MINISTÉRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ M'HAMED BOUGARA-BOUMERDES

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : **Analyse**

Présenté par : **ZENNOUCHE Hichem**

SUR LES POINTS FIXES COMMUNS DE F-CONTRACTIONS FAIBLEMENT CROISSANTES DANS LES ESPACES MÉTRIQUES PARTIELS ORDONNÉS

Dr. MESKINE Naima	*Présidente*
Dr. ADJABI Yassine	*Examinature*
Dr. MECHROUK Salima	*Encadreur*

DÉDICACES

A qui Dieu a confié prestige et dignité ... A qui m'a appris à donner sans attendre ... A qui je porte son nom avec fierté ... A mon cher père rabi yerahmou nchallah.

Au sens de l'amour, au sens de la tendresse et de la dévotion. Au sourire de la vie et au mystère de l'existence A qui était sa prière, le secret de ma réussite et sa tendresse, un baume chirurgical au plus précieux de ma bien-aimée chère mère.

A ma famille, mes frères et soeurs et tous les amis .

REMERCIEMENT

Louange à Dieu avant tout.

Nous devons faire nos derniers pas dans la vie universitaire à partir d'une pause et revenir sur les années que nous avons passées sur le campus avec nos estimés professeurs qui nous ont beaucoup donné et ont fait de grands efforts pour construire la future génération ...

Et avant de partir, j'offre les plus hauts versets de remerciement, de gratitude et d'appréciation à ceux qui ont ouvert la voie à la connaissance et à la connaissance à ceux qui nous ont enseigné des lettres d'or et des mots de la lumière à tous nos estimés enseignants ... En particulier, merci, gratitude et gratitude à l'éminent professeur, **Dr. MECHROUK Salima** Superviser cette recherche pour tous les efforts et directions que vous m'avez présentés.

Je remercie beaucoup mes frères et soeurs qui m'ont soutenu tout au long de ma carrière universitaire .

et enfin, Je remercie les amis du département mathématiques et mes remerciements particuliers aux amis de groupe analyse mathématique

RÉSUMÉ

Dans ce modeste travail, on s'intéresse à présenter un théorème récent sur l'existence et l'unicité d'un point fixe commun pour des opérateurs univoques. Ces résultats s'avèrent être un outil efficace pour la théorie du point fixe en analyse fonctionnelle.

Avant d'aborder ce théorème, nous commençons par les concepts des espaces métriques partiels et les applications F-contractions faiblement croissantes. Nous montrons également que ce résultat principal nous donne d'une part l'existence de solutions d'une équation intégrale implicite et d'autre part, la généralisation de certains résultats récents sur les applications F-contractions.

L'esprit des hypoyhèses de ce mémoire interviennent dans le travail de [11].

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Le théorème du point fixe est un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un point fixe x_0, tel que $f(x_0) = x_0$. Ces théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles pour l'analyse classique.

La théorie du point fixe est très puissante dans l'analyse car elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence de nombreux problèmes aux limites.
Le développement de la théorie du point fixe a donné un grand effet sur l'avancement de l'analyse non linéaire.

Dans ce mémoire on s'intéresse à donner des conditions suffisantes sur les deux opérateurs $T, S : E \longrightarrow E$ et sur l'espace E pour que l'équation $S(v) = T(v) = v$ ait au moins une solution (unique dans la possibilité), on dira que c'est un point fixe commun des deux opérateurs T et S. Ce résultat d'existence nous permet de prouver que certaines équations différentielles admettent des solutions sans les déterminer explicitement.

Dans ce mémoire, un théorème important sera presenté concernant l'existence et l'unicité des points fixes communs (non nuls) pour des application F-contractives dans des espaces métriques partiels et ordonnés.

Le principe de contraction de Banach a de nombreuses généralisations fructueuses dans diverses directions. L'une de ces généralisations est la F-contraction présentée par Wardowski [1] qui définie sur un espace métrique complet un point fixe unique. Le concept d'une F-contraction s'avère être un outil efficace pour la théorie du point fixe. Plusieurs articles de recherche sur les contractions F ont été publié (voir, par exemple, $[2, 3, 4, 5]$). Récemment, Cosentino et Verto [7] ont établi un point fixe résultat pour la F-contraction. Nous nous basons dans ce mémoire sur les articles [11]. Ce mémoire est composé de quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux rappels et préliminaires sur certaines notions topologiques dont on aura besoin pour notre travail.

le deuxième chapitre porte sur le théorème du point fixe commun pour des opérateurs de type F-contraction.

Le troisième chapitre nous allons présenter le théorème du point fixe pour des opérateurs de type F-contractions faiblement croissantes avec sa démonstration.

le quatrième chapitre est une application des résultats trouvés dans le chapitre précédent à une équation différentielle intégrale non linéaire. Nous terminons ce travail par une conclusion et une bibliographie.

CHAPITRE

1

RAPPELS ET PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre on rappelle quelques notions topologiques (voir la référence [6]) dont nous aurons besoin tout au long de ce travail.

1.1 Rappels et Définitions

1.1.1 Espace métrique

Définition 1.1. *On appelle distance sur un ensemble X, toute application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$, possédant les propriétés suivantes :*

(i) $d(x, y) = d(y, x)$ *(symétrie),*

(ii) $d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$ *(séparation),*

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire),*

pour tout $x, y, z \in X$. *On appelle* (X, d) *un espace métrique si* X *est un ensemble non vide* *et d une distance sur X.*

Définition 1.2. *Espace métrique complet :*

Un espace métrique E est dit complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente.

1.1.2 Continuité d'application à l'aide des suites

Définition 1.3.

Soient E et F deux espaces normés. On dit qu'une application $T : E \longrightarrow F$ est continue en $a \in E$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ convergent vers a, la suite $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in F$ converge vers $T(a)$.

1.1.3 Ouvert et Fermé

Définition 1.4. *Soit (E, d) un espace métrique et soient O, F deux sous ensembles de E.*
1) *Oest dit ouvert si :*

$$\forall x \in O, \exists r > 0 \quad \textit{tel que} \quad B(x, r) \subset O,$$

où $B(x, r)$ désigne la boule de centre x et de rayon r.
2) *F est dit fermé si son complémentaire $C_E F$ est un ouvert de E.*

1.1.4 Ensemble ordonné

On commence d'abord par la définition d'une relation d'ordre

Relation d'ordre

On dit qu'une relation binaire R est une relation d'ordre sur un ensemble E si elle est :
— réflexive : $\forall x \in E$, xRx
— transitive : $\forall x, y, z \in E$, xRy et $yRz \Rightarrow xRz$
— antisymétrique : $\forall x, y \in E, xRy$ et $yRx \Rightarrow x = y$
Un ensemble E muni d'une relation d'ordre R est appelé un ensemble ordonné.

1.2 Espaces métriques partiels (voir la référence [6])

Définition 1.5. *Soit X un ensemble non vide. On dit que l'application $p : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est un métrique partiel sur X si pour tout $x, y, z \in X$, les conditions suivantes sont satisfaites :*

(H_1) $x = y \Longleftrightarrow p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$,

(H_2) $p(x,x) \leqslant p(x,y)$,

(H_3) $p(x,y) = p(y,x)$,

(H_4) $p(x,z) \leqslant p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$.

Alors (X, p) est dit un espace métrique partiel tel que X est un ensemble non vide et p est un métrique partiel sur X.

Exemple 1.1. *la fonction $p_i : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+ (i \in \{1,2,3\})$ définie par :*
$p_1(x,y) = d(x,y) + p(x,y)$,
$p_2(x,y) = p(x,y) + \max\{w(x), w(y)\}$,
$p_3(x,y) = d(x,y) + a$.
est une métrique partielle dans X où d est une distance, $w : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction arbitraire et $a \geqslant 0$.

Soit $x, y, z \in X$.

- **Pour la partielle métrique** p_1.

  Pour $x = y$, en effet :

$$\begin{aligned} p_1(x,x) &= d(x,x) + p(x,x) \\ &= d(x,y) + p(x,y) \\ &= d(y,y) + p(y,y). \end{aligned}$$

  Par suite

$$x = y \Longleftrightarrow p_1(x,x) = p_1(x,y) = p_1(y,y).$$

  Or

$$0 = d(x,x) \leqslant d(x,y)$$

et

$$p(x,x) \leqslant p(x,y).$$

Ce qui implique que :

$$p_1(x,x) = d(x,x) + p(x,x) \leqslant d(x,y) + p(x,y) = p_1(x,y).$$

De plus, en effet :

$$p_1(x,y) = d(x,y) + p(x,y) = d(y,x) + p(y,x) = p_1(y,x).$$

en effet aussi

$$\begin{array}{rcl} p_1(x,z) & = & d(x,z) + p(x,z) \\ & \leqslant & d(x,y) + d(y,z) + p(x,y) + p(y,z) - p(y,y) \\ & = & d(x,y) + d(y,z) - d(y,y) + p(x,y) + p(y,z) - p(y,y), \ (\text{car } d(y,y) = 0). \\ & = & d(x,y) + p(x,y) + d(y,z) + p(y,z) - d(y,y) - p(y,y) \\ & \leqslant & p_1(x,y) + p_1(y,z) - p_1(y,y). \end{array}$$

- **Pour la partielle métrique** p_2.

  Pour $x = y$, en effet :

$$\begin{array}{rcl} p_2(x,x) & = & p(x,x) + \max\{w(x), w(x)\} \\ & = & p(x,y) + \max\{w(x), w(y)\} \\ & = & p(y,y) + \max\{w(y), w(y)\}. \end{array}$$

Donc

$$x = y \Longleftrightarrow p_2(x,x) = p_2(x,y) = p_2(y,y).$$

De plus

$$p_2(x,y) = p(x,y) + \max\{w(x), w(y)\} = p(y,x) + \max\{w(y), w(x)\} = p_2(y,x).$$

en effet aussi :

$$\begin{aligned}
p_2(x,z) &= p(x,z) + \max\{w(x),w(z)\} \\
&\leqslant p(x,y) + p(y,z) - p(y,y) + \max\{w(x),w(y)\} \\
&\quad + \max\{w(y),w(z)\} - \max\{w(y),w(y)\} \\
&= p(x,y) + \max\{w(x),w(y)\} + p(y,z) + \max\{w(y),w(z)\} \\
&\quad -p(y,y) - \max\{w(y),w(y)\} \\
&\leqslant p_2(x,y) + p_2(y,z) - p_2(y,y).
\end{aligned}$$

Pour la partielle métrique p_3.

Pour $x = y$, en effet :

$$\begin{aligned}
p_3(x,x) &= d(x,x) + a \\
&= d(x,y) + a \\
&= d(y,y) + a
\end{aligned}$$

Donc

$$x = y \Longleftrightarrow p_3(x,x) = p_3(x,y) = p_3(y,y).$$

De plus $p_3(x,y) = d(x,y) + a$, et $p_3(x,x) = d(x,x) + a$.

Comme $0 = d(x,x) \leqslant d(x,y)$, alors

$$p_3(x,x) = d(x,x) + a \leqslant d(x,y) + a = p_3(x,y).$$

Ce qui implique que :

$$p_3(x,y) = d(x,y) + a = d(y,x) + a = p_3(y,x).$$

en effet aussi

$$\begin{aligned}
p_3(x,z) &= d(x,z) + a \\
&\leqslant d(x,y) + d(y,z) - d(y,y) + a + a - a \\
&= d(x,y) + a + d(y,z) + a - a - d(y,y) \\
&= p_3(x,y) + p_3(y,z) - p_3(y,y).
\end{aligned}$$

D'où $(X, p_i)_{i=1,2,3}$ est un espace métrique partiel.

Exemple 1.2. *On considère la fonction* $p : \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *définie pour tout* $x, y \in \mathbb{R}^-$, *par :*

$$p(x, y) = -min\{x, y\},$$

le pair $(\mathbb{R}^-, p)$ *est un espace métrique partiel.*

1. en effet :

$$x = y \Longleftrightarrow p(x, x) = -min\{x, x\} = -min\{x, y\} = -min\{y, y\}$$

   Donc

$$x = y \Longleftrightarrow p(x, x) = p(x, y) = p(y, y).$$

   La condition (H_1) **est satisfaite.**

2. Soit $x, y \in \mathbb{R}^-$. en effet

$$min\{x, y\} \leqslant x \Longleftrightarrow -min\{x, y\} \geqslant -x.$$

   Donc

$$p(x, y) = -min\{x, y\} \geqslant -x = p(x, x).$$

   La (H_2) **condition est satisfaite.**

3. Soit $x, y \in \mathbb{R}^-$. en effet :

$$p(x, y) = -min\{x, y\} = -min\{y, x\} = p(y, x).$$

   La condition (H_3) **est satisfaite.**

4. Soit $x, y, z \in \mathbb{R}^-$. Nous s'assurons que :

$$p(x, z) \leqslant p(x, y) + p(y, z) - p(y, y). \tag{1.2.1}$$

   Nous considérons les trois cas suivants : $y \leqslant x \leqslant z$,$x \leqslant y \leqslant z$ et $x \leqslant z \leqslant y$.

• Premier cas $y \leqslant x \leqslant z$. en effet :

$$\begin{aligned} p(x,z) &= -min\{x,z\} = -x, \\ p(x,y) &= -min\{x,y\} = -y, \\ p(y,z) &= -min\{y,z\} = -y, \\ p(y,y) &= -min\{y,y\} = -y. \end{aligned}$$

En reportant les valeurs de $p(x,z), p(x,y), p(y,z)$ dans (1.2.1), il vient que :

$$-x \leqslant -y - y + y \Longleftrightarrow x \geqslant y.$$

Donc

$$p(x,z) \leqslant p(x,y) + p(y,z) - p(y,y).$$

• Deuxième cas $x \leqslant y \leqslant z$.

en effet

$$\begin{aligned} p(x,z) &= -min\{x,z\} = -x, \\ p(x,y) &= -min\{x,y\} = -x, \\ p(y,z) &= -min\{y,z\} = -y, \\ p(y,y) &= -min\{y,y\} = -y, \end{aligned}$$

En reportant les valeurs de $p(x,z), p(x,y), p(y,z)$ et $p(y,y)$ dans (1.2.1), on obtient :

$$\begin{aligned} -x \leqslant -x - x + y &\Longleftrightarrow -x \leqslant -2x + y \\ &\Longleftrightarrow -x + 2x \leqslant y \\ &\Longleftrightarrow x \leqslant y. \end{aligned}$$

Donc

$$p(x,z) \leqslant p(x,y) + p(y,z) - p(y,y).$$

• Troisième cas $x \leqslant z \leqslant y$.

en effet

$$
\begin{aligned}
p(x,z) &= -min\{x,z\} = -x, \\
p(x,y) &= -min\{x,y\} = -x, \\
p(y,z) &= -min\{y,z\} = -z, \\
p(y,y) &= -min\{y,y\} = -y,
\end{aligned}
$$

En reportant les valeurs de $p(x,z), p(x,y), p(y,z)$ et $p(y,y)$ dans (1.2.1), on obtient :

$$-x \leqslant -x - z + y \Longleftrightarrow 0 \leqslant -z + y \Longleftrightarrow z \leqslant y.$$

Donc

$$p(x,z) \leqslant p(x,y) + p(y,z) - p(y,y).$$

Il vient que l'hypothèse (H_4) est satisfaite. D'où (X, p_i), $i = 1, 2, 3$, est un espace métrique partiel.

Définition 1.6.

— *La topologie métrique d'un espace métrique partiel (X,p) est donnée par :*

$$\mathcal{T}[p] = \{B_p(x,\varepsilon),\, x \in X,\, \varepsilon > 0\},$$

où $B_p(x,\varepsilon)$ désigne la boule ouverte dans X de centre x et de rayon ε.

— *Une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans un espace métrique partiel (X,p) converge vers $x \in X$ si et seulement si*

$$p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x,x_n).$$

— *Une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans un espace métrique partiel (X,p) est dite de Cauchy si* $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$ *existe (et finie).*

— *Un espace métrique partiel (X,p) est complet si toute suite de Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans X converge par rapport à $\mathcal{T}[p]$ vers un point $x \in X$ tel que*

$$p(x,x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m).$$

Lemme 1.1.

(1) *Soit (X, p) un espace métrique partiel. La fonction $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$, définie pour tout x, $y \in X$, par :*

$$d(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y)$$

est une distance sur X (distance induite).

(2) *Une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans un espace métrique partiel (X, p) si et seulement si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace métrique (X, d).*

(3) *Un espace métrique partiel (X, p) est complet si et seulement si l'espace métrique (X, d) est complet.*

$$\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0 \Longleftrightarrow p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x, x_n) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m).$$

(4) *Une $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X converge vers un point $x \in X$ si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} p(x, x_n) = p(x, x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m).$$

Définition 1.7. [12] *Soit $(X, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et p une métrique partielle sur X. Alors le triplet $(X, \preccurlyeq, p)$ est appelé un espace métrique partiel ordonné. De plus, si (X, p) est complet, alors $(X, \preccurlyeq, p)$ est appelé un espace métrique partiel complet ordonné.*

Définition 1.8. [1]

Soit $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant les conditions suivantes :

(F_1) *F est strictement croissant, c'est-à-dire pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tel que*

$$\alpha < \beta \Longrightarrow F(\alpha) < F(\beta).$$

(F_2) *Pour chaque suite $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres positifs la condition suivante est satisfaite :*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty.$$

(F_3) *Il existe $k \in (0, 1)$ tel que $\lim_{\alpha\to 0^+} \alpha^k F(\alpha) = 0$.*

On note l'ensemble de toutes les fonctions satisfaisant aux conditions $(F_1), (F_2)$ et (F_3) par Δ_F.

Exemple 1.3. *Soit* $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *défini par :*

1. $F(r) = \ln(r)$,
2. $F(r) = r + \ln(r)$,
3. $F(r) = \ln(r^2 + r)$,
4. $F(r) = -\frac{1}{\sqrt{r}}$.

Il est clair que chaque F *appartient à* Δ_F.

1. Montrons que $F \in \Delta_F$ tel que :

$$F(r) = \ln(r).$$

(F_1) La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
(F_2) Soit $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs tel que

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

en effet

$$F(\alpha_n) = \ln(\alpha_n)$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \ln(\alpha_n)$$

Par la continuité de la fonction " ln " il vient que

$$\lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = \ln(0) = -\infty.$$

Supposons maintenant que

$$\lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \ln(\alpha_n) = -\infty.$$

Par la continuité de la fonction " e "

$$\lim_{n\to\infty} e^{\ln(\alpha_n)} = e^{-\infty}.$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

(F_3) $\exists\ k = \frac{1}{2} \in (0,1)$ tel que

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0^+} \sqrt{\alpha}(\ln(\alpha)) &= \lim_{\alpha\to 0^+} \sqrt{\alpha}(\ln(\sqrt{\alpha})^2) \\
&= \lim_{\alpha\to 0^+} 2\sqrt{\alpha}(\ln(\sqrt{\alpha})) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'où F appartient à Δ_F.

CHAPITRE

2

POINT FIXE DES APPLICATIONS F_D-CONTRACTIONS

Dans cette section, nous allons présenter un théorème du point fixe pour des opérateurs de type F-contractions.

Définition 2.1. [1]

Soit (X, d) un espace métrique. On dit que l'application $T : X \longrightarrow X$ est une F_d-contraction, s'il existe une fonctions $F \in \Delta_F$ et une constante $\tau > 0$, tels que :

$$(d(T(x), T(y))) > 0 \Longrightarrow \tau + F(d(T(x), T(y))) \leqslant F(d(x, y)),$$

pour tout $x, y \in X$.

Définition 2.2. *Soit (X, p) un espace métrique partiel. On dit que l'application $T : X \longrightarrow X$*

est une F_p-contraction, s'il existe $F \in \Delta_F$ et $\tau > 0$, tels que :

$$p(T(x),T(y)) > 0 \Longrightarrow \tau + F(p(T(x),T(y))) \leqslant F(p(x,y)), \qquad (2.0.1)$$

pour tout $x, y \in X$.

L'exemple suivant montre qu'une application F_p-contraction est plus générale qu'une F_d-contraction.

Exemple 2.1. *Soit $X = [0,1]$ et soit p un métrique partiel défini pour tout $x, y \in X$, par : $p(x,y) = \max\{x,y\}$.*
la distance d induite par le métrique partielle p est donnée par $d(x,y) = |x-y|$ pour tout $x, y \in X$. Considérons la fonction $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $F(r) = \ln(r)$ et l'application T, tel que :

$$T(r) = \begin{cases} \frac{r}{5} & si\ r \in [0,1); \\ \\ 0 & si\ r = 1; \end{cases}$$

Notons que pour tout $x, y \in X$, tel que pour $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$, T est une F_p-contraction. Autrement dit pour $d(T(x),T(y)) > 0$, en effet :

$$\tau + F(p(T(x),T(y))) \leqslant F(p(x,y)).$$

Pour $x, y \in X = [0,1]$.
On considère le cas où $x \leqslant y$ (De manière similaire pour $x \leqslant y$).
Discutons les cas suivants :

1. $x \in [0,1)$ et $y = 1$. On choisit τ, tel que :

$$\tau + F(\frac{x}{5}) \leq F(x).$$

en effet :

$$\begin{aligned}
\tau + F(p(T(x),T(y))) &= \tau + F(p(\frac{x}{5},0)) \\
&= \tau + F(\max\{\frac{x}{5},0\}) \\
&= \tau + F(\frac{x}{5}) \\
&= \tau + \ln(\frac{x}{5}) \\
&\leqslant F(x) = F(\max(x,1)) = F(p(x,1)).
\end{aligned}$$

2. $x = 1$ et $y = 1$. On choisit τ, tel que :

$$\tau + \lim_{x\to 0} F(x) \leq 0.$$

en effet :

$$\begin{aligned}
\tau + F(p(T(x),T(y))) &= \tau + F(p(0,0)) \\
&= \tau + F(\max\{0,0\}) \\
&= \tau + \lim_{x\to 0} F(x) \\
&\leq 0 \\
&= F(\max(1,1)) \\
&= F(p(1,1)).
\end{aligned}$$

3. $x, y \in [0,1)$. On choisit τ, tel que :

$$\tau + F(\frac{y}{5}) \leq F(y).$$

en effet :

$$\begin{aligned}
\tau + F(p(T(x),T(y))) &= \tau + F(p(\frac{x}{5},\frac{y}{5})) \\
&= \tau + F(\frac{y}{5}) \\
&= \tau + \ln(\frac{y}{5}) \\
&\leqslant F(y) = F(\max(x,y)) = F(p(x,y)).
\end{aligned}$$

Il vient que T est une F_p-contraction.

L'application T n'est pas une F_d-contraction. En effet, pour $x = 1$ et $y = \frac{5}{6}$, en effet :

$$d(T(x), T(y)) = d(T(1), T(\frac{5}{6})) = d(0, \frac{1}{6}) = \frac{1}{6} > 0.$$

Comme $d(x, y) = d(1, \frac{5}{6}) = |1 - \frac{5}{6}| = \frac{1}{6}$, alors

$$\begin{aligned} \tau + F(d(T(x), T(y))) \leqslant F(d(x, y)) &\iff \tau + F(\frac{1}{6}) \leqslant F(\frac{1}{6}) \\ &\iff \tau + \ln(\frac{1}{6}) \leqslant \ln(\frac{1}{6}) \\ &\iff \tau \leqslant 0. \end{aligned}$$

Ce qui est une contradiction pour toutes les valeurs possibles de τ.

Wardowski [1] a prouvé le théorème suivant en utilisant la définition de $F-$contraction.

Théorème 2.1. [1]

Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $T : X \longrightarrow X$ une F_d-contraction. Alors T a un point fixe unique $x^* \in X$ et pour chaque $x_0 \in X$ la suite $\{T^n x_0\}_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers x^*.

preuve.

Observons tout d'abord que T admet au plus un point fixe. En effet, soit $x_1^*, x_2^* \in X$, avec $x_1^* \neq x_2^*$, tel que $T(x_1^*) = T(x_2^*)$, alors de (2.0.1) nous avons :

$$\tau \leqslant F(d(x_1^*, x_2^*)) - F(d(T(x_1^*), T(x_2^*))) = 0.$$

Ce qui est une contradiction.

Afin de montrer que T admet un point fixe (existence de point fixe). Soit $x_0 \in X$ fixé. Nous définissons une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, comme suit :

$$x_{n+1} = T(x_n),\ n = 0, 1, ...$$

Notons $\gamma_n = d(x_{n+1}, x_n)$, $n = 0, 1, 2, ...$

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0+1} = x_{n_0}$, alors $T(x_{n_0}) = x_{n_0}$ et la démonstration est terminée. Supposons maintenant que $x_{n+1} \neq x_n$, pour tout $n \in N$ et $\gamma_n > 0$ pour tout $n \in N$. Il vient de (2.0.1) que

$$F(\gamma_n) \leqslant F(\gamma_{n-1}) - \tau \leqslant F(\gamma_{n-2}) - 2\tau \leqslant .... \leqslant F(\gamma_0) - n\tau. \tag{2.0.2}$$

De (2.0.2), on obtient $\lim_{n\to\infty} F(\gamma_n) = -\infty$. En utilisant (F_2), il vient que

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0. \tag{2.0.3}$$

De (F_3), il existe $k \in (0,1)$, tel que

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n^k F(\gamma_n) = 0. \tag{2.0.4}$$

De (2.0.2), il vient pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\gamma_n^k F(\gamma_n) - \gamma_n^k F(\gamma_0) \leqslant \gamma_n^k (F(\gamma_0) - n\tau) - \gamma_n^k F(\gamma_0) = -\gamma_n^k n\tau \leqslant 0. \tag{2.0.5}$$

En faisant $n \to \infty$ dans (2.0.5), et en utilisant (2.0.3) et (2.0.4), on obtient

$$\lim_{n\to\infty} n\gamma_n^k = 0. \tag{2.0.6}$$

Maintenant, observons qu'à partir de (2.0.6) il existe $n_1 \in N$ tel que $n\gamma_n^k \leqslant 1$ pour tout $n \geq n_1$. Par conséquent, nous avons

$$\gamma_n \leqslant \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}}, \qquad \text{pour tout} \qquad n \geq n_1. \tag{2.0.7}$$

Pour montrer que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, considérons $m, n \in \mathbb{N}$ tel que $m > n \geq n_1$. De la définition de la métrique partielle et de (2.0.7), ona :

$$d(x_m, x_n) \leqslant \gamma_{m-1} + \gamma_{m-2} + \cdots + \gamma_n < \sum_{i=n}^{\infty} \gamma_i \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{k}}}.$$

De ce qui précède et de la convergence des séries $\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{k}}}$, nous pouvons conclure que la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X. Par la complétude de X, il existe $x^* \in X$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$. Finalement, la continuité de T donne

$$d(T(x^*), x^*) = \lim_{n\to\infty} d(T(x_n), x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_{n+1}, x_n) = 0,$$

ce qui complète la preuve.

Récemment, Durmaz, Minak et Altun [4] ont obtenu une version ordonnée du théorème 2.1.

Définition 2.3. [4]

Soit $(X, \preccurlyeq)$ *un ensemble ordonné et* d *une métrique sur* X*, alors on dira que le triplé* $(X, \preccurlyeq, d)$ *est un espace métrique ordonné. Si* (X, d) *est complet, alors* $(X, \preccurlyeq, d)$ *sera appelé espace métrique complet ordonné. On dira que* X *est régulier, si l'espace métrique ordonné* $(X, \preccurlyeq, d)$ *fournit la condition suivante :*

$$\begin{cases} \textit{Si } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X \textit{ est une suite non décroissante (non croissante) avec } x_n \longrightarrow x, \\ \textit{alors } x_n \leq x \textit{ pour tout } n. \end{cases}$$

Définition 2.4. [4]

Soit $(X, \preccurlyeq, d)$ *un espace métrique ordonné et soit* $T : X \longrightarrow X$ *une application. Considérons l'ensemble* Y *définie par :*

$$Y = \{(x, y) \in X \times X : x \leq y, d(T(x), T(y)) > 0\}.$$

On dit que T *est une* F_d-*contraction ordonnée si* $F \in \Delta_F$ *et s'il existe* $\tau > 0$*, tel que :*

$$\forall (x, y) \in Y \Longrightarrow \tau + F(d(T(x), T(y))) \leqslant F(d(x, y)). \tag{2.0.8}$$

Théorème 2.2. [4]

Soit $(X, \preccurlyeq, d)$ *un espace métrique complet ordonné et soit* $T : X \longrightarrow X$ *une* F_d-*contraction ordonnée. Supposons que* T *est croissante et il existe* $x_0 \in X$*, tel que* $x_0 \leqslant T(x_0)$*. Si* T *est continu ou* X *est régulier, alors* T *admet un point fixe.*

preuve.

Soit $x_0 \in X$. On définit une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans X, comme suit $x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ pour lequel $x_{n_0} = x_{n_0+1}$, alors $x_{n_0} = x_{n_0+1} = T^{n_0+1}(x_0) = T(x_{n_0-1+1}) = T(x_{n_0})$, ce qui montre que x_{n_0} est un point fixe de T et donc la preuve est terminée. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \neq x_n$. Puisque $x_0 \leqslant T(x_0)$ et T est croissante, donc

$$x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots .$$

Or, puisque $x_n \leqslant x_{n+1}$ et $d(T(x_n), T(x_{n-1}) > 0$ pour tout $n \in N$, alors $(x_n, x_{n+1}) \in Y$, et ainsi, nous pouvons utiliser l'inégalité (2.0.8), pour les termes consécutifs de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, alors nous avons

$$F(d(x_{n+1}, x_n)) = F(d(T(x_n), T(x_{n-1}))) \leqslant F(d(x_n, x_{n-1})) - \tau \tag{2.0.9}$$

Notons que $\gamma_n = d(x_n, x_{n+1})$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors, de (2.0.9), nous avons :

$$F(\gamma_n) \leqslant F(\gamma_{n-1}) - \tau \leqslant F(\gamma_{n-2}) - 2\tau \leqslant \cdots \leqslant F(\gamma_0) - n\tau. \tag{2.0.10}$$

De (2.0.10), nous obtenons $\lim_{n\to\infty} F(\gamma_n) = -\infty$ Ainsi, à partir de (F_2), nous avons :

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0.$$

De (F_3), il existe $k \in (0, 1)$, tel que :

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n^k F(\gamma_n) = 0.$$

D'après (2.0.9) et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il vient

$$\gamma_n^k F(\gamma_n) - \gamma_n^k F(\gamma_0) \leqslant -\gamma_n^k n\tau \leqslant 0. \tag{2.0.11}$$

Faisons $n \to \infty$ dans (2.0.11), nous obtenons que

$$\lim_{n\to\infty} n\gamma_n^k = 0. \tag{2.0.12}$$

De (2.0.12), il sort $n_1 \in \mathbb{N}$, tel que $n\gamma_n^k \leqslant 1$ pour tout $n \geq n_1$. Donc, nous avons

$$\gamma_n \leqslant \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}}, \tag{2.0.13}$$

pour tout $n \geq n_1$. Pour montrer que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, considérons $m, n \in \mathbb{N}$ tel que $m > n \geq n_1$. En utilisant l'inégalité triangulaire pour la distance d et de (2.0.13), nous avons :

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leqslant d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\
&= \gamma_n + \gamma_{n+1} + \cdots + \gamma_{m-1} \\
&= \sum_{i=n}^{m-1} \gamma_i \\
&\leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \gamma_i \\
&\leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{k}}}.
\end{aligned}
$$

Faisons $n \to \infty$, nous obtenons $d(x_n, x_m) \longrightarrow 0$. Cela donne que la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un Cauchy dans X. Puisque X est complet, la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $z \in X$. Maintenant, supposons que l'application T est continue, alors nous avons

$$z = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} Tx_n = T \lim_{n\to\infty} (x_n) = T(z)$$

et donc z est un point fixe de T.

Supposons maintenant que X soit régulier, alors $x_n \leqslant z$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous discutons deux cas :

1-er cas. Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que : $x_{n_0} = z$, alors on obtient

$$T(z) = T(x_{n_0}) = x_{n_0+1} \leqslant z.$$

De plus, puisque $x_{n_0} \leqslant x_{n_0+1}$, alors $z \leqslant T(z)$ et donc, $z = T(z)$.

2-ème cas. Supposons maintenant que $x_n \neq z$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $d(z, T(z)) > 0$. Puisque $\lim_{n\to\infty} x_n = z$, alors $d(z, T(z)) \leq d(x_{n+1}, z) + d(x_{n+1}, T(z))$. Autrement dit

$$d(z, T(z)) \leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} d(x_{n+1}, T(z).$$

Par suite, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_{n+1}, T(z)) > 0$ et $d(x_n, z) < \frac{d(z,T(z))}{2}$ pour tout $n \geq n_1$. Notons que dans ce cas $(x_n, z) \in Y$, car $x_n < z$ et $d(x_{n+1}, T(z)) = d(T(x_n), T(z)) > 0$. Par conséquent, en considérant (F_1), on trouve pour $n \geq n_1$,

$$\tau + F(d(T(x_n), T(z))) \leqslant F(d(x_n, z)) \leqslant F(\frac{d(z, T(z))}{2}).$$

Par suite

$$d(x_{n+1}, T(z)) \leqslant \frac{d(z, T(z))}{2}. \tag{2.0.14}$$

Prenant la limite quand $n \to \infty$, on en déduit que

$$d(z, T(z)) \leqslant \frac{d(z, T(z))}{2}.$$

Nous avons une contradiction. Par conséquent, nous concluons que $d(z, T(z)) = 0$, c'est-à-dire $z = T(z)$.

CHAPITRE

3

POINT FIXE COMMUN POUR DES APPLICATIONS $F-$CONTRACTIONS FAIBLEMENT CROISSANTES[11]

Dans ce chapitre, nous allons donné un théorème de point fixe commun pour deux opérateurs faiblement F-contraction définies sur des espaces métriques partiels complets et ordonnés.

Définition 3.1. *Soit* $(X, \preccurlyeq)$ *un ensemble partiellement ordonné. On dit que deux opérateurs* $S, T : X \longrightarrow X$ *sont faiblement croissants (isotones), si* $S(x) \leqslant T(S(x))$ *et* $T(x) \leqslant S(T(x))$ *sont valables pour tous les* $x \in X$.

Exemple 3.1. *Soit* $X = \mathbb{R}^+$ *muni de l'ordre et la topologie usuels. Nous Définissons les applications* $S, T : X \longrightarrow X$, *comme suit :*

$$S(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{2}} & si\ x\in[0,1],\\ \\ x^2 & si\ x\in(1,\infty).\end{cases} \quad \boldsymbol{et} \quad T(x)=\begin{cases} x & si\ x\in[0,1],\\ \\ 2x & si\ x\in(1,\infty).\end{cases}$$

S, T sont des applications faiblement croissantes.

1. Pour $x\in[0,1]$. Ona :

$$S(x)=x^{\frac{1}{2}},\ T(S(x))=T(x^{\frac{1}{2}})=x^{\frac{1}{2}}$$

et

$$T(x)=x,\ S(T(x))=S(x)=x^{\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$S(x)=x^{\frac{1}{2}}\leqslant x^{\frac{1}{2}}=T(S(x))$$

et

$$T(x)=x\leqslant x^{\frac{1}{2}}=S(T(x)).$$

2. Pour $x\in(1,\infty)$. Ona :

$$S(x)=x^2,\ T(S(x))=T(x^2)=2x^2$$

et

$$T(x)=2x,\ S(T(x))=S(2x)=4x^2.$$

Donc

$$S(x)=x^2\leqslant 2x^2=T(S(x))$$

et

$$T(x)=2x\leqslant 4x^2=S(T(x)).$$

On en déduit que les applications S et T sont faiblement croissantes.

Soit

$$\gamma=\{(\alpha,\beta)\in X\times X,\ \ S(\alpha)\leqslant T(S(\alpha)) \text{ et } T(\beta)\leqslant S(T(\beta))\}.$$

Définition 3.2. *L'espace* $(X, \preccurlyeq, p)$ *est dit un espace* $\gamma-$*régulier, si la condition suivante est vérifiée :*

$$\begin{cases} \text{Si } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X \text{ est une suite décroissante (croissante) avec } x_n \longrightarrow x, \\ \text{alors } (x_n, x) \in \gamma((x, x_n) \in \gamma) \text{ pour tout } n. \end{cases}$$

Définition 3.3. *Soit* $(X, \preccurlyeq, p)$ *un espace métrique partiel ordonné et soit* $S, T : X \longrightarrow X$ *deux applications. On dit que* S *et* T *sont* $F-$*contractions faiblement croissantes, s'il existe une fonction* $F \in \Delta_F$ *et une constante* $\tau > 0$, *tels que :*

$$\tau + F(p(S(\alpha), T(\beta)) \leqslant F(\mathscr{M}(\alpha, \beta)), \forall (\alpha, \beta) \in \gamma, \tag{3.0.1}$$

où

$$\mathscr{M}(\alpha, \beta) = \max\left\{p(\alpha, \beta),\, p(\alpha, S(\alpha)),\, p(\beta, T(\beta)),\, \frac{p(\beta, S(\alpha)) + p(\alpha, T(\beta))}{2}\right\}.$$

Le lemme suivant sera utilisé ultérieurement.

Lemme 3.1. *Soit* $(X, \preccurlyeq, p)$ *un espace métrique partiel ordonné et soit* S, T *deux applications* $F-$*contractions faiblement croissantes. S'il existe* $r_0 \in X$ *tel que* $r_0 \leqslant S(r_0)$, *alors* $p(r_{2i}, r_{2i+1}) = 0$ *implique* $p(r_{2i+1}, r_{2i+2}) = 0$ *pour tout* $i \in \mathbb{N}$.

preuve.

Soit $r_0 \in X$ un point initial et prenons $x = S(r_0)$ et $y = T(x)$. Par récurrence, nous pouvons construire une suite itérative r_n de points dans l'espace X telle que $r_{2i+1} = S(r_{2i})$ et $r_{2i+2} = T(r_{2i+1})$, où $i = 0, 1, 2, \ldots,$.
Comme il existe $r_0 \in X$, tel que $r_0 \leq S(r_0)$ et puisque les deux opérateurs S, T sont $F-$contractions faiblement croissants, alors pour tout $(r_{2i}, r_{2i+1}) \in \gamma$ où $i \in \mathbb{N}$, ona $S(r_{2i}) \leqslant T(S(r_{2i}))$ et $T(r_{2i+1}) \leqslant S(T(r_{2i+1}))$. Cela implique que

$$x = S(r_0) \leq T(S(r_0)) = T(x) = y = T(x) \leq S(T(x)) = S(y) = z.$$

Par une simple itération, nous obtenons pour tout entier n,

$$r_0 \leq x \leq y \leq \cdots \leq r_{n-1} \leq r_n \leq r_{n+1} \cdots \leq .$$

Nous démontrons par contradiction que $p(r_{2i+1}, r_{2i+2}) > 0$.

Notons que

$$\begin{aligned}
& \mathscr{M}(r_{2i}, r_{2i+1}) \\
= \; & \max\left\{p(r_{2i}, r_{2i+1}), p(r_{2i}, S(r_{2i})), p(r_{2i+1}, T(r_{2i+1})), \frac{p(r_{2i+1}, S(r_{2i})) + p(r_{2i}, T(r_{2i+1}))}{2}\right\} \\
= \; & \max\left\{p(r_{2i}, r_{2i+1}), p(r_{2i}, r_{2i+1}), p(r_{2i+1}, r_{2i+2}), \frac{p(r_{2i+1}, r_{2i+1}) + p(r_{2i}, r_{2i+2})}{2}\right\} \\
= \; & \max\{0, p(r_{2i+1}, r_{2i+2})\} \\
= \; & p(r_{2i+1}, r_{2i+2}).
\end{aligned}$$

Ona : $r_{2i} \leq r_{2i+1}$. De l'inégalité (3.0.1) et pour tout $i \in \mathbb{N}$, il vient que :

$$\begin{aligned}
\tau + F(p(r_{2i+1}, r_{2i+2})) &= \tau + F(p(S(r_{2i}), T(r_{2i+1}))) \\
&\leq F(\mathscr{M}(r_{2i}, r_{2i+1})) \\
&\leq F(p(r_{2i+1}, r_{2i+2})).
\end{aligned}$$

Ce qui donne une contradiction à (F_1). Par conséquent, $p(r_{2i+1}, r_{2i+2}) = 0$.

Maintenant, nous présentons notre résultat principal.

Théorème 3.1. *Soit $(X, \preccurlyeq, p)$ un espace métrique partiel complet ordonné et soit $S, T : X \longrightarrow X$ deux $F-$contractions faiblement croissantes. S'il existe $r_0 \in X$, tel que $r_0 \leqslant S(r_0)$ et si l'une des conditions suivante est satisfaite*

(a) l'une de S, T est continue

(b) X est $\gamma-$régulier,

alors S, T ont un point fixe commun.

preuve.

(a) Nous avons :

$$\mathscr{M}(r_{2i}, r_{2i+1}) = 0 \Longleftrightarrow r_{2i} = r_{2i+1} \text{ est un point fixe commun de } S, T.$$

Soit $\mathscr{M}(r_{2i}, r_{2i+1}) > 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. En raisonnant comme dans le lemme 3.1, nous avons

$$r_0 \leq x \leq y \leq \cdots \leq r_{n-1} \leq r_n \leq r_{n+1} \leq \cdots .$$

Si $p(S(r_{2i}), T(r_{2i+1})) = 0$, en utilisant le lemme 3.1, on peut conclure que r_{2i} est un point fixe commun de S et T.

Soit $p(S(r_{2i}), T(r_{2i+1})) > 0$. Puisque $(r_{2i}, r_{2i+1}) \in X \times X$, $S(r_{2i}) = r_{2i+1} \leq T(S(r_{2i})) = r_{2i+2}$ et $T(r_{2i+1}) = r_{2i+2} \leq S(T(r_{2i+1})) = r_{2i+3}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors $(r_{2i}, r_{2i+1}) \in \gamma$. En utilisant la condition de contractivité (3.0.1), on obtient pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \tau + F(p(r_{2i+1}, r_{2i+2})) &= \tau + F(p(S(r_{2i}), T(r_{2i+1}))) && (3.0.2) \\ &\leq F(\mathscr{M}(r_{2i}, r_{2i+1})), && (3.0.3) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathscr{M}(r_{2i}, r_{2i+1}) &= \max \left\{ \begin{matrix} p(r_{2i}, r_{2i+1}), p(r_{2i}, S(r_{2i})), p(r_{2i+1}, T(r_{2i+1})), \\ \\ \frac{p(r_{2i+1}, S(r_{2i})) + p(r_{2i}, T(r_{2i+1}))}{2} \end{matrix} \right\} \\ &= \max \Big\{ p(r_{2i}, r_{2i+1}), p(r_{2i+1}, r_{2i+2}) \Big\}. \end{aligned}$$

Si $\mathscr{M}(r_{2i}, r_{2i+1}) = p(r_{2i+1}, r_{2i+2})$, par (F_1) et (3.0.3), on obtient une contradiction. Ainsi, pour $\mathscr{M}(r_{2i}, r_{2i+1}) = p(r_{2i}, r_{2i+1})$, on a

$$F(p(r_{2i+1}, r_{2i+2})) \leq F(p(r_{2i}, r_{2i+1})) - \tau, \qquad (3.0.4)$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$. Soit $p(S(r_{2i+2}), T(r_{2i+1})) > 0$. Sinon, par le lemme 3.1, r_{2i+1} est un point fixe commun de S, T. Comme $(r_{2i+1}, r_{2i+2}) \in \gamma$ et

$$\begin{aligned}
&\mathscr{M}(r_{2i+2}, r_{2i+1}) \\
= \quad &\max\left\{\begin{array}{c} p(r_{2i+2}, r_{2i+1}), p(r_{2i+2}, S(r_{2i+2})), p(r_{2i+1}, T(r_{2i+1})), \\ \frac{p(r_{2i+1}, S(r_{2i+2})) + p(r_{2i+2}, T(r_{2i+1}))}{2} \end{array}\right\} \\
= \quad &\max\left\{p(r_{2i+2}, r_{2i+1}), p(r_{2i+2}, r_{2i+3}), p(r_{2i+1}, r_{2i+2}), \frac{p(r_{2i+1}, r_{2i+3}) + p(r_{2i+2}, r_{2i+2})}{2}\right\} \\
= \quad &\max\left\{p(r_{2i+2}, r_{2i+1}), p(r_{2i+2}, r_{2i+3})\right\}.
\end{aligned}$$

Si

$$\mathscr{M}(r_{2i+2}, r_{2i+1}) = p(r_{2i+2}, r_{2i+3}),$$

alors la condition contractive (3.0.1) conduit à une contradiction avec (F_1). Ainsi, la condition contractive (3.0.1) implique

$$F(p(r_{2i+2}, r_{2i+3})) \leq F(p(r_{2i+1}, r_{2i+2})) - \tau, \text{ pour tous les i } \in \mathbb{N}. \tag{3.0.5}$$

Par (3.0.4) et (3.0.5), on a

$$F(p(r_{n+1}, r_{n+2})) \leq F(p(r_n, r_{n+1})) - \tau, \text{ pour tous les n } \in \mathbb{N}. \tag{3.0.6}$$

Par (3.0.6), on obtient

$$F(p(r_n, r_{n+1})) \leq F(p(r_{n-2}, r_{n-1})) - 2\tau$$

En répétant ces étapes, nous obtenons

$$F(p(r_n, r_{n+1})) \leq F(p(r_0, r_1)) - n\tau. \tag{3.0.7}$$

Par (3.0.7), on obtient $\lim_{n\to\infty} F(p(r_n, r_{n+1})) = -\infty$ et (F_2) qui impliquent

$$\lim_{n\to\infty} p(r_n, r_{n+1}) = 0. \tag{3.0.8}$$

De la propriété (F_3), il existe $k \in (0,1)$ tel que

$$\lim_{n\to\infty}(p(r_n, r_{n+1}))^k F(p(r_n, r_{n+1})) = 0. \tag{3.0.9}$$

En multipliant (3.0.7), par $(p(r_n, r_{n+1}))^k$, on obtient

$$(p(r_n, r_{n+1}))^k (F(p(r_n, r_{n+1})) - F(p(r_0, r_1))) \leq -(p(r_n, r_{n+1}))^k n\tau \leq 0. \tag{3.0.10}$$

De (3.0.8) et (3.0.9), et en faisant $n \to \infty$ dans (3.0.10), on a

$$\lim_{n\to\infty}(n(p(r_n, r_{n+1}))^k) = 0.$$

Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tel que $n(p(r_n, r_{n+1}))^k \leq 1$ pour tout $n \geq n_1$.
Par suite

$$p(r_n, r_{n+1}) \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}}, \text{ pour tout n } \geq n_1. \tag{3.0.11}$$

De (3.0.11), il vient que pour $m > n \geq n_1$,

$$\begin{aligned}
p(r_n, r_m) &\leq p(r_n, r_{n+1}) + p(r_{n+1}, r_{n+2}) + p(r_{n+2}, r_{n+3}) + \cdots + p(r_{m-1}, r_m) \\
&\quad - \sum_{j=n+1}^{m-1} p(r_j, r_j) \\
&\leq p(r_n, r_{n+1}) + p(r_{n+1}, r_{n+2}) + p(r_{n+2}, r_{n+3}) + \cdots + p(r_{m-1}, r_m) \\
&= \sum_{i=n}^{m-1} p(r_i, r_{i+1}) \\
&\leq \sum_{i=n}^{\infty} p(r_i, r_{i+1}) \\
&\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{k}}}.
\end{aligned}$$

La convergence de la série $\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{k}}}$ implique $\lim_{n,m\to\infty} p(r_n, r_m) = 0$. donc $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (X, p). D'après le lemme 1.1 : (2), $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (X,d). Puisque (X,p) est un espace métrique partiel complet, ona que (X,d) est un espace métrique complet. Par conséquent, il existe $v \in X$ tel que $\lim_{n\to\infty} d(r_n, v) = 0$. De 1.1 : (3), et grâce au fait que $\lim_{n,m\to\infty} p(r_n, r_m) = 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} p(v, r_n) = p(v,v) = \lim_{n,m\to\infty} p(r_n, r_m). \tag{3.0.12}$$

Puisque $\lim_{n,m\to\infty} p(r_n, r_m) = 0$, par (3.0.12), on a

$$p(v,v) = 0 = \lim_{n\to\infty} p(v, r_n). \tag{3.0.13}$$

L'équation (3.0.13) implique $r_{2n+1} \longrightarrow v$ et $r_{2n+2} \longrightarrow v$ comme $n \to \infty$ par rapport à $\tau(p)$. Supposons que T soit continu. ensuite

$$v = \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} r_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} r_{2n+2} = \lim_{n\to\infty} T(r_{2n+1}) = T(\lim_{n\to\infty} r_{2n+1}) = T(v).$$

Montrons que $v = S(v)$. Pour cela supposons que $p(v, S(v)) > 0$. Puisque, $(v,v) \in \gamma$, alors il vient de l'inégalité (3.0.1), que

ona

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}(v,v) &= \max\left\{p(v,v), p(v,S(v)), p(v,T(v)), \frac{p(v,S(v)) + p(v,T(v))}{2}\right\}. \\
&= \max\left\{p(v,v), p(v,S(v)), p(v,v), \frac{p(v,S(v)) + p(v,v)}{2}\right\}. \\
&= \max\{p(v,v), p(v,S(v))\}. \\
&= p(v,S(v)), \text{d'après}(P_2).
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\tau + F(p(v,S(v))) &= \tau + F(p(S(v),T(v))) \\
&\leq F(\mathscr{M}(v,v)) \\
&\leq F(p(v,S(v))),
\end{aligned}$$

c'est une contradiction. Par suite, $p(v, S(v)) = 0$. De $(p_1), (p_2)$, il vient que :

$$p(v, v) \leqslant p(v, S(v)) = 0.$$

Donc

$$p(v, v) = p(v, S(v)) = p(S(v), S(v)) = 0.$$

Nous concluons que $v = S(v)$. Par conséquent, ona $S(v) = T(v) = v$, c'est-à-dire que (S, T) ont un point fixe commun v.

(b) Dans l'autre cas, en supposant que X est $\gamma-$régulier, ona que $(r_n, v) \in \gamma$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour montrer que v est un point fixe commun de S et T, nous discutons les deux cas suivants :

(1) Si $r_n = v$ pour quelque n, alors il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $r_{2i_0} = v$. Considérons, $S(v) = S(r_{2i_0}) = r_{2i_0+1} \leq v$ aussi $v = r_{2i_0} \leq r_{2i_0+1} = S(v)$. Ainsi, $v = S(v)$ et e l'inégalité (3.0.1), ona $v = T(v)$.

(2) Si $r_n \neq v$ pour tout n, ona $\lim_{n\to\infty} r_n = v$ et $\lim_{n\to\infty} p(v, r_n) = p(v, v) = 0$, d'après (P_2), $0 = p(v, v) \leq p(v, T(v))$, $v \neq T(v)$ alors $p(v, T(v)) > 0$. Puisque $\lim_{i\to\infty} r_{2i} = \lim_{i\to\infty} r_{2i+1} = v$ et $\lim_{i\to\infty} p(r_{2i}, v) = p(v, v) = 0$ il existe $\mathscr{N} \in \mathbb{N}$ tel que

$$p(r_{2i+1}, T(v)) > 0 \text{ et } p(r_{2i}, v) < p(v, T(v)) \text{ pour tout i } \geq \mathscr{N}.$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}(r_{2i}, v) &= \max\left\{p(r_{2i}, v), p(r_{2i}, S(r_{2i})), p(v, T(v)), \frac{p(v, S(r_{2i})) + p(r_{2i}, T(v))}{2}\right\}, \\
&= \max\left\{p(r_{2i}, v), p(r_{2i}, r_{2i+1}), p(v, T(v))\right\},
\end{aligned}$$

$$\mathscr{M}(r_{2i}, v) \leq p(v, T(v)) \text{ pour tout i } \geq \mathscr{N}.$$

Comme $(r_{2i}, v) \in \gamma$, par (3.0.1), on a

$$\begin{aligned}\tau + F(p(r_{2i+1}, T(v))) &= \tau + F(p(S(r_{2i}), T(v)))\\ &\leq F(\mathscr{M}(r_{2i}, v)),\\ &\leq F(p(v, T(v)))\end{aligned}$$

$$F(p(v, T(v))) < F(p(v, T(v)), \text{ quand i } \to \infty$$

,

c'est une contradiction. Par conséquent, $p(v, T(v)) = 0$. En raison de $(p_1), (p_2)$,

$$p(v, v) \leqslant p(v, T(v)) = 0.$$

Donc

$$p(v, v) = p(v, T(v)) = p(T(v), T(v)) = 0$$

nous concluons que $v = T(v)$.

Maintenant, nous montrons que $v = S(v)$. Supposons au contraire que $p(v, S(v)) > 0$. Puisque, $(v, v) \in \gamma$, par (3.0.1), on obtenir

ona

$$\begin{aligned}\mathscr{M}(v, v) &= \max\left\{p(v, v), p(v, S(v)), p(v, T(v)), \frac{p(v, S(v)) + p(v, T(v))}{2}\right\}.\\ &= \max\left\{p(v, v), p(v, S(v)), p(v, v), \frac{p(v, S(v)) + p(v, v)}{2}\right\}.\\ &= \max\left\{p(v, v), p(v, S(v))\right\}.\\ &= p(v, S(v)), \text{d'après}(P_2).\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\tau+F(p(S(v),v)) &= \tau+F(p(S(v),T(v)))\\ &\leq F(\mathscr{M}(v,v))\\ &\leq F(p(S(v),v)),\end{aligned}$$

c'est une contradiction. Ainsi, $p(v,S(v))=0$. En raison de $(p_1),(p_2)$,

$$p(v,v)\leqslant p(v,S(v))=0.$$

Donc

$$p(v,v)=p(v,S(v))=p(S(v),S(v))=0.$$

nous concluons que $v=S(v)$. Par conséquent, ona $S(v)=T(v)=v$. D'où, (S,T) ont un point fixe commun v.

On note $Fix(S,T)$, l'ensemble des points fixes communs des opérateurs S et T.

Définition 3.4. *En théorie des ordres, une chaîne est une partie totalement ordonnée d'un ensemble partiellement ordonné.*
En particulier, la chaîne numérique est l'ensemble des nombres réels muni de l'ordre usuel.

Remarque 3.1. *Si nous supposons que $Fix(S,T)$ dans le théorème 3.1 est une chaîne avec les conditions existantes, alors c'est un ensemble singleton (le point fixe commun est unique).*

preuve.

Si w est un autre point fixe commun de S,T, alors $w\leq v$, également $p(S(v),T(w))>0$ (sinon $v=w$) donc, $(v,w)\in\gamma$. Par la condition de contractivité (3.0.1), on a :

$$\begin{aligned}\tau+F(p(v,w)) &= \tau+F(p(S(v),T(w)))\\ &\leq F(\mathscr{M}(v,w)),\end{aligned}\tag{3.0.14}$$

où

$$\begin{aligned}\mathscr{M}(v,w) &= \max\left\{p(v,w), p(v,S(v)), p(v,T(v)), \frac{p(w,S(v))+p(v,T(w))}{2}\right\} \\ &= p(v,w)\end{aligned}$$

De (3.0.14), il vient que

$$\tau + F(p(v,w)) < F(p(v,w)).$$

D'où $\tau < 0$, ce qui conduit à une contradiction. Par conséquent, $v = w$ et v est un point fixe commun unique d'un paire (S,T).

Définition 3.5. *Soit (X,d) un espace métrique, $f : X \longrightarrow X$, un opérateur et soit x_0 un élément de X. L'ensemble O_{x_0} définie par*

$$O_{x_0} = \{x_n = f^n(x_0), n \geq 1\}$$

est appelé orbite de f en x_0, où $f^n = \underbrace{f \circ f \circ f \circ f \cdots \circ f}_{n\text{-fois}}$.

Remarque 3.2. *Si Fix(S,T) n'est pas une chaîne et qu'il existe x dans X tel que chaque élément de l'orbite $O_T(x) = \{x, T(x), T^2(x), ...\}$ est comparable à υ,ω. Alors $\upsilon = \omega$ (υ est unique) à condition que S et T soient $F-$contractions faiblement croissantes.*

preuve.

Supposons que v, w sont dans Fix (S,T) et qu'il existe un élément $x \in X$ tel que chaque élément de $O_T(x) = \{x, T(x), T^2(x), ...\}$ est comparable à v, w. D'où $(T^{n-1}(x), S^{n-1}(v))$ et $(T^{n-1}(x), S^{n-1}(w))$ sont des éléments de γ pour chaque $n \geq 1$. Par (3.0.1), on a

$$\begin{aligned}\tau + F(p(v,T^n(x))) &= \tau + F(p(S^n(v),T^n(x))) \\ &= \tau + F(p(S(S^{n-1}(v)),T(T^{n-1}(x)))) \\ &\leq F(\mathscr{M}(S^{n-1}(v),T^{n-1}(x))), \qquad (3.0.15)\end{aligned}$$

où

$$\mathscr{M}(S^{n-1}(v), T^{n-1}(x)) = \max\left\{\begin{array}{c} p(S^{n-1}(v), T^{n-1}(x)), p(S^{n-1}(v), S^{n}(v)), \\ \\ p(T^{n-1}(x), T^{n}(x)), \\ \\ \frac{p(T^{n-1}(x), S^{n}(v)) + p(S^{n-1}(v), T^{n}(x))}{2} \\ \\ \end{array}\right\}$$

$$= p(S^{n-1}(v), T^{n-1}(x)) = p(v, T^{n-1}(x)).$$

Ainsi, par (3.0.15), nous en déduisons que

$$\tau + F(p(v, T^{n}(x))) \leq \tau + F(\mathscr{M}(S^{n-1}(v), T^{n-1}(x))).$$

Par suite la suite $\{p(v, T^{n}(x))\}_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, décroissante et converge vers 0. De même, nous pouvons montrer que $\{p(w, T^{n}(x))\}$ est une suite décroissante non négative converge à 0. Par conséquent, $v = w$.

L'exemple ci-dessous illustre le théorème 3.1 et montre que la condition (3.0.1) est plus générale que la contractivité condition utilisée par Durmaz et al. [4].

Exemple 3.2. *Soit* $X = [0, 1]$ *et soit* $p(x, y) = \max\{x, y\}$. *On définie la relation d'ordre* $\prec_1$ *par*

$$x \prec_1 y \Longleftrightarrow y \leqslant x, \ \forall x, y \in X.$$

En effet :

1/

$$x \leq x \quad \Longleftrightarrow x \leq x \quad \textit{vraie.}$$

La relation binaire $\prec_1$ *est réflexive.*

2/

$$\begin{array}{l} x \prec_1 y \quad \Longleftrightarrow y \leqslant x \\ \wedge \\ y \prec_1 x \quad \Longleftrightarrow x \leqslant y \end{array}$$

Donc $y = x$. La relation binaire $\prec_1$ est antisymétrique.

3/

$$\begin{array}{lll} x \prec_1 y & \Longleftrightarrow y \leqslant x & \\ \wedge & & . \\ y \prec_1 z & \Longleftrightarrow z \leqslant y & \end{array}$$

Alors $x \prec_1 z$. Définissons $d(x,y) = |x-y|$ de sorte que $(X, \prec_1, d)$ soit un espace métrique ordonné complet et donc $(X, \prec_1, p)$ est un espace métrique partiel, ordonné et complet. Définissons les deux applications $S, T : X \longrightarrow X$, comme suit :

$$T(x) = \begin{cases} \frac{x}{5} & si\ x \in [0,1); \\ & \\ 0 & si\ x = 1 \end{cases} \qquad et \qquad S(x) = \frac{3x}{7} \ \ pour\ tout\, x \in X.$$

Définissons

$$\gamma_1 = \{(\alpha, \beta) \in X \times X :\ S(\alpha) \prec_1 T(S(\alpha))\ \textbf{\textit{et}}\ T(\beta) \prec_1 S(T(\beta))\}.$$

Il est clair que S, T sont des applications faiblement croissantes par rapport à $\prec_1$. En effet,

1. *Pour $x \neq 1$. On a :*

$$S(x) = \frac{3x}{7},\ T(S(x)) = T(\frac{3x}{7}) = \frac{3x}{35}$$

et

$$T(x) = \frac{x}{5},\ S(T(x)) = \frac{3x}{35}.$$

Donc

$$T(S(x)) = \frac{3x}{35} \leqslant \frac{3x}{7} = S(x).$$

et

$$S(T(x)) = \frac{3x}{35} \leqslant \frac{x}{5} = T(x).$$

Autrement dit

$$S(x) \prec_1 T(S(x))$$

et

$$T(x) \prec_1 S(T(x)).$$

2. *Pour* $x = 1$. *On a :*

$$S(x) = \frac{3}{7},\; T(S(x)) = \frac{3}{35}, T(x) = 0,\; S(T(x)) = 0.$$

Par suite

$$T(S(x)) \leq S(x) \quad et \;\; S(T(x)) \leq T(x).$$

D'où

$$S(1) \prec_1 T(S(1)) \quad et \;\; T(1) \prec_1 S(T(1)).$$

Définissons la fonction $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *par* $F(x) = \ln(x)$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}^+ > 0$. *Soit* $y, z \in X$ *tel que* $p(S(y), T(z)) > 0$ *et supposons que* $z \prec_1 y$. *Alors*

$$\mathscr{M}(y,z) = \{z, \frac{yz}{1+y}, \frac{yz}{1+\max\{\frac{3y}{7}, \frac{z}{5}\}}\}$$

Comme $\frac{y}{1+y} < 1$ *et*

$$\frac{y}{1+\max\{\frac{3y}{7}, \frac{z}{5}\}} < y \leq 1$$

Alors, nous avons que $\mathscr{M}(y,z) = z$. *De manière similaire, si* $y \prec_1 z$, *nous obtenons que* $\mathscr{M}(y,z) = y$, *c'est-à-dire* $\mathscr{M}(y,z) = p(y,z)$.

Soit $\tau \leqslant \ln(\frac{7}{3})$. *On a :*

$$\tau + F(p(S(y), T(z)) \leqslant F(\mathscr{M}(y,z))$$

car si on suppose le contraire c'est à dire

$$\tau + F(p(S(y), T(z)) > F(p(y,z))$$

de sorte que $y \prec_1 z$, *il vient que*

$$\tau + F(p(\frac{3y}{7}, \frac{z}{5}) > F(p(y,z)).$$

Cela implique que

$$\tau + \ln(\frac{3z}{7}) > \ln(z).$$

Donc $\tau > \ln(\frac{7}{3})$ *c'est une contradiction.*

Puisque, $(y, z) \in \gamma_1$, *cela implique en outre que la condition de contractivité* (3.0.1) *est satisfaite pour tout* $y, z \in X$. *Ainsi, toutes les hypothèses du théorème* 3.1 *sont satisfaites. Le pair des applications* (S, T) *ont un unique point fixe commun* $x = 0$.

Soit

$$\xi = \{(\alpha, \beta) \in X \times X \ T(\alpha) \leqslant T^2(\alpha) \text{ et } T(\beta) \leqslant T^2(\beta)\}.$$

Définition 3.6. *L'espace* $(X, \preccurlyeq, p)$ *est dit un espace* $\xi-$*régulier, si la condition suivante est vérifiée :*

$$\begin{cases} \textit{Si } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X \textit{ est une suite non décroissante (non croissante) avec } x_n \longrightarrow x, \\ \textit{alors } (x_n, x) \in \xi((x, x_n) \in \xi) \textit{ pour tout } n. \end{cases}$$

Définition 3.7. *Soit* $(X, \preccurlyeq, p)$ *un espace métrique partiel ordonné et* $T : X \longrightarrow X$ *une application. nous disons que* T *est une* $F-$*contraction faiblement croissante, s'il existe une fonction* $F \in \Delta_F$ *et une constante* $\tau > 0$, *tels que*

$$\tau + F(p(T(\alpha), T(\beta)) \leqslant F(\mathscr{M}(\alpha, \beta)) \quad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad (\alpha, \beta) \in \xi, \tag{3.0.16}$$

où

$$\mathscr{M}(\alpha, \beta) = \max\left\{p(\alpha, \beta), p(\alpha, T(\alpha)), p(\beta, T(\beta)), \frac{p(\beta, T(\alpha)) + p(\alpha, T(\beta))}{2}\right\}.$$

Le corollaire suivant généralise le théorème dû à Durmaz, Minak et Altun [4].

Corollaire 3.1. *Soit* $(X, \preccurlyeq, p)$ *un espace métrique partiel complet ordonné et* $T : X \longrightarrow X$ *une* $F-$*contraction faiblement croissante . S'il existe* $r_0 \in X$ *tel que* $r_0 \leqslant T(r_0)$ *et soit*

(a) T *est continu ou*

(b) X *est* $\xi-$*régulier,*

alors T *a un point fixe unique.*

preuve.

Définissez $S = T$ dans le théorème 3.1. A partir de la preuve du théorème 3.1, nous pouvons obtenir la conclusion souhaitée immédiatement.

Observons tout d'abord que T a au plus un point fixe. En effet, si $v, w \in X$ tel que $T(v) = v \neq w = T(w)$, Comme T une $F-$contraction faiblement croissante, alors pour $v, w \in \xi$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}(v,w) &= \max\left\{\begin{matrix} p(v,w), p(v,T(v)), p(w,T(w)), \\ \\ \frac{p(w,T(v))+p(v,T(w))}{2} \\ \\ \end{matrix}\right\} \\
&= \max\left\{p(v,w), p(v,v), p(w,w), \frac{p(w,v)+p(v,w)}{2}\right\} \\
&= \max\{p(v,w), p(v,v), p(w,w)\} \\
&= p(v,w). \text{ d'après } (P_2).
\end{aligned}$$

à partir de l'inégalité (3.0.16),on a

$$\begin{aligned}
\tau + F(p(v,w)) &= \tau + F(p(T(v),T(w))) \\
&\leq F(\mathscr{M}(v,w)) \\
&\leq F(p(v,w))
\end{aligned}$$

ce qui donne une contradiction à (F_1). Ainsi, $p(v,w) = 0$. En raison de $(p_1), (p_2)$,

(p_1) $p(v,v) = p(v,w) = p(w,w) = 0 \Longleftrightarrow v = w$.

(p_2) $p(v,v) \leqslant p(v,w) = 0$, nous concluons que $T(v) = v = w = T(v)$. Par conséquent, ona $T(v) = T(v) = v$, c'est-à-dire que T a un point unique.

Afin de montrer que T a un point fixe, soit $r_0 \in X$ un point initial . Par récurrence, nous pouvons construire une suite itérative $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de points dans l'espace X telle que $r_{n+1} = T(r_n)$, Comme il existe $r_0 \in X$ tel que $r_0 \leq T(r_0)$ et T une $F-$contraction faiblement croissante, alors pour tout $(r_n, r_{n+1}) \in \xi$ où $n = 0, 1, 2, ...$ ona $T(r_n) \leqslant T^2(r_n) = T(T(r_n))$ et $T(r_{n+1}) \leqslant T^2(r_{n+1}) = T(T(r_{n+1}))$, $(TT = T^2$ désigne la composition $T \circ T = T(T))$. alors on obtient

$$r_0 \leq T(r_0) = r_1 \leq T^2(r_0) = T(T(r_0)) = r_2 \leq T(r_2) = r_3.$$

Par une simple itération, nous obtenons pour tout entier n,

$$r_0 \leq r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq r_4 \leq \cdots \leq r_{n-1} \leq r_n \leq r_{n+1} \cdots .$$

(a) Nous commençons par l'observation suivante :

$\mathscr{M}(r_n, r_{n+1}) = 0$ si et seulement si $r_n = r_{n+1}$ est un point fixe de T :

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}(r_n, r_{n+1}) &= \max \left\{ \begin{array}{c} p(r_n, r_{n+1}), p(r_n, T(r_n)), p(r_{n+1}, T(r_{n+1})), \\ \\ \frac{p(r_{n+1}, T(r_n)) + p(r_n, T(r_{n+1}))}{2} \\ \\ \end{array} \right\} \\
&= \max \left\{ p(r_n, r_{n+1}), p(r_n, r_{n+1}), p(r_{n+1}, r_{n+2}), \frac{p(r_{n+1}, r_{n+1}) + p(r_n, r_{n+2})}{2} \right\} \\
&= \max \{ p(r_n, r_{n+1}), p(r_{n+1}, r_{n+2}) \}
\end{aligned}$$

Soit $\mathscr{M}(r_n, r_{n+1}) = 0$ alors $p(r_n, r_{n+1}) = 0$ et $p(r_{n+1}, r_{n+2}) = 0$

En raison de $(p_1), (p_2)$, nous concluons que $r_n = r_{n+1} = r_{n+2}$ Par conséquent, $T(r_n) = r_n$.

Soit $\mathscr{M}(r_n, r_{n+1}) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En argumentant comme dans le théorème 3.1, Si $p(T(r_n), T(r_{n+1})) = 0$, en utilisant le lemme 3.1,

$p(T(r_n), T(r_{n+1})) = p(r_{n+1}, r_{n+2}) = 0 \Longrightarrow p(r_{n+2}, r_{n+3}) = p(T(r_{n+1}), T(r_{n+2})) = 0$

$$p(T(r_n), T(r_{n+1})) = 0, \text{ En raison de } (p_1), (p_2), \text{ on trouve } T(r_n) = T(r_{n+1}).$$

de même

$$p(T(r_{n+1}), T(r_{n+2})) = 0, \text{ En raison de } (p_1), (p_2), \text{ on trouve } T(r_{n+1}) = T(r_{n+2}).$$

donc ona $T(r_n) = T(r_{n+1}) = T(r_{n+2}) \Longleftrightarrow r_n = r_{n+1} = r_{n+2}$ Par conséquent $T(r_n) = r_{n+1} = r_n$, donc r_n est un point fixe de T.

Soit $p(T(r_n), T(r_{n+1})) > 0$. Puisque $(r_n, r_{n+1}) \in X \times X$ et $T(r_n) = r_{n+1} \leq T(T(r_n)) = r_{n+2}$ et $T(r_{n+1}) = r_{n+2} \leq T(T(r_{n+1})) = r_{n+3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(r_n, r_{n+1}) \in \xi$, par la condition contractive (3.0.16), on obtient

$$\begin{aligned} \tau + F(p(r_{n+1}, r_{n+2})) &= \tau + F(p(T(r_n), T(r_{n+1}))) && (3.0.17) \\ &\leq F(\mathscr{M}(r_n, r_{n+1})), && (3.0.18) \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, où

$$\mathscr{M}(r_n, r_{n+1}) = \max\{p(r_n, r_{n+1}), p(r_{n+1}, r_{n+2})\}.$$

Si $\mathscr{M}(r_n, r_{n+1}) = p(r_{n+1}, r_{n+2})$, par (F_1) et (3.0.18), on obtient une contradiction. Ainsi, pour $\mathscr{M}(r_n, r_{n+1}) = p(r_n, r_{n+1})$, on a

$$F(p(r_{n+1}, r_{n+2})) \leq F(p(r_n, r_{n+1})) - \tau, \qquad (3.0.19)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $p(T(r_{n+1}), T(r_{n+2})) > 0$. Sinon, par le lemme 3.1,

$p(T(r_{n+1}), T(r_{n+2})) = p(r_{n+2}, r_{n+3}) = 0 \Longrightarrow p(r_{n+3}, r_{n+4}) = p(T(r_{n+2}), T(r_{n+3})) = 0$

$$p(T(r_{n+1}),T(r_{n+2}))=0,\ \text{En raison de } (p_1),(p_2),\ \text{on trouve } T(r_{n+1})=T(r_{n+2}).$$

de même

$$p(T(r_{n+2}),T(r_{n+3}))=0,\ \text{En raison de } (p_1),(p_2),\ \text{on trouve } T(r_{n+2})=T(r_{n+3}).$$

donc ona $T(r_{n+1}) = T(r_{n+2}) = T(r_{n+3}) \iff r_n = r_{n+1} = r_{n+2}$ Par conséquent $T(r_{n+1}) = r_{n+2} = r_{n+1}$, donc r_{n+1} est un point fixe de T.

Revenir à $p(T(r_{n+1}),T(r_{n+2}))>0$, Comme $(r_{n+1},r_{n+2})\in X\times X$ et $T(r_{n+1})=r_{n+2}\leq T(T(r_{n+1}))=r_{n+3}$ et $T(r_{n+2})=r_{n+3}\leq T(T(r_{n+2}))=r_{n+4}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, alors $(r_{2i+1},r_{2i+2})\in\xi$ et

$$\mathscr{M}(r_{n+1},r_{n+2})=\max\left\{p(r_{n+1},r_{n+2}),p(r_{n+2},r_{n+3})\right\}.$$

Si

$$\mathscr{M}(r_{n+1},r_{n+2})=p(r_{n+2},r_{n+3}),$$

alors la condition contractive (3.0.16) conduit à une contradiction avec (F_1). Ainsi, la condition contractive (3.0.16) pour $\mathscr{M}(r_{n+1},r_{n+2})=p(r_{n+1},r_{n+2})$,implique

$$F(p(r_{n+2},r_{n+3}))\leq F(p(r_{n+1},r_{n+2}))-\tau,\ \text{pour tous les n }\in\mathbb{N}. \tag{3.0.20}$$

Par (3.0.19) et (3.0.20), on a

$$F(p(r_{n+2},r_{n+3}))\leq F(p(r_{n+1},r_{n+2}))-\tau\leq F(p(r_n,r_{n+1}))-2\tau,\ \text{pour tous les n }\in\mathbb{N}. \tag{3.0.21}$$

Par (3.0.21), on obtient

$$F(p(r_n,r_{n+1}))\leq F(p(r_{n-1},r_n))-\tau\leq F(p(r_{n-2},r_{n-1}))-2\tau$$

En répétant ces étapes, nous obtenons

$$F(p(r_n, r_{n+1})) \leq F(p(r_0, r_1)) - n\tau. \tag{3.0.22}$$

Par (3.0.22), on obtient $\lim_{n\to\infty} F(p(r_n, r_{n+1})) = -\infty$ et (F_2) qui impliquent

$$\lim_{n\to\infty} p(r_n, r_{n+1}) = 0. \tag{3.0.23}$$

Par la propriété (F_3), il existe $k \in (0, 1)$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} (p(r_n, r_{n+1}))^k F(p(r_n, r_{n+1})) = 0. \tag{3.0.24}$$

En multipliant (3.0.22), par $(p(r_n, r_{n+1}))^k$, on obtient

$$(p(r_n, r_{n+1}))^k (F(p(r_n, r_{n+1})) - F(p(r_0, r_1))) \leq -(p(r_n, r_{n+1}))^k n\tau \leq 0. \tag{3.0.25}$$

Par (3.0.23), et (3.0.24), et en laissant $n \to \infty$ dans (3.0.25), on a

$$\lim_{n\to\infty} (n(p(r_n, r_{n+1}))^k) = 0.$$

Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tel que $n(p(r_n, r_{n+1}))^k \leq 1$ pour tout $n \geq n_1$ ou,

$$p(r_n, r_{n+1}) \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}}, \text{ pour tout n } \geq n_1. \tag{3.0.26}$$

Par (3.0.26), on obtient, pour $m > n \geq n_1$,

$$
\begin{aligned}
p(r_n, r_m) &\leq p(r_n, r_{n+1}) + p(r_{n+1}, r_{n+2}) + p(r_{n+2}, r_{n+3}) + \cdots + p(r_{m-1}, r_m) - \sum_{j=n+1}^{m-1} p(r_j, r_j) \\
&\leq p(r_n, r_{n+1}) + p(r_{n+1}, r_{n+2}) + p(r_{n+2}, r_{n+3}) + \cdots + p(r_{m-1}, r_m) \\
&= \sum_{i=n}^{m-1} p(r_i, r_{i+1}) \\
&\leq \sum_{i=n}^{\infty} p(r_i, r_{i+1}) \\
&\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{k}}}.
\end{aligned}
$$

La convergence de la série $\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{k}}}$ implique $\lim_{n,m\to\infty} p(r_n, r_m) = 0$. donc $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (X, p). D'après le lemme 1.1 : (1), $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (X, d). Puisque (X, p) est un partiel complet espace métrique, ona que (X, d) est un espace métrique complet. En conséquence, il existe $v \in X$ tel que $\lim_{n\to\infty} d(r_n, v) = 0$. Par le lemme 1.1 : (3),

$$
\lim_{n\to\infty} p(v, r_n) = p(v, v) = \lim_{n,m\to\infty} p(r_n, r_m). \tag{3.0.27}
$$

Puisque $\lim_{n,m\to\infty} p(r_n, r_m) = 0$, par (3.0.27), on a

$$
p(v, v) = 0 = \lim_{n\to\infty} p(v, r_n). \tag{3.0.28}
$$

L'équation (3.0.28) implique $r_{n+1} \longrightarrow v$ quand $n \to \infty$ par rapport à $\tau(p)$. Supposons que T soit continu. ensuite

$$
v = \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} r_{n+1} = \lim_{n\to\infty} T(r_n) = T(\lim_{n\to\infty} r_n) = T(v).
$$

Par conséquent, $T(v) = v$, c'est-à-dire que T a un point fixe unique$v$.

(b) Dans l'autre cas, en supposant que X est $\xi-$régulier, ona que $(r_n, v) \in \xi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour montrer que v est un point fixe de T, nous divisons la preuve en deux parties.

(1) Si $r_n = v$ pour quelque n, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $r_{n_0} = v$. Considérons, $T(v) = T(r_{n_0}) = r_{n_0+1} \leq v$ aussi $v = r_{n_0} \leq r_{n_0+1} = T(v)$. Ainsi, $v = T(v)$.

(2) Si $r_n \neq v$ pour tout n, ona $\lim_{n\to\infty} r_n = v$ et $\lim_{n\to\infty} p(v, r_n) = p(v, v) = 0$, d'après (P_2), $0 = p(v, v) \leq p(v, T(v))$, $v \neq T(v)$ alors $p(v, T(v)) > 0$. Puisque $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} r_{n+1} = v$ et $\lim_{n\to\infty} p(r_n, v) = p(v, v) = 0$ il existe $\mathscr{N} \in \mathbb{N}$ tel que

$$p(r_{n+1}, T(v)) > 0 \text{ et } p(r_n, v) < p(v, T(v)), \text{ pour tout n } \geq \mathscr{N}.$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}(r_n, v) &= \max\left\{p(r_n, v), p(r_n, T(r_n)), p(v, T(v)), \frac{p(v, T(r_n)) + p(r_n, T(v))}{2}\right\}, \\
&= \max\left\{p(r_n, v), p(r_n, r_{n+1}), p(v, T(v))\right\},
\end{aligned}$$

$$\mathscr{M}(r_n, v) \leq p(v, T(v)) \text{ pour tout n } \geq \mathscr{N}.$$

Comme $(r_n, v) \in \xi$, par (3.0.16), on a

$$\begin{aligned}
\tau + F(p(r_{n+1}, T(v))) &= \tau + F(p(T(r_n), T(v))) \\
&\leq F(\mathscr{M}(r_n, v)), \\
&\leq F(p(v, T(v))).
\end{aligned}$$

$$F(p(v, T(v))) < F(p(v, T(v)) \text{ quand n } \to \infty$$

,

c'est une contradiction. Par conséquent, $p(v, T(v)) = 0$. En raison de $(p_1), (p_2)$,

$$p(v, v) \leqslant p(v, T(v)) = 0.$$

Donc

$$p(v, v) = p(v, T(v)) = p(T(v), T(v)) = 0.$$

nous concluons que $v = T(v)$.

D'où, T a un point fixe unique v.

CHAPITRE

4

APPLICATIONS

Ce chapitre contient un résultat d'existence qui montre l'utilité du théorème 3.1 pour établir l'existence de solutions de l'équation intégrale implicite suivante :

$$\mathscr{A}(t,u(x,t)) = \int_0^a \int_0^a \mathscr{H}(t,\theta,\phi,u(\theta,\phi))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi, \tag{4.0.1}$$

où

$u \in \mathscr{U} = \mathscr{L}[C([0,a]) \times [0,a]]$ et $\mathscr{U}$ et $t,\theta,\phi \in I_a = [0,a]$.

Pour $u \in \mathscr{U}$, définissons la norme

$$||u|| = \max_{t\in[0,a]} |u(t)|.$$

Soit $\mathscr{U}$ muni de la métrique partielle $p : \mathscr{U} \times \mathscr{U} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ définie par

$$p(u,v) = d(u,v) + c = \max_{t\in[0,a]} |u(x,t) - v(x,t)| + c \qquad \text{pour tout} \qquad u,v \in \mathscr{U}.$$

et $\mathscr{U}$ muni de l'ordre $\prec_2$ définie par

$$u \prec_2 v \Longleftrightarrow v(x,t) \leq u(x,t).$$

Il est clair que, $(\mathscr{U}, ||.||)$ est un espace de Banach et $(\mathscr{U}, \prec_2, p)$ est un espace métrique partiel ordonné complet.

Théorème 4.1. *Suppose que :*

(a) Pour tout $u, v \in \mathscr{U}$ et $k = |u(x,t) - v(x,t)| + c$,

$$|\mathscr{A}(t, u(x,t)) - \mathscr{A}(t, v(x,t))| + c \leqslant (k)e^{-\tau} \text{ pour chaque } t \in I_a,$$

(b) $\mathscr{H}(t, \theta, \phi, u(\theta, \phi)) \leqslant \frac{1}{a^2} u(x,t)$ pour tout $t \in I_a$,

(c) pour tout $t, \theta, \phi \in I_a$,

$$\mathscr{A}\left(t, \int_0^a \int_0^a \mathscr{H}(t, \theta, \phi, u(\theta, \phi)) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi\right) \leqslant \int_0^a \int_0^a \mathscr{H}(t, \theta, \phi, u(\theta, \phi)) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi,$$

(d) $\mathscr{H}(t, \theta, \phi, \mathscr{A}(\theta, u(\theta, \phi))) \geq \frac{1}{a^2} \mathscr{A}(t, u(x,t))$,

alors l'équation intégrale implicite (4.0.1) *a une solution dans $\mathscr{U}$.*

preuve.

On note :

$$S(u(x,t)) = \mathscr{A}(t, u(x,t))$$

et

$$T(u(x,t)) = \int_0^a \int_0^a \mathscr{H}(t, \theta, \phi, u(\theta, \phi)) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi.$$

Nous montrons que S, T sont des mappages faiblement croissants. Considérer

$$\begin{aligned} S(T(u(x,t))) &= \mathscr{A}(t, T(u(x,t))) \\ &= \mathscr{A}\left(t, \int_0^a \int_0^a \mathscr{H}(t, \theta, \phi, u(\theta, \phi)) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi\right) \\ &\leqslant \int_0^a \int_0^a \mathscr{H}(t, \theta, \phi, u(\theta, \phi)) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi = T(u(x,t)) \end{aligned}$$

par l'hypothèse (c).

et

$$\begin{aligned} T(S(u(x,t))) &= \int_0^a \int_0^a \mathscr{H}(t,\theta,\phi,S(u(\theta,\phi)))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi. \\ &= \int_0^a \int_0^a \mathscr{H}(t,\theta,\phi,\mathscr{A}(\theta,u(\theta,\phi)))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi. \\ &\leqslant \frac{1}{a^2}\mathscr{A}(t,u(x,t))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \mathscr{A}(t,u(x,t)) \end{aligned}$$

par l'hypothèse (b).

Donc,

$$S(T(u(x,t))) \leqslant T(u(x,t)),$$

et

$$T(S(u(x,t))) \leqslant S(u(x,t)),$$

pour tout $t \in I_a$. Ce qui impliquent que S, T sont des applications faiblement croissants par rapport à $\prec_2$.

Maintenant nous considérons

$$
\begin{aligned}
p(S(u),T(v)) &= \max_{t\in I_a}|S(u(x,t))-T(v(y,t))|+c \\
&= \max_{t\in I_a}\left|\mathscr{A}(t,u(x,t))-\int_0^a\int_0^a \mathscr{H}(t,\theta,\phi,v(\theta,\phi))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\right|+c \\
&\leqslant \max_{t\in I_a}\left|\mathscr{A}(t,u(x,t))-\frac{1}{a^2}\int_0^a\int_0^a \mathscr{A}(t,v(x,t))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\right|+c, \text{en utilisant } \textbf{(d)} \\
&= \max_{t\in I_a}|\mathscr{A}(t,u(x,t))-\mathscr{A}(t,v(x,t))|+c \\
&\leqslant \max_{t\in I_a}(k)e^{-\tau},\ \text{ utilisant } \textbf{(a)} \\
&\leqslant e^{-\tau}p(u,v).
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$\tau+\ln(p(S(u),T(v)))\leqslant \ln(p(u,v))\leqslant \ln(\mathscr{M}(u,v)).$$

En prenant $F(r)=\ln(r)$, on a

$$\tau+F(p(S(u),T(v)))\leqslant F(\mathscr{M}(u,v)).$$

Par conséquent, selon le théorème 3.1 l'équation intégrale (4.0.1) admet une solution dans $\mathscr{L}[C([0,a])\times[0,a]]$.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence et l'unicité d'un point fixe commun pour des opérateurs univoques définis sur un ensemble X dans un espace métrique partiel E. Nous avons présenté des conditions suffisantes sur la topologie de l'espace E, ainsi sur les opérateurs.

Le sujet traité dans le cadre de ce mémoire peut-être poursuivi et complété par des travaux pouvant contribuer à amiliorer certains résultats présentés :

-Etablir des théorèmes de point fixe commun en affaiblissant certaines conditions.

- Résoudre des équations différentielles ordinaires en basant sur ces résultats.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Wardowski, Fixed point theory of a new type of contractive mappings in complete metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 2012 (2012) Article ID 94.

[2] T. Abdeljawad, E. Karapinar, K. Tas, Existence and uniqueness of a common fixed point on partial metric spaces, Appl. Math. Lett. 24 (2011), 1900-1904.

[3] O. Acar, I. Altun, Multivalued F-contractive mappings with a graph and some fixed point results, Publications Math. 88 (2016), 305-317.

[4] G. Durmaz, G. Minak, I. Altun, Fixed points of ordered F-contractions, Hacettepe J. Math. Stat. 45 (2016), 15-21.

[5] H. Piri, P. Kumam, Some fixed point theorems concerning F-contraction in complete metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 2014 (2014), Article ID 210.

[6] H. Brezis,Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications, Université Pierre et Marie Curie et École Poly technique, Masson Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.

[7] M. Cosentino, P. Vetro, Fixed point results for F-contractive mappings of Hardy-Rogers-type, Filomat 28 (2014), 715-722.

[8] G. Minak, A. Helvaci, I. Altun, C´ir´ic type generalized F-contractions on complete metric spaces and fixed point results, Filomat 28 (2014), 1143-1151.

[9] S.G. Matthews, Partial metric topology, Ann. New York Acad. Sci. 728 (1994), 183-197.

[10] S. Romaguera, A Kirk type characterization of completeness for partial metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 2010 (2010), Article ID 493298.

[11] M. Nazam, I. Beg and M. Arshad, Common fixed points of weakly increasing F-Contractions on ordered partial metric spaces, Commun. Optim. Theory 2019 (2019), Article ID x, 1-13.

[12] N. Shobkolaei, S. Sedghi, J.R. Roshan, I. Altun, Common fixed point of mappings satisfying almost generalized (S,T)- contractive condition in partially ordered partial metric spaces, Appl. Math. Comput. 219 (2012), 443-452.