

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA-BOUMERDES



Faculté de Technologie

Département Ingénierie des Systèmes Electriques

Mémoire de Master

Présenté par

Aissou Mohammed Amin

Filière : Automatique

Spécialité : Automatique et Informatique Industrielle

Etude de la Commande d'un Double Pendule Inversé

Soutenu le/ Septembre/2020 devant le jury composé de :

Melle.Larabi	Zina	MAA	UMBB	Président
Mme.Benabdallah	Tassadit	MAA	UMBB	Encadreur
Melle.Khelouat	Lila	MAA	UMBB	Examineur
Mme.Miloudi	Leila	MCB	UMBB	Examineur

Année Universitaire : 2019/2020

Remerciements

Je remercie d'abord ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la force, la patience et la volonté pour achever ce travail.

Mes sincères remerciements à mon encadreur Mme. Benabdallah de m'avoir guidé et encouragé durant ce travail et pour sa disponibilité, la pertinence de ses remarques et son enthousiasme permanent.

Je tiens à remercier les membres du jury M^{elle} Larabi Zina, M^{me} Benabdallah Tassadit, M^{elle} khelouat Lila et M^{me} Miloudi Leila qui me font l'honneur d'évaluer ce travail.

Je tiens également à remercier tous les membres de ma famille et mes amis qui m'ont toujours soutenu tout au long de mes études.

Je souhaite aussi remercier tous mes enseignants de la filière Génie Electrique.

Résumé :

L'objectif de ce mémoire de fin d'étude est d'élaborer une commande stabilisante pour un double pendule inversé sur chariot, qui est considéré comme un système sous-actionné. Les équations différentielles non linéaires du mouvement ont été retrouvées par le biais du formalisme Euler-Lagrange. Une linéarisation autour de point d'équilibre a permis de retrouver le modèle linéaire dans l'espace d'état, à l'aide de la boîte à outil « LinearAnalysisTool » de Matlab. Un prototype de ce modèle sur Matlab/Simulink a été conçu via un programme d'acquisition SimMechanics. Deux types de commandes ont été combinées qui sont : la commande énergétique et commande LQR, afin de stabiliser le système à sa position d'équilibre instable. Les simulations entreprises ont permis de valider les fondements théoriques de la commande développée.

Mots clés : Boîte à outil « LinearAnalysisTool », commande énergétique, commande LQR, double pendule inversé sur chariot, formalisme Euler-Lagrange, linéarisation, programme d'acquisition SimMechanics, stabilisation, système sous-actionné.

Abstract:

The final year subject study is on stabilization control of a double inverted pendulum on a cart, which is considered as an underactuated system. Firstly, the nonlinear derivative system equation is obtained for the system, using Euler-Lagrange formalism. Linearization around the equilibrium point allowed us to find the linear model in state-space representation with the help of the Linear Analysis Tool in Matlab. A prototype of the modeling system was conceived via the SimMechanics acquisition program in Matlab/Simulink. Two types of controls have been combined which are: the energetic control and the linear quadratic control (LQR) for the stabilization of the system at its unstable equilibrium point. The undertaken simulations allowed us to validate the theoretical foundations of the developed control.

Key words: Energetic control, Euler-Lagrange formalism, double inverted pendulum on a cart, Linear Analysis Tool, linear quadratic control, linearization, SimMechanics acquisition program, stabilization control, underactuated system.

ملخص:

الهدف من هذه الأطروحة النهائية هو التحكم باستقرار بندول مزدوج مقلوب على عربة. أولاً تم العثور على المعادلات التفاضلية غير الخطية للحركة من خلال معادلات Euler-Lagrange. العملية الخطية حول نقطة التوازن سمحت لنا بالعثور على النموذج الخطي للنظام، باستخدام أداة LinearAnalysisTool في Matlab. تم تصميم النموذج الأولي للمحاكاة على Matlab/Simulink عبر برنامج SimMechanics. نوعين من التحكم تم استعمالهما في الأطروحة وهما: التحكم عن طريق الطاقة والتحكم عن طريق متحكم تربيعي خطي لتثبيت النظام عند نقطة توازنه غير المستقرة. سمحت لنا عمليات المحاكاة التي تم إجراؤها بالتحقق من صحة أسس النظرية للتحكم المطورة.

الكلمات الدلالية: التحكم عن طريق الطاقة، معادلات Euler-Lagrange، بندول مزدوج مقلوب على عربة، متحكم تربيعي خطي، برنامج SimMechanics تثبيت النظام عند نقطة توازنه غير المستقرة، أداة LinearAnalysisTool للعملية الخطية.

Sommaire

Remerciements.....	i
Résumer.....	ii
Sommaire	iii
Liste des figures	iv
Liste des tableaux.....	v
Notations et acronymes.....	vi
Liste des abréviations	vii
Introduction générale.....	1
Chapitre I : Différents Types de Pendules Inversés et leurs Intérêts d'Etudes	
Introduction	3
I.1 les différents types de pendules inversés.....	3
I.1.1 Le pendule inversé simple.....	3
I.1.2 Le double pendule inversé en cascade.....	4
I.1.3 Le double pendule inversé en cascade couplé par deux ressorts.....	4
I.1.4 Le double pendule inversé parallèle.....	5
I.1.5 Le pendule inversé en T.....	5
I.2 Intérêt de l'étude des pendules inversés.....	6
I.2.1 Domaine de la Robotique.....	6
I.2.2 Domaine de la médecine.....	6
I.2.3 Domaine de l'aérospatiale.....	7
I.2.4 Domaine de loisir.....	8
Conclusion.....	9
Chapitre II : Modélisation Mathématique du Double Pendule Inversé sur un Chariot	
Introduction.....	10
II.1 Le double pendule inversé sur un chariot.....	10
II.2 Modélisation : application du formalisme Euler Lagrange.....	11
II.3 La représentation d'état.....	14
II.3.1 La représentation d'état du système non linéaire.....	14
II.3.2 La représentation d'état du système linéarisé	14
II.4 Simulation du système non linéaire en boucle ouverte.....	17
II.4.1 Simulation du système libre.....	17
II.4.2 Simulation du système excité.....	18
Conclusion.....	18
Chapitre III : Commande d'un Double Pendule Inversé sur Chariot	
Introduction.....	21
III.1 La commande du Double Pendule Inversé sur Chariot (DPIC).....	21
III.1.1 La commande de balancement basée sur l'énergie.....	21
III.1.2 Conception de la commande linéaire quadratique (LQR).....	22
III.1.3 Choix des matrices de pondération.....	23
III.2 Synthèse de la commande du système sous Matlab.....	23
III.3 Simulations et Résultats.....	27
Conclusion.....	31
Conclusion générale	32
Annexe A	33
Bibliographie.....	34

Liste des Figures

Figure I.1 : Pendule inversé simple.....	3
Figure I.2 : Pendule inversé simple rotatif.....	3
Figure I.3 : Double pendule inversé.....	4
Figure I.4 : Double pendule inversé en cascade couplé.....	4
Figure I.5 : Le double pendule inversé parallèle.....	5
Figure I.6 : Pendule inversé en T.....	5
Figure I.7 : Exemple de robot inversé.....	6
Figure I.8 : Le corps de l'être humaine vu comme un double pendule inversé.....	7
Figure. I.9 Pendule gyroscopique inversé.....	7
Figure I.10 : La balançoire Crazanity.....	8
Figure II.1 : Schéma du double pendule inversé sur un chariot	10
Figure II.2 : Résultats de simulations en boucle ouverte sans frottements avec conditions..... initiales $(x_0, \dot{x}_0, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2) = (0, 0, \pi/8, 0, \pi/8, 0)$	18
Figure II.3 : Résultats de simulations en boucle ouverte avec une entrée impulsion d'une durée 0.3 s et amplitude 0.5 (N) et comme conditions initiales $(x_0, \dot{x}_0, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2) = (0, 0, 0,$ $0, 0, 0)$ (Sans frottements).....	20
Figure III.1 : Schéma générale du contrôleur et du DPIC.....	27
Figure III.2 : Schéma block du système de commande (le contrôleur).....	28
Figure III.3 : Evolution du Signal de commande en fonction du temps.....	28
Figure III.4 : Schématisation des trois phases de commutation (switching phase).....	29
Figure III.5 : Réponses de la position horizontale x_0 et vitesse horizontale $\dot{x}_0$ du chariot.....	29
Figure III.6 : Réponses de la position angulaire θ_1 et vitesse angulaire $\dot{\theta}_1$ du 1 ^{er} pendule.....	30
Figure III.7 : Réponses de la position angulaire θ_2 et vitesse angulaire $\dot{\theta}_2$ du deuxième pendule.....	30

Liste des Tableaux

Tableau II.1 : Notations et unités des paramètres constants du système DPIC.....	11
--	----

Liste des Notations

$x_0(t)$: Position du chariot
 $\theta_1(t)$: Angle de rotation de 1^{er} pendule
 $\theta_2(t)$: Angle de rotation de 2^{ème} pendule
 $u(t)$: Force exercée sur le chariot
 k_c : Energie cinétique du chariot
 k_1 : Energie cinétique de 1^{er} pendule
 k_2 : Energie cinétique de 2^{ème} pendule
 P_c : Energie potentielle du chariot
 P_1 : Energie potentielle de 1^{er} pendule
 P_2 : Energie potentielle de 2^{ème} pendule
 m_c : Masse du chariot
 m_1 : Masse du 1^{er} pendule
 m_2 : Masse du 2^{ème} pendule
 L_1 : Longueur du 1^{er} pendule
 L_2 : Longueur du 2^{ème} pendule
 g : Intensité de la pesanteur
 K_s : Gain du contrôleur
 k : Matrice gain de la commande LQR

Liste des Abréviations

DPIC : Double pendule inversé sur un chariot

LQR: Linear Quadratic Regulator

CMG: Control Moment Gyro

Sec : Seconds

Introduction générale

Le Double Pendule Inversé sur Chariot (DPIC) est connu comme l'un des systèmes à fortes non-linéarités. Celui-ci présentant la propriété d'une structure simple, a été largement utilisé pour la recherche et l'expérimentation.

Un double pendule inversé sur chariot est un système sous-actionné, car il a un plus grand nombre de joints que le nombre d'actionneurs. Le contrôle des systèmes sous-actionnés est actuellement un domaine de recherche actif en raison de leurs larges applications en robotique, aérospatiale et les véhicules marins.

Le double pendule inversé sur chariot (DPIC) est l'un des problèmes de contrôle non-linéaire, qui peut être utilisé pour des expériences basées sur des systèmes afin de tester les lois de contrôle linéaires et non-linéaires telles que la stabilisation des systèmes dynamiques. L'instabilité et la non-linéarité de ce système en font le modèle parfait pour examiner les différents algorithmes de contrôle tels que les contrôleurs LQR.

Le système à double pendule inversé (DPIC) se compose d'une entrée qui est la force d'excitation du chariot et de trois sorties : position angulaire des tiges et position linéaire du chariot. Avant d'entreprendre une commande de synthèse pour le DPIC, il a eu d'étudier le modèle mathématique de celui-ci. En s'appuyant sur le formalisme d'Euler-Lagrange, le modèle non linéaire représenté par les équations différentielles du mouvement est évalué. Et à partir des équations du mouvement retrouvées, le modèle d'espace d'état non linéaire est déterminé. La linéarisation autour du point d'équilibre permettra d'avoir le modèle d'espace d'état linéaire. Ce dernier, sera obtenu à l'aide de la boîte à outil de Matlab qui est « LinearAnalysisTool ». Et un programme d'acquisition SimMechanics du logiciel Matlab/Simulink sera utilisé afin de construire le modèle du DPIC, dont le but d'envisager sa commande en temps-réel.

La commande que nous allons développer est basée sur la méthode énergétique et la commande LQR ; dont le principe se base sur le basculement des pendules autour de la zone linéaire par le biais de la commande Énergétique, afin de les stabiliser autour du point d'équilibre instable de l'ensemble du système, à l'aide de la commande LQR. Toutes les

simulations sont entreprises dans Matlab/Simulink. Nous pouvons alors englober les objectifs de ce projet de fin d'étude en ces points essentiels suivants :

- La formulation d'un modèle dynamique du système DPIC.
- L'identification des paramètres constants du modèle dynamique.
- La vérification des paramètres d'état obtenus à partir de la simulation et de la mesure.
- Faire monter les tiges du pendule en utilisant la fonction de contrôle et en stabilisant les tiges à leur point d'équilibre instable.

L'organisation de ce projet est représentée selon trois principaux chapitres qui sont définis comme suit :

- Dans le premier chapitre, les généralités sur les types des pendules inversés existants ainsi que leur intérêt dans les différents domaines d'application, seront abordées.
- Dans le deuxième chapitre, une modélisation mathématique du DPIC basé sur le formalisme d'Euler-Lagrange sera entreprise, ainsi que la représentation dans l'espace d'état du modèle linéarisé.
- Dans le troisième et dernier chapitre, deux types de commandes qui sont : la commande Energétique et la commande LQR seront développées pour la stabilisation du système DPIC.

Enfin, une conclusion générale et des perspectives pour travaux futurs seront dressées.

Chapitre I

Différents Types de Pendules Inversés et leurs Intérêts d'Etudes

Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à la citation des types du pendule inversé. Nous expliquons ses principes de fonctionnement, par la suite nous montrons leur intérêt en mentionnant quelques applications dans différents domaines.

I.1 Les différents types de pendules inversées

I.1.1 Le pendule inversé simple [1]

Ce modèle consiste en un chariot supportant un pendule articulé. Ce chariot peut se déplacer horizontalement et librement sur une raille de guidage à l'aide d'un moteur d'entraînement, comme l'indique la figure suivante :

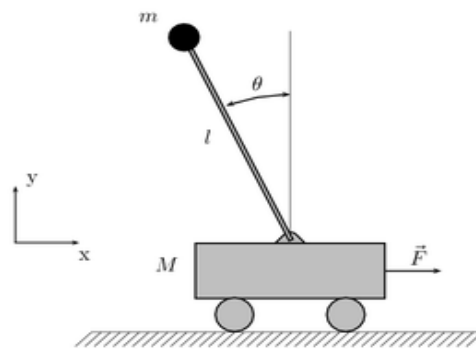


Figure I.1 : Pendule inversé simple

Il existe d'autres modèles de pendules inversés simples (un seul bras) comme un pendule inversé simple rotatif [2] :

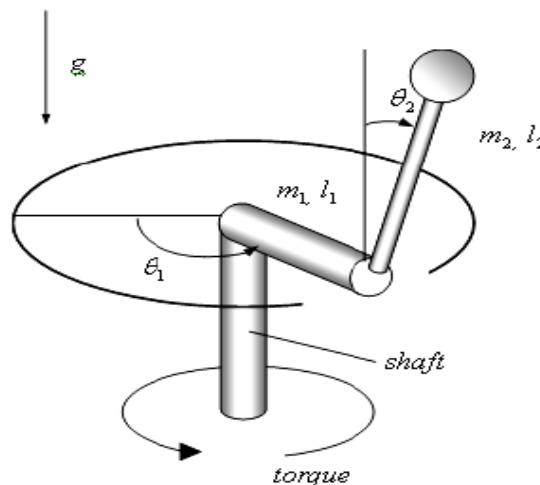


Figure I.2 : Pendule inversé simple rotatif

Son fonctionnement est le même comme le précédent, mais le chariot a été remplacé par un bras rotatif, nous avons donc deux sorties θ_1 et θ_2 .

I.1.2 Le double pendule inversé en cascade [3]

Comme le pendule inversé simple, le double pendule inversé en cascade est constitué d'un chariot supportant un pendule mais cette fois avec deux tiges articulées, en rotation libre par rapport à la verticale. Donc, ce pendule contient trois sorties $x(t)$ linéaire, θ_1 et θ_2 .non linéaire.

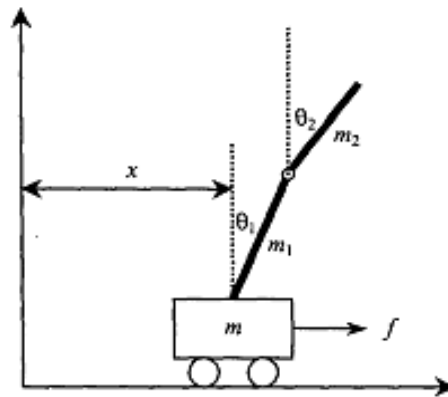


Figure I.3 : Double pendule inversé

I.1.3 Le double pendule inversé en cascade couplé par deux ressorts [4]

Même principe que le précédent, mais cette fois ci les deux tiges sont couplées à l'aide de deux ressorts, et le système a une entrée et trois sorties ; comme le montre le schéma suivant :

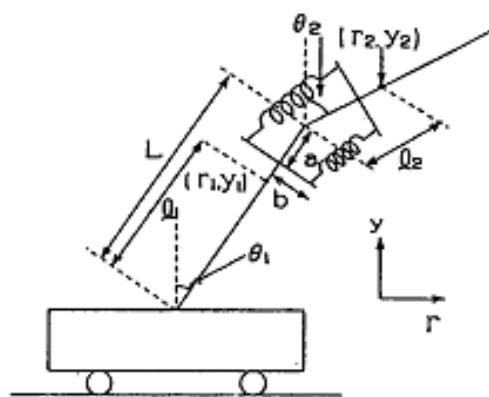


Figure I.4 : Double pendule inversé en cascade couplé

I.1.4 Le double pendule inversé parallèle [5]

Dans ce modèle, il existe deux tiges en rotation libre au lieu d'une seule tige du pendule inversé (un seul bras). Nous avons alors trois sorties $x(t)$ et θ_L et θ_B qui sont respectivement le déplacement du chariot sur l'axe horizontal et les angles de déviation des deux tiges par rapport à la verticale.

Le schéma suivant montre l'illustration de ce système :

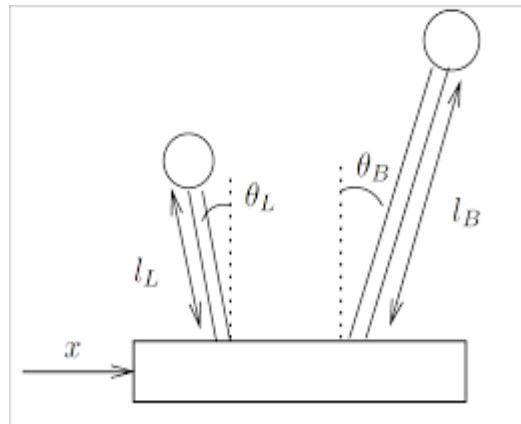


Figure I.5 : Le double pendule inversé parallèle

I.1.5 Le pendule inversé en T [6]

Ce type de pendule inversé est composé d'une barre horizontale pouvant coulisser perpendiculairement au sommet d'une barre verticale. Le bas de la barre verticale tourne librement autour de son axe. L'entrée est l'angle $\theta(t)$ et la sortie est $z(t)$.

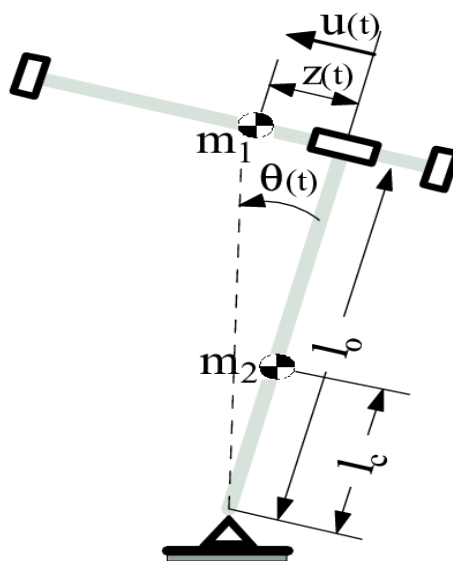


Figure I.6 : Pendule inversé en T

I.2 Intérêt de l'étude des pendules inversés

L'étude des pendules inversés a assez bien d'importance. Son importance est illustrée à partir des exemples d'application cités ci-dessous :

I.2.1 Domaine de la Robotique [7]

Un robot est vu comme un pendule inversé. Pour maintenir le robot en équilibre, il suffit de stabiliser le pendule inversé correspondant à sa position verticale au cours de son déplacement et en présence d'autres perturbations. Nous citons par exemple le robot auto-balancé qui est constitué d'une plateforme solidaire de deux roues. L'axe des roues est perpendiculaire à l'axe de déplacement du robot et le principe de contrôle de position est basé sur le pendule inversé. La figure à gauche est une image d'un robot de voiture dansante qui s'agit d'un jouet pour les enfants qui utilise le principe du pendule inversé pour se tenir debout, exposant ainsi un spectacle intéressant. A droite nous avons un robot auto balancé et assez stable pour servir les boissons comme un serveur humain.



Figure I.7 : Exemple de robot inversé

I.2.2 Domaine de la médecine [8]

L'homme est vu comme un double pendule inversé en série, dont les deux axes de rotations principales sont les chevilles et les hanches. Quand nous sommes en position debout, nos articulations travaillent sans arrêt pour nous y maintenir. Les spécialistes qui travaillent dans le domaine de réalisation de prothèses pour les hanches (remplacement chirurgical d'un organe, la pièce ou l'appareil de remplacement) sont amenés à utiliser un double pendule

inversé pour calculer l'ensemble des contraintes qui sont soumises à la prothèse comme le montre la figure suivante. Le premier pendule est articulé à la cheville et représente les membres inférieurs considérés groupés. Le second pendule est articulé à la hanche et représente la partie supérieure du corps. On accélère en se penchant en avant et on même que le pendule inversé.



Figure I.8 : Le corps de l'être humaine vu comme un double pendule inversé

I.2.3 Domaine de l'aérospatiale

Dans ce domaine, l'étude des pendules inversés a une grande importance, par exemple pour commander et stabiliser l'attitude du satellite, le lancement des fusées...etc.

- Pour stabiliser l'attitude d'un satellite par les actionneurs gyroscopiques [9]

Les actionneurs gyroscopiques également appelés girodynes (CMG : Control Moment Gyro) constituent un nouveau système d'actionneurs qui permettent de générer des couples dynamiques de commande de basculement d'attitude d'un satellite. L'expérience consiste à le rappeler vers la position d'équilibre (instable), donc il est vu comme un pendule inversé.

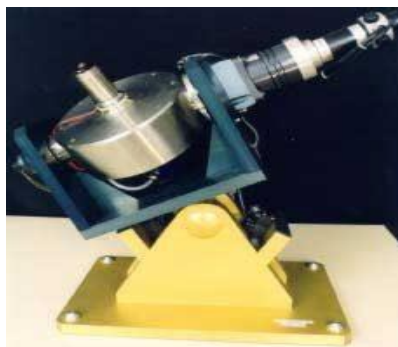


Figure. I.9 Pendule gyroscopique inversé.

- Pour le lancement des fusées :
Lors de son lancement, une fusée est vue comme un pendule inversé simple, donc il faut maintenir sa position verticale par rapport à la terre, et pour cela, des moteurs à propulsion sont installés dans les deux côtés de la fusée (gauche et droite).

I.2.4 Domaine de loisir [10]

Dans les parcs d'attractions, on trouve les tours qui utilisent le principe du pendule inversé.

La machine en **figure I.10** bascule vers le haut autour d'un axe de sorte qu'il agit comme un pendule inversé. Cette machine est principalement un bras attaché par l'une des extrémités à un support quadripode et l'autre extrémité du bras, est un ensemble appelé nacelle permet d'accueillir des passagers.

Ce pendule illustre la conservation de l'énergie, lorsque le pendule oscille vers le haut, l'énergie cinétique se transforme en énergie potentielle, et quand elle oscille vers le bas, l'énergie potentielle se transforme en énergie cinétique. Le mouvement de va-et-vient d'un pendule est un mouvement harmonique.



Figure I.10 : La balançoire Crazanity

Conclusion

L'objectif de notre étude consiste principalement à l'étude et simulation d'un double pendule inversé sur un chariot. Pour cela dans ce chapitre nous avons fait des généralités sur les types des pendules inversés ainsi que leurs intérêts dans les différents domaines d'application.

Chapitre II

Modélisation Mathématique du Double Pendule Inversé sur un Chariot

Introduction

Le problème de commande exige la recherche du modèle mathématique du système à commander, donc une phase de modélisation est nécessaire pour permettre l'étude en simulation.

La modélisation consiste à représenter les aspects importants du système en décrivant les relations entre ses différentes grandeurs par des équations mathématiques. L'ensemble de ces relations constitue le modèle de ce système.

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord représenter le double pendule inversé sur un chariot (DPIC) et les exigences de son choix. Ensuite, nous allons développer son modèle dynamique qui sera présenté sous forme d'équations différentielles en se basant sur le formalisme d'Euler-Lagrange qui constitue une approche systématique simple à mettre en œuvre et en négligeant les frottements situés au niveau des axes de rotation et ceux dus au déplacement du chariot. Puis, nous présenterons ce système dans l'espace d'état. Ensuite, nous donnons son modèle linéaire. Enfin, nous ferons une présentation des résultats de simulation du système donné dans l'espace d'état en utilisant le logiciel MATLAB Simulink.

II.1 Le double pendule inversé sur un chariot

Pour ce système, le mouvement du chariot doit maintenir les deux pendules dans leur position d'équilibre instable, avec un déplacement qui ne doit pas dépasser -4 ou $+4$ mètres.

Ce système a une entrée $u(t)$ et trois sorties $x_0(t)$, $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.

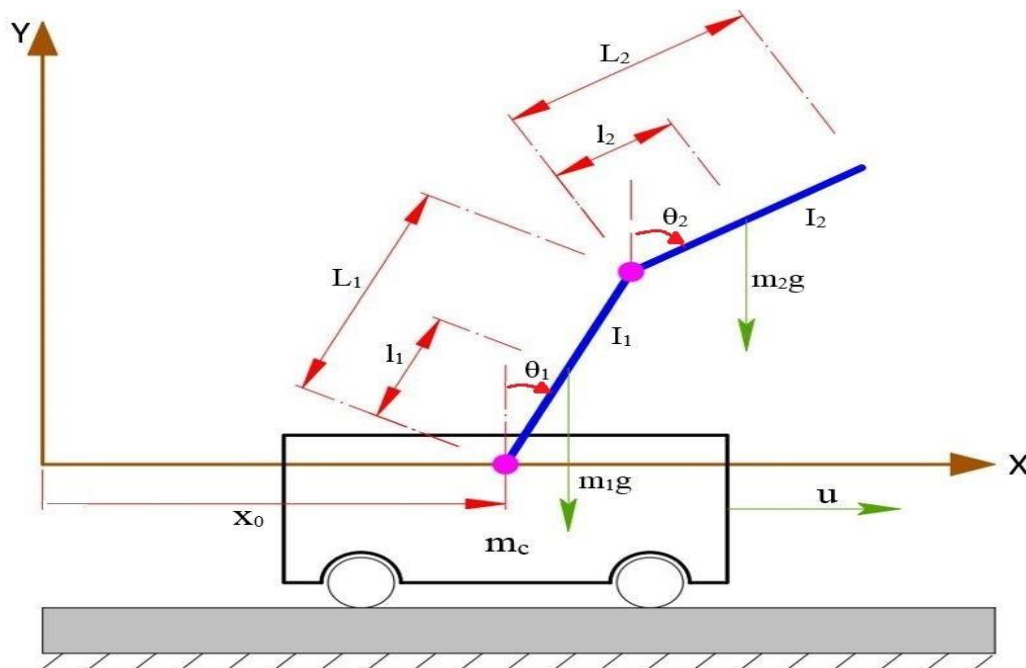


Figure II.1 : Schéma du double pendule inversé sur un chariot [11]

Le tableau suivant présente les notations et unités des constantes du système DPIC.

Tableau II.1 : Notations et unités des paramètres constants du système DPIC

Paramètres	Unités	Description
m_c	[Kg]	Masse de chariot
m_1, m_2	[Kg]	Masse des pendules 1 et 2
L_1, L_2	[m]	Longueur des pendules 1 et 2
l_1, l_2	[m]	Distance entre les articulations pivotantes et le centre de gravité des pendules
I_1, I_2	[Kg m ²]	Moment d'inertie des pendules
g	m/s ²	Gravité constante
x_0	[m]	Position de chariot
θ_1, θ_2	[rad]	L'angle des pendules

Le choix de ce système devra répondre à deux exigences préliminaires :

- Permettre une rotation du bras de 360°, afin de prendre en compte toutes les conditions initiales possibles.
- Disposer d'une course de déplacement du chariot suffisante pour permettre au pendule de se relever à partir des conditions initiales les plus défavorables.

II.2 Modélisation : application du formalisme Euler Lagrange [12]

Les équations de mouvements sont trouvées par l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \sum F_i \quad (\text{II.1})$$

- $L = K - P$: énergie cinétique, P : énergie potentielle.
- $\sum F_i$: la somme des forces extérieures.
- q : vecteur des variables (θ_i ou x_0)

Dans notre système montré sur la figure II.1, les paramètres de coordonnées indépendantes sont définies comme x_0, θ_1 et θ_2 , par conséquent, en considérant la force externe individuelle « u » exercée sur le système le long de la coordonnée x et en négligeant les frottements du système, l'équation (II.1) peut être développée comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_0} = u \quad (\text{II.2})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad (\text{II.3})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \quad (\text{II.4})$$

Étant donné que le système comprend trois éléments structurels (chariot et deux tiges pendulaires), les énergies du système sont définies comme suit :

$$k = k_c + k_1 + k_2 \quad (\text{II.5})$$

$$P = P_c + P_1 + P_2 \quad (\text{II.6})$$

Dont : c, 1et 2 signifient : le chariot, 1^{ère} et 2^{ème} tiges de pendule respectivement.

L'énergie est calculée comme suit :

- $k_c = \frac{1}{2} m_c \dot{x}_0^2$
- $k_1 = \frac{1}{2} m_1 [(\dot{x}_0 + l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1)^2] + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2$
 $= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_0^2 + \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + I_1) \dot{\theta}_1^2 + m_1 l_1 \dot{x}_0 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1$
- $k_2 = \frac{1}{2} m_2 [(\dot{x}_0 + L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + (L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2] + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2$
 $= \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_0^2 + \frac{1}{2} m_2 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} (m_2 l_2^2 + I_2) \dot{\theta}_2^2 + m_2 \dot{x}_0 (L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)$
 $+ m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$
- $P_c = 0$ (pas de déplacement sur l'axe vertical)
- $P_1 = m_1 g l_1 \cos \theta_1$
- $P_2 = m_2 g (L_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)$

Le lagrangien du système est donné par :

$$L = k - P$$

$$L = (k_c + k_1 + k_2) - (P_c + P_1 + P_2)$$

$$L = \frac{1}{2} (m_c + m_1 + m_2) \dot{x}_0^2 + \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} (m_2 l_2^2 + I_2) \dot{\theta}_2^2 +$$

$$(m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 \dot{x}_0 \dot{\theta}_1 + m_2 l_2 \cos \theta_2 \dot{x}_0 \dot{\theta}_2 + m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - (m_1 l_1 +$$

$$m_2 L_1) g \cos \theta_1 - m_2 l_2 g \cos \theta_2$$

Après l'application de (II.2), (II.3), et de (II.4), on trouve :

$$(m_c + m_1 + m_2)\ddot{x}_0 + (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 - (m_1 l_1 + m_2 L_1) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - m_2 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 = u \quad (\text{II.7})$$

$$(m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 \ddot{x}_0 + (m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1) \ddot{\theta}_1 + m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 - (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \sin \theta_1 = 0 \quad (\text{II.8})$$

$$m_2 l_2 \cos \theta_2 \ddot{x}_0 + m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + (m_2 l_2^2 + I_2) \ddot{\theta}_2 - m_2 l_2 g \sin \theta_2 - m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 = 0 \quad (\text{II.9})$$

On peut récrire les équations (II.7), (II.8) et (II.9) sous la forme matricielle suivante :

$$D(\theta) \begin{pmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + C(\theta, \dot{\theta}) \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + G(\theta) = Hu \quad (\text{II.10})$$

Où : $\theta = (x_0, \theta_1, \theta_2)$

Tel que :

$$D(\theta) = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \cos \theta_1 & d_3 \cos \theta_2 \\ d_2 \cos \theta_1 & d_4 & d_5 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ d_3 \cos \theta_2 & d_5 \cos(\theta_1 - \theta_2) & d_6 \end{pmatrix}$$

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{pmatrix} 0 & -d_2 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 & -d_3 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & d_5 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ 0 & -d_5 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ -f_1 \sin \theta_1 \\ -f_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En supposant que les centres de masse des pendules sont au centre géométrique des deux tiges, on aura :

$$l_i = \frac{L_i}{2}, \quad I_i = \frac{m_i L_i^2}{12}$$

Alors :

$$d_1 = m_c + m_1 + m_2$$

$$d_2 = \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2 \right) L_1$$

$$d_3 = \frac{1}{2} m_2 L_2$$

$$d_4 = \left(\frac{1}{3} m_1 + m_2 \right) L_1^2$$

$$d_5 = \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2$$

$$d_6 = \frac{1}{3} m_2 L_2^2$$

$$f_1 = \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2 \right) L_1 g = d_2 g$$

$$f_2 = \frac{1}{2} m_2 L_2 g = d_3 g$$

Notons que la matrice D est symétrique et non singulière.

On multiplie l'équation (II.10) par la matrice D^{-1} , la forme non linéaire de l'équation devient :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = -D^{-1}C \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} - D^{-1}G + D^{-1}H u \quad (\text{II.11})$$

II.3 La représentation d'état

II.3.1 La représentation d'état du système non linéaire [12]

On pose : $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T$ avec :

$$x_1 = x_0 \rightarrow \dot{x}_1 = \dot{x}_0$$

$$x_2 = \dot{x}_0 \rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{x}_0$$

$$x_3 = \theta_1 \rightarrow \dot{x}_3 = \dot{\theta}_1$$

$$x_4 = \dot{\theta}_1 \rightarrow \dot{x}_4 = \ddot{\theta}_1$$

$$x_5 = \theta_2 \rightarrow \dot{x}_5 = \dot{\theta}_2$$

$$x_6 = \dot{\theta}_2 \rightarrow \dot{x}_6 = \ddot{\theta}_2$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -D^{-1}C \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ -D^{-1}G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ D^{-1}H \end{pmatrix} u \quad (\text{II.12})$$

Les équations ci-dessus décrivent le mouvement du système et sont clairement non linéaires.

II.3.2 La représentation d'état du système linéarisé

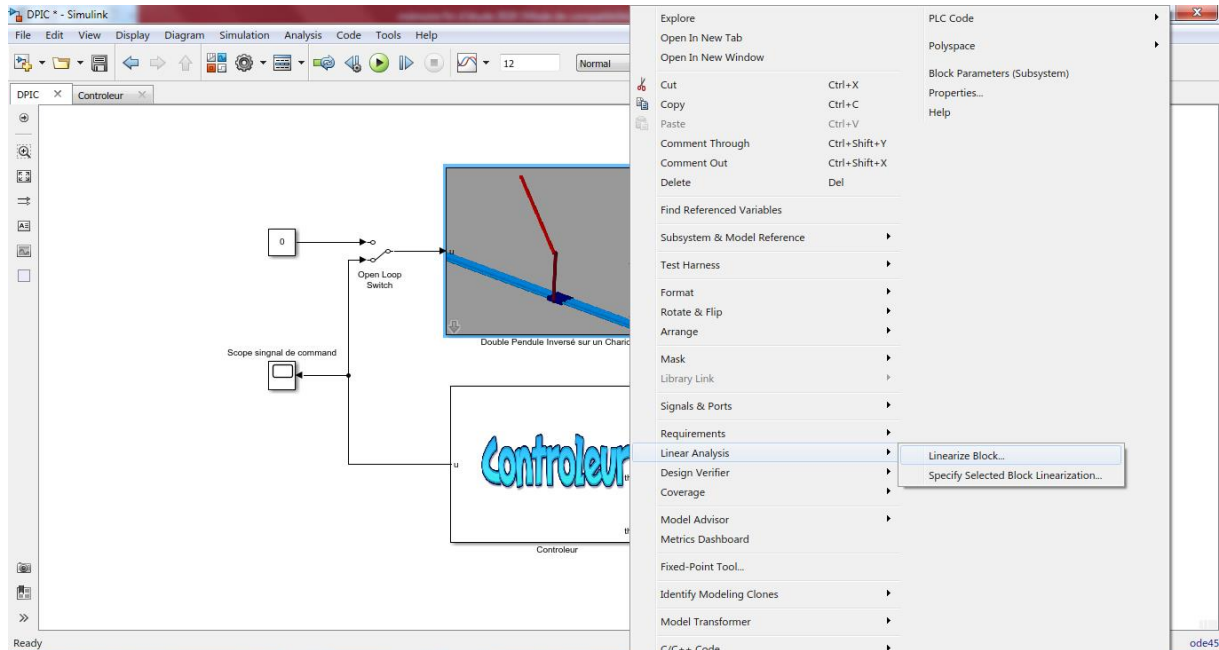
La linéarisation de ces équations autour de point d'équilibre instable $(x_0, \dot{x}_0, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$, conduit au système d'espace d'état suivant :

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ Y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\quad (\text{II.13})$$

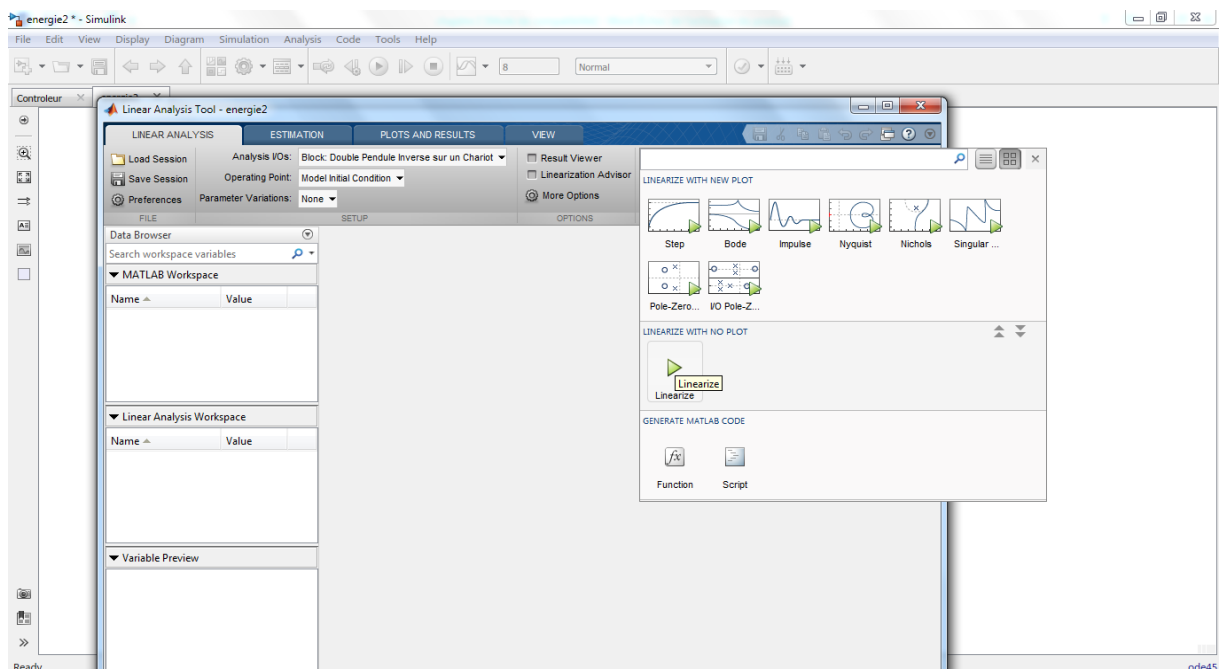
On prend $Y = X$ pour stabiliser tous les états vers 0

La linéarisation a été effectuée à l'aide de Linear Analysis Tool de Matlab comme suit :

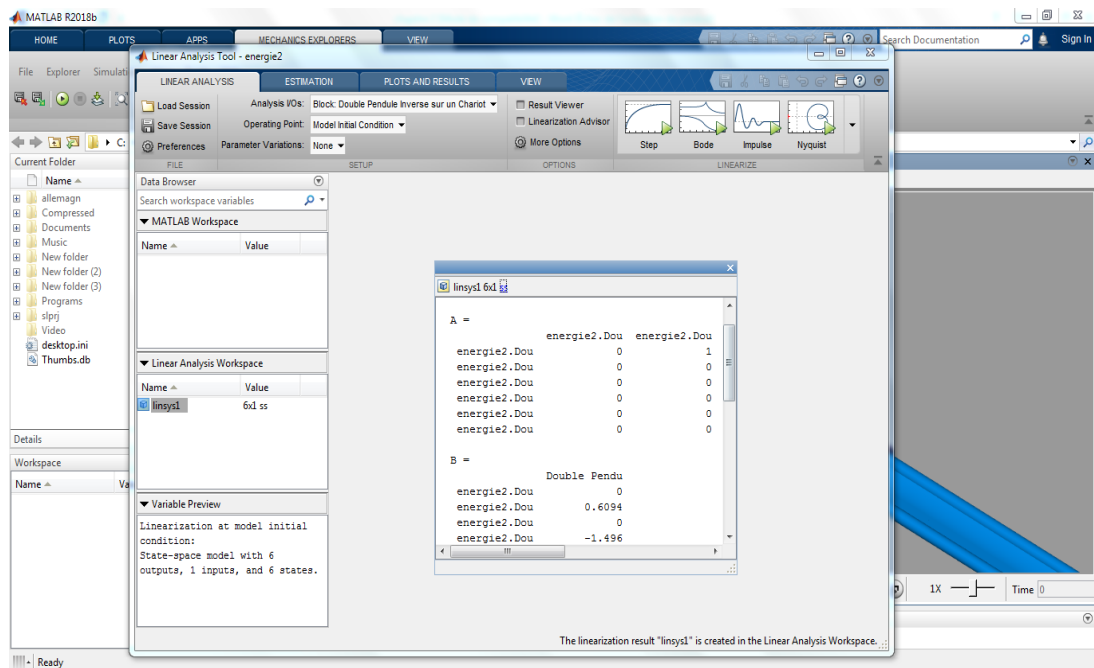
- Sélectionner dans Simulink le bloc représentant le système à linéariser



- Choisir LinearizeWith No Plot



- Matlab donne les Matrice A, B, C, D du système linéarisé



Si on prend les valeurs suivantes des paramètres [12] :

$$m_c = 1.5 \text{ Kg}$$

$$m_1 = 0.5 \text{ Kg}$$

$$m_2 = 0.75 \text{ Kg}$$

$$L_1 = 0.5 \text{ m}$$

$$L_2 = 0.75 \text{ m}$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

On se retrouve avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.623 & 0 & 0.7681 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40.31 & 0 & -32.66 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -47.65 & 0 & 82.58 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.6094 \\ -1.496 \\ 0 \\ 0 \\ 1.768 \end{pmatrix}$$

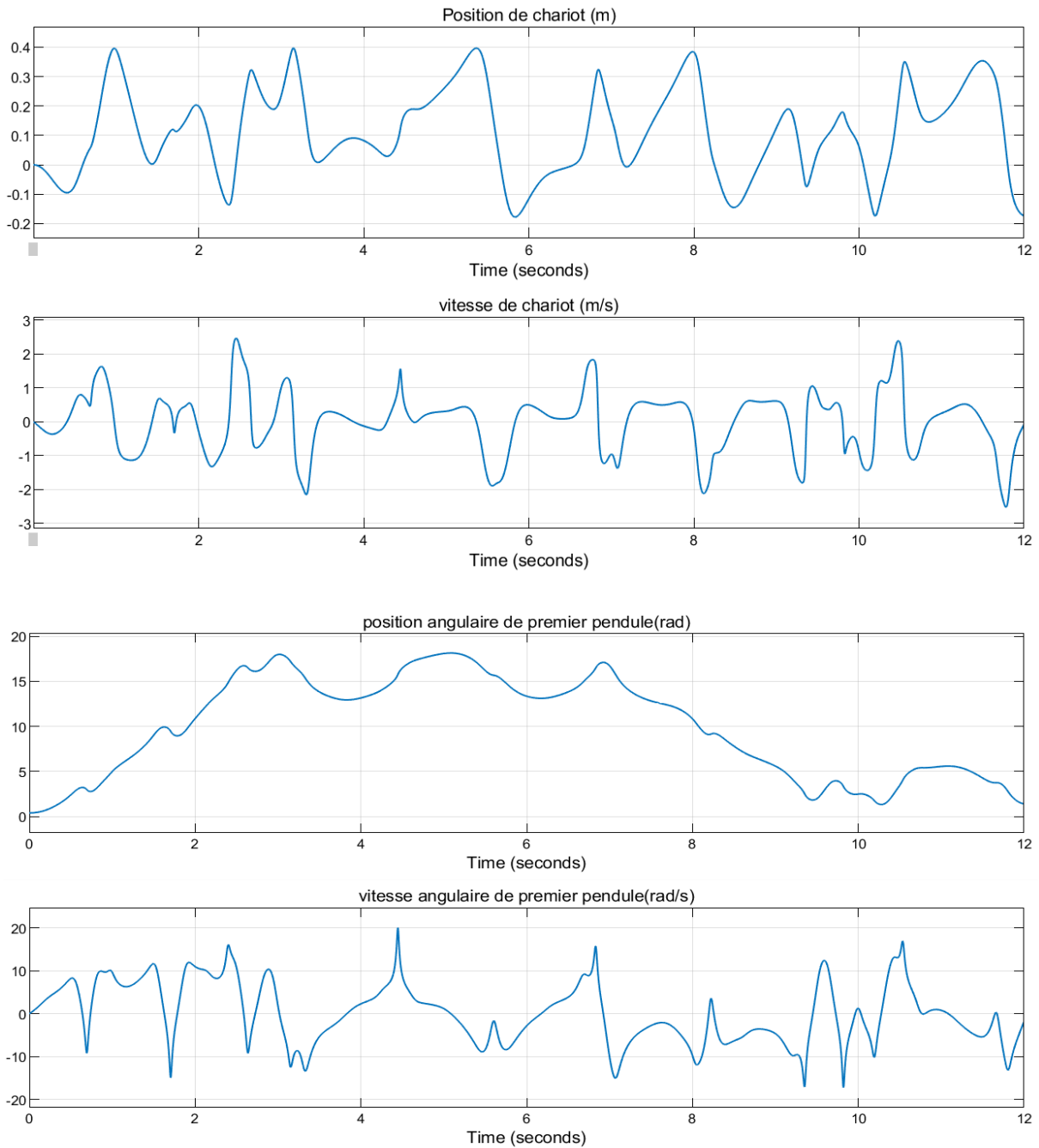
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

II.4 Simulation du système non linéaire en boucle ouverte

II.4.1 Simulation du système libre

Nous relâchons le DPIC avec des positions angulaires quelconques sans vitesse initiale et sans appliquer aucune force au chariot ($u=0$). Les conditions initiales sont : $(x_0, \dot{x}_0, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2) = (0, 0, \pi/8, 0, \pi/8, 0)$

Les résultats de simulation sont les suivants :



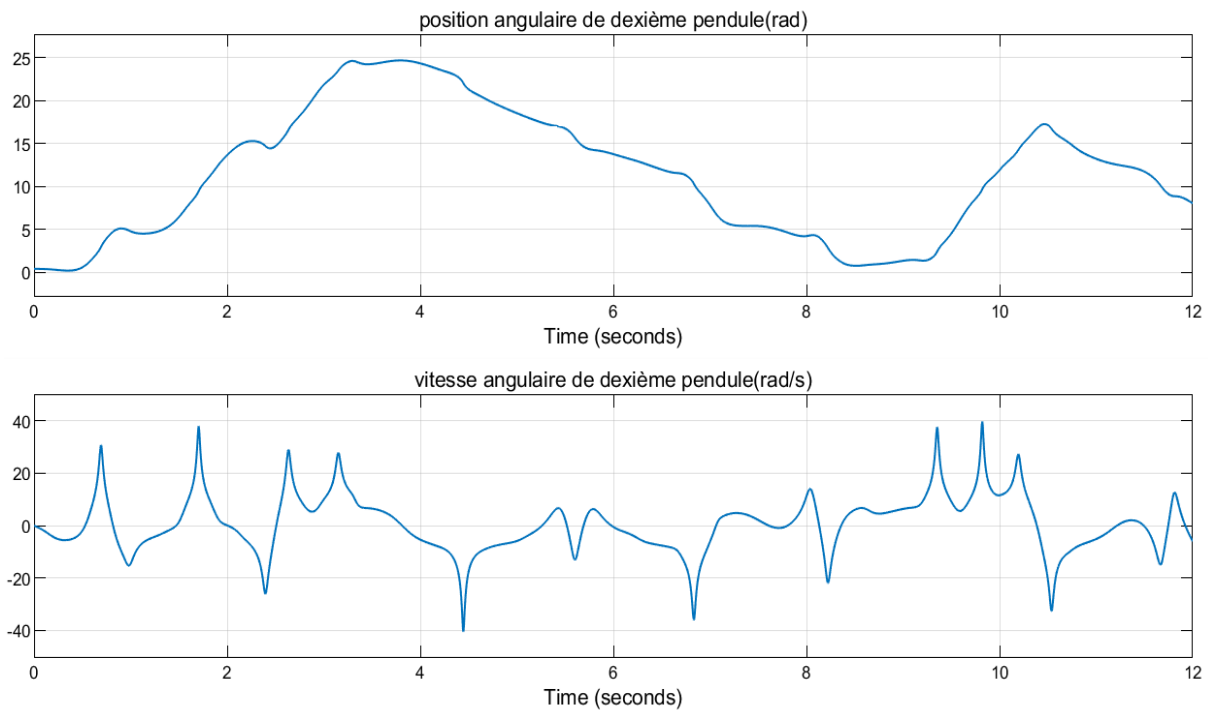


Figure II.2 : Résultats de simulations en boucle ouverte sans frottements avec conditions initiales $(x_0, \dot{x}_0, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2) = (0, 0, \pi/8, 0, \pi/8, 0)$

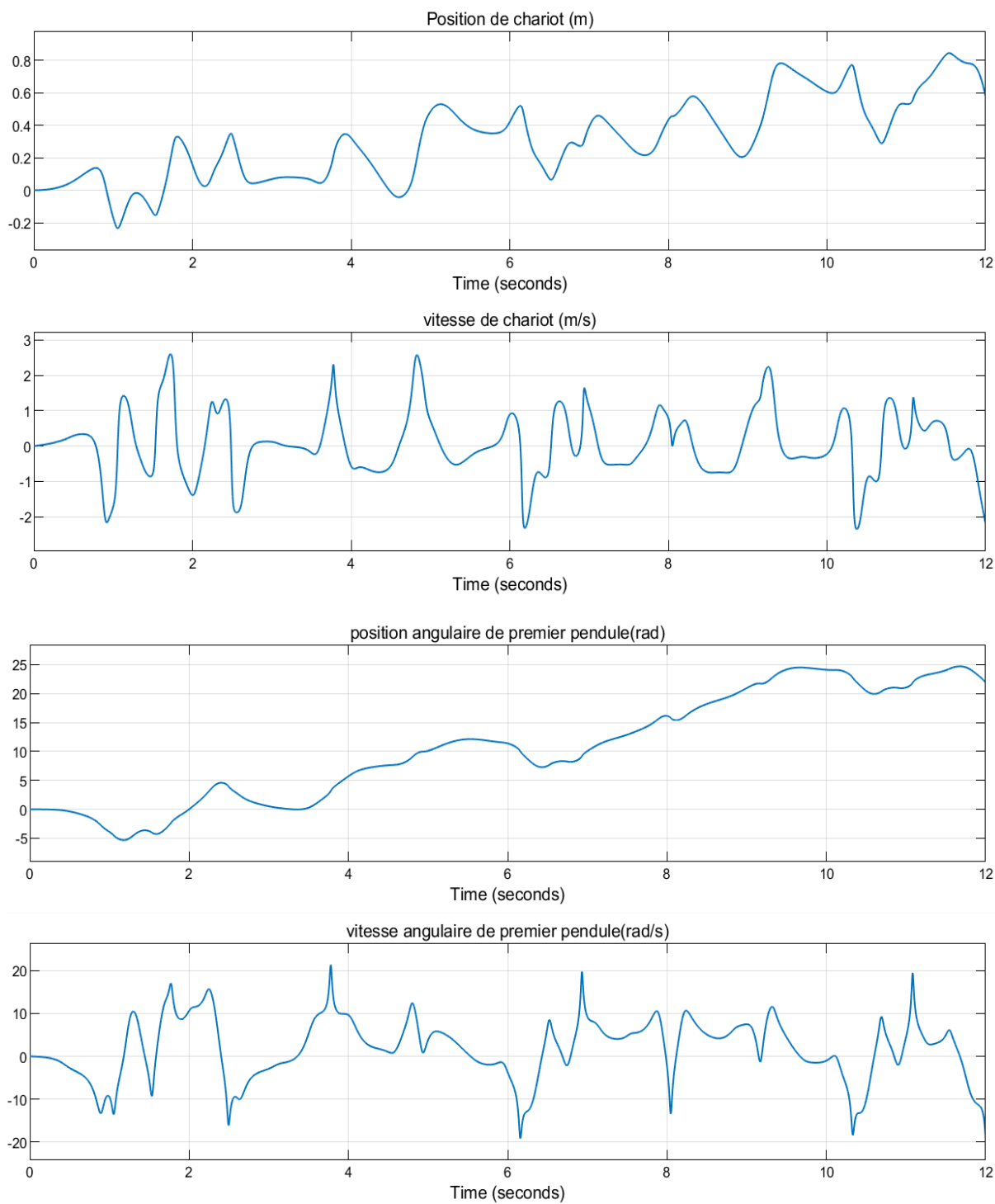
L'état du système évolue dans le temps et ne revient pas à son état d'équilibre.

II.4.2 Simulation du système excité

Nous appliquons une impulsion d'une amplitude 0.5 et d'une durée 0.3 Sec.

Nous prenons les conditions initiales $(x_0, \dot{x}_0, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ (la position d'équilibre instable).

Les résultats de simulation sont les suivantes :



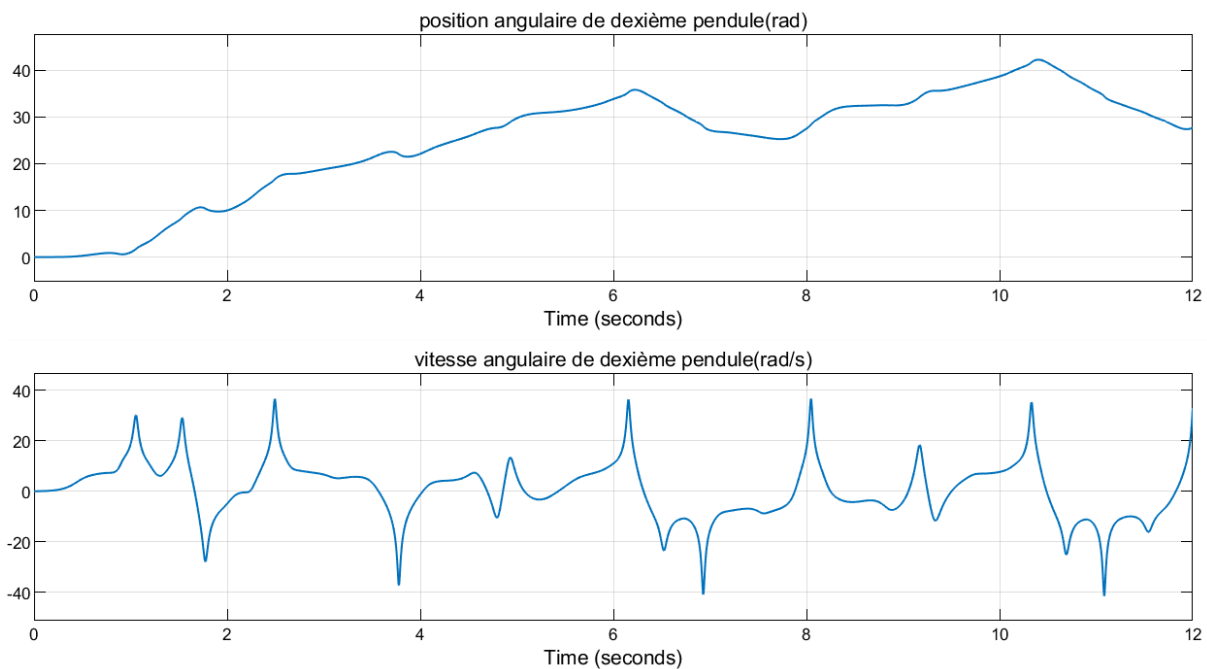


Figure II.3 : Résultats de simulations en boucle ouverte avec une entrée impulsion d'une durée 0.3 s et amplitude 0.5 (N) et comme conditions initiales $(x_0, \dot{x}_0, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ (Sans frottements)

Dans ce cas aussi (système excité), l'état du système évolue dans le temps sans revenir à son état d'équilibre. Le déplacement du chariot, sa vitesse de déplacement, les positions angulaires et les vitesses angulaires évoluent dans le temps sans se stabiliser.

Les résultats de simulation montrent que la position $(x_0, \dot{x}_0, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ est un point d'équilibre instable.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons fait de deux étapes principales. En premier étape nous avons fait la modélisation mathématique du système DPIC par l'application des équations Euler-Lagrange. Ce modèle nous a bien montré que le système est multivariable et présente de fortes non-linéarités, ce qui engendre la difficulté de commande pour ce type de système. En deuxième étape les simulations du système en boucle ouverte sont effectuées, qui nous ont permis de constater l'instabilité de celui-ci. Dans le chapitre suivant, deux lois de commandes seront proposées pour balancer le double pendule inversé et le stabiliser autour de son point d'équilibre instable.

Chapitre III

Commande d'un Double Pendule Inversé sur Chariot

Introduction :

Le double pendule inversé sur chariot est un système sous actionné et qui est fondamentalement instable, laissé sans commande, celui-ci ne pourra jamais changer sa position d'équilibre stable vers sa position d'équilibre instable. L'objectif alors recherché à travers ce dernier chapitre est de synthétiser une commande qui fera balancer les deux pendules de leur position d'équilibre stable vers leur position d'équilibre instable et de le stabiliser. Cette commande est basée sur la méthode énergétique et sur la commande LQR. Et celle-ci sera réalisée en trois différentes phases, qui consistent principalement : au basculement du premier pendule vers la zone linéaire dans la première phase, puis à la stabilisation de ce premier pendule et au basculement du deuxième pendule vers la zone linéaire dans la deuxième phase et en fin à la stabilisation de l'ensemble des deux pendules dans la dernière phase. Tous les calculs et simulations sont réalisés dans Matlab.

III.1 La commande du Double Pendule Inversé sur Chariot (DPIC) :

III.1.1 La commande de balancement basée sur l'énergie : [13]

La méthode énergétique a été effectuée pour balancer les deux pendules. Celle-ci peut être expliquée comme suit :

a) Premier pendule :

Pour le balancement du premier pendule, la commande est conçue en négligeant le deuxième pendule.

L'équation de l'énergie de premier pendule est alors donnée comme suit :

$$E_1 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + m_1 g L_1 (\cos \theta_1 - 1) \quad (\text{III.1})$$

Quand le premier pendule prend la position verticale instable où $\theta_1 = 0$ rad et $\dot{\theta}_1 = 0$ rad/s l'énergie est nulle $E_1 = 0$ et quand il prend la position verticale stable où $\theta_1 = \pi$ rad et $\dot{\theta}_1 = 0$ rad/s l'énergie devient comme suit :

$$E_1 = -2m_1 g L_1 \quad (\text{III.2})$$

L'énergie du système peut être ajoutée ou retirée progressivement en contrôlant l'accélération du chariot, on définit V_1 comme la fonction de stabilité de Lyapunov [14] telle que :

$$V_1 = \frac{1}{2} E_1 \quad (\text{III.3})$$

$\dot{V}_1$ étant la dérivée de V_1 , celle-ci est calculée comme suit :

$$\dot{V}_1 = -m_1 L_1 (E_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1)) u \quad (\text{III.4})$$

Afin d'avoir la dérivée de l'équation de Lyapunov $\dot{V}_1 < 0$, l'entrée de contrôle u doit être définie comme suit :

$$u = Ks_1 \text{sign} \left(E_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \right) \quad (\text{III.5})$$

Où Ks_1 est le gain du contrôleur strictement positif qui devra être ajusté jusqu'à ce que le système produise une transition en douceur.

b) Deuxième pendule :

La loi de commande qui fait le balancement pour le deuxième pendule est la même que le premier pendule, alors l'énergie du deuxième pendule est comme suit :

$$E_2 = \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 g L_2 (\cos \theta_2 - 1) \quad (\text{III.6})$$

Par conséquent l'entrée de commande est donnée par :

$$u = Ks_2 \text{sign} \left(E_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \right) \quad (\text{III.7})$$

Où Ks_2 est le gain du contrôleur strictement positif et qui devra être ajusté aussi jusqu'à ce que le système produise une transition en douceur.

III.1.2 Conception de la commande linéaire quadratique (LQR) : [15]

La synthèse de la commande linéaire quadratique LQR consiste en la recherche d'une matrice de gain k , telle que la commande par retour d'état $u(t) = -k x(t)$ stabilise le système et minimise le critère quadratique suivant :

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (\text{III.8})$$

Avec les matrices de pondération Q et R doivent être diagonales et satisfont :

$$Q = Q^T \geq 0, R = R^T > 0 \quad (\text{III.9})$$

La matrice de gain k , optimale est donnée par :

$$k = -R^{-1} B^T P \quad (\text{III.10})$$

Où P est la solution de l'équation algébrique de Riccati suivante :

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (\text{III.11})$$

L'obtention du gain matriciel k de l'équation (III.10) passe donc par la recherche de P qui est une matrice symétrique positive définie, solution de l'équation de Riccati qui est reportée dans l'équation (III.11).

III.1.3 Choix des matrices de pondération [16]

La synthèse des matrices de gain du contrôleur optimal, repose directement sur les matrices de pondération Q et R. Celles-ci peuvent être choisies comme matrices symétriques, diagonales :

- 1) Au départ, on choisit généralement des pondérations égales aux matrices identités.
- 2) Dans une seconde étape, on accélère ou on décélère globalement le système en multipliant la matrice Q par un scalaire ρ d'accélération avec $\rho > 1$ et de décélération avec $\rho < 1$, jusqu'à obtenir une dynamique moyenne adaptée.
- 3) Dans le cas où certains états auraient des dynamiques trop lentes par rapport à d'autres (autres états), on peut choisir d'augmenter la pondération de Q correspondant aux premiers (aux premiers états).
- 4) Dans le cas où certains actionneurs seraient trop sollicités par rapport à d'autres (autres actionneurs), on peut choisir d'augmenter la pondération de R leur correspondant.

III.2 Synthèse de la commande du système sous Matlab :

Nous mettons le système à sa position initiale $(x_0, \dot{x}_0, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2) = (2, 0, \pi, 0, \pi, 0)$, alors la stratégie de commande du système passe par trois phases, que nous allons développer comme suit :

a) La première phase : $t \in [0 \text{ s} \quad 4.7689 \text{ s}]$

Cette première phase, consiste à faire balancer le premier pendule afin qu'il atteigne la zone linéaire pour pouvoir passer à sa stabilisation. Nous pouvons expliquer cette phase comme suit :

A partir de l'équation (III.5) la commande de balancement du premier pendule est :

$$u_1 = 9.31 \text{sign} \left(E_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \right) \quad (\text{III.12})$$

Avec K_{s1} est choisi égale à 9,31

Dans cette méthode de commande, la distance de déplacement du chariot n'est pas prise en compte et la position du chariot peut dépasser la largeur du rail. Par conséquent, une nouvelle commande a été ajoutée pour supprimer la distance de déplacement du chariot, celle-ci est définie comme suit :

$$u_2 = -\mathbf{k}_1 \mathbf{x}_1 \quad (\text{III.13})$$

Où les variables d'état sont définies par le vecteur :

$$\mathbf{x}_1 = [x_0 \quad \dot{x}_0]^T \quad (\text{III.14})$$

Et $\mathbf{k}_1$ représente le gain matriciel contrôlant la position du chariot de x_0 vers 0. On prend $\mathbf{k}_1=1$.

Pour s'assurer que $\dot{V}_1 < 0$, il faut que $k_1 x_1$ a la même forme du signal « sign » comme l'équation (III.12)

Alors on utilise la condition :

$$u = \begin{cases} u_1 + u_2 & \text{si } \{sign(u_1) = sign(u_2)\} \\ u_1 + u_2 & \text{si } \{sign(u_1) \neq sign(u_2) \text{ et } |u_1| > |u_2|\} \\ u_1 & \text{si } \{sign(u_1) \neq sign(u_2) \text{ et } |u_1| \leq |u_2|\} \end{cases} \quad (III.15)$$

Quand le premier pendule atteint la zone linéaire autour $\theta_1=0$. Le contrôleur passera alors à la deuxième phase. La condition de commutation (switch en anglais) vers la phase 2 est conditionnée par la position angulaire et la vitesse angulaire du premier pendule données respectivement par $\theta_1 < 0.2 \text{ rad}$ et $\dot{\theta}_1 < 2 \text{ rad/s}$.

b) La deuxième phase : $t \in [4.7689 \text{ s} \quad 4.9183 \text{ s}]$

Dans cette deuxième phase, on stabilise le premier pendule et en même temps on balance le deuxième pendule.

Pour stabiliser seulement le premier pendule en négligeant le deuxième pendule, une nouvelle variable d'état a été prise en considération définie par le vecteur d'état suivant :

$$x_2 = [x_0 \quad \dot{x}_0 \quad \theta_1 \quad \dot{\theta}_1]^T \quad (III.16)$$

L'équation d'espace d'état linéarisé autour du point d'équilibre instable du premier pendule $(x_0 \quad \dot{x}_0 \quad \theta_1 \quad \dot{\theta}_1) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$ est donnée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A_1 x_2(t) + B_1 u_3(t) \\ Y(t) = C_1 x_2(t) + D_1 u_3(t) \end{cases} \quad (III.17)$$

Avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.62 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 40.3 & 0 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.6 \\ 0 \\ -1.49 \end{pmatrix} \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (III.18)$$

Alors la commande $u_3 = -\mathbf{k}_2 x_2$ qui stabilise le premier pendule est donnée par :

$$u_3 = -[\mathbf{k}_2(1) \quad \mathbf{k}_2(2) \quad \mathbf{k}_2(3) \quad \mathbf{k}_2(4)] \begin{bmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

Pour obtenir le gain matriciel $\mathbf{k}_2$ de l'équation (III.19), la même méthode a été utilisée, comme suit :

On prend $Q_1 = \text{diag}([1 \ 0 \ 0 \ 0])$ et $R_1 = 1$, qui correspond au script sous Matlab, suivant :

```
Q1=diag([1 0 0 0]);
R1=1;
Sys1=ss(A1,B1,C1,D1);
K2=lqr(sys1,Q1,R1);
```

On trouve :

$$\mathbf{k}_2 = [-1 \quad -2.695 \quad -61.9383 \quad -10.1736] \quad (\text{III.20})$$

Par conséquent la commande de stabilisation est :

$$u_3 = -[-1 \quad -2.695 \quad -61.9383 \quad -10.1736] \begin{bmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

Maintenant pour balancer le deuxième pendule, l'équation (III.7) a été utilisée pour obtenir la commande comme suit :

$$u_4 = 7.98 \text{sign}(E_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2)) \quad (\text{III.22})$$

Avec K_{s2} est choisi égale à 7,98.

Donc, la commande générale de la phase 2 est donnée par la somme de la commande de stabilisation et la commande de balancement :

$$u = u_3 + u_4 \quad (\text{III.23})$$

Quand le deuxième pendule atteint la zone linéaire autour $\theta_2 = 0$ le contrôleur passera alors à la troisième phase. La condition de commutation (switch) vers la phase 3 est $\theta_2 < 0.2 \text{ rad}$ et $\dot{\theta}_2 < 2 \text{ rad/s}$

c) La troisième phase : $t > 4.9183$ s

La stabilisation générale de tout le système est appliquée, l'équation linéarisée (II.13) du chapitre 2, sera utilisée pour dériver une solution linéaire approximative du problème de contrôle optimal.

L'équation linéarisée(II.13) est à nouveau rappelée ci-dessous :

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ Y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.623 & 0 & 0.7681 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40.31 & 0 & -32.66 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -47.65 & 0 & 82.58 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.6094 \\ 0 \\ -1.496 \\ 0 \\ 1.768 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La commande de stabilisation est alors définie comme suit :

$$u = -[\mathbf{k}(1) \quad \mathbf{k}(2) \quad \mathbf{k}(3) \quad \mathbf{k}(4) \quad \mathbf{k}(5) \quad \mathbf{k}(6)] \begin{bmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.24})$$

On utilise la commande « lqr » sous Matlab afin d'obtenir les valeurs du gain matriciel $\mathbf{k}$.

On prend $Q = \text{diag}([1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0])$ et $R=1$, qui correspond au script sous Matlab, suivant :

```
Q=diag([1 1 0 0 0 0]);
R=1;
sys=ss(A,B,C,D);
k=lqr(sys,Q,R);
```

On trouve le gain matriciel suivant :

$$\mathbf{k} = [1 \quad 3.2741 \quad 19.3207 \quad 25.8419 \quad 266.7414 \quad 37.6442] \quad (\text{III.25})$$

Par conséquent la commande de stabilisation est :

$$u = -[1 \quad 3.2741 \quad 19.3207 \quad 25.8419 \quad 266.7414 \quad 37.6442] \begin{bmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.24})$$

III.3 Simulations et Résultats

Le schéma général du contrôleur synthétisé et du modèle du DPIC ainsi que le schéma block du contrôleur sont donnés par la **Figure III.1** et **Figure III.2** respectivement :

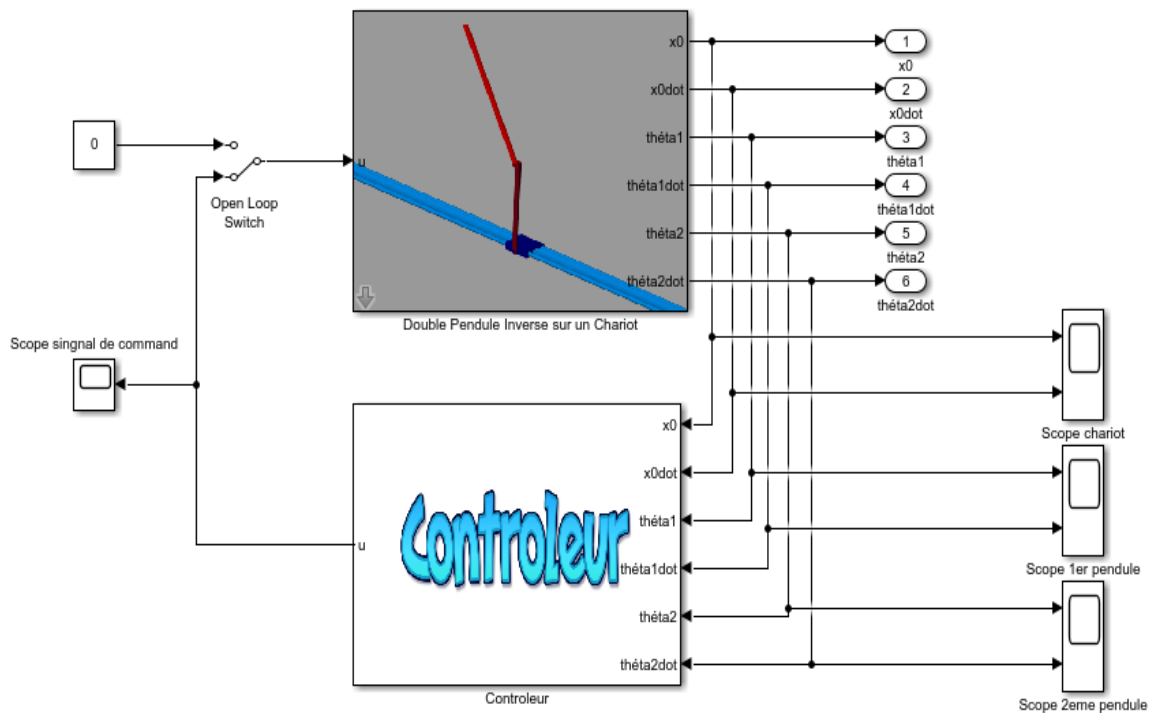


Figure III.1 : Schéma générale du contrôleur et du DPIC

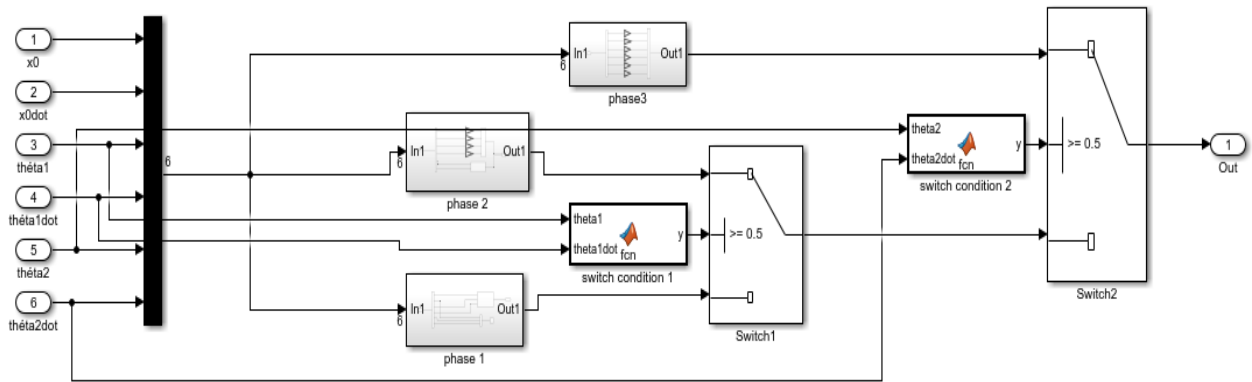


Figure III.2 : Schéma block du système de commande (le contrôleur)

L'évolution du signal de commande ainsi que les phases de commutation (switching phase en anglais) sont données par la **Figure III.3** et **Figure III.4** respectivement :

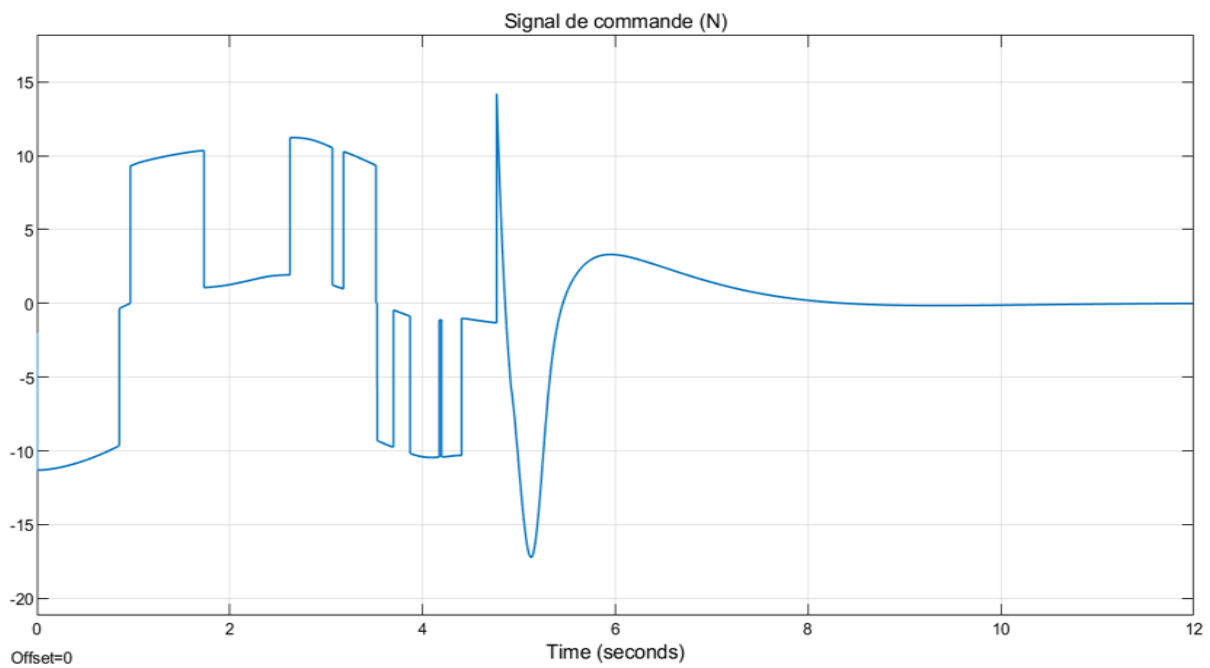


Figure III.3 : Evolution du Signal de Commande en fonction du temps

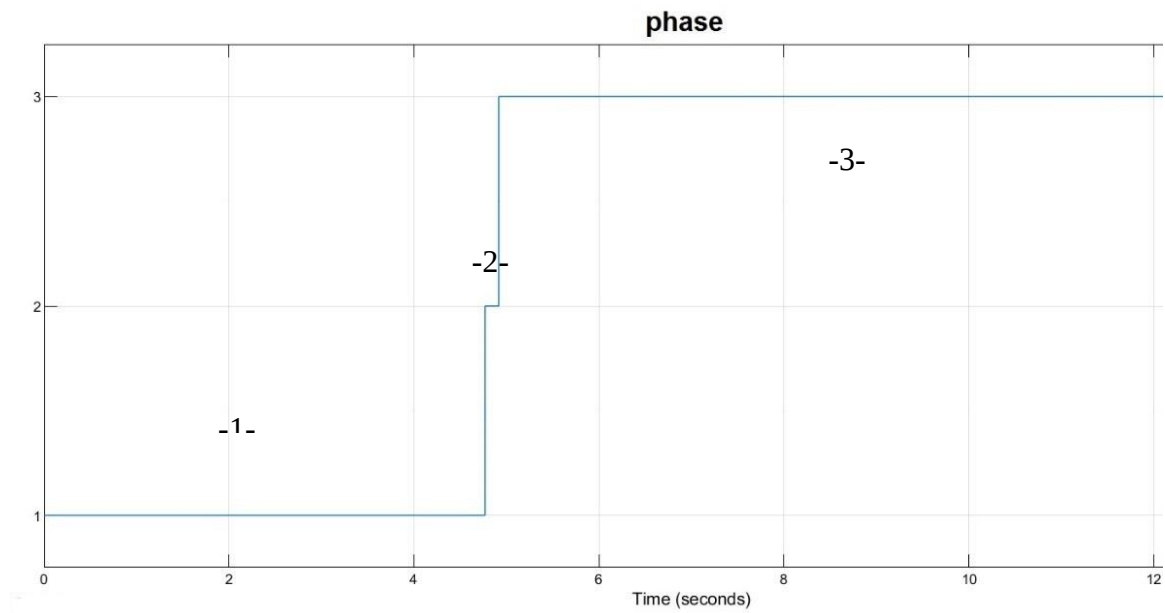


Figure III.4 : Schématisation des trois phases de commutation (switching phase)

Les résultats de simulation sont donnés par les réponses suivantes :

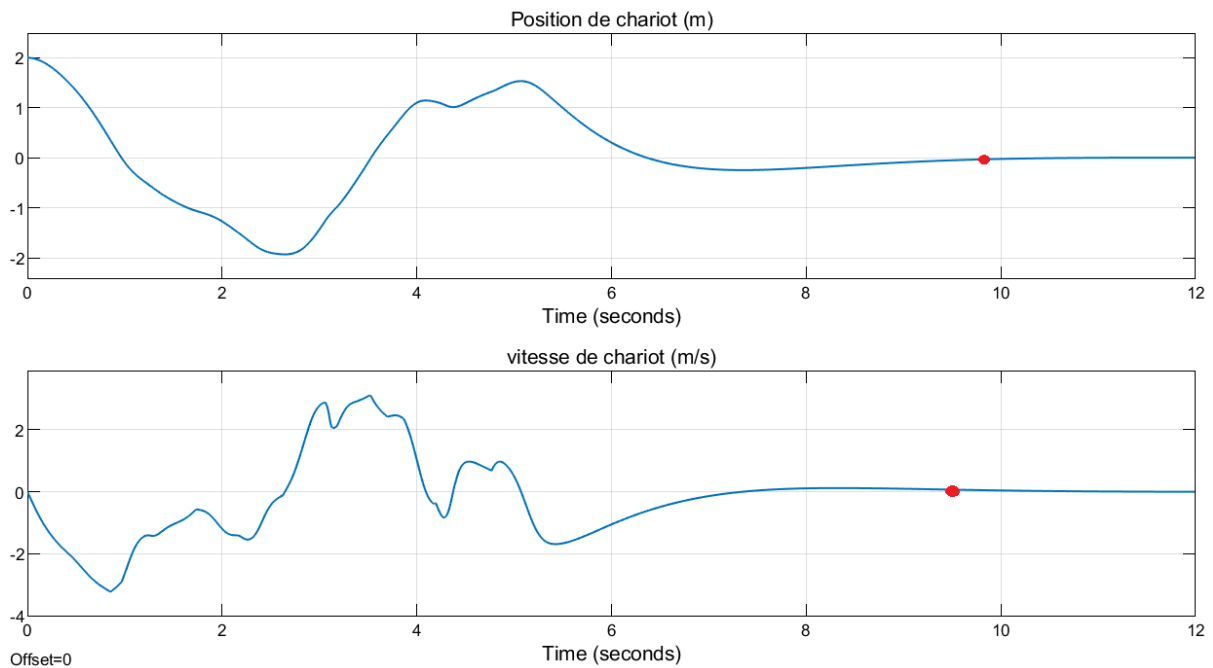


Figure III.5 : Réponses de la position horizontale x_0 et vitesse horizontale $\dot{x}_0$ du chariot

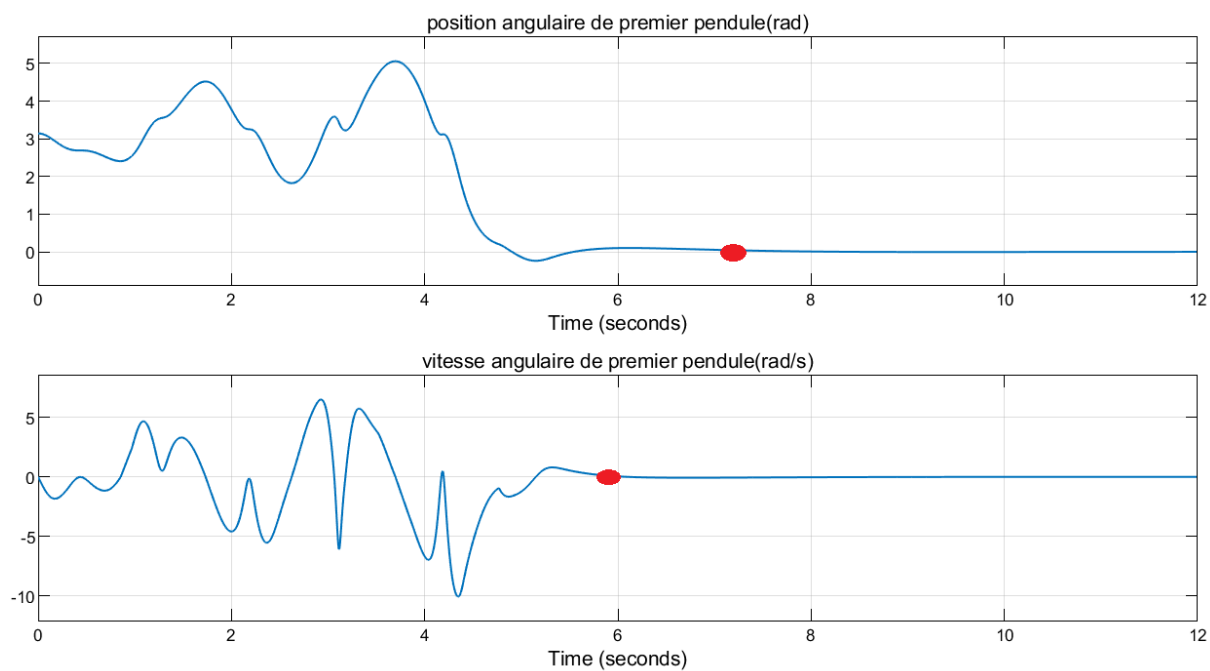


Figure III.6 : Réponses de la position angulaire θ_1 et vitesse angulaire $\dot{\theta}_1$ du premier pendule

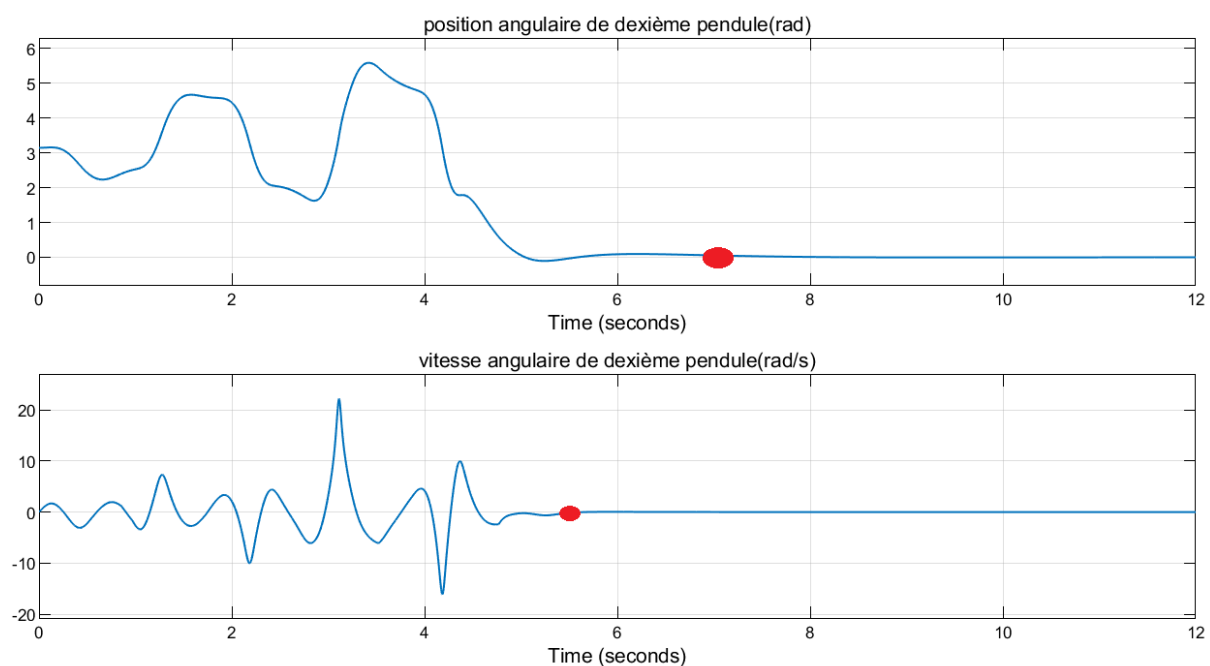


Figure III.7 : Réponses de la position angulaire θ_2 et vitesse angulaire $\dot{\theta}_2$ du deuxième pendule

Interprétation des Résultats :

D'après les réponses de la position horizontale et vitesse horizontale du chariot de la **Figure III.5**, la position angulaire et vitesse angulaire du premier pendule de la **Figure III.6** et la position angulaire et vitesse angulaire du deuxième pendule de la **Figure III.7** obtenues, nous avons bien retrouvé les trois phases de la commande développée. Dans l'intervalle de temps $t \in [0 \quad 4.9183 \text{ s}]$, nous avons la première phase qui correspond au basculement du premier pendule et le ramener vers la zone linéaire. On voit bien durant cette phase que les réponses sont instables. Puis un très petit laps de temps $t \in [4.7689 \text{ s} \quad 4.9183 \text{ s}]$ qui ne dépasse pas 0.2 seconds et qui correspond à la stabilisation du premier pendule et au basculement du deuxième pendule pour le ramener à sa position d'équilibre. Et en fin, la phase de stabilisation pour $t > 4.9183 \text{ s}$, on voit bien que la stabilisation des six réponses vers la position d'équilibre instable $(0,0,0,0,0,0)$ en points rouges est atteinte et le système reste stable.

Conclusion

Dans ce dernier chapitre nous avons simulé sous Matlab deux lois de commande qui sont basées sur la méthode énergétique et LQR, en trois différentes phases, pour balancer notre double pendule inversé et le stabiliser.

Dans la première phase, nous avons appliqué la loi de commande énergétique sur le premier pendule qui a successivement fait le balancement. Après nous avons appliqué deux lois de commande dans la deuxième phase « commande énergétique » pour le deuxième pendule et commande « LQR » pour le premier pendule, cette deuxième phase a été réalisée durant un très petit laps de temps ne dépassant pas 0.2 secondes. Et enfin dans la troisième et dernière phase, par le biais de la commande LQR, la stabilisation du système a été parfaitement achevée.

Conclusion générale

Ce mémoire a été consacré à l'étude et à la commande d'un double pendule inversé sur chariot (DPIC). Dans un premier temps, il a été convenu de commencer par un état de l'art concernant les différents types de pendules existants et leurs domaines d'application dans notre vie quotidienne, et de leurs importances que ce soit en robotique, en médecine, en aérospatiale etc. C'est la raison pour laquelle notre projet a été annoncé.

Dans un second temps, nous avons pris connaissance de l'importance d'une bonne modélisation de la dynamique du système, c'est ainsi que nous avons entrepris l'étude des équations du mouvement du DPIC où nous nous sommes appuyés sur le formalisme d'Euler-Lagrange. Le modèle que nous avons obtenu a mis en évidence des fortes non-linéarités intrinsèques au système. Et avec l'aide de l'outil de linéarisation « Linear Analysis Tool » disponible sur Matlab, nous avons pu avoir une linéarisation efficace du système. Finalement, la synthèse de la commande par le régulateur LQR et la commande énergétique a été développée pour la stabilisation du DPIC. Pour faire cela, on a suivi une stratégie qui consistait en trois différentes phases ramenant le système à sa position d'équilibre instable. Les simulations du système stabilisé par la loi de commande développée ont été réalisées sous l'environnement Matlab/Simulink avec le programme d'acquisition SimMechanics.

Enfin, nous souhaitons que ce travail soit repris par d'autres étudiants en vue de l'améliorer encore plus. C'est pour cela que nous dressons comme perspectives, que nous recommandons, les points essentiels suivants :

- Faire une modélisation et une représentation d'état du système avec les frottements qui seront considérés comme perturbations et incertitudes affectant le DPIC. Donc, on aura à faire à un système incertain.
- Considérer une procédure de commande faisant intervenir que le modèle non linéaire du système c.-à-d. sans négliger ces non-linéarités que représentent le système réel.
- Effectuer des améliorations de balancement avec un control optimal.
- L'application de la commande sur le système réel avec une considération de la coté mécanique de capteurs, actionneur, et l'inertie de système.

Annexe

```
m1=0.5;
m2=0.75;
L1=0.5;
L2=0.75;
I1=(m1*L1^2)/12;
I2=(m2*L2^2)/12;
g=9.8;
Q=diag([10 1 0 0 0 0]);
R=1;
Q1=diag([1 0 0 0]);
R1=1;
A=[0 1 0 0 0 0;
    0 0 -6.62 0 0.76 0;
    0 0 0 1 0 0;
    0 0 40.30 0 -32.66 0;
    0 0 0 0 0 1;
    0 0 -47.65 0 82.57 0];
A1=[0 1 0 0;
    0 0 -6.62 0;
    0 0 0 1;
    0 0 40.30 0];
B=[0;0.60;0;-1.49;0;1.76];
B1=[0;0.60;0;-1.49];
C=diag([1 1 1 1 1 1]);
C1=diag([1 1 1 1]);
D=[0;0;0;0;0;0];
D1=[0;0;0;0];
D2=[0;0];
sys=ss(A,B,C,D);
sys1=ss(A1,B1,C1,D1);
sys2=ss(A2,B2,C2,D2);
k=lqr(sys,Q,R);
k1=lqr(sys1,Q1,R1);
```

Bibliographie

- [1] Chojitsa. "Schematic drawing of an inverted pendulum on a cart", image file, disponible sur wikimedia sur le site : <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cart-pendulum.png?uselang=fr>, consulté : le 08/28/2020
- [2] A. A. Shojaei, M. F. Othman, R. Rahmani and M. R. Rani. "A Hybrid Control Scheme for a Rotational Inverted Pendulum". In: *UKSim 5th European Symposium on Computer Modeling and Simulation*. 16-18 Nov 2011, Madrid, Spain; pp. 83–87.
- [3] M. Mihelj and M. Munih. "Double inverted pendulum optimal control - Basis for unsupported standing in paraplegia". In: *7th International Workshop on Advanced Motion Control Proceedings*, 3-5 July 2002, Maribor, Slovenia; pp. 121 - 126
- [4] S. Kawaji and K. Kanazawa. "Control of double inverted pendulum with elastic joint". In: *Proceedings IROS '91: IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems '91*. 3-5 Nov 1991, Osaka, Japan; pp. 946-951.
- [5] K. H. Lundberg and J. K. Roberge. "Classical dual-inverted-pendulum control". In: *42nd IEEE International Conference on Decision and Control*. 9-12 Dec 2003, Maui, HI, USA; pp. 4399-4404
- [6] E. Witrant. "Stabilisation des systèmes commandés par réseaux". *Thèse de doctorat*, Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, France, 2005
- [7] A. KOUIDER and P. Abdelkrim. "Etude et réalisation expérimentales d'une commande destinée à contrôler un pendule inverse". *Mémoire Master*, Université Djilali Bounaama – Khemis Miliana, 2017.
- [8] L. AKSAS. "Commande floue d'un pendule inversé-application sur un banc d'essais". *Mémoire Magister*, Université Abderrahmane MIRA BEJAIA, 2014.
- [9] Documentations divers (image file) sur les pendules inversés sur le site Web : <https://www.ljll.math.upmc.fr/~trelat/fichiers/plaquettePASSION.pdf> consulté : le 28/08/2020

[10] Documentation sur le pendule de Loisir, CraZanity sur le site Web : <https://apnews.com/34a1008160a740fdb72a9d059e57b8> consulté : le 28/08/2020

[11] A. Sayadi, S. Foroughi and S.M. Altamimi. "Control of the Double Inverted Pendulum on Cart". Course Project, Mechatronics - MECH 6741, 2019

[12] Bogdanov Alexander. "Optimal Control of a Double Inverted Pendulum on a Cart". Technical Report CSE-04-006, December 2004

[13] Henmi, Tomohiro, Deng, Mingcong, Inoue, Akira, Ueki, Nobuyuki, Hirashima, Yoichi. "Energy based control of a double inverted pendulum". *IFAC Proceedings Volumes*. 2004; Vol 37(12): pp 173-178

[14] H.K. Khalil. "Nonlinear Systems", 2nd edition, Prentice Hall, MacMillan, New York 1996

[15] Banerjee, Ramashis and Dey, Naiwrita and Mondal, Ujjwal and Hazra, Bonhihotri. "Stabilization of Double Link Inverted Pendulum Using LQR". In: *Proceeding of 2018 IEEE International Conference on Current Trends toward Converging Technologies*, Coimbatore, India. 2018 : pp 1-6

[16] E. Laroche. "Commande Optimale". Support de cours. Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg, 3^{ème} année, Option Ingénierie des Systèmes, Automatique et Vision. 2009-2010 : pp 1-57

