

République Algérienne démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université M'hamed Bougara de boumerdes
Faculté des sciences, Département de
mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'optention du diplôme de MASTER

DOMAINE : *Mathématique et Informatique*

FILIERE : *Mathématique*

SPECIALITE : *Analyse Mathématique*

Par

BOUFEDJI SOUHILA

Thème

Etude théorique et numérique
de quelques problèmes différentiels par la
Méthode des éléments finis

Soutenu le : 13/09/2020

Devant le jury de soutenance composé de :

S.MECHROUK
k.LAOUBI
Y. ADJABI

U. Boumerdes
U. Boumerdes
U. Boumerdes

Président
Encadreur
Examineur

Année Universitaire :2019-2020

Remerciements

*A la fin de l'élaboration de ce travail et avant tout mes remerciements
"Dieu" le tout puissant qui m'a guidé et m'a donné la volonté et la
patience pour atteindre ce but.*

*mes remerciements et ma reconnaissance au professeur encadreur
"Laoubi Karima" d'avoir accepté l'encadrement de ce mémoire et de
m'avoir éclairer par ses précieux conseils et ses encouragements continus.
Mes remerciements aussi aux membres du jury qui m'ont honoré d'avoir
accepté l'examen et la valorisation de ce travail.*

*Je présente aussi mes remerciements à tous les professeurs de
L'université de M'hamed Bougara qui ont contribué à ma formation
durant tout le cycle universitaire et surtout ceux qui appartiennent au
département mathématique et tout ceux qui ont participé de près ou de
loin à l'élaboration de ce modeste travail.*

Dédicaces

*A mes très chères parents,
source de vie, d'amours et d'affection.*

*A mon chère frère, chère marie,
chères enfants, Majeda et Racime,
source de joie et de bonheur.*

*A tous mes amies tout particulièrement
Yasmine, Zineb, Imane et Miada.*

A vous chère lecteurs.

Table des matières

Introduction	8
1 Notions Fondamentales	9
1.1 Rappel sur les espaces de Banach et de Hilbert	9
1.2 Les distributions	11
1.3 Espaces de Sobolev	14
1.3.1 les espaces H^m	14
1.3.2 L'espace $H^1(\Omega)$	15
1.4 Notion de trace	18
1.5 Conclusion	21
2 Introduction à la méthode des éléments finis	22
2.1 Formulation variationnelle	22
2.1.1 Exemple 1 – D	22
2.1.2 Exemple 2 – D	23
2.1.3 Formulation générale	24
2.2 Existence et unicité de la solution	24
2.2.1 Continuité	24
2.2.2 Théorème de Lax-Milgram	25
2.2.3 Retour à l'exemple 1 – D	26
2.2.4 Remarque : condition inf-sup	27
2.3 EDP elliptique d'ordre 2	28
2.4 Méthode de Galerkin	29
2.4.1 Principe de base d'une méthode de Galerkin	29
2.5 Approximation interne	30
2.5.1 Principe général	30
2.5.2 Interprétation de u_h	31
2.5.3 Estimation d'erreur	31
2.6 Principe général de la méthode des éléments finis	32
2.7 Retour à l'exemple 1 – D	34

3	Eléments finis de Lagrange	36
3.0.1	Exemple d'élément finis de Lagrange	36
4	Eléments finis d'Hermite	38
4.1	Exemples $1 - D$	38
5	Applications	39
5.1	Introduction	39
5.2	Algorithme	39
5.3	Code Matlab	40
5.4	Applications	42
5.4.1	Mise en œuvre de la méthode des éléments finis en dimension 1 pour $u(x) = x(x-1)$	43
5.4.2	Mise en œuvre de la méthode des éléments finis en dimension 1 pour $u(x) = x(1-x)e^{(x-\frac{1}{2})^2}$	50
5.4.3	Mise en œuvre de la méthode des éléments finis en dimension 1 pour $u(x) = x^4(x-1)$	55
5.5	Conclusion	61
	Conclusion Générale	62
	Bibliographiques	63

Table des figures

1.1	Diagramme expliquant la relation entre la dérivée au sens classique et la dérivée au sens des distributions.	13
2.1	Fonction de base φ_i	35
5.1	Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de $-u''(x) = f(x)$ (à gauche) et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ (à droite) pour $n = 3$ et $u(x) = x(x-1)$	43
5.2	Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de $-u''(x) = f(x)$ (à gauche) et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ (à droite) pour $n = 10$ et $u(x) = x(x-1)$	44
5.3	Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de $-u''(x) = f(x)$ (à gauche) et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ (à droite) pour $n = 100$ et $u(x) = x(x-1)$	45
5.4	Graphe représentant respectivement l'erreur pour $-u''(x) = f(x)$ et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ avec $u(x) = x(x-1)$	48
5.5	Tableau représentant respectivement l'erreur pour $-u''(x) = f(x)$ et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ avec $u(x) = x(x-1)$	49
5.6	Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de $-u''(x) = f(x)$ (à gauche) et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ (à droite) pour $n = 3$ et $u(x) = x(1-x)e^{(x-\frac{1}{2})^2}$	50
5.7	Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de $-u''(x) = f(x)$ (à gauche) et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ (à droite) pour $n = 10$ et $u(x) = x(1-x)e^{(x-\frac{1}{2})^2}$	51
5.8	Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de $-u''(x) = f(x)$ (à gauche) et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ (à droite) pour $n = 100$ et $u(x) = x(1-x)e^{(x-\frac{1}{2})^2}$	52

5.9	Graphe représentant respectivement l'erreur pour $-u''(x) = f(x)$ et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ avec $u(x) = x(1-x)e^{(x-\frac{1}{2})^2}$. . .	53
5.10	Tableau représentant respectivement l'erreur pour $-u''(x) = f(x)$ et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ avec $u(x) = x(1-x)e^{(x-\frac{1}{2})^2}$	54
5.11	Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de $-u''(x) = f(x)$ (à gauche) et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ (à droite) pour $n = 3$ et $u(x) = x^4(x-1)$	55
5.12	Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de $-u''(x) = f(x)$ (à gauche) et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ (à droite) pour $n = 10$ et $u(x) = x^4(x-1)$	56
5.13	Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de $-u''(x) = f(x)$ (à gauche) et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ (à droite) pour $n = 100$ et $u(x) = x^4(x-1)$	57
5.14	Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de $-u''(x) = f(x)$ (à gauche) et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ (à droite) pour $n = 100$ et $u(x) = x^4(x-1)$	58
5.15	Graphe représentant l'erreur respectivement pour $-u''(x) = f(x)$ et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ avec $u(x) = x^4(x-1)$	60
5.16	Tableau représentant respectivement l'erreur pour $-u''(x) = f(x)$ et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ avec $u(x) = x^4(x-1)$	61

Introduction :

La résolution des équations aux dérivées partielles occupe une place importante en mathématique appliquée. Il existe plusieurs techniques permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles. On pense par exemple aux méthodes de différence finies, de volumes finis, aux méthodes spectrales, etc. On peut sans aucun doute affirmer que la plus largement répandue est la méthode des éléments finis. Cette popularité n'est pas sans fondement, la méthode des éléments finis est très générale et possède une base mathématique rigoureuse qui est fort utile, même sur le plan pratique.

Les origines de la méthode des éléments finis remontent aux années 1950 lorsque des ingénieurs l'utilisèrent afin de simuler des problèmes de mécanique des milieux continus déformables. Depuis, le champ d'applications s'est considérablement étendu et fondements théorique de la méthode se sont amplement consolidés.

Il existe de nos jours un nombre important de logiciels commerciaux et académiques qui utilisant la méthode des éléments finis comme un outil de simulation robuste pour des problèmes de mécanique des fluides, de thermique, d'électromagnétisme ou de finance, pour ne citer que quelques exemples.

L'essor de la méthode des éléments finis repose sur deux ingrédients fondamentaux. D'une part, les propriétés interpolantes des éléments finis : ceux-ci permettent d'approcher des fonctions définies sur un domaine en maillant ce domaine puis en choisissant sur chaque maille des combinaisons linéaires de fonctions de forme (par exemple polynômiales). D'autre part, la méthode de Galerkin, qui fournit un cadre d'approximation général pour une large classe de problèmes où l'inconnue est une fonction qui doit satisfaire une ou plusieurs équations aux dérivées partielles et des conditions aux limites.

Chapitre 1

Notions Fondamentales

La majorité des phénomènes sont modélisés par le biais des équations aux dérivées partielles. Il s'est avéré que l'espace des fonctions continument dérivables suffisamment de fois pour donner un sens à l'EDP ne soit pas le cadre adéquat pour faire son étude défaut de complétude d'où la nécessité d'introduire un nouvel espace complet appelé espace de Sobolev H^1 que nous allons définir dans ce qui suit.

L'objectif de ce chapitre est de donner les outils de base nécessaires à l'utilisation de la méthode des éléments finis. Parmi les outils de base, on retrouve les notions de **distribution**, des espace de **Hilbert** et de **Sobolev**, et la notion de **trace**.

L'étude de ces notions pourrait faire l'objet d'un livre (et même de plusieurs). Nous omettrons toutefois quelques détails qui ont bien sur leur importance mais qui ne sont pas essentiels pour une bonne compréhension de la méthode des éléments finis. Pour une étude approfondie de ces notions nous renvoyons à ces deux livres [8] et [9] sur lesquels est essentiellement basé notre rapport.

1.1 Rappel sur les espaces de Banach et de Hilbert

Espace de Banach

Soit $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans un espace normé $(V, \|\cdot\|)$. On dit que cette **suite** est de **Cauchy** si :

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \|U_n - U_m\| = 0$$

L'espace normé $(V, \|\cdot\|)$ est dit de **Banach** si toute suite de Cauchy dans V converge vers un élément de V (pour la norme $\|\cdot\|$). En d'autres termes, un espace de Banach est un espace normé complet.

Exemple 1.1.1. :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, l'espace $V = \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ muni de la norme du maximum, est un espace de Banach :

$$\|v\|_{\infty} = \max_{x \in \overline{\Omega}} |v(x)|.$$

Par contre, même si l'application $\|\cdot\|_p : \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R} (1 \leq p \leq \infty)$, définie par :

$$\|v\|_p = \left(\int_{\Omega} |v|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall v \in V.$$

est une norme sur $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, l'espace $(\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_p)$ n'est pas un espace de Banach.

Définition 1.1.2.

Un produit scalaire dans un espace linéaire V est une forme $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ avec les propriétés suivantes :

1. $(u, u) \geq 0, \forall u \in V$ et $(u, u) = 0 \iff u = 0$.
2. $(u, v) = (v, u), \quad \forall u, v \in V$.
3. $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w), \quad \forall u, v, w \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Le couple $(V, (\cdot, \cdot))$ est un espace linéaire muni d'un produit scalaire .

Théorème 1.1.3. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(V, (\cdot, \cdot))$ un espace linéaire muni d'un produit scalaire, Alors on a :

$$|(u, v)| \leq \sqrt{(u, u)} \sqrt{(v, v)}, \quad \forall u, v \in V.$$

Espace de Hilbert**Théorème 1.1.4.**

Soit $(V, (\cdot, \cdot))$ un espace linéaire muni d'un produit scalaire. Posons $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ pour tout $v \in V$, Alors le couple $(V, \|\cdot\|)$ est un espace normé et

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|, \quad \forall u, v \in V.$$

Un **espace de Hilbert** est un espace de Banach dont la norme est introduite par un produit scalaire.

Exemple 1.1.5.

L'espace $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilbert.

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(x, x)}, \quad \forall x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n.$$

où $(\cdot, \cdot)$ est le produit scalaire dit euclidien.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, les espaces $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\mathbf{H}^1(\Omega)$ qu'on va introduire dans les paragraphes suivants sont aussi des espaces de Hilbert.

1.2 Les distributions

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) et f une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle **support** de f l'ensemble :

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in \Omega \text{ tel que } : f(x) \neq 0\}}.$$

On dit que la fonction f est à support compact s'il existe un sous-ensemble compact $K \subset \Omega$ tel que $\text{supp} f \subset K$. On définit ainsi l'**espace** $\mathcal{D}(\Omega)$ par :

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \text{ tel que } : f \text{ est à support compact} \}.$$

On peut maintenant définir l'**espace des distributions** sur Ω .

Soit T une application linéaire de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. On note par $\langle T, \varphi \rangle$ la valeur de T correspondante à l'élément $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, c'est-à-dire $\langle T, \varphi \rangle = T(\varphi)$.

On dit que T est continue si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \varphi \rangle,$$

où $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite arbitraire de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

On appelle **distribution** sur $\mathcal{D}(\Omega)$ toute application $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire et continue. L'espace des distributions sur Ω est l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$, dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, c'est-à-dire, l'espace des applications $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ linéaires et continue (au sens spécifié ci-dessus).

Exemple 1.2.1.

Soit a un point de Ω . Le **delta de Dirac** relatif au point a , noté par δ_a , est la distribution définie par :

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

δ_a est linéaire.

En effet,

$$\begin{aligned} \langle \delta_a, \varphi + \psi \rangle &= \langle \varphi + \psi \rangle(a), \\ &= \varphi(a) + \psi(a), \\ &= \langle \delta_a, \varphi \rangle + \langle \delta_a, \psi \rangle, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{aligned}$$

Elle est aussi continue. En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \delta_a, \varphi_n \rangle &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(a), \\ &= \varphi(a), \\ &= \langle \delta_a, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ tel que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = \varphi. \end{aligned}$$

On dit qu'une **suite de distributions** $\{T_n\}$ converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ vers une distribution T si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Considérons l'espace $\mathbf{L}^2(\Omega)$ des fonctions à carré sommable défini par :

$$\mathbf{L}^2 = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Cet espace est un espace de Hilbert.

$$(f, g)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

La norme de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ associée à ce produit scalaire est donc donnée par :

$$\|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = ((f, f)_{\mathbf{L}^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A toute fonction $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ on associe une distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ défini par :

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.2.1)$$

On a le résultat suivant :

Lemme 1.2.2.

L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. En d'autres termes, toute fonction $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ peut être approchée (pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$) par des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$.

*Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. La dérivée partielle de T par rapport à x_i avec $i = (1, \dots, n)$ au **sens des distributions** est une nouvelle distribution définie de la manière suivante :*

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De manière analogue on peut définir les dérivées successives. Pour chaque multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}$, on définit :

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Remarque :

1. La dérivation au sens des distribution est une généralisation de la dérivée classique pour les fonctions, au sens suivant : si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors la dérivée de sa distribution associée T_f coïncide avec la distribution T'_f associée à la dérivée au sens classique f' de f . Cette relation est résumé dans le diagramme suivant [6] :

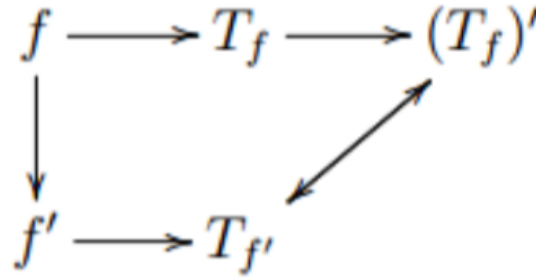


FIGURE 1.1 – Diagramme expliquant la relation entre la dérivée au sens classique et la dérivée au sens des distributions.

2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et v une fonction de $L^2(\Omega)$, en général les fonctions intégrables ou les fonctions de carré intégrable ne sont pas forcément dérivables, et donc $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ n'aurait pas de sens (au sens usuel. Mais pourtant, il va falloir considérer leurs dérivées pour que notre EDP ait un sens. C'est ici on l'on va se servir de la notion de dérivée faible (ou dérivée au sens des distributions).

En effet, $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ a un sens au sens des distributions donnée par :

$$\left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

1.3 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espace fonctionnels. Plus précisément, un espace de Sobolev est un espace vectoriel de fonctions muni de la norme obtenue par la combinaison de la norme L^p de la fonction elle même, ainsi que de ses dérivées jusqu'à un certain ordre.

1.3.1 les espaces H^m

Définition 1.3.1.

Pour tout entier $m \geq 1$,

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq m\}$$

$H^m(\Omega)$ est appelé **espace de Sobolev d'ordre m** .

Par extension, on voit aussi que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$

Dans le cas de la dimension 1, on écrit plus simplement pour I ouvert de $\mathbb{R}$:

$$H^m(I) = \{u \in L^2(I) / u', \dots, u^{(m)} \in L^2(I)\}$$

1.3.2 L'espace $H^1(\Omega)$

On appelle espace de Sobolev $\mathbf{H}^1(\Omega)$ d'ordre 1 sur Ω (ouvert de $\mathbb{R}^n$), l'espace :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^1(\Omega) &= \left\{ u \in \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ tel que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \quad \forall i = 1, \dots, n \right\}, \\ &= \left\{ u \in \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ tel que } \nabla(u) \in \mathbf{L}^2(\Omega) \right\}.\end{aligned}$$

On lui associe le produit scalaire :

$$(u, v)_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx.$$

et la norme associée est notée :

$$\|u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = (u, u)_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} \left(u^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définissons maintenant un autre espace de Sobolev qui est $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, et qui nous sera très utile pour les problèmes avec conditions aux limites.

Définition 1.3.2.

L'espace de Sobolev $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ est défini comme étant l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

Théorème 1.3.3. (Inégalité de Poincaré).

Si Ω est borné, alors il existe une constante $C = C(\Omega) > 0$ telle que :

$$\forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \|v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \quad (1.3.1)$$

Démonstration :

On va montrer le résultat pour $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, puis on va conclure par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

puisque Ω est borné, alors on peut supposer que $\Omega \subset \Omega' \times [a, b]$, avec Ω' un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$.

On note $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

On peut écrire que :

$$\Omega \subset \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid a \leq x_n \leq b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Soit $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ et soit $\tilde{v}$ son prolongement par 0 en dehors de Ω , on a $\tilde{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\tilde{v}(x', a) = 0$.

D'où :

$$\tilde{v}(x', x_n) = \int_a^{x_n} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x', t) dt \quad \forall (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} |\tilde{v}(x', x_n)|^2 &= \left| \int_a^{x_n} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x', t) dt \right|^2 \\ &\leq \left(\int_a^{x_n} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x', t) \right| dt \right)^2. \end{aligned}$$

D'où par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |\tilde{v}(x', x_n)|^2 &\leq \int_a^{x_n} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x', t) \right|^2 dt \int_a^{x_n} |1| dt, \\ &\leq (x_n - a) \times \int_a^{x_n} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x', t) \right|^2 dt, \\ &\leq (x_n - a) \times \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x', t) \right|^2 dt. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\tilde{v}(x', x_n)|^2 dx' \leq (x_n - a) \times \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x) \right|^2 dx.$$

D'où en intégrant en x_n , et $\tilde{v}(x', \cdot)$ étant nul à l'extérieur de $]a, b[$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{v}(x', x_n)|^2 dx &\leq \int_a^b (x_n - a) dx_n \times \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x) \right|^2 dx, \\ &\leq \frac{1}{2}(b - a)^2 \times \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \|v(x)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{2}(b - a)^2 \times \left\| \frac{\partial v}{\partial x_n}(x) \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \\ \implies \|v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &\leq \frac{b - a}{\sqrt{2}} \times \left\| \frac{\partial v}{\partial x_n} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \end{aligned}$$

L'inégalité de Poincaré étant vérifiée pour toute fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$, et on sait que toute fonction de $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ est une limite d'une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ (car $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$).

on en déduit alors le résultat.

Remarque :

Ce résultat nous montre en particulier que pour Ω borné, $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ est un sous-espace de $\mathbf{H}^1(\Omega)$.

Cependant, la fonction constante égal à 1 appartient à $\mathbf{H}^1(\Omega)$ est n'appartient pas à $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, sinon elle vérifierait l'égalité ci-dessus ce qui est absurde car son gradient est nul.

$\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Lemme 1.3.4.

Si Ω est borné, la semi-norme

$$\begin{aligned} |v|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} &= \|\nabla v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

est une norme sur l'espace $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$.

Démonstration :

On se limite ici au cas de l'espace $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. D'après (1.3.1), on tire que $|v|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = 0$ avec $v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, alors $\|v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0$, ce qui implique que $v = 0$ puisque $\|v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ est une norme. Il en résulte donc que $|v|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ est une norme sur $\mathbf{H}^1(\Omega)$.

Soit $v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ puisque :

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} \left(v^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\|v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + |v|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

il est clair que :

$$|v|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

D'autre part, d'après (1.3.1), on a :

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} &= \left(\|v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + |v|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left((1 + C^2(\Omega)) |v|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (1 + C^2(\Omega))^{\frac{1}{2}} |v|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ce qui complète la démonstration.

1.4 Notion de trace

Lors de la résolution des équations aux dérivées partielles, il nous faudra introduire des conditions aux limites, ce qui nous amène à parler de la restriction à la frontière $\Gamma = \partial\Omega$, d'une fonction de $\mathbf{H}^1(\Omega)$.

Une fonction $v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ n'est pas nécessairement continue, et définir sa trace $v|_\Gamma$ (i.e sa 'valeur') sur le bord $\Gamma = \partial\Omega$ pose un problème.

Les fonctions de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ ne sont pas nécessairement continue. Pour définir leur valeur au bord on va les approcher par des fonctions régulières.

On admet que les fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sont denses dans $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$.
La démonstration de ce résultat se fait par troncature et régularisation.

D'autre part si Ω est un ouvert de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, c'est à dire que localement sa frontière est le graphe d'une fonction $\mathcal{C}^1$, ou bien si $\Omega = \mathbb{R}^n$ alors $\overline{\mathcal{D}}(\Omega)$ est dense dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$.

Nous allons montrer que le fait d'associer une valeur au bord pour une fonction est une opération continue pour la topologie de $\mathbf{H}^1(\Omega)$.

Plus précisément, nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.4.1. (*théorème de trace*)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Alors :

1. $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dense dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$.
2. l'application restriction γ_0 définie par :

$$\gamma_0 = \begin{cases} \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \rightarrow & \mathcal{C}^0(\Gamma) \\ v \rightarrow & \gamma_0(v) = v|_\Gamma \end{cases}$$

est linéaire continue (pour $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ et $\mathcal{C}^0(\Gamma)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}$) et γ_0 se prolonge par continuité de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Gamma)$.

On définit ainsi :

$$\gamma_0 = \begin{cases} \mathbf{H}(\Omega) \rightarrow & \mathbf{L}^2(\Gamma) \\ v \rightarrow & \gamma_0(v) = v|_{\Gamma} \end{cases}$$

et la continuité s'écrit :

$$\exists c > 0, \forall v \in \mathbf{H}^1(\Omega); \quad \|\gamma_0(v)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \leq c\|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

Remarque :

le noyau de γ_0 est en fait $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

Pour la démonstration de ce théorème nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 1.4.2.

Pour toute fonction $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, nous avons l'inégalité suivante :

$$\|v(., 0)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \|v\|_{\mathbf{H}^1(\mathbb{R}_+^n)}. \quad (1.4.1)$$

Démonstration :

Soit $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} |v(x', 0)|^2 &= - \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial x_n} |v(x', x_n)|^2 \right) dx_n, \\ &= -2 \int_0^\infty v(x', x_n) \frac{\partial v}{\partial x_n}(x', x_n) dx_n. \end{aligned}$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité :

$$2ab \leq a^2 + b^2.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} |v(x', 0)|^2 &\leq 2 \left(\int_0^\infty |v(x', x_n)|^2 dx_n \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \left| \frac{\partial v}{\partial x_n}(x', x_n) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\ &\leq \int_0^\infty |v(x', x_n)|^2 dx_n + \int_0^\infty \left| \frac{\partial v}{\partial x_n}(x', x_n) \right|^2 dx_n. \end{aligned}$$

par intégration en x' , on en déduit :

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v(x', 0)|^2 dx' \leq \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(|v(x)|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial x_n}(x) \right|^2 \right) dx$$

D'où :

$$\|v(\cdot, 0)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \|v\|_{\mathbf{H}^1(\mathbb{R}_+^n)}.$$

Revenons maintenant à la démonstration du théorème (1.4.1).

Démonstration :

Pour démontrer le théorème (1.4.1), on se restreint au cas $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ qui est le modèle le plus simple d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\mathcal{C}^\infty$.

$$\mathbb{R}_+^n := \{x = (x', x_n); \ x_n > 0\}.$$

Dans ce cas, la frontière de Ω est l'hyperplan :

$$\Gamma = \{x = (x', 0); \ x' \in \mathbb{R}^{n-1}\} \cong \mathbb{R}^{n-1}.$$

Le cas d'un domaine générale Ω est traité par cartes locales :

On se place sur un morceaux de $\partial\Omega$ et on le redresse grâce à un difféomorphisme en une partie de $\mathbb{R}^n$ sur lequel on applique le résultat désormais connu.

Puis on recolle le morceaux. Pour revenir au cas $\Omega = \mathbb{R}_+^n$, on va utiliser l'inégalité (1.4.1) du lemme (1.4.2).

Comme $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ est dense dans $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}_+^n)$ cette inégalité se prolonge aux fonctions de ce dernier espace et on obtient, pour ces fonctions, une trace dans $\mathbf{L}^2$ du bord.

A noter que ce n'est pas le cas pour les fonctions de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^n)$. Pour celles-ci on ne peut pas définir de valeur au bord [7].

corollaire 1.4.3.

$\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ est le sous-espace de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord $\Gamma = \partial\Omega$ et on a :

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) = \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ tel que } \gamma_0(v) = 0_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}\}.$$

Démonstration

Comme les fonctions de $\mathbf{H}_0^1$ sont des limites de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la topologie de $\mathbf{H}_0^1$ et celles-ci s'annulent sur $\partial\Omega$, la continuité de γ_0 implique que la fonction limite a une trace nulle.

L'inclusion dans un sens est donc prouvée. L'autre sens est admis.

Le résultat suivant permet de déduire la **formule de Green**.

corollaire 1.4.4. (*intégration par parties en dimension n*)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors si u et v sont des fonctions de $\mathbf{H}^1(\Omega)$, on a :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} u v n_i ds, \quad i = 1, \dots, n.$$

où n_i est la i -ème composante de la normale sortante au domaine Ω .

1.5 Conclusion

Nous avons donc préparé le terrain, nous disposons maintenant de tous les outils nécessaire pour élaborer la méthode des élément finis.

On a commencé par l'espace de sobolev pour assurer la complétude de l'espace dans lequel la solution approchée est définie.

La notion de dérivée au sens des distribution pour que l'EDP ait un sens, et enfin le théorème de trace pour pouvoir donner des valeurs à la solution (qui n'est pas forcément continue) aux bords.

Chapitre 2

Introduction à la méthode des éléments finis

2.1 Formulation variationnelle

2.1.1 Exemple 1 – D

Soit à résoudre le problème

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) & a < x < b \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

où f et c sont des fonctions données continues sur $[a, b]$. On supposera de plus la fonction c est strictement positive sur $[a, b]$.

Un tel problème est appelé *problème aux limites*.

Définition 2.1.1.

Une **solution classique** (ou **solution forte**) de $(\mathcal{P})$ est une fonction u de $\mathcal{C}^2([a, b])$ telle que $u(a) = u(b) = 0$ et $\forall x \in]a, b[, -u''(x) + c(x)u(x) = f(x)$.

En faisant le produit scalaire $L^2(]a, b[)$ de l'équation différentielle avec une fonction test $v \in \mathcal{D}(]a, b[)$ (c'est à dire en intégrant sur $[a, b]$), on a :

$$-\int_a^b u''(x)v(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

soit, en intégrant par parties le premier terme :

$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

car $v(a) = v(b) = 0$ puisque $v \in \mathcal{D}(]a, b[)$. Chaque terme de cette équation a en fait un sens dès que $v \in H_0^1(]a, b[)$.

De plus, $\mathcal{D}(]a, b[)$ étant dense dans $H_0^1(]a, b[)$, cette équation est vérifiée pour tout $v \in H_0^1(]a, b[)$.

On peut donc définir le nouveau problème :

$$(\Psi) = \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(]a, b[) \text{ tel que} \\ \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \quad \forall v \in H_0^1(]a, b[) \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Ce problème est la **formulation variationnelle** (ou **formulation faible**) du problème $(\mathcal{P})$.

Toute solution de (Ψ) est appelée **solution faible**. Il est immédiat que toute solution forte de $(\mathcal{P})$ est aussi une solution faible.

2.1.2 Exemple 2 – D

Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On veut résoudre le problème

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Une solution classique de ce problème est une fonction de $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ vérifiant (2.1.3) en tout point de Ω . Au passage, on voit que ceci impose que f soit $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$.

Toute solution classique vérifie donc :

$$\forall v \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \quad \int_{\Omega} -\Delta u v + \int_{\Omega} u v = \int_{\Omega} f v$$

soit par intégration par parties : $\int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} u v = \int_{\Omega} f v$ puisque $\partial_n u = 0$ sur $\partial\Omega$. Or, $\overline{\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})} = H^1(\Omega)$.

On peut donc définir le nouveau problème :

$$(\Psi) = \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} u v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases} \quad (2.1.4)$$

C'est la formulation variationnelle de $(\mathcal{P})$.

On voit que ce problème est défini dès que $f \in L^2(\Omega)$.

2.1.3 Formulation générale

Les exemples précédents montre que, d'une façon générale, la formulation variationnelle sera obtenue en faisant le produit scalaire $L^2(\Omega)$ de l'équation avec une fonction v appartenant à un espace V à préciser (c'est à dire en multipliant par v et en intégrant sur Ω).

En intégrant par parties les termes d'ordre plus élevés en tenant compte des conditions aux limites du problème. On arrive alors à une formulation de type :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V \quad (2.1.5)$$

où $a(., .)$ est une forme sur $V \times V$ (bilinéaire si l'EDP de départ est linéaire) et $l(.)$ est une forme sur V (linéaire si les conditions aux limites de l'EDP de départ le sont).

Remarque :

Une formulation plus générale est la suivante :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, w) = l(w) \quad \forall w \in W \quad (2.1.6)$$

où $a(., .)$ est une forme bilinéaire sur $V \times W$ et $l(.)$ est une forme linéaire sur W . V est alors appelé *espace des solutions* et W *espace des fonctions-tests*.

La formulation précédente (2.1.5) correspond donc au cas particulier $W = V$.

2.2 Existence et unicité de la solution

2.2.1 Continuité

Soit V et W des espaces de Hilbert.

Définition 2.2.1.

Une **forme linéaire** $l(u)$ sur V est **continue** ssi il existe une constante K telle que $|l(u)| \leq K \|u\|_V \quad \forall u \in V$.

Définition 2.2.2.

Une **forme bilinéaire** $a(u, w)$ sur $V \times W$ est **continue** ssi il existe une constante M telle que $|a(u, w)| \leq M \|u\|_V \|w\|_W \quad \forall (u, w) \in V \times W$.

2.2.2 Théorème de Lax-Milgram

On va introduire ici un outil important pour assurer l'existence et l'unicité de solutions à la formulation variationnelle de problèmes aux limites de type elliptique. On se place dans le cas $W = V$.

Définition 2.2.3.

Une **forme bilinéaire** $a(u, v)$ sur $V \times V$ est **coercive** (ou **V-elliptique**) ssi il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$, $\forall u \in V$.

Théorème 2.2.4. (Lax-Milgram)

Soit V un espace de Hilbert. Soit a une forme bilinéaire continue coercive sur V . Soit l une forme linéaire continue sur V . Alors il existe un unique $u \in V$ tel que $a(u, v) = l(v)$, $\forall v \in V$.

(et de plus, l'application linéaire $l(u)$ est continue.)

La démonstration générale de ce théorème peut être trouvée par exemple dans Raviart et Thomas(1983)

Théorème 2.2.5.

On prend les mêmes hypothèses que pour le théorème de Lax-Milgram, et on suppose de plus a est symétrique, c'est à dire que $a(u, v) = a(v, u) \forall u, v$. On définit alors la fonctionnelle $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - l(v)$, et on considère le problème de minimisation :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } J(u) = \min_{v \in V} J(v)$$

Alors le problème admet une solution unique, qui est également la solution du problème variationnel précédent.

La démonstration de ce théorème vient du fait que J est une fonctionnelle quadratique, et que l'on a $\nabla J[u](v) = a(u, v) - l(v)$.

C'est de cette propriété que vient l'utilisation du terme "variationnel", puisqu'elle montre le lien avec le "calcul des variations".

Remarque :

Le théorème de Lax-Milgram donne des conditions suffisantes pour que le problème soit bien posé (c'est à dire existence et unicité de la solution).

Si les hypothèse de ce théorème ne sont pas satisfaites, on ne peut donc pas en déduire que le problème est mal posé.

Toutefois, dans le cas où toutes les hypothèses autres que la coercivité de a sont satisfaites, on a le résultat suivant :

si a est symétrique et positive ($a(v, v) \geq 0, \forall v \in V$), alors a non coercive implique que le problème est mal posé.

2.2.3 Retour à l'exemple 1 – D

En reprenant l'exemple 1 – D précédent, on peut poser :

$$a(u, v) = \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx \quad (2.2.1)$$

et

$$l(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx \quad (2.2.2)$$

a ainsi définie est une forme bilinéaire symétrique continue coercive sur $H_0^1(a, b) \times H_0^1(a, b)$, et l est une forme linéaire continue sur $H_0^1(a, b)$.

Donc le problème (2.1.2) admet une solution unique d'après le théorème de Lax-Milgram.

Cherchons maintenant à interpréter cette solution u de (2.1.2). Prenons $v = \varphi \in \mathcal{D}(]a, b[)$. Alors

$$\int_a^b u'(x)\varphi'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)\varphi(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx$$

soit, en intégrant par parties :

$$-\int_a^b u''(x)\varphi(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)\varphi(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx$$

c'est à dire $(-u'' + cu, \varphi)_0 = (f, \varphi)_0 \forall \varphi \in \mathcal{D}(]a, b[)$.

$\mathcal{D}(]a, b[)$ étant dense dans $L^2(]a, b[)$, on a donc : $-u'' + cu = f$ dans $L^2(]a, b[)$. u étant dans $L^2(]a, b[)$, et f et c étant dans $C^0(]a, b[)$, donc également dans $L^2(]a, b[)$,

on en déduit que $u'' = cu - f$ est aussi dans $L^2(]a, b[)$.

Puisque u est dans $H_0^1(]a, b[)$ et u'' est dans $L^2(]a, b[)$, on en déduit que u est dans $H^2(]a, b[)$, donc u est dans $\mathcal{C}^1(]a, b[)$ (section 1.3.1).

De ce fait, $cu - f$, c'est à dire u'' est dans $C^0(]a, b[)$.

Donc u' est dans $\mathcal{C}^1(]a, b[)$, donc u est dans $\mathcal{C}^2(]a, b[)$.

La solution faible u est donc aussi solution forte du problème de départ.

En résumé :

- On est parti d'un problème $(\mathcal{P})$ et on a introduit sa formulation variationnelle (Ψ) .
- On a montré l'existence et l'unicité d'une solution faible (en utilisant le théorème de Lax-Milgram). Toute solution forte étant aussi solution faible, ceci prouve qu'il y a au plus une solution forte pour $(\mathcal{P})$.
- On a prouvé que cette solution faible est bien une solution forte. Le problème de départ $(\mathcal{P})$ a donc une solution unique.

L'intérêt de cette démarche est d'une part que la formulation variationnelle se prête bien à l'étude de l'existence et de l'unicité de solutions, et d'autre part que l'on travaille dans des espaces de Hilbert, ce qui permet de faire de l'approximation interne.

2.2.4 Remarque : condition inf-sup

Dans le cas de la formulation plus générale (2.1.6), on a le théorème suivant.

Théorème 2.2.6. (*Banach-Neca-Babuska*)

Soient V et W deux espaces de Hilbert, a une forme bilinéaire continue sur $V \times W$, l une forme linéaire continue sur W . Alors le problème (2.1.6) admet une et une seule solution si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \inf_{v \in V} \sup_{w \in W} \frac{a(v, w)}{\|v\|_V \|w\|_W} \geq \alpha \\ \forall w \in W, (a(v, w) = 0 \quad \forall v \in V) \Rightarrow (w = 0) \end{array} \right.$$

Remarque

- La première condition est appelée *condition inf-sup*.
- Contrairement au théorème de Lax-Milgram, ce théorème fournit une condition nécessaire et suffisante pour que la formulation soit bien posée.
- Pour prouver la condition inf-sup, on peut considérer une fonction $v \in V$ et construire une fonction $w_v \in W$ telle que $a(v, w_v) \geq \alpha_1 \|v\|_V^2$ et $\|w_v\|_W^2 \leq \alpha_2 \|v\|_V^2$. Ceci prouve que la condition inf-sup est satisfaite, avec $\alpha = \alpha_1/\alpha_2$.

2.3 EDP elliptique d'ordre 2

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ assez régulière. Soient des fonctions a_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) dans $C^1(\bar{\Omega})$ et a_0 dans $C^0(\bar{\Omega})$.

On considère le problème :

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} - \sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + a_0 u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_j u n_i = g & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (2.3.1)$$

où Γ_0 et Γ_1 forment une partition de $\partial\Omega$ ($\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ et $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$).

Une solution classique de $(\mathcal{P})$ est obtenue par intégration par parties.

Elle s'écrit :

$$(\Psi) = \begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_j u \partial_i v + a_0 uv \right) = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_1} g v \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (2.3.2)$$

avec $V = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$. Cette formulation est en fait définie dès que a_0 et les a_{ij} sont dans $L^\infty(\Omega)$, f dans $L^2(\Omega)$ et g dans $L^2(\Gamma_1)$.

Posons $a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_j u \partial_i v + a_0 uv \right)$ et $\int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_1} g v$.

Il est immédiat que a est une forme bilinéaire continue et l une forme linéaire continue sur V . Si l'EDP de départ (2.3.1) vérifie les deux hypothèses d'ellipticité :

— il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha\|\xi\|^2$ presque

pour tout $x \in \Omega$

— il existe α_0 tel que $a_0(x) \geq \alpha_0$ presque pour tout $x \in \Omega$

alors a est coercive :

— sur $H_0^1(\Omega)$ dès que $\alpha_0 > \frac{-\alpha}{C(\Omega)^2}$ (et donc en particulier si $\alpha_0 \geq 0$) où $C(\Omega)$ est la constante de l'inégalité de Poincaré

— sur $H^1(\Omega)$ si $\alpha_0 > 0$

Par application du théorème de Lax-Milgram, on a donc existence et unicité d'une solution à la formulation variationnelle (Ψ) :

— si $\Gamma_0 = \partial\Omega$ (c'est à dire $\Gamma_1 = \emptyset$) et si $\alpha_0 > \frac{-\alpha}{C(\Omega)^2}$

— si $\Gamma_1 \neq \emptyset$ et si $\alpha_0 > 0$

2.4 Méthode de Galerkin

La méthode des éléments finis est une méthode de Galerkin particulière mais avec des propriétés spécifique qui la rendent spécialement attractive dans la résolution des problèmes aux limites.

Nous allons la présenter ici comme un cadre général abstrait permettant l'étude de la convergence de l'approximation par éléments finis qui sont donnés dans ce chapitre.

2.4.1 Principe de base d'une méthode de Galerkin

Reprenons le problème abstrait (2.1.1).

Le but est de ramener sa résolution à celle d'un **problème discret**, équivalente à la recherche d'un **nombre fini** de paramètres réels.

Le principe d'une méthode de Galerkin est d'approcher les éléments de l'espace V par ceux d'un sous-espace V^h de **dimension finie**.

C'est donc, à la base, la construction d'un processus d'approximation des éléments d'un espace de Hilbert V .

L'exposant h est un paramètre réel > 0 caractérisant la discrétisation et tendant vers 0 au fur et à mesure que la discrétisation devient de plus en plus fine.

Cette convention est utile pour les méthodes d'éléments finis où ce paramètre a un sens géométrique précis.

La propriété d'approximation est décrite par la condition suivante dite d'**approximation interne**

$$\forall v \in V, \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v^h \in V^h} \|v - v^h\|_V = 0. \quad (2.4.1)$$

La quantité $\inf_{v^h \in V^h} \|v - v^h\|_V$ est la distance de v à V^h . Comme V^h est un espace de dimension finie, dès que V est un **espace normé** (même s'il n'est pas complet), cette distance est caractérisée de la façon suivante.

-Il existe $z^h \in V^h$ tel que

$$\|v - z^h\|_V = \inf_{v^h \in V^h} \|v - v^h\|_V \quad (2.4.2)$$

et z^h est appelé **la meilleure approximation** de v par les éléments de V^h .

-La propriété d'approximation interne peut ainsi être décrite de façon équivalente :

$$\forall v \in V, \exists \{w^h\}_{h>0} : \begin{cases} w^h \in V^h, & \forall h > 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} w^h = v & \text{dans } V \end{cases} \quad (2.4.3)$$

2.5 Approximation interne

2.5.1 Principe général

Soit Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2$ ou 3 en pratique), de frontière $\partial\Omega$, et sur lequel on cherche à résoudre une équation aux dérivées partielles, munie de conditions aux limites.

En écrivant la formulation variationnelle, on obtient un problème de la forme

$$(\Psi) \text{ Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V$$

où V est un espace de Hilbert.

Sous réserve que l'équation de départ ait de bonnes propriétés, c'est à dire par exemple qu'on soit dans les hypothèse du théorème de Lax-Milgram, (Ψ) admet une solution unique u .

Pour obtenir une approximation numérique de u , on va maintenant remplacer l'espace V qui est en général de dimension infinie par un sous-espace V_h de dimension finie, et on va chercher à résoudre le problème approché

$$(\Psi_h) \text{ Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

V_h étant de dimension finie, c'est un fermé de V .

V étant un espace de Hilbert, V_h l'est donc aussi. D'où l'existence et l'unicité de u_h , à nouveau par exemple d'après le théorème de Lax-Milgram.

L'espace V_h sera en pratique construit à partir d'un maillage du domaine Ω , l'indice h désignant la " taille typique " des mailles.

Lorsque l'on construit des maillages de plus en plus fins, la suite de sous-espaces $(V_h)_h$ formera une **approximation interne** de V , c'est à dire que, pour tout élément φ de V , il existe une suite de $\varphi_h \in V_h$ telle que $\|\varphi - \varphi_h\| \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

Cette méthode d'approximation interne est également appelée **méthode de Galerkin**.

Remarque

Dans le cas de la formulation plus générale (2.1.6)

$$(\Psi') \text{ Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, w) = l(w), \quad \forall w \in W$$

le problème approché devient

$$(\Psi'_h) \text{ Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, w_h) = l(w_h) \quad \forall w_h \in W_h$$

et le caractère bien posé de (Ψ'_h) est équivalent aux deux conditions

$$\begin{cases} \exists \alpha_h > 0 \text{ tel que } \inf_{v_h \in V_h} \sup_{w_h \in W_h} \frac{a(v_h, w_h)}{\|v_h\|_{V_h} \|w_h\|_{W_h}} \geq \alpha_h \\ \forall w_h \in W_h, (a(v_h, w_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h) \Rightarrow (w_h = 0) \end{cases}$$

ou bien, de façon équivalente :

$$\begin{cases} \exists \alpha_h > 0 \text{ tel que } \inf_{v_h \in V_h} \sup_{w_h \in W_h} \frac{a(v_h, w_h)}{\|v_h\|_{V_h} \|w_h\|_{W_h}} \geq \alpha_h \\ \dim V_h = \dim W_h \end{cases}$$

la première relation est appelée *condition inf-sup discrète*.

Attention : ces propriétés doivent être démontrées. Rien ne garantit a priori que la condition inf-sup discrète sera vérifiée, même si la condition inf-sup est vérifiée.

2.5.2 Interprétation de u_h

On a $a(u, v) = l(v)$, $\forall v \in V$, donc en particulier $a(u, v_h) = l(v_h)$, $\forall v_h \in V_h$, car $V_h \subset V$.

Par ailleurs, $a(u_h, v_h) = l(v_h)$, $\forall v_h \in V_h$.

Par différence, on en déduit que

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.5.1)$$

Dans le cas où $a(., .)$ est symétrique, il s'agit d'un produit scalaire sur V . u_h peut alors être interprétée comme la projection orthogonale de u sur V_h au sens de $a(., .)$.

2.5.3 Estimation d'erreur

On a :

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h) \quad \forall v_h \in V_h \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \end{aligned}$$

Or $v_h - u_h \in V_h$. Donc $a(u - u_h, v_h - u_h) = 0$ d'après (2.5.1).

On a donc :

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.5.2)$$

a étant coercive, il existe $\alpha > 0$ tel que $a(u - u_h, u - u_h) \geq \alpha \|u - u_h\|^2$, où $\|\cdot\|$ est une norme sur V .

Par comme a étant continue, il existe $M > 0$ tel que

$$a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\| \|u - v_h\|$$

En réinjectant ces deux inégalités de part et d'autre de (2.5.2) et en simplifiant par $\|u - u_h\|$, on obtient

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\| \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.5.3)$$

c'est à dire

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} d(u, V_h) \quad (2.5.4)$$

où d est la distance induite par $\|\cdot\|$. Cette majoration est appelée **lemme de Céa**.

Elle ramène l'étude de l'erreur d'approximation $u - u_h$ à l'étude de l'erreur d'interpolation $d(u, V_h)$.

2.6 Principe général de la méthode des éléments finis

La démarche générale de la méthode des éléments finis est la suivante.

On a une EDP à résoudre sur un domaine Ω .

On écrit la formulation variationnelle de cette EDP, et on se ramène donc à un problème de type

$$(\Psi) \text{ Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V$$

On va chercher une approximation de u par approximation interne.

Pour cela, on définit un maillage du domaine Ω , grâce auquel on va définir un espace d'approximation V_h , s.e.v de V de dimension finie N_h (par exemple V_h sera l'ensemble des fonctions continues sur Ω et affines sur chaque maille).

Le problème approché est alors

$$(\Psi_h) \text{ Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h})$ une base de V_h . En décomposant u_h sur cette base sous la forme

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i \varphi_i \quad (2.6.1)$$

le problème (Ψ_h) devient

$$\text{Trouver } \mu_1, \dots, \mu_{N_h} \text{ tel que } \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i a(\varphi_i, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.6.2)$$

ou encore par linéarité de a et l :

$$\text{Trouver } \mu_1, \dots, \mu_{N_h} \text{ tel que } \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i a(\varphi_i, \varphi_j) = l(\varphi_j), \quad \forall j = 1, \dots, N_h \quad (2.6.3)$$

c'est à dire résoudre le système linère

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & \dots & a(\varphi_{N_h}, \varphi_1) \\ \vdots & & \vdots \\ a(\varphi_1, \varphi_{N_h}) & \dots & a(\varphi_{N_h}, \varphi_{N_h}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{N_h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l(\varphi_1) \\ \vdots \\ l(\varphi_{N_h}) \end{pmatrix} \quad (2.6.4)$$

soit

$$A\mu = b \quad (2.6.5)$$

La matrice A est a priori pleine. Toutefois, pour limiter le volume de calculs, on va définir des fonction de base φ_i dont le support sera petit, c'est à dire que chaque fonction φ_i sera nulle partout sauf sur quelques mailles.

Ainsi les termes $a(\varphi_i, \varphi_j)$ seront le plus souvent nuls, car correspondant à des fonctions φ_i et φ_j de supports disjoints.

La matrice A sera donc une matrice creuse, et on ordonnera les φ_i de telle sorte que A soit à structure bande, avec une largeur de bande la plus faible possible.

A ce niveau, les difficultés majeures en pratique sont de trouver les φ_i et de les manipuler pour les calculs d'intégrales nécessaires à la construction de A .

Sans rentrer pour le moment dans les détails, on peut toutefois indiquer que la plupart de ces difficultés seront levées grâce à trois idées principales :

- **Le principe d'unisolvance**

On s'intéressera à trouver des degrés de liberté (ou ddl) tels que la donnée de ces ddl détermine de façon univoque toute fonction de V_h .

Il pourra s'agir par exemple des valeurs de la fonction en quelques points.

Déterminer une fonction reviendra alors à déterminer ses valeurs sur ces ddl.

- **Définition des φ_i**

-On définira les fonctions de base par $\varphi_i = 1$ sur le i^{me} ddl, et $\varphi_i = 0$ sur les autres ddl. La manipulation des φ_i sera alors très simplifiée, et les φ_i auront par ailleurs un support réduit à quelques mailles.

- **La notion de "famille affine d'éléments"**

Le maillage sera tel que toutes les mailles soient identiques à une transformation affine près. De ce fait, tous les calculs d'intégrales pourront se ramener à des calculs sur une seule maille "de référence", par un simple changement de variable.

2.7 Retoure à l'exemple 1 – D

On reprend le problème 1 – D donné par (2.1).

On a écrit sa formulation variationnelle dans la section (2.1.1) et montré dans (2.2.3) qu'elle admet une solution unique.

On peut maintenant construire un maillage de $[a, b]$ en définissant une subdivision (pas nécessairement régulière) $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$. Définissons alors l'espace V_h , sous-espace de $H_0^1(a, b)$ de dimension finie, par :

$$V_h = \{v_h \in C^0(a, b) / v_h \text{ affine sur chaque segment } [x_j, x_{j+1}] \text{ et } v_h(a) = v_h(b) = 0\}$$

Le problème approché sur V_h est :

$$(\Psi_h) \text{ Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

En remarquant qu'une fonction de V_h est entièrement déterminée par ses valeurs en $x_1, \dots, x_N$, on établit que la dimension de V_h est N , et qu'une base de V_h est par exemple $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$, où φ_i est défini par $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$, $j = 1, \dots, N$ (δ_{ij} est ici le symbole de Kronecker).

φ_i est donc la fonction "chapeau" représentée sur la figure 3.1.

En décomposant la solution approchée u_h sur cette base sous la forme $u_h = \sum_{i=1}^N \mu_i \varphi_i$, on obtient le système linéaire $A\mu = b$, avec :

$$\begin{aligned} A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) &= \int_a^b [\varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + c(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x)] dx \\ &= \sum_{k=0}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} [\varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + c(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x)] dx \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

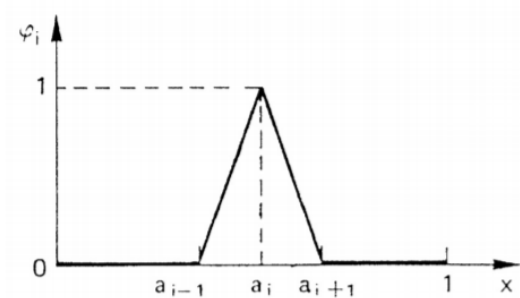


FIGURE 2.1 – Fonction de base φ_i .

Le support de φ_i étant réduit à $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, on en déduit que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a(\varphi_i, \varphi_j) &= 0 \text{ si } |i - j| \geq 2 \\ a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} [\varphi'_i(x) \varphi'_{i+1}(x) + c(x) \varphi_i(x) \varphi_{i+1}(x)] dx \\ a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi'_i(x) \varphi'_{i-1}(x) + c(x) \varphi_i(x) \varphi_{i-1}(x)] dx \\ a(\varphi_i, \varphi_i) &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [\varphi_i'^2(x) + c(x) \varphi_i^2(x)] dx \end{array} \right. \quad (2.7.2)$$

A est donc tridiagonale.

Chapitre 3

Eléments finis de Lagrange

On va présenter dans ce chapitre le type le plus simple et le plus classique d'éléments finis.

Définition 3.0.1.

Un *élément fini de Lagrange* est un triplet $(K, \sum, P)$ tel que

- K est un élément géométrique de $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2$ ou 3), compact, connexe, et d'intérieur non vide.
- $\sum = \{a_1, \dots, a_N\}$ est un ensemble fini de N points distincts de K .

3.0.1 Exemple d'élément finis de Lagrange

Espace de polynômes

On notera P_k l'espace vectoriel des polynômes de degré total inférieur ou égal à k .

- Sur $\mathbb{R}$, $P_k = Vect\{1, X, \dots, X^k\}$ et $\dim P_k = k + 1$.
- Sur $\mathbb{R}^2$, $P_k = Vect\{X^i Y^j; 0 \leq i + j \leq k\}$ et $\dim P_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.
- Sur $\mathbb{R}^3$, $P_k = Vect\{X^i Y^j Z^l; 0 \leq i + j + l \leq k\}$ et $\dim P_k = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$.

On notera Q_k l'espace vectoriel des polynômes de degré total inférieur ou égal à k par rapport à chaque variable.

- Sur $\mathbb{R}$, $Q_k = P_k$.
- Sur $\mathbb{R}^2$, $Q_k = Vect\{X^i Y^j; 0 \leq i + j \leq k\}$ et $\dim Q_k = (k + 1)^2$.
- Sur $\mathbb{R}^3$, $Q_k = Vect\{X^i Y^j Z^l; 0 \leq i + j + l \leq k\}$ et $\dim Q_k = (k + 1)^3$.

Example 1 – D

Elément P_1

- $K=[a,b]$
- $\sum=\{a,b\}$
- $P = P_1$

Elément P_2

- $K=[a,b]$
- $\sum=\{a, \frac{a+b}{2}, b\}$
- $P = P_2$

Chapitre 4

Eléments finis d'Hermite

Définition 4.0.1.

Un *élément fini d'Hermite* ou *élément fini général* est un triplet $(K, \sum, P)$ tel que

- K est un élément géométrique de $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2$ ou 3), compact, connexe, et d'intérieur non vide.
- $\sum = \{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$ est un ensemble de N formes linéaires sur l'espace des fonctions définies sur K , ou sur un sous-espace plus régulier contenant P .

4.1 Exemples 1 – D

Elément d'Hermite cubique

- $K=[a,b]$
- $\sum = \{p(a), p'(a), p(b), p'(b)\}$
- $P = P_3$

Cet élément fini est $\mathcal{C}^1$ et H^2 . **Elément d'Hermite quintique**

- $K=[a,b]$
- $\sum = \{p(a), p'(a), p''(a), p(b), p'(b), p''(b)\}$
- $P = P_5$

Cet élément fini est $\mathcal{C}^2$ et H^3 .

Chapitre 5

Applications

5.1 Introduction

Le but de ce chapitre est la mise en œuvre de la méthode des éléments finis en dimension 1 pour les deux problèmes modèles suivants :

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & \text{sur }]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{sur }]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Nous allons, pour les deux problèmes, comparer la solution obtenue par approximation avec la solution exacte.

Nous utilisons le logiciel de calcul scientifique Matlab pour illustrer la méthode des éléments finis.

5.2 Algorithme

Etape 1 : Discrétisation du domaine selon le degré de liberté fourni par l'utilisateur (Maillage).

Etape 2 : Calcul de la matrice de masse et de rigidité.

Etape 3 : Calcul du second membre.

Etape 4 : Prise en compte des conditions aux limites.

Etape 5 : Résolution du système linéaire.

Etape 6 : Représentation graphique de la solution approchée.

5.3 Code Matlab

- On cherche à résoudre : $-u''(x) + u(x) = f(x)$ sur $[0, 1]$ —
- La fonction u est donnée, deux fois dérivable et f continue —

```
clc  
close all  
clear all  
dbstop if error ;
```

- On demande à l'utilisateur de saisir le nombre de nœux désirés —

```
nddl=input('donner le nombre de degré de liberté nddl :');
```

- On saisir notre second membre $f(x) = -u''(x) + u(x)$ —

```
f = @(x)(NOTRE SECOND MEMBRE f ;
```

- On saisit notre solution exacte —

```
sln=inline('ON SAISIT LE u');
```

- On discrétis notre intervalle $[0, 1]$ —

```
xx=linspace(0,1,nddl);
```

- On définit le pas de chaque maille —

```
for i = 1 :nddl-1  
h(i)=xx(i+1)-xx(i);  
end  
h ;
```

- On définit les conditions aux limites —

```
x0 = 0;  
xL=1;  
ua=0;  
ub=0;
```

- On définit notre matrice de rigidité —

```

A=zeros(nddl-2);
for i=1 :nddl-2
for j=1 :nddl-2
if(abs(i-j)> 1) A(i,j)=0;
elseif(abs(i-j)==0 A(i,j)=(1./h(i))+(1./h(i+1))+(1./3)*(h(i)+h(i+1)));
else
A(i,j)=(-1./h(i))+h(i)./6;
end
end
end

```

— On calcule le second membre du problème approché —

```

Bb=[];
for i=1 :nddl-2
Bb=[Bb 0.5*(h(i)+h(i+1))*f(xx(i+1))];
B=[Bb];
end

```

— On calcule la solution approchée —

```

u=[ua;A \B';ub];

```

— On dessine la solution exacte avec un —
— graphe de couleur noire et d'épaisseur 3 —

```

figure(140);
plot(0 : 0.01 : 1,sln(0 : 0.01 : 1),'-K','LineWidth',3);
hold on;

```

— On dessine la solution approchée en marron —

```

plot(xx,u,'o-','color',[8.7059e-001 4.9020e-001 1],'LineWidth',2);

```

— On définit la légende et on nomme les axes —

```

Texte...legend('\bf sol exacte','\bf sol approchée pour n=40');
xlabel('\fontnameTimes \fontsize14\bf x','color',[8.7059e-001 4.9020e-001 1]);
ylabel('\fontnameTimes \fontsize14\bf u(x)','color',[8.7059e-001 4.9020e-001 1]);
grid;

```

— On définit les couleurs de l'interface graphique —

```

set(gcf,'color',[9.5294e-001 0.01 8.7059e-001 7.3333e-001]);
whitebg([9.5294e-001 8.7059e-001 7.3333e-001]);

```

5.4 Applications

Dans ce paragraphe, nous traitons les deux problèmes $-u''(x) + u(x) = f(x)$ et $-u''(x) = f(x)$ sur $[0, 1]$ pour chacun des exemples suivant :

Exemple 1 :

$$\begin{cases} u(x) = x(x-1) \text{ sur }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Exemple 2 :

$$\begin{cases} u(x) = x(1-x)e^{(x-1/2)^2} \text{ sur }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Exemple 3 :

$$\begin{cases} u(x) = x^4(1-x) \text{ sur }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Nous traçons la solution exacte et la solution approchée pour chaque exemple, et regardons la convergence pour chacune à partir du graphe.

5.4.1 Mise en œuvre de la méthode des éléments finis en dimension 1 pour $u(x) = x(x-1)$

Pour $n=3$:

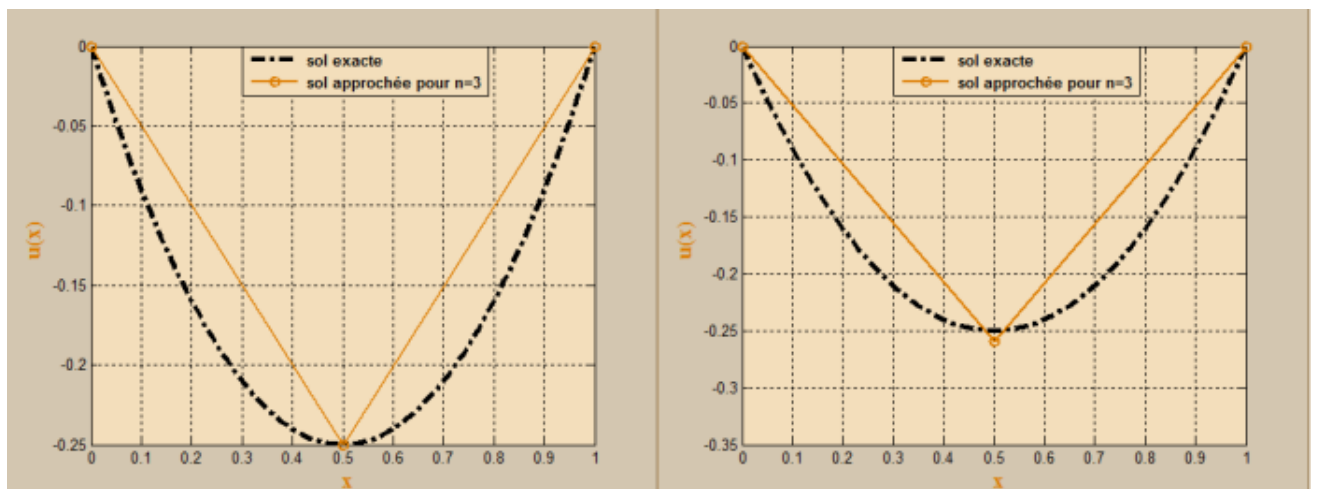


FIGURE 5.1 – Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de $-u''(x) = f(x)$ (à gauche) et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ (à droite) pour $n = 3$ et $u(x) = x(x - 1)$.

Pour $n=10$:

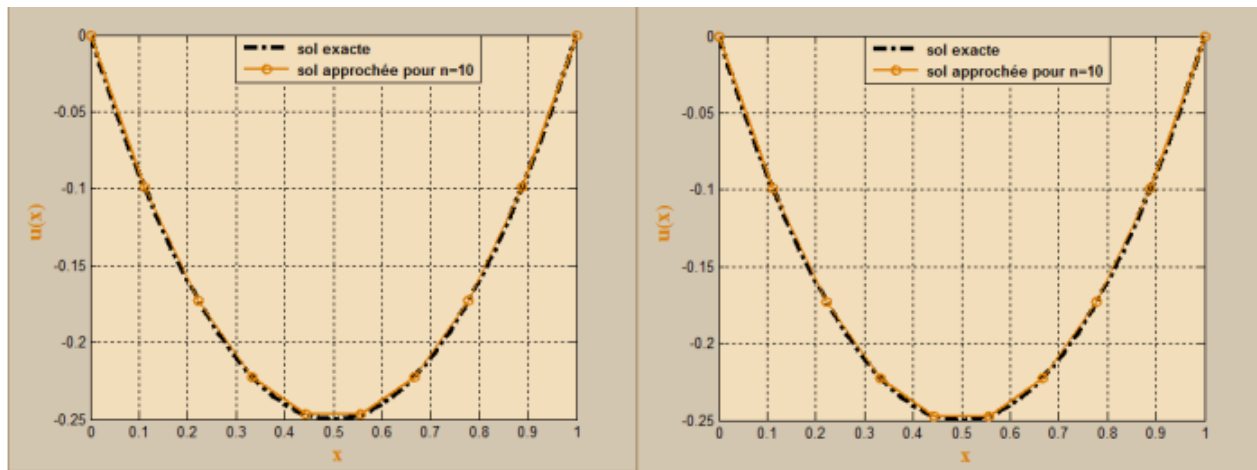


FIGURE 5.2 – Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de $-u''(x) = f(x)$ (à gauche) et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ (à droite) pour $n = 10$ et $u(x) = x(x - 1)$.

Pour $n=100$:

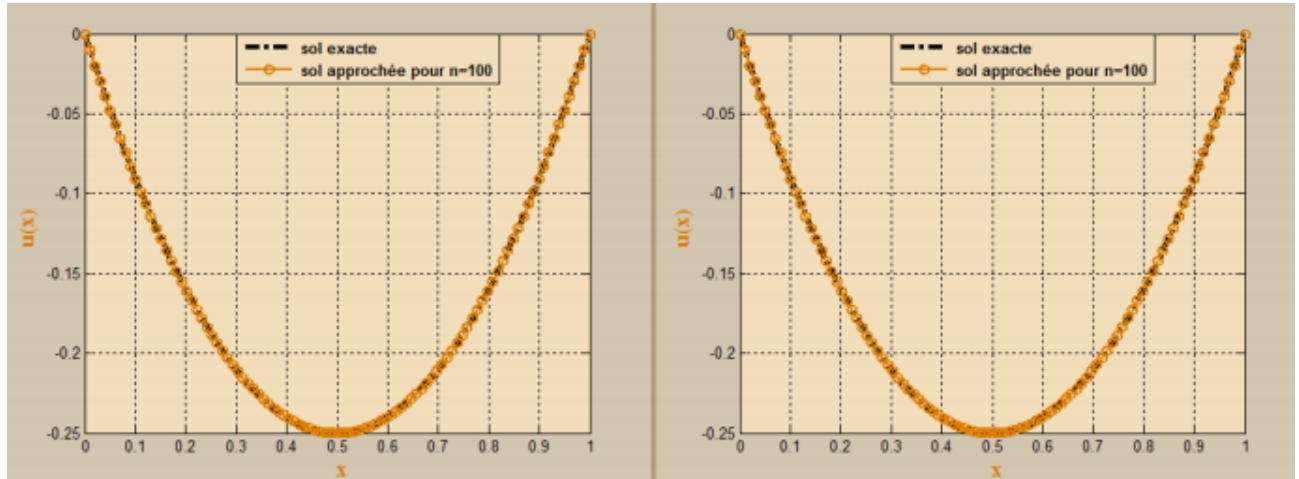


FIGURE 5.3 – Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de $-u''(x) = f(x)$ (à gauche) et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ (à droite) pour $n = 100$ et $u(x) = x(x - 1)$.

On sait que l'erreur vaut :

$$\|Err\|_{\mathcal{L}^2} = \left(\int_{x_0}^{x_{n+1}} |u(x) - u_h|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

avec

$$u_h = \sum_{i=0}^{n+1} \varphi_i(x) u_i$$

Donc

$$\|Err\|_{\mathcal{L}^2} = \left(\int_{x_0}^{x_{n+1}} \left| u(x) - \sum_0^n \varphi_i(x) u_i \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Et on a :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc :

$$\int_{x_0}^{x_{n+1}} \sum_{i=0}^n \varphi_i(x) u_i dx = \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) u_i + \varphi_{i+1}(x) u_{i+1} dx.$$

On se sert de cette formule pour calculer l'erreur pour ces exemples et on a :

— On calcule l'erreur sur Matlab —

```
d=0;
for i=1 :nddl-2
g=@(x)abs(x.*(x-1)-u(i).*((x-xx(i+1))/(xx(i)-xx(i+1)))-u(i+1).*((x-xx(i))/(xx(i+1)-xx(i))))^2;
d=d+quad(g,xx(i),xx(i+1));
end d=d1/2;
```

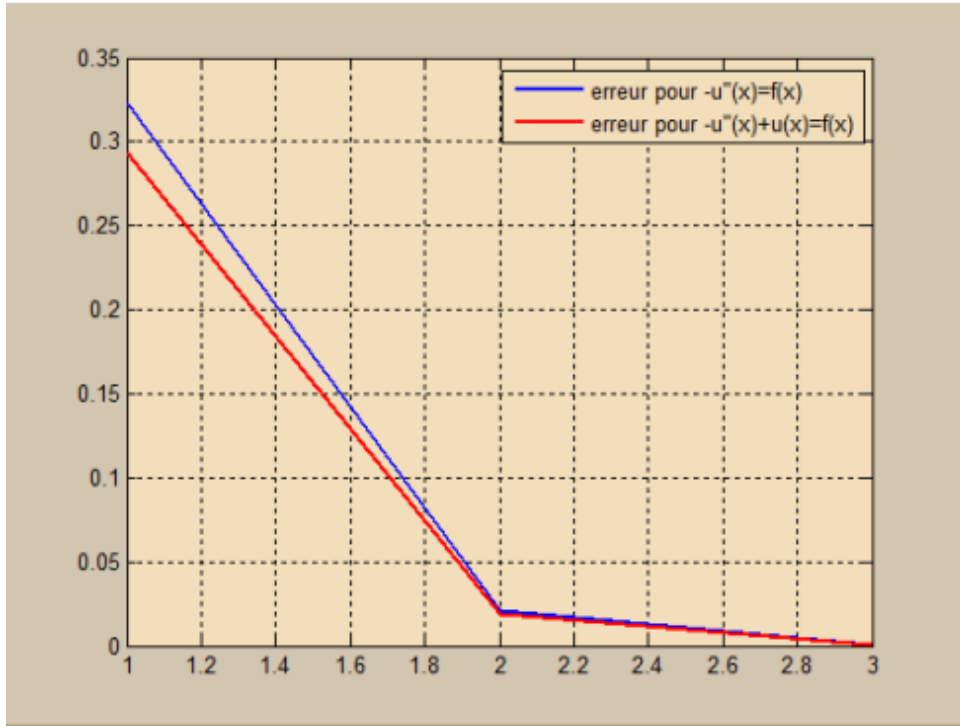


FIGURE 5.4 – Graphe représentant respectivement l'erreur pour $-u''(x) = f(x)$ et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ avec $u(x) = x(x - 1)$.

n	3	10	100
$\ Err1\ _{\mathcal{L}^2}$	$3.2275.10^{-2}$	$2.1251.10^{-3}$	$1.8534.10^{-5}$
$\ Err2\ _{\mathcal{L}^2}$	$2.9270.10^{-2}$	$1.8448.10^{-3}$	$1.6243.10^{-5}$

FIGURE 5.5 – Tableau représentant respectivement l'erreur pour $-u''(x) = f(x)$ et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ avec $u(x) = x(x-1)$.

Remarque

Dans tout ce qui suit, $Err1$ représente l'erreur pour $-u''(x) = f(x)$ et $Err2$ l'erreur pour $-u''(x) + u(x) = f(x)$.

Commentaire

La solution $u(x)$ est régulière dans cet exemple, s'annule en 0 et 1 et ne représente aucune singularité.

A partir de $n = 10$ la solution approchée converge vers la solution exacte.

5.4.2 Mise en œuvre de la méthode des éléments finis en dimension 1 pour $u(x) = x(1-x)e^{(x-\frac{1}{2})^2}$

Pour $n=3$:

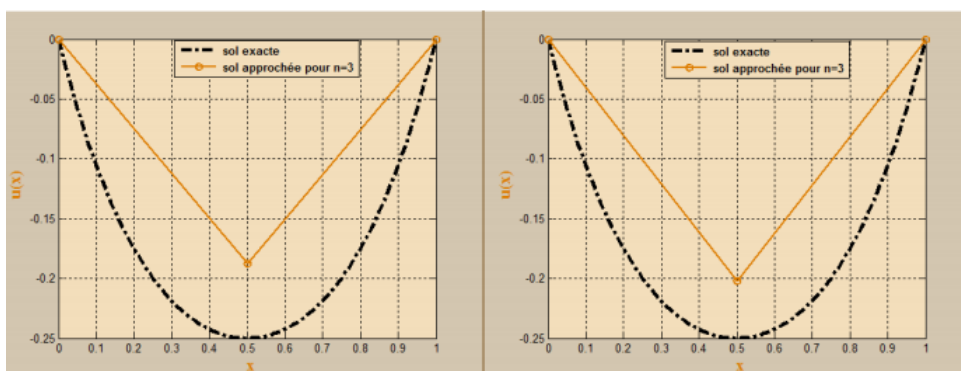


FIGURE 5.6 – Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de $-u''(x) = f(x)$ (à gauche) et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ (à droite) pour $n = 3$ et $u(x) = x(1-x)e^{(x-\frac{1}{2})^2}$.

Pour $n=10$:

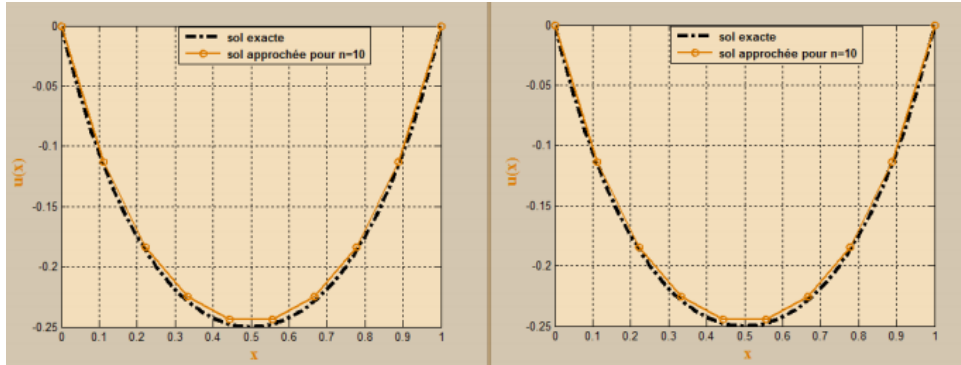


FIGURE 5.7 – Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de $-u''(x) = f(x)$ (à gauche) et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ (à droite) pour $n = 10$ et $u(x) = x(1 - x)e^{(x-\frac{1}{2})^2}$.

Pour $n=100$:

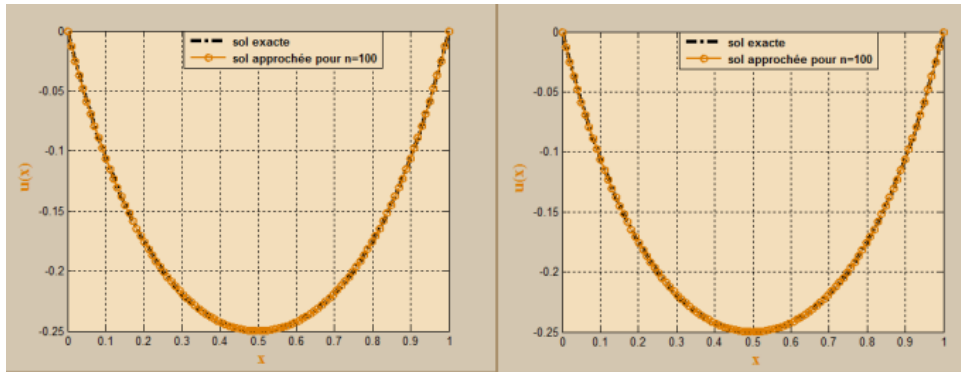


FIGURE 5.8 – Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de $-u''(x) = f(x)$ (à gauche) et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ (à droite) pour $n = 100$ et $u(x) = x(1 - x)e^{(x-\frac{1}{2})^2}$.

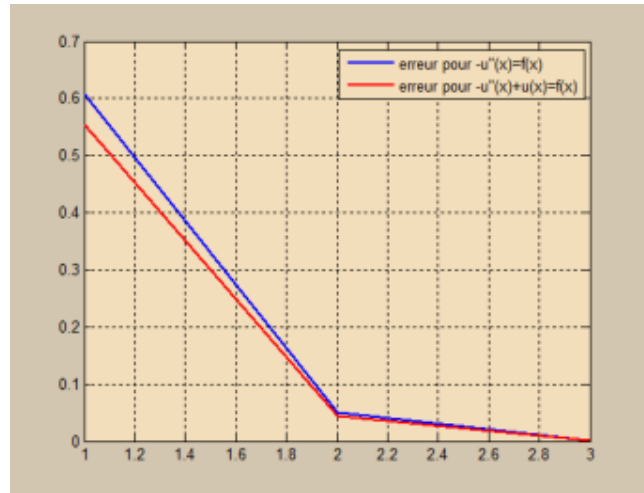


FIGURE 5.9 – Graphe représentant respectivement l'erreur pour $-u''(x) = f(x)$ et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ avec $u(x) = x(1 - x)e^{(x-\frac{1}{2})^2}$.

n	3	10	100
$\ Err1\ _{\mathcal{L}^2}$	$6.0688.10^{-2}$	$5.0346.10^{-3}$	$4.4660.10^{-5}$
$\ Err2\ _{\mathcal{L}^2}$	$5.5407.10^{-2}$	$4.4860.10^{-3}$	$4.0162.10^{-5}$

FIGURE 5.10 – Tableau représentant respectivement l'erreur pour $-u''(x) = f(x)$ et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ avec $u(x) = x(1-x)e^{(x-\frac{1}{2})^2}$.

Commentaire

Il s'agit d'une fonction gaussienne centrée en $\frac{1}{2}$, elle converge moins rapidement que le premier exemple mais pour $n = 100$ il est clair que la solution approchée et exacte coïncident.

5.4.3 Mise en œuvre de la méthode des éléments finis en dimension 1 pour $u(x) = x^4(x - 1)$

Pour $n=3$:

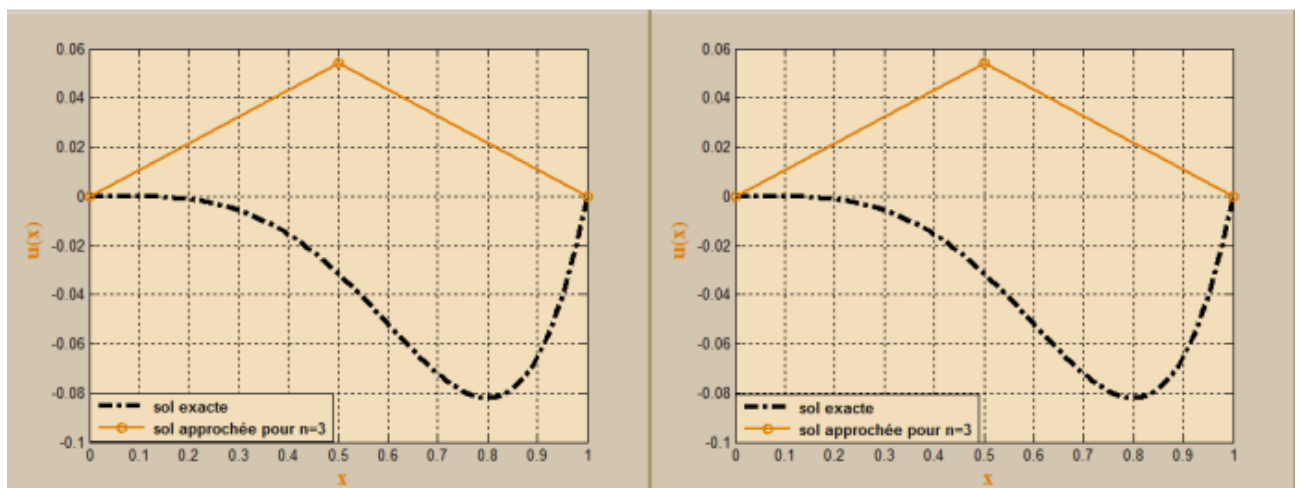


FIGURE 5.11 – Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de $-u''(x) = f(x)$ (à gauche) et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ (à droite) pour $n = 3$ et $u(x) = x^4(x - 1)$.

Pour $n=10$:

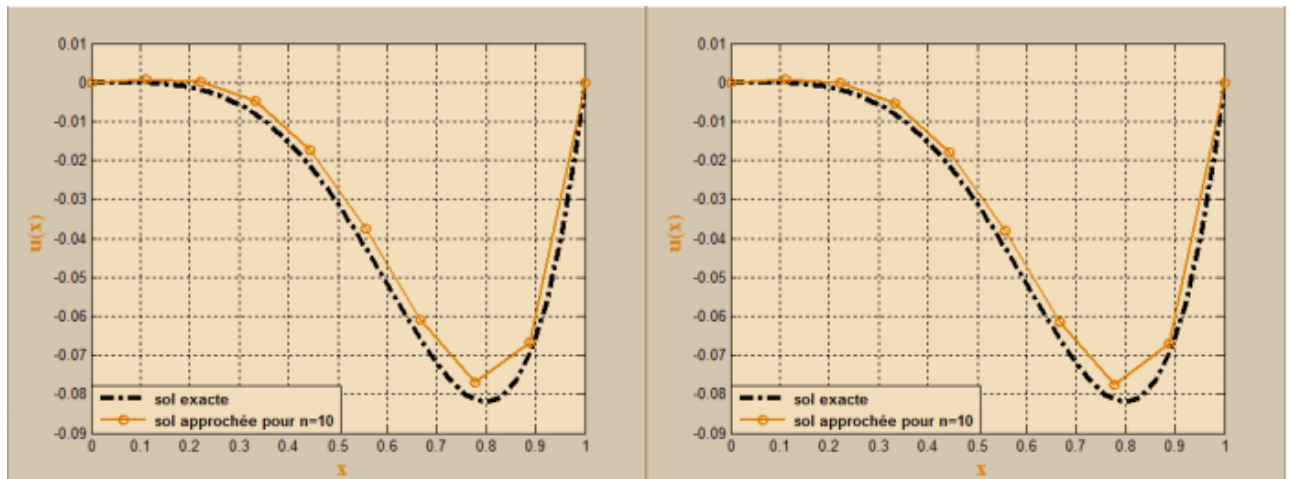


FIGURE 5.12 – Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de $-u''(x) = f(x)$ (à gauche) et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ (à droite) pour $n = 10$ et $u(x) = x^4(x - 1)$.

Pour $n=100$:

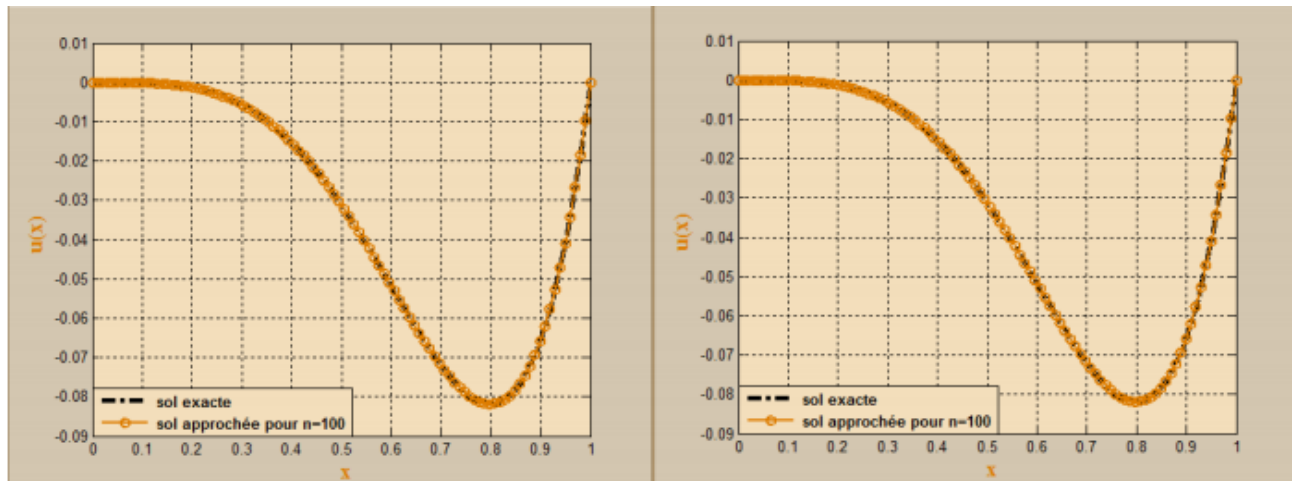


FIGURE 5.13 – Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de $-u''(x) = f(x)$ (à gauche) et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ (à droite) pour $n = 100$ et $u(x) = x^4(x - 1)$.

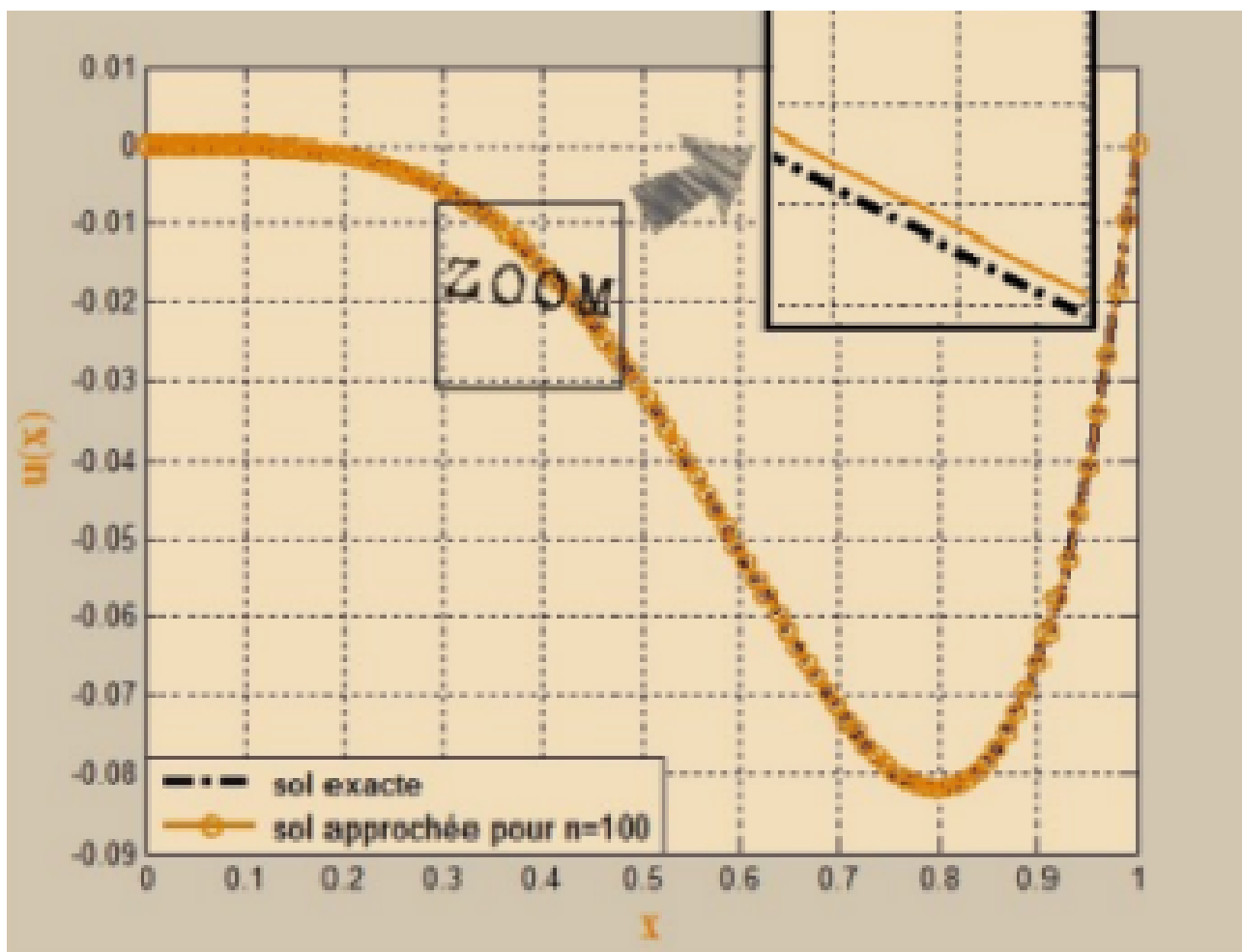


FIGURE 5.14 – Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de $-u''(x) = f(x)$ (à gauche) et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ (à droite) pour $n = 100$ et $u(x) = x^4(x - 1)$.

A la première vue, il semble que la solution approchée coïncide en tous points avec la solution exacte. Mais, en agrandissant l'image on s'aperçoit que même pour un nombre d'itérations très grand (ici $n = 100$), la solution approchée ne vaut pas la solution exacte mais elle s'approche de plus en plus l'une

de l'autre au fil des itérations avec une erreur à ne pas oublier quoiqu'elle soit petite.

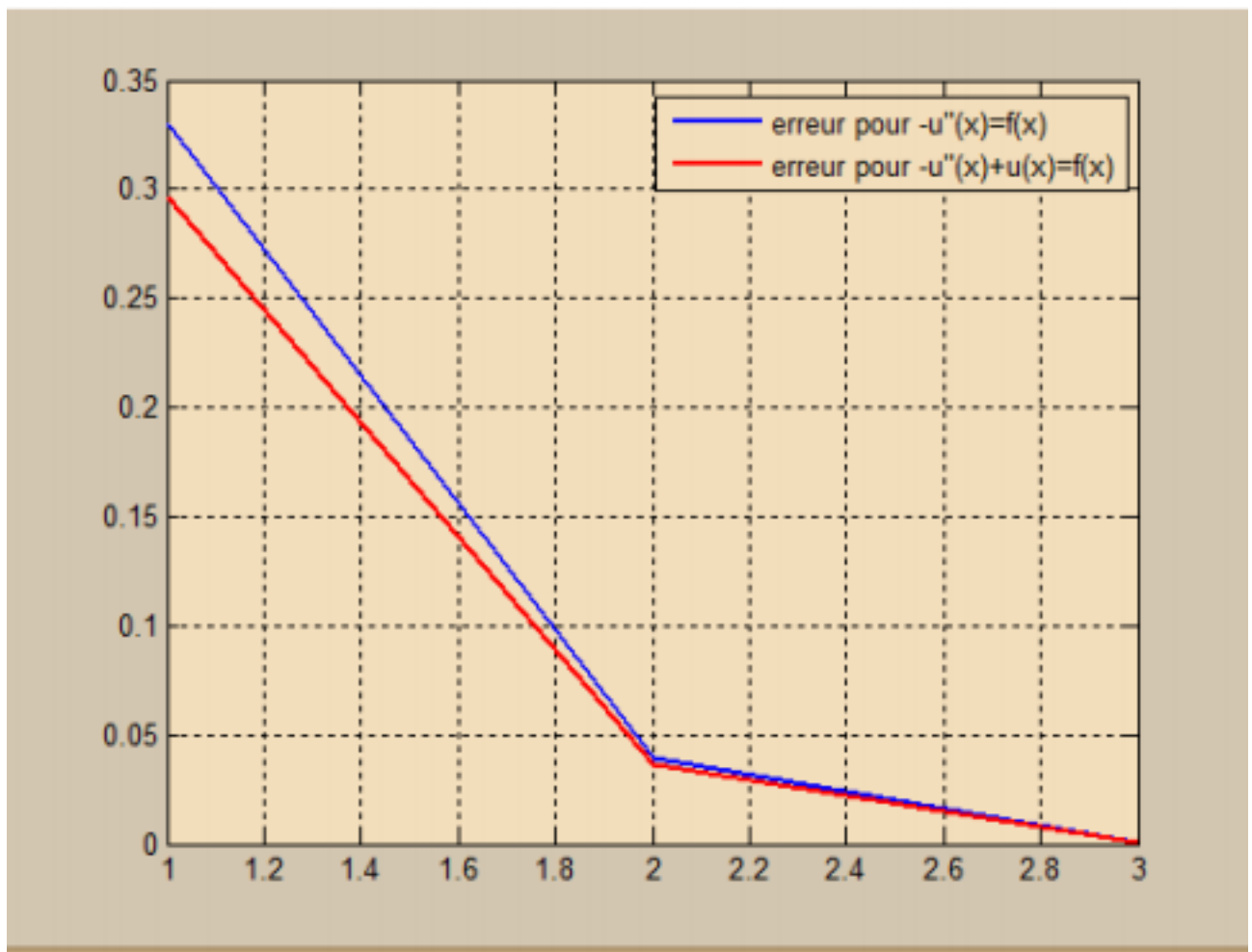


FIGURE 5.15 – Graphe représentant l'erreur respectivement pour $-u''(x) = f(x)$ et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ avec $u(x) = x^4(x - 1)$.

n	3	10	100
$\ Err1\ _{\mathcal{L}^2}$	$3.3002.10^{-2}$	$3.9726.10^{-3}$	$3.9657.10^{-5}$
$\ Err2\ _{\mathcal{L}^2}$	$2.9590.10^{-2}$	$3.6269.10^{-3}$	$3.7001.10^{-5}$

FIGURE 5.16 – Tableau représentant respectivement l’erreur pour $-u''(x) = f(x)$ et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ avec $u(x) = x^4(x - 1)$.

Commentaire

Contrairement aux deux premiers exemples, dans ce cas $u(x)$ représente une singularité : gradient fort au voisinage de 1. On remarque que pour n petit la solution approchée est loin de la solution exacte et que celles-ci ne coïncident qu’à partir d’un nombre considérable d’itérations $n = 100$.

5.5 Conclusion

- Au fil des itérations, on remarque que la solution approchée converge vers la solution exacte.
- La solution approchée converge plus rapidement pour $-u''(x) + u(x) = f(x)$ que pour $-u''(x) = f(x)$.
- La solution exacte et la solution approchée ont une convergence de même ordre.

Conclusion Générale

Ce travail présente une introduction à la résolution des problèmes différentiels par la méthode des éléments finis, cette méthode est basée sur la construction de l'espace de dimension finie V_h pour réécrire les équations différentielles sous une forme variationnelle par l'intégration de ces équation sur le domaine d'étude.

La méthode des éléments finis est bien adaptée pour les problèmes de géométrie complexe, comme les problèmes de la mécanique des fluides.

Bibliographiques

Bibliographie

- [1] ALEXANDRE ERN, Aide mémmoire :Eléments finis, Dunode, 2005.
- [2] ANDRÉ FORTIN, ANDRÉ GARON :Les éléments finis : de la théorie à la pratique, École Polytechnique de Montréal,1997-2020.
- [3] Eric Blayo, Note de cours sur la méthode des éléments finis, M1 MAI, 2010.
- [4] A.Bendali, Méthode des éléments finis, Toulouse, 2013.
- [5] Bounejmate Sarah, Bouyahya Salma, Résolution d'équations aux dérivées partielles par la méthode des éléments finis, 2015.
- [6] ALFIO QUARTERONI : Introduction à la méthode des éléments finis, Ecole Polytechnique fédération de Lausanne, 2013-2014.

- [7] EMMANUEL MAITRE : Notes du Cours Éléments Finis
- ENSIMAG 2A - Version du 21 février 2011.
- [8] GRÉGOIRE ALLAIRE : Analyse numérique et optimisation. Éditions de l'école polytechnique-Octobre 2012, 91128 Palaiseau Cedex.Méthode numérique.
- [9] RAVIART, P.A et J.M.THOMAS : Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Masson, Paris,1983.