5

Soient X et Y deux processus. X est une modification de Y si, pour tout $t \geq 0$, les v.a. X_t et Y_t sont égales P-p.s. : $\forall t \geq 0, P(X_t = Y_t) = 1$.

On dit que X et Y sont indistinguables si, P-p.s., les trajectoires de X et de Y sont les mêmes c'est à dire $P(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1$.

Définition 1.6

Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit mesurable si la fonction $X_t: (\mathbb{R}_+, \beta(\mathbb{R}_+)) \times (\Omega, \mathfrak{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \beta_{\mathbb{R}^n})$ qui à $(t, \omega) \in (\mathbb{R}_+, \beta(\mathbb{R}_+)) \times (\Omega, \mathfrak{F})$ associe $X_t(\omega) \in (\mathbb{R}^n, \beta_{\mathbb{R}^n})$ est mesurable.

Définition 1.7

Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit progressivement mesurable si $\forall T > 0$, la fonction

$X_t : ([0, T], \beta_{[0, T]}) \times (\Omega, \mathfrak{F}_T) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \beta_{\mathbb{R}^n})$ qui à $(t, \omega) \in ([0, T], \beta_{[0, T]}) \times (\Omega, \mathfrak{F}_T)$ associe $X_t(\omega) \in (\mathbb{R}^n, \beta_{\mathbb{R}^n})$ est mesurable.

1.1.4 Processus Adapté

Définition 1.8

Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit adapté à la filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ si X_t est \mathfrak{F}_t mesurable.

Remarque :

Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.

1.1.5 Martingales continues [40]

Définition 1.9

Une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une martingale (continue) par rapport à la filtration (\mathfrak{F}_t) si

(1) X_t est \mathfrak{F}_t mesurable et intégrable pour tout t .

(2) $E(X_t | \mathfrak{F}_s) = X_s \quad \forall s \leq t$.

Propriétés

Si X est une martingale $E(X_t) = E(X_0) \quad \forall t$.

Si $(X_t, t \leq T)$ est une martingale, le processus est complètement déterminé par sa valeur terminale : $X_t = E(X_T | \mathfrak{F}_t)$.

Définition 1.10

Une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une surmartingale (resp. sous martingale) par rapport à la filtration \mathfrak{F}_t si

- X_t est \mathfrak{F}_t mesurable et intégrable pour tout t .

- $\forall s \leq t \quad X_s \geq E(X_t | \mathfrak{F}_s)$ (resp. $X_s \leq E(X_t | \mathfrak{F}_s)$).

1.1.6 Martingales discrètes [40]

Définition 1.11

Une famille de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingales par rapport à la filtration \mathfrak{F}_n si

- (1) X_n est intégrable $\forall n \in \mathbb{N}$.
- (2) X_n est \mathfrak{F}_n mesurable $\forall n \in \mathbb{N}$
- (3) $E(X_{n+1} | \mathfrak{F}_n) = X_n \forall n \in \mathbb{N}$

Propriétés

On a

$$E(X_{n+p} | \mathfrak{F}_n) = X_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$$

Proposition 1.1 (inégalité de Doob). [57]

Si X est une martingale continue, $E(\sup_{s \leq T} X_s^2) \leq 4E(X_T^2)$.

1.1.7 Temps d'arrêt

Avant de formuler mathématiquement la notion de temps d'arrêt, donnons un exemple concret :

Imaginez qu'on possède une action et on veut la vendre à un certain Temps T qui va dépendre de l'évolution du marché.

le temps T où on va devoir vendre ne doit dépendre que de l'information qu'on a collecté jusque là. Par exemple, on peut pas vendre l'action au moment T_{\max} où son cours atteint son maximum car au temps T_{\max} , personne ne sait que le cours est à son maximum.

Donnons deux exemples d'ordre de vente possible : vendre au temps T où le cours de l'action a réalisé pour la première fois une progression de 15% sur les 100 derniers jours, ou bien vendre au premier temps T où le cours dépasse 100 dollars. Dans ces deux cas, la décision est bien prise en fonction de l'information dont on dispose au temps T ; le temps T est donc un temps d'arrêt.

Comment se caractériser un temps d'arrêt. T ? L'idée est la suivante. Considérons le cas de l'ordre de vente et appelons \mathfrak{F}_n l'information dont on dispose au temps n . Le temps T est un temps aléatoire (il dépend de l'évolution de la bourse), et on sait à partir de l'information \mathfrak{F}_n si $T = n$ ou non.

Définition 1.12

Un temps d'arrêt est une variable τ à valeur dans $\mathbb{R} \cup +\infty$ telle que $(\tau \leq t) \in \mathfrak{F}_t, \forall t \in \mathbb{R}$ où (\mathfrak{F}_t) est la filtration avec $\mathfrak{F}_\infty = \sigma(\cup_t \mathfrak{F}_t)$.

- Une constante positive est un temps d'arrêt.

- On associe à un temps d'arrêt τ , la tribu \mathfrak{F}_τ dite des événements antérieurs à τ , définie par

$$\mathfrak{F}_\tau = (A \in \mathfrak{F}_\infty \mid A \cap (\tau \leq t) \in \mathfrak{F}_t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Propriétés :

- Si T est un temps d'arrêt, T est \mathfrak{F}_T mesurable.
- Si S, T sont des temps d'arrêt, $S \wedge T$ est un temps d'arrêt.
- Si S, T sont des temps d'arrêt tels que $S \leq T$, on a $\mathfrak{F}_S \subset \mathfrak{F}_T$.
- Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus et T un temps d'arrêt fini. On définit X_T par $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$.
- Si un processus X est continu et adapté, X_T est \mathfrak{F}_T mesurable.

Théorème d'arrêt 1.1 [40]

Si T est un temps d'arrêt et M une \mathfrak{F}_t martingale, le processus Z défini par $Z_t = M_{t \wedge T}$ est une \mathfrak{F}_t martingale. En particulier, $E(M_{t \wedge T}) = E(M_0)$

Théorème 1.2 (d'arrêt de Doob) [40]

Si M est une (\mathfrak{F}_t) martingale continue et si S, T sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T \leq K$, K est une constante finie, M_T est intégrable et $E(M_T \mid \mathfrak{F}_S) = M_S$.

Cette égalité se généralise à tout les temps d'arrêt si la martingale est uniformément intégrable.

Si M est uniformément intégrable, on peut montrer que M_t converge p.s. dans L^1 vers M_∞ quand $t \rightarrow \infty$ et que $M_s = E(M_\infty \mid \mathfrak{F}_s)$

Proposition 1.2 [40]

- Si pour tout temps T d'arrêt borné $E(x_T) = E(x_0)$, pour tout t , le processus X est une martingale.

Mais X n'est pas nécessairement une martingale si $E(X_t) = E(X_0)$ pour tout t , par exemple

on a $X_t = \int_0^t M_u du$ ou M est une martingale d'espérance nulle.

- Si M est une surmartingale positive et τ un temps d'arrêt alors $E(M_\tau) \leq E(M_0)$ ou on pose $M_\infty = 0$.

Définition 1.13

-Un processus M adapté, est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt τ_n telle que $\tau_n \rightarrow \infty$ et $(M_{t \wedge \tau_n}, t \geq 0)$ est martingale pour tout n .

-Une martingale locale positive est une surmartingale.

1.1.8 Processus de Markov

Définition 1.14

On dit qu'un processus est de Markov, si son comportement dans le future ne dépend du passé qu'à travers le présent.

Mathématiquement ça se traduit par : soit X un processus et (\mathfrak{F}_t) sa filtration canonique .on dit que le processus est de Markov si , pour tout t , pour toute variable bornée $Y \in \mathfrak{F}_\infty$ on a $E(Y \circ \theta | \mathfrak{F}_t) = E(Y \circ \theta | X_t)$ où θ est l'opérateur de translation définit sur les applications coordonnées par $X_u \circ \theta_s = X_{u+s}$

Remarque [40]

On peut définir aussi un processus de Markov de cette façon :

Pour tout n , pour tout fonction bornée g définie sur \square^n , pour $t_1 < t_2 < \dots < t_n$

$E(g(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, \dots, X_{s+t_n}) | \mathfrak{F}_s) = E(g(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, \dots, X_{s+t_n}) | X_s)$ Ceci implique en particulier, que pour toute fonction f borélienne bornée.

$$E(f(X_t) | \mathfrak{F}_s) = E(f(X_t) | X_s) , \forall t > s .$$

Le processus est dit de Markov fort si la propriété précédente est vraie pour tout couple de temps d'arrêt finis T, S avec $T > S$.

Lemme 1.1 (de Gronwall) [29]

Soit h une fonction continue, positive telle que

$$h(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t h(s) ds \forall t \in [0, T], \beta \geq 0, \alpha : [0, T] \rightarrow \square \quad \text{est} \quad \text{une fonction intégrable}$$

$$\text{.alors, } h(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t \alpha(s) \exp(\beta(t-s)) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

1.2 Le Mouvement Brownien

L'un des processus stochastiques à temps continu les plus importants et les plus utilisés est le mouvement brownien aussi appelé processus de Wiener. C'est un ensemble de particules idéalisées comme des points se déplaçant aléatoirement dans l'espace et dans le temps et qui simultanément se reproduisent et meurent à des taux constants .Le mouvement Brownien est le plus célèbre des processus stochastiques et sans doute le plus central en théorie des Probabilités. C'est le premier processus qui ait été introduit pour modéliser un phénomène réel autre qu'un jeu de hasard :

À l'origine, le mouvement brownien a été découvert par le botaniste Robert Brown en 1828 ; en observant le mouvement des grains de pollen en suspension dans l'eau, il a remarqué que le choc successif entre le pollen et les molécules d'eau, engendre un mouvement de diffusion aléatoire qui prend la forme de trajectoires irrégulières.

Ces trajectoires sont appelées ensuite le mouvement brownien et il est modélisé comme une distribution gaussienne depuis, son champ d'application s'est étendu pour servir à modéliser plusieurs phénomènes dynamiques :

- particules microscopiques en suspension,
 - prix d'actions en bourse,
 - comportement asymptotique de files d'attente,
 - tout comportement dynamique avec part aléatoire (équations différentielles stochastiques)
- en 1900, Bachelier dans [2] a obtenus les premiers résultats quantitatifs concernant les fluctuations des prix des actions en bourse.

en 1905, Einstein a trouvé la densité de probabilité de transition du mouvement brownien à partir de la théorie moléculaire de la chaleur

Dans les années 1923-1924, Wiener a démontré avec une méthode purement mathématique, l'existence du mouvement brownien.

Définition 1.15

On appelle un mouvement brownien (standard) de dimension n et on le note par W_t ou B_t ,

Un processus mesurable adapté à la filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ à valeur dans \mathbb{R}^n tel que

- $W_0 = 0$ p.s
- $t \rightarrow W_t$ est continue p.s
- pour $0 \leq s \leq t$ l'accroissement $W_t - W_s$ est indépendant de \mathfrak{F}_s .
- $\forall s, t, t \geq 0 \leq s \leq t, W_t - W_s$ et W_{t-s} suivent une loi normale centrée de matrice de covariance $\sqrt{(t-s)}Id_n$.

Pour résumer, il s'agit d'un processus gaussien centré à trajectoires continues et à accroissement indépendants.

On montre, dans la suite, qu'il est possible de construire un tel processus par plusieurs manières.

Remarque :

Si $(W_t)_{t \geq 0}$ est un processus continu qui vérifie les conditions :

1. W_t est à accroissement indépendants et stationnaires ie pour tout $0 \leq r \leq s \leq t \leq u, W_u - W_t, W_s - W_r$ sont indépendants et la loi de $W_u - W_t$ ne dépend que de $u-t$.
2. $W_t = W_t - W_0$ suit une loi gaussienne centrée, de matrice de covariance $\sqrt{t}Id_k$

Alors avec la tribu engendrée par $W_t, \{W_t, (\mathfrak{F}_t^\beta)_{t \geq 0}\}$ est un mouvement brownien

où $(\mathfrak{F}_t^\beta)_{t \geq 0} = \sigma((W_t)_{t \geq 0})$,

1.2.1 Propriétés trajectorielles du mouvement brownien

Soit (W_t) un M.B alors on a

1. $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = \limsup_{t \rightarrow +0} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = +\infty$

2. $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = \liminf_{t \rightarrow +0} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = -\infty$

3. P.ps la trajectoire d'un M.B (W_t) passe une infinité de fois par tout point et (W_t) n'est pas dérivable ni à gauche ni à droite.

4. Les trajectoires du M.B sont localement holdériennes – continues d'ordre α , avec $\alpha < 1/2$

Rappelons qu'une fonction f à valeur réelles et définie sur \mathbb{R}^+ est localement hölderienne d'ordre α ; s'il existe une constante C telle que :

$$\text{pour tout } a > 0, \forall (x, y) \in [0, a]^2, |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

Théorème 1.3

Pour n fixé et $t_j = \frac{j}{2^n}t$, j variant de 0 à 2^n , $\sum_{j=1}^{2^n} [W_{t_j} - W_{t_{j-1}}]^2 \rightarrow t$ qd $n \rightarrow \infty$, la convergence ayant lieu en moyenne quadratique et p.s.

Les figure 1 et 2 représentent des trajectoires typiques du mouvement brownien

Allure d'une trajectoire brownienne dans \mathbb{R}

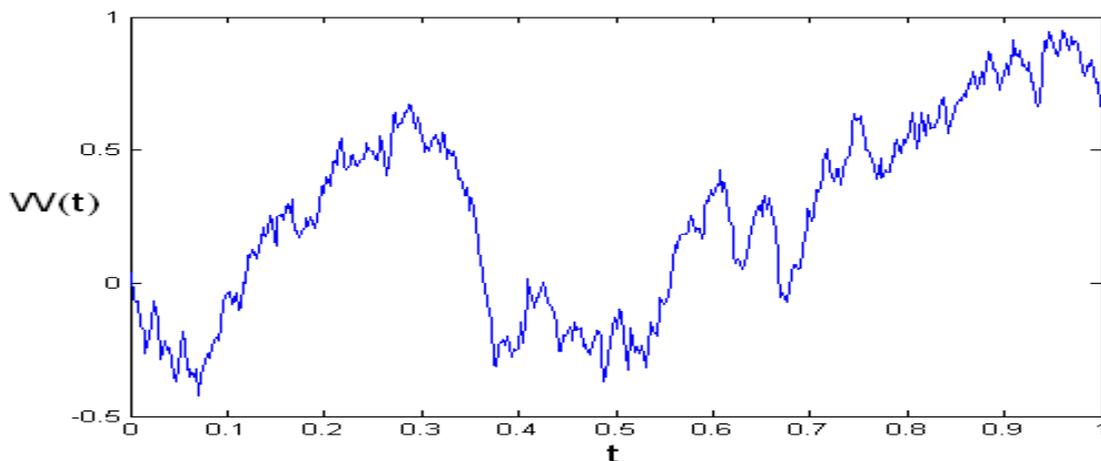


Fig. 1

Allure d'une trajectoire brownienne en trois dimensions

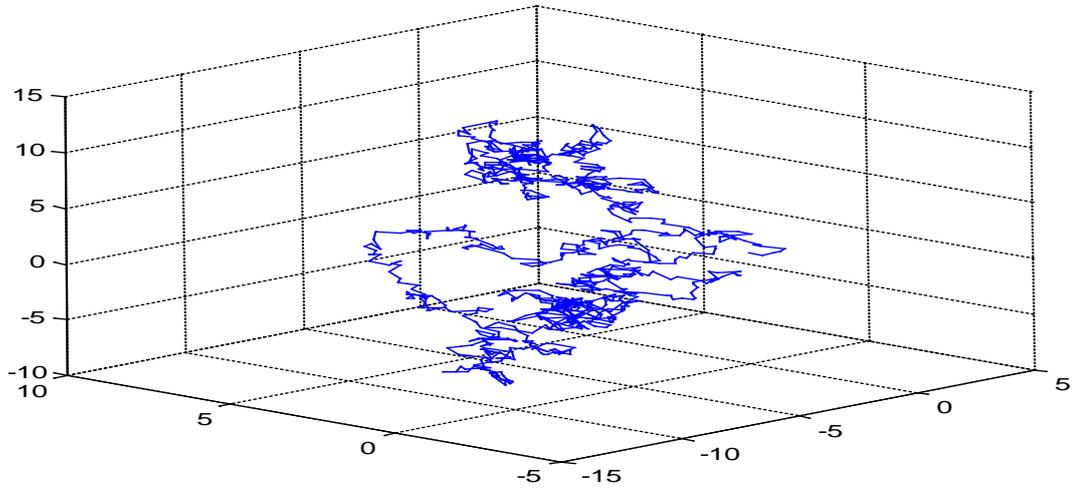


Fig. 2

Proposition 1.2 (propriété de martingale) [40]

- i. W_t est une martingale par rapport à la tribu $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$, de carré intégrable donc on a $\forall 0 \leq s \leq t; E(W_t / \mathfrak{F}_s) = W_s$.
- ii. $\{W_t^2 - t; 0 \leq t < \infty\}$ est aussi une martingale par rapport à la tribu $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$,

Preuve

Par utilisation de la définition 1.15 avec les propriétés de la loi normale on aura $E(W_t - W_s / \mathfrak{F}_s) = E(W_t - W_s) = 0$ et $E((W_t - W_s)^2 / \mathfrak{F}_s) = E(W_t^2 - W_s^2 / \mathfrak{F}_s) = (t - s)$

Remarque

la deuxième propriété montre que le mouvement brownien est à variation quadratique finie presque sûrement. Si $\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$ est une subdivision de l'intervalle $[0, t[$, la

variation quadratique sur $[0, t[$ par rapport à π est $V_t^2(\pi) = \sum_{i=1}^k |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|^2$

Si $V_t^2(\pi)$ converge quand le pas de la subdivision π tend vers 0, on dit que le processus est à variation quadratique finie.

1.2.2 Propriété de Markov [40]

La propriété de Markov utilisée dans le cas du brownien est plus forte que la propriété de Markov habituelle : pour tout s , le processus $(B_t, t \geq 0)$ défini par $B_t = W_{t+s} - W_s$ est un mouvement brownien indépendant de \mathfrak{F}_s .

Théorème 1.4

Pour f borélienne bornée, $E(f(W_u) | \mathfrak{F}_t) = E(f(W_u) | \sigma(W_t))$

On peut formuler cette propriété autrement en disant que pour $u > t$, conditionnellement à W_t

La v.a W_u est de loi gaussienne d'espérance W_t et de variance $u - t$ alors

$$E(1_{W_u \leq x} | \mathfrak{F}_t) = E(1_{W_u \leq x} | \sigma(W_t)) \text{ pour tout } u \geq t.$$

1.2.3 Construction du Mouvement Brownien

Il existe plusieurs méthodes de construction du M.B :

1. La méthode de Kolmogorov (1933 et 1956) : Il a utilisé la notion de consistance et un critère de continuité, pour démontrer l'existence d'une probabilité P sur $\mathbb{R}^{[0, \infty[}$, $\beta_{[0, \infty[}$ et un processus stochastique $((W_t)_{t \geq 0}, \mathfrak{F}_t^W)$ sur le même espace, tels que avec P , W est un mouvement brownien.

2. Wiener (1923), Lévy (1948), Ciesielski : ils ont fait une construction basée sur la théorie des espaces de Hilbert et sur le caractère gaussien du M.B.

3. Donsker (1951) : il a fait une construction sur l'ensemble $C([0, \infty[)$ d'une mesure, appelée mesure de Wiener, en utilisant la notion de convergence faible de variables aléatoires, il a montré que le M.B s'obtient comme limite de promenades aléatoires renormalisées il se résume comme suit :

Définition 1.16, [5], [40], [45]

Soit $(\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ Une famille de v.a de Bernoulli indépendantes identiquement distribuées définies sur l'espace $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ on a $P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = 1/2$.

On définit la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ comme suit :

$S_0 = 0, S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, n \geq 1$. La suite $(S_n)_{n \geq 0}$ s'appelle promenade aléatoire ou

marche aléatoire. La figure 2 représente une trajectoire de marche aléatoire pour $n=5$.

On sait que $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$ en loi (d'après TCL) plus généralement $\forall t \in [0,1]$ On construit un processus continu $Y = (Y_t)_{t \in [0,1]}$ par interpolation linéaire :

$Y_t = S_{[t]} + (t - [t])\xi_{[t]+1}$ où $[t]$ désigne la partie entière de t c'est la normalisation de l'échelle du temps et de l'espace.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $X^n = \{ X_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_{nt}; t \geq 0 \}$.

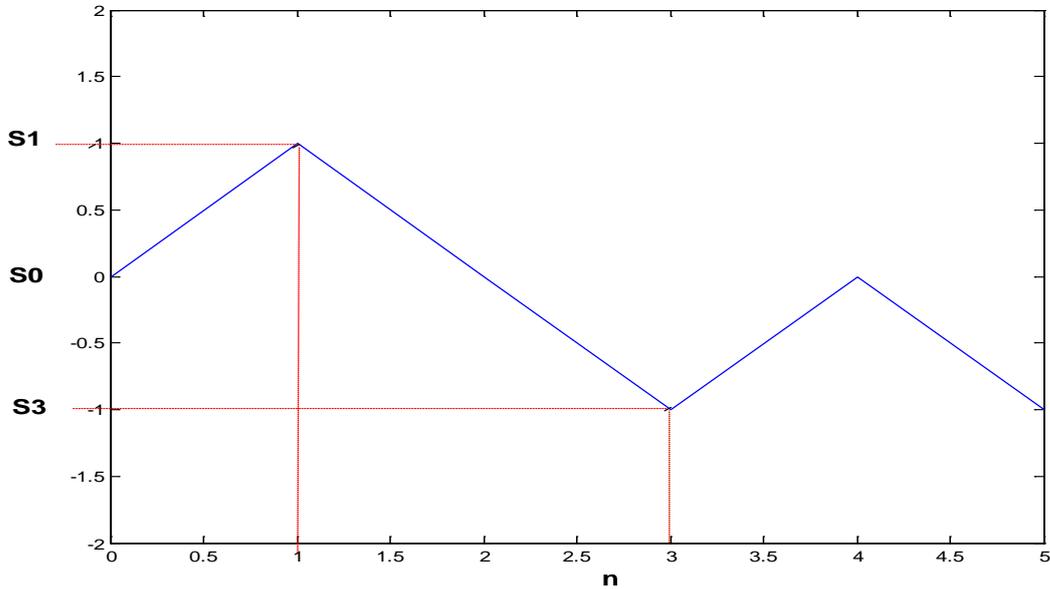


Fig.3

Remarque

Si on choisit $s = \frac{k}{n}$ et $t = \frac{(k+1)}{n}$ on obtient :

$X_t^n - X_s^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{i+1}$ qui indépendant de la tribu engendré par X^n jusqu'à l'instant s , car c'est aussi la tribu engendrée par les $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$. de plus ,on a : $E(X_t^n - X_s^n) = 0$,

$$VAR(X_t^n - X_s^n) = \frac{1}{n}.$$

Ensuite on prend une suite de v.a $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ indépendantes identiquement distribuées de moyenne nulle et de variance σ^2 avec $0 < \sigma^2 < \infty$. On prend la définition précédente de S_n, Y_t et on normalise par $1/\sigma$ dans la définition de X^n .

Théorème1.5 (de Donsker) [5], [6],[40]

La suite de processus (X^n) converge en loi vers un processus qui est un mouvement brownien de dimension 1.

La démonstration de ce théorème repose se résume comme suit :

X^n est une fonction de (Ω, \mathfrak{F}) dans $(C([0, +\infty[), \beta_{([0, +\infty[)})$, où $C([0, +\infty[)$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur $([0, +\infty[)$ muni de la métrique (ou de la distance)

$$\rho(f, g) = \sum \frac{1}{2^n} \max_{0 \leq t \leq n} (|f(t) - g(t) \wedge 1|).$$

Ce qui implique que X^n induit une probabilité P^n sur $(C([0, +\infty[), \beta_{([0, +\infty[)})$ et la convergence en loi de X^n est équivalent à la convergence faible de la suite P^n .

Pour tout $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m < \infty$, $(x_{t_1}, \dots, x_{t_m})$ converge en loi vers $(w_{t_1}, \dots, w_{t_m})$ en effet :

On a $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers la loi normal centré réduite $N(0,1)$ ce qui implique que $\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{[nt]}}$

converge aussi vers $N(0,1)$ et par suite $\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} = \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{[nt]}} \sqrt{\frac{[nt]}{n}}$ converge vers $\sqrt{t} N(0,1) =$

$N(0,t)$ et puisque les variables aléatoires $\xi_{[nt]}, S_{[nt]+1}$ sont indépendantes alors X^n converge vers $N(0,t)$ qui est la loi de W_t .

On faisant Une démonstration plus approfondie et à l'aide d'outils d'analyse mathématiques (en particulier, le théorème d'Ascoli), on peut montrer qu'effectivement, X^n converge étroitement vers cette limite.

Remarque

Cette construction fournit un outil important pour la simulation des trajectoires browniennes.

1.2.4 Temps d'atteinte (cas de mouvement brownien) [40]

Proposition 1.3

Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien et a un nombre rel. Soit $T_a = \inf\{t \geq 0; W_t = a\}$ alors T_a est

un temps d'arrêt fini p.s. tel que $E(T_a) = \infty$ et pour $\lambda \geq 0$

$$E(e^{-\lambda T_a}) = E(e^{-|a|\sqrt{2\lambda}}).$$

Cette propriété se généralise : Si $X_t = \mu t + \beta_t$ et $T_a^\mu = \inf\{t \geq 0; X_t = a\}$ on montre par utilisation

de la martingale $e^{(\beta X_t - (\mu\beta + 1/2\sigma^2\beta^2)t)}$, $t \geq 0$ Pour $\mu > 0, \lambda > 0$ (on pose $\lambda = (\mu\beta + 1/2\sigma^2\beta^2)$),

$$E(e^{-\lambda T_a^\mu}) = e^{(\mu a - |a|\sqrt{\mu^2 + 2\lambda})}$$
 on obtient $p(T_a < \infty)$ en faisant $\lambda = 0$.

Si μ, a ont même signe, $p(T_a < \infty) = 1$.

1.2.5 Le mouvement brownien géométrique

Définition 1.17

Soit $(b, \sigma) \in \mathbb{R}^2$, le processus $X_t = X_0 \exp[(b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t]$ est appelé M.B géométrique, il est appelé aussi le M.B log-normal.

On a si $X_0 = x > 0$ la loi $\ln(X_t) = (b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t + \ln(x_0)$ suit une loi normale.

1.2.6 Le mouvement brownien multidimensionnel

Définition 1.18

Soit $W_t = (W_t^{(1)}, W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(n)})^*$ un vecteur de dimension n où (*) désigne la transposition d'un vecteur. On dit que W est un mouvement brownien multidimensionnel si les processus $(W^{(i)}, i \leq n)$ sont des browniens indépendants. C'est un processus à accroissements indépendants.

1.2.7 Le Mouvement brownien généralisé

Définition 1.19

Le processus $X_t = a + B_t$ est un mouvement brownien issu de a. On dit que X est un mouvement brownien généralisé ou un M.B de drift μ si $X_t = x + \mu t + \sigma B_t$ où B_t est un M.B standard. La variable X_t est une variable gaussienne d'espérance $x + \mu t$ et de variance $\sigma^2 t$. Les v.a $(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}, t_0 \leq \dots \leq t_n)$ sont indépendantes.

1.3 Intégrale stochastique [18]

L'objectif de ce paragraphe est de définir l'intégrale $\int_a^b f(t) dW_t$. qui n'est en aucun cas une intégrale de Lebesgue Stieljes de fait que les trajectoires du M.B ne sont pas à variation finie.

Dans toute la suite, on fixe un réel T strictement positif. les processus sont définis pour $t \in [0, T]$;

On considère C l'ensemble des fonctions suivantes :

$\{f: [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continue et stochastique et a), b) et c) sont satisfaits, où}$

a) f est $\mathcal{B}_{[a,b]} \times \mathfrak{F}$ mesurable ;

b) $f(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathfrak{F}_t mesurable ;

c) $f(t, \cdot) \in L^2(\Omega)$ et $\int_a^b E[|f(t, \cdot)|^2] dt < \infty$ ie $f \in L^2([a, b] \times \Omega)$

soit $(W_t)_{t \in [0, T]}$ un processus de Wiener (M.B) et $\Pi(a, b)$ l'ensemble de toutes les partitions de

$[a, b]$, $\pi_n : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ telles que $|\pi_n| = \sup_{k \in \{0, \dots, n\}} |t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$

On définit l'intégrale stochastique d'Itô de $f \in C$ comme la limite suivante (il a été démontrée qu'il existe et qu'elle est indépendante de la partition)

$$\int_a^b f(t) dW_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k^{(n)}) [W_{t_{k+1}^{(n)}} - W_{t_k^{(n)}}]$$

1.3.1 Processus d'itô [18] , [34]

Définition 1.19

On appelle processus d'itô un processus X à valeurs réelles tel que :

$$P.p.s \quad \forall 0 \leq t \leq T, \quad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

où X_0 est \mathfrak{F}_0 mesurable, K, H sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions, P.p.s :

$$\int_0^T |K_s| ds < \infty, \quad \int_0^T |H_s|^2 ds < \infty.$$

Propriétés

Si un processus d'itô est une martingale locale, continue alors $K_t = 0$ P.p.p

et on déduit alors que la décomposition d'un processus d'ito est unique au sens où si

$$X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s = X_0' + \int_0^t K_s' ds + \int_0^t H_s' dW_s \text{ alors } X_0 = X_0' \text{ P.p.s et } K_t = K_t',$$

$$H_t = H_t' \text{ P.p.p.}$$

$$\text{Si } X, Y \text{ deux processus d'ito } X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s, \quad Y_t = X_0' + \int_0^t K_s' ds + \int_0^t H_s' dW_s$$

$$\text{On pose } \langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_s H_s' ds \text{ et } dX_t = K_t dt + H_t dW_t.$$

On a alors la formule d'intégration par partie :

Proposition 1.8 (F. intégration par partie)

Si X, Y sont deux processus d'ito, alors $X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t$

Théorème 1.7 (Formule d'Ito)

Soient $(t, x) \rightarrow f(t, x)$ une fonction réelle deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t et X un processus d'itô. On a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s) ds + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

Cette formule peut s'étendre au cas d'un mouvement brownien de dimension d et d'un processus d'Ito de dimension n .

Les hypothèses sur les coefficients sont celle de la définition 1.18.

Théorème 1.8

Soit X un processus d'Ito à valeurs dans \mathbb{R}^n , pour $i=1, \dots, n$

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i ds + \sum_{k=1}^d \int_0^t H_s^{i,k} dW_s^k$$

Si f une fonction deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t d'ito. On a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \partial_s f(s, X_s) ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \partial_{x_i} f(s, X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \partial^2_{x_i x_j} f(s, X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s$$

$$\text{avec } dX_s^i = K_s^i ds + \sum_{k=1}^d H_s^{i,k} dW_s^k \text{ et } d\langle X^i, X^j \rangle_s = \sum_{k=1}^d H_s^{i,k} H_s^{j,k} ds$$

on peut écrire ce résultat sous forme vectorielle en notant X le vecteur colonne de \mathbb{R}^n de coordonné X^i , K le vecteur de \mathbb{R}^n de coordonnées K^i et W le vecteur de \mathbb{R}^d de coordonnée W^j , on introduit ensuite la matrice de taille $n \times d$, $H = (H^{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d}$.

et on a $X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$, où $H_s dW_s$ est un produit de matrice par un vecteur colonne.

Avec les notations, $x \cdot y$ qui désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^n et H_s^* la transposé de H .

Cette formule s'écrit encore sous la forme

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \partial_s f(s, X_s) ds + \int_0^t \nabla f(s, X_s) \cdot dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \text{trace} D^2(f(s, X_s)) H_s H_s^* ds$$

soit encore

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t (\partial_s f(s, X_s) + \nabla f(s, X_s) \cdot K_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \text{trace} D^2(f(s, X_s)) H_s H_s^* ds$$

1.3.2 Représentation des martingales browniennes [10]

Introduisons maintenant un théorème qui va jouer un rôle important dans les équations différentielles stochastiques rétrogrades. Pour ce sujet on peut consulter [9], [38]. Avant d'introduire ce théorème, rappelons tout d'abord la caractérisation du mouvement brownien en terme de martingales due à Paul Lévy.

Théorème 1.9

Soit X une $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ martingale locale, continue, nulle en 0. on suppose que, pour tout $i, j \in \{1, \dots, d\}$, $\langle X^i, X^j \rangle = \delta_{i,j} t$ où $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$, $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$. Alors X est une $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ M.B dans \mathbb{R}^d .

Notons par $(\mathfrak{F}_t^W)_{t \in [0, T]}$ la filtration naturelle du mouvement brownien et par $M^2(\mathbb{R}^d)$ l'espace des processus Z progressivement mesurables a valeurs dans \mathbb{R}^d tels que $\|Z\|_{M^2} = E[\int_0^T \|Z_t\|^2 dt] < \infty$

Théorème 1.10 (de représentation martingales browniennes)

Soit M une $(\mathfrak{F}_t^W)_{t \in [0, T]}$ -martingale cadlag de carré intégrable pour la filtration $(\mathfrak{F}_t^W)_{t \in [0, T]}$. Alors il existe un unique processus $(H_t)_{t \in [0, T]} \in M^2(\mathbb{R}^d)$ tel que P.p.s $\forall t \in [0, T]$,

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dW_s \text{ et dans la filtration brownienne, les martingale sont continues.}$$

Théorème 1.11 (de Girsanov) [7]

Soit h un processus adapté à valeurs dans \mathbb{R}^d tel que $\int_0^T \|h_s\|^2 ds < \infty$ P.p.s

Soit $H_T^h = \exp\{-\frac{1}{2} \int_0^T \|h_s\|^2 ds + \int_0^T h_s dW_s\}$, si $E[H_T^h] = 1$ alors

$\mathbb{P}^h = [H_T^h].\mathbb{P}$ est équivalent à \mathbb{P} et $W^h = W - \int_0^T h_s ds$ est un \mathbb{P}^h - mouvement brownien.

Corollaire 1.1

Considérons la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Si h vérifie les hypothèses du théorème précédent et si on note E^h l'espérance par rapport à la probabilité \mathbb{P}^h on a $E[g(X_T)] = E^h[(H_T^h)^{-1}(g(X_T))]$

1.4 La topologie de Skorokhod

Cette topologie a été introduite par Skorokhod dans [55] et étudiée ensuite par Billingsley dans [6] pour les processus indexés par $[0,1]$ et par Jacod et Shirayev dans [38] pour les processus indexés par \mathbb{R}^+ . La convergence suivant la topologie de Skorokhod nous sera utile dans l'étude de la convergence des schémas de discrétisation des EDSR et des EDSR réfléchies (chapitre 3).

1.4.1 Le cas déterministe

On note D l'ensemble des fonctions sur $[0, T]$ à valeurs dans \mathbb{R} , continues en tout point à droite avec une limite à gauche, ces fonctions sont notées en abrégé (càdlàg).

Sur cet espace, la topologie de la convergence uniforme est remplacée par la topologie J_1 de Skorokhod car cette dernière, en plus qu'elle est une topologie de convergence uniforme, elle tient compte des décalages entre les instants de sauts de la suite de processus et de leur limite :

Plus précisément, si on note Λ l'ensemble des changements de temps de $[0, T]$ ie l'ensemble des fonctions $\alpha : [0, T] \rightarrow [0, T]$ continues strictement croissantes telles que $\alpha(0) = 0$ et $\alpha(T) = T$. On note d_S la métrique, dite métrique de Skorokhod, définie de cette façon $\forall x, y \in D, d_S(x, y) = \inf_{\alpha \in \Lambda} \{ \|\alpha - Id\|_\infty \vee \|x - y \circ \alpha\|_\infty \}$, on dit que la suite (x_n) de D converge vers $x \in D, x_n \rightarrow x$ au sens de la topologie de Skorokhod si $d_S(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Dans ce cas on munit D de la tribu engendrée par tous les ouverts pour la topologie de Skorokhod, c'est la tribu engendrée par les applications càdlàg, ainsi les projections $\pi_t : x \rightarrow x(t)$ sont continues.

Pour cette convergence, on prend comme exemple la suite $x_n = (\mathbf{1}_{[1/2+1/n, 1]})_n$ elle converge vers $x = \mathbf{1}_{[1/2, 1]}$ pour la topologie de Skorokhod mais la convergence uniforme ordinaire ne se réalise pas à cause du décalage entre les instants de saut des x_n qui a lieu en $1/2+1/n$ et celui de x qui a lieu en $1/2$.

La topologie de Skorokhod coïncide avec la topologie de la convergence uniforme si la limite est continue.

1.4.2 Application au cas des processus aléatoires

Considérons le cas des processus aléatoires càdlàg ie des processus $X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dont toutes les trajectoires sont càdlàg.

• Convergence en loi

Soit (X^n) une suite de processus càdlàg indexés par $[0, T]$ définis sur les espaces de probabilité $(\Omega^n, \mathfrak{F}^n, P^n)$ et X un processus càdlàg défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Définition 1.21

On dit que $(X^n)_n$ converge en loi vers X si pour toute fonction $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et continue (au sens de la topologie de Skorokhod), $(\int h(X^n) dP^n)_n$ converge vers $\int h(X) dP$. on notera $X^n \xrightarrow{\ell} X$.

Convergence en probabilité

Soit (X^n) et X des processus càdlàg indexés par $[0, T]$ définis sur $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Définition 1.23

On dit que (X^n) converge en probabilité vers X si $(d_S(X^n, X))_n$ converge en probabilité vers 0.

On note $X^n \xrightarrow{P} X$.

• Convergence L^p et convergence presque sûre

Soit (X^n) une suite de processus càdlàg indexé par $[0, T]$ et définis sur $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$

Définition 1.24

- On dit que (X^n) converge dans L^p vers X si $(d_S(X^n, X))_n$ converge dans L^p vers 0.

On note $X^n \xrightarrow{L^p} X$.

- On dit que (X^n) converge presque sûrement vers X si $(d_S(X^n, X))_n$ converge presque sûrement vers 0. On note $X^n \xrightarrow{p.s} X$.

Définition 1.25

Soit X un processus càdlàg. On considère une suite croissante de subdivision de $[0, T]$, $\pi^n = (\{t_k^n\})$ avec $t_0^n = 0$, $t_{N_n}^n = T$ de pas tendant vers 0 quand n tend vers l'infini, ie

$|\pi^n| = \max_i |t_{i+1}^n - t_i^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on définit le processus discrétisé X^n par :

$$\forall t \in [0, T], X_t^n = \sum_{i=1}^{N_n-1} X_{t_i^n} \mathbf{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n[}(t) + X_T \delta_T(t).$$

Proposition 1.15 [6]

Soit X un processus càdlàg et (X^n) la suite de ses discrétisés selon la suite de subdivision (π^n) de pas tendant vers 0. La suite de processus (X^n) converge presque sûrement vers le processus càdlàg X .

Chapitre 2

Équations Différentielles Stochastiques et Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades

2.1- Equations différentielles stochastiques

On peut voir une équation différentielle comme une perturbation aléatoire rajoutée à une équation différentielle ordinaire.

En général, une équation différentielle stochastique se présente sous la forme $dx_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, 0 \leq t \leq T$ (1) avec la valeur initiale $X_0 = x \in \mathbb{R}^d$, où $b(t, x)$ est une fonction mesurable de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ dans \mathbb{R}^d et $\sigma(t, x)$ est une fonction mesurable de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^{d \times d'}$ et $\{W_t, t \geq 0\}$ désigne le mouvement brownien standard dans $\mathbb{R}^{d'}$.

Le coefficient b s'appelle la dérive et la matrice $\sigma\sigma^*$ est dite matrice de diffusion.

Définition 2.1

On dit que le processus $X=(X_t)$ représente une solution (forte) de l'EDS si :

1/ X est un processus continu et progressivement mesurable

2/ P.p.s $\int_0^T \{ |b(r, X_r)| + \|\sigma(r, X_r)\|^2 \} dr < \infty$, où $\|\sigma\| = \text{trace } \sigma\sigma^*$ ou' σ^* désigne le transposé de σ .

3/ P.p.s on a : $X_t = x + \int_0^t b(r, X_r)dr + \int_0^t \sigma(r, X_r)dW_r, 0 \leq t \leq T$.

Les problèmes probabilistes qui se posent en pratique, se ramènent généralement au calcul d'espérances. C'est pour cela que l'on s'intéresse à des méthodes numériques pour calculer ces espérances, sachant que dans la majorité des cas on ne dispose pas de formules exactes.

Parmi les processus de diffusion utilisés fréquemment dans le domaine financier, on peut citer, comme exemple, le processus (ou le modèle) de Black Sholes dont l'équation, représente la dynamique du prix sous la probabilité risque neutre, il suit une loi brownienne géométrique, elle s'écrit $dX_t = rX_t dt + \text{diag}[X_t] \sigma dW_t, X_0 \in \mathbb{R}^d$ où $r \in \mathbb{R}_+$ représente le taux sans risque et σ la matrice de volatilité.

On peut écrire ce modèle encore sous la forme $dX_t^i = rX_t^i dt + X_t^i \sigma^i W_t^i, X_0^i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, d, W_t^i i = 1, \dots, d$ sont des v.a indépendantes de même loi $N(0, t)$. La solution de cette dernière équation est $X_t^i = X_0^i \exp\{(r - \frac{1}{2} \|\sigma^i\|^2)t + \sigma^i W_t^i\}, i = 1, 2, \dots, d$. et pour résoudre l'équation en X_t ; il suffit donc de simuler la valeur de W en t , ce qui revient donc à simuler d variables aléatoires indépendantes de même loi $N(0, t)$.

2.1.1 Existence et unicité de la solution :-

Théorème 2.1 [40]

Si

1 - b, σ sont des fonctions boréliennes uniformément continues en x et lipchitziennes **c.a.d** $\exists K > 0$ indépendant de x, y tq $\|\sigma(x) - \sigma(y)\| + |b(x) - b(y)| \leq K|x - y|$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ (condition de Lipchitz).

2 - $|b(t, x)| + \|\sigma(t, x)\| \leq K(1 + |x|)$;

3 - $E[|X_0|^2] < \infty$

Alors l' EDS admet une unique solution $X_t, X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$

vérifiant $E\{ \sup_{t \in [0, T]} |X_t|^2 \} < \infty$. Le processus $(X_t, 0 \leq t \leq T)$ est appelé processus de diffusion.

En finance, X_t modélise l'évolution de d sous djacents sur le marché (actions par exemple).

2.1.2 Propriété de Markov [40]

On note $(X_s^{t,x}, s \geq t)$ la solution de (1) partant de x à l'instant t , soit

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(u, X_u^{t,x}) du + \int_t^s \sigma(u, X_u^{t,x}) dW_u$$

Sous les conditions du théorème précédent on peut montrer que $X_s^{0,x} = X_s^{t, X_s^{0,x}}, s \geq t$

Ce qui implique que la solution de (1) est un processus de Markov par rapport à la filtration

\mathfrak{F}_t : On a $E(f(X_s) | \mathfrak{F}_t) = E(f(X_s) | X_t) = \Phi(s, t, X_t)$ où $\Phi(s, t, X_t) = E(f(X_s^{t,x})), s \geq t$.

Ce résultat permet de calculer facilement des espérances conditionnelles.

En particulier si $X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(X_u^{t,x}) du + \int_t^s \sigma(X_u^{t,x}) dW_u$ on obtient un processus de Markov homogène $E(f(X_s) | \mathfrak{F}_t) = E(f(X_s) | X_t) = \Phi(s, t, X_t) = \Psi(s-t, X_t)$ où

$$\Phi(s, t, X_t) = E(f(X_s^{t,x})) = E(f(X_{s-t}^{0,x})), \quad \Psi(u, x) = E(f(X_u^{0,x})).$$

Remarque

Un couple (X, Y) peut être markovien sans que ses composantes le soient.

2.1.3 Martingale exponentielle

Proposition 2.1 [40]

(1) soit $Y \in \Lambda$, Z_0 une constante, la solution de $dZ_t = Y_t Z_t dW_t$ est

$$Z_t = Z_0 \exp\left[\int_0^t Y_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t Y_s^2 ds\right]. \text{ Si de plus } E\left(\frac{1}{2} \int_0^t Y_s^2 ds\right) < \infty, \text{ le processus } (Z_t, t \leq T)$$

est une martingale d'espérance Z_0 .

(2) soit f telle que $|f(t, x) - f(t, y)| \leq c|x - y|$ et $\sup_s |f'(s, 0)| \leq C$ alors

$$\int_0^t f(s, W_s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t f(s, W_s)^2 ds \text{ est une martingale.}$$

2.1.4 Représentation probabiliste de solutions d'équations aux dérivées partielles. Formule de Feynman-Kac

Considérons l'EDP (équation de la chaleur) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u$ dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, Δ désigne le laplacien. On peut interpréter la solution de cette EDP d'une façon probabiliste à l'aide de la proposition suivante

Proposition 2.2 [63]

Soit $\Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ et u solution bornée et continue sur $[0, \infty[\times \mathbb{R}^p$ de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u$

sur $[0, \infty[\times \mathbb{R}^p$ avec $u(0, x) = \Phi(x)$. Alors pour tout $(t, x) \in [0, \infty[\times \mathbb{R}^p$, $u(t, x) = E_x[\Phi(W_t)]$

où E_x est l'espérance prise en supposant que le MB part de x à l'instant $t=0$.

Réciproquement on a :

Proposition 2.3 [63]

Si Φ est continue et vérifie la condition $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\sup(\mathbf{0}, \ln |\Phi(x)|)}{|x|^2} = \mathbf{0}$,

alors v définie sur $[0, \infty[\times \mathbb{R}^p$ par $v(t, x) = E_x[\Phi(W_t)]$ est solution de l'équation de la chaleur

Proposition 2.4 [63]

Considérons les fonctions $f : [0, T] \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{p \times d}$ vérifiant $\|f(t, x) - f(t, y)\| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq k \|x - y\|$, $\|f(t, x)\|^2 + \|\sigma(t, x)\|^2 \leq k^2(1 + \|x\|^2)$

Pour $0 \leq t \leq T$, $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^p$, k est une constante positive. On peut alors considérer $(X^{t,x})$ le processus stochastique solution de l'EDS suivante :

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s f(r, X_r) dr + \int_t^s \sigma(r, X_r) dW_r.$$

Soit les fonctions

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \\ g : [0, T] \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \\ K : [0, T] \times \mathbb{R}^p \rightarrow [0, \infty[\end{array} \right. \quad \text{Continues telles que } \forall x \in \mathbb{R}^p \quad \left\{ \begin{array}{l} |\Phi(x)| \leq c(1 + \|x\|^2) \\ |g(t, x)| \leq c(1 + \|x\|^2) \end{array} \right.$$

où c est une constante strictement positive, alors si $u \in C^2([0, T] \times \mathbb{R}^p)$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}^p, \max_{t \in [0, T]} |u(t, x)| \leq M(1 + \|x\|^2)$ où M constante > 0 est solution du problème de Cauchy

Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^*)_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i f_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - Ku + g = 0 \text{ sur } [0, T] \times \mathbb{R}^p \text{ avec } u(T, x) = \Phi(x)$$

Alors on a pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^p$,

$$u(t, x) = E \left[\Phi(X_T^{t,x}) e^{-\int_t^T K(r, X_r^{t,x}) dr} + \int_t^T g(r, X_r^{t,x}) e^{-\int_t^r K(z, X_z^{t,x}) dz} dr \right]$$

Notons L l'opérateur qui à toute fonction u associe la fonction

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^*)_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i f_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

L est le générateur infinitésimal du processus de diffusion

$$\begin{aligned} dX_s &= f(s, X_s) ds + \sigma(s, X_s) dW_s \\ X_t &= x \end{aligned}$$

La formule **Feynman -Kac** s'écrit alors sous la forme $\frac{\partial u}{\partial t} + Lu - Ku + g = 0$

Il existe plusieurs variantes de cette formule, l'une d'elles appliquée en finance où on considère, au lieu de l'équation différentielle stochastique précédente, une EDS contrôlée, c'est-à-dire à coefficients σ, f dépendent d'une fonction de t et de x , avec certaines conditions sur f qui permettent de minimiser certain coût.

On note par $u(t, x)$, le coût minimal depuis l'instant t lorsque le processus contrôlé part à l'instant t de x , on montre que u est solution d'une équation aux dérivées partielles non linéaire.

une autre variante de cette formule est utilisée dans le cas des équations différentielles stochastiques rétrogrades.

2.2 Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades

Depuis l'article de J.M. Bismut cité en référence [13], la théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) a connu un grand développement, surtout ces dernières années, grâce notamment à ses diverses applications dans plusieurs domaines.

Formellement, les EDSR sont des équations différentielles stochastiques où l'on se donne la condition terminale.

Dans le cas déterministe, il y'a équivalence entre la donnée d'une condition terminale et la donnée d'une condition initiale par inversion du temps, c'est comme dans le cas, par exemple, d'une équation différentielle ordinaire. Dans le cas stochastique, les choses sont fondamentalement différentes lorsqu'on cherche des solutions qui restent adaptés par rapport à une filtration donnée. En effet, en inversant simplement le temps, on perd la propriété de non anticipation de la solution c'est pour cela qu'on a introduit les edsr.

pour comprendre bien qu'est ce que une edsr il faut formuler d'une façon correcte la notion de solution adaptée à une EDSR.

Dans ce paragraphe, on va donner, en résumé, un petit aperçu sur les EDSR, le théorème d'existence et d'unicité de la solution, et la relation entre EDSR et EDP.

Soit $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré et ξ une v.a mesurable par rapport à \mathfrak{F}_T .

Considérons l'équation : $-\frac{dY_t}{dt} = f(Y_t), t \in [0, T]$ et $Y_T = \xi$ (1). Supposons que pour tout $t \in [0, T]$, le processus $(Y_t)_{t \geq 0}$ est adapté à la filtration $\{ \mathfrak{F}_t \}_{t \geq 0}$. c.a.d pour tout $t \in [0, T]$, Y_t ne dépend pas du futur après l'instant t . (ne dépend que de l'information connue jusqu'à l'instant t). Si $f \equiv 0$, la solution de l'équation précédente est $Y_t = \xi$ et doit être déterministe pour qu'elle soit \mathfrak{F}_t adaptée (une solution constante est une va \mathfrak{F}_0 mesurable donc déterministe).

mais ξ est aléatoire par hypothèse donc la solution n'est pas adapté à la filtration $\{ \mathfrak{F}_t \}_{t \geq 0}$ et la meilleure approximation de la solution, adapté qu'on peut prendre (par exemple dans L^2) est la martingale $Y_t = E(\xi / \mathfrak{F}_t)$ ce qui implique que $Y_0 = E(\xi / \mathfrak{F}_0) = E[\xi]$, le théorème de représentation des martingales browniennes, prouve l'existence d'un processus $(Z_t)_{t \geq 0}$ de

carré intégrable, tel que $Y_t = E(\xi / \mathfrak{F}_t) = E\xi + \int_0^t Z_s dW_s$, Y_t est \mathfrak{F}_t adapté par hypothèse
alors $Y_t = E(Y_t / \mathfrak{F}_t) = E(\xi / \mathfrak{F}_t) = E(\xi - \int_t^T Z_s dW_s / \mathfrak{F}_t)$ car $E[\int_t^T Z_s dW_s / \mathfrak{F}_t] = 0$ ce qui
implique que $Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -dY_t = -Z_t dW_t \\ Y_T = \xi . \end{cases} \quad (2)$$

le rôle de $(Z_t)_{t \geq 0}$ c'est de rendre le processus $(Y_t)_{t \geq 0}$ adapté. Cette dernière équation (2) possède une unique solution (Y, Z) adapté donnée par $Y_t = E(\xi | \mathfrak{F}_t)$ et on obtient Z par le théorème de représentation martingale appliquée à Y dans $[0, T]$

Le système (2) est une forme particulière simple de ce qu'on va appeler dans la suite les équations différentielles stochastiques rétrogrades.

En général et d'après ce qui précède on prend, par exemple, f dépendante de $(Y_t)_{t \geq 0}$, l'équation (1) devient : $-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t$ et $Y_T = \xi$.

En pratique, dans le domaine financier par exemple, ξ peut présenter une fonction du prix d'une action à l'instant T et la filtration représente dans ce cas les informations existantes sur le marché à chaque instant t .

Résoudre l'équation (1), c'est trouver une stratégie de couverture en utilisant un actif sans risque [21]. Si cette équation admet une solution, elle ne sera qu'aléatoire, car il dépend de ξ et à un instant $t \in [0, T]$, elle est \mathfrak{F}_T mesurable c'est à dire il dépend du futur T , ce qui est contre les règles dans les marchés financiers, d'où la nécessité de trouver des solutions avec la condition supplémentaire tel que ces dernières n'anticipent pas sur le futur c'est-à-dire qu'elles soient adaptées à la filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$, c'est pour cela qu'on a introduit les EDSR .

Il est utile de signaler que le sujet des edsr a été traité d'une façon suffisamment détaillée dans [10].

Remarque

Cette appellation (rétrograde), provient de fait que le processus (contrairement à d'autres EDS est déterminé à partir de la condition terminale $y_T = \xi$.

Définition 2.2

Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace de probabilité, W un mouvement brownien à n dimensions avec sa filtration naturelle \mathfrak{F} , ξ une variable aléatoire \mathfrak{F}_T mesurable et de carré intégrable et une fonction mesurable f (appelée générateur ou driver), $f : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times n} \rightarrow \mathbb{R}^d$

Les équations de la forme $-dY_t = f(\omega, t, Y_t, Z_t)dt - Z_t^* dW_t$ (3) où Z_t^* est le transposé de la matrice Z_t , avec la valeur terminal (qui est aléatoire) $y_T = \xi$, sont appelées les équations différentielles stochastiques rétrogrades, (en abrégé E.D.S.R. ou edsr)

Une solution de l'edsr est un couple de processus $\{(Y_t, Z_t)\}_{0 \leq t \leq T}$ qui satisfait (3) et tel que $\{Y_t, t \in [0, T]\}$ est un processus continu \mathfrak{F} adapté à valeurs dans \mathbb{R}^d et $\{Z_t, t \in [0, T]\}$

est un processus prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^{d \times n}$ et qui satisfait $\int_0^T |Z_s|^2 ds < \infty$ P.P.S .

$$\text{On a P.p.s } Y_t = \xi + \int_t^T f(\omega, s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s^* dW_s, 0 \leq t \leq T. (4)$$

Remarque

- 1- les intégrales dans l'équation (4) sont bien définies et Y est une semi martingale continue
- 2- Y_0 est une quantité déterministe.
- 3- On peut définir encore une solution d'une edsr de cette façon :

Si on note par \mathbf{L} un ensemble de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times n}$ de processus (Y, Z) \mathfrak{F}_t adaptés définis sur $\Omega \times \mathbb{R}^+$

$$\text{tels que } \|(Y, Z)\|^2 \leq E(\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^2 + \int_0^T |Z_s|^2 ds) < \infty .$$

Dans ce cas on peut montrer que le couple $(\mathbf{L}, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

Une solution de (3) est un couple (Y, Z) dans $(\mathbf{L}, \|\cdot\|)$ qui vérifie l'équation (3).

Définition 2.3 [49]

Si $f(t, y, 0) = 0, \forall y, t$, l'espérance $E_f[\xi / \mathfrak{F}_t] = y_t$ où $E_f[\cdot] : L^2 \rightarrow \mathbb{R}$, est appelée f -expectation. Dans ce cas la quantité déterministe y_0 sera égale à $E_f[\xi]$.

2.2.1 Existence et unicité de la solution

On a vu dans l'exemple précédent que la mesurabilité du processus Y est importante car elle est la cause de l'inexistence de la solution pour (1) et la présence de Z rend le processus Y adapté.

Pardoux et Peng sont les premiers qui ont montré, dans [52], l'existence et l'unicité de la solution par itération, pour cela, ils ont introduit une suite (Y_{n+1}, Z_{n+1}) où ils supposent que (Y_n, Z_n) sont connus et définis par

$$Y_{n+1}(t) = \xi + \int_t^T f((s, Y_n(s), Z_n(s))) ds - \int_t^T Z_{n+1}(s) dW_s, \forall t \in [0, T] \quad (4)$$

Pour résoudre cette équation, on suppose que Y_n, Z_n sont connus et Y_{n+1}, Z_{n+1} sont bien définis alors on a $\xi = Y_{n+1}(0) - \int_0^T f((s, Y_n(s), Z_n(s))) ds + \int_0^T Z_{n+1}(s) dW_s$ et comme $X_{n+1}(0)$ est

\mathfrak{F}_0 mesurable donc déterministe, on a

$$E(\xi) = Y_{n+1}(0) - E \left[\int_0^T f((s, Y_n(s), Z_n(s))) ds + \int_0^T Z_{n+1}(s) dW_s \right]$$

Par l'application du théorème de représentation de martingale brownienne appliqué au vecteur aléatoire \mathfrak{F}_T mesurable, $\xi + \int_0^T f(s, Y_n(s), Z_n(s)) ds$ dans $[0, T]$ on aura

$$Y_{n+1}(t) = E \left[\xi + \int_t^T f((s, Y_n(s), Z_n(s))) ds \mid \mathfrak{F}_t \right]$$

ce qui implique que l'équation (4) est vérifiée.

Ensuite on a montré que sous certaines conditions de régularité sur f, Y_n, Z_n les deux suites Y_n, Z_n convergent respectivement vers Y, Z et que ces limites vérifient (4).

Passons maintenant aux conditions et au théorème d'existence et de l'unicité de cette solution :

Supposons que ξ est $F_T = \sigma(W_s, s \leq T)$ - mesurable tq $E|\xi|^2 < \infty$, $f(\cdot, \cdot, 0, 0) \in L^2(\Omega \times [0, T])$ est un processus prévisible et f uniformément lipchitzienne c.à.d $\exists k > 0$ tq $|f(\omega, t, y_1, z_1) - f(\omega, t, y_2, z_2)| \leq k(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|)$ Alors, (f, ξ) sont des paramètres dits standards.

Théorème 2.5 [52]

Soit (f, ξ) des paramètres standards, alors il existe un unique couple (Y, Z) dans

$L^2(\Omega \times [0, T], \mathbb{R}^d) \times L^2(\Omega \times [0, T], \mathbb{R}^d)$ qui satisfait (3)

De plus on a $E \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^2 + \int_0^T |Z_t|^2 dt \right\} < \infty$

Remarque

De nombreux travaux ont été faits après la réalisation de théorème d'existence et d'unicité pour minimiser le plus possible les conditions d'existence et d'unicité, et le sujet reste ouvert.

2.2.2 Existence de la solution sous les Conditions de Lipchitz locales

Supposons que

- (1) f est continue par en (y,z) pour tout (t, ω)
- (2) il existe une constante $K > 0$ et $0 \leq \alpha < 1$ telles que $|f(t, \omega, y, z)| \leq K(1 + |y|^\alpha + |z|^\alpha)$
- (3) pour tout $N > 0$, il existe L_N tel que $|f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq L_N(|y - y'| + |z - z'|)$
- (4) $\xi \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_T, \mathbb{R}^d)$

Théorème 2.6 [36]

$L_N \leq \sqrt{10 \log N}$ implique il existe une unique solution pour l'edsr
$$Y_t = \xi + \int_t^T f(\omega, s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s^* dW_s, 0 \leq t \leq T.$$

Proposition 2.5

Soit (Y, Z) la solution de l'EDS (3) et soit τ un temps d'arrêt majoré par T .

supposons que si le driver f est lipchitzienne, $E(\int_0^T \{|f(s, 0, 0)|^2 ds + |\xi|^2\}) < \infty$, ξ est \mathfrak{F}_t mesurable et que $f(t, y, z) = 0$ si $t \geq \tau$

alors on a $Y_t = Y_{t \wedge \tau}$ et $Z_t = 0$ dès que $t \geq \tau$.

Preuve

On a pour $0 \leq t \leq T$, $Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s$ P.p.s

on a pour $t = \tau$, $Y_\tau = \xi + \int_\tau^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_\tau^T Z_s dW_s = \xi - \int_\tau^T Z_s dW_s$ car
 $f(t, x, y) = 0$ dès que $t = \tau$.

$\Rightarrow Y_\tau = E(\xi / \mathcal{F}_\tau) = \xi$ et par suite $\int_t^\tau Z_s dW_s = 0$ ce qui implique que

$$E[(Z_s dW_s)^2] = E[\int_t^\tau \|Z_s\|^2 dW_s] = 0$$

d'où $Z_s 1_{s \geq \tau} = 0$.

et puisque par hypothèse, $Y_\tau = Y_t + \int_\tau^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_\tau^T Z_s dW_s = Y_t$ alors $Y_\tau = Y_t$ si $t = \tau$

Cette proposition montre bien que le rôle de Z et le terme $\int_t^T Z_s dW_s$, est de rendre le processus Y adapté : par exemple si ξ et f sont déterministes alors $Z=0$ et Y est la solution de l'équation $\frac{dY_t}{dt} = f(t, Y_t, 0)$, $Y_T = \xi$.

2.2.3 EDSR monotones

La condition de Lipchitz par rapport à la variable y peut être remplacée par une condition de monotonie, ce qui est sujet de travail publié par S.PENG dans [50] puis ensuite par R.DARLING et E.PARDOUX. dans [23]

Cette hypothèse de monotonie est très employée, il permet de manipuler les edsr avec un temps finale aléatoire et d'autre part d'affaiblir l'hypothèse de croissance sur f par rapport à y , pour cela considérons un mouvement brownien de dimension n , défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ Complet.

Soit $f : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times n} \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction aléatoire telle que pour tout (y, z) , le processus $\{f(t, y, z)\}_{0 \leq t \leq T}$ soit progressivement mesurable et soit ξ une variable aléatoire \mathfrak{F}_T mesurable et on considère les hypothèses suivantes qu'on note (Hyp) :

Hyp :

il existe des constantes $K \geq 0, \mu \in \mathbb{R}, C \geq 0$ et un processus progressivement mesurable, $\{f_t\}_{0 \leq t \leq T}$, positive, tels que P.p.s

- 1- $\forall (t, y), \forall (z, z') \quad |f(t, y, z) - f(t, y, z')| \leq K \|z - z'\|;$
- 2- Monotonie en y : pour tout $t, z, \forall (y, y'), (y - y') \cdot (f(t, y, z) - f(t, y', z)) \leq \mu |y - y'|^2;$
- 3- Croissance linéaire en (y, z) : $\forall (t, y, z), |f(t, y, z)| \leq f_t + C |y| + K \|z\|;$
- 4- Continuité en y : pour tout couple $(t, z), y \rightarrow f(t, y, z)$ est continue ;
- 5- La v.a ξ est \mathfrak{F}_T mesurable et $E[|\xi|^2 + \int_0^T f_t^2 dt] < \infty$

Théorème 2.8

Sous (Hyp) l'edsr $Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s$, $t \in [0, T]$ possède une unique

solution telle que Z est progressivement mesurable et $E[\int_0^T \|Z_s\|^2 dW_s] < \infty$

2.2.4 EDSR Linéaires

Définition 2.3 On suppose que $d=1$ ce qui implique que $Y \in \mathbb{R}$ et Z est une matrice de taille $1 \times n$ (vecteur de dimension n).

Soit $\{(a_t, b_t)\}_{t \in [0, T]}$ un processus à valeur dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, progressivement mesurable et borné et soit $\{c_t\}_{t \in [0, T]} \in M^2(\square)$ (progressivement mesurable à valeur dans \mathbb{R}) et ξ une v.a \mathfrak{F}_T mesurable de carré intégrable à valeurs réelles.

L'edsr $Y_t = \xi + \int_t^T \{a_s Y_s + b_s Z_s + c_s\} ds - \int_t^T Z_s dW_s$ s'appelle "EDSR linéaire"

Proposition 2.6 [40]

L'edsr linéaire possède une unique solution Γ_t qui vérifie

$$\forall t \in [0, T], Y_t = \Gamma_t^{-1} E(\xi \Gamma_T + \int_t^T c_s \Gamma_s ds \mid \mathfrak{F}_t)$$

Avec pour tout $t \in [0, T]$, $\Gamma_t = \exp\{\int_0^t b_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |b_s|^2 ds + \int_0^t a_s ds\}$

Remarque

Les edsr linéaires sont très utilisées en finance.

Théorème de comparaison [40]

Théorème 2.9

Ce théorème permet de comparer les solutions de deux edsr dans \mathbb{R} dès que l'on sait comparer les conditions terminales et les générateurs :

Supposons $d=1$ et que $(\xi, f), (\xi', f')$ vérifie la condition de Lipchitz. On note (Y, Z) et (Y', Z') les solutions des EDSR correspondantes. On suppose également $\xi \leq \xi'$ P.p.s et que $f(t, Y_t, Z_t) \leq f'(t, Y_t, Z_t)$ m \otimes P.p.p (m est la mesure de Lebesgue). alors, $\forall t \in [0, T]$, $Y_t \leq Y'_t$ P.p.s.

Si de plus $Y_0 = Y'_0$ alors P.p.s $Y_t = Y'_t$, $0 \leq t \leq T$ et $f(t, Y_t, Z_t) = f'(t, Y_t, Z_t)$ m \otimes P.p.p.

En particulier, dès que $P(\xi < \xi') > 0$ ou $f(t, Y_t, Z_t) < f'(t, Y_t, Z_t)$ sur un ensemble de m \otimes P-mesure strictement positive alors $Y_0 < Y'_0$.

2.2.6 Relation entre EDSR et EDP .Généralisation de la formule Feynman- Kac aux EDSR.

Commençons ce paragraphe par cet exemple simple :

Considérons l'EDP suivante
$$\partial_t u(t, x) + \frac{1}{2} \partial_{x,x}^2 u(t, x) + f(u(t, x)) = 0$$
$$u(T, x) = g(x)$$

∂_t désigne la dérivée première par rapport à t , $\partial_{x,x}^2$ la dérivée seconde par rapport à x

Supposons que cette équation possède une solution régulière u , appliquons la formule d'ito à $u(t, x)$

$$d(u(s, W_s)) = \{\partial_s u(s, W_s) + \frac{1}{2} \partial_{x,x}^2 u(s, W_s)\} ds + \partial_x u(s, W_s) dW_s$$

$$= -f(u(s, W_s)) ds + \partial_x u(s, W_s) dW_s$$

Si on pose $Y_s = u(s, W_s)$, $Z_s = \partial_x u(s, W_s)$ nous obtenons une edsr $-dY_s = f(Y_s) ds - Z_s dW_s$ avec

$$Y_T = g(W_T).$$

Donc trouver une solution régulière de l'EDP C'est trouver une solution pour cette EDSR.

Considérons l'EDSR
$$Y_s = \xi + \int_s^T f(u, X_u^{t,x}, Y_u, Z_u) du - \int_s^T Z_u dW_u \quad \text{et} \quad \xi = \Phi(X_T^{t,x})$$

$$(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, t \leq s \leq T.$$

$X^{t,x}$ désigne la solution de l'équation
$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x}) dr + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x}) dW_r, X_t^{t,x} = x.$$

Ce genre d'EDSR représente un cas dit Markovien où il y'a une dépendance de la condition terminale et du générateur de l'edsr dans l'alea ω se fait à travers de la solution d'une EDS ; par conséquent la propriété de Markov pour les EDS se transmet aux edsr.

Si on suppose que $f(t, x, y, z) = c(t, x) + h(t, x)$ on peut montrer que

$$Y_t^{t,x} = E[\Phi(X_T^{t,x}) \exp(\int_t^T c(r, X_r^{t,x}) dr) + \int_t^T h(s, X_s^{t,x}) \exp(\int_t^s c(r, X_r^{t,x}) dr) ds]$$

Posons
$$L_{(t,x)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} [\sigma \sigma^*]_{i,j}(t, x) \partial_{x_i x_j}^2 + \sum_i b_i(t, x) \partial_{x_i}$$

Soit u la solution de l' EDP paraboliques semi linéaires

$$\begin{cases} (\partial_t + L_{(t,x)})u(t, x) + f(t, x, u, \nabla u \sigma(t, x)) = 0 \\ u(T, x) = \Phi(x). \end{cases},$$

(∇ désigne le gradient) et soit $\{ (Y^{s,x}, Z^{s,x}) ; s \leq t \leq T \}$ la solution adaptée de l'edsr

$$\begin{cases} -dY_t = f(t, X_t^{s,x}, Y_t, Z_t)ds - Z_t^* dW_t \\ Y_T = \Phi(X_T^{t,x}) \end{cases}$$

Proposition [10]

Supposons qu'il existe une solution régulière à l'EDP qu'on note u . Alors il existe une solution pour l'edsr et on a

$$Y_t^{s,x} = u(t, X_t^{s,x}) \quad \text{et} \quad Z_t^{s,x} = \nabla u(t, X_t^{s,x})\sigma(t, X_t^{s,x})$$

où $(Y_t^{s,x}, Z_t^{s,x})$ avec $s \leq t \leq T$ est la solution de l'edsr partant de x à l'instant s .

Cette formule est une généralisation pour les edsr de la formule de formule Feynman- Kac. Là encore, pour confirmer ce résultat il suffit d'appliquer la formule d'Itô à $u_t = u(t, X_t)$.

2.2.7 Equations stochastiques rétrogrades discrètes [43]

Considérons la suite de v.a de Bernoulli iid $(\varepsilon_i^n)_{i=1,2,\dots,n}$ avec $\varepsilon_0 = 0$, n fixé avec $P(\varepsilon_i^n = 1) = P(\varepsilon_i^n = -1) = 0.5$

Notons par M_j^n la σ algèbre engendrée par $\varepsilon_0^n, \varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_j^n$, $M_j^n = \sigma(\varepsilon_0^n, \varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_j^n)$

Par analogie avec les edsr, notons la condition terminale par $\xi^n, \{\xi^n\}_{n \geq 0}$, la suite de variables aléatoires M_j^n mesurable, de carré intégrable et le générateur (le coefficient) par f_j^n . Considérons les hypothèses suivantes :

H1- ξ^n est M_n^n mesurable :

$$\exists \Phi : \{-1, 1 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \xi^n = \Phi(\varepsilon_1^n, \varepsilon_2^n, \dots, \varepsilon_n^n)$$

H2- pour tout $j = 0, \dots, n-1$, $f_j^n : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est M_j^n mesurable et pour tout (ω, z) , f_j^n est C lipschitzienne par rapport à y avec $n > C$

H3- pour tout (ω, y) , f_j^n est C lipschitzienne par rapport à z avec $n > C^2$

Soit $q \geq 0$ une constante donnée, considérons pour $j = n-1, \dots, 1, 0$, l'équation rétrograde discrète

$$y_j^{n,q} = y_{j+1}^{n,q} + f_j^n(y_j^{n,q}, z_j^{n,q}) \frac{1}{n} + \frac{q}{n} (y_j^{n,q})^- - z_j^{n,q} \frac{1}{\sqrt{n}} \varepsilon_{j+1}^n \quad \text{avec la condition terminale}$$

$$y_n^{n,q} = \xi^n \quad (I)$$

Existence et unicité de la solution [43]

Théorème 2.9

Supposons que le couple (f_j^n, ξ^n) est soumis aux hypothèses H1 et H2, alors il existe un unique couple $(\mathcal{Y}^{n,q}, \mathcal{Z}^{n,q})$ M_j^n adapté qui est solution de (I).

Théorème 2.10 (de comparaison) [43]

si $(\mathcal{Y}'^{n,q'}, \mathcal{Z}'^{n,q'})$ est solution d'une edsr de la forme (I) correspondant à (ξ'^n, f'^n, q') , $q \geq q'$ et si f'^n, f^n satisfais H3 et $f_j'^n(\omega, y, z) \geq f_j^n(\omega, y, z)$, $\xi'^n \geq \xi^n$ alors pour $j=0,1,\dots,n-1$ on a $\mathcal{Y}'^{n,q'} \geq \mathcal{Y}^{n,q}$.

Théorème 2.11 [41], [11]

Posons $M_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor / n} \varepsilon_k^n$ et $\Delta M_{t_{j+1}}^n = M_{t_{j+1}}^n - M_{t_j}^n$ et considérons l'edsr discrète

$$\tilde{Y}_{t_i}^n = \xi^{(n)} + \frac{1}{n} \sum_{j=i}^n f(t_j, \tilde{Y}_{t_j}^n) - \sum_{j=i}^{n-1} \tilde{Z}_{t_j}^n \Delta M_{t_{j+1}}^n, \quad 0 \leq i \leq n, \quad 0 \leq t_i \leq T, \quad (\text{IV})$$

qui est la version discrète de l'edsr $Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s$, $t \in [0, T]$. On peut montrer que cette edsr discrète vérifie H1 et H2 ce qui assure l'existence d'une unique solution.

Supposons que $(\tilde{Y}^n, \tilde{Z}^n)$ est solution de (IV). Posons

$$U_{t_i}^n = \sum_{j=0}^{i-1} \tilde{Z}_{t_j}^n \Delta M_{t_{j+1}}^n = \tilde{Y}^n - \xi^n - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^i f(t_j, \tilde{Y}_{t_j}^n)$$

si on a

(i) $\xi = F(W)$ où $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une fonction Lipchitzienne bornée ie il existe une constante k telle que pour tout $\omega, \omega' \in \Omega$ $|F(\omega) - F(\omega')| \leq k \sup_{0 \leq t \leq T} |\omega(t) - \omega'(t)|$

(ii) $f: [0,1] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une fonction continue, uniformément lipchitzienne ie il existe une constante L telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ $\sup_{0 \leq t \leq T} |f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$

Alors la suite (\tilde{Y}^n, U^n) converge faiblement au sens de la topologie de Skorokhode vers $(Y, \int Z dW)$ où (Y, Z) est l'unique solution de l'edsr $Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s$, $0 \leq t \leq T$.

2.2.8 Equations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies

Les équations différentielles stochastiques réfléchies sur une barrière (reflected backward stochastic differential equations with one barrier) ont été introduites en 1997 par N.Elkaroui, C.Karppodjan, E.Prdoux, S.Peng et M.C. Quenez dans [26], comme généralisation du résultats de Pardoux et Peng, dans ce cas, la première composante Y de la solution est contrainte à rester au dessus d'une barrière donnée par un processus continu adapté L .

Pour cela, la notion des EDSR a été modifiée par l'ajoutant d'un processus adapté croissant, A , à la solution, qui devient donc un triplet de processus adaptés (Y, Z, A) .

Au début, l'introduction de ce genre d'edsr a été motivé essentiellement par l'évaluation d'une option américaine dans un marché contraint, qui peut être un marché sur lequel les taux d'intérêt

ne sont pas les mêmes si l'on veut emprunter ou placer de l'argent. En effet, il a été prouvé que le prix d'un actif contingent américain est solution d'une edsr réfléchie dont la barrière est donnée par le payoff à consulter par exemple [26]. Ensuite ces équations sont utilisées dans plusieurs domaines comme les finances (options américaines) ce que, le calcul différentiel, le contrôle optimale etc...

Dans notre étude, nous intéresserons aux équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies simples (cas non markoviens) avec une seule barrière inférieure continue. ce qu'on va utilisé dans la suite dans le cas de l'application des edsr réfléchies en finance (options américaines-chapitre5).

Pour cela, considérons l'espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ et le mouvement brownien standard à une dimension, $W = \{W_t, 0 \leq t \leq T\}$ et considérons la tribu $\mathfrak{F}_t = \{\sigma\{W_s\}; 0 \leq s \leq t\}$, On note par $L^2_{\mathfrak{F}}[0, T]$, l'ensemble de processus $(\phi_t)_{t \in [0, T]}$ \mathfrak{F}_t - progressivement mesurables tel que

$$E\left(\int_0^T |\phi_t|^2 dt\right) < \infty.$$

$S^2[0, T]$ est le sous espace de $L^2_{\mathfrak{F}}[0, T]$ défini par : $(\phi_t)_{t \in [0, T]} \in S^2$ si $E\{\sup_{0 \leq t \leq T} |\phi_t|^2\} < \infty$

$L^\beta(\mathfrak{F}_t), \beta \in \mathbb{R}^+$ est L'espace des v.a X_t mesurables, X telles que $E\{|X|^\beta\} < \infty$

$A^2(0, T)$ est le sous espace des processus $A(t)$, adaptés, continus et croissants tq $A(0)=0$ et $E(A(t)^2) < \infty$.

Considérons f, ξ tels que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

h1 – f est une fonction de $\Omega \times [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} tel que pour tout y, z , $f(., y, z)$ appartient à S^2 et pour tout t , f est c lipchitzienne par rapport à (y, z) $|f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq c(|y - y'| + |z - z'|)$

h2 – ξ est une v.a positive \mathfrak{F}_T adapté, $E\{|\xi|^2\} < \infty$.

Remarque

-Dans ce qui suit, nous considérons le cas où L_t est un processus d'ito ie

$$L_t = L_0 + \int_0^t l_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T \text{ et } \xi = \Phi((W_s)_{0 \leq s \leq t}) \text{ satisfait la condition d'intégrabilité}$$

et A_t est un processus appartenant $A^2(0, T)$.

- sur le sujet edsr refléchies (définitions, méthodes employées pour l'approximation des solution) on peut consulter par exemple [26] , [43] , [51] , [59].

Définition 2.4

Une solution d'une edsr réfléchie avec une seule barrière inférieure, continue L associée au couple (f, ξ) est le triplet (Y, Z, A) sur $[0, T]$, qui vérifie **(h1)** et

$$E[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^2 + \int_0^T |Z_s|^2 ds + |A_T|^2] < \infty$$

et l'équation

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds + A_T - A_t - \int_t^T Z_s dW_s, \quad Y \geq L_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \int_0^T (Y_t - L_t) dA_t = 0 \quad (1)$$

La condition $\int_0^T (Y_t - L_t) dA_t = 0$ signifie que A agit d'une manière minimale, ie, il ne croit que lorsque Y touche la barrière L .

2.2.9 Existence et unicité de la solution [43] , [51]

Théorème 2.12

En plus de l'hypothèse h1, si $E[|\xi|^2 + \int_0^T f^2(t, 0, 0) dt + \sup_{0 \leq t \leq T} (L_t^+)^2] < \infty$, alors il existe un unique triplet (y, z, A) solution de l'edsrr (1)

Définition 2.5 [51]

(y, z, A) est appelé f - super solutions (resp.subsolution) si A est un processus croissant (resp. un processus décroissant) et il appelé f -solution si $A \equiv 0$.

Si les deux triplets $(y, z, A), (y, \bar{z}, \bar{A})$ sont tout deux f - supersolutions sur $[0, T]$, alors $(z, A) \equiv (\bar{z}, \bar{A})$.

Chapitre 3

Simulation et Discrétisation des Processus Stochastiques

Les processus stochastiques continus sont des outils largement employés dans divers domaines.

En finance, par exemple, de nombreuses problématiques dans la modélisation de l'évolution des taux d'intérêt et cours d'actions, amènent à la simulation des trajectoires de tels processus.

La mise en œuvre pratique de ces simulations nécessite la discrétisation de ces processus et l'estimation des paramètres et la génération des nombres aléatoires en vue de générer les trajectoires voulues .

Dans ce chapitre on va étudier quelques méthodes et schémas concernant la discrétisation et la simulation de trajectoires des processus stochastiques en général et les équations différentielles Stochastiques rétrogrades en particulier.

3.1 Méthodes de Monte Carlo

3.1.1 Principe de la méthode de Monte Carlo

Les méthodes de Monte-Carlo permettent de calculer numériquement des espérances.

Ces méthodes sont basées sur le résultat, connu, de la loi forte des grands nombres. :

On simule un grand nombre de variables aléatoires indépendantes $(Y_n)_{n \geq 1}$ et de même loi que

Y , on prend ensuite la moyenne des valeurs prises, $N^{-1} \sum_{n=1}^N Y_n$ et on aura ainsi une

approximation de $E(Y)$, ensuite on utilise les théorèmes suivants pour avoir la convergence .

Théorème (loi des grands nombres)

soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a réelles i.i.d alors $N^{-1} \sum_{n=1}^N Y_n \rightarrow E[Y_1]$ P.s dans L^1 si en plus les

$(Y_n)_{n \geq 1}$ sont de carré intégrables ,on peut montrer que la convergence a lieu dans L^2 et on obtient un contrôle de l'erreur p.s et de l'erreur L^2 .

Théorème 3.1 [7]

Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a réelles i.i.d de carré intégrables .on pose $\tilde{m}_N = N^{-1} \sum_{n=1}^N Y_n$ alors

$$E[|\tilde{m}_N - E[Y_1]|^2] = \frac{VAR(Y_1)}{N},$$

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{N}{VAR(Y_1)2 \ln N}}(\tilde{m}_N - E[Y_1]) = -\liminf_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{N}{VAR(Y_1)2 \ln N}}(\tilde{m}_N - E[Y_1]) = 1 \text{ p.s}$$

la première égalité s’obtient en utilisant le fait que $Y_n - E[Y_1]$ sont indépendantes et centrées , la deuxième égalité est connue sous le nom de loi de logarithme itéré .

Remarque

On peut montrer que si $Y_1 \in L^2$, $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (Y_j - \tilde{m}_N)^2$ est un estimateur sans biais de variance $Var (Y_1)$ ce qui implique d’après le théorème précédent que $\frac{\tilde{\sigma}^2}{N}$ est un estimateur sans biais de variance $Var (\tilde{m}_N)$.

À l’aide de théorème suivant on peut construire des intervalles de confiance asymptotiques.

Théorème de la limite centrale

Théorème3.2 [7]

Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a réelles i.i.d de c carré intégrables .on suppose que $Var(Y_1) > 0$ et

on pose $\tilde{m}_N = N^{-1} \sum_{n=1}^N Y_n$, $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (Y_j - \tilde{m}_N)^2$ alors

$$\sqrt{N} \left(\frac{\tilde{m}_N - E(Y_1)}{\tilde{\sigma}_N} \right) \underset{\tilde{\sigma} > 0}{\xrightarrow{\text{en loi}}} N(0, 1)$$

En particulier pour tout réel $c > 0$ $P[\sqrt{N} \left| \frac{\tilde{m}_N - E(Y_1)}{\tilde{\sigma}_N} \right| < c] \rightarrow 1 - \alpha_c$ où $\alpha_c = P[|X| > c]$ pour X suit $N(0,1)$. On déduit que pour N suffisamment grand, la probabilité d’avoir $E[Y_1] \in [\tilde{m}_N \pm \frac{c\tilde{\sigma}_N}{\sqrt{N}}]$ est proche de $1 - \alpha_c$.

Remarque

Deux estimations différentes peuvent conduire à deux valeurs complètement différentes d’où l’importance de connaître la variance de l’estimateur (qui est lui-même une v.a) et de donner un Intervalle de confiance.

En finance par exemple, si on veut donner un prix d’option calculé par simulation (voir chapitre 5) il faut toujours le mettre en perspective avec la variance de l’estimateur ou avec un intervalle de confiance de manière à pouvoir juger de la précision du résultat obtenu.

3.1.2 Méthode de la fonction d'importance [7]

La méthode de la fonction d'importance consiste à changer la loi de simulation dans le but de réduire la variance.

En finance, par exemple, nous aurons souvent besoin d'évaluer $E[X_T - K]^+$. Si K est proche de (ou inférieur à) X_0 , on aura beaucoup de simulations $X_T^{(j)}$ supérieures à K . mais si K est beaucoup plus grand que X_0 , il y'en aura peu de ces simulation et l'estimateur de Monte Carlo risque d'avoir une variance très forte.

Pour résoudre ce problème ie maintenir X_T au dessus de K , on lui ajoute un drift positif sans changer la valeur de l'espérance en utilisant pour cela le théorème 1.11 (de Girsanov):

On peut choisir h positif de telle sorte que $P^h[X_T \geq K]$ soit grand .pour simuler X_T par rapport à P^h .

On utilise l'équation suivante $X_t = X_0 + \int_0^t (a(X_s) + b(X_s)h_s) ds + \int_0^t a(X_s) dW_s^h, 0 \leq t \leq T$ où

W^h est un P^h mouvement brownien et il est nécessaire dans ce cas de simuler

$$H_T^h = \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^T \|h_s\|^2 ds + \int_0^T h_s^* dW_s\right\} \text{ sous } P^h.$$

3. 1.3 Simulation de processus

Ils existent des méthodes de simulation permettant de calculer des espérances de variables aléatoires par méthodes de Monte Carlo, ceci n'est possible que lorsque l'on est capable de simuler selon la loi des dites variables aléatoires.

En finance , il s'agit souvent de calculer des espérances de la forme $E(f(X_t)), 0 \leq t \leq T$ où $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ est solution de l'EDS $dX_t = \sigma(t, X_t) dW_t + b(t, X_t) dt$, $X_0 = x$.

Dans un premier temps commençons à nous intéresser à la simulation d'une trajectoire brownienne sur un intervalle de temps $[0, T]$.

3.1.4 Simulation récursive

On considère $(W_t, 0 \leq t \leq 1)$ un M.B défini sur $[0, 1]$.soit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ une subdivision de l'intervalle $[0, 1]$. On cherche à simuler une trajectoire du mouvement brownien en ces points de la subdivision c'est-à-dire que l'on cherche la loi du processus discret $(W_{t_i}, i = 0, 1, \dots, n)$.

Proposition 3.1

Soit $(G_i)_{i=1, \dots, n}$ une suite i.i.d selon la loi $N(0, 1)$. On définit $X_0 = 0, X_i = \sum_{j=1}^i \sqrt{t_j - t_{j-1}} G_j$ pour

$i > 0$ Les vecteurs $(W_{t_0}, W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ et (X_0, X_1, \dots, X_n) sont égaux en loi.

Pour montrer cela il suffit de montrer que (X_1, \dots, X_n) est un vecteur gaussien centré .

Les G_j sont gaussiennes , indépendantes et centrées ce qui implique que le vecteur (G_1, \dots, G_n) est gaussien et centré donc on a

$$\text{cov}(X_i, X_l) = \text{cov}\left(\sum_{j=1}^i \sqrt{t_j - t_{j-1}} G_j, \sum_{j=1}^l \sqrt{t_j - t_{j-1}} G_j\right) = \sum_{j=1}^{j \wedge l} t_j - t_{j-1} \text{cov}(G_j, G_j) = t_i \wedge t_l$$

Il est utile de noter que cette méthode de simulation n'engendre pas d'erreurs de discrétisation sur le processus discret, contrairement à ce qu'on l'observe sur d'autres processus.

3.1.5 Simulation rétrograde

Pour un couple (s, t) donné, on cherche alors à identifier la loi de $W_{\frac{t+s}{2}}$ conditionnement à (W_s, W_t) pour $s < t$, noté $L(W_{\frac{t+s}{2}}, (W_s, W_t))$.

Proposition 3.2

Pour $s < t$, $L(W_{\frac{t+s}{2}}, (B_s, B_t)) = \mathcal{N}(B_{\frac{t+s}{2}}, \frac{t-s}{4})$

Cette proposition montre qu'on peut simuler toute la trajectoire brownienne dès qu'on ajoute un point à la subdivision entre les instants t_i, t_{i+1} . Donc à l'aide de cette méthode on peut simuler une trajectoire d'une diffusion s'écrivant comme fonction connue de M.B, malheureusement les diffusions ne sont, souvent, définies que par des équations différentielles stochastiques que l'on ne sait pas résoudre, ce qui oblige de recourir à une approximation qui correspond à une discrétisation en temps de ces EDS.

3.1.6 Simulation du mouvement Brownien [15],[30]

Il existe plusieurs méthodes de simulation de MB.

La méthode la plus utilisée se base sur la considération de vecteur $(W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_n}) = (Z_1, Z_1 + Z_2, \dots, Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n)$ et le fait que les v.a $Z_k := W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ avec $W_0 := 0$, sont indépendantes et suivent une loi gaussienne de variance $t_{k+1} - t_k$ ce qui permet d'avoir une succession de petits sauts gaussiens indépendants. sur la base de ce schéma un programme Matlab simule une trajectoire brownienne pour $n=500$ $t \in [0,1]$ (figure 4).

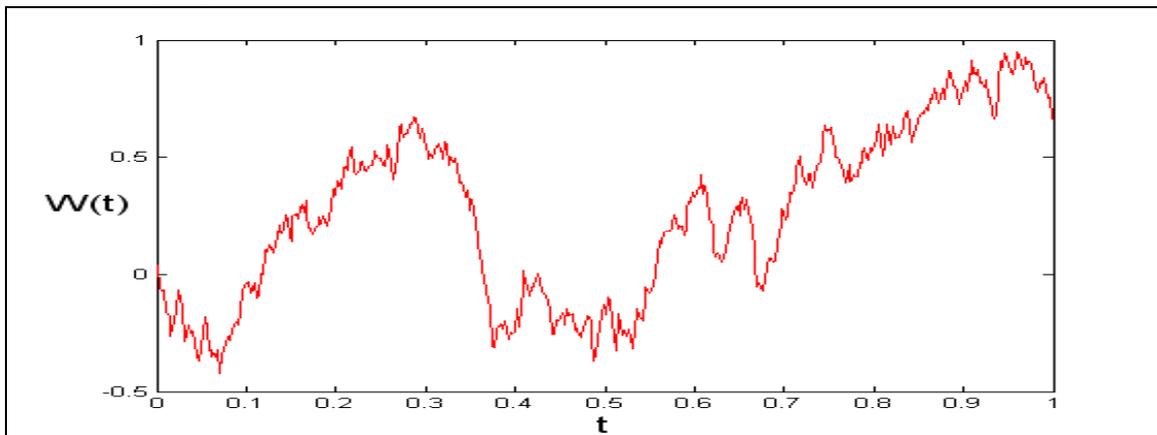


Fig.4

Toujours en utilisant la même méthode, on peut simuler 5000 trajectoires browniennes), $t \in [0,1]$. (Figure 5)

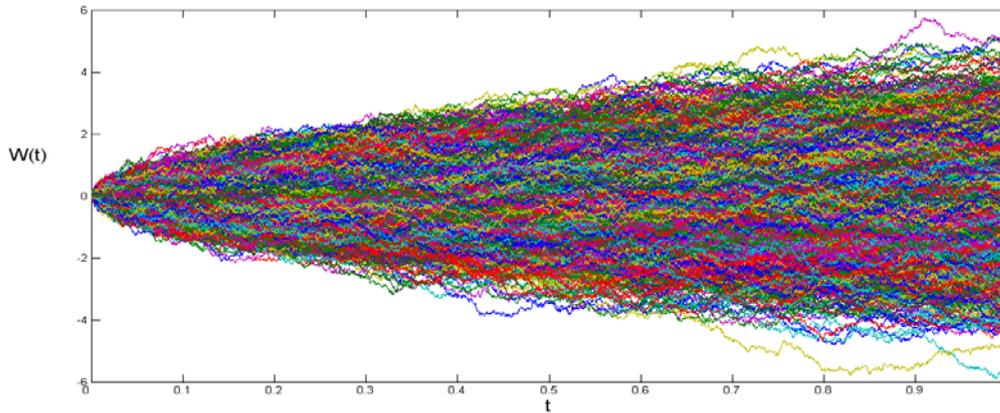


Fig.5

3.2 Discrétisation d'équations différentielles stochastiques

3.2.1 Schéma de discrétisation par la méthode d'Euler Maruyama [7], [44]

Le moyen le plus simple de résoudre l'eds $dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, 0 \leq t \leq T$, $X_0 = x$ dans le cas déterministe ($\sigma(t, X_t) = 0$) est la méthode ou schéma d'Euler, cette méthode s'étend au cas des processus de diffusion sous le nom de la méthode d'Euler Maruyama, il consiste à calculer une approximation de $X(t)$ par une chaîne de Markov sur une discrétisation de l'intervalle $[0, T]$

Pour construire ce schéma, on se donne une grille de $[0, T]$, $\pi^n := (t_0, \dots, t_i, \dots, t_n)$ avec $t_i = iT/n$.

On notera par $\Delta^n t = T/n$ et $\Delta^n W_{i+1} = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ Pour tout $i=1, 2, \dots, n$. on a :

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} b(X_{t_i})ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma(X_{t_i})dW_s \approx X_{t_{i-1}} + b(X_{t_{i-1}})\Delta^n t + \sigma(X_{t_{i-1}})\Delta^n W_i$$

d'où la construction du schéma :

$$\begin{cases} X_{t_{i+1}}^n = X_{t_i}^n + b(t_i, X_{t_i}^n)h + \sigma(t_i, X_{t_i}^n)\Delta^n W_{i+1} \\ X_0^n = X_0 \end{cases} \quad i=0, 1, 2, \dots, n. \quad \text{où } h = \Delta^n t = T/n \quad (1)$$

Par définition du mouvement brownien, la suite $\Delta^n W_i$ est une suite de vecteurs aléatoires dans \mathbb{R}^d , indépendants et de même loi. Chacune des coordonnées de $\Delta^n W_i$ suit la loi normale $N(0, \Delta^n t)$ de moyenne 0 et d'écart type $\sqrt{\Delta^n t}$. Donc la simulation de X^n se ramène à la simulation des accroissements de W , où $\Delta^n W_i$ suit la loi $N(0, \Delta^n t I_d) = N(0, ht I_d)$ pour $i=1,2,\dots$

3.2.2 Convergence L^p [7]

Pour n fixé, on montre en utilisant les conditions de Lipschitz, pour b et σ et la relation (1), que $X_{t_i} \in L^p$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $p \geq 1$.

Théorème 3.1

Supposons que σ, b des fonctions continues et lipschitziennes. Alors $\forall p \geq 1$, il existe une constante C tel que

$$[E(\sup_{t \in [0, T]} \|X_t^n - X_t\|^p)]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

Corollaire 3.1

Si g est une fonction lipschitzienne

$$\text{Alors } E \left[\left\| g(X_{\phi_{s_1}^n}, \dots, X_{\phi_{s_k}^n}) - g(X_{s_1}, \dots, X_{s_k}) \right\|^{1/p} \right] \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$$

3.2.3 Convergence faible [7]

Dans le domaine financier, on s'intéresse surtout à la convergence du prix approché vers le prix réel, en terme mathématique cela veut dire qu'on cherche la convergence de $E_g(X_T^n) - E_g(X_T)$ vers 0, c'est la convergence faible.

Théorème 3.2

Si $b, \sigma \in C_b^4, g \in C_p^4$ alors $\|E[g(X_T^n) - g(X_T)]\| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$

Théorème 3.3 [7]

Supposons que $\sigma, b \in C^\infty$ et σ uniformément elliptique, g une fonction mesurable bornée.

Alors $\exists C \in \mathbf{R}$ tq $E[g(X_T^n) - g(X_T)] = \frac{C}{n} + O(\frac{1}{n^2})$.

Remarque

- L'algorithme de simulation de la suite (X^n) est très facile à implémenter, à ce sujet, on peut consulter [44] , [30].
- La méthode E M a plusieurs avantages comme, la facilité de programmation, la rapidité de l'exécution mais elle représente aussi, comme dans le cas déterministe, le problème de cumule des erreurs (l'écart entre la solution exacte et la solution approximée augmente avec le temps (voir Figure 7) , à ce sujet , on peut consulter [44] P. 331-337.

3.24 exemples

Exemple 3.2.1

Considérons l'EDS $dX_t = \lambda X_t dt + \sigma \sqrt{X_t} dW_t$ où $\lambda = 0,01$, $\sigma = 0,2$, $X_0 = 20$, $n=5000$. la figure 6 représente une trajectoire de l'EDS réalisée par un programme Matlab basé sur la méthode E.M .

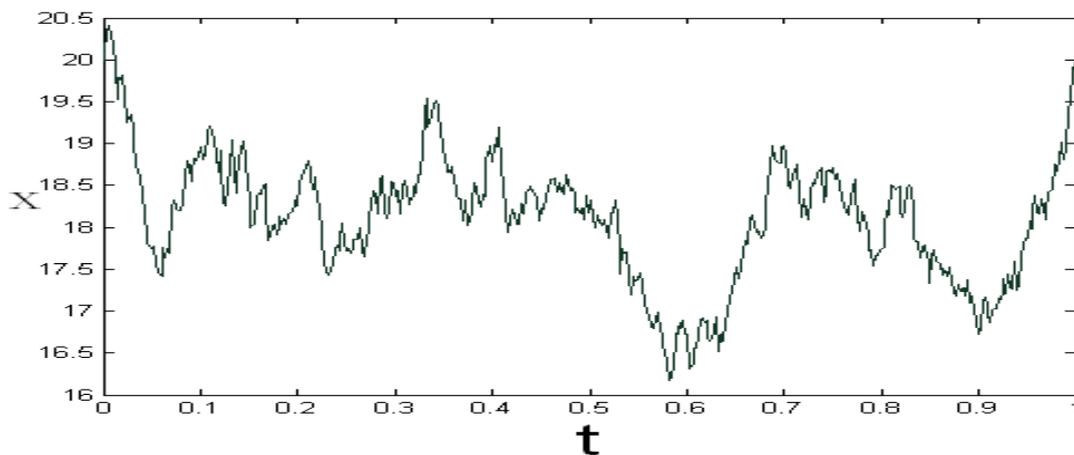


Fig.6

Exemple 3.2.2

On considère l'EDS lineaire $dX_t = \lambda X_t + \mu X_t dW_t$, $t \in [0,1]$,

avec $X_0 = 1, \lambda = 0,5, \mu = 1$ pour $n=500$.

la figure 7 représente une trajectoire de l'EDS réalisée par un programme Matlab basé sur la méthode E.M , en la comparant avec la solution exacte .

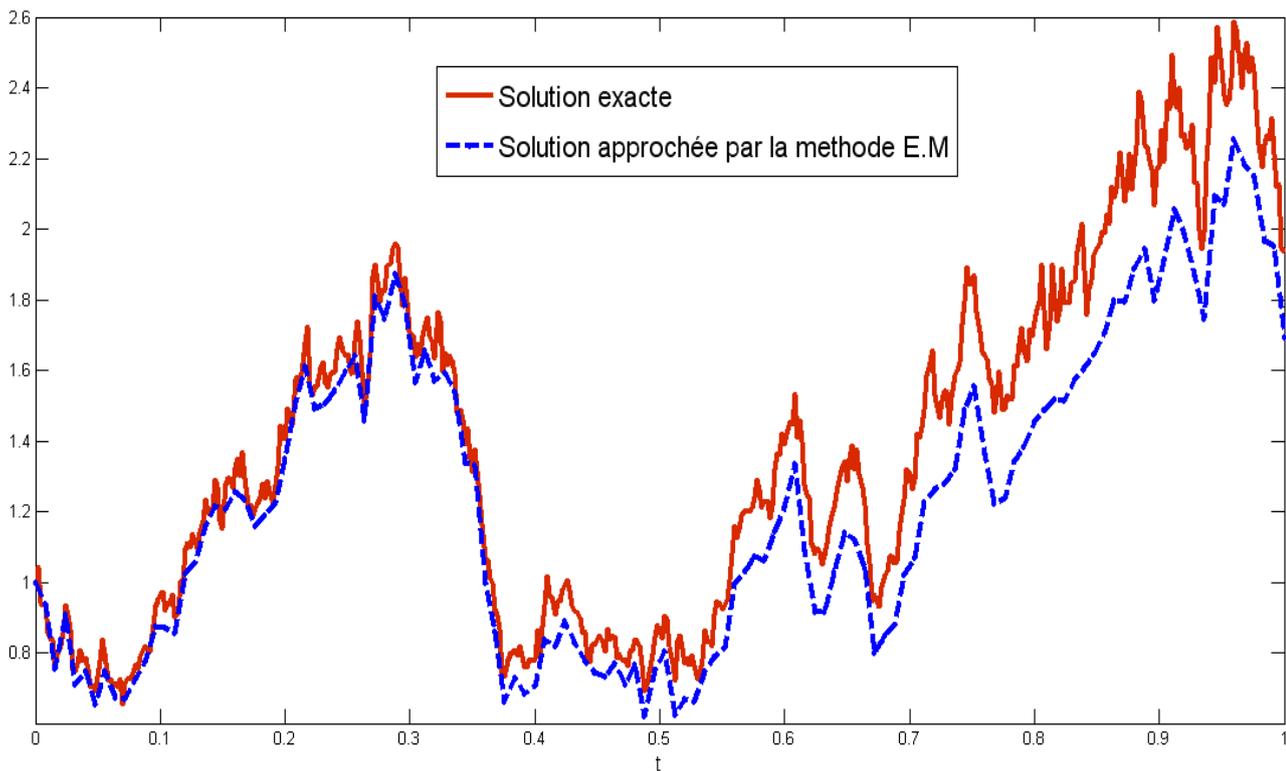


FIG. 7

3.2.5 Schéma de Milstein [7] , [30]

Dans le schéma d'Euler on a utilisé l'approximation $\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma(X_s) dW_s \sim \sigma(X_{t_{i-1}})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$

et ce n'est pas la seule qu'on peut utiliser : supposons que la dimension $d = 1$ et supposons que $b = 0$

pour $s \in]t_{i-1}, t_i]$, on a $\sigma(X_s) = \sigma(X_{t_{i-1}} + \int_{t_{i-1}}^s \sigma(X_t) dW_t) \sim$

$\sigma(X_{t_{i-1}} + \sigma(X_{t_{i-1}})(W_s - W_{t_{i-1}}))$
 $\sim \sigma(X_{t_{i-1}}) + \sigma'(X_{t_{i-1}})\sigma(X_{t_{i-1}})(W_s - W_{t_{i-1}})$ en utilisant l'égalité

$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (W_s - W_{t_{i-1}}) dW_s = \frac{1}{2}((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - \Delta t)$ ce qui donne l'approximation :

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma(X_s) dW_s \sim \sigma(X_{t_{i-1}})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2} \sigma'(X_{t_{i-1}})\sigma(X_{t_{i-1}})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - \Delta t$$

Le rôle de terme b (dérive) est minime dans l'erreur d'approximation par rapport au terme de diffusion donc il n'est pas nécessaire de le corriger.

(1) pour $d=1$

on a le schéma d'approximation suivant:

$$X_0^n = X_0$$

$$X_{t_i}^n = X_{t_{i-1}}^n + b(X_{t_{i-1}}^n)\Delta^n t + \sigma(X_{t_{i-1}}^n)(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2}\sigma'(X_{t_{i-1}}^n)\sigma(X_{t_{i-1}}^n)\{(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - \Delta^n t\}, i = 1, \dots, n.$$

(2) pour $d > 1$

en suivant le même raisonnement on aura le schéma suivant :

$$X_0^n = X_0$$

$$X_{t_i}^n = X_{t_{i-1}}^n + b(X_{t_{i-1}}^n)\Delta^n t + \sigma(X_{t_{i-1}}^n)(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \sum_{j,k=1}^d (\nabla \sigma^j \sigma^k)(X_{t_{i-1}}^n) \int_{t_{i-1}}^{t_i} (W_s^j - W_{t_{i-1}}^k) dW_s^k, i = 1, \dots, n$$

Théorème 3.4

Si $b, a \in C_b^2$, alors pour tout $p \geq 1, \max_{i \leq n} E[\|X_{t_i}^n - X_{t_i}\|^p] \leq \frac{C}{n}$

Ce théorème montre l'intérêt de schéma de Milshstein, qui permet d'avoir une vitesse de convergence L^p en $\frac{1}{n}$ a la place de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ dans le schéma d'Euler.

Lors l'application de ce schéma, on a affaire à la simulation de l'intégrale d'ito

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (W_s^j - W_{t_{i-1}}^j) dW_s^j \text{ ce qui difficile à calculer quand } d > 1.$$

Le seul cas où on peut utiliser ce schéma, avec $d > 1$, c'est lorsque la relation $\nabla \sigma^j \sigma^k = \nabla \sigma^k \sigma^j, k \in \{1, \dots, d\}$ est vérifiée. Dans ce cas, la formule d'intégration par partie du calcul d'ito permet d'écrire le schéma dans ce deuxième cas sous la forme

$$X_0^n = X_0$$

$$X_{t_i}^n = X_{t_{i-1}}^n + b(X_{t_{i-1}}^n)\Delta^n t + \sigma(X_{t_{i-1}}^n)(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2} \sum_{j,k} (\nabla a^j a^k)(X_{t_{i-1}}^n) (W_{t_i}^j - W_{t_{i-1}}^j) (W_{t_i}^k - W_{t_{i-1}}^k) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \nabla \sigma^j \sigma^k (X_{t_{i-1}}^n) \Delta^n t, i = 1, \dots, n.$$

donc il suffit de simuler les accroissements de W.

Remarque

Il existe plusieurs schémas d'ordres supérieurs à 1 mais, malheureusement, ils sont difficiles à appliquer, surtout quand la dimension est grande.

3.2.6 Théorème du point fixe de Picard

Théorème 3.5

Soit (X, d) un espace métrique complet et f une application contractante sur X (ie $f : X \rightarrow X, \exists c \in [0,1]$ tel que pour tout x, y dans X $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$). on définit alors par récurrence la suite (x_n) d'éléments de X par $x_0 \in X$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ on montre alors que pour tout $k \geq 0$ $d(x_{k+1}, x_k) \leq c^k d(x_1, x_0)$ et que la suite (x_n) est de Cauchy donc convergente vers $x \in X$ unique point fixe de f .

De plus, pour tout $n \geq 0, d(x_n, x_0) \leq \frac{1-c^n}{1-c} d(x_1, x_0)$ et $d(x_n, x_0) \leq \frac{1-c^n}{1-c} d(x_1, x_0)$ en particulier $d(x, x_0) \leq \frac{d(x_1, x_0)}{1-c}$

preuve

Par récurrence sur $k \geq 0$ on a $d(x_{k+1}, x_k) \leq c^k d(x_1, x_0)$ de plus pour $r \geq 1$,

$$\begin{aligned} d(x_p, x_{p+r}) &\leq d(x_p, x_{p+1}) + \dots + d(x_{p+r-1}, x_{p+r}) \\ &\leq (c^p + c^{p+1} + \dots + c^{p+r-1})d(x_1, x_0) \\ &\leq c^p (1 + c + \dots + c^{r-1})d(x_1, x_0) \\ &\leq c^p \frac{1-c^r}{1-c} d(x_1, x_0) \leq \frac{c^p}{1-c} d(x_1, x_0) \xrightarrow{p \rightarrow \infty, r \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Ce qui implique que la suite (x_n) est de Cauchy donc convergente.

Donc pour $p=0, r=n$ et on passant à la limite, $n \rightarrow \infty$, on obtient les inégalités voulues.

Remarque

Cette méthode est très utilisée dans la recherche d'une approximation dans le cas des edsr.

3.3 Discrétisation et Résolution Numérique des Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades.

De nombreuses études sont faites depuis le début des années 1990 sur la résolution numérique des edsr.

En général, considérons $(\Omega, (F_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$ comme espace de probabilité filtrée munie de mouvement brownien standard à d dimensions $W(t)_{0 \leq t \leq T}$ et l'EDSR suivante

$$\begin{aligned} - dY_t &= f(t, X_t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t \\ , Y_T &= \Phi(X_T) = \xi \end{aligned} \tag{1}$$

où le processus X satisfait l'équation $dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$, $X_0 = x$,

X est à valeurs dans \mathbb{R}^d , Y à valeurs dans \mathbb{R}^d et Z à valeurs dans $\mathbb{R}^{d \times n}$, b, σ, f et Φ sont des fonctions qui satisfaites la condition de Lipchitz vue au chapitre 2 .

on sait que sous cette condition ,l'équation $X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s$ admet une unique solution , (\mathfrak{F}_t) adaptée , $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ vérifiant $E\{SUP_{t \in [0, T]} |X_t|^2\} < \infty$ et on sait encore que sous certaines conditions (voir le théorème d'existence et d'unicité pour les edsr) , il existe une unique solution , adaptée , pour l'équation (1).

Sous forme intégrale, le système précédent s'écrit :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$$

$$\text{et } Y_t = \Phi(X_T) + \int_t^T f(s, X_s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad t \in [0, T]$$

On peut approximer facilement la solution de l'EDS en X par plusieurs méthodes, comme la méthode E.M ou la méthode de Milstein , par exemple, mais la simulation de la solution (Y, Z) est plus difficile.

Plusieurs articles ont été publiés sur la résolution numérique de ce genre d'équations où plusieurs méthodes d'approximation ont été proposées.

Une première méthode, repose sur le lien existant entre Y et la solution (faible) u de l'EDP $-Lu(t, x) - h(x, u(t, x), \sigma(x)\nabla_x u(t, x)) = 0, u(T, x) = \Phi(x)$ où L désigne l'opérateur

$$\text{de dérivation associe à } X: Lu := \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (\sigma\sigma^*)^{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x^i}$$

Sous certaines conditions (chapitre2) on a $Y_t = u(t, X_t)$ et $Z_t = \sigma(X_t)\nabla_x u(t, X_t)$. Pour la simulation de (Y, Z) , on commence par l'estimation numérique de u et $\nabla_x u(t, x)$ puis on approche X par le schéma d'Euler, on obtient ainsi une approximation de (Y, Z) .

Cette méthode ne peut être appliquée sans la résolution de l'EDP, ce qui est compliqué dans le cas où la dimension de l'espace est grande. À ce sujet on peut consulter, par exemple, [46], [24], [35].

Une deuxième méthode consiste à approximer le mouvement brownien W par une suite de marches aléatoires sur un espace de probabilité de dimension fini, puis, on écrit l'équation rétrograde associée en temps discret, au contraire de la première, cette méthode peut être appliquée sans la résolution de l'EDP, en $Y_t = u(t, X_t)$.

Le problème qu'on peut rencontrer lors de l'application de cette méthode, est l'explosion rapide de la complexité de l'algorithme avec l'augmentation de la dimension .on peut consulter pour cela [11],[22], [41], [42], [51].

Ensuite, de nouvelles méthodes d'approximation concernant ce genre d'équations, qui évitent ces problèmes, sont apparues ; par exemple la méthode de Monte-Carlo associée aux régressions non paramétriques, qui a pour but de trouver un estimateur particulier pour la solution en construisant un schéma de discrétisation en temps de l'équation (1), qui fait intervenir les espérances conditionnelles.

Ce que on va décrire dans le chapitre 4.

3.31 Discrétisation des EDSR dans le cas où le driver ne dépend que de t et Y_t .

Pour commencer, on va essayé de donner, en résumé, quelques méthodes d'approche pour les edsr dans le cas simple non markovien, basées essentiellement sur l'approximation du mouvement brownien par une suite de marches aléatoires.

Mon choix pour cette méthode est dû, essentiellement, à la disponibilité de programmes informatiques pour une simulation numérique des solutions, ce qui manque dans les autres méthodes.

En premier lieu, intéressons nous à trouver la solution ou une approximation de celle-ci pour l'EDS rétrograde simple non markovien de type $dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t$, $Y_T = \xi$, $t \in [0, T]$ (2), pour cela Considérons $(\Omega, \mathfrak{F}_t, P)$ avec $\Omega = C([0, T], \mathbb{R}^d)$, l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans \mathbb{R}^d . Cette équation a une unique solution, (Y_t, Z_t) dès la satisfaction des conditions d'existence et d'unicité.

On rappelle que dans le cas d'une edsr linéaire, nous avons déjà une forme explicite de la solution. (chapitre 2, proposition 2.6).

Considérons maintenant le cas général et dans un premier cas, supposons que le driver f ne dépend que de t et Y ; dans ce cas l'équation (2) prend la forme $-dY_t = f(t, Y_t)dt - Z_t dW_t$ avec la condition terminale $Y_T = \xi$ où ξ est une v.a \mathfrak{F}_T mesurable tq $E|\xi|^2 < \infty$. Sous

forme intégrale, l'équation s'écrit $Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s$ (3). Cette équation a une unique solution, (Y_t, Z_t) .

Dans ce cas considérons toujours $\Omega = C([0, T], \mathbb{R}^d)$ et l'espace $((\Omega, \mathfrak{F}_t, P)$ dans lequel

$W_t(\omega) = \omega(t)$ est le M.B standard de dimension d .

Supposons qu'il existe $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, fonction Lipchitzienne bornée (ie il existe une constante k telle que pour tout $\omega, \omega' \in \Omega$ $|F(\omega) - F(\omega')| \leq k \sup_{0 \leq t \leq T} |\omega(t) - \omega'(t)|$) tq

$\xi = F(W)$ et supposons que $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une fonction continue, uniformément lipchitzienne (ie il existe une constante L telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, $\sup_{0 \leq t \leq T} |f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$)

Pour simplifier les calculs, plaçons nous, dans l'espace de dimension 1 (d=1) avec T=1 et appliquons un schéma d'approche basé sur la discrétisation de (2) en remplaçant le

mouvement brownien W par une simple marche aléatoire (pour la méthode appliquée on peut consulter par exemple [41], [42]), pour cela notons par $M^n = (M_t^n)_{0 \leq t \leq 1}$ une marche aléatoire symétrique où $M_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{[nt]/n} \varepsilon_k^n$, $0 \leq t \leq 1$ et $\{\varepsilon_i^n\}_{0 \leq i \leq n}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d de même loi symétrique de Bernoulli.

Notons par M_j^n la σ algèbre engendrée par $\varepsilon_0^n, \varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_j^n$, $M_j^n = \sigma(\varepsilon_0^n, \varepsilon_1^n, \dots, \varepsilon_j^n)$, et par

$\{\xi^n\}_{n \geq 0}$ la suite de variables aléatoires M_j^n mesurable et de carré intégrable convergente, dont la limite est égale à ξ .

Supposons que le mouvement brownien W et la suite de marches aléatoires M^n sont définis sur le même espace de probabilité.

Passons à l'espérance conditionnelle dans l'équation (3) en tenant compte que $E(\int dW_t) = 0$

Dans ce cas, la solution Y_t sera présenté sous cette forme, $Y_t = E(\xi + \int_t^T f(s, Y_s) ds / F_t)$ et

l'équation (3) sera approchée par l'équation rétrograde, discrète

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_i^n &= \xi^{(n)} + \frac{1}{n} \sum_{j=i}^n f(t_j, \tilde{Y}_j^n) - \sum_{j=i}^{n-1} \tilde{Z}_{t_j}^n \Delta M_{t_{j+1}}^n, \quad (4) \\ \xi^{(n)} &= F(M^{(n)}) \end{aligned}$$

Cette équation aussi a une unique solution sous forme de couple $(\tilde{Y}^{(n)}, \tilde{Z}^{(n)})$.

On a $\tilde{Y}_{t_i}^n - \tilde{Y}_{t_{i+1}}^n = \frac{1}{n} f(t_i, \tilde{Y}_{t_i}^n) - \tilde{Z}_{t_i}^n \Delta M_{t_{i+1}}^n$, en prenant l'espérance conditionnelle par rapport à

M_i^n et comme $E(\tilde{Z}_{t_i}^n \Delta M_{t_{i+1}}^n / M_i^n) = 0$ et $\tilde{Y}_{t_i}^n$ est M_i^n adapté on aura alors

$$E(\tilde{Y}_{t_{i+1}}^n + \frac{1}{n} f(t, \tilde{Y}_{t_i}^n) | M_i^n) = \tilde{Y}_{t_i}^n \Rightarrow E(\tilde{Y}_{t_{i+1}}^n | M_i^n) = \tilde{Y}_{t_i}^n - \frac{1}{n} (f(t_i, \tilde{Y}_{t_i}^n)) \quad (5)$$

et $\tilde{Z}_{t_i}^n = [\tilde{Y}_{t_{i+1}}^n - \tilde{Y}_{t_i}^n + \frac{1}{n} f(t_i, \tilde{Y}_{t_i}^n)] (\Delta M_{t_{i+1}}^n)^{-1}$ et comme $\tilde{Z}_{t_i}^n$ est M_i^n adapté alors on a

$$\tilde{Z}_{t_i}^n = E\{[\tilde{Y}_{t_{i+1}}^n - \tilde{Y}_{t_i}^n + \frac{1}{n} f(t_i, \tilde{Y}_{t_i}^n)] (\Delta M_{t_{i+1}}^n)^{-1} | M_i^n\}$$

En outre, une fois $\tilde{Y}_{t_{i+1}}^n$ est déterminé, $\tilde{Y}_{t_i}^n$ sera trouvé par la méthode de point fixe :

En posant $X^0 = E \{ \tilde{Y}_{t_{i+1}}^n \mid \mathcal{M}_i^n \}$ et $X^{k+1} = X^0 + \frac{1}{n} f(t_i, X^k) = g(X^k)$, g est contractante :

$|g(t, x) - g(t, y)| \leq (L/n)|x - y|$ donc ,d'après le théorème du point fixe ,les itérations de ce procédé convergent vers la solution de (5).

De plus, si f est bornée par \mathbf{R} et pour n assez grand, une itération peut représenter déjà une bonne approximation pour la solution de (2) et puisque f est L uniformément lipchitzienne, on a

$$\begin{aligned} |Y_{t_i}^n - X^1| &= \left| \frac{1}{n} f(t_i, \tilde{Y}_{t_i}^n) + X^0 - X^0 - \frac{1}{n} f(t_i, X^0) \right| = \left| \frac{1}{n} f(t_i, \tilde{Y}_{t_i}^n) - \frac{1}{n} f(t_i, X^0) \right| \\ &\leq L/n |\tilde{Y}_{t_i}^n - X^0| = L/n \left| \frac{1}{n} f(t_i, \tilde{Y}_{t_i}^n) \right| \leq (L/n) \cdot (\mathbf{R}/n) \Rightarrow |Y_{t_i}^n - X^1| \leq \frac{LR}{n^2} \end{aligned}$$

et par conséquent on peut construire le schéma numérique explicite rétrograde suivant, qui donne une approximation de la solution.

$$\hat{Y}_T^n = \xi^n, \hat{Z}_T^n = \mathbf{0}$$

$$X_{t_i}^{(n)} = E(\hat{Y}_{t_{i+1}}^{(n)} \mid \mathcal{M}_i^n)$$

$$\hat{Y}_{t_i}^n = X_{t_i}^n + \frac{1}{n} f(t_i, X_{t_i}^{(n)})$$

$$\hat{Z}_{t_i}^n = E \left\{ \left[\hat{Y}_{t_{i+1}}^n + \frac{1}{n} f(t_i, \hat{Y}_{t_i}^{(n)}) - \hat{Y}_{t_i}^n \right] (\Delta W_{t_{i+1}}^n)^{-1} \mid \mathcal{M}_i^n \right\}$$

3.3. 2Convergence du schéma de discrétisation

On a démontré dans [41] que Pour n assez grand ($2L \leq n$) on a

$$\sup_{0 \leq t_i \leq T} | \tilde{Y}_{t_i}^n - \hat{Y}_{t_i}^n | \leq \frac{R(e^{2L} - 1)}{n} \text{ et } \sup_{0 \leq t_i \leq T} | \tilde{Z}_{t_i}^n - \hat{Z}_{t_i}^n | \leq \frac{R(e^{2L} - 1)(2 + L/n)}{\sqrt{n}}.$$

Supposons donc que $(\tilde{Y}^n, \tilde{Z}^n)$ est solution de l'edsr discrète (4), le théorème (2.11) vu au chapitre 2

implique $(\tilde{Y}^n, \tilde{Y}^n - \xi^n - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^i f(t_j, \tilde{Y}_{t_j}^n))$ converge au sens de la topologie de Skorokhod vers $(Y, \int Z dW)$.

3.3.3 Discrétisation des EDSR dans le cas où le driver dépend de t, Y_t, Z_t

Considérons toujours l'espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{F}_t, P)$ et notons par $(\mathfrak{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ la filtration naturelle engendré par le mouvement brownien dimension 1 W_t , $\mathfrak{F}_t = \sigma(W_s; 0 \leq s \leq t)$.

Supposons que f dépend de t, Y, Z , $f: [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipchitzienne par rapport (y, z) uniformément par rapport t ie $|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)| \leq c(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|)$ $\forall t \in [0, T]$, $\forall (y_1, z_1), (y_2, z_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ avec $f(\cdot, 0, 0)$ de carré intégrable et supposons que $\xi \in \mathfrak{F}_t$ mesurable, ξ^n est M_j^n mesurable avec $E \left[|\xi|^2 + \sup_n |\xi^n|^2 \right] < \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[|\xi - \xi^n| \right] = 0$

Dans ce cas l'équation (1) s'écrit $Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s$ (5)

Comme dans le deuxième cas, nous appliquons la même méthode. (pour cela ,on peut consulter [9], [40]).

Pour simplifier les calculs, posons $T/n = h$ et $M_t^n = \sqrt{h} \sum_{k=1}^{[t/h]} \varepsilon_k^n$, $0 \leq t \leq T$ où $\{\varepsilon_k^n\}_{1 \leq k \leq n}$,

$\varepsilon_0^n = 0$ est une suite de v.a de Bernoulli symétriques : $p(\varepsilon_k^n = -1) = p(\varepsilon_k^n = +1) = \frac{1}{2}$.

Comme dans le cas précédent nous cherchons à trouver une approximation de processus (Y, Z) réelle, définie sur $[0, T]$ \mathfrak{F}_t -progressivement mesurable telle que

$E[\sup_0^T |Y_t|^2] + E[\int_0^T |Z_t|^2 dt] < \infty$ et qui satisfait $-dY_t = f(t, Y_t, Z_t) - Z_t dW_t$, avec la condition

terminale $Y_T = \xi$, $E|\xi|^2 < \infty$. Pour cela Cherchons une solution numérique pour (5) à

l'aide de couple (Y_t^n, Z_t^n) et qui doit satisfaire $(Y_t^n, Z_t^n) \equiv (y_j^n, z_j^n), t \in [jh, (j+1)h]$ avec $h=T/n$ et

$n_j=1$, $(y_j^n, z_j^n)_{0 \leq j \leq n}$ est la solution, dans un petit intervalle, de l'équation rétrograde discrète

$y_j^n = y_{j+1}^n + f(t_j, y_j^n, z_j^n)h - z_j^n \varepsilon_{j+1}^n \sqrt{h}$ (6) de valeur terminale $\xi^n = y_n^n$. Le procédé commence

par $\xi^n = y_n^n$ alors la solution (y_j^n, z_j^n) de (6) est calculée d'une façon rétrograde suivant le schéma implicite suivant, en supposons qu'on connaît y_{j+1}^n :

Théorème 3. 1

Soit y_{j+1}^n une v.a M_{j+1}^n mesurables .alors pour $h < \frac{1}{c}$, il existe un couple unique (y_j^n, z_j^n) ,

M_j^n mesurable vérifiant l'équation (6)

Preuve

Posons $Y_- = y_{j+1}^n \Big|_{\mathcal{E}_{j+1}^n = -1}$ et $Y_+ = y_{j+1}^n \Big|_{\mathcal{E}_{j+1}^n = +1}$ et supposons qu'ils sont tout les deux

M_j^n - mesurables en remplaçant dans l'équation (6) on aura :

$$\begin{aligned} y_j^n &= Y_+ + hf(t_j, y_j^n, z_j^n) - \sqrt{h} z_j^n \\ y_j^n &= Y_- + hf(t_j, y_j^n, z_j^n) + \sqrt{h} z_j^n \end{aligned}$$

Ce qui équivaut à $Z_j^n = \frac{1}{2\sqrt{h}}(Y_+ - Y_-) = \frac{1}{2\sqrt{h}} E(y_{j+1}^n \mathcal{E}_{j+1}^n \Big| M_j^n)$ (7)

$$\text{et } y_j^n - hf(t_j, y_j^n, z_j^n) = \frac{1}{2}(Y_+ + Y_-) = E[y_{j+1}^n \Big| M_j^n] \quad (8)$$

Par la condition de Lipchitz on peut montrer que la fonction $G(y) = y - hf(t_j, y, z_j^n)$ est strictement monotone quand $hk < 1$, $\langle G(y) - G(y'), y - y' \rangle \geq (1 - h k) |y - y'|^2 > 0$

Montrons cette inégalité :

On a $|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)| \leq c(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|)$, $\forall (y_1, z_1), (y_2, z_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $\forall t \in [0, T]$ alors

$$\begin{aligned} \langle G(y) - G(y'), y - y' \rangle &= \langle y - hf(y, z_j^n) - [y' - hf(y', z_j^n)], y - y' \rangle = \\ \langle y - y' - h[f(y, z_j^n) - f(y', z_j^n)], y - y' \rangle &= |y - y'|^2 - h \langle f(y, z_j^n) - f(y', z_j^n), y - y' \rangle \\ &\geq |y - y'|^2 - h \|f(y, z_j^n) - f(y', z_j^n)\| |y - y'| \geq |y - y'|^2 [1 - h k] \neq 0 \end{aligned}$$

d'où l'existence d'une valeur unique y_j^n qui réalise (6).

Ce schéma de résolution de l'edsr discrète est nommé schéma implicite.

En général on ne peut pas toujours utiliser ce schéma d'une façon explicite (ie dans le cas G^{-1} ne peut pas être résolue explicitement) d'où la nécessité de construire un autre schéma plus souple en utilisant l'espérance conditionnelle $E(y_{j+1}^n \Big| M_j^n)$ pour approximer y_j^n :

Posons $\tilde{Y}_T^n = \tilde{y}_n^n = \xi^n$ en commence l'itération par $j = n - 1$ on aura la relation rétrograde

$$\tilde{y}_j^n = \tilde{y}_{j+1}^n + hf(t_j, E(\tilde{y}_{j+1}^n \Big| M_j^n), \tilde{z}_j^n) - (\sqrt{h}) \tilde{z}_j^n \mathcal{E}_{j+1}^n \quad (9)$$
 ce qui équivaut aux relations suivantes

$$\tilde{y}_j^n = E(\tilde{y}_{j+1}^n | \mathbf{M}_j^n) + h f(E(\tilde{y}_{j+1}^n | \mathbf{M}_j^n), \tilde{z}_j^n)$$

$$\tilde{z}_j^n = \frac{1}{2\sqrt{h}} E(\tilde{y}_{j+1}^n \varepsilon_{j+1}^n | \mathbf{M}_j^n) = \frac{\tilde{y}_{j+1}^n |_{\varepsilon_{j+1}^n=1} - \tilde{y}_{j+1}^n |_{\varepsilon_{j+1}^n=-1}}{2\sqrt{h}}$$

3.3.4 Convergence des deux schémas :

Posons

$$Y_t^n = y_{[t/h]}^n, \quad \tilde{Y}_t^n = \tilde{y}_{[t/h]}^n, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$Z_t^n = z_{[t/h]}^n, \quad \tilde{Z}_t^n = \tilde{z}_{[t/h]}^n, \quad 0 \leq t \leq T$$

où $(y_j^n, z_j^n)_{0 \leq j \leq n}$ et $(\tilde{y}_j^n, \tilde{z}_j^n)_{0 \leq j \leq n}$ sont les solutions de l'edsr discrète (6) par le schéma implicite et explicite respectivement .
on a :

Théorème 3.2

Sous les mêmes hypothèses citées au début, la solution discrète $\{(Y^n, Z^n)\}_{n=1}^\infty$ sous le schéma implicite et $\{(\tilde{Y}^n, \tilde{Z}^n)\}_{n=1}^\infty$ sous le schéma explicite converge vers la solution (Y, Z) de (5) de la manière suivante :

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} E[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^n - Y_t|^2 + \int_0^T |Z_s^n - Z_s|^2 ds] = 0 \quad (10)$$

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sup_{0 \leq t \leq T} E | \tilde{Y}_t^n - Y_t |^2 + E \int_0^T | \tilde{Z}_s^n - Z_s |^2 ds \} = 0 \quad (11)$$

La première convergence a été démontré en 2001 par Briand Delyon et J.Memin dans [11]

La deuxième a été démontrée en 2006 par shige Peng et Xu Mingyu dans [51],

3.3.5 Quelques exemples de Simulation.

Dans ce paragraphe, on donne quelque exemples de simulation de la solution suivant les deux schémas de discrétisation ci-dessus. Notre but consiste à déterminer Y_0 qui est une valeur déterministe. Comme $t \in [jh, (j+1)h]$, $nj=1$, M_{jh}^n suit une loi binomiale de paramètres $j, \frac{1}{2}$. Donc à chaque instant $0 \leq j \leq n$ les deux V.A y_j^n, z_j^n ne peuvent

prendre chaque'une que $j+1$ valeurs

Si on considère la condition terminale $Y_T = \xi$, qui est une fonction de W_T . On pose $Y_T = \Phi(W_T)$ dans ce cas $y_n^n = \xi^n = \Phi(M_{nh}^n)$, en appliquant ce procédé pour chaque j et pour les deux schémas (schéma explicite (9) ou bien pour le schéma implicite (6)), à chaque instant $0 \leq j \leq n-1$ nous pouvons calculer facilement

$$y_j^n = \phi_1(j, M_{jh}^n) = \phi_1(j, \sqrt{h} \sum_{i=1}^j \varepsilon_j^n),$$

$$z_j^n = \phi_2(j, M_{jh}^n) = \phi_2(j, \sqrt{h} \sum_{i=1}^j \varepsilon_j^n)$$

Sur la base de ces schémas, Xu Mingyu et Shige Peng [51] ,[58] ont developé un programme sur Matlab qui simule et calcule la solution d'edsr dans des cas particuliers suivant le driver $f = f(t, y, z)$ et la fonction de la condition initiale $\xi = \Phi = \Phi(x)$ avec $T=1$, ici x représente le mouvement brownien W_1 . (Dans ce cas, on peut consulter encore [58]).

En tenant compte que le driver f vérifie la propriété de Lipchitz sur l'intervalle $[0, 1]$, à travers les quatre exemples suivants, on va présenter graphiquement quelques trajectoires d'edsr dans le cas où f est linéaire ou non linéaire.

Chaque exemple comporte cinq figures graphiques :

La première représente une simulation de quelques trajectoires brownienne suivant la condition terminale de l'edsr $\Phi(x)$.

La deuxième figure fait apparaître les trajectoires des deux composantes de la solution approchée :

y_j^n est représenté en rouge et z_j^n en vert, en 2d et en 3d.

Le graphe en 2d représente les trajectoires (t, Y_t) et (t, Z_t) et le graphe en 3d représente les trajectoires (t, W_t, Y_t) et (t, W_t, Z_t) ; dans cette dernière, on peut constater, en bleu, la trajectoire du mouvement brownien et la trajectoire de la fonction de la condition terminale $\Phi(x)$.

Dans la troisième figure graphique on peut voir plusieurs trajectoires de la solution, suivant les différentes valeurs du mouvement brownien.

La quatrième représentation graphique s'appelle ' la solution Y sur une surface', comme son nom l'indique, ce graphe en 3d fait apparaître le chemin que suit la trajectoire de Y sur une surface, déterminée suivant la fonction condition terminale, on peut constater sur cette surface l'allure de la trajectoire y_t en rouge et en bas on peut voir la trajectoire du mouvement brownien $W_t(\omega)$.

Le cinquième graphe représente en rouge plusieurs simulations de trajectoires, sur la même surface, suivant les différentes trajectoires du mouvement brownien, vues au dessous de la surface.

La dernière figure graphique, sous forme d'une surface déterminée par la fonction terminale $\Phi(x)$, s'appelle 'surface de la solution y', elle représente la solution y_j^n suivant les différents états (au total 400 dans notre cas),. La couleur rouge (resp bleu) correspond à la solution y (resp au mouvement brownien) tandis que la couleur allant de jaune au vert représente les liens entre les trajectoires de la solution y_t et les trajectoires du mouvement brownien.

Toutes les simulations graphiques son réalisés pour $n=400$ et $T=1$, suivant le schéma implicite.

On s'intéresse dans les simulations suivantes à déterminer les valeurs déterministes y_0^n, z_0^n

Dans le cas de l'edsr $-dy = f(t, y, z)dt - ZdW(t)$ avec la condition terminale $y_T = \Phi(W_1) = \xi$

Premier cas f est linéaire , $f(t, y, z) = a.y + b.z + c$

Exemple $a=b=c=1$, $\xi = \sin|W_1|$ Dans ce cas on sait qu'on peut calculer la solution explicitement :

$$\begin{aligned} &\text{la solution exacte pour } t=0 \quad y_0 = \exp\left(\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)T\right)E[\xi \exp(bW_T)] + \frac{c}{a}[\exp(aT) - 1] \\ &= \exp(1/2)E[\sin|W_1| \exp(W_1)] + [\exp(1) - 1]. \end{aligned}$$

La méthode de Monte-Carlo avec 10 000 000 échantillons donne la solution $y_0 = 3.4850$

Avec la méthode proposée par le schéma implicite et pour $n=400$ On trouve, $y(0)=3.48$, $z(0)=0.2101$ (figure 9)

Deuxième cas

f n'est pas linéaire

Exemple

$f(t, y, z) = |y - z|$, $\Phi(x) = \sin|x + \pi/2|$, $T=1$. On trouve, $y(0)= 1.7$, $z(0) = 0.2482$

Premier cas $f(t, y, z) = y+z + 1$; $\xi = \sin|W_1|$

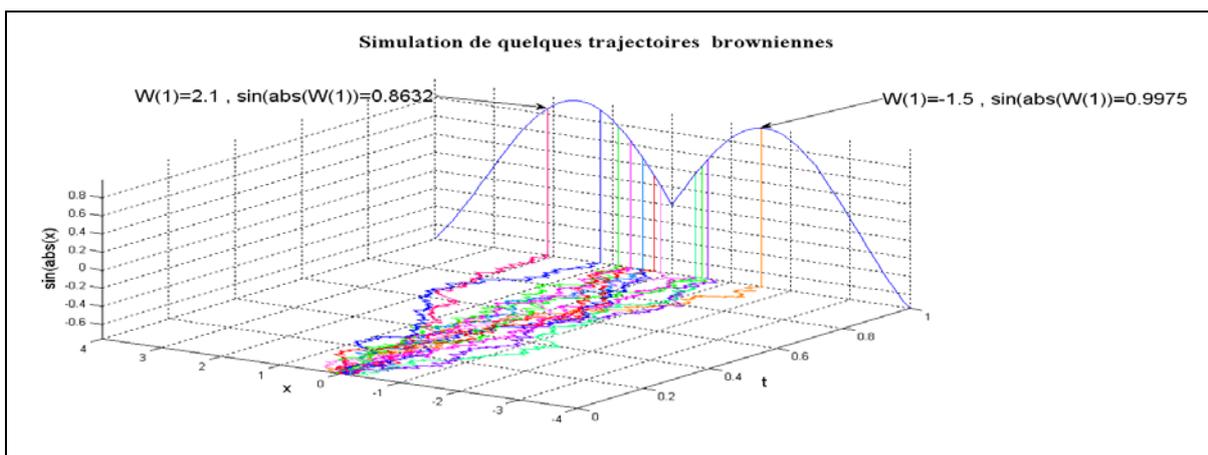


Fig.8

Premier cas $f(t, y, z) = y+z + 1$; $\xi = \sin|W_1|$

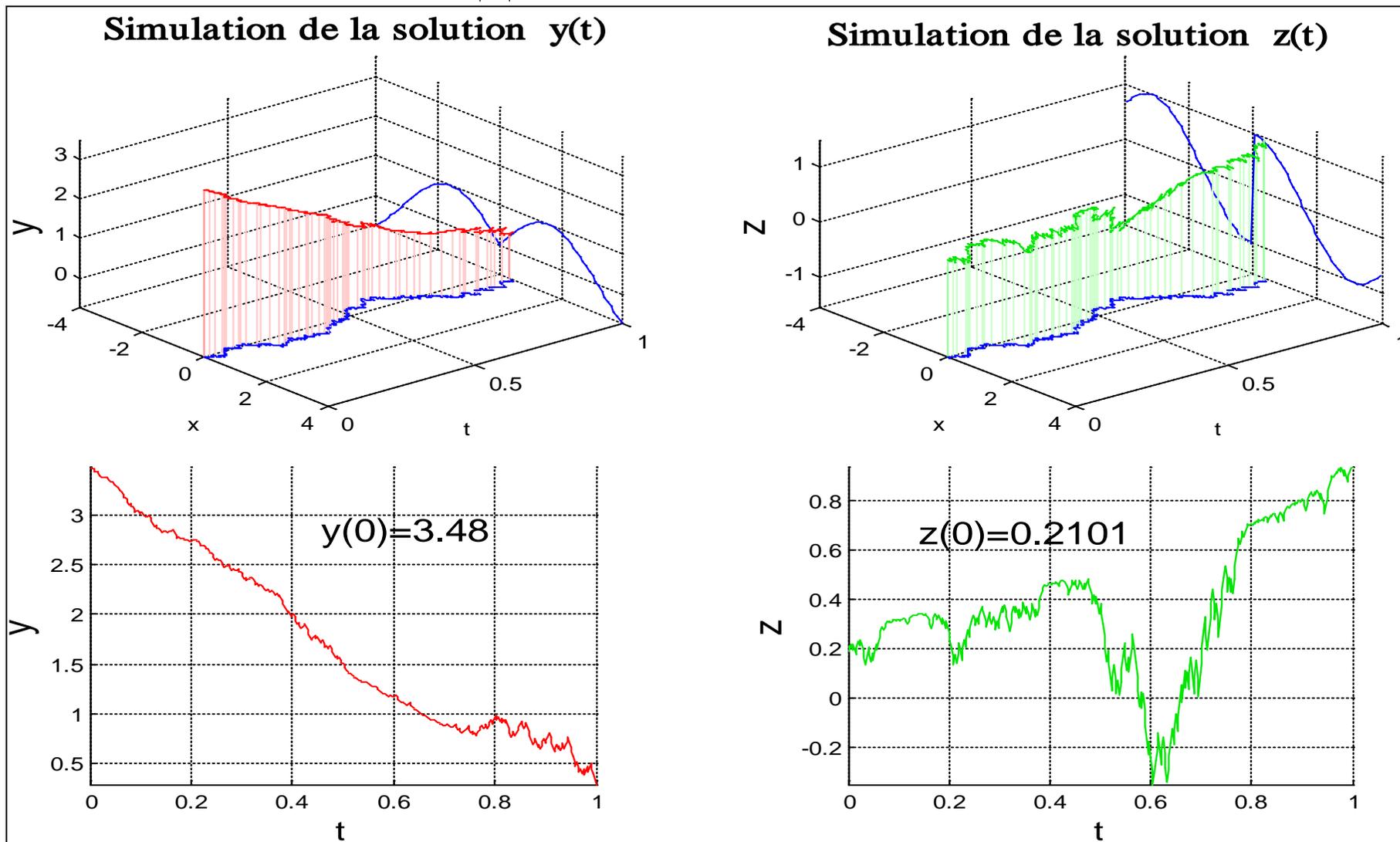


Fig. 9

Premier cas $f(t, y, z) = y+z + 1$; $\xi = \sin|W_1|$

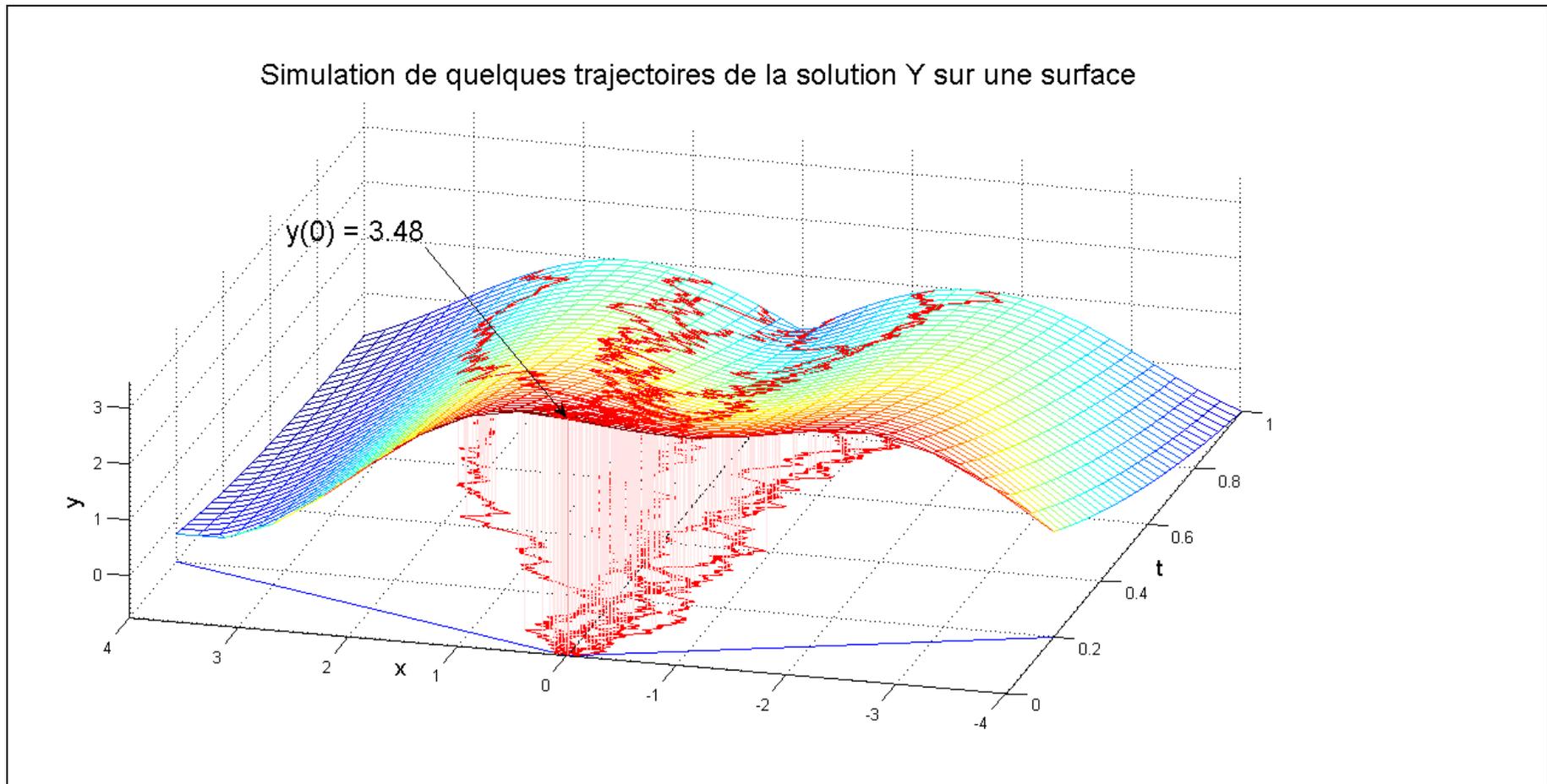


Fig.10

Premier cas $f(t, y, z) = y+z + 1$; $\xi = \sin|W_1|$

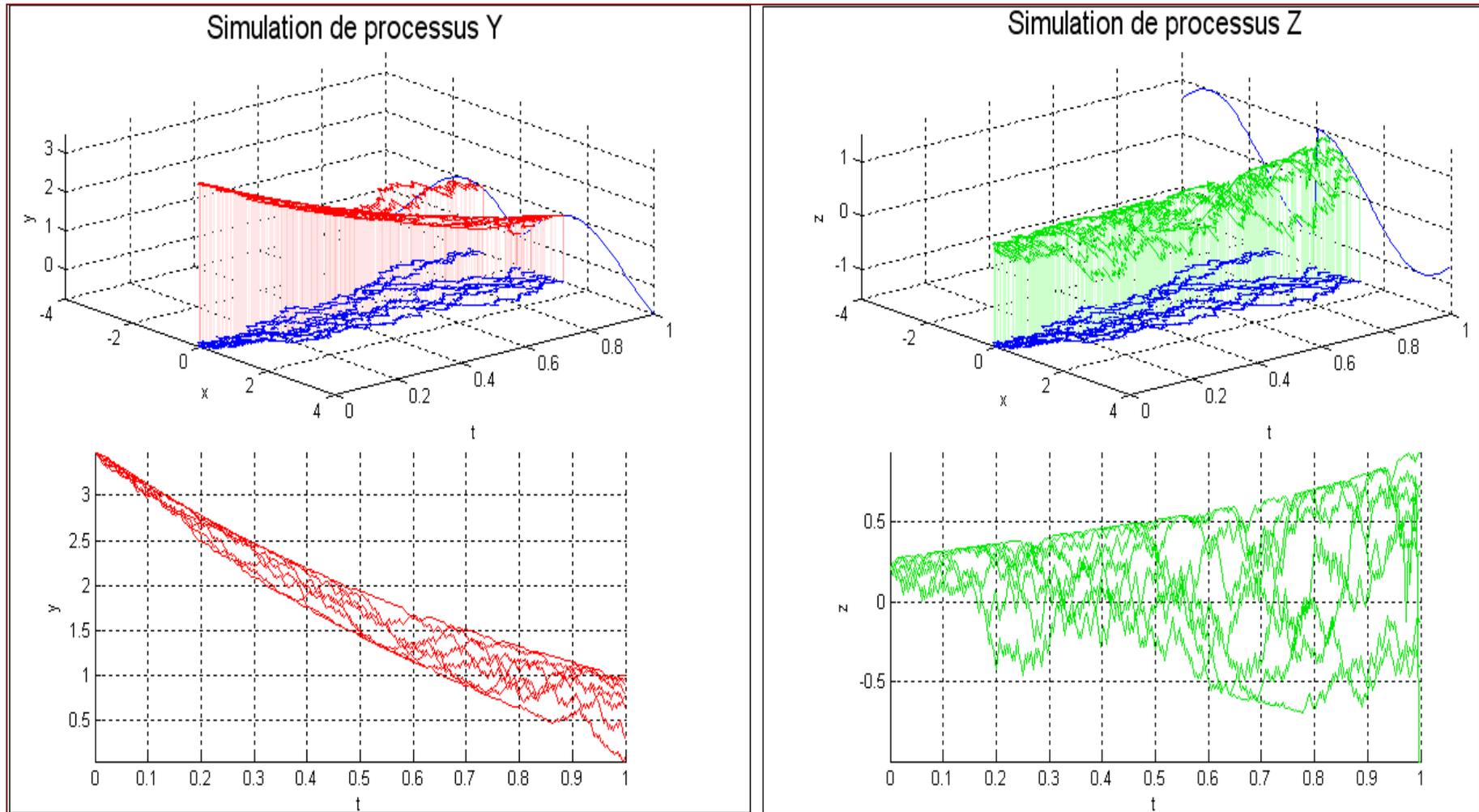


Fig.11

Premier cas $f(t, y, z) = y+z + 1$; $\xi = \sin|W_1|$

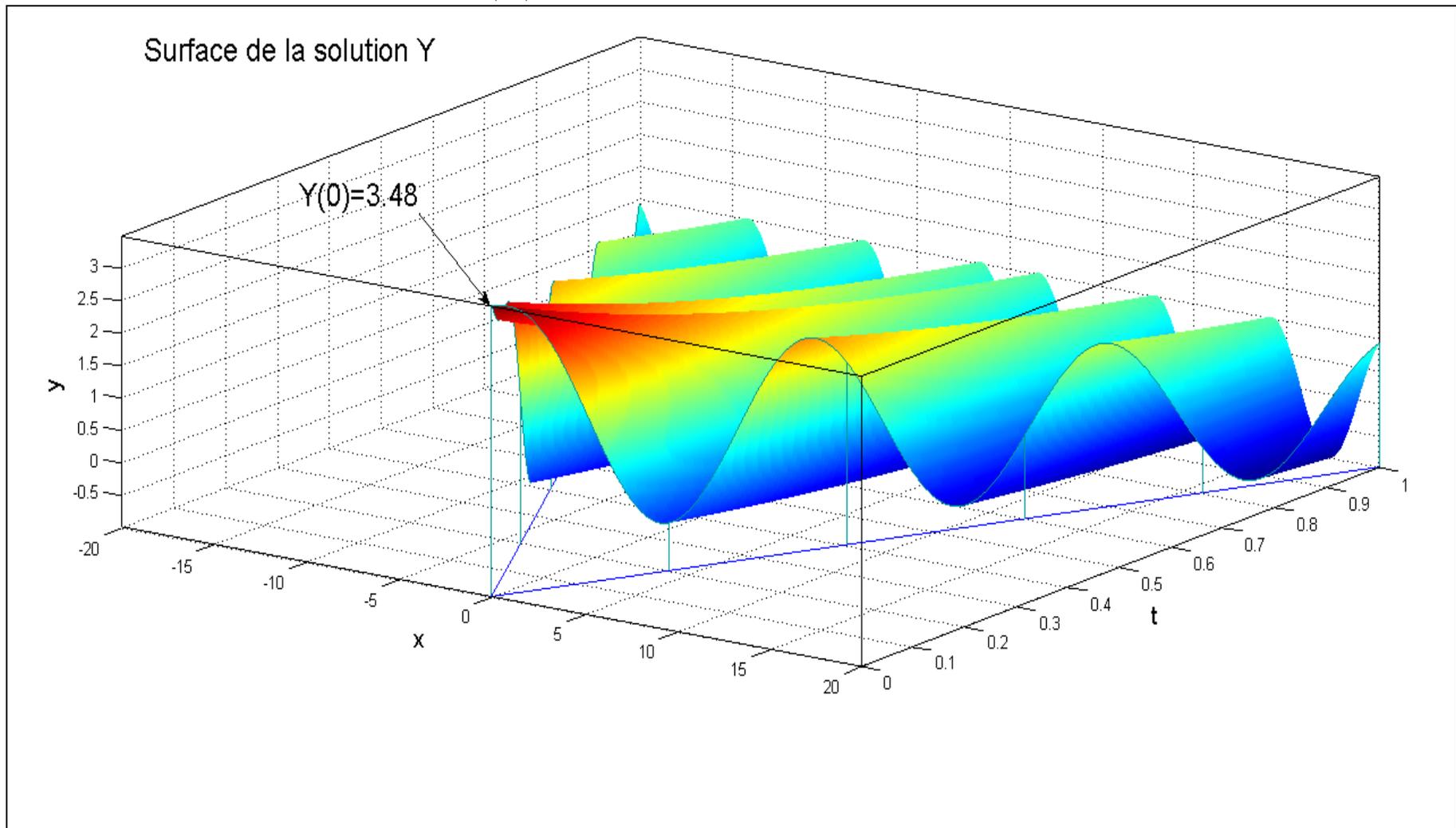


Fig.12

Deuxième cas $f(t, y, z) = |y - z|$, $\Phi(x) = \sin|x + \pi/2|$, $T=1$

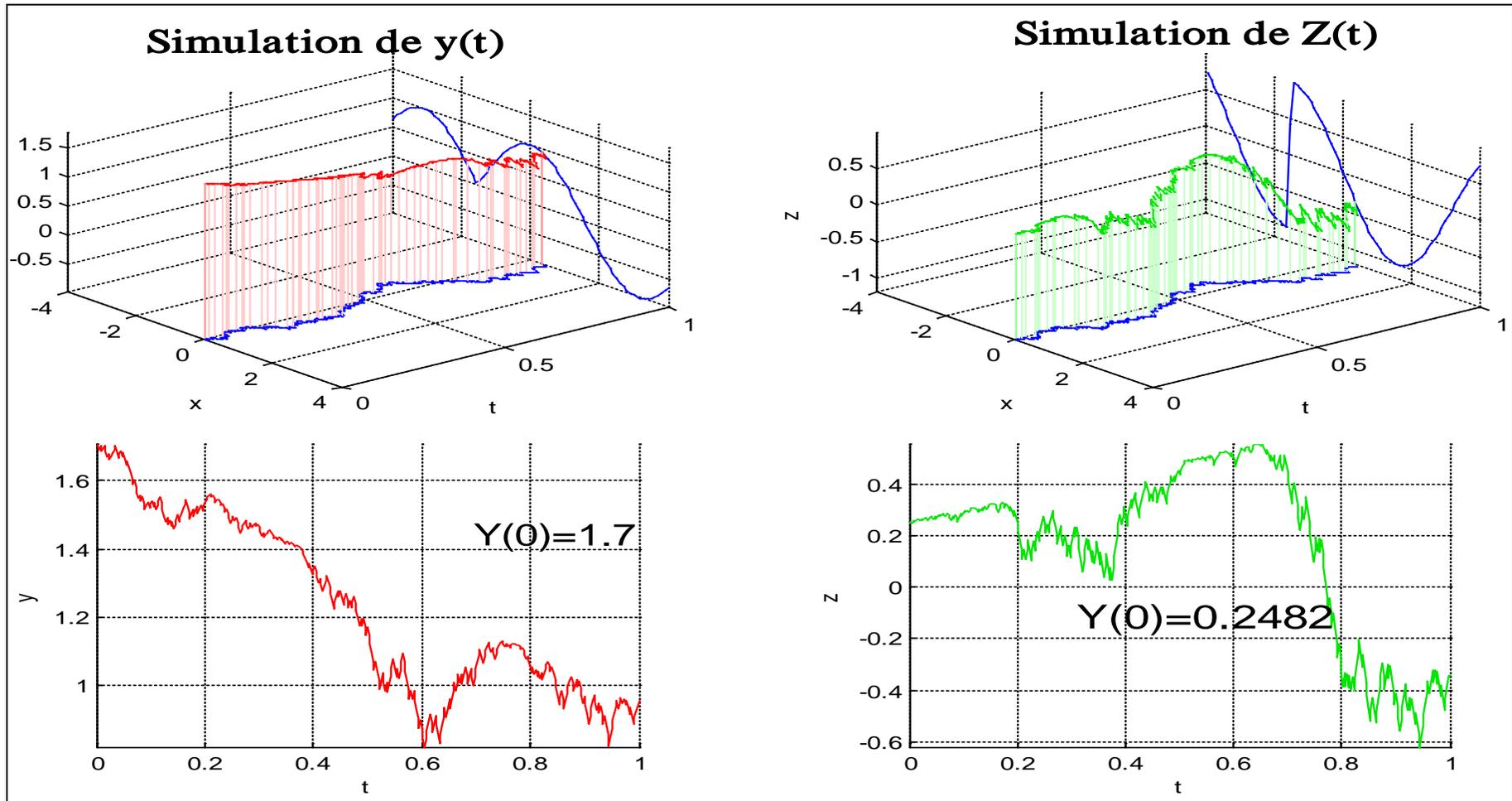


Fig.13

Deuxième cas $f(t, y, z) = |y - z|$, $\Phi(x) = \sin|x + \pi/2|$, $T=1$

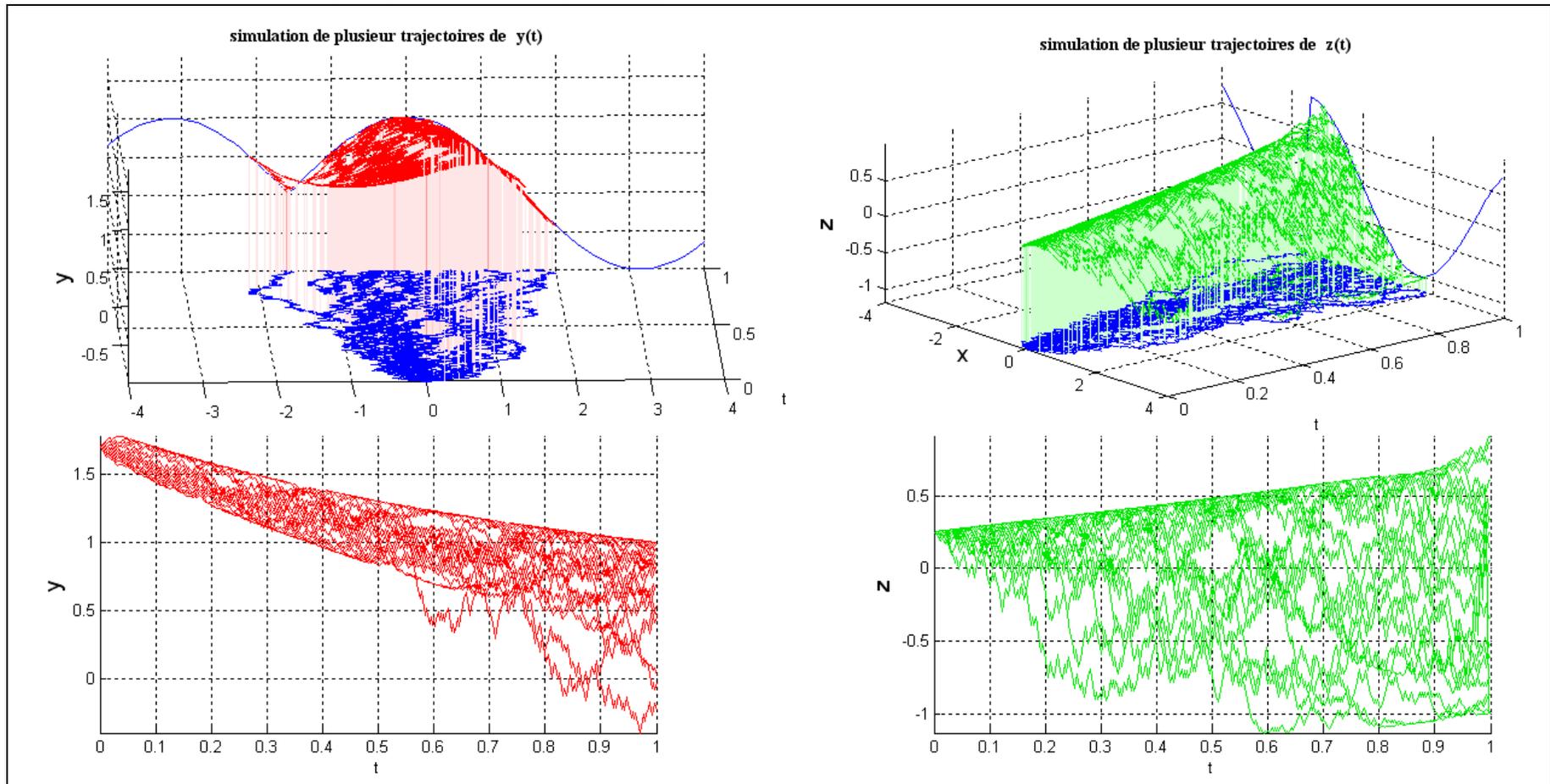


Fig. 14

Deuxième cas $f(t, y, z) = |y - z|$, $\Phi(x) = \sin|x + \pi/2|$, $T=1$

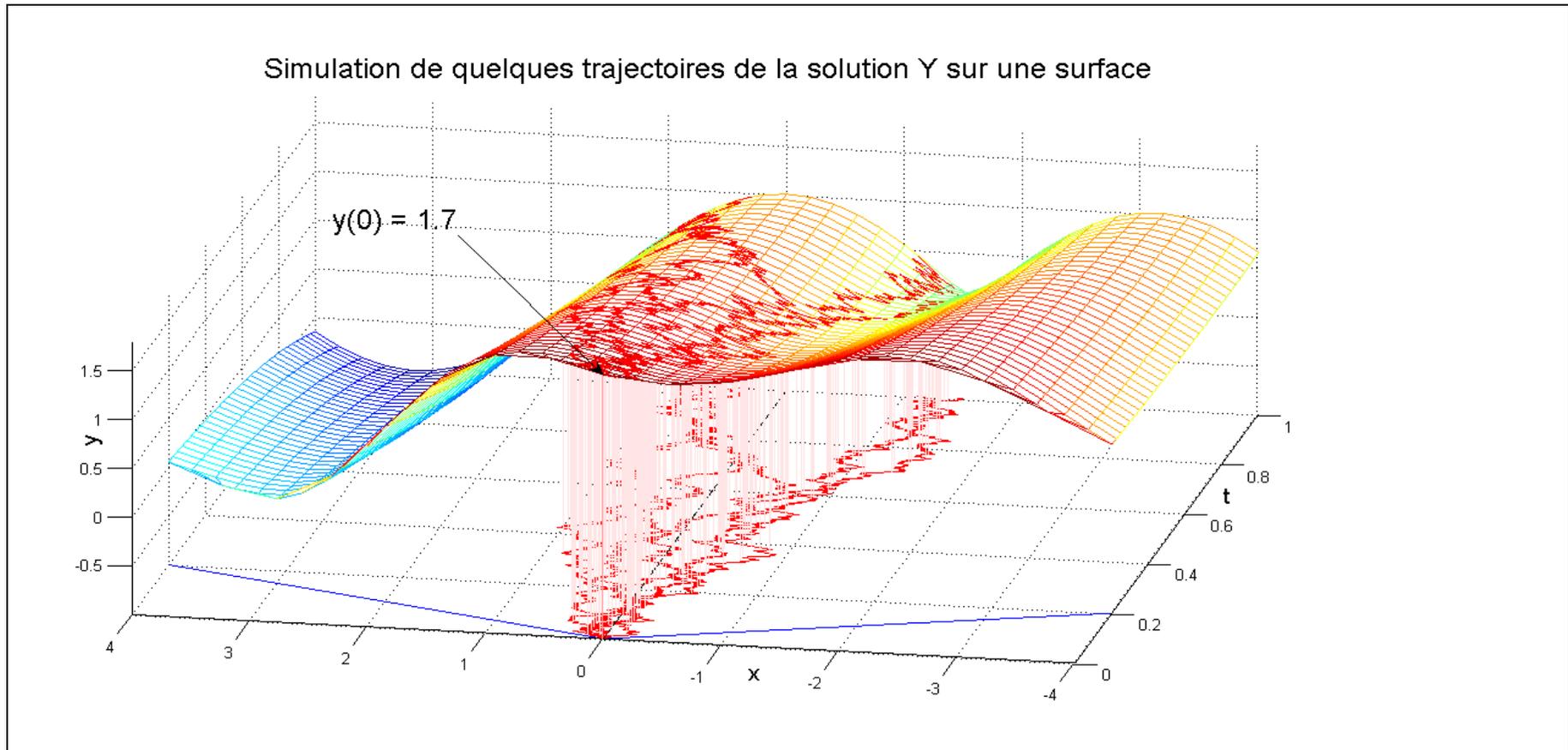


Fig.15

Deuxième cas $f(t, y, z) = |y - z|$, $\Phi(x) = \sin|x + \pi/2|$, $T=1$

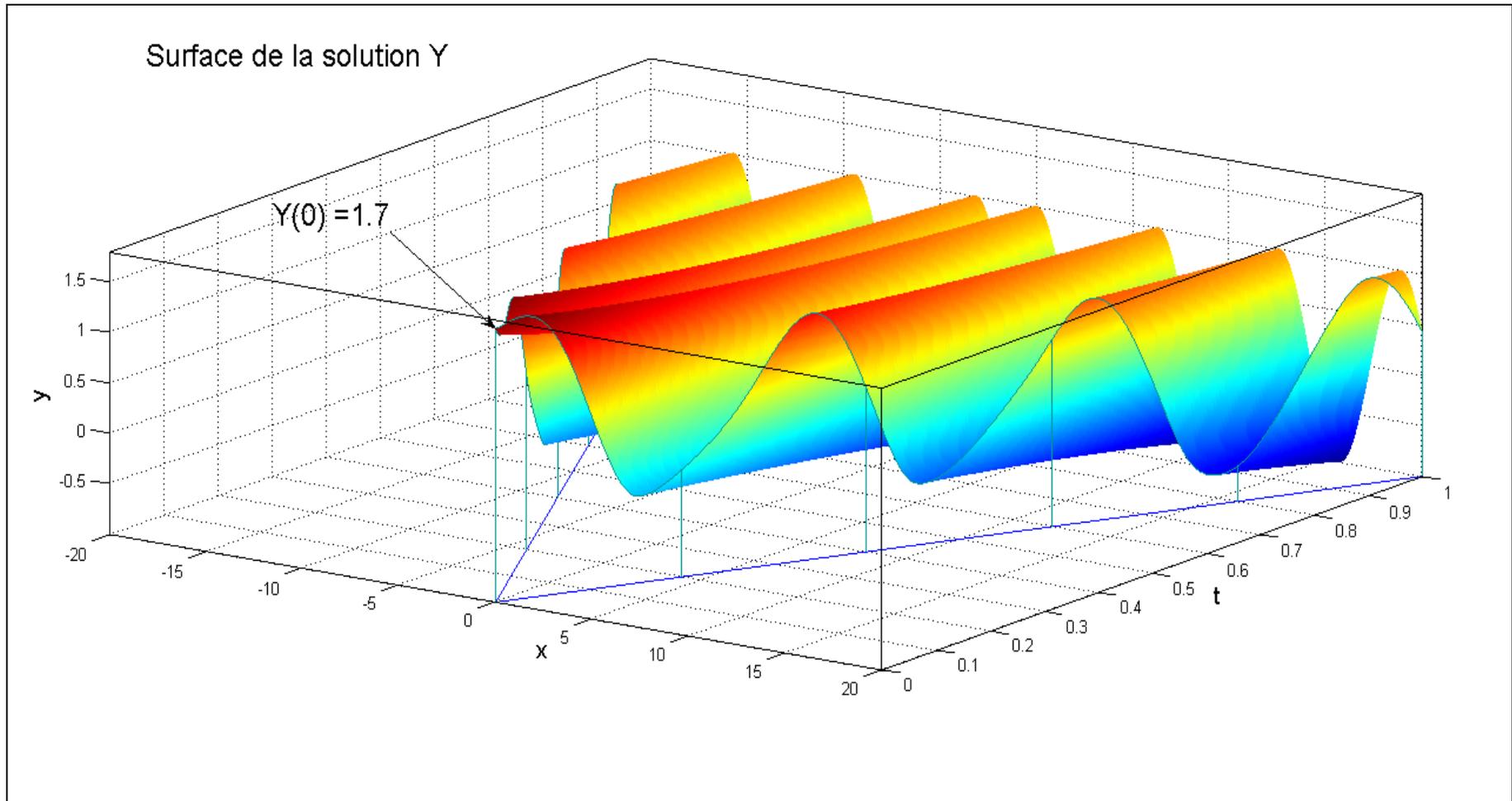


Fig.16

3.3.6 Résultats numériques

Dans cette partie on réalise quelques applications numériques, par l'utilisation du schéma explicite.

Premier cas

f linéaire

exemple

$$f(t, y, z) = -0.1y - 0.4z$$

$$, \quad \xi = \Phi(x) = \max(0; 100.(e^x - 1))$$

le programme matlab basé sur le schéma explicite donne

n	100	200	400	500	1000	2000	3000	4000	6000	7000	8000
y_0	41.1853	41.3406	41.3683	41.3738	41.3843	41.3904	41.3923	41.3932	41.3941	41.3944	41.3946

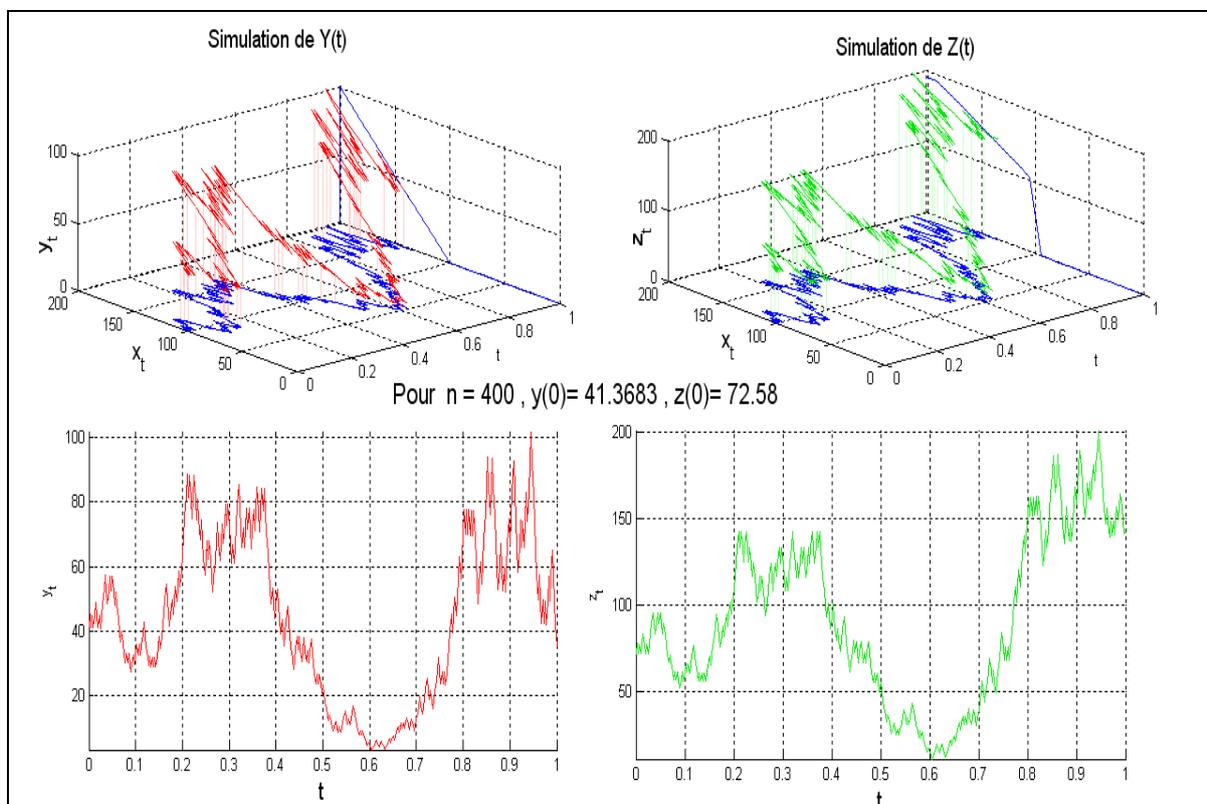


Fig.17

Deuxième cas

f non linéaire

exemple

$$f(y,z) = -0.1y - 0.4z + \frac{(|0.1(y-z)| - 0.1(y-z))}{2}$$

$$\xi = \Phi(x) = \max(0; 100.(e^x - 1))$$

En appliquant le même programme on aura résultats suivants

n	100	200	400	500	1000	2000	3000	4000	6000	7000	8000
y_0	44.4207	44.4708	44.4958	44.5008	44.5108	44.5159	44.5175	44.5184	44.5192	44.5194	44.5196

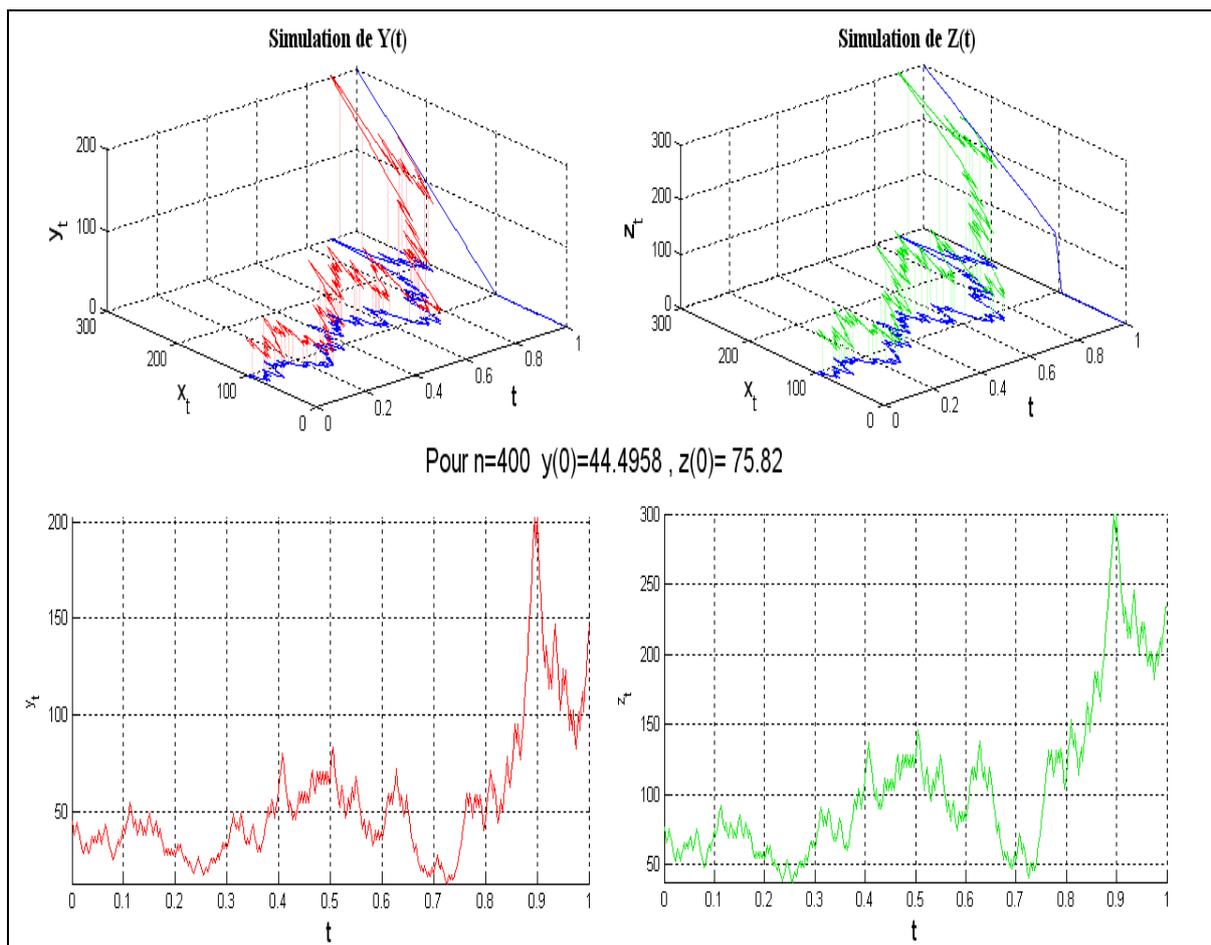


Fig.18

3.4 Discrétisation et resolution numérique des équations différentielles Stochastiques rétrogrades réfléchies non markoviennes avec une seule barrière inférieure continue.

Considérons l'edsrr avec une seule barrière L

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds + A_T - A_t - \int_t^T Z_s dW_s, Y \geq L_t, 0 \leq t \leq T, \int_0^T (Y_t - L_t) dA_t = 0 \quad (1)$$

Comme dans le cas précédent pour les edsr ordinaires, cette edsrr peut être approchée dans un petit intervalle $[jh, (j+1)h]$ par l'équation discrète suivante (on peut consulter à ce sujet [43], [51])

$$y_j^n = y_{j+1}^n + f_j^n(t_j, y_j^n, z_j^n)h + d_j^n - z_j^n \sqrt{h} \varepsilon_{j+1}^n \quad (2)$$

$$y_j^n \geq L_j^n, (y_j^n - L_j^n) d_j^n = 0$$

$$\text{où } d_j^n = A_{t_{j+1}} - A_{t_j} \text{ et } L_j^n = L_0 + h \sum_{i=0}^j l_{t_i} + \sum_{i=0}^k \sigma_{t_i} \varepsilon_{i+1}^n \sqrt{h} \quad (3)$$

dans ce cas l'équation (2) s'appelle, équation différentielle stochastique rétrograde réfléchie,

discrète avec la valeur terminale $\xi^n = \Phi(\sum_{i=0}^j \varepsilon_{i+1}^n \sqrt{h})_{0 \leq j \leq n}$

Remarque

Quand la barrière est une fonction du mouvement brownien W ie $L = (L_t)_t = \psi(t, (W_t)_{0 \leq s \leq t})$ avec $\psi \in C^{1,2}([0, T] \times \square)$, par l'application de la formule d'ito, on a

$$L_t = L_0 + \int_0^t (\frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \psi(s, W_s) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} \psi(s, W_s) dW_s.$$

Dans ce cas, la version discrète de la barrière est $L_{[t/h]}^n = \psi(t_{[t/h]}, (\sum_{k=0}^i \varepsilon_{k+1}^n \sqrt{h})_{0 \leq i \leq [t/h]})$.

Supposons que y_{j+1}^n connue, essayons de trouver un triplet (y_j^n, z_j^n, d_j^n) , M_j^n mesurable qui satisfait (2).

$$\text{Posons } Y_+ = y_{j+1}^n |_{\varepsilon_{j+1}^n = 1}, Y_- = y_{j+1}^n |_{\varepsilon_{j+1}^n = -1}$$

Par (2) on déduit, $z_j^n = E[y_{j+1}^n \varepsilon_{j+1} | M_j^n] = \frac{1}{2\sqrt{h}} (Y_+ - Y_-)$ et

$$y_j^n = E[y_{j+1}^n \varepsilon_{j+1} | M_j^n] + f(t_j, y_j^n, z_j^n)h + d_j^n \quad (4)$$

$$y_j^n \geq L_j^n, (y_j^n - L_j^n) d_j^n = 0$$

Alors, introduisons deux schémas différents pour cette équation :

3.4.1 Schéma réfléchi implicite

Commençons par la présentation de schéma implicite (construit par Memin, Peng et Xu Mingyu) [34] , Considérons la fonction $G(y) := y - (f(t_j, y, z_j^n) - f(t_j, L_j^n, z_j^n))h$; alors pour un assez petit h

nous avons $\langle G(y) - G(y'), y - y' \rangle \geq (1-h)h |y - y'|^2 > 0$ cela veut dire que $G(y)$ est strictement

Croissante avec $G(L_j^n) = L_j^n$ donc on a $G^{-1}(y) \geq L_j^n \Leftrightarrow y \geq L_j^n$.

On a $E[y_{j+1}^n | \mathcal{M}_j^n] = \frac{1}{2}(Y_- + Y_+)$ d'où

$$y_j^n = G^{-1}\left(\frac{1}{2}(Y_- + Y_+) - f(t_j, L_j^n, z_j^n)h + d_j^n\right), \quad d_j^n = \left(\frac{1}{2}(Y_- + Y_+) + f(t_j, L_j^n, z_j^n)h - L_j^n\right)^-.$$

3.4.2 Schéma réfléchi explicite

Pour les mêmes argument dans le cas des edsr au lieu de résoudre l'équation en G , construisons un Schéma réfléchi explicite en Remplaçant y_j^n par $E[y_{j+1}^n | \mathcal{M}_j^n]$ dans la partie droite de l'équation (4)

Nous aurons alors la solution approchée

$$\tilde{y}_j^n = E[y_{j+1}^n | \mathcal{M}_j^n] + f(t_j, E[y_{j+1}^n | \mathcal{M}_j^n], z_j^n)h + \tilde{d}_j^n$$

$$\tilde{d}_j^n = (E[y_{j+1}^n | \mathcal{M}_j^n] + f(t_j, E[y_{j+1}^n | \mathcal{M}_j^n], z_j^n)h - L_j^n)^-$$

On aura ce résultat par substitution de $E[y_{j+1}^n | \mathcal{M}_j^n] = \frac{1}{2}(Y_- + Y_+)$ dans (4).

3.4.3 Schémas de pénalisation numérique

il y'a une autre méthode numérique importante dite approximation par pénalisation ,elle consiste à introduire une edsr appelée équation de pénalisation .Pour $p \in \mathbb{R}$. Cette équation, avec le respect de la barrière inférieure L , est

$$Y_t^p = \xi + \int_t^T f(s, Y_s^p, Z_s^p) ds + p \int_t^T (Y_s^p - L_s)^- ds - \int_t^T z_s^p dW_s \quad (5)$$

Par le théorème de comparaison pour les edsr, nous aurons $Y_t^p \leq Y_t^{p+1}$ pour $p \in \mathbb{R}$.

Remarquons que $A_t^p = p \int_0^t (Y_s^p - L_s)^- ds$. Alors on a le théorème suivant

Théorème 3.3

Il existe une constante positive μ indépendante de p telle que

$$E[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^p - Y_t|^2 + \int_0^T |Z_t^p - Z_t|^2 dt + \sup_{0 \leq t \leq T} |A_t^p - A_t|^2] \leq \frac{\mu}{\sqrt{p}}$$

Quand $p \rightarrow \infty$ on sait que $Y^p \rightarrow Y$, $A^p \rightarrow A$ dans $S^2[0, T]$ et $Z^p \rightarrow Z$ dans $L^2_{\mathfrak{F}}$

Par le théorème précédent, on peut trouver une approximation pour la solution d'une edsr en utilisant la solution de l'équation pénalisée (5).

Pour p assez grand, dans un petit intervalle $[jh, (j+1)h]$, on considère l'edsr discrète pénalisée suivante :

$$y_j^{p,n} = y_{j+1}^{p,n} + f(t_j, y_j^{p,n}, z_j^{p,n})h + p(y_j^{p,n} - L_j^-)h - z_j^{p,n} \sqrt{h} \varepsilon_{j+1}$$

Si nous connaissons déjà $(y_{j+1}^{p,n}, z_{j+1}^{p,n})$, alors on peut trouver $(y_j^{p,n}, z_j^{p,n})$ à l'aide de l'équation

précédente, en premier on obtient $z_j^{p,n} = E[y_{j+1}^{p,n} \varepsilon_{j+1}^n | \mathcal{M}_j^n] = \frac{1}{2\sqrt{h}}(Y_+^p - Y_-^p)$ où

$$Y_+^p = \mathcal{Y}_{j+1}^{p,n} | \varepsilon_{j+1}^n = 1, \quad Y_-^p = \mathcal{Y}_{j+1}^{p,n} | \varepsilon_{j+1}^n = -1$$

Alors $y_j^{p,n}$ vérifie l'équation suivante

$$y_j^{p,n} = E[y_{j+1}^{p,n} | \mathcal{M}_j^n] + f(t_j, y_j^{p,n}, z_j^{p,n})h + p(y_j^{p,n} - L_j^-)h \quad (6)$$

Il y'a deux méthodes pour trouver $y_j^{p,n}$, la première méthode à l'aide d'un schéma implicite qui se base sur la résolution de l'équation

$$y_j^{p,n} = (G^p)^{-1}(E[y_{j+1}^{p,n} | \mathcal{M}_j^n]) = (G^p)^{-1}\left(\frac{1}{2}(Y_+^p - Y_-^p)\right)$$

où G^p est la fonction définie par $G^p(y) := y - (f(t_j, y, z_j^{p,n}) + p(y - L_j^-)h)$ et $d_j^{p,n} = p(y_j^{p,n} - L_j^-)h$

La deuxième méthode consiste à construire un schéma explicite par le remplacement de $y_j^{p,n}$ dans f de l'équation (6) par $E[y_{j+1}^{p,n} | \mathcal{M}_j^n]$ ce qui nous ramène au schéma de pénalisation explicite- implicite suivant

$$\tilde{y}_j^{p,n} = E[\tilde{y}_{j+1}^{p,n} | \mathcal{M}_j^n] + f(t_j, E[\tilde{y}_{j+1}^{p,n} | \mathcal{M}_j^n], \tilde{z}_j^{p,n})h + \frac{ph}{1+ph}(E[\tilde{y}_{j+1}^{p,n} | \mathcal{M}_j^n] + f(t_j, E[\tilde{y}_{j+1}^{p,n} | \mathcal{M}_j^n], \tilde{z}_j^{p,n})h - L_j^-)$$

avec $E[\tilde{y}_{j+1}^{p,n} | \mathcal{M}_j^n] = \frac{1}{2}(\tilde{y}_{j+1}^{p,n} | \varepsilon_{j+1}^n = 1 + y_{j+1}^{p,n} | \varepsilon_{j+1}^n = -1)$ et $d_j^{p,n} = p(y_j^{p,n} - L_j^-)h$

3.4.4 Convergence des schémas de discrétisation

Commençons par l'étude des schémas de pénalisation pour l'edsrr avec barrière inférieure.

Pour le schéma implicite pénalisée défini par

$$Y_t^{p,n} = y_{[t/h]}^{p,n} \quad , \quad Z_t^{p,n} = z_{[t/h]}^{p,n} \quad \text{et} \quad A_t^{p,n} = \sum_{m=0}^{[t/h]} d_m^{p,n}$$

Proposition 3.3 [51]

En plus de l'hypothèse h1 (voir chapitre II), supposons que $E\{|\xi|^2\} + \sup_n E\{|\xi^n|^2\} < \infty$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{|\xi - \xi^n|^2\} = 0, \text{ alors}$$

la suite $(Y_t^{p,n}, Z_t^{p,n})$ converge vers (Y_t, Z_t) dans le sens suivant :

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^{p,n} - Y_t|^2 + \int_0^T |Z_s^{p,n} - Z_s|^2 ds\right] \rightarrow 0 \quad (7)$$

qd $n \rightarrow \infty, p \rightarrow \infty$ et $A_t^{p,n} \rightarrow A_t$ dans $L^2(\mathfrak{F}_t)$ pour $0 \leq t \leq T$.

Proposition 3.4 [51]

Sous les mêmes hypothèses et pour $n \rightarrow \infty, p \rightarrow \infty$, le couple $(\tilde{Y}_t^{p,n}, \tilde{Z}_t^{p,n})$ converge vers (Y_t, Z_t) dans le sens suivant :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E\left[|\tilde{Y}_t^{p,n} - Y_t|^2 + E\int_0^T |\tilde{Z}_s^{p,n} - Z_s|^2 ds\right] \rightarrow 0 \quad \text{avec} \quad \tilde{A}_t^{p,n} \rightarrow A_t \quad \text{sur} \quad L^2(\mathfrak{F}_t) \quad \text{pour} \\ 0 \leq t \leq T$$

Théorème 3.4 [51]

Sous les mêmes hypothèses $\lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^n - Y_t|^2 + E\int_0^T |Z_t^n - Z_t|^2 dt\right] = 0$

et $\forall t \in [0, T], \lim_{n \rightarrow \infty} E[(A_t - A_t^n)^2] = 0$

3.4.5 Simulation des équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies avec une seule barrière continue inférieure.

Dans ce qui suit on suppose que $T=1$ et commençons avec $y_n^n = \xi^n$, d'une façon rétrograde, on cherche à trouver la solution approchée (y_j^n, z_j^n, d_j^n) pour $j = n-1, \dots, 1, 0$ où $d_j^n = A_{t_{j+1}} - A_{t_j}$.

suivant le schéma explicite.

Pour éviter la complexité des calculs, nous allons aborder seulement les cas simples $\xi = \Phi(W_1)$,

$L_t = \Psi(t, W_t)$, où ϕ est définit sur \mathbb{R} et Ψ est définit sur $[0,1] \times \mathbb{R}$.

Pour la simulation on utilise un programme sur Matlab similaire à celui qu'on a utilisé pour Les edsr (à consulter [43], [51], [58], [59]) basé sur le schéma explicite.

Exemple

Réalisons une simulation de la solution de l'edsr

$$Y_t = \xi + \int_t^1 f(s, Y_s, Z_s) ds + A_T - A_t - \int_t^1 Z_s dW_s, \quad Y \geq L_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \text{avec}$$

$$\int_0^1 (Y_t - L_t) dA_t = 0$$

en utilisant le schéma explicite avec

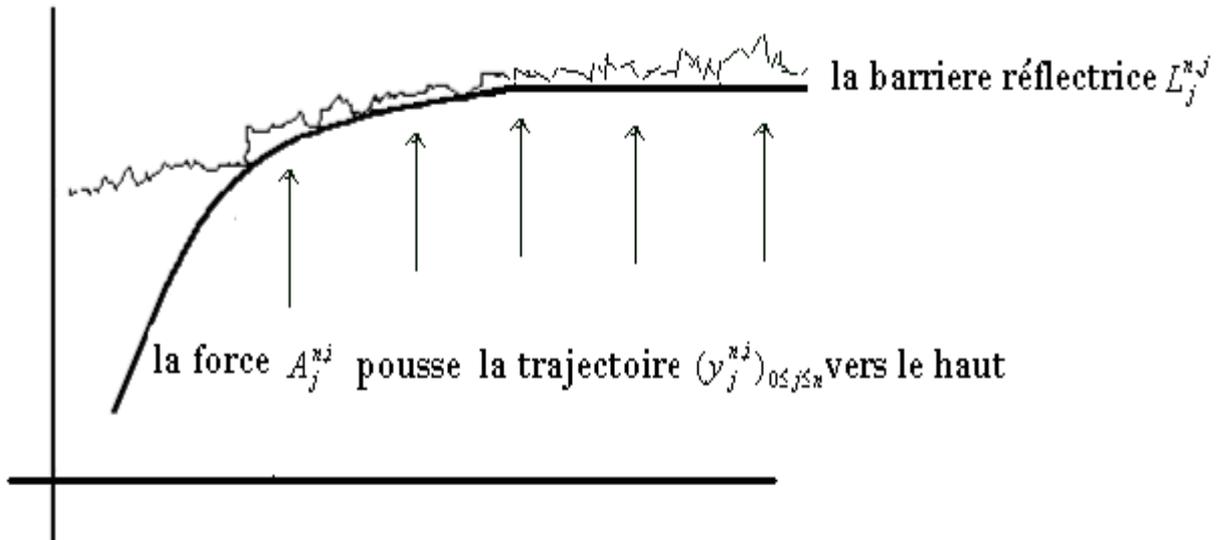
$$f(y, z) = -|y + z|, \quad \xi = \sin(|W_1|), \quad L = \sin(W_1 + \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}.$$

Dans la figure 20 on peut constater deux surfaces collées l'une à l'autre, la surface de dessous est la surface barrière et la surface d'en haut est réservée à la solution y où sont tracées deux trajectoires de cette solution approchée, $(y_j^{n,i})_{0 \leq j \leq n}$ pour $i = 1, 2$ correspondantes aux deux trajectoires d'un échantillon de brownien discret $(W_j^{n,i})_{0 \leq j \leq n}$,

$i = 1, 2$ vues en bas, pour voir bien la correspondance entre ces deux groupes de trajectoires, on a relié entre eux par de fines lignes verticales.

Quand la trajectoire de cette solution va pénétrer dans cette région de surfaces, la force

$A_j^{n,i} = \sum_{s=0}^j d_s^{n,j}, i = 1, 2$ la pousse d'en bas vers le haut, figure (19), en effet, en absence de cette barrière dans cette endroit, $(y_j^{n,i})_{0 \leq j \leq n}$ va devenir plus petite que la barrière réfléchrice $L_j^{n,j}$. Donc pour garder $(y_j^{n,i})_{0 \leq j \leq n} > L_j^{n,j}$, l'action de cette force $A_j^{n,i}$ est nécessaire.



Fig(19)

Dans le reste de cette figure 20 on peut voir respectivement la trajectoire de la force $A_j^{n,i} = \sum_{s=0}^j d_s^{n,j}, i=1,2$ correspondante à la valeur $(y_j^{n,i})_{0 \leq j \leq n}$, $i=1,2$ et la trajectoire $y_j^{n,i} - L_j^{n,j}, i=1,2$.

On peut montrer que $y_j^{n,i} - L_j^{n,j} = 0$ est nécessaire pour la croissance de $A_j^{n,i}$ mais l'inverse n'est pas vrais toujours, ie, quand $y_j^{n,i} - L_j^{n,j} = 0$, on a pas nécessairement $A_j^{n,i}$ croissant.

La figure21 montre clairement la surface barrière sous les deux trajectoires de la solution $y_j^{n,i}$.

Dans la figure22 et la figure 23 , sont réalisées les simulations des trajectoires de la solution (Y_t, Z_t, A_t) en plus de celle du processus $Y_t - L_t$ en trois et en deux dimensions.

La figure 24 représente la surface de la solution Y (qui a les mêmes caractéristiques que dans le cas de edsr) collée à la surface barrière qui apparaît au dessous (figure 25).

Simulation de deux trajectoires de la solution $y(t)$ sur une surface

$$f(y, z) = -|y + z|, \quad \xi = \sin(|W_1|), \quad L = \sin(W_1 + \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}$$

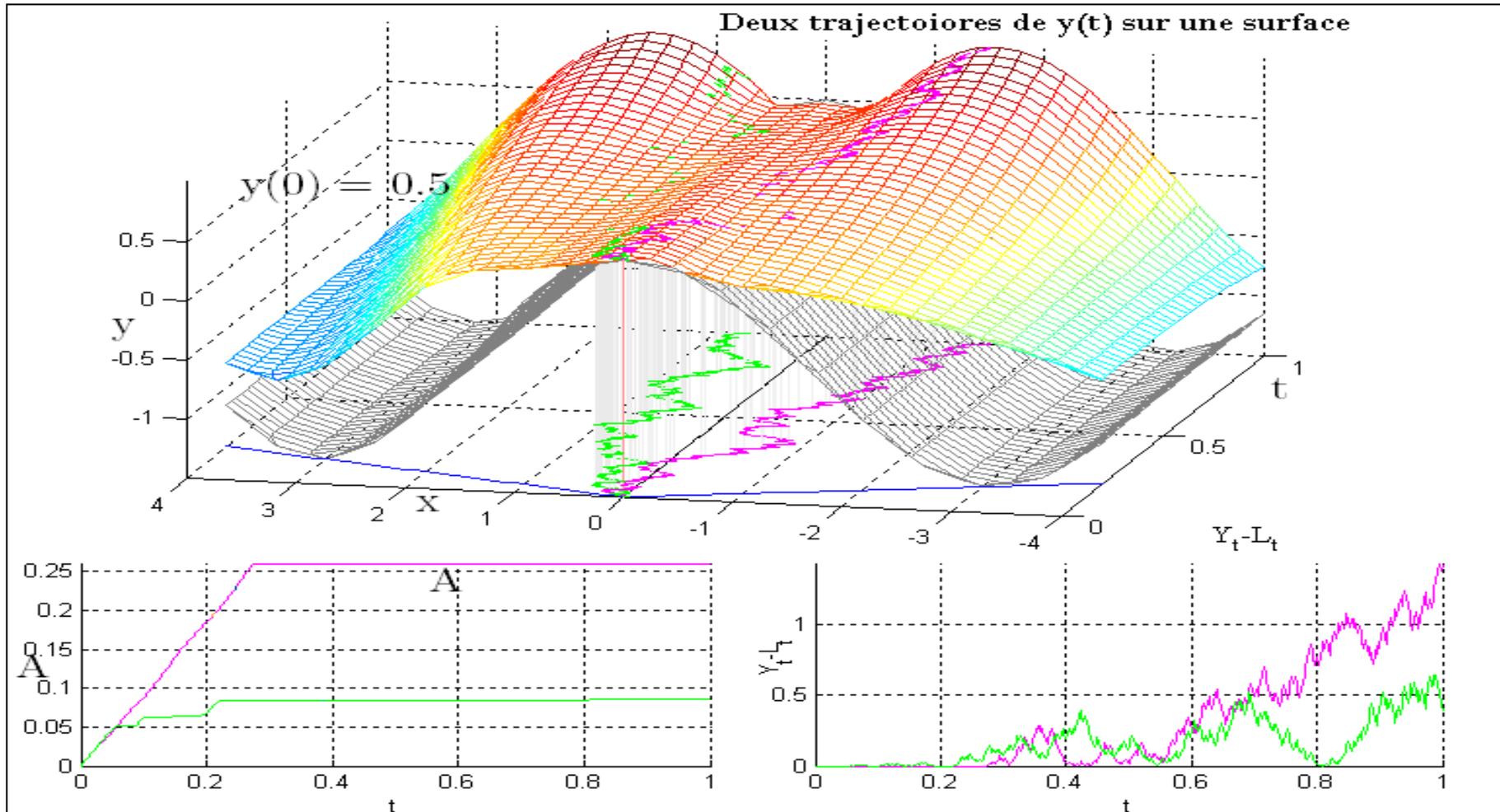


Fig.20

simulation des deux trajectoire de la solution $y(t)$ maintenues au dessus de la surface barriere

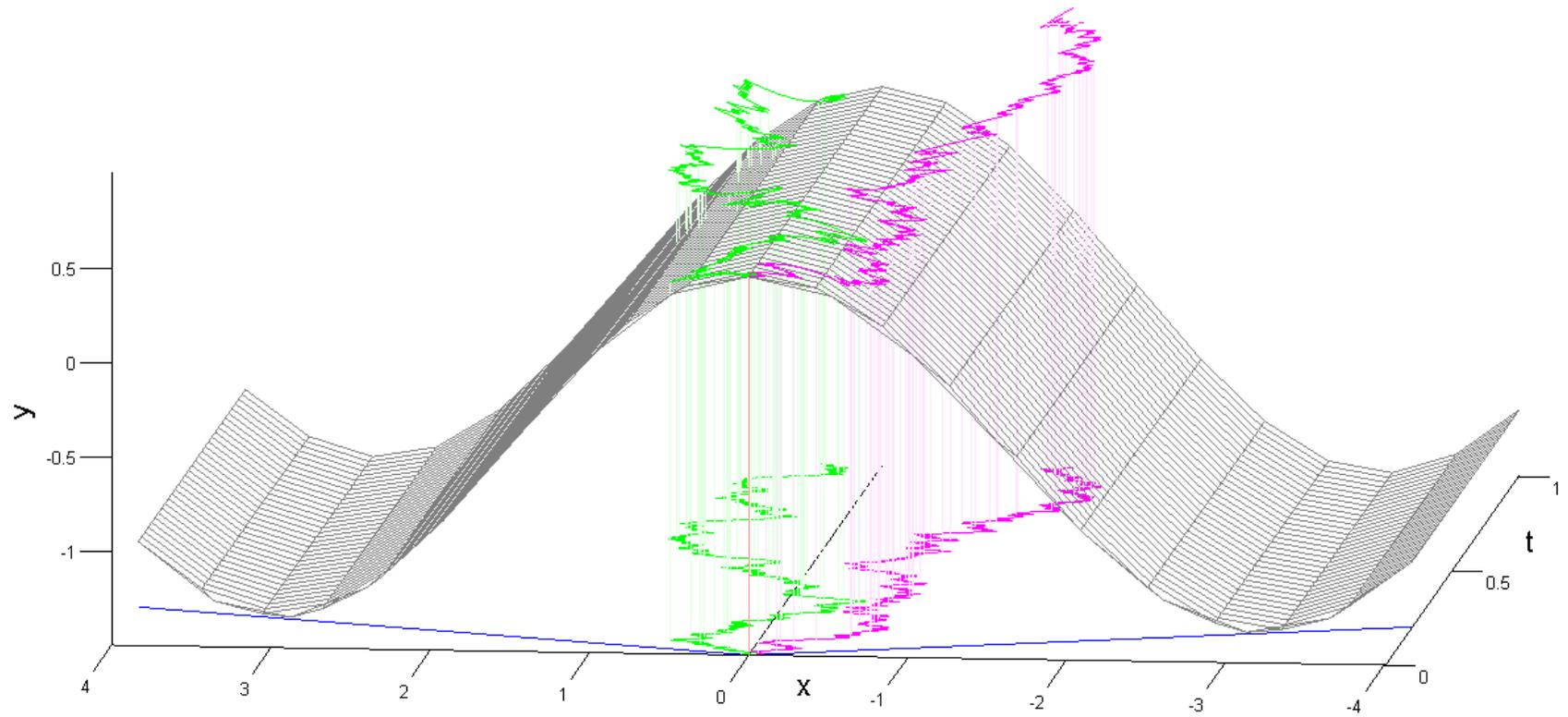


Fig. 21

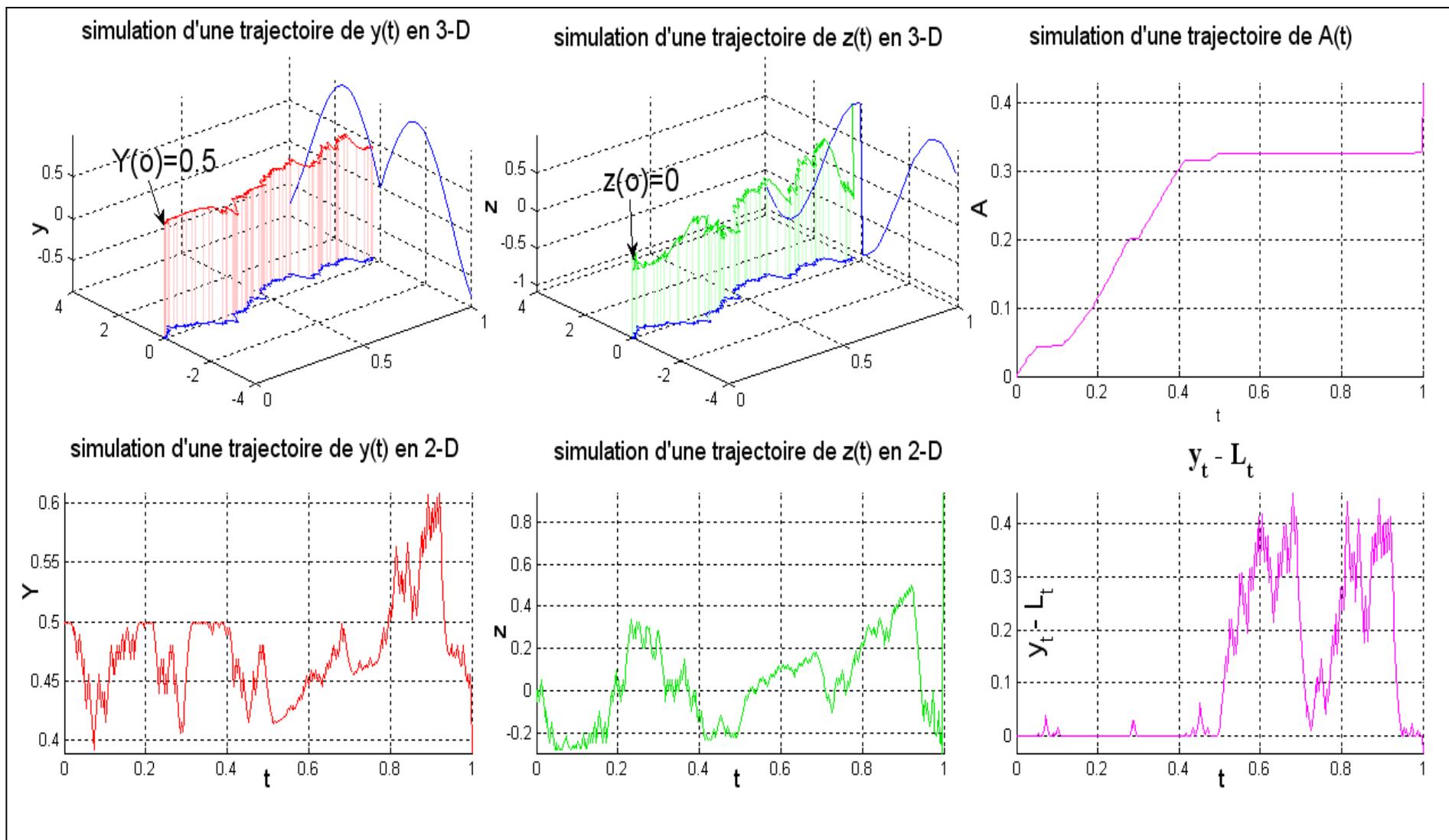


Fig.22

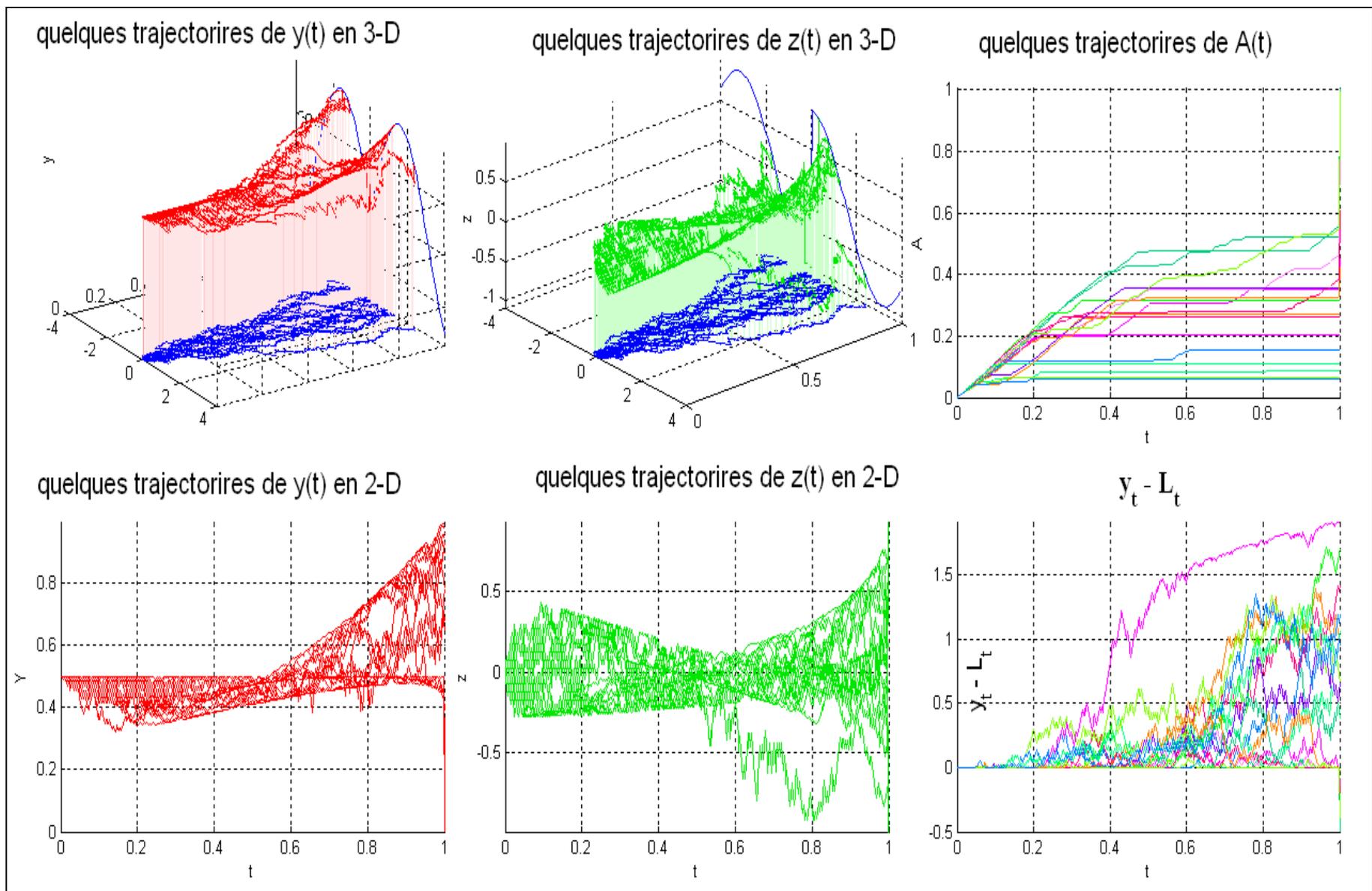


Fig.23

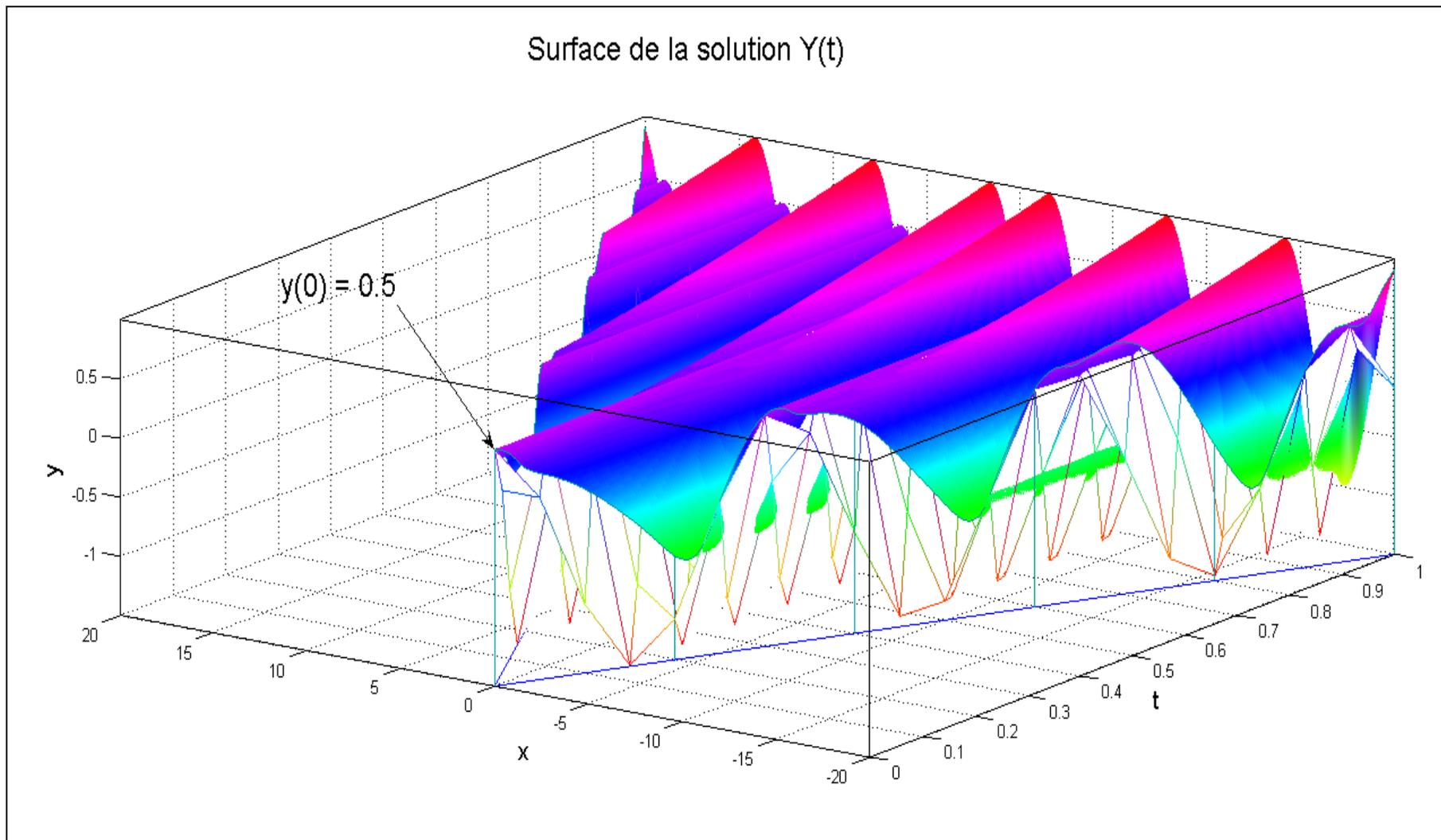


Fig.24

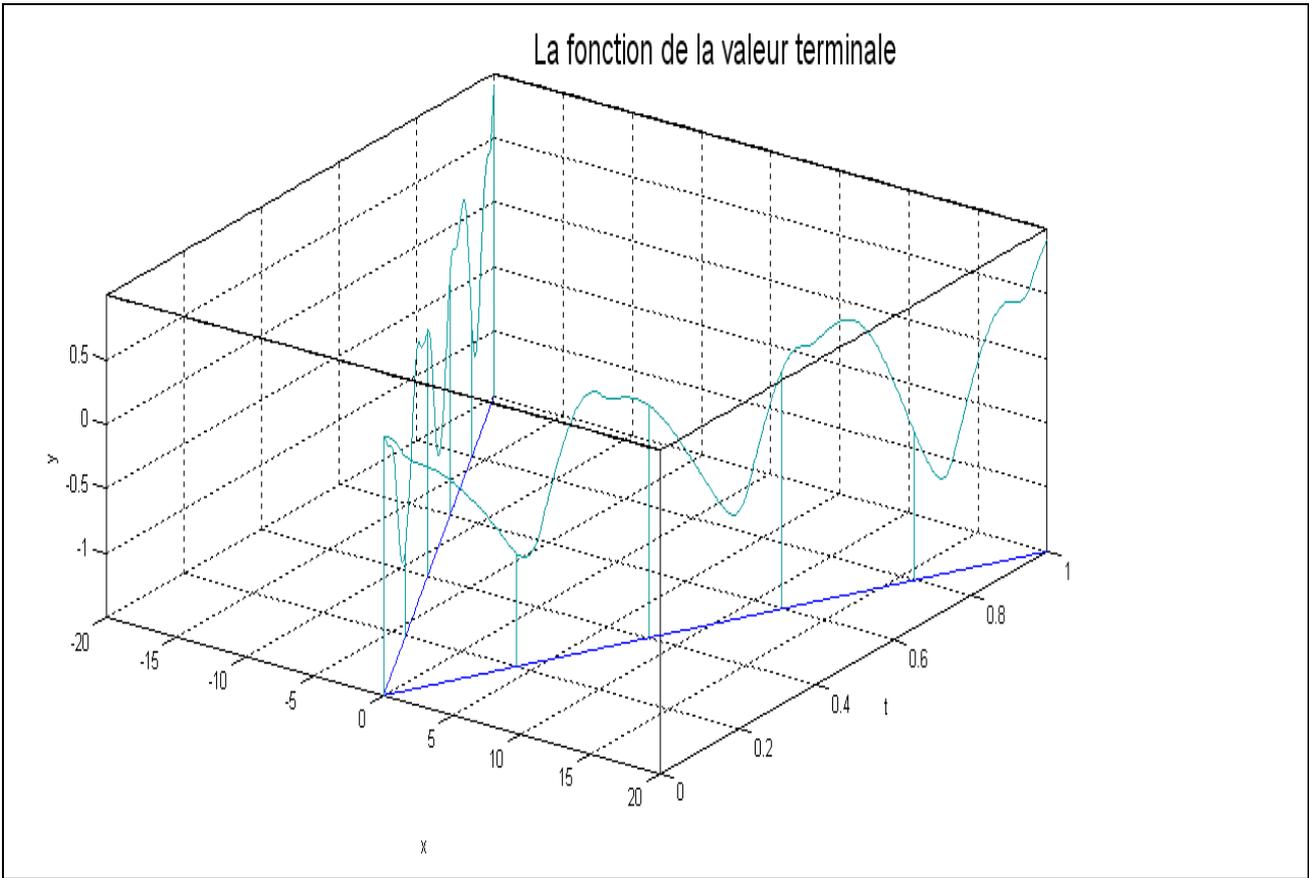
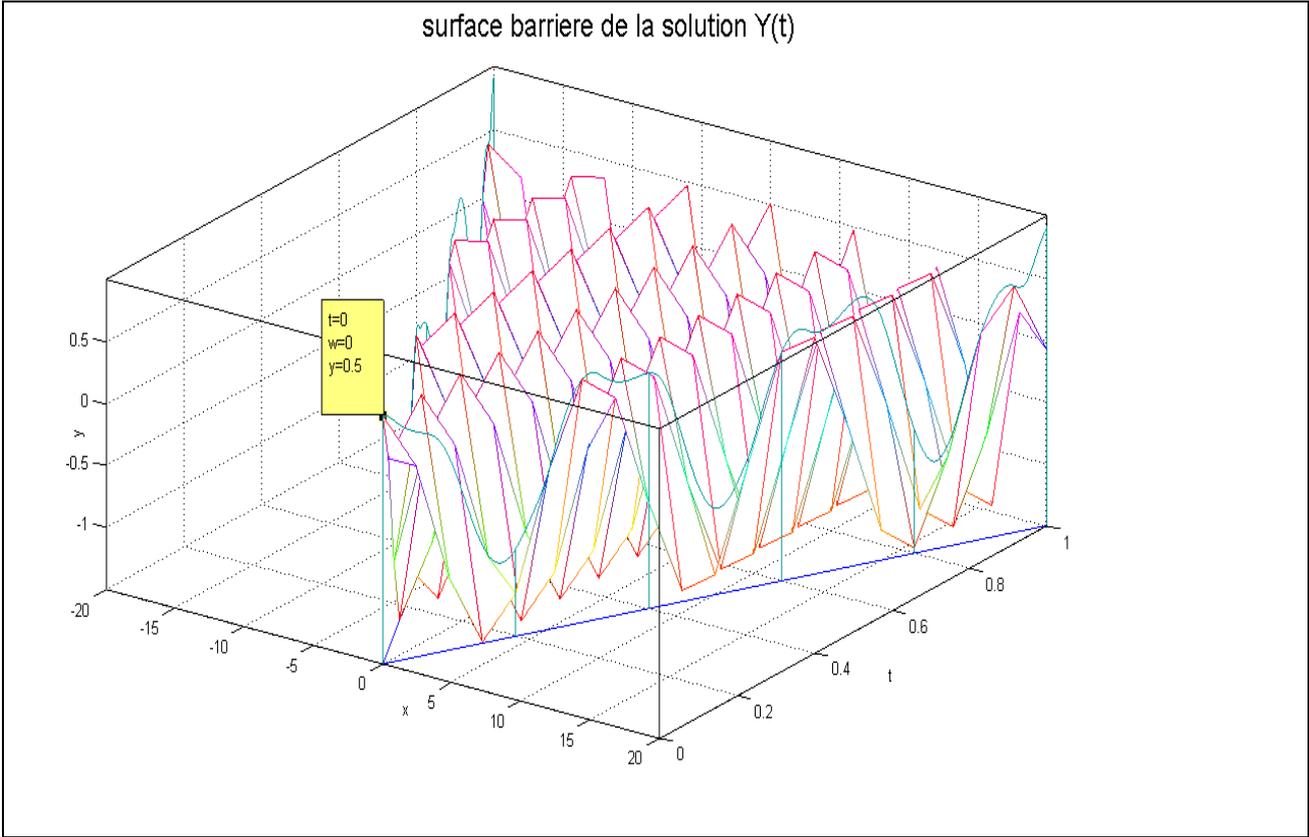


Fig.25

Chapitre 4

Discrétisations des équations différentielles stochastiques Rétrogrades markoviennes.

4.1 Discrétisation dans le cas où le driver ne dépend pas de Z

Considérons maintenant le cas markovien des équations différentielles stochastiques rétrogrades, et commençons par donner un résumé de la méthode de Zhang introduite dans sa thèse [62] dans le cas où f ne dépend que de t, Y, X et b, σ ne dépend que de t et X . Pour cela on se donne comme d'habitude un mouvement brownien $(W_t)_{t \in \square}$ à valeurs dans \mathbb{R} et $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ sa filtration et considérons le système d'équations

$$\begin{cases} Y_t = \Phi(X_T) + \int_t^T f(s, X_s, Y_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s & , \quad t \in [0, T] \\ X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s \end{cases} \quad (\mathbf{I})$$

Supposons

- b, σ sont uniformément lipchitziennes
- Φ est une fonction mesurable à croissance au plus polynomiale
- f est une fonction mesurable bornée par rapport à t, X et c uniformément lipchitzienne par rapport à Y .

Pour discrétiser cette EDSR on fait une partition de l'intervalle $[0, T] : \pi : (0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T)$, $t_i = i/n$.

On a alors pour i fixé, $X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(s, X_s) ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s, X_s) dW_s$

et

$$Y_{t_{i+1}} = Y_{t_i} - \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, X_s, Y_s) ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_s dW_s$$

on applique le schéma d'approximation d'Euler à l'EDS en X_t on aura

$$X_{t_0}^\pi = X_{t_0} = x$$

$$, X_{t_{i+1}}^\pi = X_{t_i}^\pi + b(X_{t_i}^\pi)\Delta_i^\pi + \sigma(X_{t_i}^\pi)\Delta_i^\pi W_i \quad \text{pour } i=1,2,\dots,n \quad \text{avec } \Delta_i^\pi = t_{i+1} - t_i \quad \text{et}$$

$$\Delta_i^\pi W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$$

Si on applique également le même schéma d'Euler à l'EDSR sans considération de la condition d'adaptation de Z_i^π alors la solution (Y,Z) sera approché par (Y^π, Z^π) avec la condition terminal définie de manière rétrograde par

$$Y_T^\pi = g(X_T^\pi)$$

$$\text{et} \quad -Y_{t_{i+1}}^\pi + Y_{t_i}^\pi = f(t_i, X_{t_i}^\pi, Y_{t_i}^\pi)(t_{i+1} - t_i) - Z_{t_i}^\pi \cdot (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

$$\Rightarrow Y_{t_i}^\pi = E[Y_{t_{i+1}}^\pi + f(t_{i+1}, X_{t_{i+1}}^\pi, Y_{t_{i+1}}^\pi)(t_{i+1} - t_i) \mid \mathfrak{F}_{t_i}]$$

$$\text{Car On a } E(Z_{t_i}^\pi (\Delta W_{t_i}) \mid \mathfrak{F}_{t_i}) = 0 \text{ alors } E(y_{t_i}^\pi \mid \mathfrak{F}_{t_i}) = y_{t_i}^\pi = E(f(t_i, X_{t_i}^\pi, Y_{t_i}^\pi, Z_{t_i}^\pi)(t_{i+1} - t_i) \mid \mathfrak{F}_{t_i})$$

$$, \Delta W_{t_i} (Y_{t_{i+1}}^\pi - Y_{t_i}^\pi) = \Delta W_{t_i} [f(t_i, X_{t_i}^\pi, Y_{t_i}^\pi)(t_{i+1} - t_i) - Z_{t_i}^\pi \cdot \Delta W_{t_i}]$$

$$\Rightarrow E[(\Delta W_{t_i})(Y_{t_{i+1}}^\pi - Y_{t_i}^\pi) \mid \mathfrak{F}_{t_i}] = E((\Delta W_{t_i})[f(t_i, X_{t_i}^\pi, Y_{t_i}^\pi)(t_{i+1} - t_i) - Z_{t_i}^\pi \cdot (\Delta W_{t_i})] \mid \mathfrak{F}_{t_i})$$

$$\text{Comme } E[(\Delta W_{t_i})(Y_{t_i}^\pi) \mid \mathfrak{F}_{t_i}] = 0, E(\Delta W_{t_i})f(t_i, X_{t_i}^\pi, Y_{t_i}^\pi \mid \mathfrak{F}_{t_i}) = 0, E(Z_{t_i}^\pi (\Delta W_{t_i})^2 \mid \mathfrak{F}_{t_i}) = (t_{i+1} - t_i) Z_{t_i}^\pi.$$

$$\text{Alors } -E(Y_{t_{i+1}}^\pi \Delta W_{t_i} \mid \mathfrak{F}_{t_i}) = -(t_{i+1} - t_i) Z_{t_i}^\pi \Rightarrow (t_{i+1} - t_i)^{-1} E[Y_{t_{i+1}}^\pi \Delta W_{t_i} \mid \mathfrak{F}_{t_i}] = Z_{t_i}^\pi$$

Finalement nous aurons le schéma suivant

$$(II) \quad \begin{cases} Z_{t_i}^\pi = (t_{i+1} - t_i)^{-1} E_i^\pi [Y_{t_{i+1}}^\pi (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})] \\ Y_T^\pi = \Phi(X_T^\pi) \\ Y_{t_i}^\pi = E_i^\pi [Y_{t_{i+1}}^\pi] + (t_{i+1} - t_i) f(t_i, X_{t_i}^\pi, Y_{t_i}^\pi, Z_{t_i}^\pi) \end{cases}, 0 \leq i \leq n$$

$$\text{Avec } E_i^\pi [.] = E^\pi [., \mid \mathfrak{F}_{t_i}]$$

Pour étudier la convergence des processus X^π, Y^π, Z^π définis par la relation (B)

qd $|\pi| \rightarrow 0$ où $|\pi| = \max_{1 \leq i \leq n} |t_{i+1} - t_i|$ est le pas de discrétisation, on pose

$Y_T^\pi = g(X_T^\pi)$ et on note (U, V) la solution sur $[t_i, t_{i+1}]$ de l'équation stochastique rétrograde.

Pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$, on a $U_t = Y_{t_{i+1}}^\pi + (t_{i+1} - t)f(t_i, X_{t_i}^\pi, Y_{t_i}^\pi) - \int_t^{t_{i+1}} V_s dW_s$ (III)

On pose $Y_t^\pi = U_t$ et $Z_t^\pi = V_t$ pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$, on vérifie que

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{t_i}^\pi = E[Y_{t_{i+1}}^\pi + (t_{i+1} - t_i)f(t_i, X_{t_i}^\pi, Y_{t_i}^\pi) | \mathfrak{F}_{t_i}^\pi], \\ Y_T^\pi = g(X_T^\pi) \end{array} \right. \quad (\text{IV})$$

A travers le théorème suivant, Zhang a montré l'existence de fonctions déterministes u, v telles que

$Y_s = u(s, X_s)$, $Z_s = v(s, Y_s)$ dont il a déterminé explicitement les fonctions u_i, v_i , vérifiant $Y_{t_i}^\pi = u_i(X_{t_i}^\pi)$, $Z_{t_i}^\pi = v_i(X_{t_i}^\pi)$

Theoreme 4.1 [62]

On note par $A_t^{s,x} = x + h(s, x)(t - s) + \sigma(s, x)(W_t - W_s)$, $\Delta_{t_i} = (t_i - t_{i-1})$

On définit par récurrence

$$u_p(x) = \Phi(x), \quad v_p(x) = 0$$

$$u_{i-1}(x) = E[u_i(A_{t_i}^{t_{i-1}, x}) + f(t_i, A_{t_i}^{t_{i-1}, x}, u_i(A_{t_i}^{t_{i-1}, x}))\Delta_{t_i}]$$

$$v_{i-1}(x) = E\left[\frac{(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})}{\Delta_{t_i}} (u_i(A_{t_i}^{t_{i-1}, x}) + f(t_i, A_{t_i}^{t_{i-1}, x}, u_i(A_{t_i}^{t_{i-1}, x}))\Delta_{t_i})\right]$$

On a alors $Y_{t_i}^\pi = u_i(X_{t_i}^\pi)$, $Z_{t_i}^\pi = v_i(X_{t_i}^\pi)$

4.2 Majoration d'erreur et convergence du schéma

Définition 4.1

Une fonction $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sera lipschitzienne en espace et α -holdérienne (d'ordre α) en temps s'il existe des constantes des constantes C_1, C_2, C_3 strictement positives telles que $\|f(s, x', y') - f(s, x, y)\| \leq C_1 |s - s'|^\alpha + C_2 \|x - x'\| + C_3 \|y - y'\|$

Théorème 4.2 [61]

Supposons que les coefficients f, b, σ et g (dans le système d'EDSR) sont lipchitziennes en espace et que f, b, σ sont holdériennes d'ordre $1/2$ en temps alors il existe $C > 0$ tel que

$$\sup_{t \leq s \leq T} E[|Y_s - Y_s^\pi|^2] + E\left[\int_t^T |Z_s - Z_s^\pi|^2 ds\right] \leq C(1 + |x|^2) |\pi|$$

Ce qui implique la convergence du schéma

Dans le même cas, On peut trouver dans [22] un théorème important dit de Chevance :

Théorème 4.1

Si f ne dépend pas de Z et si les coefficients sont réguliers (dans le sens conditions de Lipchitz) on a $\left| Y_0^\pi - Y_0 \right| \leq C \frac{1}{n}$

4.3 Généralisation au cas où f dépend de Z

Il s'agit de résoudre l'edsr

$$Y_t = \Phi(X_t) + \int_t^T f(s, X_s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s \quad t \in [0, T]$$

$$\text{où } X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$$

Depuis le milieu des années 90 plusieurs articles sont parus, sur le même sujet mais dans le cas où f dépendant de X, Y, Z .

Parmi les auteurs, on peut cité Zhang , N. El karoui, Pardoux , Peng , Bruno Bouchard, Nizard Touzi , Jin ma , protter , jiongmin yong, Labart, Christian Bender, Robert Denk, Bally ,Gobet et Warin , Lemor , G.N.Milstein et M.V Tretyakov , , Benssouan , Mennouzi Bahlali ,Elssaki et autres...

Dans ce paragraphe on va aborder brièvement quelques résultats importants.

Zhang dans sa these [61] s'est intéressé à ce cas en proposant un schéma de discrétisation basé sur la méthode d'E.M mais sans donner de réponse pour l'approximation de Z , même constat pour le schéma en quatre étapes proposé par Jin ma, protter, j. yong. Dans [46]. Bally a développé dans [3] un schéma intéressant en utilisant la partition aléatoire du temps. Ce schéma reste encore difficile à appliquer en pratique.

Ensuite une nouvelle methode basée sur le schema de Monte-Carlo et la régression non paramétrique

Comme exemple, on peut consulter [9], [20], [32], [33].

Dans [7] Bruno Bouchar et Nizar Touzi ont repris le travail de Zhang pour développer en trois étapes un schéma d'approximation implicite qui utilise cette méthode :

Dans une première étape ils ont suivi le même chemin que celui de Zhang où ils ont appliqué

La méthode d'E.M au système sans tenir compte de l'adaptation des variable et il ont aboutit au schéma de discrétisation, en temps, suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{t_i}^\pi = (t_{i+1} - t_i)^{-1} E_i^\pi [Y_{t_{i+1}}^\pi (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})] \\ Y_T^\pi + \Phi(X_T^\pi) \\ Y_{t_i}^\pi = E_i^\pi [Y_{t_{i+1}}^\pi] + (t_{i+1} - t_i) f(t_i, X_{t_i}^\pi, Y_{t_i}^\pi, Z_{t_i}^\pi) \end{array} \right. , 0 \leq i \leq n$$

Ensuite il ont proposé une approximation de Z notée \tilde{Z} , appartenant à la classe des processus \mathfrak{F}_{t_i} mesurables constants par morceaux sur les intervalles $[t_i, t_{i+1}]$.

$$\tilde{Z}_t = (t_{i+1} - t_i)^{-1} E \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_s ds \mid \mathfrak{F}_{t_i} \right] \text{ est défini pour } t \in [t_i, t_{i+1}],$$

et ils ont majoré l'erreur de discrétisation au sens L^2 exprimée par la formule

$$e_2 = \max_{i < n-1} \left[\sup_{t \in [t_i, t_{i+1}]} E \left\| Y_{t_i} - Y_{t_i}^\pi \right\|_{L^2} + E \left(\sum_{i \leq n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| Z_{t_i} - Z_{t_i}^\pi \right\|_{L^2}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Pour $T=1$

il ont prouvé l'existence d'une constante C telle que $e_2 \leq C(n^{-1/2} + \left\| Z_{t_i} - Z_{t_i}^\pi \right\|_{H^2}^2)$

avec $n = (t_{i+1} - t_i)^{-1}$ et $\|V\|_{H^2} = E \left[\int_0^1 |V_t|^2 dt \right]^{1/2}$

ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow \infty} e_2 = 0$ ie le schéma converge.

C'est le résultat trouvé par Zhang.

Dans la deuxième étape, les auteurs ont remarqué qu'on peut pas appliqué le schéma de discrétisation comme il a été présenté dans l'étape1, car il nécessite le calcul d'espérances conditionnelles en dimension infinie, ce problème est résolu par l'application des approches par quantification ou par régression non paramétrique qui consiste à remplacer cette espérance par une approximation qu'on peut calculer. On a

$$E(y_{t_{i+1}}^\pi | \mathfrak{F}_{t_i}) = E(y_{t_{i+1}}^\pi | X_{t_i})$$

et

$$E[(Y_{t_{i+1}}^\pi (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) | F_{t_i})] = E[(Y_{t_{i+1}}^\pi (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) | X_{t_i}^\pi)].$$

Il suffit donc de considérer une approximation \hat{E}_i^π de l'opérateur $E_i^\pi = E(\cdot | X_{t_i}^\pi)$ qu'on note par \hat{E}_i^π et on lui associe le processus $(\hat{Y}^\pi, \hat{Z}^\pi)$ (voir l'article cité en référence, [9]). définie par

$$\hat{Y}_i^\pi = \hat{E}_i^\pi[\hat{Y}_{t_{i+1}}^\pi] + f(t_i, X_{t_i}^\pi, \hat{Y}_{t_i}^\pi, \hat{Z}_{t_i}^\pi) (t_{i+1} - t_i)$$

$$\hat{Z}_{t_i}^\pi = (t_{i+1} - t_i)^{-1} E_i^\pi[(\hat{Y}_{t_{i+1}}^\pi (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) | X_{t_i}^\pi)], 0 \leq i \leq n \text{ avec la condition terminal}$$

$$\hat{Y}_1^\pi = g(X_1^\pi) = Y_1^\pi.$$

D'où le théorème suivant

Théorème 4.2 [9]

Sous les conditions de Lipchitz on a pour $0 \leq i \leq n$

$$\left\| \hat{Y}_{t_i}^\pi - Y_{t_i}^\pi \right\|_{L^2} \leq Cn \max_{0 \leq j \leq n-1} \left\{ \left\| (\hat{E}_j^\pi - E_j^\pi)[\hat{Y}_{t_{j+1}}^\pi] \right\|_{L^2} + \left\| (\hat{E}_j^\pi - E_j^\pi)[\hat{Y}_{t_{j+1}}^\pi (\Delta_{j+1}^\pi)] \right\|_{L^2} \right\}$$

avec $n = t_{i+1} - t_i$

Dans la troisième étape les deux auteurs ont donné une méthode (techniquement lourd) basée sur le calcul de Malliavin) pour choisir l'opérateur \hat{E}^π .

Le travail le plus récent, à ma connaissance, toujours sur le même sujet est celui de Céline Labart dans [16] ou' elle est arrivée à quelques résultats :

Hypothese1

Supposons que les fonctions b, σ, f, Φ et sont bornée en x et uniformément lipchitzienne, continue par rapport à (x,y,z)et continues holdériennes de paramètre 1/2 par rapport à t. De plus Φ est de classe $C_b^{2+\alpha}$ pour $\alpha \in]0,1[$. La matrice $a = \sigma \sigma^*$ est uniformément elliptique.

Théorème 4.3 [16]

Sous l'hypothèse 1, on définit l'erreur pour $p > 0$

L'erreur de discrétisation $e_p(n)$ est d'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$: il existe $K(T, x)$ telle que

$$|e_p(n)| \leq \frac{K(T, x)}{\sqrt{n}}$$

$$\text{où } e_p(n) = \left[\max_{0 \leq k \leq n} E \left| Y_{t_k} - Y_{t_k}^\pi \right|^p + E \left(\sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| Z_{t_k}^\pi - Z_t \right|^2 dt \right)^{\frac{p}{2}} \right]^{\frac{1}{p}} \text{ et } Y^\pi \text{ et } Z^\pi \text{ sont}$$

définies par le schéma précédent .

Ce théorème est une généralisation de théorème établi par Zhang pour $p = 2$.

D'autres résultats établis par c.labart , donnant un développement presque sûr des erreurs $Y - Y^\pi$ et $Z - Z^\pi$.

On sait, que la différence en norme L^p entre X et X_t^π est d'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Le but c'est le développement de l'erreur entre $Y - Y^\pi$ et $Z - Z^\pi$ et l'influence de l'erreur $X - X_t^\pi$ sur les erreurs $Y - Y^\pi$ et $Z - Z^\pi$

Sous certaines conditions et pour des fonctions ψ_1, ψ_2 explicites on a

$$Y_{t_k}^\pi - Y^\pi = \psi_1(t_k, X_{t_k})(X_{t_k}^\pi - X_{t_k}) + O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\left|X_{t_k}^\pi - X_{t_k}\right|^2\right)$$

$$Z_{t_k}^\pi - Z^\pi = \psi_2(t_k, X_{t_k})(X_{t_k}^\pi - X_{t_k}) + O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\left|X_{t_k}^\pi - X_{t_k}\right|^2\right)$$

Ce qui généralise le résultat de D.Chevance (théorème) au cas où f dépend de z

Plus généralement l'erreur s'écrit $\left| Y_{t_k}^\pi - Y^\pi - \alpha_k (X_{t_k}^\pi - X_{t_k}) \right| \leq \frac{C}{n} \text{MAX} \left| X_{t_k}^\pi - X_{t_k} \right|^2$ où α_k est un vecteur aléatoire explicite et borné.

Le même développement est valable pour la variable aléatoire Z :

$\left| Z_{t_k}^\pi - Z^\pi - \alpha_k (X_{t_k}^\pi - X_{t_k}) \right| \leq \frac{C}{n} \text{MAX} \left| X_{t_k}^\pi - X_{t_k} \right|^2$ Ce résultat montre que ces erreurs dépendent principalement de l'erreur trajectorielle commise lors de la discrétisation de X , ce qui contredit les affirmations précédentes, que les erreurs sont d'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$, de fait de l'équation de programmation dynamique issue de la méthode d'E.M .

Ce nouveau résultat qu'on trouve dans [16] montre que dans le cas où on simule X de manière exacte aux instants t_k , comme dans le cas de mouvement brownien géométrique ou arithmétique, les erreurs commises sur Y, Z sont d'ordre $\frac{1}{n}$.

Chapitre 5

Applications des EDSR dans le domaine des finances

Un problème qui se pose souvent en finance c'est l'évaluation de prix d'une option.

5.1 Options financières

Définition 5.1

Les risques liés aux opérations boursières ont conduit le monde de la finance, à chercher des systèmes pour les réduire. Ainsi s'est développé le marché des options.

Les options sont des produits dérivés qui donnent le droit à leur détenteur d'acheter ou de vendre une quantité donnée d'un actif sous-jacent à un prix déterminé à une date prédéterminée ou avant cette date.

Une option d'achat (droit d'acheter l'actif sous-jacent) s'appelle un call alors que **l'option de vendre** s'appelle put. Une option qui peut être exercée à n'importe quel moment avant la date d'échéance est dite option "à l'américaine", Une option qui ne peut être exercée qu'à la date d'échéance est dite option à l'européenne.

L'utilisation des options est très important surtout comme politique de gestion de risque. D'une autre part elles peuvent être utilisée pour des buts de spéculation.

Le problème qui se pose consiste à donner un prix à ces options.

b) L'évaluation du prix d'une option

En ce qui concerne la valorisation des options, il faut bien mentionner que la valeur de l'option représente la probabilité d'exercer celle-ci : plus l'exercice est probable, plus l'option sera chère. Cette valeur dépend du sous-jacent précisément de son prix, de la volatilité du prix, de la durée jusqu'à l'échéance et des taux d'intérêts.

Parmi les modèles d'évaluation on cite le modèle de Black - Scholes, le modèle binomial et le modèle des edsr...

Les travaux de Black et Sholes et de Merton ont permis le développement de la théorie d'évaluation des options et ont été étendus à d'autres instruments financiers.

Les limites que comporte le modèle de black et Sholes sont basées sur les hypothèses suivantes :

- Le marché est supposé être liquide et fournir la même information à tous les intervenants.

- Le prix du marché change en continu suivant un modèle, celui d'un processus de mouvement brownien géométrique.
- Les titres négociés sur le marché sont parfaitement divisibles.
- Le processus d'échange sur le marché financier est supposé être un processus continu.
- Le principe de non arbitrage est supposé être vérifié.(il n'y a aucune possibilité de gain certain en T en ayant investi aucun capital en t = 0).

Dans la pratique, aucune de ces hypothèses n'est parfaitement satisfaite. Cependant, le modèle de Black et Sholes consiste un outil important d'analyse des marchés réels et les prix proposés par Black et Sholes offrent une Approximation des prix des options.

Dans notre travail, on va considérer l'évaluation des options et les méthodes des edsr dans leur formes les plus simples.

5.1.1 L'option européenne

L'option européenne d'achat appelée '**Call Européen**' est un contrat qui donne le droit mais non l'obligation à son détenteur d'acheter à une date T fixée à l'avance, une action à un prix k fixé à l'avance. T est appelé la maturité et k le prix d'exercice (strike).

Dans ce cas, le détenteur de l'option exerce son droit : il achète une action à un prix k ; il peut le revendre instantanément au prix x_T et dans ce cas il aura un bénéfice de $(x_T - k)$ à la date T.

Il y'a un second cas appelé option européenne de vente '**Put Européen**' où le détenteur de l'option n'exercera pas son droit il ne va pas acheter au prix k une action qu'il peut acheter moins cher sur le marché. il ne fait aucun bénéfice, dans ce cas le vendeur de l'option s'engage donc (suivant un contrat) à payer à son détenteur (l'acheteur) la somme $\xi = (k - x_T)^+$.

le profit que permet l'exercice de l'option, on l'appelle "payoff" c'est une somme aléatoire, représentée par une fonction h qui vaut à l'instant T

$$H_T = h(x_T) = \max(0, x_T - k) = (x_T - k)^+ \text{ dans le cas d'un call européen,}$$

$$H_T = h(x_T) = \max(0, k - x_T) = (k - x_T)^+ \text{ dans le cas d'un put européen.}$$

La question qui se pose dans ce cas, c'est, quel est le prix de vente " y_0 " de l'option à la date t = 0 pour que le vendeur soit sûr qu'il disposera de la somme ξ à la date t = T ? Estimer ce prix c'est valoriser le coût du couverture contre les risques de marché.

Pour pouvoir assurer ce prix (y_0) ce vendeur doit choisir l'une des deux façons d'investissement :

Le premier choix c'est d'investir dans l'action dont le prix courant est donné par la trajectoire de l'EDS linéaire, $dx_t = \mu x_t dt + \sigma x_t dW_t$ où x_t représente le prix courant d'une part de l'action à l'instant t, Cette EDS peut s'écrire sous forme intégrale :

$$x_t = x_0 + \int_0^t \mu x_s ds + \int_0^t \sigma x_s dW_s, \quad t \in [0, T]$$

Dans ce cas particulier la solution de cette EDS est $x_t = x_0 e^{(\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t)}$.

Le deuxième choix c'est d'investir dans un placement sans risque, une banque par exemple, avec un taux de rendement fixe et égale à r ; le prix d'une part est donné par $E_t = E_0 e^{r \cdot t}$, E

Satisfait l'EDO
$$E_t = E_0 + r \int_0^t E_s ds$$

Une stratégie par définition, est la donnée d'un couple de processus, $(p_t, q_t)_{t \in [0, T]}$ adapté par rapport à la filtration du mouvement brownien W_t où q_t est le nombre de parts d'actif risqués ie le nombre d'actions détenus dans le porte feuille à l'instant t , p_t le nombre d'actif sans risque.

Donc la richesse (weath) du vendeur (le nombre d'action détenus dans son porte feuille) à l'instant t est $y_t = q_t x_t + p_t E_t$, avec $y_0 = v$ et $y_T = (x_T - k)^+$

Cela veut dire que l'évolution de la richesse ne dépend que de la variation des prix, ce qu'on appelle dans les milieux financiers la stratégie auto financée qui se résume par, pas de retrait ni d'ajout d'argent.

5.1.2 Formule de Black et Scholes

Le modèle de Black Scholes (1973) évalue les options européennes en temps continu, sa formule simple et pratique du prix de l'option a contribué à sa popularité et au développement à terme.

L'équation aux dérivées partielles de Black –Scholes que doit satisfaire le prix y de l'option s'écrit

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x_t^2} x_t^2 \sigma^2 + r \frac{\partial y}{\partial x_t} x_t - r y = 0 \text{ avec } y_T = (x_T - k)^+ .$$

Cette équation est obtenue en

explicitant la différentielle du prix $y(t, x_t)$ à l'aide de lemme d'Itô.

Dans le cas de l'option d'achat européenne où T est la date de maturité, Black et Scholes réussissent à résoudre cette relation en la ramenant à l'équation classique de propagation de la chaleur dont la solution a une forme explicite. On sait que l'équation de la chaleur a la

forme suivante $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial \tau}$ où $u(\tau, x)$ représente la température en un point x à l'instant τ

la solution de cette équation est soumise à la condition initiale $u(0, x) = \Phi(x)$ est donnée

$$\text{par : } u(\tau, x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(z)}{\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{4\tau}\right) dz$$

Black et Scholes trouvent l'expression suivante du prix de l'option d'achat européenne :

$$y(t, x) = yN(d_1) - K \exp(-r(T-t))N(d_2) \text{ où}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{y}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, N \text{ est la distribution normale centrée}$$

réduite.

5.2 L'approche EDSR

Dans ce chapitre on va étudier quelques applications des edsr en mathématiques financières, plus précisément dans le cas de réplication d'options où un vendeur d'un call de payoff, par exemple, $(X_T - K)^+$. Le vendeur va fixer le prix de l'option qu'on va noter, Y_0 .

Ce prix évidemment va le demander à l'acheteur de telle sorte qu'il puisse à partir de son capital initial Y_0 trouver une stratégie d'investissement basée sur l'achat et la vente de l'action de telle sorte qu'il soit sûr d'atteindre le payoff $\xi = (X_T - K)^+$ à l'instant T, de cette manière le vendeur livre à l'acheteur la valeur finale du portefeuille qu'il a géré pendant la durée de vie de l'option et a complètement couvert son risque,

De plus le vendeur est contraint de construire un portefeuille autofinancé cela veut dire que les variations de ce portefeuille sont complètement expliquées par l'évolution de $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$. En particulier, il ne peut pas rajouter d'argent au cours de la gestion. Si on note Y_t la valeur du portefeuille, le vendeur veut réaliser $Y_T = \xi$

Cela s'exprime mathématiquement par le fait que qu'entre l'instant t et $t + dt$, la variation de la valeur du portefeuille est déterminée par la variation de X_t , dX_t et le montant investi

dans l'action, δ_t . on a $dY_t = \frac{\delta_t}{x_t} dX_t + (Y_t - \delta_t) r dt$ où δ_t est le montant investi dans

l'action, dY_t : La variation de valeur du portefeuille, $\frac{\delta_t}{X_t}$: Nombre d'actions détenues à

l'instant t , dX_t : Variation du cours de l'action, $(Y_t - \delta_t)$: part investie en banque.

Supposons que le modèle d'évolution pour x est le modèle de Black Sholes $dX_t = X_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ en remplaçant dans l'équation précédente on aura

$$dY_t = [rY_t + \delta_t(\mu - r)]dt + \delta_t \sigma dW_t$$

Posons $Z_t = \delta_t \sigma$ et multipliant les deux membres par -1 , on aura

$$-dY_t = -[rY_t + Z_t \frac{\mu - r}{\sigma}]dt - Z_t dW_t$$

Dans ce cas le driver $f(t, y, z) = -(ry + z \frac{\mu - r}{\sigma})$ et $\frac{\mu - r}{\sigma}$ s'appelle la prime de risque. Pour ce sujet on peut consulter [48].

Le théorème de Pardoux et Peng implique l'existence d'une solution unique (Y_t, Z_t) dès que f vérifie certaines conditions. (voir chapitre 2).

Donc trouver le prix d'une option européenne, revient à résoudre une EDSR linéaire à deux inconnues Z_t et Y_t dont on connaît la solution explicite Y_0 :

Y_0 (qui est une valeur déterministe) représente le prix d'une option à l'instant $t=0$, on peut la trouver explicitement par la formule déjà vu pour les edsr linéaires (chapitre 2, proposition 2.6) ou bien par utilisation de la formule de Black-Sholes.

La valeur du portefeuille dans ce cas est donnée par $\delta_t = \frac{Z_t}{\sigma}$.

5.2.1 Exemples d'application des EDSR pour l'évaluation d'un call ou d'un put européen.

(1) -Cas d'un call européen

Dans le modèle de Black et Scholes, appliquons la méthode des edsr pour évaluer un call européen de maturité T égale à une année avec un taux sans risque $\mu = 0$, de volatilité $\sigma = 0.25$ et de strike $K=150$, sachant que la valeur initiale de sous jacent $x_0 = 100$ et le prix de référence pour cette option est 0.672. [10].

L'edsr associée est $-dY_t = f(t, Y, Z)dt - Z_t dW_t$ où $f(t, Y, Z) = 0$ avec la condition terminale

$$\xi = (x_1 - 150)^+ = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 \leq 150 \\ (x_1 - 150) & \text{si } x_1 > 150 \end{cases} = (100 \exp(0.25 W_1 + (0 - \frac{(0.25)^2}{2})) - 150)^+$$

La condition terminale est donnée par la fonction

$$\Phi(x) = (100 \exp(0.25x + (0 - \frac{(0.25)^2}{2})) - 150)^+$$

n Temps de réalisation	400 1sec	500 1sec	600 1sec	1000 8sec	2500 60sec	5000 160sec	6000 360sec	6500 360sec	7500 540sec	8500 600sec
y_0^n	0.6715	0.67156	0.67146	0.67163	0.67173	0.67175	0.67181	0.67183	0.67183	0.67184

Le schéma explicite pour les edsr, vu au chapitre 3, pour 12 essais donne les résultats suivants pour les différentes valeurs de n sachant que les essais sont réalisés avec un processeur de 3.0 GHZ.

La valeur du porte feuille à l'instant $t=0$, $n = 400$ est $\delta_0 = \frac{Z_0}{\sigma} \approx \frac{6.707}{0.25} = 26.828$.

Trajectoire de la solution approchée de y_0 suivant quelques valeurs de n

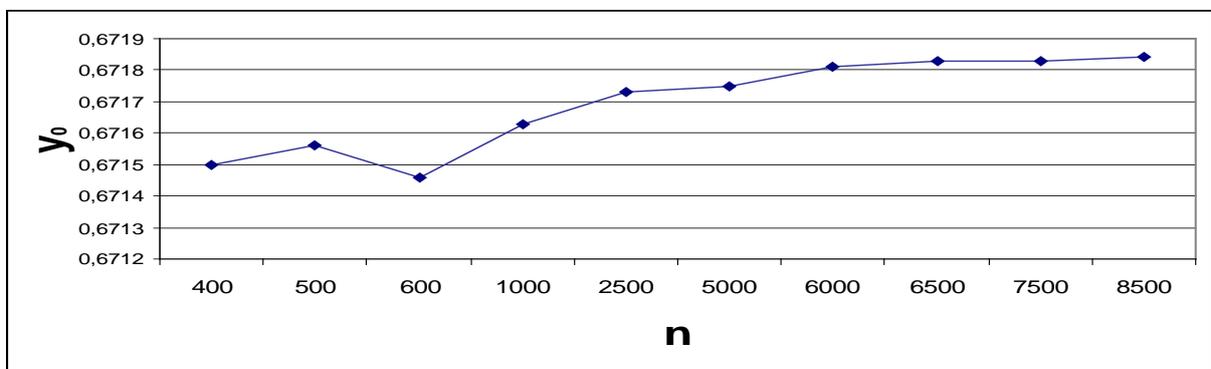


Fig 26

Trajectoire de l'écart entre la solution approchée de y_0 calculée par la méthode des EDSR et la valeur de référence de y_0 suivant quelques valeurs de n

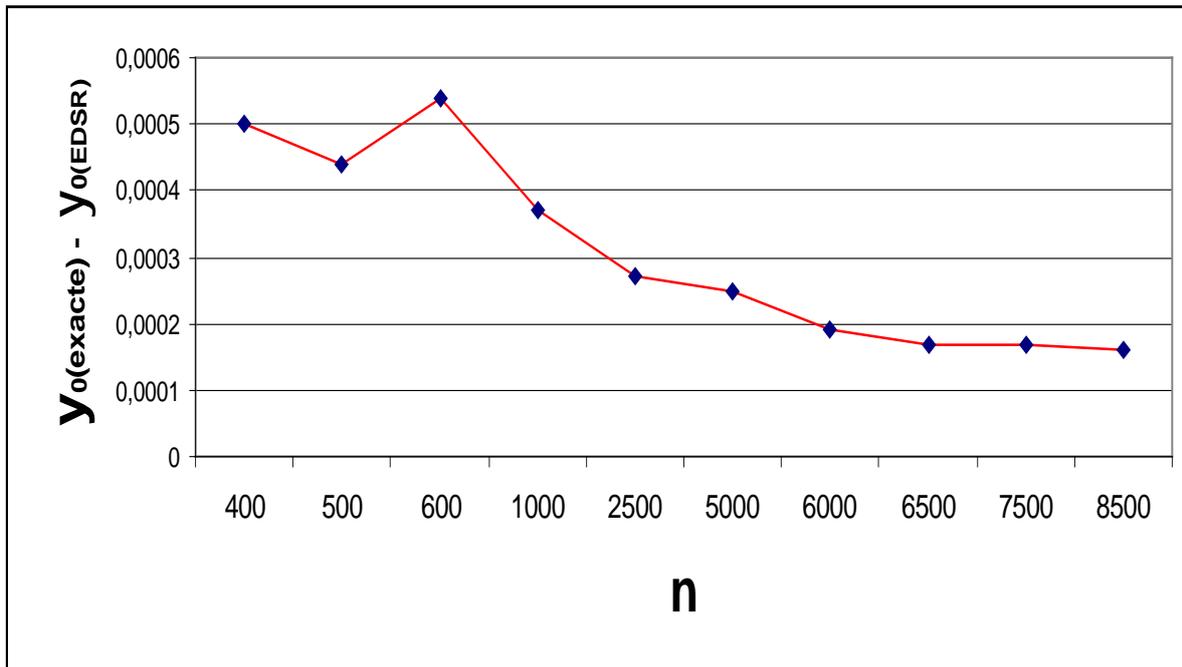


Fig.27

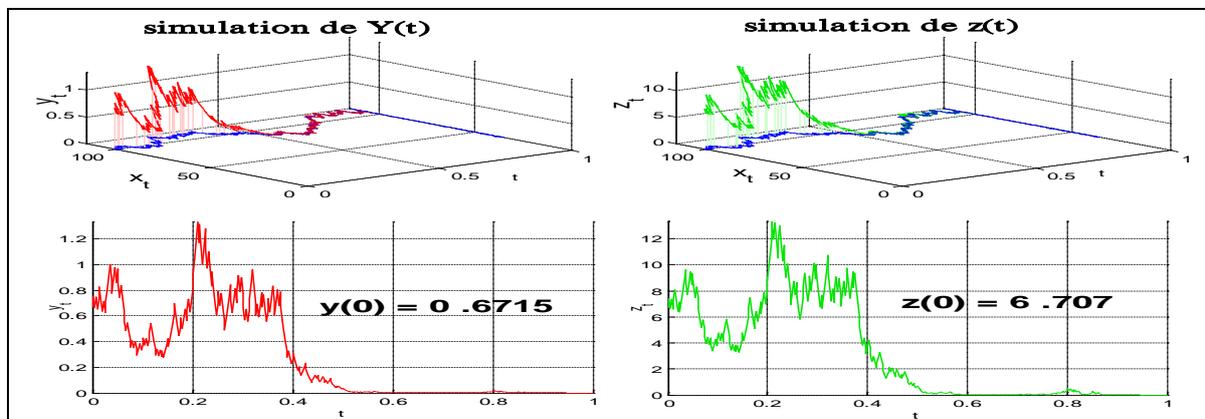


Fig.28

Toujours dans le même cas, le tableau suivant résume les écart types et les intervalles de confiance estimés à l'aide de la méthode de Monte- Carlo avec ou sans la méthode de la fonction d'importance.

Nombre de Simulations	Echantillon sans importance	avec importance (h=2)
10 000	0.0484 , [0.584, 0.774]	0.0046 , [0.668 , 0.686]
100 000	0.0149 , [0.658, 0.716]	0.0015 , [0.669 , 0.675]

Le vendeur d'option peut être poussé par des imperfections de marché d'emprunter de l'argent à un taux d'intérêt R supérieur aux taux r auquel est rémunéré l'argent qu'il peut placer sur un compte bancaire. (on peut consulter à ce sujet [4], [48]). Dans ce cas, si x suit le modèle de

Black -Sholes, la dynamique de son portefeuille de couverture sera :
 $-dY_t = -[rY_t + Z_t \frac{\mu - r}{\sigma}]dt + (R - r)(Y_t - \frac{Z_t}{\sigma})^- dt - Z_t dW_t$ avec la condition terminale

$y_T = (x_T - K)^+$ où $(Y_t - \frac{Z_t}{\sigma})^-$ représente le montant emprunté à la banque et la valeur $\frac{\mu - r}{\sigma}$

s'appelle la prime de risque. Il s'agit ici de résoudre une edsr avec un driver f non linéaire mais on peut, quand même, calculer Y_0 en utilisant ce qui précède :

En effet,

$$f(t, y, z) = -\frac{\mu - r}{\sigma} z - ry + (y - \frac{z}{\sigma})^- (R - r) = -\frac{\mu - R}{\sigma} z - Ry + (y - \frac{z}{\sigma})^+ (R - r) \geq -\frac{\mu - R}{\sigma} z - Ry ,$$

ce dernier terme représente le driver d'une edsr qui correspond à une dynamique d'un portefeuille classique avec un taux d'intérêt unique qui est R .

en utilisant le théorème de comparaison pour les edsr on peut montrer que y_0 sera supérieur au prix calculé par la formule de Black -Sholes avec un taux d'intérêt R . Mais dans le cas de la réplcation dans le modèle de Black- Sholes, pour couvrir l'option, le vendeur devra toujours emprunter à la banque, si on note par (Y_t^1, Z_t^1) la solution associée au driver

$\frac{\mu - R}{\sigma} z - Ry$, alors $Y_t^1 \leq \frac{Z_t^1}{\sigma}$ où $\frac{Z_t^1}{\sigma}$ est le montant investi en action .

Ainsi on obtient bien l'égalité des drivers f et $\frac{\mu - R}{\sigma} z - Ry$ sur $\{(Y_t^1, Z_t^1)\}$, donc on aura $Y_0 = Y_0^1$.

Si on prend :

μ	r	R	x_0	K	σ	T	n
0.05	0.04	0.06	100	100	0.2	0.5	400

Intéressons nous à trouver la valeur Y_0 .

En appliquant le schéma proposé au chapitre3 avec le driver $f(t, y, z) = \frac{\mu - R}{\sigma} z - Ry = \frac{0.05 - 0.06}{0.2} z - 0.06y$, $n=400$, on trouve $Y_0 = 8.11$, fig(29)

$$\Rightarrow \delta_0 = \frac{Z_0}{\sigma} = \frac{66.12}{0.2} \approx 330.6$$

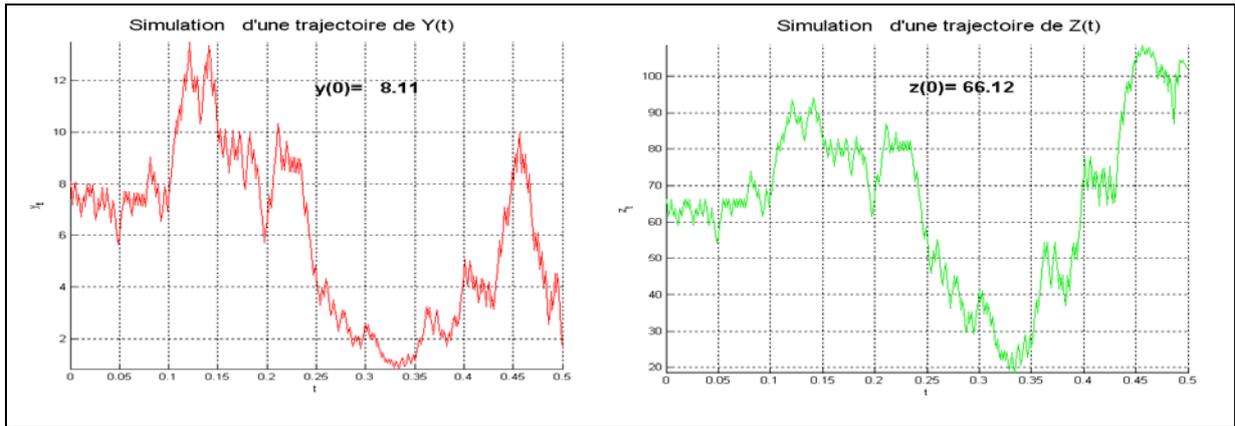


Fig.29

On peut vérifier ce résultat en appliquant le même schéma directement avec le driver $f(t, y, z) = -\frac{\mu-r}{\sigma}z - ry + (y - \frac{z}{\sigma})(R-r) =$, $n = 400$ la simulation Fig(30) donne la même valeur $y_0 = 8.11$, $Z_0 = 66.12$.

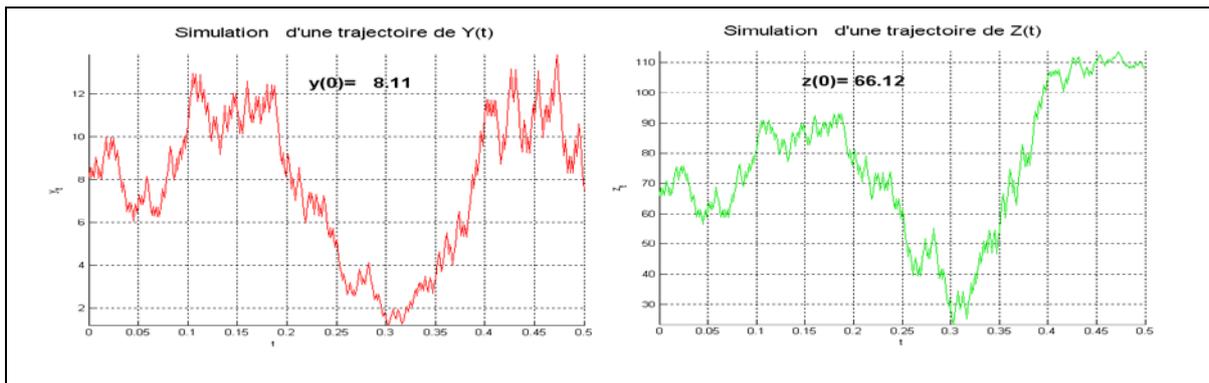


Fig.30

(2) -Cas d'un put européen

Restons toujours dans le modèle de Black et Scholes et appliquons la méthode des edsr et la méthode de Monte Carlo pour évaluer un put européen avec les paramètres :

μ	r	σ	K	T
0.5	0.5	0.3	105	1

et Pour des différentes valeurs de x_0 . Le tableau suivant résume les résultats obtenus

x_0	y_0					
	Méthode des EDSR		Méthode de M. Carlo		$Y_0 (MC) - Y_0 (EDSR)$	
	n=400 ($t < 1s$)	n=8000 ($t = 500s$)	N= 10^6 ($t < 1s$)	N= 10^7 ($t < 1s$)	n=400 , N= 10^6	n=8000, N= 10^7
5	58,7041	58,6866	58,6830	58,6861	-0,0211	-0,0005
10	53,7025	53,6866	53,6863	53,6850	-0,0162	-0,0016
20	43,6995	43,6865	43,6834	43,6852	-0,0161	-0,0013
30	33,7214	33,7115	33,7107	33,7084	-0,0107	-0,0031
40	24,083	24,0781	24,0828	24,0789	-0,0002	0,0008
50	15,6909	15,6845	15,6770	15,6924	-0,0139	0,0079
60	9,3677	9,361	9,3460	9,3626	-0,0217	0,0016
70	5,2075	5,2023	5,2174	5,2018	0,0099	-0,0005
80	2,7409	2,7417	2,7482	2,7411	0,0073	-0,0006
90	1,3895	1,392	1,3912	1,3934	0,0017	0,0014
100	0,69073	0,68963	0,6904	0,6912	-0,00033	0,00157
105	0,48161	0,48229	0,4823	0,4832	0,00069	0,00091
110	0,33635	0,33638	0,3391	0,3360	0,00275	-0,00038
120	0,16265	0,16272	0,1616	0,1627	-0,00105	-2E-05
130	0,078139	0,078454	0,0799	0,0782	0,001761	-0,000254
140	0,037577	0,037838	0,0382	0,0377	0,000623	-0,000138
150	0,017977	0,018296	0,0186	0,0182	0,000623	-9,6E-05
160	0,0087536	0,0089021	0,0094	0,0088	0,0006464	-0,0001021

Trajectoires de la solution approchée de y_0 obtenues par application de la méthode de M. Carlo et la méthode des EDSR suivant quelques valeurs de X_0

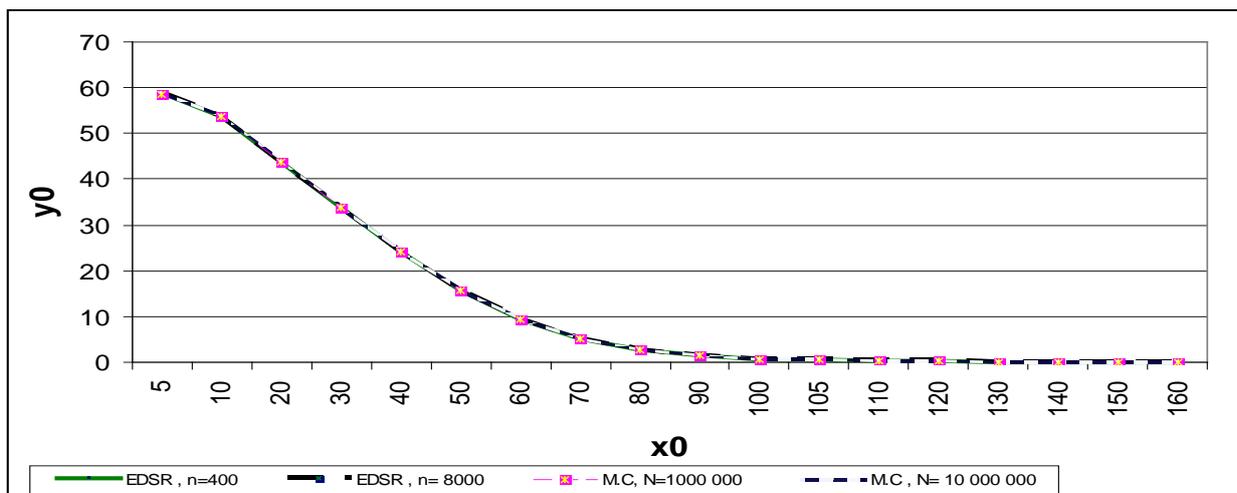


Fig.31

Trajectoires des écarts entre les valeurs de la solution approchée de y_0 calculée par la méthode des EDSR et les valeurs de cette solution calculées par la méthode de M.Carlo suivant quelques valeurs de X_0

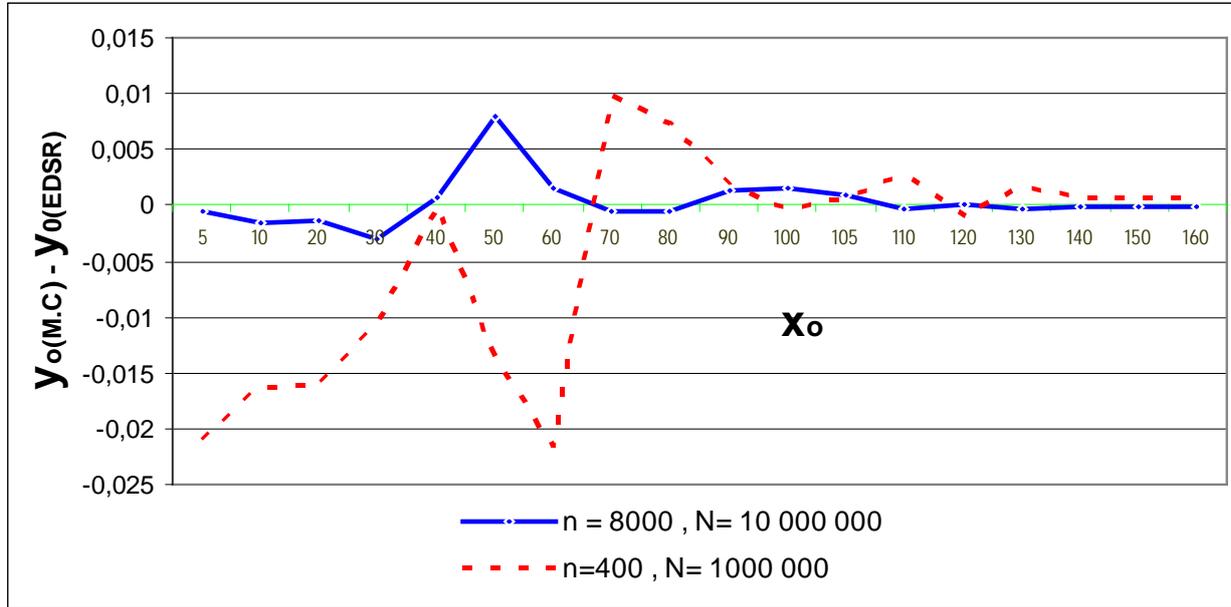


Fig.32

Dans le cas de l'imperfection de marché, l'edsr non linéaire associée est

$$-dY_t = -[rY_t + Z_t \frac{\mu - r}{\sigma}]dt + (R - r)(Y_t - \frac{Z_t}{\sigma})dt - Z_t dW_t \text{ avec la condition terminale } y_T = (K - x_T)^+ . \text{ Si on prend}$$

μ	r	R	x_0	K	σ	T	N
0.05	0.04	0.06	100	100	0.2	0.5	400

La simulation basée sur le schéma explicite (voir chapitre3) montre que $y_0 = 4.645$ et $z_0 = -41.6$

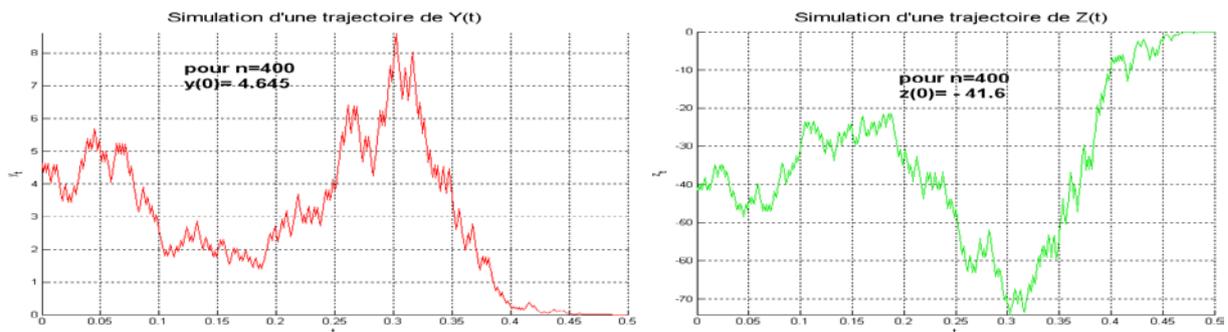


Fig.33

5.3 Option américaine

L'option américaine représente l'exemple de produits financiers dont il est difficile d'évaluer le prix numériquement, cette difficulté provient de fait que cette option confère le droit à son acheteur de choisir l'instant $\tau \in [0, T]$ où il reçoit son gain H_τ , à la différence des options européennes où nécessairement $\tau = T$, le prix de produit est égale à $\sup_{\tau \in [0, T]} E\{H_\tau e^{-\int_0^\tau r ds}\}$, τ est appelé dans ce cas, un temps d'arrêt. On ne connaît dans

le cadre de Black –Scholes aucune solution analytique, même aux options américaines les plus simples.

Afin de comprendre la formulation par E.D.P. du problème des options américaines, il est utile de considérer un exemple classique de problème de borne libre et le problème de barrière ou de l'obstacle, ce qui est traité dans [12], [14], [26]

On trouvera dans [47] et [57] la dérivation des inéquations variationnelles régissant le prix d'une option américaine :

Par exemple, on trouve le prix d'un put américain en résolvant le problème :

pour $t \in [0, T]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} y(t, x_t) - \frac{1}{2} \sigma^2 x_t^2 \frac{\partial^2}{\partial x_t^2} y(t, x_t) - r x_t \frac{\partial}{\partial x_t} y(t, x_t) + r y(t, x_t) \geq 0, y(t, x_t) \geq (x_t - K)^-, t > 0, \\ x_t > 0, t \in [0, T] \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} y(t, x_t) - \frac{1}{2} \sigma^2 x_t^2 \frac{\partial^2}{\partial x_t^2} y(t, x_t) - r x_t \frac{\partial}{\partial x_t} y(t, x_t) + r y(t, x_t) \right] ((y(t, x_t) - (x_t - K)^-) = 0, \\ t \in [0, T], x_t > 0, \\ t > 0 \text{ avec } y(0, x_t) = (x_t - K)^- \end{array} \right. .$$

Pour pouvoir discrétiser ce problème on va d'abord se restreindre à un domaine borné en x_t en introduisant \bar{x}_t assez grand pour que la solution satisfasse $P(t, \bar{x}_t) \approx 0$ pour $t \in [0, T]$.

le problème précédent se réécrit, avec la condition aux limites approchées $P(t, \bar{x}_t) = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} , t > 0, \\ x_t \in [0, \bar{x}_t], t \in [0, T], \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} y(t, x_t) - \frac{1}{2} \sigma^2 x_t^2 \frac{\partial^2}{\partial x_t^2} y(t, x_t) - r x_t \frac{\partial}{\partial x_t} y(t, x_t) + r y(t, x_t) \right] ((y(t, x_t) - (x_t - K)^-) = 0, \\ t \in [0, T], \\ t > 0 \text{ avec } y(0, x_t) = (x_t - K)^-, x_t \in [0, \bar{x}_t], \end{array} \right.$$

On peut alors discrétiser ce problème à l'aide de la méthode des différences finies, on peut consulter dans ce cas [25] et pour les modèles d'organigrammes et programmes [14], [31].

5.3.1 L'approche EDSR réfléchies

Dans le cas d'une option américaine, d'après [26], la richesse y_t de l'investisseur satisfait l'edsr réfléchié :

$$y_t = S_T - \int_t^T [ry_s + (\mu - r)z_s] ds + A_T - A_t - \int_t^T z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$y_t \geq S_t$, $dA_t \geq 0$, $\int_0^T (y_t - S_t) dA_t = 0$ et $y_T = \xi = S_T$, $S_t = (K - x_t)^+$ dans le cas d'un put

américain et $S_t = (x_t - K)^+$ dans le cas d'un call américain, où $x_t = x_0 + \int_0^t \mu x_v dv + \int_0^t \sigma x_v dW_v$

, x_t représente le prix courant d'une action à l'instant t .

le temps d'arrêt $\tau = \inf\{t, y_t - S_t < 0\}$ représente dans ce cas le temps de sortie de l'investisseur de marché ; à cette instant $\tau < T$, soit il achète une action ou il vend une option.

τ Prend la valeur T si Y ne touche jamais la barrière S (on peut consulter à ce sujet, ([11], [26], [27] [38]).

Exemples

1 -Cas de call américain

Dans le cas d'un call américain ie $x_t \geq k$, la richesse de vendeur ie le processus y_t , peut être trouvé à l'aide d'une edsr réfléchies :

$$y_t = (x_T - k)^+ - \int_t^T [ry_s + (\mu - r)z_s] ds - \int_t^T \sigma z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

Couplée à l'eds $x_t = x_0 + \int_0^t \mu x_v dv + \int_0^t \sigma x_v dW_v$ où x_t représente le prix d'une option à l'instant

t et y_t satisfait $y_t \geq S_t$ pour $0 \leq t \leq \tau$ où $S_t = (x_t - K)^+$ avec le temps d'arrêt $\tau = \inf\{t, y_t - S_t < 0\}$, τ représente dans ce cas le temps de sortie de l'investisseur de marché ; à cette instant il achète une action.

Dans l'exemple d'application suivant, on s'intéresse aux processus y_t , z_t et au temps d'arrêt τ . Pour cela considérons l'edsr réfléchié avec la barrière inférieure S_t , alors $\tau = \inf\{t, A_t > 0\}$ avec les paramètres :

$\mu = r$	σ	K	T
0.1	0.40	105	5/12

Trouvons une évaluation approchée de y_0 , suivant quelques valeurs de x_0 , en la comparant à celle trouvée par la méthode des différences finies. Nous aurons les résultats suivants :

X_0	Méthode EDSR n=400 , K=105, ($t \leq 1s$)		Méthode D.F			
	y_0	Temps de sortie τ	y_0		$y_0(\text{EDSR})-y_0(\text{D.F})$	
			N=3000 , M= 3000, K=105, ($t \leq 1s$)	N=6000 , M= 6000, K=105, ($t \leq 1s$)	n = 400 N=3000, M=3000	n = 400 N=6000, M=6000
40	0,000663	5/12	0,00072321	0.00070935	-0,00006021	-0,00004635
50	0,0183	5/12	0,0189	0.0186	-0,0006	-0,0003
70	0,7746	5/12	0,7796	0.7758	-0,005	-0,0012
80	2,3501	5/12	2,36	2.3518	-0,0099	-0,0017
100	9,9611	5/12	9,9704	9.9512	-0,0093	0,0099
105	12,8493	5/12	12,8138	12.8369	0,0355	0,0124
110	16,0852	5/12	16,0512	16.0779	0,034	0,0073
120	23,4758	5/12	23,4278	23.4615	0,048	0,0143
130	31,7909	5/12	31,7377	31.7776	0,0532	0,0133
140	40,7488	5/12	40,6907	40.7360	0,0581	0,0128
150	50,1215	5/12	50,0616	50.1117	0,0599	0,0098
160	59,7587	5/12	59,6921	59.7467	0,0666	0,012

Trajectoires de la solution approchée de y_0 obtenues par application de la méthode des différences finies et la méthode des EDSR avec un strike $K=105$ et suivant quelques valeurs de X_0 .

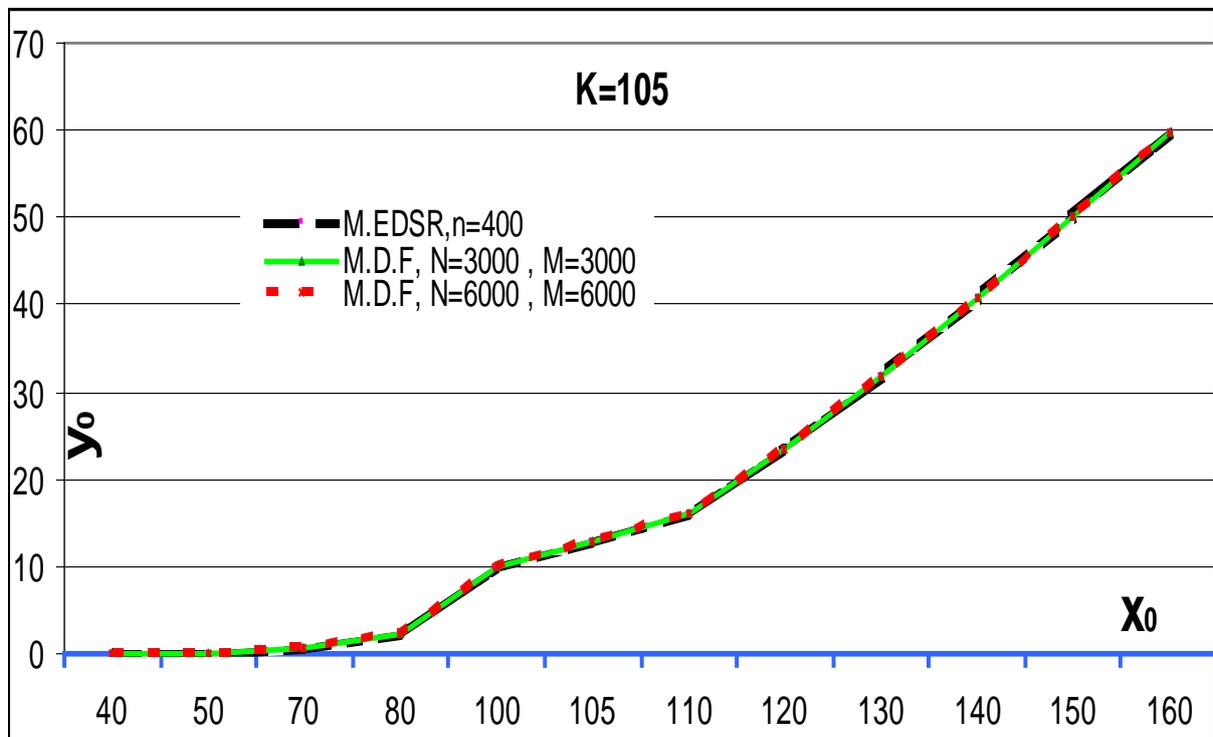


Fig.34

Trajectoires des écarts entre les valeurs de la solution approchée de y_0 calculée par la méthode des EDSR et les valeurs de cette solution calculées par la méthode des différences finies avec un strike $K=105$ et suivant quelques valeurs de X_0

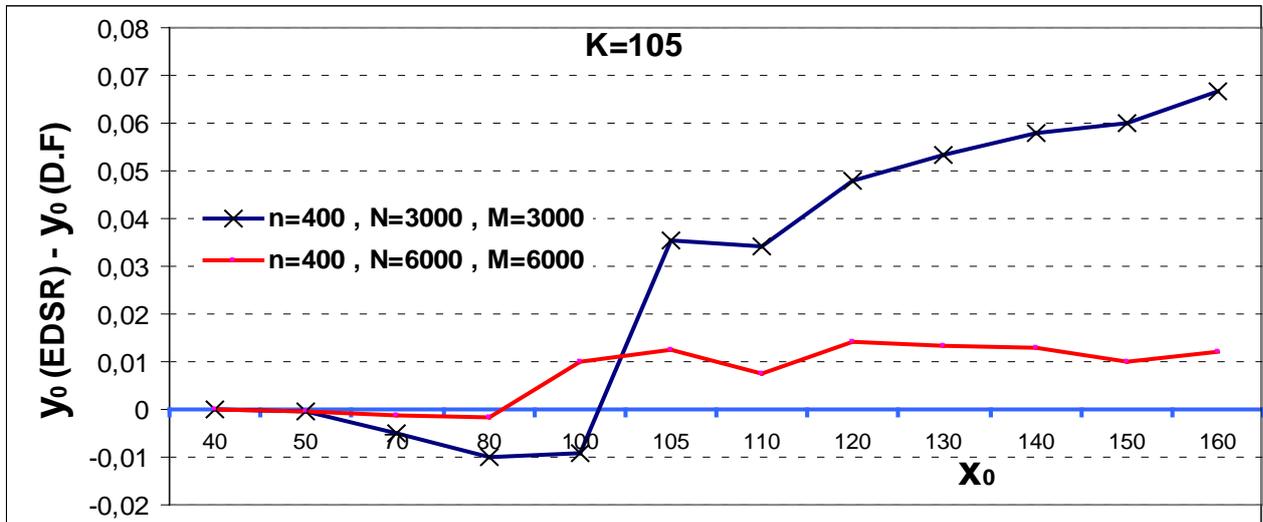


Fig.35

Par exemple Pour $x_0=80$ $y_0=2,3501$, $z_0=17,81$ (Fig36)

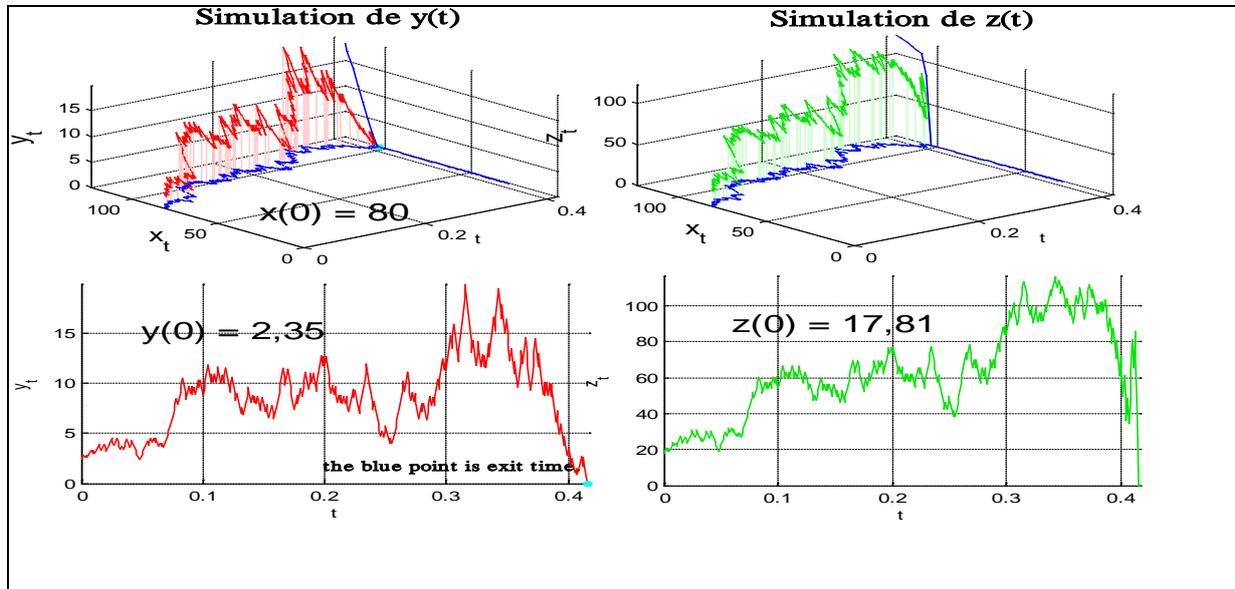


Fig.36

Dans le cas de l'imperfection de marché l'edsr réfléchie associée est

$$-dy_t = -[ry_t + (\mu - r)z_t]dt + (R - r)(y_t - z_t)^- dt - dA_t - \sigma z_t dW_t$$

Avec $y_T = (x_T - k)^+$

où $dx_t = \mu.x_t dt + \sigma.x_t dW_t$, $x(0) = x_0$, $S_t = (x_t - K)^+$ et $Y_t \geq S_t$, $0 \leq t \leq \tau$

Réalisons une simulation de Y_t, Z_t, A_t, τ avec les paramètres suivant :

μ	r	R	x_0	K	σ	T	n
0.05	0.04	0.06	100	100	0.2	0.5	400

Sachant que la valeur exacte de y_0 est égale 7.156.

La simulation (figures 40) montre que $y_0 = 7.154$, $z(0) = 61.14$, $A(t)=0$, $\tau=0.5$

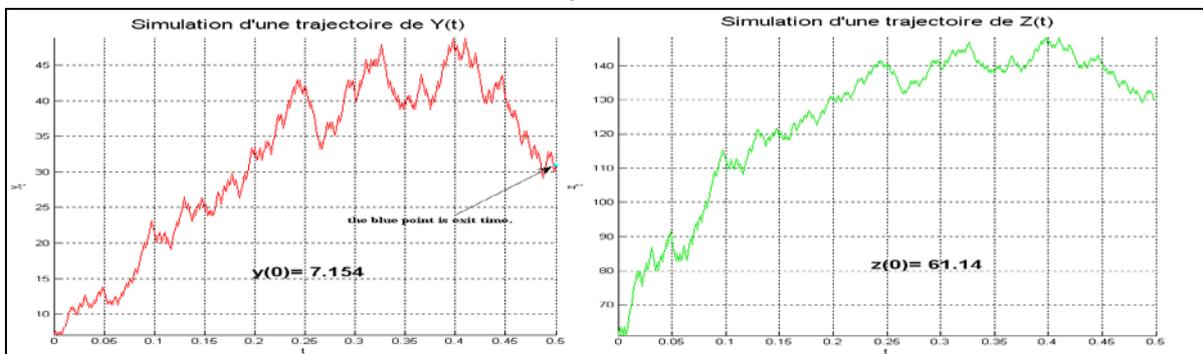


Fig 37

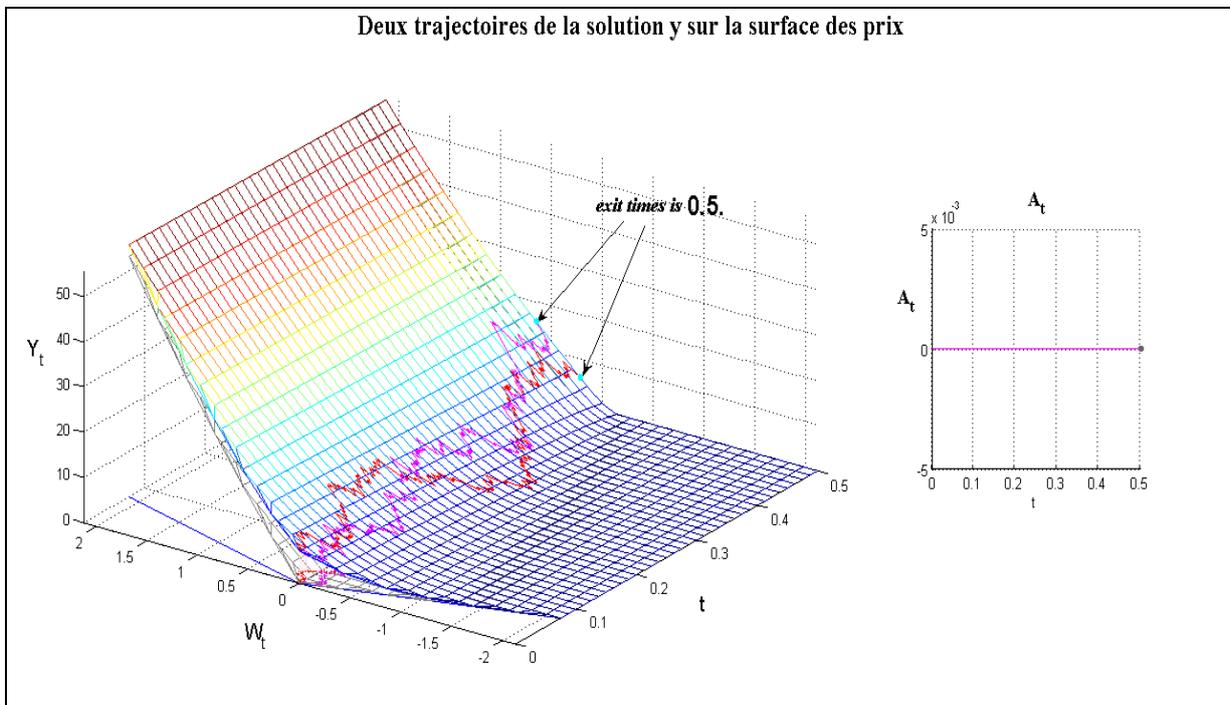


Fig.38

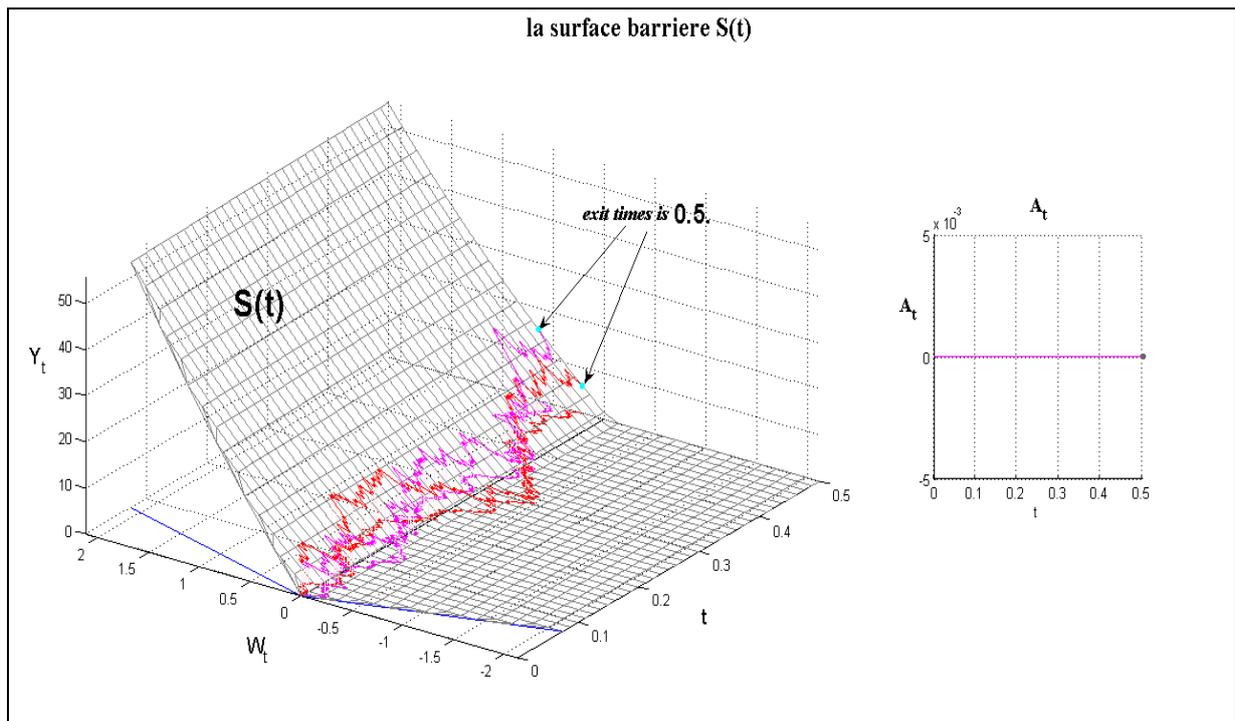


Fig.39

2)- Cas de put américain

Dans le cas d'un put américain ie, la richesse y_t de l'investisseur satisfait l'edsr reflichie [26] :

$$y_t = (k - x_T)^+ - \int_t^T [ry_s + (\mu - r)z_s] ds + A_T - A_t - \int_t^T z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$y_t \geq S_t, \quad dA_t \geq 0, \quad \int_0^T (y_t - S_t) dA_t = 0. \text{ et } y_T = \xi = (K - x_T)^+, \quad S_t = (k - x_t)^+$$

$$\text{où } x_t = x_0 + \int_0^t \mu x_v dv + \int_0^t \sigma x_v dW_v, \quad x_t \text{ représente le prix d'une option à l'instant } t$$

A l'instant $\tau = \inf\{t, y_t - S_t < 0\} = \inf\{t, A_t > 0\}$, l'investisseur doit exécuter le contrat et payer la somme $(k - x_t)^+$.

Comme exemple prenons

μ	r	σ	T
0.1	0.1	0.4	5/12

Évaluons y_0 et τ en utilisant un programme Matlab basé sur le schéma explicite pour les edsr reflichies (voir chapitre 3), suivant quelques valeurs de x_0 , et pour $k = 105, k = 50$ en comparant les valeurs de y_0 avec celles trouvées par la méthodes des différences finies.

Nous aurons dans ce cas les résultats suivants :

x_0	Méthode EDSR n=400 , K=105, ($t \leq 1s$)		Méthode Différences Finies		$y_0(\text{EDSR}) - y_0(\text{D.F})$	
	y_0	t. de sortie τ	y_0			
			N=3000, M=3000, K=105, ($t \leq 1s$)	N=6000, M=6000, K=105, ($t \leq 1s$)	n = 400 N=3000, M=3000	n = 400 N=6000, M=6000
30	75	0.0010417	74.9389	74.9754	0,0611	0,0246
50	55	0.0010417	54.9468	54.9833	0,0532	0,0167
70	35	0.0010417	34.9547	34.9912	0,0453	0,0088
90	17.2023	0.14479	17.1726	17.1983	0,0297	0,004
100	11.2787	0.21667	11.2556	11.2743	0,0231	0,0044
105	9.0013	5/12	9.0130	8.9984	-0,0117	0,0029
110	7.1172	5/12	7.1311	7.1186	-0,0139	-0,0014
120	4.3548	0.32604	4.3595	4.3506	-0,0047	0,0042
130	2.5906	5/12	2.5937	2.5877	-0,0031	0,0029
140	1.507	5/12	1.5093	1.5054	-0,0023	0,0016
150	0.85864	5/12	0.8630	0.8604	-0,00436	-0,00176
160	0.48501	5/12	0.4866	0.4850	-0,00159	1E-05

Trajectoires de la solution approchée de y_0 obtenues par application de la méthode des différences finies et la méthode des EDSR avec un strike K=105 et suivant quelques valeurs de X_0 .

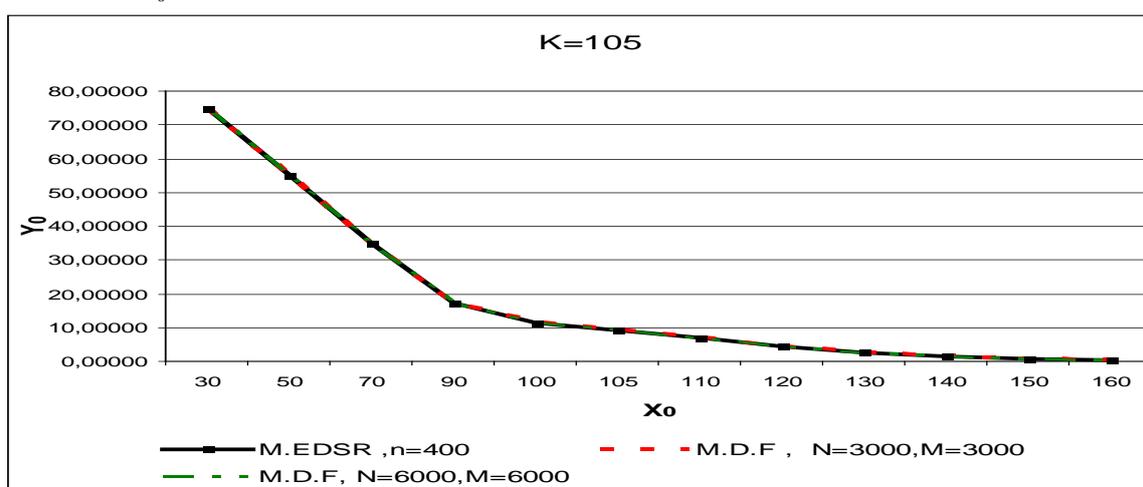


Fig.40

Trajectoires des écarts entre les valeurs de la solution approchée de y_0 calculée par la méthode des EDSR et les valeurs de cette solution calculées par la méthode des différences finies avec un strike $K=105$ et suivant quelques valeurs de X_0

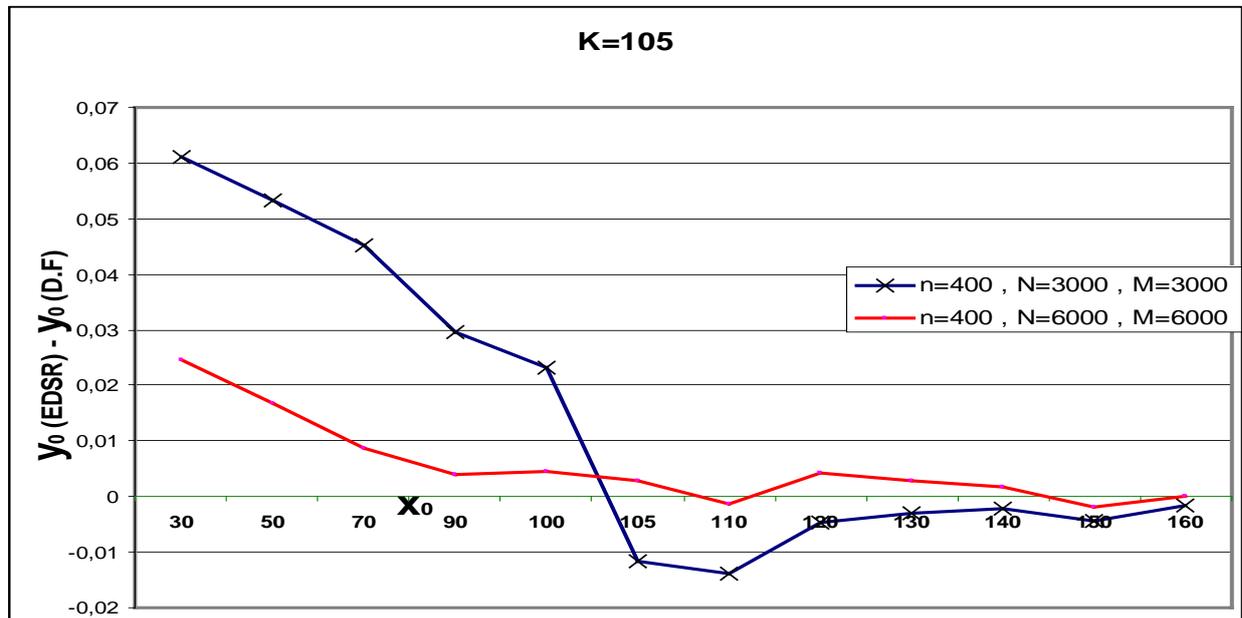


Fig.41

x_0	Méthode EDSR $n=400, K=50, (t \leq 1s)$		Méthode D.F	
	y_0	Temps de sortie τ	y_0	
			$N=2000, M=2000, K=50 (t \leq 1s)$	$N=6000, M=6000, K=50 (t = 20s)$
20	30	0.0010417	30.0183	29,9836
30	20	0.0010417	20.0014	20,0014
40	10.3492	5/12	10.3353	10,3357
50	4.2864	0.35521	4.2701	4,2849
60	1.5227	5/12	1.5141	1,5213
70	0.48557	5/12	0.4826	0,4854
80	0,14481	5/12	0, 1440	0,1449
90	0,041202	5/12	0,0414	0,0417
100	0.011588	5/12	0.0117	0,0118
110	0.0032344	5/12	0.0033	0.0033
120	0.00090584	5/12	0.00093451	0.00093863
130	0.00025662	5/12	0.00026789	0.00026862
140	0.000072887	5/12	0.000078021	0.000078038
150	0.000021119	5/12	0.000023131	0.000023072

Trajectoires de la solution approchée de y_0 obtenues par application de la méthode des différences finies et la méthode des EDSR avec un strike $K=50$ et suivant quelques valeurs de X_0 .

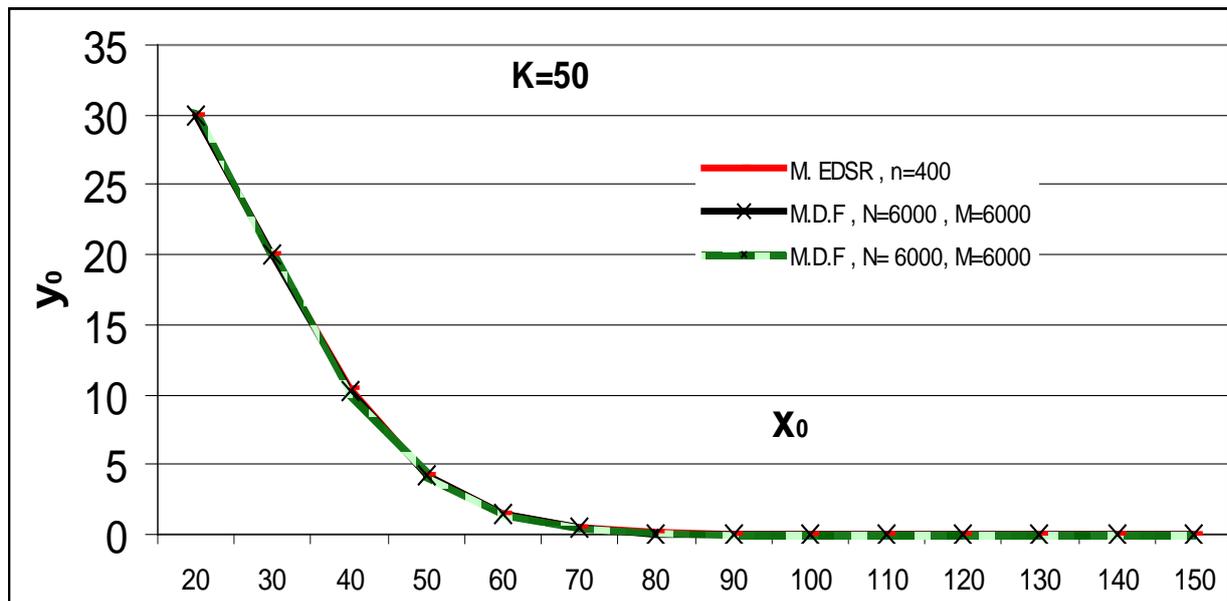


Fig42

Trajectoires des écarts entre les valeurs de la solution approchée de y_0 calculée par la méthode des EDSR et les valeurs de cette solution calculées par la méthode des différences finies avec un strike $K=50$ et suivant quelques valeurs de X_0

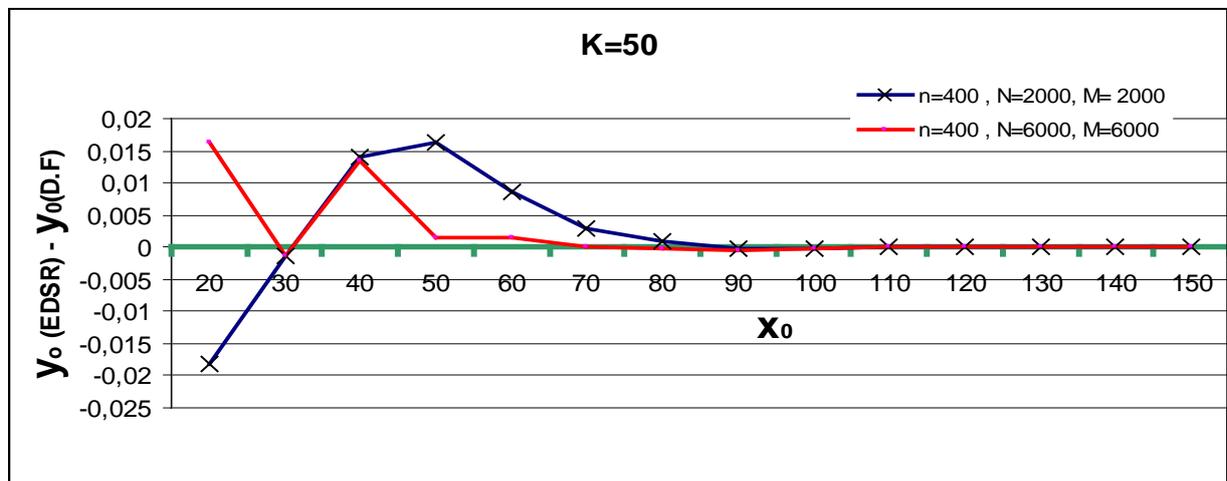


Fig.43

Dans le cas de l'imperfection de marché, l'edsr reflichie associée est

$$-dy_t = -[ry_t + (\mu - r)z_t]dt + (R - r)(y_t - z_t)^- dt - dA_t - \sigma z_t dW_t$$

$$\text{Avec } y_T = (k - x_T)^+$$

$$\text{où } dx_t = \mu.x_t dt + \sigma.x_t dW_t, \quad x(0) = x_0, \quad S_t = (K - x_t)^+ \text{ et } Y_t \geq S_t, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Exemple

On prend

μ	r	R	x_0	K	σ	T	N
0.05	0.01	0.06	100	95	0.2	0.25	400

Evaluons y_0, z_0 et τ en utilisant un programme sur matlab basé sur le schéma explicite pour les edsr réfléchies (chapitre 3) :

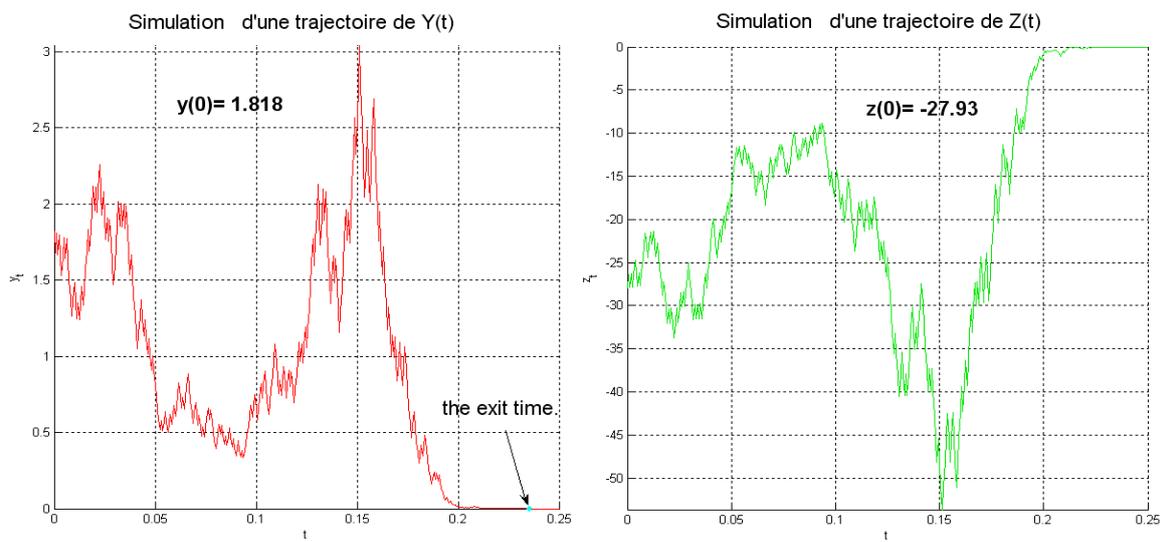


Fig.44

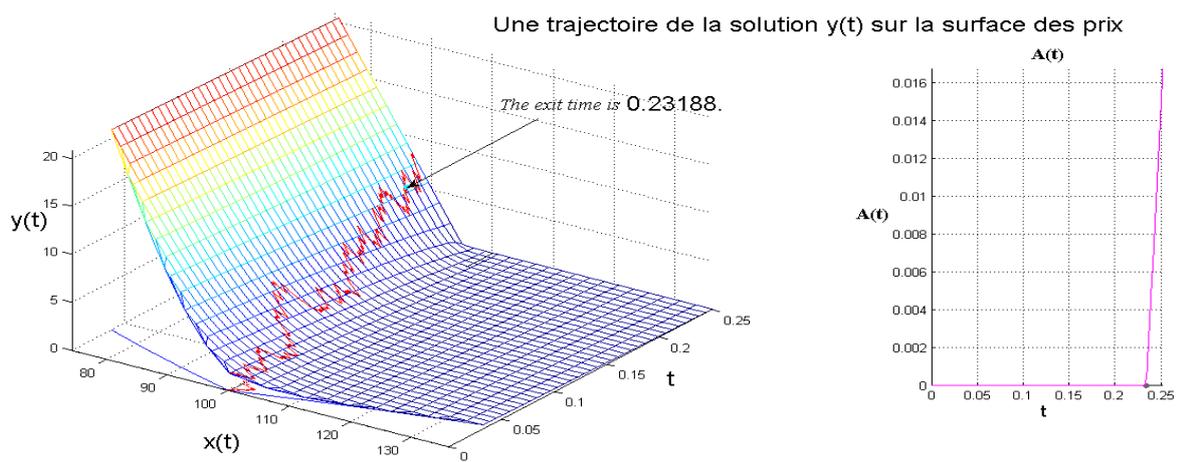


Fig.45

Conclusion

Dans ce modeste travail, nous avons essayé d'exposer quelques schémas concernant la résolution numérique d'équations différentielles stochastiques rétrogrades.

Nous sommes intéressé au début aux EDSR et aux EDSR réfléchies dans le cas non markovien de genre où le driver dépend de y et z . Dans ce cas j'ai choisi de décrire une méthode de discrétisation basée sur le remplacement de mouvement brownien par une simple marche aléatoire ce qui a aboutit à deux schémas l'un est implicite et l'autre explicite après l'étude de convergence de ces deux schémas on a pu donner quelques exemples de simulations de la solution.

Ensuite on a fait un petit aperçu sur quelques travaux faits sur les EDSR markoviennes où on a cité quelques exemples d'études faites sur l'approche de solutions de ce type d'EDS.

Dans la partie pratique, on trouve quelques exemples d'application des EDSR (en utilisant les schémas étudiés) dans le domaine des finances, plus précisément dans l'évaluation des options européennes et américaines dans des cas simples avec comparaison aux valeurs trouvées avec d'autres méthodes , plus précisément, la méthode de Monte Carlo et la méthode des différences finies où on a constaté la cohérence des valeurs trouvées par ces méthodes avec celles trouvées par la méthode des edsr. .

Annexe

Résolution des équations aux dérivées partielles par la méthode des différences finies.

Il existe plusieurs méthodes de résolution numérique des équations aux dérivées partielles, à titre d'exemples on peut citer les différences finies, les volumes finis et les éléments finis.

Contrairement aux éléments finis et les volumes finis qui utilisent une formulation sous forme d'intégrale des équations, la méthode des différences finies repose sur la discrétisation des dérivées partielles et sur l'étude de la stabilité du schéma de résolution obtenu qui permet de savoir s'il y a convergence de la solution numérique vers la solution exacte .

Pour expliquer la démarche des différences finies, prenons un exemple simple, l'équation de Black –Scholes, que l'on cherche à résoudre numériquement :

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x_t^2} x_t^2 \sigma^2 + r \frac{\partial y}{\partial x_t} x_t - ry = 0 \text{ avec } y_T(x_t) = (x_T - k)^+ .(1)$$

Dans le cas d'une option d'achat sur le prix x_t d'un titre avec un prix d'exercice k à la date de maturité T . l'équation est dite d'ordre 2 il est également dite de dimension une de fait qu'il

y'a une seule variable espace qui est x_t .les termes $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial x_t}$ sont appelés termes de

convection tandis que

$\frac{\partial^2 y}{\partial x_t^2}$ est dénommé élément de diffusion.

La première étape, dans cette méthode, consiste à définir une grille finie de points appelée maillage qui constitue le domaine de résolution de l'équation .Chacun des points de cette grille représente le prix $y_t(x_t)$ de l'option .Le but de la méthode des différences finies est de chercher à calculer l'ensemble des points $y_t(x_t)$ de la grille, suivant les valeurs de t , x_t .

On commence par la discrétisation des dérivées partielles en temps ensuite en espace par l'utilisation de la formule de Taylor, on réorganise les termes de façon à faire apparaître un schéma de résolution :

Considérons les développements suivants ,de Taylor, autour de x de la fonction f :

$$f(x + h) = f(x) + h f'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + \frac{1}{6}h^3 f'''(x) + \dots \dots \quad (2)$$

et $f(x - h) = f(x) - h f'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) - \frac{1}{6}h^3 f'''(x) + \dots \dots \quad (3)$

de (1) nous aurons l'approximation suivante (d'ordre 1) :

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - h)}{h} - \frac{1}{h}[\frac{1}{2}h^2 f''(x) + \frac{1}{6}h^3 f'''(x) + \dots] = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + O(h) \quad (4)$$

L'approximation de $f'(x)$ est appelée différence finie décentrée en aval ou différence décentrée à droite (forward différence)

De l'équation (2) on aura l'opérateur à temps discret suivant :

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - h)}{h} + \frac{1}{h}[\frac{1}{2}h^2 f''(x) + \frac{1}{6}h^3 f'''(x) + \dots] = \frac{f(x) - f(x - h)}{h} + O(h) \quad (5)$$

L'approximation dans ce cas est appelée différence finie décentrée en amont ou différence décentrée à gauche (backward différence)

En soustrayant (4) à (3) nous aurons une autre approximation de $f'(x)$ appelée différence finie centrée (central différence).

$$f(x + h) - f(x - h) = 2h f'(x) + \frac{1}{3}h^3 f'''(x) + \dots \dots \dots (6)$$

Ce qui implique que

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - \frac{1}{2h}[\frac{1}{3}h^3 f'''(x) + \dots] = \frac{f(x) - f(x - h)}{2h} + O(h^2) \quad (7)$$

En additionnant (3) à (4) nous aurons une autre approximation de $f''(x)$ appelée aussi différence finie centrée (central différence) :

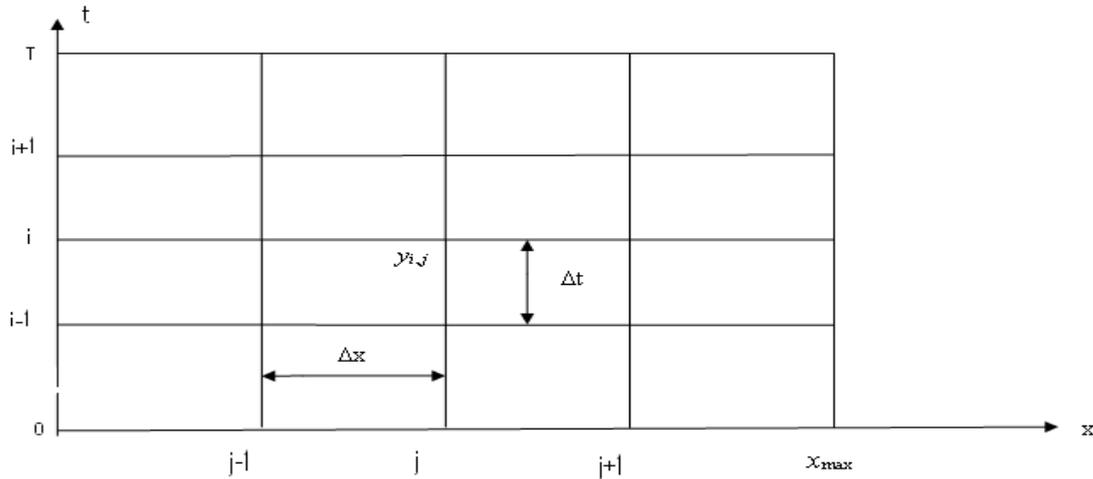
$$f(x + h) - f(x - h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + O(h^4) \quad (8)$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{f(x + h) + f(x - h) - 2f(x)}{h^2} + O(h^2) \quad (9)$$

Formons maintenant la grille de points à pas constant formés des variables x et t de l'équation de Black –Scholes en précisant les valeurs de x_{\max} , N ainsi que la date de maturité T et M .

N, M représentent respectivement le nombre de points choisis pour la variable t et la variable x . la variable x_{\max} joue le rôle de $+\infty$ car le domaine de résolution dans ce cas est borné. elle correspond à une valeur maximale que ne peut pas atteindre la variable x . À chacun des nœuds de cette grille coïncide le prix de l'option défini par $y_{i,j} = y(i\Delta t, j\Delta x)$ où $i = 0,1,\dots,N$, $j = 0,1,\dots,M$ avec $N\Delta t=T$, $M\Delta x=x_{\max}$.

La figure suivante représente la grille finie de points de la méthode des différences finies :



Discrétisons les dérivées partielles de l'équation (1) en utilisant les approximations trouvées plus haut et la notation $y_{i,j}$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{\Delta t} \quad (10) \quad \text{pour les différences finies en aval,}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{y_{i,j} - y_{i-1,j}}{\Delta t} \quad \text{pour les différences finies en amont,}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2\Delta t} \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1} - 2y_{i,j}}{(\Delta x)^2} \quad \text{pour les différences finies centrées}$$

On remplace ensuite ces formules dans l'équation (1) et on regroupe les termes de manière d'avoir un schéma de résolution.

Il existe plusieurs schémas de résolution, les plus connus sont le schéma implicite, explicite et le schéma de Crank –Nicolson.

Le schéma explicite fait intervenir la différence finie en aval (si on résout l'équation aux dérivées partielles en avançant dans le temps) ou en amont (si on résout l'équation en rétrogradant dans le temps) pour la dérivée partielle en fonction du temps t et la différence finie centrée pour la dérivée partielle en fonction de la variable x .

On aura le schéma implicite par le remplacement de la dérivée partielle en fonction de t par la différence finie en amont (si on résout l'équation aux dérivées partielles en avançant dans le temps) ou en aval (si on résout l'équation en rétrogradant dans le temps) et de la dérivée partielle en fonction de x par la différence finie centrée.

Le schéma de Crank-Nicolson (que nous avons appliqué dans notre travail) est obtenu en combinant les deux schémas, implicite et explicite.

L'étude de ces schémas repose sur trois notions importantes :

A- Convergence du schéma : c'est la convergence de la solution obtenue en temps discret vers la solution exacte en temps continu lorsque les pas de temps et d'espace tendent vers zéro ($\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$).

B -Consistance du schéma : le schéma est dit consistant avec l'équation (1) si on a convergence de l'approximation du problème continu vers le problème continu lorsque les pas de temps et de l'espace tendent vers zéro ($\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$).

C- Stabilité du schéma : la stabilité signifie que les petites erreurs dans la résolution en temps discret ne vont pas en s'amplifiant à chacun des pas suivant de temps.

Ces trois notions dépendent étroitement de choix du maillage.

On peut consulter pour le sujet des différences finies, [25], [14], [31].

Références

- [1] **Achdou Y.** Méthodes Numériques Pour les équations aux Dérivées Partielles en Finance - 16 mars 2007 p : 57-62

- [2] **Bachelier L.** Théorie de la spéculation. Annales de l'Ecole Normale Supérieure - France- 17, 1900, pp. 21-86.

- [3] **Bally V.** Approximation scheme for solutions of BSDE. In Backward stochastic differential equations (Paris, 1995–1996), volume 364 of Pitman Res. Notes Math. Ser., pages 177–191. Longman, Harlow, 1997.

- [4] **Bergman Y.Z.** Option Pricing with differential interest rates .Rev.of Financial studies ,

- [5] **Bernard. P.** Modélisation stochastique en Sciences Fondamentales , Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand. P.12-17

- [6] **Billingsley P.** Convergence of Probability Measures, Second Edition. Wiley and Sons, New York, 1999.

- [7] **Bruno B.** Méthodes de Monte Carlo en Finance , Notes de cours , Université Paris VI, LPMA, et CREST 2007

- [8] **Bruno B.** Finance Mathématique et Probabilités Numériques, synthèse présenté pour obtenir l'habilitation à diriger des recherches.Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires Université Pierre et Marie Curie 75252 Paris Cedex 05.

- [9] **Bruno B. and Touzi. N.** Discrete time approximation and Monte-Carlo simulation of backward stochastic differential equations. Stochastic Processes and their Applications 111-175{206}, 2002 et 2004.

- [10] **Briand P.** ,Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades -Mars 2001-

- [11] **Briand P , Delyon D. et Mémin. J.** (2001). Donsker-type theorem for BSDE's. *Electronic Communications in Probability*, 6, 1-14.
- [12] **Brennan M . Schwartz E.** “The Valuation of American Put Options”, *The Journal of Finance*, Vol. 32, No. 2, Mai 1977, p.449.
- [13] **BISMUT J.** Théorie probabiliste du contrôle des diffusions. *Mem. Amer.* 1973.
- [14] **Borici, A. and Luethi H.** Pricing american put options by linear scaling algorithms”. In “Computational Methods in Decision-Making, Economics and Finance”, E.J. Kontoghiorghes, B. Rustem and S. Siokos,eds., Kluwer Academic Publishers, December 2001.
- [15] **Chafai D.** Petit manuel à l’usage des agrégatifs préparant l’oral de modélisation stochastique. Département de Mathématiques Laboratoire de Statistique et Probabilités Université Paul Sabatier -France.
- [16] **Céline L.** EDSR: analyse de discrétisation et résolution par méthodes de MonteCarlo adaptatives ; Perturbation de domaines pour les options américaines -Thèse de doctorat présentée en 2007.
- [17] **Céline L.** . Error expansion for the discrétisation of Backward Stochastic differential Equations - Mars 2007-.
- [18] **Christophe Chorro** Cours de calcul stochastique Master M2 IRFA -Septembre 2006-
- [19] **Christian Bender and Robert Denk** . Forward Scheme for Backward SDE *Konstanzer Schriften in Mathematik und Informatik* Nr209, August 2005 ISSN1430{3558 Université Konstanz .Germany.
- [20] **Christian B. and Robert D.** .Forward Simulation of Financial Problems via BSDEs - *Konstanzer Schriften in Mathematik und Informatik* 2005 Université Konstanz.
- [21] **Coquet F. , Mackevicius V. et Mémin J.** (1998). Stability in D of martingales and backward equations under discretization of filtration . *Stochastic Processes and their Applications*, 75, 235-248.
- [22] **Chevance D.** Résolution Numérique des Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades. Thèse de doctorat présentée en 1997.à l’université de provance.
- [23] **Darling R. and Pardoux E.** Backwards SDE with random terminal time and applications to semilinear elliptic PDE, *Ann. Probab.* **25** (1997), no. 3, 1135–1159.

- [24] **Douglas J. , Ma .J et Protter P.** (1996). Numerical Methods for Forward-Backward Stochastic Differential Equations. *Annals of Applied Probability*, 6, 940-968.
- [25] **Daniel J.** Finite Difference Methods in Financial Engineering A Partial Differential Equation Approach. P: 91,153,195,273,315, Copyright C_2006 Daniel J.Duffy Published by John Wiley & Sons Ltd, The Atrium, 2007 Southern Gate, Chichester, West Sussex PO19 8SQ, England
- [26] **El-Karoui N. , Pardoux E. and Quenez. C.** Reflected backward SDEs and American options, in. *Numerical Methods in Finance . eds., Cambridge U. P., pp.215-231 (1997)*
- [27] **El Karoui N. , Peng S. and Quenez.** Backward Stochastic Differential Equations in Finance. *Mathematical Finance*, 7(1):1- 71, 1997
- [28] **El-Karoui N.** Le marché du risque financier Lannion, Mai 2007
- [29] **HOWAR R.** the Growall inequality department of mathematics p:1-4 UNIVERSITY OF SOUTH CAROLINA COLUMBIA, S.C. 29208, USA.
- [30] **Desmond J. Higham** IMATLAB Programming Exercises for An Introduction to the Numerical Simulation of Stochastic differential Equations and Its Applications in Finance -Department of Mathematics University of Strathcly de lasgow, Scotland,U.K .
- [31] **Gilli .M.** Numerical Methods in Finance Department of Econometrics University of Geneva and Swiss Finance Institute -Spring 2008-
- [32] **Gobet . E , Lemmor J.P. et Warin X.** (2005). Rate of convergence of empirical regression method for solving generalized BSDE.
- [33] **Gobet. E et Celine I.** Error expansion for he discrétisation of Backward Stochastic differential Equations - February 2006-.
- [34] **GUIKHMANN et SKOROKHOD.A** Introduction à la théorie des processus aléatoires Editions MIR. Moscou . 1980.
- [35] **Hassan Elssaky** ackward Stochastic Differential Equations existence and uniqueness Results (2006).
- [36] **MILSTEIN G. et TRETYAKOV M.** Numerical algorithm for forward Backward stochastic differential equations
- [37] **Jacod J. and Shiryaev A.N.** Limit Theorems for Stochastic Processes. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1987

- [38] **Jacod J. and Protter P.** A remark on the weak convergence of processes in the Skorohod topology. *J. Theoret. Probab.*, 6(3) :463–472, 1993.
- [39] **Jaillet P., Lamberton D. and Lapeyre, B.** “Variation Inequalities and the Pricing of American Options”, *Acta Applicandae Mathematicae* 21 (1990), 263–289.
- [40] **Jean Blanc .M** Cours de Calcul stochastique DESS IM IVRY – Septembre 2002-
- [41] **MA JIN , PHILIP PROTTER – JAIME SAN MARTIN AND SOLEDAD TORRES** NUMERICAL METHOD FOR BACKWARD STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS *The Annals of Applied Probability* (2002), Vol. 12, No. 1, 302–316.
- [42] **Jaime SanMartin and Soledad Torres** Numerical methods for BSDE Universidad de Chile; Casilla 170-3 Correo 3 Santiago; Chile; September 27, 2007
- [43] **Mémin . Shi-ge Peng et Ming-yu Xu-** Convergence of Solutions of Discrete Reflected Backward SDE’s and Simulations -2001-
- [44] **Kloeden P., Platen E. et Schurz H.,** Numerical solution of SDE, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [45] **KOROLIUK .V** Aide mémoire de théorie des probabilités et des statistiques mathématiques Editions de Moscou .
- [46] **Ma J. , Protter P. et Yong J.** (1994). Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly - a four step scheme. *Probability Theory and Related Fields*, 98, 339-35
- [47] **Lamberton D. and Lapeyre B.** Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance. ellipses, 1997.
- [48] **Lemmor J.P.** Approximation par projection et simulation de Monte Carlo des équations différentielles stochastiques rétrogrades, thèse de doctorat soutenue en juin 2005. Ecole polytechnique - France-
- [49] **Peng S.** BSDE and related g-expectations, *Backward Stochastic Differential Equations*,
- [50] **Peng S.** Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equations, *Stochastics* *Stochastics* Rep. 37 (1991), no. 1-2, 61–74.
- [51] **PENG S. and Mingyu XU** The Numerical Algorithms for BSDEs Convergence and Simulation . School of Mathematics and System

Science, Shandong University, 250100, Jinan, China Department of Financial Mathematics and Control science, School of Mathematical Fudan University, Shanghai, 200433, China. 29 november 2006 - 11 march 2008.

- [52] **Peng S. and Pardoux E.** (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. *Systems & Control Letters*, 14 (1), p. 55-61.
- [53] **RIVIERE O.** Equations différentielles stochastiques progressives rétrogrades couplées : Equations aux dérivées partielles et discrétisation - Thèse de doctorat présentée En 2005. à l'Université René Descartes – Paris 5 - France.
- [54] **Rozovskii B. L** Stochastic Differential Equations: Theory and applications Interdisciplinary Mathematical Sciences — Vol. 2 . 416 pages Copyright © 2007 by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [55] **Skorokhod A. V** Limit theorems for stochastic processes. *Teor. Veroyatnosti Primenen.*, 1 :289–319, 1956.
- [56] **Shorack G.R.** Probability for Statisticians 600 pages 2000 Springer –Verlag New York, Inc 2000. p:246
- [57] **Willmott P. Dewynne. J and Howison. J.** Option pricing : mathematical models and computations. Oxford financial press, 1993.
- [58] **Xu Mingyu** User's guide of g-expectation and reflected backward stochastic differential equation Mathematics Department of Shandong University .September 3, 2003
- [59] **Xu Mingyu** Numerical Algorithms and Simulations for Reflected Backward Stochastic Differential Equations with two Continuous Barriers Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080, China. Department of Financial Mathematics and Control science, School of Mathematical science, Fudan University, Shanghai, 200433, China. March 28, 2008.
- [60] **Yufeng Shi, Weiqiang Yang, Jing Yuan** Numerical Computation for Backward Doubly SDEs and SPDEs Yufeng Shi, Weiqiang Yang and Jing Yuan School of Mathematics, Shandong University Jinan 250100, China June 5, 2008
- [61] **ZHANG J.** Some fine properties of Backward Stochastic Differential Equations. Ph.D. Dissertation, Purdue University, 2001.

- [62] **ZHANG J.** A NUMERICAL SCHEME FOR BSDEs The Annals of Applied Probability Vol. 14, No. 1, 459–488 Institute of Mathematical Statistics University of Southern California, Los Angeles -2004-
- [63] **Øksendal B.** Stochastic Differential Equations An Introduction with Applications Fifth Edition, Corrected Printing -352 Pages. Springer-Verlag Heidelberg New York – MAY 2000.