Analyse dynamique d'un système différentiel d'ordre fractionnaire

Présentée par : Chennoufi Djelloul

Encadré par : Dr. ADJABI Yassine

Soutenu le : 00/ 09 / 2020

Plan de l'exposé

Mon travail est composé d'une **introduction générale** et quatre chapitres, sont les suivants :

1- Généralités sur les systèmes différentiels d'ordre fractionnaire

2- Existence et unicité d'un système fractionnaire

3- Stabilité des systèmes dynamiques fractionnaires

4- Bifurcation de Hopf

Introduction

Le calcul fractionnaire joue un rôle important dans la modélisation de nombreux problèmes physiques, technologiques et biologiques.
Dans ce mémoire, nous nous intéresserons aux systèmes avec dérivée fractionnaire et leurs applications.
Le but de ce travail est, d'une part essayé de développer, et de comprendre les *deux articles [2, 3]. D'autre part, une tentative de faire apparaître une approche faisant appel à la dérivée conformable [1].*

Chapitre I
Généralités sur les systèmes différentiels d'ordre fractionnaire

La fonction Gamma d'Eleur est une fonction de base du calcul fractionnaire. Cette fonction généralise le factoriel $n!$, et permet à n de prendre des valeurs réelles ou même complexes.

Definition

La fonction Gamma d'Euler est définie sur le demi-plan complexes $\rho = \{z \in \mathbb{C}, \mathbf{R}e(z) > 0\}$ par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt,$$

qui converge sur le demi-plans complexes $\mathbf{R}e(z) > 0$.

En intégrant par parties, nous montrons que :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \mathbf{R}e(z) > 0.$$

Elle fait partie des fonctions de base du calcul fractionnaire. Cette fonction joue un rôle important quand elle est combinée avec la fonction Gamma.

Definition

la fonction Bêta est définie par :

$$B(z,w) = \int_0^{\infty} t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,dt, \quad \mathbf{Re}(z) > 0, \mathbf{Re}(w) > 0.$$

Lien entre la fonction Gamma et la fonction Bêta

Les fonctions Bêta et Gamma sont liées par la relation :

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

La fonction Mittag-Leffler joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Definition

Pour $z \in \mathbb{C}$, tel que $\mathbf{R}e(z) > 0$. La fonction Mittag-Leffler est définie comme suit :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

En particulier, si $\alpha = 1$ nous trouvons la fonction exponentielle

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

Definition

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville $I_{a+}^{\alpha}f$ d'ordre α, ($\alpha > 0$) est définie par :

$$(I_{a+}^{\alpha}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \qquad (t > a, \ (\alpha > 0),$$

où $\Gamma(.)$ est la fonction Gamma définie précédente. Cette formule est appelée intégrale fractionnaire d'ordre α à gauche.

Definition

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville $D^{\alpha}_{a+}f$ d'ordre α, $(\alpha \geqslant 0)$, est définie par :

$$(D^{\alpha}_{a+}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_{a}^{t}\frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}ds, \ (n = [\alpha]+1, \ t > a),$$

Pour $0 < \alpha < 1$, la formule précédente devient :

$$(D^{\alpha}_{a+}f)(t) = \frac{1}{\Gamma\,(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_{a}^{t}(t-s)^{-\alpha}f(s)ds, \ (t > a).$$

Definition

La dérivée fractionnaire de Caputo ${}^{C}D^{\alpha}_{a+}f(t)$ d'ordre $\alpha \geq 0$ sur lintérvalle $[a, b]$, est définie par l'intermediaire
du dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville :

$$({}^{C}D^{\alpha}_{a+}f)(t) = D^{\alpha}_{a+}[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{k}(a)}{k!}(t-a)^{k}], \tag{1}$$

où

$$n = Re(\alpha) + 1 \text{ pour } \alpha \notin \mathbb{N}, \; n = \alpha, \text{ pour } \alpha \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

En particulier, quand $0 < \alpha \leq 1$, la relation (1) prend la forme suivante :

$${}^{C}D^{\alpha}_{a+}f(t) = D^{\alpha}_{a+}[f(t) - f(a)].$$

Theorem

Soient $\alpha \geqslant 0$, et n donné par (2). Si $f(t) \in AC^n[a,b]$, la dérivée fractionnaire de Caputo existe presque partout sur $[a,b]$ est définie par :

$$({}^cD^{\alpha}_{a+}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds = (I^{n-\alpha}_{a+}D^n f)(t),$$

En particulier, quand $0 < \alpha < 1$ et $f(t) \in AC[a,b]$, on obtient :

$$({}^cD^{\alpha}_{a+}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f'(s)ds = (I^{1-\alpha}_{a+}D^1 f)(t).$$

Definition (Dérivée conformable)

Soit la fonction $f : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
La dérivée conformable de f d'ordre $0 < \alpha \leq 1$est définit par :

$$(T_\alpha f)(t) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}$$

pour tout $t > 0, 0 < \alpha < 1$ notant que si f est différentiable en t on a

$$(T_\alpha f)(t) = t^{1-\alpha} f'(t)$$

et si $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} f^{(\alpha)}(t)$ existe on a : $f^{(\alpha)}(0) = \lim\limits_{t \longrightarrow 0} f^{(\alpha)}(t)$, où
$f'(t) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon}$.
On dit alors que f est α- différentiable aux points $t \geq 0$ si les limites précédentes existe et finies.

Definition (Intégrale conformable)

Soit la fonction $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ et soit $\alpha \in]n, n+1]$ on a :

$$\mathbf{I}_\alpha(f)(t) = I_{n+1}\left(t^{\beta-1} f\right) = \frac{1}{n!}\int_0^t (t-x)^n \, x^{\beta-1} f(x) dx$$

Theorem

$T_\alpha I_\alpha(f)(t) = f(t)$ pour $t \geq 0$ où f est une fonction continue sur le domaine de I_α.

Definition

La fonction $F(s)$ de la variable complexe s définie par

$$F(s) = L\left\{f(t);\ s\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt,\ s \in \mathbb{C}$$

est appelée la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ où $t \in \mathbb{R}^+$.

La formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est donnée
par :

$$L\left\{(D_{0+}^{\alpha}f)(t)\ ;\ s\ \right\} = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{k}[(D_{0+}^{\alpha-k-1}f)(t)]_{t=0} \quad (n-1 \leqslant \alpha < n\ ).$$

La formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est donnée par :

$$L\{\ ({}^{c}D_{0+}^{\alpha}f)(t);s\} = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0), \qquad (n-1 < \alpha \leqslant n\ ).$$

On distingue plusieurs types de méthodes de résolution des équations différentielles d'ordre entier, et elles sont également utilisées pour résoudre des équations différentielles d'ordre fractionnaire, nous les mentionnons par exemple : méthodes analytiques, méthodes numériques et méthodes qualitatives.

Considérons un système continu de dimension finie décrit par une équation différentielle vectorielle non-linéaire du premier ordre

$$\frac{d}{dt}y(t) = f\,(t)$$

Definition

Un vecteur $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ est dit point ou état d'équilibre si

$$f(x_\varepsilon) = 0$$

Remarque

tout point d'équilibre peut être ramené 'a l'origine par un simple changement de variable $x \longrightarrow x - x_\varepsilon$.

La théorie de la bifurcation étudie la structure des solutions pour des équations non-linéaires définies dans des espaces de Banach et dépendant d'un paramètre.
Si $(E, \|.\|)$ un espace de Banach réel, $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R} \times E$ et $G : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ un opérateur tel que

$$G(\lambda_0, x_0) = 0, \tag{3}$$

on veut déterminer toutes les solutions de

$$G(\lambda, u) = 0 \tag{4}$$

pour petit λ dans un voisinage de (λ_0, x_0).
Considérons le cas où $G(\lambda, u) = u - T(\lambda, u)$ avec $T : I \times U \longrightarrow E$ un opérateur satisfaisant

$$T(\lambda, 0) = 0, \ \forall \lambda \in I =]\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta[$$

Le problème de bifurcation pour l'équation

$$T(\lambda, u) = 0 \tag{5}$$

consiste à trouver des solutions (λ, u) différentes de la solution triviale $(\lambda, 0)$.

Definition

Un point $(\lambda_0, 0) \in I \times U$ est un point de bifurcation de (5) ssi tout voisinage de $(\lambda_0, 0)$ contient une solution non triviale de (4), c'est a dire, $(\lambda_0, 0) \in S$ où

$$S = \{(\lambda, u) \in I \times U : u = T(\lambda, u) \text{ et } u \neq 0\}.$$

Nous dirons que λ_0 est un point de bifurcation.

Definition

oit $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = [\alpha] + 1$ et $f \ : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, alors

$$^{C}D_0^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)), \tag{6}$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Caputo et dans ce cas on utilise comme conditions initiales

$$y^{(k)}(0) \equiv y_0^{(k)} = b_k, \qquad k = 0, 1, ..., n-1. \tag{7}$$

L'utilisation de conditions initiales de différents types pour les équations différentielles fractionnaires (6) nous assure l'unicité des solutions de l'équation différentielle fractionnaire correspondante.

Example

Soit l'équation différentielle fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

$$\begin{cases} aD_0^\alpha y(t) = f(t),\ (n-1 \leqslant \alpha < n) \\ \left[D^{\alpha-k-1} y(t)\right]_{t=0} = 0,\ (k = 0, 1, \cdots, n-1), \end{cases} \tag{8}$$

L'utilisation de la transformée de Laplace et la fonction Green conduit à la solution suivante :

$$y(t) = \frac{1}{a\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds = \frac{1}{a} I_0^\alpha f(t).$$

Example

Si nous prenons, par exemple

$$a = 1, f(t) = 1 \text{ et } \alpha = \frac{1}{2}$$

l'équation est devenue

$$D_0^{\frac{1}{2}} y(t) = 1,$$

avec

$$\left[D^{\alpha-1} y(t)\right]_{t=0} = 0.$$

La solution est donnée par

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t (t-s)^{\frac{-1}{2}} ds = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}.$$

Un Système dynamique décrit par une fonction mathématique présente deux types de variables : dynamiques et statiques, les variables dynamiques sont les quantités fondamentales qui changent avec le temps, les variables statiques, encore appelés paramètres du système, sont fixes.
Dans le cas où la composante "temps" est continue le système dynamique est présenté par un système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{cases} \dot{X} = F\left(X, t, \lambda\right), X \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^p \\ X\left(0\right) = \bar{X} \end{cases}$$

Un système linéaire d'ordre fractionnaire est par définition un système décrit, dans le cas monovariant, par des équations différentielles faisant intervenir des opérateurs de dérivation d'ordre fractionnaire, soit dans le cas général

$$D^{\alpha_1}y(t) + D^{\alpha_2}y(t) + D^{\alpha_i}y(t) + ... + y(t) = f\,(t)$$

les ordres de dérivation $\alpha_1,\ \alpha_2, ..., \alpha_i, ...,$ sont des nombres entiers, non entiers, réels ou complexes.

Definition

Le système dynamique d'ordre fractionnaire est un système qui est décrit par des équations différentielles fractionnaires.

Example

Considérons le système linéaire d'ordre α, $(0 < \alpha < 1)$ suivant :

$$^{C}D_{0+}^{\alpha} y(t) = Ay(t), \tag{9}$$

où $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, et $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

La solution exacte $y(t)$ de (9) est : $y(t) = E_{\alpha}(At^{\alpha})y_0$, $y(0) = y_0$.
Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -3$ ce qui donne la fonction $y(t)$:

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t) = E_{\alpha}(t^{\alpha}) - \dfrac{1 + t^{1-\alpha}}{2}[E_{\alpha}(t^{\alpha}) - E_{\alpha} - (-3t^{\alpha})] \\ y_2(t) = -t^{1-\alpha}e^{t} + \dfrac{t^{1-\alpha-1}}{2}[E_{\alpha}(t^{\alpha}) - E_{\alpha} - (-3t^{\alpha})]. \end{cases}.$$

Chapitre II
Stabilité et solutions numérique des modèles prédateurs–proies d'ordre fractionnaire

Definition

Système adaptatif complexe se compose d'agents adaptatifs inhomogènes et en interaction. Une propriété émergente d'un système adaptatif complexe
est une propriété du système dans son ensemble n'existent pas au niveau des éléments individuels (agents). Par conséquent, pour comprendre un système complexe, il faut étudier le système dans son ensemble et non de le décomposer en ses constituants.

Example

Considérons l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{df(t)}{dt} = -\lambda^2 \int_0^t k(t-s)f(s)\,ds.$$

Si le système n'a pas de mémoire

$$k(t-s) = \delta(t-s),$$

où δ est la fonction de Dirac.
Si le système a une mémoire idéale

$$k(t-s) = \begin{cases} 1 & si \quad t > s \\ 0 & si \quad s > t \end{cases}$$

Considérons le système de prédateurs-proies Lotka-Volterra à ordre fractionnaire

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}x_1(t) = x_1(t)(r - ax_1(t) - bx_2(t)), \\ {}^{c}D^{\alpha}x_2(t) = x_2(t)(-d + cx_1(t)), \quad t \in (0, T], \end{cases} \tag{10}$$

avec les valeurs initiales

$$x_1(t)|_{t=0} = x_1(0) \quad \text{et} \quad x_2\,(t)\,|_{t=0} = x_2(0), \tag{11}$$

où $0 < \alpha \leqslant 1, x_1 \leqslant 0, x_2 \leqslant 0$ sont respectivement des densités de proies, et de prédateurs, et toutes les constantes r, a, c et d sont positifs.

Lemma

Le problème initial de valeur (10)*et* (11) *peut être écrit sous la forme*

$$^{c}D^{\alpha}X(t) = A_1X(t) - x_1(t)A_2X(t),\ t \in (0,T] \tag{12}$$

où $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -c \end{bmatrix}$,
$X_0 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$.
Suppose que $C^*[0,T]$ *soit la classe du vecteur continu de colonne* $X(t)$ *dont les composants* $x_1, x_2 \in \mathcal{C}(0,T]$ *classe de fonctions continues sur l'intervalle* $[0,T]$.

La norme de $X \in \mathcal{C}^*[0, T]$ est donné par

$$\|X\| = \sum_{i=1}^{2} \sup |x_i(t)|.$$

Par une solution du problème (10) de la valeur initiale (11), nous entendons un vecteur de colonne $X \in \mathcal{C}^*[0, T]$.
Ce vecteur satisfait le système (12).
Nous avons maintenant le théorème d'existence suivant.

Theorem

Le problème initial de valeur (12) *a une solution unique.*

Remarque

Il n'existe pas un théorème d'existence et d'unicite globale. Nous supposerons existence et unicite locale pour X*, c'est-à-dire dans un voisinage d'un* $x_0 \in X$ *et d'un temps* t_0*.*

Points d'équilibres : Considérons le système

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x_1(t) = f(_1(x_1,x_2) \\ {}^cD^\alpha x_2(t) = f_2(x_1,x_2) \end{cases} ,\alpha \in (0,1]$$

avec les valeurs initiales

$$x_1(0) = x_{01} \quad \text{et} \quad x_2(0) = x_{02}.$$

Pour évaluer les points d'équilibre, il faut

$${}^cD^\alpha x_i(t) = 0 \Rightarrow f_i(x_1^{eq}, x_2^{eq}) = 0,\ i = 1,2,$$

à partir de laquelle nous pouvons obtenir les points d'équilibre $\left(x_1^{eq}, x_2^{eq}\right)$.

Stabilité asymptotique : Pour évaluer la stabilité asymptotique, supposons

$$x_i(t) = x_i^{eq} + \varepsilon_1(t), \quad i = 1,2,$$

ensuite

$${}^cD^\alpha(x_i^{eq} + \varepsilon_i) = f_i(x_1^{eq} + \varepsilon_1, x_2^{eq} + \varepsilon_2), \quad i = 1,2,$$

ce qui implique que

$${}^cD^\alpha\varepsilon_i(t) = f_i(x_1^{eq} + \varepsilon_1, x_2^{eq} + \varepsilon_2), \quad i = 1,2,$$

Après avoir effectué les calculs, les résultats étaient les suivants : le point d'équilibre (x_1^{eq}, x_2^{eq}) est localement asymptotiquement stable si les deux valeurs propres de la matrice A sont négatifs : $|\arg(\lambda_1)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ et $|\arg(\lambda)_1| > \frac{\alpha\pi}{2}$.

Considérons le système prédateur-proie Lotka-Volterra d'ordre fractionnaire

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x_1(t) = x_1(t)(r - ax_1(t) - bx_2(t)) \\ {}^cD^\alpha x_2(t) = x_2(t)(-d + cx_1(t)), \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{13}$$

Points d'équilibres : Pour évaluer les points d'équilibre, il faut

$${}^cD^\alpha x_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{14}$$

Ensuite

$$(x_1^{eq}, x_2^{eq}) = (0, 0), \ (\frac{r}{a}, 0), \ \left(\frac{d}{c}, \frac{cr - ad}{cb}\right), \tag{15}$$

sont les points d'équilibre.

Stabilité asymptotique :
i) Pour $(x_1^{eq}, x_2^{eq}) = (0, 0)$ nous constatons que

$$A = \begin{bmatrix} r & a \\ 0 & -d \end{bmatrix},$$

ses valeurs propres sont : $\lambda_1 = r > 0$, $\lambda_2 = -d < 0$
Par conséquent, le point d'équilibre $(x_1^{eq}, x_1^{eq}) = (0, 0)$ est instable.
ii) Pour $(x_1^{eq}, x_2^{eq}) = (\frac{r}{a}, 0)$, nous constatons que

$$A = \begin{bmatrix} -r & \frac{-br}{a} \\ 0 & \frac{cr}{a} - d \end{bmatrix},$$

ses valeurs propres sont : $\lambda_1 = -r < 0$, $\quad \lambda_2 = \frac{cr}{a} - d$, si $\quad cr < ad$.

Par conséquent, le point d'équilibre $(x_1^{eq}, x_2^{eq}) = (\frac{a}{r}, 0)$ est localement asymptotiquement stable si $cr < ad$.

-iii) Pour $(x_1^{eq}, x_2^{eq}) = (\frac{d}{c}, \frac{cr-ad}{cb})$, nous constatons que

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-ad}{c} & \frac{-bd}{c} \\ \frac{cr-ad}{b} & 0 \end{bmatrix},$$

ses valeurs propres sont : $\lambda_i = \frac{-ad \pm \sqrt{a^2d^2 - 4cd(cr-ad)}}{2c}$, $i = 1, 2$.
A une condition suffisante pour la stabilité asymptotique locale du point d'équilibre

$$(x_1^{eq}, x_2^{eq}) = (\frac{d}{c}, \frac{cr - ad}{cb})$$

et

$$|\arg(\lambda_1)| > \frac{\alpha\pi}{2}, \ |\arg(\lambda_2)| > \frac{\alpha\pi}{2}.$$

Dans le cas particulier $a = 0$, on sait que le point d'équilibre interne est un centre $\arg(\lambda_1) = \frac{\pi}{2}, \arg(\lambda_2) = \frac{-\pi}{2}$, pour le système d'ordre entier $(\alpha = 1)$.
Dans le cas fractionnaire $0 < \alpha < 1$ le point d'équilibre interne est localement asymptotiquement stable.

Dans les équations (13), lorsque nous prenons $r = 0, a = 0, c = b$, nous obtenons

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}x_1(t) = -bx_1x_2 \\ \\ {}^{c}D^{\alpha}x_2(t) = bx_1x_2 - dx_2 \end{cases} \tag{16}$$

où $0 < \alpha \leq 1,\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$ et toutes les constantes b, d sont positifs.
Points d'équilibres : Les points d'équilibres sont

$$(x_1^{eq}, x_1^{eq}) = (0,0), (\frac{d}{b}, 0)$$

Stabilité asymptotique :
i) Pour $(x_1^{eq}, x_2^{eq} = (0,0)$ nous constatons que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix},$$

ses valeurs propres sont

$$\lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 = -d \tag{17}$$

ii) Pour $(x_1^{eq}, x_2^{eq}) = (\frac{d}{b}, 0)$ nous constatons que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

ses valeurs propres sont

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 0 \tag{19}$$

Par conséquent, l'équilibre est un centre.

Une méthode numérique de prédiction-correction de type Adams a été introduite dans *[3]*. Dans ce mémoire,
nous présenterons des résultats obtenus basés sur cette méthode pour les solutions numériques d'équation intégrale
fractionnaire. La clé de la dérivation de la méthode est de remplacer le problème (10)- (11) par un
équation intégrale fractionnaire équivalente

$$X(t) = X_0 + I^{\alpha}(A_1X(t) - x_1(t)A_2X(t)).$$

Méthode et résultats numériques

L'existence et l'unicité de solutions de systèmes d'ordre fractionnaire ont été étudiées. Nous avons étudié les points d'équilibre, l'existence, l'unicité, la stabilité et la solution numérique du système prédateur-proie Lotka - Volterra et nous avons présenté des résultats des solutions numériques pour montrer que, bien que la solution interne pour le cas d'ordre entier n'est qu'un centre, elle est stable pour son homologue d'ordre fractionnaire.

Chapitre III
Bifurcation de Hopf des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire

Quelques résultats de persistance

Definition

La stabilité locale de systèmes dynamiques á temps continu d'ordre

Definition

fractionnaire jusqu á trois dimensions a été étudiée dans [**?**].

Il est facile de voir que

$$({}^{c}D^{\alpha}f)(t) = 0,\ \forall t > 0 \Leftrightarrow f'(t) = 0 \quad \forall t > 0.$$

Lemma

Si la solution d'équilibre d'un système dynamique d'ordre entier est globalement stable par la fonction de Lyapunov V, c'est-à-dire ,ie..

$(\mathbf{i})\ V(0) = 0,\qquad (\mathbf{ii})V'(t) > 0,\quad \forall t > 0,\qquad (\mathbf{iii})V'(0) = 0.$

Alors son homologue d'ordre fractionnaire a V comme fonction de

Lemma

Si la solution d'équilibre d'un système dynamique d'ordre fractionnaire est globalement stable par la fonction de Lyapunov V, c'est-à-dire ,ie..

$$(\mathbf{i})V(0)=0, \qquad (\mathbf{ii})\ \left({}^{c}D^{\alpha}V\right)(t)>0, \quad \forall t>0, \qquad (\mathbf{iii})V'(0)=0.$$

Definition

Un système dynamique est persistant si
$x(0)>0 \Rightarrow \inf\{x(t): t>0\}>0$.

Commençons par l'équation non autonome suivante :

$$\frac{du(t)}{dt}=u(t)[b(t)-a(t)u(t)], \quad u(t)>0,\ \forall t\geq 0. \tag{20}$$

Supposons que $a(t)$, $b(t)$ sont des fonctions continues bornées pour tout $t\geq 0$, définir

Quelques résultats de persistance

Lemma

Si $a(t)$ *et* $b(t)$ *sont des fonctions continues bornées et si* $b_\star > a^\star > 0$*, alors le système suivant est persistant*

$$^cD^\alpha u(t) = u(t)[b(t) - a(t)u(t)], \quad 0 < \alpha < 1. \qquad (21)$$

Proposition

Si les fonctions $b_i(t), a_{ij}(t)$ *où* $i, j = 1, 2, \cdots, n$ *sont des fonctions continues bornées et si* $b_{\star i} > \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^\star > 0 \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n$
Alors le système suivant est persistant

$$^cD^\alpha u_i = u_i(t)\left[b_i(t) - u(t)\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\right], i = 1, 2, \cdots, n, \ 0 < \alpha < 1. \qquad (22)$$

La bifurcation de Hopf est étudiée dans des système d'ordre entier. Ici, nous montrons que ses conditions dans les
système d'ordre fractionnaire sont significativement différent de ceux dans leur ordre entier homologue.
Nous étudions le système

$$\left\{\begin{array}{l} D^{\alpha}x(t) = y(t), \\ D^{\alpha}y(t) = -x(t) + ay(t) - by^{3}(t), \end{array}\right. , \; 0 < a < 1. \tag{23}$$

Il est facile de voir que le point d'équilibre nul $x = y = 0$ est localement asymptotiquement stable si

$$\frac{\sqrt{4-a^2}}{a} > \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right).$$

Désormais, nous fixons $\alpha = \frac{2}{3}$ d'où l'équilibre la solution $(0, 0)$ est localement asymptotiquement stable si $0 < \alpha < 1$.

La méthode numérique utilisée El-Saka et al. est appelée méthode prédicteur-correcteur de type Adams.
La clé de la dérivation de la méthode est de remplacer le problème (23) par un équation intégrale équivalente.
Les solutions approximatives affichées sur la figure suivante :

Bifurcation de Hopf en système dynamique d'ordre fractionnaire

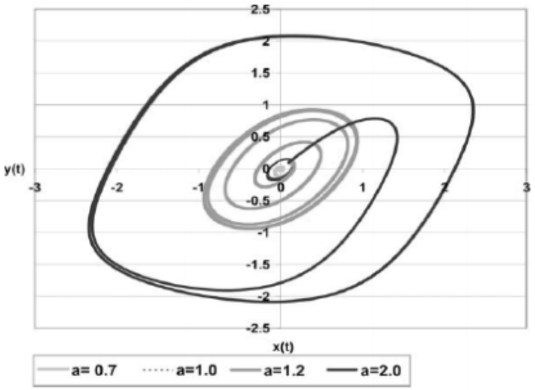

Fig 1

Bifurcation de Hopf en système dynamique d'ordre fractionnaire

Remarque

On sait que ce système a une bifurcation Hopf à $a = 0$, c'est-à-dire que toutes les conditions suivantes sont remplies par l'une des deux solutions disons $\lambda(a)$ du polynôme caractéristique des systèmes (23) une fois linéarisé environ de $(0,0)$:

$$(\mathbf{i}) \quad \mathrm{Re}[\lambda(0)] = 0, \qquad (\mathbf{ii}) \quad \mathrm{Im}[\lambda(0)] \neq 0, \qquad (\mathbf{iii}) \quad \frac{d\{\mathrm{Re}[\lambda(0)]\}}{da} \neq 0.$$

Les cycles sont apparus à $a = 1$, d'où les conditions de la bifurcation de Hopf d'ordre fractionnaire diffère de celles du cas d'ordre entier, nous proposons donc les conditions suivantes :

$$(\mathbf{i}) \quad |\arg[\lambda(a^\star)]| = \tfrac{\alpha\pi}{2}, \qquad (\mathbf{ii}) \quad \frac{d\lambda(a^\star)}{da} \neq 0, \qquad (\mathbf{iii}) \quad |\lambda(a^\star)| = 1.$$

Les équations fonctionnelles représentent la limite $\alpha \longrightarrow 0$ pour les systèmes fractionnaires. Ils sont valables pour les systèmes non diffrérentiables. Ces systèmes sont abondants dans la nature, par exemple, fractales, arbres,..., etc.

Ici, nous étudions les équations fonctionnelles suivantes

$$x(t) = f\big(x(t-r_1), x(t-r_2)\big) \tag{24}$$

$$\begin{cases} x(t) = f\big(x(t-r_1), y(t-r_2)\big) \\ y(t) = g\big(x(t-r_3), y(t-r_4)\big), \end{cases} \tag{25}$$

Stabilité locale des équations fonctionnelles

Ici, t est une variable continue, le point d'équilibre de la solution de (24) est donnée par

$$x_{eq} = f(x_{eq}, x_{eq})$$

tandis que la solution d'équilibre de (25) est donnée par

$$x_{eq} = f(x_{eq}, y_{eq}),$$

et

$$y_{eq} = g(x_{eq}, y_{eq}).$$

La solution d'équilibre de (24) est localement asymptotiquement stable si toutes les racines λ de l'équation suivante satisfont $|\lambda| < 1$ où

Stabilité locale des équations fonctionnelles

$$\left.\frac{(\lambda)^{-r_1}\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{x=y=x_{eq}} + \left.\frac{(\lambda)^{-r_2}\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{x=y=x_{eq}} = 1. \qquad (26)$$

La solution d'équilibre de (25) est localement asymptotiquement stable si toutes les racines λ de l'équation suivante satisfont $|\lambda| < 1$ où

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\lambda^{-r_1} - 1\right)\left((\frac{\partial g}{\partial y}\lambda^{-r_4} - 1) - (\frac{\partial f}{\partial y})(\frac{\partial g}{\partial x})\right) = 0, \qquad (27)$$

où tous les dérivées de (27) sont calculés à la valeur d'équilibre.

Example

Soit

$$x(t) = \mu x(t - r_1)(1 - x(t - r_2), \quad \mu > 0. \tag{28}$$

Les solutions d'équilibre sont : $x = 0, x = 1 - \frac{1}{\mu}, \ \mu > 1$.
La solution $x = 0$ est localement asymptotiquement stable si $\mu < 1$ tandis que la deuxième solution est localement si toutes les racines λ des éléments suivants l'équation satisfait

$$|\lambda| < 1 \text{ ou } \lambda^{r_2} - \lambda^{r_2 - r_1} + (\mu - 1) = 0$$

Lorsque $r_2 = r_1 = r$ nous retrouvons la condition normale $x = 1 - \frac{1}{\mu}$, $\mu > 1$ est localement asymptotiquement stable si $1 < \mu < 3$.

Références

Références

- R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, M. Sababheh ; "*A new definition of fractional derivative*", J. Computational Appl. Math., 264 (2014) 65–70.
- E. Ahmed, A.M.A. El-Sayed , H.A.A. El-Saka, "*Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional-order predator–prey and rabies models*" J. Math. Anal. Appl. 325 (2007) 542–553.
- H.A. El-Saka, E. Ahmed, M.I. Shehata and A.M.A. El-Sayed, *"On stability, persistence, and Hopf bifurcation in fractional order dynamical systems"*, accepted in 9 June 2008 / Published online : 16 July 2008 c Springer Science. B.V. (2008), 121–126.
- F. Keshtkar, G. Erjaee and M. Boutefnouchet "*On Stability of equilibrium points in nonlinear fractional differential Eequations and fractional Hamiltonian systems*", COMPLEXITY, (2014).

Références

A. S. Deshpande , V. Daftardar-Gejji and Y. V. Sukale, "*On Hopf bifurcation in fractional dynamical systems*", Chaos, Solitons and Fractals 98(2017) 189–198.

D. Matignon. *Stability results for fractional differential equations with applications to control processing,* Computational Engineering in Systems and Application Multiconference, IMACS, IEEE-SMC, Lille, France, vol. 2, (1996), pp. 963–968.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION