الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur
Et de la recherche scientifique

Université M'Hamed BOUGARA de Boumerdès
Faculté Des Sciences Economiques , Commerciales
EtdesSciences De Gestion

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة أمحمد بوقرة بومرداس

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

مطبوعة بيداغوجية تحت عنوان:

محاضرات في تحليل السلاسل الزمنية
النماذج الخطية
نظريات وتطبيقات

موجهة لطلبة: أولى ماستر اقتصاد كمي

من اعداد الدكتور: بوشه محمد

قسم : العلوم الاقتصادية

السنة الجامعية: 2022/2021

الفهرس

مفاهيم عامة

مقدمة:

شهد موضوع تحليل السلاسل الزمنية تطورا كبيرا في الآونة الأخيرة، وأصبح ينافس الى حد كبير طرق النمذجة الانحدارية بمختلف اشكالها، اذ يعتبر من اهم الوسائل الإحصائية المستعملة في التنبؤ القصير المدى.

يقسم الغرض من تحليل السلاسل الزمنية عادة الى قسمان اساسيان، معرفة طبيعة السلسلة الزمنية واستخدامها للتنبؤ. اما القسم الأول فهو خاص بمحاولة معرفة المركبات الأساسية للسلسلة سواء كانت نظامية او عشوائية، اما القسم الثاني فيهتم بمحاولة استغلال المعلومة المتوفرة في القيم الماضية والحاضرة التي تعطي للسلسلة نمطا معينا للقيام بصياغة رياضية للنموذج الممثل لهذا النمط من سلوك السلسلة بغرض استعماله للتنبؤ.

تهتم هذه المطبوعة بفرع خاص من فروع تحليل السلاسل الزمنية الا وهو فرع النماذج الخطية للسلاسل الزمنية المعروفة اختصارا باسم نماذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة (ARMA)، حيث نحاول تقديم الأنواع المختلفة من هذه النماذج، كيفية التعرف عليها، اهم خصائصها الإحصائية الى جانب شروط استقراريتها وقابليتها للانعكاس، مع الإشارة الى اهم المفاهيم الأساسية الواجب معرفتها للتمكن من الإحاطة الكاملة بهذا النوع من النماذج.

تهدف هذه المطبوعة الى محاولة تمكين الطالب من الالمام التام بخصائص النماذج الخطية للسلاسل الزمنية، مما يجعله قادرا على التعرف اليها في قراءته لأية بيانات اقتصادية او مالية ومن ثم تمكنه من اختيار النموذج الأمثل لهدف دراسته سواء كانت ذات غرض تنبئ، او استخراج السيرورة المولدة لبيانات متغيراته، كما تساعده في فهم أنواع السيرورات المستقرة وغير المستقرة وكيفية اجراء التحويلات المناسبة لكل هدف من اهداف دراسته.

المطبوعة موجهة الى طلبة السنة الثالثة في جميع اختصاصات العلوم الاقتصادية الذين يدرسون مقرر تحليل السلاسل الزمنية في برنامجهم الدراسي الى جانب طلبة الماستر فرع الاقتصاد الكمي.

بغرض التنظيم الأمثل للمعلومات المقدمة قمنا بتقسيم المطبوعة الى ثلاث محاور أساسية، أولها محور خاص بالمفاهيم والمبادئ الأساسية الواجب على الطالب اتقانها في موضوع السلاسل الزمنية ثم اتبعناها بالموضوع الأساسي للمطبوعة وهو مدخل الى نماذج (ARMA)، وفي المحور الأخير مجموعة هامة من التطبيقات مع حلولها خاصة بجميع محاور المطبوعة.

1. مبادئ ومفاهيم أساسية

1.1 السلسلة الزمنية

تعريف(1): السلسلة الزمنية هي متتابعة من القيم المشاهدة لظاهرة عشوائية مرتبة مع الزمن، وعادة ما تكون المشاهدات المتتالية غير مستقلة وهذه الخاصية تساعدنا في التوصل الى تنبؤات موثوق منها، ويتم استغلال الدليل السفلي للإشارة الى الترتيب الزمني للمشاهدة، بمعنى ان (Y_t) تمثل المشاهدة رقم (t) كما ان (Y_{t-1}) تمثل المشاهدة السابقة لها و(Y_{t+1}) تمثل المشاهدة التالية لها.

ويمكن النظر الى القيم المشاهدة في السلسلة الزمنية كتحقق معين لعملية عشوائية خفية هي المسؤولة عن النمط المشاهد في سلوك السلسلة.

1.1.1 امثلة على السلاسل الزمنية

-سعر البترول خلال فترة زمنية معينة.

-نمو الناتج المحلي للجزائر في العشرين سنة الأخيرة.

-عدد مبيعات السيارات لشركة ما خلال أشهر السنة.

2.1.1 الغرض من دراسة السلاسل الزمنية:

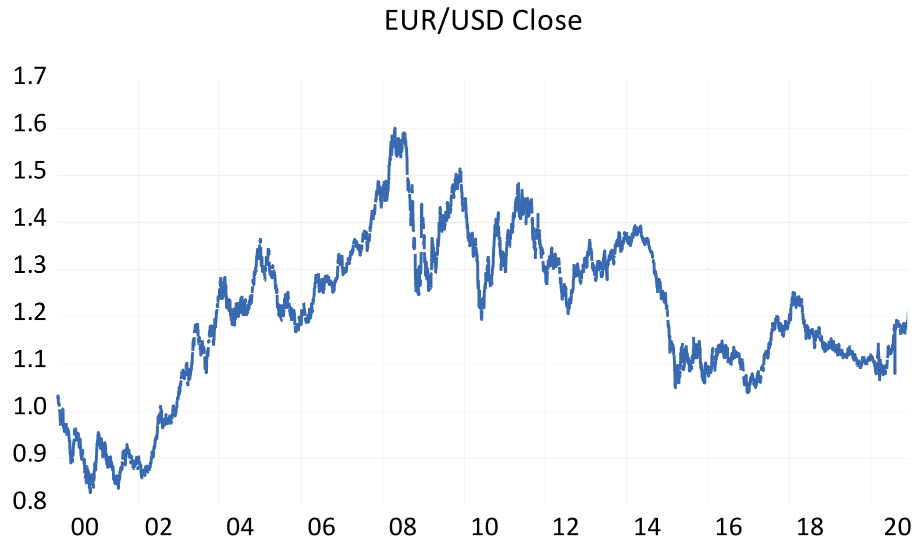
-فهم ونمذجة عشوائية الظاهرة المشاهدة .

-التنبؤ بالقيم المستقبلية للظاهرة العشوائية.

-المراقبة والتحكم بالظاهرة العشوائية لمجابهة الانعكاسات المستقبلية.

الشكل التالي لمتسلسلة زمنية مشاهدة وهي عبارة عن معدل الصرف الأورو مقابل الدولار للفترة (2000/3 الى2020/3)

الشكل رقم (1) سلسلة معدل الصرف الأورو مقابل الدولار



2.1 السيرورة العشوائية

نرمز للظاهرة العشوائية أو العملية العشوائية التي تولد المتسلسلة الزمنية بالرمز $\{\dots, Y_{-1}, Y_0, Y_1, Y_2, ..\}$ او اختصارا $\{Y_t, t \in \{\dots, -1,0,1,2,..\}\}$ او بكل بساطة $\{Y_t\}$ ، وللسلسلة الزمنية المشاهدة بالرمز $\{\dots, y_1, y_2.., y_{n-1}, y_n\}$ حيث تمثل هذه القيم بماضي او تاريخ الظاهرة.

1.2.1 السيرورة العشوائية المستقرة

1.1.2.1 الاستقرارية من الدرجة الأولى (المعنى القوي):

تعريف (2): نقول ان السيرورة (Y_t) مستقرة بالمعنى القوي (strict) اذا كان من اجل كل $(t = t_1, t_2, .., t_n)$ ومن اجل كل عدد حقيقي (τ) ، فان التوزيع المشترك (distribution jointe) للسيرورة $(\{Y_{t1}, Y_{t2}, .. Y_n\})$ يكون مماثل للتوزيع الخاص بالسيرورة$(\{Y_{t1+\tau}, Y_{t2+\tau}, .. Y_{n+\tau}\})$.

لتكن مجموعة (عائلة) المتغيرات العشوائية: $\{Y_t, Y_{t+1}, .. Y_{t+m}\}$ التي تحقق:

$$Y_t = \alpha_0, \qquad Y_{t+1} = \alpha_1 \dots, \qquad Y_{t+m} = \alpha_m$$

نقول عن السيرورة التي تولد $(Y\ )$ انها مستقرة بالمعنى القوي إذا كان من اجل كل مجموعة القيم $\{\alpha_0, \alpha_1, .. \alpha_m\}$ ومن اجل كل قيمة $(m \geq 0)$ فان احتمال الحدث المشترك:

$$\{Y_t = \alpha_0 \cap Y_{t+1} = \alpha_1 .. \cap Y_{t+m} = \alpha_m\}$$

يعطينا نفس الاحتمال مهما يكن (t) بمعنى:

$$Prob\{Y_t = \alpha_0 \cap Y_{t+1} = \alpha_1 .. \cap Y_{t+m} = \alpha_m\} = Prob\{Y_{\grave{t}} = \alpha_0 \cap Y_{\grave{t}+1} = \alpha_1 .. \cap Y_{\grave{t}+m} = \alpha_m\}$$

وهذا مهما تكن القيم $\{\alpha_0, \alpha_1, .. \alpha_m\}$ من جهة ومهما تكن القيم $(t,\ \grave{t}\ , m\ )$ من جهة أخرى.

بشكل خاص عندما يكون $(m = 0)$ نجد ان:

$$Prob\{Y_t = \alpha_0\} = Prob\{Y_{\grave{t}} = \alpha_0\} \quad \forall t, \grave{t}\ , \alpha_0$$

2.1.2.1 الاستقرارية من الدرجة الثانية (المعنى الضعيف):

تعريف (3): نقول ان $(\{Y_t, t \in \{\dots, -1,0,1,2,..\}\})$ سيرورة عشوائية مستقرة من الرتبة الثانية إذا تحققت الشروط التالية:

1 $\quad E(Y_t) = \mu = \text{ثابت} \quad , \ t \in \{\dots, -1,0,1,2,\dots\}$

2 $\quad V(Y_t) = \gamma_0 = \sigma_Y^2 < \infty \qquad , t \in \{\dots, -1,0,1,2,\dots\}$

3 $Cov(Y_t, Y_s) = E(Y_t, Y_s) = \gamma_\tau \ , \ \tau = t - s$

تفسر الشروط 1-2 على ان متوسط وتباين السيرورة ثابتان ومستقلان عن الزمن، كما ان التباين لا يؤول الى مالانهاية. اما الشرط الثالث فيعني ان التباين المشترك بين فترتين (t) و(s) دالة فقط للفرق ما بين الفترتين $(\tau = t - s)$ وليس دالة ل (t) . مع (γ_τ) : يمثل دالة التغاير الذاتي(التباين المشترك الذاتي) للسيرورة (Y_t)

- **ملاحظة:**

تكون سيرورة ما مستقرة بالمعنى الضعيف أي من الرتبة الثانية إذا كانت كل عزومها من الرتبة الأولى والثانية مستقلة عن الزمن. عكس ذلك فالسيرورة غير المستقرة من الرتبة الثانية هي السيرورة التي لا تلبي احدى هذه الشروط. إذا فمصدر عدم استقرارية سيرورة ما اما متعلق بارتباط العزم من الرتبة الأولى (الامل الرياضي) بالزمن، او ارتباط اما التباين او التباينات المشتركة مع الزمن.

3.1 أهمية الاستقرارية

يشكل مفهوم الاستقرارية أهمية كبيرة حيث انه في حالة كانت السلاسل غير مستقرة فجميع النتائج المستخرجة من تحليل الانحدار التقليدي تكون غير صحيحة، مما يعني ان استخدام الانحدار بسلاسل زمنية غير مستقرة يكون لا معنى لنتائجه ويسمى هذا الانحدار بالانحدار الزائف.

في السلاسل المستقرة يكون أثر الصدمات دائما ضرفي ومؤقت وغير دائم، حيث ان أثر الصدمات يزول وتعود السلسلة الى المستوى المتوسط للمدى البعيد، حيث ان التنبؤ في المدى البعيد للسلسلة المستقرة يؤول الى المتوسط غير الشرطي لهاذه للسلسلة.

1.3.1 اختيار شكل النمذجة الواجب تطبقيها

يرتبط اختيار شكل النمذجة الواجب تطبقيها على السلسلة باستقراريتها او عدم استقراريتها، فاذا كانت السلسلة المستعملة ناتجة عن سيرورة مستقرة فانه حسب منهجية بوكس جينكنز فإننا نبحث على أمثل نموذج في قسم السيرورات المستقرة لتمثيلها، ثم نقوم بتقدير هذا النموذج. اما إذا كانت السلسلة ناجمة عن سيرورة غير مستقرة فمن المفروض أولا تحويلها الى سيرورة مستقرة من خلال اجراء التحويل المناسب لذلك، ثم نقوم بنمذجتها وتقدير المعالم المرتبطة بالمركبة المستقرة.

2.3.1 مشكل عدم الاستقرارية

يكمن المشكل في ان هناك أسباب كثيرة لعدم الاستقرارية ولكل سبب من هذه الأسباب توجد طريقة مناسبة لتحويل السلسلة الى سلسلة مستقرة. في هذا الاطار يوجد قسمان من السيرورات غير المستقرة حسب

المصطلح المستعمل من قبل (Nelson et Plosser (1982)) وهما السيرورات (TS) (Time Stationary) والسيرورات (DS)(Differency Stationary). ولهذا التقسيم اثار على التحليل الاقتصادي للسلسلة فالسلاسل من النوع (DS) تتميز بديمومة الاثار المترتبة من تعرضها لصدمات عكس السلاسل من النوع (TS)، هذا يعني انه إذا كانت سلاسل الاقتصاد الكلي تتبع السيرورة (DS) فان اثار الصدمات الظرفية يمكن ان يكون لها اثار دائمة على مستوى السلسلة المدروسة.

3.3.1 مميزات الاستقرارية

بما ان اغلبية السلاسل الزمنية تكون مشاهدة لمرة واحدة فقط، فان استعمال مفهوم التوزيع والتباين المشترك النضريان في التطبيقات العملية ليس دائما متوفر(مقبول). بالمقابل يمكن دائما حساب التوزيعات والتباينات المشتركة تجريبيا، مع الإشارة الى انه وتحت فرض الاستقرارية فان المتوسط التجريبي الحسابي يؤول الى المتوسط النظري.

- **ملاحظة:**

-اغلب السلاسل الزمنية غير مستقرة، غير ان هناك بعض الطرق لتحويلها الى سلاسل مستقرة، مثل التحويل اللوغاريتمي، Box-cox ..الخ.

-السيرورة المستقرة من الرتبة الأولى، الاستقرارية بالمعنى القوي تعني الاستقرارية بالمعنى الضعيف (من الرتبة الثانية). والعكس غير صحيح. فمتسلسلة (Y) من المتغيرات العشوائية المستقلة التي لها نفس المتوسط ونفس التباين تكون دائما مستقرة من الرتبة الثانية. غير انه اذا لم يكن لكل (Y_n) نفس قانون التوزيع (Y) فليست مستقرة بالمعنى الواسع.

-الاستقرارية من الرتبة الثانية أسهل للدراسة والتحقق من الاستقرارية من الرتبة الأولى، اهميتها التطبيقية مرتبطة أكثر بمشاكل التنبؤ والانحدار، فعلى العموم نتوقف فقط عند معايير المربعات الصغرى للحصول على مقدرات محسوبة. هذا يعني استعمال توقعات خطية مثلى لا يتطلب حسابها بالكامل استعمال البنية الاحتمالية للسيرورة (Y_t) المشاهدة، بل يتطلب فقط الهندسة (الزوايا والاطوال) للمتتالية (Y_k) التي تعتبر كمتتالية من الاشعة في فضاء (Hilbert L^2 (Ω, P)) . مع العلم ان هذه الهندسة لا تعتمد الا على العزوم من الرتبة الثانية ل(Y_t). إذا المفهوم الطبيعي للاستقرارية هو عدم التغير لهذه العزوم من الرتبة الثانية عبر الزمن.

- **استحداث السيرورة L'innovation**

استحداث السيرورة هي الجزء غير المتنبئ به لهذه السيرورة تبعا للمشاهدات المتوفرة لدينا، بمعنى اخر فان الاستحداث هي بواقي الانحدار في التاريخ (t) . يمكننا البرهنة على ان استحداث سيرورة مستقرة هو عملية صخب ابيض.

4.1 سيرورة الصخب الابيض

تعريف (4): تكون السيرورة $(\{Y_t, t \in \{\dots, -1,0,1,2,..\}\})$ سيرورة صخب ابيض وتسمى أيضا الضجة البيضاء، في حالة توفرها على الشرطين التالين:

$$E(Y_t) = 0$$

$$\gamma_h = E(Y_t Y_{t-h}) = \begin{cases} \sigma^2 & , \quad h = 0 \\ 0 & , \quad \forall \ h \neq 0 \end{cases}$$

سيرورة الصخب الأبيض، وتسمى أيضا الضجة البيضاء هي عبارة عن متتابعة من المشاهدات العشوائية غير المترابطة فيما بينها واحيانا نفترض انها متتابعة من المتغيرات العشوائية التي تكون مستقلة ولها نفس التوزيع (Independent Identically Distributed) (IID) بمتوسط معدوم وتباين ثابت.

اهم خصائص هذه السيرورة ان قيم (Y_t) غير مرتبطة بقيمها السابقة، وغير مرتبطة بالصدمات التي تعرضت لها في الماضي، لهذا فالسيرورة تعرف انها بدون ذاكرة.

- **خصائص التوقع لسيرورة الصخب الابيض**

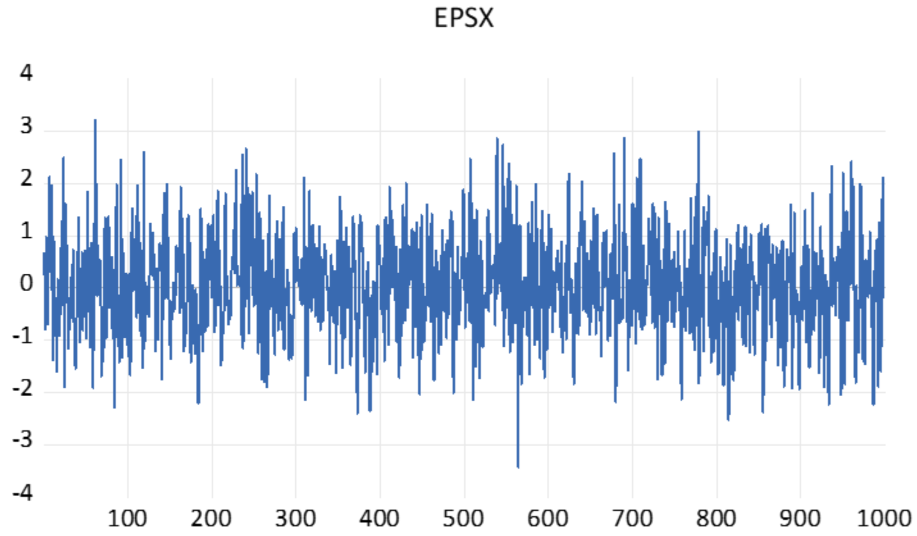
نسمي $(\hat{Y}_T(k))$ التوقع المستخرج في التاريخ (T) للقيمة التي يجب ان تاخذها المتغيرة (Y) في التاريخ $(T+K)$ ، اذا كانت (Y_t) تتبع سيرورة صخب ابيض فان احسن توقع يمكن ان نستخرجه في التاريخ (T) لما ستكون عليه قيمة $(Y\ )$ في التاريخ $(T+K)$ هو:

$$\hat{Y}_{T,T+K} = E\left(Y_{T+K} \middle| \!- Y_T, Y_{T-1}, ..\right) = E(Y_{T+K}) = E(\varepsilon_{T+K}) = 0$$

باعتبار ان (Y_{T+K}) هي قيمة مستقلة عن القيم الماضية ل$(Y\ )$.

هذا يعني ان أحسن توقع يمكن ان نقوم به في التاريخ (T) للتوقع بالقيمة التي تأخذها متغيرة عشوائية (Y) تتبع سيرورة صخب ابيض في التاريخ $(T+K)$ هو الصفر.

الشكل رقم (2): التمثيل البياني لسيرورة صخب ابيض



1.4.1 نظرية (Wold)

تعطى نظرية (Wold) في الصيغة التالية:

يمكن تمثيل كل سيرورة مستقرة $(\{Y_t, t \in \{\dots, -1,0,1,2,..\}\})$ في الشكل:

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + k_t$$

حيث (ψ_j) تحقق الفروض $(\psi_0 = 1)$ و$(\psi_j \in \mathbb{R}\ ,\ \forall j \in \mathbb{N}^*)$ فان $(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty)$ ، مع (ε_t) سيرورة صخب ابيض $(i.i.d(0, \sigma_\varepsilon^2))$،

هذه الكتابة تعني ان مجموع الصدمات (الاستحداثات) السابقة تمثل المركبة الخطية العشوائية ل(Y_t) ، اما (k_t) فيمثل المركبة الخطية المحددة (déterministe) بحيث $(\ Cov(k_t, \varepsilon_{t-j}) = 0,\ \ \forall t \in \mathbb{Z}\ )$

تتمثل أهمية نظرية (Wold) في انه في حالة اهمال المركبة الخطية فانه يمكن كتابة اية سيرورة مستقرة في شكل مجموع مرجح غير منتهي من الصدمات السابقة، هذه الصدمات ممثلة في سيرورة صخب ابيض بتباين محدد. وبالتالي فان معرفتنا للأوزان (ψ_j) ومعرفتنا لتباين الصخب الأبيض (σ_ε^2) يمكننا من اقتراح تمثيل اية سيرورة مستقرة، وهذا التمثيل يسمى أيضا تمثيل المتوسطات المتحركة لانهائية. وتعتبر نظرية (Wold) المبدأ الأساسي لخاصية الانعكاس في النماذج الخطية التي سنراها لاحقا.

- **ملاحظة**

أشهر عبارة تستعمل في إيجاد صيغة الانعكاس داخل النماذج الخطية للسلاسل الزمنية هي العبارة التالية:

$$\frac{1}{(1-\alpha\,L)} = (1+\alpha\,L+\alpha^2L^2+\cdots)$$

✓ **البرهنة**

تكون دائما العبارة التالية صحيحة من اجل كل $a \neq 1$

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \qquad (1)$$

يمكننا برهنة العبارة السابقة بكل بساطة، نسمي $s = \sum_{i=0}^{n} a^i$ حيث:

$$s = \sum_{i=0}^{n} a^i = 1 + a + a^2 + \cdots a^n \qquad (2)$$

نقوم بضرب العبارة (2) ب (a) فنتحصل على:

$$a.s = a.\sum_{i=0}^{n} a^i = a.(1 + a + a^2 + \cdots a^n)$$

$$a.s = a + a^2 + \cdots a^{n+1} \qquad (3)$$

نطرح العبارة (2) من العبارة (3) فنتحصل على:

$$(2)-(3) = s - a.s = s(1-a) = 1 - a^{n+1}$$

وبالتالي نحصل على العبارة الأولى:

$$S = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

الان اذا كان لدينا (n) كبير جدا و $(|a|<1)$ ، اذا في هذه الحالة فان (a^n) تؤول الى الصفر $a^n \sim 0$ وبالتالي فان:

$$s = \sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}$$

الان بتعويض $(\alpha\,L)$ ب (a) : $a = \alpha\,L$

يمكننا القول اذا كان $|\alpha|<1$ ان معكوس $((1-\alpha\,L))$ هو بالمطابقة $(1+\alpha\,L+\alpha^2L^2+\cdots)$ بمعنى:

$$\frac{1}{(1-\alpha\,L)} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i L^i = (1+\alpha\,L+\alpha^2L^2+\cdots)$$

بمعنى اخر:

$$(1-\alpha\,L)(1+\alpha\,L+\alpha^2L^2+\cdots) = 1$$

5.1 عامل الازاحة الخلفي والامامي

عامل الازاحة الخلفي (Backshift operator) ، سوف نرمز له بالرمز (L) لديه الخصائص التالية:

1) $Ly_t = y_{t-1}$
2) $L^i y_t = L^{i-1}(Ly_t) = L^{i-2}(L(Ly_t)) =..= y_{t-i}$
3) $Lc = c \;,\quad c$(ثابت)
4) $L^0 y_t = y_t$
5) $L^{-i} y_t = y_{t+i}$
6) $(L^i + L^j)y_t = L^i y_t + L^j y_t = y_{t-i} + y_{t-j}$
7) $(1-aL)^{-1}y_t = \frac{y_t}{(1-aL)} = lim_{j\to\infty}(1 + aL + a^2L^2+\ldots+a^jL^j)y_t \,,$

بشرط ان: $(|a| < 1)$

عامل الازاحة الامامي، نرمز له (F) ويعرف كالتالي:

$$F = L^{-1}$$

عامل الفرق نرمز له (Δ) ويعرف كالتالي:

$$\Delta = (1-L)$$

عامل التجميع ونرمز له (S) ويعطى كالتالي:

$$S = \Delta^{-1} = (1-L)^{-1}$$

6.1 السيرورة العشوائية غير المستقرة

يتمثل قسم السيرورات (العمليات) العشوائية غير المستقرة في تلك السيرورات التي لا تتوفر فيها احدى الشروط الثلاث للاستقرارية، تتمثل اهم السيرورات غير المستقرة في نوعين اساسين هما السيرورة (TS) والسيرورة (DS).

1.6.1 السيرورة (TS) (Trend Stationnary)

تعريف (5): نقول ان $(\{Y_t, t \in \{\ldots, -1,0,1,2,..\}\})$ تتبع السيرورة (TS) إذا أمكن كتابتها في الصيغة:

$$Y_t = f(t) + z_t$$

مع $(f(t))$ دالة للزمن و(z_t) سيرورة عشوائية مستقرة.

في هذه الحالة السيرورة (Y_t) ما هي الا مجموع دالة محددة للزمن ومركبة عشوائية مستقرة من النوع (z_t). مما يعني ان هذه السيرورة لا تحقق الشروط الخاصة بالاستقرارية من الرتبة الثانية، حيث يمكن ملاحظة بكل وضوح ان:

$E(Y_t) = f(t) + z$ مع $z = E(z_t)$

ترتبط بالزمن. مما يتناقض مع الشرط الخاص بثبات الامل الرياضي (المتوسط).

ابسط مثال للسيرورة (TS) هو نموذج اتجاه خطي مشوش بسيرورة صخب ابيض. نضع:

$$f(t) = a_0 + a_1 t \quad , \quad z_t = \varepsilon_t$$

$$Y_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t$$

$$(a_0, a_1) \in \mathbb{R} \;, \quad \varepsilon_t iid\ (0, \sigma^2)$$

في هذه الحالة نتحقق ان السيرورة (Y_t) غير مستقرة اذ ان الامل الرياضي $(E(Y_t) = a_0 + a_1 t\ )$ مرتبط بالزمن.عكس ذلك فان السيرورة (X_t) المعرفة بانها الفرق بين (Y_t) ومركبة الاتجاه المحدد $(f(t) = a_0 + a_1 t$ مستقرة حيث ان $(X_t = Y_t - (a_0 + a_1 t) = \varepsilon_t)$ وهو صخب ابيض بالتعريف مستقر.

من بين الخصائص المهمة في هاته السيرورات هو كيفية تاثير الصدمات االعشوائية. ففي هذه السيرورات فانه في حالة تعرضها الى صدمة عشوائية فان أثر هذه الصدمة يؤول الى الاصمحلال مع مرور الزمن، وهذا ما يسمى خاصية عدم ديمومة اثار الصدمات. يمكن تبيان هذه الخاصية من خلال التالي:

ان أثر صدمة (ε_t) في التاريخ (T) على السيرورة (Y_t) المعرفة كالتالي:

$$Y_t = f(t) + z_t$$

مع (z_t) سيرورة عشوائية مستقرة، و$(E(z_t) = 0)$ يكون ضرفي (transitoire) .

هذا يعني انه في حالة كانت لدينا سلسلة زمنية تتبع سيرورة من نوع (TS) وتعرضت الى صدمة موجبة او سالبة في تاريخ محدد، مع فرضية ثبات جميع عوامل الأخرى فان أثر هذه الصدمة على المتغيرة المعنية يؤول الى الاضمحلال مع مرور الزمن. مما يعني ان سلوك المتغيرة المعرضة لهذه الصدمة يرجع الى مسايرة ديناميكيتها للمدى البعيد المحددة بالمركبة $(f(t))$.

في حالة كانت المركبة $(f(t))$ دالة تالفية للزمن فان المتغيرة تلتحق بالاتجاه الخطي للمدى البعيد، وهذه الخاصية تترجم وجود اتجاه غير عشوائي وبالتالي فهي لا تحتوي على نقطة انعطاف (مقطع) باعتبار ان الدالة $(f(t))$ مستمرة، لكن ماذا يعني هذا من ناحية التحليل الاقتصادي؟

يعني بكل بساطة ان سلوك او اتجاه سلاسل المتغيرات الاقتصادية التي تتبع السيرورة (TS) للمدى البعيد لا يتأثر وغير حساس للصدمات او التأثيرات الظرفية. لتوضيح هذه الخاصية نستعمل المثال التالي مع افتراض ان (z_t) تحتوي على بنية انحدار ذاتي:

$$Y_t = a_0 + a_1 t + z_t$$

$$z_t = \theta z_{t-1} + \varepsilon_t$$

مع $\left((a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2 \ , |\theta| < 1 \ , \ \varepsilon_t iid \ (0, \sigma^2) \right)$، السيرورة (z_t) تتبع كما افترضنا سيررورة (AR(1)) مستقرة بما ان جذور كثير الحدود للجزء الخاص بالانحدار الذاتي تساوي $(\frac{1}{\theta})$ أكبر من الواحد (en module). فلنفترض ان $(E(z_t) = 0)$.

فلندرس الان تأثير صدمة (ε_t) في التاريخ (T) مهما كان على سلوك المتغيرة (Y_t) في الفترة اللاحقة لهذه الصدمة $(t \geq T)$. من اجل ذلك سنطبق تجزئة (Wold) على السيرورات المستقرة (z_t)، فنتحصل على:

$$z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j \ \varepsilon_{t-j}$$

يمكننا إذا إعادة كتابة السيرورة (Y_t) على الشكل التالي:

$$Y_t = a_0 + a_1 t + \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j \ \varepsilon_{t-j}$$

فلنفترض انه في التاريخ (T) لدينا تحقق صدمة موجبة (ε_T) $(\varepsilon_T > 0)$ اما بعد هذا التاريخ فلا وجود لاية صدمة بمعنى ان كل الصدمات بعد التاريخ $(t \geq T)$ منعدمة، إذا في الفترة (T) يكون لدينا:

$$Y_T = a_0 + a_1 T + \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j \ \varepsilon_{T-j}$$

في التاريخ (T+1) بما ان كل الصدمات (ε_{T+1}) معدومة يكون لدينا:

$$Y_{T+1} = a_0 + a_1 (T+1) + \sum_{j=1}^{\infty} \theta^j \ \varepsilon_{T+1-j}$$

وبصورة عامة يكون لدينا في كل تاريخ $(T + k \ \ , k \geq 0)$ السيرورة (Y_{T+k}) تكون معرفة بالشكل التالي:

$$Y_{T+k} = a_0 + a_1 (T+k) + \sum_{j=k}^{\infty} \theta^j \ \varepsilon_{T+k-j} \qquad (4)$$

يمكننا ان نبين انه كلما مر الزمن بمعنى كلما كان (k) كبيرا، كلما اضمحل تأثير الصدمة (ε_T) المستحدثة في التاريخ (T). وبالتالي فتأثير الصدمة تأثير مؤقت او ضرفي. حيث ان المتغيرة (Y_{T+k}) تؤول الى قيمتها للمدى البعيد المعرفة بمركبة الاتجاه الخطي $(f(.))$. يكفي في ذلك ان نراقب الفرق الموجود بين (Y_{T+k}) والقيمة الموافقة لمركبة الاتجاه الخطي $(f(T+k) = a_0 + a_1(T+k))$ وملاحظة ان هذا الفرق يؤول الى الصفر عندما (k) يؤول الى ما لا نهاية.

نضع:

$$\tilde{Y}_t = Y_t - f(t)$$

إذا في التاريخ $(T+k)$ يكون لدينا:

$$\tilde{Y}_{T+k} = Y_{t+k} - a_0 - a_1(T+k)$$

من خلال المعادلة رقم (4) يمكن كتابة هذا الفرق في الصيغة:

$$\tilde{Y}_{T+k} = \sum_{j=k}^{\infty} \theta^j \ \varepsilon_{T+k-j} = lim_{n\to\infty}(\theta^k \varepsilon_T + \theta^{k+1}\varepsilon_{T-1} + .. + \theta^{k+n}\varepsilon_{T-n})$$

نرى الان ماذا يحدث في حالة ابتعادنا عن تاريخ اخر صدمة (T) بمعنى عندما يؤول (k) الى ما لانهاية

$$lim_{k\to\infty}\tilde{Y}_{T+k} = lim_{k\to\infty}[lim_{n\to\infty}(\theta^k \varepsilon_T + \theta^{k+1}\varepsilon_{T-1} + .. + \theta^{k+n}\varepsilon_{T-n})]$$

تحت فرضية ان السيرورة (z_t) مستقرة، بمعنى ان $(|\theta| < 1)$ يمكن ان يظهر جليا ان:

$$\tilde{Y}_{T+k} \xrightarrow[k\to\infty]{p} 0$$

هذه النتيجة تعني انه عندما يؤول (k) الى ما لا نهاية فان الفرق بين السيرورة (Y_{T+k}) والاتجاه الخطي تؤول احتماليا الى الصفر. هذه النتيجة تبين غياب ديمومة اثار الصدمات.

2.6.1 السيرورة DS (Differency Stationnary)

الى جانب السيرورة (TS) هناك السيرورة (DS) وهذه السيرورة تشكل سبب اخر لعدم الاستقرارية، والتي لا تتأتى من وجود مركبة اتجاه محددة وانما من وجود مركبة اتجاه عشوائي.

تعريف (6): تكون السيرورة غير المستقرة $(\{Y_t, t \in \{\dots, -1,0,1,2,..\}\})$ من النوع (DS) (Differency Stationnary) من الرتبة (d) مع (d) يمثل رتبة التكامل. إذا كانت السيرورة المرشحة المعرفة

ب $((1-L)^d Y_t)$ مستقرة. ونقول أيضا ان $(\{Y_t, t \in \{\dots,-1,0,1,2,..\}\})$ سيرورة متكاملة من الرتبة (d)، ونرمز لها $(I(d))$.

من هذا التعريف يمكننا تحديد قسم من السيرورات العشوائية التي لا تلبي شروط الاستقرارية ، غير ان اجراء الفروقات من الرتبة (d) عليها يجعلها تلبي شروط الاستقرارية. مثال ذلك اذا كانت السيرورة (z_t) غير مستقرة فنقول ان هذه السيرورة من النوع (DS) متكاملة من الرتبة الأولى $(I(1))$ ، اذا كان الفرق الأول لهذه السيرورة $(\Delta z_t = z_t - z_{t-1})$ يلبي شرورط الاستقرارية. في نفس الاتجاه تكون السيرورة (z_t) متكاملة من الرتبة الثانية$I(2)$ إذا كانت السيرورة المعرفة بالفرق الثاني:

$$(1-L)^2 z_t = (1-L)\Delta z_t = z_t \quad - 2z_{t-1} + z_{t-2})$$

مستقرة. هذا يعني ان تعريف السيرورة (DS) مبني على وجود جذر الوحدة في كثير الحدود الخاص بجزء الانحدار الذاتي

تعريف (7): تكون السيرورة غير المستقرة $(\{Y_t, t \in \{\dots,-1,0,1,2,..\}\})$ من النوع (DS) من الرتبة (d) مع (d) يمثل رتبة التكامل. إذا كان كثير الحدود $(\Phi(L))$ المعرف كمعامل التاخير (L) المرتبط بمركبة الانحدار الذاتي الخاصة بالسيرورة يقبل العدد (d) من جذور الوحدة. وإذا كانت جميع جذور كثير الحدود $(\tilde{\Phi}(L))$ أكبر من الواحد (en module).

$$\Phi(L)Y_t = z_t \quad , \quad \Phi(L) = \ (1-L)^d \ \tilde{\Phi}(L)$$

مع (z_t) سيرورة مستقرة.

فاذا افترضنا ان جذور كثير الحدود $(\tilde{\Phi}(L))$ اصغر من الواحد، يكون اذا $(\tilde{\Phi}(L)))$ قابل للانعكاس (الانقلاب) مما يمكننا اذا كتابة الفرق من الرتبة (d) ل(Y_t) في شكل مجموع القيم السابقة ل(z_t)

$$(1-L)^d \ \tilde{\Phi}(L)Y_t = z_t \Leftrightarrow (1-L)^d Y_t = \Psi(L)z_t$$

$$\Psi(L) = \tilde{\Phi}^{-1}(L)$$

إذا كان (z_t) سيرورة مستقرة فان المجموع المرجح لقيمه السابقة $(\Psi(L)z_t)$ يكون أيضا مستقر.

كتلخيص لكل ما قلناه ، فانه اذا كان كثير الحدود الانحذار الذاتي $(\Phi(L))$ ل(Y_t) يقبل (d) جذر احادي، تكون اذا الكمية $((1-L)^d Y_t)$ مستقرة. و السيرورة (Y_t) تكون متكاملة من الرتبة (d) $(I(d))$

- **مثال:**

لدينا السيرورة $(ARMA(2,2))$ التالية:

$$\Phi(L)x_t = \Theta(L)\varepsilon_t$$

مع:

$$\Phi(L) = (1 - 2.5L + 1.5L^2) \quad , \quad \Theta(L) = (1 - 0.5L)$$

و $(\varepsilon_t iid\ (0, \sigma^2))$

نفترض ان (x_t) غير مستقرة وسنبحث فيما اذا كانت سيرورة متكاملة من الرتبة (d) مع تحديد (d).

للإجابة على هذا السؤال يكفي حساب عدد جذور الوحدة ل $(\Phi(L))$.

لتكن (λ_1) و(λ_2) جذري كثير الحدود $(\Phi(L) = 0)$. بحساب بسيط نتحصل على قيمة الجذران $(\lambda_1 = 1)$ $(\lambda_2 = {}^2/_3)$. وكنتيجة لذلك فالسيرورة (x_t) متكاملة من الرتبة الأولى $(I(1))$.

لدينا:

$$\Phi(L) = \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}L\right)\left(1 - \frac{1}{\lambda_2}L\right) = (1 - L)\left(1 - \frac{3}{2}L\right) = (1 - L)\tilde{\Phi}(L)$$

مع: $\left(\tilde{\Phi}(L) = \left(1 - \frac{3}{2}L\right)\right)$ يقبل الجذر $(\lambda_2 = {}^2/_3)$

في قسم السيرورات (DS) هناك سيرورة تظهر بشكل خاص في كثير من الدراسات والبحوث وتلقى اهتمام خاص، تسمى سيرورة النزهة العشوائية.

1.2.6.1 سيرورة النزهة العشوائية

تعريف (8): النزهة العشوائية او السير العشوائي (Random Walk)) هي سيرورة انحدار ذاتي من الرتبة الأولى (AR(1)) متكاملة من الرتبة الأولى $(I(1))$.

$$\Delta Y_t = (1 - L)Y_t = c + \varepsilon_t \Leftrightarrow Y_t = c + Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

مع (ε_t) صخب ابيض $(\varepsilon_t iid\ (0, \sigma^2))$. في حالة كان $(c = 0)$ فان السيرورة هي سيرورة نزهة عشوائية خالصة (Pure Random Walk) .

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (5)$$

تسمى هذه السيرورة بسيرورة نزهة عشوائية انطلاقا من ان تحقق السيرورة في التاريخ (t) تنطلق من المشاهدة المحققة للسيرورة في التاريخ (t-1) أي المشاهدة (Y_{t-1})، وتأخذ اتجاه عشوائي باعتبار ان الصدمة (ε_t) عشوائية.

نلاحظ ان هذه السيرورة لا تحتوي على اتجاه محدد وبالتالي فسبب عدم الاستقرارية ليس متعلق بوجود هذا الاتجاه، لنرى الان أسباب عدم استقرارية هذا النوع من السيرورات:

يمكن كتابة سيرورة النزهة العشوائية في الصيغة التالية (بدون ثابت):

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$t = 1 \Rightarrow Y_1 = Y_0 + \varepsilon_1$$

$$t = 2 \Rightarrow Y_2 = Y_1 + \varepsilon_2 = Y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$t = 3 \Rightarrow Y_3 = Y_2 + \varepsilon_3 = Y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

....

$$Y_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + .. + \varepsilon_{t-j} + ..$$

بافتراض ان $Y_0 = 0$

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_{t-j}$$

بما ان (ε_t) هو سيرورة صخب ابيض يمكن بكل بساطة استخلاص عزومه من الرتبة الأولى والثانية:

$$E(Y_t) = E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_{t-j}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} E(\varepsilon_{t-j}) = 0$$

اذا السيرورة $(\{Y_t, t \in \{\dots, -1,0,1,2,..\}\})$ لها امل رياضي معدوم وبالتالي فان شرط الاستقرارية الأول محترم (ثبات المتوسط). لنحسب الان التباين:

$$V(Y_t) = V\left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_{t-j}\right) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} V(\varepsilon_{t-j})\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_\varepsilon^2 \equiv \infty$$

النتيجة هي ان تباين السيرورة $(\{Y_t, t \in \{\dots, -1,0,1,2,..\}\})$ يؤول الى الما لانهاية، أضف الى ذلك انه لوكنا حددنا شرط اولي على (Y_0) يكون تباين (Y_t):

$$V(Y_t) = \sum_{j=0}^{t-1} \sigma_\varepsilon^2 \equiv t\sigma_\varepsilon^2$$

دالة للزمن، ومنه يكون شرط الاستقرارية بالمعنى الضعيف الخاص بالتباين غير محترم.

مما سبق يمكن تفسير مصدر عدم الاستقرارية في السيرورة (Y_t) بتراكم الصدمات العشوائية (ε_t) عبر الزمن، مما يؤدي الى تزايد التباين الخاص ب(Y_t) مع مرور الزمن. معنى هذا ان مصدر عدم الاستقرارية في هذه الحالة ذا طبيعة عشوائية وليست محددة(déterministe). كما ان تراكم الصدمات العشوائية يعني ان هذه السيرورة ذات ذاكرة لا نهائية.

2.2.6.1 خصائص التوقع لسيرورة النزهة العشوائية

يعطى أحسن توقع يمكن ان نقوم به في التاريخ (T) للقيمة التي يمكن ان تاخذها (Y) في التاريخ $(T+1)$ من خلال الامل الرياضي ل(Y_{T+1}) المشروط بالمعلومات المتوفرة في الفترة (T):

$$\hat{Y}_T(1) = E(Y_{T+1} \,/\, Y_T, Y_{T-1}, \dots)$$

وبالتالي تكون لدينا في حالة سيرورة النزهة العشوائية

$$\hat{Y}_{T(1)} = E(Y_T + \varepsilon_{T+1} \;/\; Y_T, .., Y_1) = Y_T + E(\varepsilon_{T+1} \;/\; Y_T, .., Y_1)$$

$$E(\varepsilon_{T+1} \,/\; Y_T, .., Y_1) = 0 \Rightarrow \hat{Y}_{T(1)} = Y_T$$

هذا يعني ان احسن توقع لقيمة (Y) في التاريخ $(T+1)$ هو القيمة الحالية ل(Y) في التاريخ (T).

بنفس الطريقة يمكن استخراج التوقع الخاص بالتاريخ $(T+2)$ حيث نجد:

$$\hat{Y}_{T(2)} = E(Y_{T+2} \,/\, Y_T, Y_{T-1}, \dots Y_1) = E(Y_{T+1} + \varepsilon_{T+2} \;/\; Y_T, .., Y_1)$$

$$= Y_T + \varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2} \;/\; Y_T, .., Y_1) = Y_T$$

هذا يعني انه مهما كان افق التوقع فان النتيجة تبقى ان أحسن توقع هو القيمة الأولية التي تأخذها المتغيرة (Y)، بمعنى اخر فان التوقع ثابت بالنسبة لكل الفترات اللاحقة.

- **ملاحظة:** يجب التفريق بين السيرورات المتكاملة، النزهة العشوائية، والمارتنقال (les martingales) المستعملة بكثرة في الدراسات المالية.

كنا قد بينا ما هي مميزات سيرورة نزهة عشوائية، يبقى ان نبين الان مميزات سيرورة(martingale) ونميز الفرق بينها وبين سيرورة النزهة العشوائية.

3.2.6.1 سيرورة مارتنقال

تعريف (9): نقول ان السيرورة $(\{Y_t, t \in \{\dots, -1,0,1,2,..\}\})$ مارتنقال إذا وفقط إذا كان:

$$E(Y_{t+1}/Y_t) = \ Y_t, \ \ t \in \{\dots, -1,0,1,2,..\}$$

$$Y_{t+1} = Y_t + \varepsilon_t \ \ , \ \ E(\varepsilon_t/Y_{t-1}) = \ 0 \ , \ \ t \in \{\dots, -1,0,1,2,..\} \qquad (6)$$

كما نسمي السيرورة $(\{Y_t, t \in \{\dots, -1,0,1,2,..\}\})$ (submartingale) إذا وفقط إذا كان:

$$E(Y_{t+1}/Y_t) \geq \ Y_t, \ \ t \in \{\dots, -1,0,1,2,..\}$$

كما نسمي السيرورة $(\{Y_t, t \in \{\dots, -1,0,1,2,..\}\})$ (supermartingale) إذا وفقط إذا كان:

$$E(Y_{t+1}/Y_t) \leq \ Y_t, \ \ t \in \{\dots, -1,0,1,2,..\}$$

السؤال الذي يطرح نفسه إذا ما هو الفرق بين سيرورة سير عشوائي خالصة ومارتنقال.

الجواب مرتبط بالتعريف الذي نعطيه للصخب الأبيض (ε_t)، التعريف الأول وهو التعريف البسيط ولكنه التعريف الأكثر تقييدا وهو افتراض ان (ε_t) مستقلة فيما بينها ولها نفس التوزيع (iid) كما في تعريف النزهة العشوائية، في هذه الحالة وتحت هذه الفرضية فان سيرورة السير العشوائي المعرفة في التعريف السابق تتوافق مع تعريف مارتنقال.

غير ان التعريف السابق ليس هو التعريف الوحيد لسيرورة النزهة العشوائية، فبإمكاننا ان نرفع قيد التوزيع المتماثل ل(ε_t) وترك فقط فرضية الاستقلالية ، بمعنى ان (ε_t) مستقلة فيما بينها ولكن ليس لها نفس التوزيع $(\varepsilon_t \, inid \ (0, \sigma^2))$. كما يمكننا في افتراض اخر رفع فرضية الاستقلالية وترك فرضية الصخب الأبيض بالمعنى الضعيف ل(ε_t) .

$$E(\varepsilon_t) = \ 0, \ \ E({\varepsilon_t}^2) = \sigma^2 \ \ , \ \ E(\varepsilon_t \, \varepsilon_{t-k}) = \ 0 \quad \forall k \neq 0$$

في هذه الحالة نلاحظ ان تعريف المارتنقال يصبح أكثر تقييدا من التعريف الخاص بسيرورة السير العشوائي الخالصة، ويصبح مفهوم المارتنقال يختلف عن مفهوم السير العشوائي الخالص. فمن خصائص المارتنقال

الاستقلالية بين تطورات (ε_t) اما في تعريف السيرورة النزهة العشوائية في هذه الحالة فانه لا يفترض انعدام الارتباط بين هذه التطورات في (ε_t) . علما انه إذا كانت الاستقلالية تعني انعدام التباينات المشتركة، فان العكس ليس دائما صحيح. اذا يمكن لسيرورة النزهة العشوائية ان تكافئ مفهوم المارتنقال، كما يمكن عند انعدام بعض الشروط الخاصة ب(ε_t) ان تختلف عنها.

من اهم الخصائص الخاصة بالسيرورة (DS) هو ديمومة اثار الصدمات (l'hystérésis).

3.6.1 نتائج عدم الاستقرارية

ان عدم توفر شرط الاستقرارية وخاصة إذا كانت السلاسل التي نتعامل بها من القسم (DS) يجعل اهم طرق التقدير والاستدلال الاحصائي بدون أي أساس.

كما ان خصائص الاستقرارية او عدم الاستقرارية للسلاسل المستعملة تحدد لنا نوع النمذجة والخصائص التقاربية للطرق القياسية الموافقة لهذه النمذجة. الى جانب الخصائص التقاربية للمعالم المقدرة وللاختبارات الإحصائية المستعملة.

كما تجدر الإشارة الى ان عدم الاستقرارية الناجمة عن وجود اتجاه عشوائي تتطلب طرق مختلفة لإزالة عدم الاستقرارية ، فمحاولة حذف مركبة اتجاه خطي من سيرورة نزهة عشوائية مثلا تؤدي الى خلق ارتباط ذاتي موجب للبواقي عند التأخيرات الأولى.

4.6.1 **طرق تحويل السيرورة (TS) والسيرورة (DS) الى سيرورات مستقرة**

لتحويل السيرورة (TS) الى سيرورة مستقرة يجب نزع (استخلاص) المركبة المحددة (f_t) عن طريق اجراء عملية انحدار للسلسلة (Y_t) على معادلة الاتجاه. اما لتحويل السيرورة (DS) من الرتبة (d) الى سيرورة مستقرة فيجب تطبيق المرشح $((1-L)^d$ (اجراء الفرق من الرتبة (d)).

مثلا لتحويل السيرورة ($Y_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t$) الى سيرورة مستقرة يكفي ان نجري انحدار (Y_t) على ثابت ومتغيرة الزمن (t) للحصول في الأخير على السيرورة ($Y_t - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 t$) مستقرة.

5.6.1 اثار التحويل الخاطئ للسيرورات

1.5.6.1 اثار التحويل الخاطئ للسيرورة TS

نفترض ان ($\{Y_t, t \in \{\dots, -1,0,1,2,..\}\}$) سيرورة من النوع (TS) معرفة كالتالي:

$$Y_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t$$

مع (ε_t) صخب ابيض يتبع التوزيع الطبيعي ($(\mathcal{N}(0,\sigma_\varepsilon^2)$)). سنفترض الان اننا بغية جعل هذه السرورة مستقرة ستطبق عليها بشكل خاطئ مرشح الفروقات من الرتبة الأولى. تنتج لنا إذا السيرورة (ΔY_t) المعرفة كالتالي:

$$\Delta Y_t = (1-L)Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

نبين ان:

$$\Delta Y_t = a_1 + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

هذه الصيغة تبين لنا بشكل تام ان تطبيق مرشح الفروقات من الرتبة الأولى على السيرورة (TS) اذى الى تشكيل جذر الوحدة داخل الجزء الخاص بالمتوسطات المتحركة للسيرورة ($\Delta Y_t = (1-L)Y_t$) .

سنتحقق من ان تطبيق هذا المرشح من الرتبة الأولى على السيروة (TS) قد أنتج سيرورة (ΔY_t) مستقرة.

نتذكر الشروط الثلاث لسيرورة مستقرة:

التباين لا يؤول الى ما لا نهاية:

$$E[(\Delta Y_t)^2] \quad = E[(Y_t - Y_{t-1})^2] = E\big[a_1 + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) \quad \big]^2$$
$$= a_1^2 + E[(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2] = a_1^2 + 2\sigma_\varepsilon^2 < \infty$$

العزم من الرتبة الأولى مستقل عن الزمن:

$$E(\Delta Y_t) = a_1$$

العزم من الرتبة الثانية: لنحدد الدالة المولدة للتباينات المشتركة الذاتية (γ_h) للسيرورة ((ΔY_t)).

$$\gamma_h = E\{[\Delta Y_t - E(\Delta Y_t)][\Delta Y_{t-h} - E(\Delta Y_{t-h})]\}$$
$$= E[(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-h} - \varepsilon_{t-h-1})]$$

بعد الحساب نتحصل على النتيجة التالية:

$$\gamma_h = \begin{cases} 2\sigma_\varepsilon^2 & , h = 0 \\ -\sigma_\varepsilon^2 & , \ h = (-1,1) \\ 0 & , \quad sinon \end{cases}$$

هذه النتائج تبين بشكل قطعي ان (γ_h) مستقل عن الزمن. من كل ما سبق يظهر بشكل جلي ان جميع شروط الاستقرارية من الدرجة الثانية محققة. مما يعني ان السيرورة $((\Delta Y_t))$ مستقرة.

- **ملاحظة:**

–هذه النتيجة ليست نتيجة عامة ، حيث اننا اذا قمنا بإجراء الفرق الثاني $((1-L)^2)$ على السلسلة $((Y_t))$ لكانت النتيجة الحصول على سلسلة $(\Delta^2 Y_t)$ غير مستقرة.

–حتى وان كانت السيرورة $((\Delta Y_t))$ مستقرة الا انها لا تتميز بمميزات سيرورة صخب ابيض.

– اجراء الفرق على سيرورة (TS) تؤدي الى ارتباط ذاتي وهمي لبواقي المرشح. اذ نلاحظ ان الدالة المولدة للتباينات المشتركة الذاتية (دالة التغاير الذاتي) (γ_h) تختلف عن تلك الخاصة بالدالة المولدة للتباينات المشتركة الذاتية لسيرورة الصخب الابيض.

إذا فعملية اجراء الفرق على السلسلة $((Y_t))$ أدى الى خلق ارتباط ذاتي من الرتبة الأولى في الاستحداثات (ε_t) الخاص ب$((\Delta Y_t))$ ، التي لم تكن موجود أصلا في المركبة المستقرة للسيرورة $(Y_t - a_0 - a_1 t)$.

اثار التحويل الخاطئ للسيرورة DS

نفترض ان $(\{Y_t, t \in \{\dots,-1,0,1,2,..\}\})$ سيرورة (DS) معرفة من الرتبة الأولى بدون ثابت.

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

مع (ε_t) صخب ابيض يتبع التوزيع الطبيعي $((\mathcal{N}(0,\sigma_\varepsilon^2)))$، فلنفترض اننا سنطبق بالخطأ على السيرورة (Y_t) طريقة لجعل السلسلة مستقرة من خلال اجراء انحدار السلسلة (Y_t) على ثابت واتجاه محدد (t). ليكن النموذج التطبيقي التالي:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + u_t$$

من المفروض ان نبين ان مقدرات طريقة المربعات الصغرى ل(β_0) و(β_1) تؤول الى الصفر وان إحصاءات ستودنت المرافقة لها تكون غير معنوية عند القيم الحرجة المعيارية باعتبار ان السلوك الحقيقي ل(Y_t) تفسره السيرورة (DS) وليس السيرورة (TS)، غير ان النتائج المستخرجة من الانحدار سوف تبين لنا عكس ذلك. اذ اننا سنتحصل في حالة اجراء محاكاة للانحدار على قيم مقدرة $(\hat\beta_0)$ و$(\hat\beta_1)$ تختلف معنويا عن الصفر في حالة استعمال مستويات المعنوية المعيارية.

- **ملاحظة:**

ان حذف مركبة اتجاه خطي من سيرورة (DS) تؤدي الى توليد بطريقة اصطناعية ارتباط ذاتي قوي في الرتب الاولى للبواقي وبالتالي خلق حركة شبه دورية للبواقي.

من كل ما سبق يظهر بشكل كبير الأهمية الواجب إعطائها الى الطريقة المستعملة في تحويل السلاسل الزمنية غير المستقرة من خلال معرفة أولا السيرورة التي تتبعها قبل اتخاذ أي اجراء، هل هي السيرورة (TS) او السيرورة (DS)، فإجراء التحويل على السيرورة (DS) بالطريقة التي تتم على السيرورة (TS) او اجراء التحويل على السيرورة (TS) بالطريقة التي يتم فيها التحويل على السيرورة (DS) يؤدي الى بروز مشكل الارتباط الذاتي في بواقي السيرورتان.

في هذا الإطار تبرز أهمية اختبارات جذر الوحدة التي تسمح لنا بتحديد السيرورات غير المستقرة من جهة ونوعها من جهة أخرى، هل هي من النوع (TS) او من النوع (DS).

7.1 أدوات تحليل السلاسل الزمنية

اهم خاصية تتمتع بها السلاسل الزمنية هي خاصية الارتباط، فبعض السلاسل ترتبط مشاهداتها بصفة كبيرة عكس البعض الاخر، تسمح لنا هذه الخاصية باستخراج السيرورة المثلى المولدة لبيانات السلسلة مما يمكننا من القيام بعملية التنبؤ ونحن كلنا ثقة على ان التمثيل المستعمل في نمذجة السلسلة هو أمثل تمثيل. لذا تعتبر دوال الارتباط الذاتي البسيط والجزئي اهم أدوات تحليل السلاسل الزمنية، الى جانب دالة التغاير الذاتي.

1.7.1 دالة التغاير الذاتي (التباين المشترك الذاتي) (Autocovariance Function):

تعرف دالة التغاير الذاتي (التباين المشترك الذاتي) كالتالي:

$$\gamma_{t,s} = COV(Y_t Y_s) \ , \ \ \forall t, \forall s$$

$$\gamma_{t,s} = [(Y_t - \mu)(Y_s - \mu)], \ \ \forall t, \forall s$$

وإذا افترضنا ان الابطاء h هو الفترة الزمنية التي تفصل بين (Y_t) و(Y_{t-h}) او (Y_{t+h}) فإن دالة التغاير الذاتي تعطى بالعلاقة:

$$\gamma_h = COV(Y_t, Y_{t-h}) \ , \ \ h = 0, \pm1, \pm2, ..$$

$$\gamma_h = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-h} - \mu)], \ \ h = 0, \pm1, \pm2, ..$$

تعريف (10): تؤول دالة التغاير الذاتي للعينة لسيرورة مستقرة المعطاة في العلاقة التالية:

$$\gamma_n(h) = (n-h)^{-1} \sum_{t=1}^{n-h} (Y_t - m_n)(Y_{t+h} - m_n)$$

المقدرة انطلاقا من (n) مشاهدة، الى دالة التغاير الذاتي النظرية عندما يؤول (n) الى ما لا نهاية $(n \sim \infty)$.

من هنا تتأتى أهمية مفهوم الاستقرارية الذي يبرر تقدير النماذج الإحصائية المشاهدة لمرة واحدة.

–دالة التغاير الذاتي (دالة زوجية) $(\gamma_h = \gamma_{-h})$ ، اذا يكفي معرفة دالة التغاير الذاتي على المجال $([0, T])$.

– بالنسبة الى كل (h) فان $(|\gamma_h| \leq \gamma_0)$.

– دالة التغاير الذاتي موجبة معرفة.

2.7.1 دالة الارتباط الذاتي

تعرف دالة الارتباط الذاتي الدالة (ρ) من الرتبة (h) بالعلاقة التالية:

$$\rho(h) = \frac{E(Y_t Y_{t+h}) - E(Y_t)E(Y_{t+h})}{\sqrt{E({Y_t}^2)E({Y_{t+h}}^2)}}$$

في حالة كان $(E(Y_t) = E(Y_{t+h}) = 0)$ فان العلاقة تصبح:

$$\rho(h) = \frac{E(Y_t Y_{t+h})}{\sqrt{E({Y_t}^2)E({Y_{t+h}}^2)}} = \frac{COV(Y_t Y_{t+h})}{Var\ (Y_t)})$$

كما تكتب مباشرة في العلاقة:

$$\rho(h) = \frac{\gamma_h}{\gamma_0}\ ,\ \ h = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

ولها الخواص التالية:

$$\rho_0 = 1$$
$$\rho_h = \rho_{-h}$$
$$|\rho_h| \leq 1$$

1.2.7.1 استعمالات دالة الارتباط الذاتي

تلعب دالة الارتباط الذاتي دورا رئيسيا في التحليل الحديث للسلاسل الزمنية بطريقة بوكس وجينكنز ، فهي الأداة الرئيسية التي ارتضاها هذان العالمان لاختبار استقرارية السلسلة بجانب الطرق التقريبية الأخرى، وهي احد الأدوات الرئيسية للتعرف على النموذج المبدئي الملائم للسلسلة، بالإضافة الى ذلك فان هذه الدالة من اهم أدوات تشخيص النموذج المبدئي من اجل تحسينه او تطويره اذا طبقت على البواقي الناتجة من هذا النموذج.

نستعمل على العموم دالة الارتباط الذاتي لتحديد خصائص العلاقات او الارتباطات الخطية داخل سلاسل البواقي (السلاسل المصححة من مركبة الاتجاه العام والفصلية)، فمركبة الاتجاه العام والفصلية مركبات محددة (deterministe) وبالتالي فليس هناك معنى لتقدير الخصائص الإحصائية لكميات محددة، إضافة الى هذا فانه إذا كانت خصائص السلسلة المدروسة تتطور مع الزمن فيصبح من الصعب تقدير خصائصها الإحصائية حيث يكون لذينا تحقق وحيد للسيرورة مما يكون غير كافي لإجراء عملية التقدير.

2.2.7.1 دالة الارتباط الذاتي لسيرورة الصخب الابيض

رأينا ان الامل الرياضي لسيرورة الصخب الأبيض معدوم، كما ان تباينه ثابت ويساوي (σ^2) اما التغاير الذاتي فمعدوم:

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$\gamma_h = COV(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}) = \begin{cases} \sigma^2 & , \quad h = 0 \\ 0 & , \quad h \neq 0 \end{cases}$$

$$\rho(h) = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} = 0, \quad h \neq 0$$

$$\rho(h) = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} = 1, \quad h = 0$$

بعد حساب هذه المعاملات يطرح عادة السؤال الخاص بمعنويتها الاحصائية بمعنى ما هي المعاملات (ρ_k) التي لا تختلف معنويا عن الصفر.

هناك عدة اختبارات إحصائية في هذا الاتجاه، مثل اختبار (Quenouille) (Box-Pierce) (Ljung-Box) . سنتناول في هذا الإطار اختبار واحد وهو اختبار (Ljung-Box)

- **اختبار (Ljung-Box)**

يهدف هذا الاختبار الى تحديد سيرورة الصخب الأبيض، بمعنى تحديد $(Cov(y_t, y_{t-k}) = 0)$ او $(\rho_k = 0 \quad \forall k)$

صيغة الاختبار:

$$H_0; \rho_1 = \rho_2 =..= \rho_k = 0$$

$$H_1; \exists \rho_i \neq 0$$

إحصائية الاختبار: تعطى إحصائية الاختبار من خلال الإحصائية:

$$\grave{Q} = n(n+2)\sum_{k=1}^{h} \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}$$

هذه الإحصائية تتبع توزيع (χ_h^2) ب(h) درجة حرية.

مع (h) عدد التأخيرات و $(\hat{\rho}_k^2)$ معامل الارتباط المقدر من الرتبة (k). و (n) عدد المشاهدات.

يتم اتخاذ القرار من خلال مقارنة الإحصائية $(\grave{Q})$ بقيمة إحصائية (χ_h^2) عند مستوى معنوية معين، فاذا كانت $(\grave{Q})$ أكبر من قيمة (χ_h^2) المجدولة فاننا نرفض الفرض (H_0) الذي هو فرض ان السيرورة صخب ابيض، اما إذا كانت قيمة $(\grave{Q})$ أصغر من إحصائية (χ_h^2) المجدولة فاننا نقبل فرض العدم الموافق لسيرورة صخب ابيض

3.7.1 دالة الارتباط الذاتي الجزئي

هي الدالة التي تعطي مقدار الارتباط بين (Y_t) و(Y_{t-k}) بعد حذف تاثير الارتباط الناتج من المتغيرات الموجودة بينهما $(Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-k-1},)$، وتمثل بالتالي الارتباط الصافي الموجود بين (Y_t) و(Y_{t-k}) . يرمز لها عند الابطاء (k) ب$(\emptyset_{kk})$.

1.3.7.1 طريقة حساب دالة الارتباط الذاتي الجزئي

يتم حساب دالة الارتباط الذاتي الجزئي بعدة طرق، أولها الطريقة الانحدارية وطريقة محدد مصفوفات الارتباط الذاتي.

- **طريقة الانحدار:**

تتمثل هذه الطريقة في اجراء عملية انحدار (Y_t) على (Y_{t-1}) فنتحصل على معامل الانحدار الجزئي $(\emptyset_{11})$ الممثل لمعامل الارتباط الذاتي الجزئي من الرتبة الاولى، اما اذا اردنا الحصول على معامل الانحدار $(\emptyset_{22})$ فنقوم باجراء عملية الانحدار ل(Y_t) على (Y_{t-2}) وهكذا بالنسبة لأي معامل ارتباط جزئي نحاول استخراجه.

معامل الارتباط الجزئي من الرتبة الأولى $(\emptyset_{11})$ يساوي معامل الارتباط البسيط (ρ_1) حيث:

$$Y_t = \emptyset_{11} Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

بضرب طرفي العلاقة ب(Y_{t-1}) وإدخال معامل الامل الرياضي نجد:

$$E(Y_t Y_{t-1}) = \emptyset_{11} E(Y_{t-1} Y_{t-1}) + E(\varepsilon_t Y_{t-1})$$

$$\gamma_1 = \emptyset_{11} \gamma_0$$

مع $(E(\varepsilon_t Y_{t-1})=0)$ التي تعني ان (ε_t) مستقل عن القيم السابقة ل(Y_{t-1})

بقسمة المعادلة الأخيرة على (γ_0) نتحصل على:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_0}=\emptyset_{11}\frac{\gamma_0}{\gamma_0}\Rightarrow\rho_1=\emptyset_{11}$$

بمعنى ان معامل الارتباط الذاتي البسيط من الرتبة الأولى يساوي معامل الارتباط الذاتي الجزئي من الرتبة الأولى.

- **طريقة محدد المصفوفة**

تعرف دالة الارتباط الذاتي الجزئية من خلال العلاقات التالية:

$$\emptyset_{kk}=1\ ,\quad k=0$$
$$\emptyset_{kk}=\rho_1\ ,\quad k=1$$

$$\emptyset_{kk}=\frac{|k^*|}{|k|}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1\\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_1 & \rho_k\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1}\\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_1 & 1\end{vmatrix}}\ ,\qquad k=2,3,..$$

حيث الرمز $(|\quad|)$ يعبر عن محدد المصفوفة.

المصفوفة (k) تمثل مصفوفة معاملات الارتباط الذاتي البسيطة.

المصفوفة (k^*) تمثل مصفوفة معاملات الارتباط الذاتي البسيطة بعد اجراء تحويل بسيط عليها حيث نحذف العمود (k) ونعوضه بالعمود المشكلة قيمه من $(\rho_1\rho_2..\rho_k,)$

- **حساب دالة الارتباط الذاتي الجزئية تكراريا.**

عندما تكون (k) كبيرة فان هذا التعريف صعب الاستخدام، يمكننا من هذا الجانب استعمال تعريف اخر لحساب دالة الارتباط الذاتي الجزئية تكراريا.

تحسب $(\emptyset_{kk})$ تكراريا من العلاقات:

$$\emptyset_{00}=1$$
$$\emptyset_{11}=\rho_1$$
$$\emptyset_{kk}=\frac{\rho_k-\sum_{j=1}^{k-1}\emptyset_{k-1,j}\rho_{k-j}}{1-\sum_{j=1}^{k-1}\emptyset_{k-1,j}\rho_j}\ ,\quad k=2,3..$$

حيث:

$$\emptyset_{kj}=\emptyset_{k-1,j}-\emptyset_{kk}\emptyset_{k-1,k-1}\ ,\quad k=1,2,..,k-1$$

مثلا: حساب $(\emptyset_{22})$ باستعمال العلاقة السابقة:

$$\emptyset_{22} = \frac{\rho_2 - \emptyset_{11}\ \rho_1}{1 - \emptyset_{11}\ \rho_1} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

2.3.7.1 دالة الارتباط الذاتي الجزئية لسيرورة الصخب الابيض

سوف نشتق الآن دالة الارتباط الذاتي الجزئية لسيرورة الصخب الابيض:

علما ان معامل الارتباط البسيط لسيرورة الصخب الأبيض معدوم $(\rho_1 = 0)$ فإننا باستعمال التعريف السابق نجد:

$$\emptyset_{00} = 1$$
$$\emptyset_{11} = \rho_1 = 0$$

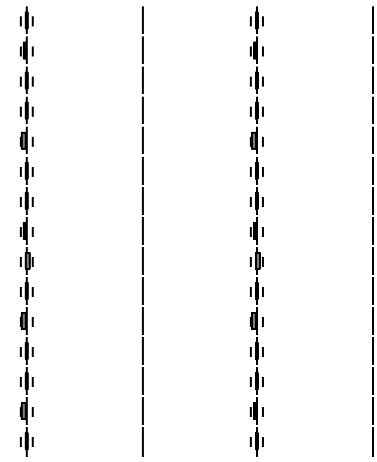
ونستخرج $(\emptyset_{kk})$ بالتعويض في العلاقة:

$$\emptyset_{22} = \frac{\rho_2 - \emptyset_{11}\ \rho_1}{1 - \emptyset_{11}\ \rho_1} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = 0$$

حيث نعلم ان جميع معاملات الارتباط الذاتي البسيط لسيرورة الصخب الأبيض تساوي الصفر، وبالتالي فان:

$$\emptyset_{22} = \emptyset_{33} = \ldots = 0$$

الشكل رقم (3): التمثيل البياني لدالة الارتباط الذاتي البسيطة والجزئية للصخب البيض



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
		1	0.011	0.011
		2	-0.017	-0.017
		3	0.022	0.022
		4	0.012	0.012
		5	-0.037	-0.036
		6	-0.006	-0.005
		7	0.013	0.011
		8	-0.010	-0.009
		9	0.030	0.032
		10	0.005	0.002
		11	-0.031	-0.031
		12	0.009	0.010
		13	-0.001	-0.004
		14	-0.027	-0.024
		15	-0.005	-0.003

- **ملاحظة:**

نلاحظ أن كل من دالتي الارتباط الذاتي البسيطة والجزئية لسيرورة الصخب الابيض تساوي الصفر بداية بالإبطاء الأول (كلها داخل مجال الثقة). وهذه خاصية جميع المتغيرات العشوائية غير المترابطة او المستقلة.

4.7.1 دالة الارتباط الذاتي للعينة

دالة الارتباط الذاتي للعينة لسلسلة زمنية مشاهدة $(y_1, y_2, .., y_{n-1}, y_n)$ يرمز لها بالرمز $(r_k, k = 0,1,2)$ وتعطى بالعلاقة التالية:

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2} \quad , k = 0,1,2..$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t$$

وهي مقدر لدالة الارتباط الذاتي، وبما انه مقدر فهي تتغير عشوائيا من عينة لأخرى.

2. النماذج الخطية للسلاسل الزمنية

تشتمل نماذج السلاسل الزمنية على نوعين من النماذج، هي النماذج الخطية والنماذج غير الخطية، عادة تستعمل النماذج الخطية للتنبؤ بمتوسط السلسلة الزمنية اما النماذج غير الخطية فتهتم بنمذجة تباين السلسلة الزمنية. سنقتصر في هذا المحور على النماذج الخطية الممثلة في نماذج الانحدار الذاتي ونماذج المتوسطات المتحركة الى جانب النماذج المختلطة المعروفة اختصارا بنماذج (ARMA(p,q)).

1.2 نماذج الانحدار الذاتي–المتوسط المتحرك ARMA(p,q)

تعريف (11): تقبل السيرورة $\{Y_t, t \in \{\dots, -1,0,1,2,..\}\}$ تمثيل نموذج (ARMA) من الرتبة (P) و(q) والمعرف ب (ARMA(p,q)) فقط اذا حققت العلاقة التالية:

$$\Phi(L)y_t = \delta + \Theta(L)\varepsilon_t$$

مع:

$$\delta \in \mathbb{R}\ , \qquad \Theta(L) = \sum_{j=0}^{q} \theta_j L^j\ ,\ \ \Phi(L) = \sum_{j=0}^{p} \emptyset_j L^j\ ,$$

$$\forall j < q\ , \theta_j \in \mathbb{R}^2\ , \qquad \forall j < p,\ \emptyset_j \in \mathbb{R}^2$$

$$\theta_0 = \emptyset_0 = 1\ , \quad (\emptyset_p, \theta_q) \in \mathbb{R}^2, \quad \varepsilon_t i.i.d(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

تحتوي هذه النماذج على القسم الانحداري ذي الدرجة (p) وقسم المتوسطات المتحركة من الدرجة (q) وتكتب في الشكل العام التالي:

$$y_t = \delta + \emptyset_1 y_{t-1} + \emptyset_2 y_{t-2} + .. + \emptyset_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + .. + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

باستعمال معامل التأخير تصبح كتابة النموذج العام في الشكل التالي:

$$y_t = \delta + \emptyset_1 y_{t-1} + \emptyset_2 y_{t-2} + .. + \emptyset_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + .. + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$y_t = \delta + \emptyset_1 L y_t + \emptyset_2 L^2 y_t + .. + \emptyset_p L^p y_t + \varepsilon_t + \theta_1 L \varepsilon_t + .. + \theta_q L^q \varepsilon_t$$

$$y_t - \emptyset_1 L y_t + \emptyset_2 L^2 y_t + .. + \emptyset_p L^p y_t = \delta + \varepsilon_t + \theta_1 L \varepsilon_t + .. + \theta_q L^q \varepsilon_t$$

$$(1 - \emptyset_1 L \ \ + \emptyset_2 L^2 \ \ - .. - \emptyset_p L^p) y_t = \delta + (1 + \theta_1 L \ \ + .. + \theta_q L^q \ \ )\varepsilon_t$$

$$\Phi(L)y_t = \delta + \Theta(L)\varepsilon_t$$

مع: $(1 - \emptyset_1 L \ \ + \emptyset_2 L^2 \ \ - .. - \emptyset_p L^p)$ كثير الحدود الخاص بعامل الانحدار الذاتي.

و $(1+\theta_1 L \ \ +..+\theta_q L^q \ \ )$ كثير الحدود الخاص بعامل المتوسطات المتحركة.

نلاحظ ان الثابت (δ) لا يمثل المتوسط داخل النموذج، حيث ان المتوسط في هذه الحالة يساوي:

$$E(y_t)=\frac{\delta}{\Phi(L)}$$

وهي نفس النتيجة الخاصة بنماذج (AR) كما سنراها لاحقا.

1.1.2 شروط الاستقرارية و شروط الانعكاس

تتحدد شرروط الاستقرارية في السيروة $(ARMA)$ بواسطة جذور كثير الحدود الموافق للجزء (AR)، اما شروط الانعكاس فتتحدد بواسطة جذور كثير الحدود الخاص بمركبة الجزء (MA).

هذا يعني ان السيرورة $(\{Y_t, t\in\{\dots,-1{,}0{,}1{,}2,..\}\})$ المعرفة من خلال التمثيل $(ARMA(p,q))$ تكون مستقرة إذا كانت جذور كثير الحدود $(\Phi(L))$ كلها أكبر تماما من الواحد بالقيمة المطلقة، وتكون قابلة للانعكاس إذا كانت جذور كثير الحدود $(\Theta(L))$ كلها أكبر تماما من الواحد بالقيمة المطلقة.

كنا قد بينا سابقا مفهوم وأهمية الاستقرارية للسلاسل الزمنية، غير اننا لم نتطرق الى مفهوم واهمية الانعكاس، سنبين مفهوم الانعكاس داخل نماذج السلاسل الزمنية عند دراسة أنواع النماذج المختلفة غير انه من المهم فهم أهمية خاصية الانعكاس للنماذج الخطية والتي نلخصها في النقاط التالية:

- **أهمية الانعكاس**

-يضمن انعكاس النموذج ان تتأثر قيمة المتغير العشوائي (y_t) بعد فترة معينة بالمشاهدات القريبة أكثر من تأثرها بالمشاهدات البعيدة، أي ان تأثير ماضي السلسلة على قيمتها الحالية يتناسب عكسيا من عمر المشاهدة، فالقيم القريبة لها تأثير أكبر من القيم البعيدة.

-يضمن الانعكاس وجود نموذج وحيد بمعلمات محددة يناظر دالة ارتباط ذاتي معينة.

-انعكاس النموذج يمكن في بعض الأحيان من استخدام نموذج ذو رتبة صغيرة كبديل لنموذج يعتمد على عدد كبير من المشاهدات السابقة $(y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}\ \dots,)$، وبالتالي يساعد الانعكاس على الحصول على ما يسمى في العرف الاحصائي بالنموذج الشحيح (parsimonious model) أي النموذج الذي يحتوي على اقل عدد ممكن من المعالم.

-النماذج المنعكسة تعطي تنبؤات أكثر كفاءة من النماذج غير المنعكسة.

2.1.2 امثلة عن نماذج $(ARMA)$

- **نموذج المتوسط الثابت نرمز له بالرمز $(\boldsymbol{ARMA(0,0)})$** ويكتب في الشكل التالي:

$$\Phi(L)y_t = \delta + \Theta(L)\varepsilon_t$$
$$(1)y_t = \delta + (1)\varepsilon_t$$
$$y_t = \delta + \varepsilon_t \quad , \quad \varepsilon_t \sim i.i.d(0,\sigma_\varepsilon^2)$$

- **نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى $(\boldsymbol{ARMA(1,0) \equiv AR(1)})$:**

$$\Phi(L)y_t = \delta + \Theta(L)\varepsilon_t$$
$$(1 - \emptyset_1 L \quad)y_t = \delta + \varepsilon_t$$
$$y_t = \delta + \emptyset_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \qquad \varepsilon_t \sim i.i.d(0,\sigma_\varepsilon^2)$$

- **نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الثانية $(\boldsymbol{ARMA(2,0) \equiv AR(2)})$:**

$$\Phi(L)y_t = \delta + \Theta(L)\varepsilon_t$$
$$(1 - \emptyset_1 L \quad - \emptyset_2 L^2)y_t = \delta + \varepsilon_t$$
$$y_t = \delta + \emptyset_1 y_{t-1} + \emptyset_2 y_{t-2} + \varepsilon_t \quad , \qquad \varepsilon_t \sim i.i.d(0,\sigma_\varepsilon^2)$$

- **نموذج المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى $(\boldsymbol{ARMA(0,1) \equiv MA(1)})$:**

$$\Phi(L)y_t = \delta + \Theta(L)\varepsilon_t$$
$$y_t = \delta + (1 - \theta_1 L)\varepsilon_t$$
$$y_t = \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad , \quad \varepsilon_t \sim i.i.d(0,\sigma_\varepsilon^2)$$

- **نموذج المتوسطات المتحركة من الرتبة الثانية $(\boldsymbol{ARMA(0,2) \equiv MA(2)})$:**

$$\Phi(L)y_t = \delta + \Theta(L)\varepsilon_t$$
$$y_t = \delta + (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2)\varepsilon_t$$
$$y_t = \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} \quad , \varepsilon_t \sim i.i.d(0,\sigma_\varepsilon^2)$$

- **نموذج الانحدار الذاتي –المتوسط المتحرك من الرتبة (1و1) $(\boldsymbol{ARMA(1,1)})$** ويكتب على الشكل التالي:

$$\Phi(L)y_t = \delta + \Theta(L)\varepsilon_t$$

$$(1-\emptyset_1 L\ \ )y_t=\delta+(1-\theta_1 L)\varepsilon_t$$
$$y_t=\delta+\emptyset_1 y_{t-1}+\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}\ ,\varepsilon_t \sim i.i.d(0,\sigma_\varepsilon^2)$$

3.1.2 خصائص نماذج الانحدار الذاتي-المتوسط المتحرك (ARMA)

نحاول الان دراسة الخصائص الإحصائية المميزة لنماذج الإنحدار الذاتي_المتوسط المتحرك ومعرفة كيفية التعرف عليها انطلاقا من عينة مشاهدة لسلسلة زمنية بغرض تحديد النموذج الوصفي المناسب لسلوك المشاهدات. اهم الخصائص التي سنحاول استخراجها ممثلة في كل من المتوسط (الامل الرياضي)، التباين والتباين الذاتي المشترك، وأخيرا اهم خاصية وهي دالة الارتباط الذاتي البسيطة والجزئية. تمكننا كل هذه المعلومات من ترتيب مختلف السلوكيات المشاهدة على السلاسل الزمنية في إطار النماذج المختلفة التي تتبع السيرورة (ARMA).

2.2 نموذج المتوسط الثابت $ARMA(0,0)$

يكتب النموذج كما بينا في الشكل التالي:

$$\Phi(L)y_t=\delta+\Theta(L)\varepsilon_t$$
$$(1)y_t=\delta+(1)\varepsilon_t$$
$$y_t=\delta+\varepsilon_t\quad,\quad \varepsilon_t \sim i.i.d(0,\sigma_\varepsilon^2)$$

1.2.2 خصائص النموذج

سوف نشتق الخواص الإحصائية لهذا النموذج وذلك بإيجاد التوقع الرياضي(المتوسط) ودالتي الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي كالتالي:

1.1.2.2 الامل الرياضي

$$E(y_t)=\delta+E(\varepsilon_t)=\ \ \delta$$

نتيجة ان: $\varepsilon_t \sim i.i.d(0,\sigma_\varepsilon^2)$

نسمي المتوسط $(E(y_t)=\mu)$ وبالتالي يكون $(\mu=\delta)$ ويكون النموذج من الشكل:

$$y_t-\mu=\varepsilon_t$$

2.1.2.2 دالة التغاير الذاتي

$$\gamma_h=E[(y_t-\mu)(y_{t-h}-\mu)]\quad=E[\varepsilon_t(y_{t-h}-\mu)]$$

نحسب التباين $(h=0)$

$$\gamma_h=\quad E[\varepsilon_t(y_t-\mu)]$$
$$\gamma_h=\quad E(\varepsilon_t y_t)-\mu E(\varepsilon_t)=\sigma_\varepsilon^2$$

لان: $\varepsilon_t \sim i.i.d(0,\sigma_\varepsilon^2)$

نحسب دالة التغاير الذاتي من الرتبة الاولى $(h = 1)$

$$\gamma_1 = E[(y_t - \mu)(y_{t-1} - \mu)] \quad = E[\varepsilon_t(y_{t-1} - \mu)]$$
$$\gamma_1 = \quad E(\varepsilon_t y_{t-1}) - \mu E(\varepsilon_t) = 0$$

لان $(E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = 0)$

عموما فانه من اجل $(h = 1,2..)$ تكون التباينات المشتركة الذاتية من الشكل:

$$\gamma_h = E[(y_t - \mu)(y_{t-h} - \mu)] \quad = E[\varepsilon_t(y_{t-h} - \mu)] = E(\varepsilon_t y_{t-h}) - \mu E(\varepsilon_t) = 0$$

3.1.2.2 دالة الارتباط الذاتي البسيط

$$\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} = \begin{cases} 1 \ , & h = 0 \\ 0 \ , & h = 1,,2.. \end{cases}$$

4.1.2.2 دالة الارتباط الذاتي الجزئية

رأينا سابقا كيفية استخراج دالة الارتباط الذاتي الجزئية، سنستعمل طريقة محدد مصفوفة دالة الارتباط الذاتي.

نعلم بالتعريف ان:

$$\emptyset_{00} = 1$$
$$\emptyset_{11} = \rho_1 = 0$$
$$\emptyset_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = 0$$
$$\emptyset_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = 0$$

عموما نتحصل:

$$\emptyset_{kk} = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 0, & k = 2,3.. \end{cases}$$

- **ملاحظة:**

لا يختلف نموذج المتوسط الثابت عن نموذج الصخب الابيض الا في ان له متوسط غير معدوم.

3.2 نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى $(ARMA(1,0) \equiv AR(1))$

من السهولة التنبؤ بسلسلة زمنية ما إذا أمكن تقريب تمثيلها في شكل نموذج انحدار ذاتي معلمي.

$$Y_t = f(Y_{t-1}, Y_{t-2}, ..) + \varepsilon_t$$

في هذه الحالة فان صيغة التنبؤ لـ(Y_t) بخطوة الى الامام هي بكل بساطة:

$$\widehat{Y}_t = f(Y_{t-1}, Y_{t-2}, ..)$$

مع (f) دالة خطية.

تعريف(12) : نسمي السيرورة $\{Y_t, t \in \{\dots, -1,0,1,2,..\}\}$ سيرورة انحدار ذاتي خطي من الرتبة (P) ونرمز لها $AR(p)$ اذا كان هناك صخب ابيض (ε_t) و اعداد حقيقية $(\emptyset_i, i = 1..p)$ تحقق العلاقة التالية:

$$Y_t = \delta + \sum_{i=1}^{P} \emptyset_i Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

باستعمال مفهوم معامل التأخير نتحصل على:

$$\Phi(L)Y_t = \delta + \varepsilon_t \quad , \qquad \Phi(L) = \sum_{i=0}^{P} \emptyset_i L^i$$

في هذا النوع من النماذج يفسر المتغير التابع بواسطة ماضيه فقط، الذي يمثل سلوكه في الماضي، ويرمز له ب (AR(p))، ويعطى في الصيغة التالية:

$$y_t = \delta + \emptyset_1 y_{t-1} + \emptyset_2 y_{t-2} + .. + \emptyset_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

مع: $\varepsilon_t \sim i.i.d(0, \sigma_\varepsilon^2)$ و (p) تمثل درجة تأخير النموذج.

يمكن كتابة هذا النموذج بعد ادخال معامل التأخير كالتالي:

$$y_t = \delta + \emptyset_1 L^1 y_t + \emptyset_2 L^2 y_t + .. + \emptyset_p L^p y_t + \varepsilon_t$$
$$(1 - \emptyset_1 L^1 - \emptyset_2 L^2 - .. - \emptyset_p L^p) y_t = \delta + \varepsilon_t$$
$$\Phi(L) y_t = \delta + \varepsilon_t$$
$$y_t = \Phi(L)^{-1} \delta + \Phi(L)^{-1} \varepsilon_t$$

مع $(\Phi(L)^{-1})$ مقلوب او معكوس كثير الحدود $\Phi(L)$

1.3.2 شروط الاستقرارية وشروط الانعكاس

تعريف (13) : تكون السيرورة $(\{Y_t, t \in \{\dots, -1,0,1,2,..\}\})$ التي تقبل تمثيل $(AR(P))$ مستقرة اذا كانت جذور كثير الحدود $(\Phi(L))$ المعرفة ب$(\lambda_j \in \mathbb{C}, \forall j \leq P)$ اكبر تماما من الواحد بالقيمة المطلقة كما ان السيرورة (Y_t) المستقرة تكون دائما قابلة للقلب (الانعكاس).

لتكن $(\{Y_t, t \in \{\dots, -1,0,1,2,..\}\})$ سيرورة (AR(1)) ذات متوسط معدوم معرفة ب:

$$\Phi(L)Y_t = \varepsilon_t \Rightarrow (1 - \emptyset L)Y_t = \varepsilon_t$$

بقلب كثير الحدود $(\Phi(L))$ يمكننا كتابة (Y_t) على شكل نموذج $(MA(\infty))$

$$Y_t = \Phi(L)^{-1} \varepsilon_t$$

إذا كان $(|\emptyset| < 1)$ فان $(\Phi(L))$ قابل للقلب ومقلوبه هو:

$$(1-\emptyset L)^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}\emptyset^{j}\,L^{j}$$

وبالتالي فالسيرورة (Y_t) يمكن تعريفها كسيرورة $(MA(\infty))$ تعطى معالمها من خلال العلاقة التالية:

$$\Phi(L)^{-1}\varepsilon_t=\sum_{j=0}^{\infty}\emptyset^{j}\,\varepsilon_{t-j}=Y_t$$

2.3.2 خصائص النموذج

سوف نقوم الان بدراسة خصائص نموذج انحدار ذاتي من الرتبة الأولى (AR(1))، والذي يعطى في الصيغة التالية:

$$y_t=\delta\ +\emptyset_1 y_{t-1}+\varepsilon_t$$

يمكن كتابة النموذج بعد ادخال معامل التأخير في الشكل:

$$y_t=\delta\ +\emptyset_1 L y_t+\varepsilon_t$$

نتحصل على:

$$y_t-\emptyset_1 L y_t=\delta+\varepsilon_t\Rightarrow(1-\emptyset_1 L)y_t=\delta+\varepsilon_t$$
$$y_t=\frac{\delta}{(1-\emptyset_1)}+\frac{\varepsilon_t}{(1-\emptyset_1 L)}$$

1.2.3.2 الامل الرياضي

$$E(y_t)=\frac{\delta}{(1-\emptyset_1)}=\mu$$

حتى يكون ل(μ) حلا نهائيا يشترط ان تكون $(\emptyset_1\neq 1)$ ، بينما شرط الاستقرارية يتمثل في ان تكون $(|\emptyset_1|<1)$. وكنتيجة لذلك يمكن إذا استنتاج ان:

$$\delta=\mu(1-\emptyset_1)$$

2.2.3.2 دالة التغاير الذاتي

تعطى كما بينا سابقا من خلال العلاقة التالية:

$$\gamma_h=E[(y_t-\mu)(y_{t-h}-\mu)]$$

حساب التباين $(h=0)$

للتبسيط سوف نفترض ان المتوسط معدوم $(\mu=0)$ ، وبالتالي يعطى التباين في العبارة التالية :

$$\gamma_0=E(y_t^2)=E(\emptyset_1 y_{t-1}+\varepsilon_t)^2$$
$$\gamma_0=E({\emptyset_1}^2{y_{t-1}}^2+{\varepsilon_t}^2+2\emptyset_1 y_{t-1}\varepsilon_t)$$
$$\gamma_0={\emptyset_1}^2E({y_{t-1}}^2)+E({\varepsilon_t}^2)+2\emptyset_1 E(y_{t-1}\varepsilon_t)$$
$$\gamma_0={\emptyset_1}^2E({y_{t-1}}^2)+E({\varepsilon_t}^2)+2\emptyset_1 E(y_{t-1}\varepsilon_t)$$

نحل كل جزء على حدا، نعلم ان:

$$\gamma_0 = E({y_{t-1}}^2)\ , \qquad E({\varepsilon_t}^2) = \ \sigma_\varepsilon^2\ \ , \qquad E(y_{t-1}\varepsilon_t) = 0$$

ومنه نجد:

$$\gamma_0 = {\emptyset_1}^2\gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2 + 0 \quad \Rightarrow \gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - {\emptyset_1}^2}$$

حتى يكون هذا المقدار معقولا بمعنى نهائيا وغير سالب يشترط ان تكون $(|\phi| < 1)$ وهو شرط الاستقرارية في النموذج $(\mathrm{AR}(1))$.

- **حساب دالة التغاير الذاتي من الرتبة الأولى $(\boldsymbol{h} = 1)$**

تسمى ايضا التباين المشترك الذاتي من الرتبة الأولى. لاستخراج معادلة التباين الذاتي من الرتبة الأولى سوف نضرب المعادلة في (y_{t-1}) وندخل معامل الامل الرياضي فنتحصل على:

$$\gamma_1 = E(y_t y_{t-1}) = E\big((\emptyset_1 y_{t-1} + \varepsilon_t) y_{t-1}\big)$$

$$\gamma_1 = E(\emptyset_1 {y_{t-1}}^2 + \varepsilon_t y_{t-1}) = \emptyset_1 E(y_{t-1})^2 + E(\varepsilon_t y_{t-1})$$

$$\gamma_1 = \emptyset_1 E(y_{t-1})^2 + E(\varepsilon_t y_{t-1}) = \emptyset_1 \gamma_0$$

حيث نعلم ان $(E(\varepsilon_t y_{t-1}) = 0)$ باعتبار ان الخطأ الضمني ل (y_{t-1}) هو (ε_{t-1}) وبالتالي فليس له اية علاقة مع (ε_t) اذ ان سيرورة الصخب الأبيض تعني ان $(E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = 0)$ ، اذا نجد:

$$\gamma_1 = \emptyset_1 \gamma_0$$

- **حساب دالة التغاير الذاتي من الرتبة الثانية $(\boldsymbol{h} = 2)$**

لاستخراج معادلة التباين الذاتي من الرتبة الثانية سوف نضرب المعادلة في (y_{t-2}) وندخل معامل الامل الرياضي فنتحصل على صيغة التباين المشترك الذاتي من الرتبة الثانية:

$$\gamma_2 = E(y_t y_{t-2}) = E\big((\emptyset_1 y_{t-1} + \varepsilon_t) y_{t-2}\big)$$

$$\gamma_2 = E\big(\emptyset_1 y_{t-1}\ \ y_{t-2} + \varepsilon_t y_{t-2}\big) = \emptyset_1 E(y_{t-1} y_{t-2}) \ \ + E(\varepsilon_t y_{t-2})$$

$$\gamma_2 = \emptyset_1 \gamma_1$$

حيث ان: $(E(\varepsilon_t y_{t-2}) = 0)$ ومنه نستنتج:

$$\gamma_2 = \emptyset_1 \gamma_1 = \emptyset_1(\emptyset_1 \gamma_0) = {\emptyset_1}^2 \gamma_1$$

- **حساب دالة التغاير الذاتي من الرتبة الثالثة $(\boldsymbol{h} = 3)$**

بنفس الطريقة وبضرب المعادلة في (y_{t-3}) وإدخال معامل الامل الرياضي نجد:

$$\gamma_3 = E(y_t y_{t-3}) = E\big((\emptyset_1 y_{t-1} + \varepsilon_t) y_{t-3}\big)$$

$$\gamma_3 = E\big(\emptyset_1 y_{t-1}\ \ y_{t-3} + \varepsilon_t y_{t-3}\big) = \emptyset_1 E(y_{t-1} y_{t-3}) \ \ + E(\varepsilon_t y_{t-3})$$

$$\gamma_3 = \emptyset_1 \gamma_2$$

حيث ان: $(E(\varepsilon_t y_{t-3}) = 0)$ إذا نستنتج ان:

$$\gamma_3 = \emptyset_1\gamma_2 = \emptyset_1({\emptyset_1}^2\gamma_0) = {\emptyset_1}^3\gamma_0$$

وعلى العموم وبالتشابه لكل $(k = 1..K)$ نجد ان التباين المشترك من الرتبة (γ_k) ما هو الا:

$$\gamma_k = {\emptyset_1}^k\gamma_0$$

3.2.3.2 دالة الارتباط الذاتي

تعطى معاملات الارتباط من الرتبة (k) في الصيغة التالية:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

إذا بالتعويض نجد:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{{\emptyset_1}^k\gamma_0}{\gamma_0} = {\emptyset_1}^k$$

حيث $(\rho_0 = 1)$، ومن اجل القيد المفروض على $(\emptyset_1)$ من اجل الاستقرارية، تبدأ دالة الارتباط الذاتي في التناقص والاضمحلال من اول قيمة لهذه المعاملات.

4.2.3.2 دالة الارتباط الذاتي الجزئي

نتيجة الوضع الصعب للتعرف على نماذج الانحدار الذاتي انطلاقا من معاملات دالة الارتباط الذاتي البسيطة، فإننا نستعين بذالة الارتباط الذاتي الجزئية لما لها من خصائص تميز بها نماذج (AR) حيث نلاحظ انها تبتر عادة مباشرة بعد الرتبة (p).

كما رأينا سابقا فانه بالتعريف لدينا:

$$\emptyset_{00} = 1$$
$$\emptyset_{11} = \rho_1 = \emptyset_1$$

اما لاستخراج المعاملات الأخرى فنستخرجها باستعمال محدد المصفوفات المشكلة من معاملات الارتباط الذاتي، حيث:

$$\emptyset_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \emptyset_1 \\ \emptyset_1 & {\emptyset^2}_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \emptyset_1 \\ \emptyset_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{{\emptyset^2}_1 - {\emptyset^2}_1}{1 - {\emptyset^2}_1} = 0$$

وعموما لدينا:

$$\emptyset_{kk}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \cdots & \rho_1\\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_k\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1}\\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \emptyset_1 & \cdots & \emptyset_1\\ \emptyset_1 & 1 & \cdots & {\emptyset^2}_1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \emptyset_1^{k-1} & \emptyset_1^{k-2} & \cdots & \emptyset_1^{k}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \emptyset_1 & \cdots & \emptyset_1^{k}\\ \emptyset_1 & 1 & \cdots & \emptyset_1^{k-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \emptyset_1^{k-1} & \emptyset_1^{k-2} & \cdots & 1\end{vmatrix}}=\frac{0}{|\quad|>0}=0\ ,$$

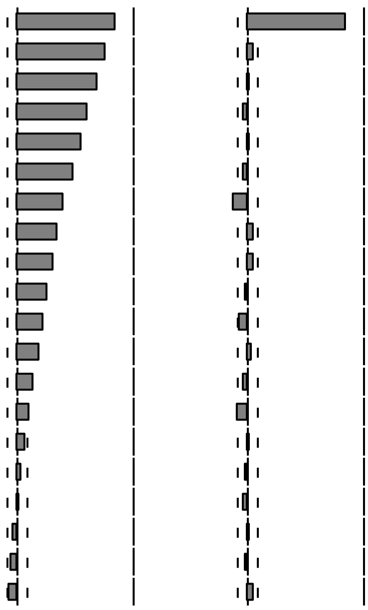
$$k=2,3,..$$

محدد البسط يساوي صفرا لأن العمود الأخير يساوي العمود الأول مضروبا في $(\emptyset_1)$ ونكتب دالة الترابط الذاتي الجزئي على الشكل الدالي:

$$\emptyset_{kk}=\begin{cases}1, & k=0\\ \emptyset_1, & k=1\\ 0, & k\geq 2\end{cases}$$

الشكل رقم (4) دالة الارتباط الذاتي لنموذج AR(1)

$$(\emptyset_1=0.4)$$



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
		1	0.886	0.886
		2	0.794	0.043
		3	0.716	0.023
		4	0.637	-0.039
		5	0.567	-0.001
		6	0.500	-0.027
		7	0.415	-0.116
		8	0.357	0.054
		9	0.319	0.060
		10	0.278	-0.012
		11	0.229	-0.069
		12	0.194	0.027
		13	0.156	-0.032
		14	0.106	-0.096
		15	0.072	0.014
		16	0.035	-0.023
		17	-0.008	-0.048
		18	-0.037	0.000
		19	-0.064	-0.009
		20	-0.078	0.050

3.3.2 مميزات النموذج AR(1)

-عندما تكون $(|\emptyset_1|<1)$ (شرط الاستقرارية) فان المتوسط ثابت عند جميع القيم (t)

-دالة الارتباط الذاتي دالة للتخلف (k) فقط ولا تعتمد على (t)

–دالة الارتباط الذاتي تتناقص اسيا في اتجاه واحد ابتداء من (ρ_1) عندما تكون $(\emptyset_1 > 0)$، وتتناقص اسيا مترددة بين القيم الموجبة والقيم السالبة عندما تكون $(\emptyset_1 < 0)$

–دالة الارتباط الذاتي الجزئي لها قيمة واحدة غير معدومة، ويكون اتجاهها حسب إشارة $(\emptyset_1)$

4.2 نموذج انحدار ذاتي من الدرجة الثانية $(ARMA(2,0) \equiv AR(2))$

يكتب نموذج **(AR(2))** في الشكل التالي:

$$y_t = \delta + \emptyset_1 y_{t-1} + \emptyset_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$
$$y_t = \delta + \emptyset_1 L^1 y_t + \emptyset_2 L^2 y_t + \varepsilon_t$$
$$(1 - \emptyset_1 L^1 - \emptyset_2 L^2) y_t = \delta + \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim i.i.d(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

1.4.2 خصائص النموذج

1.1.4.2 الامل الرياضي

من المعادلة الأخيرة نستخرج المتوسط بعد اجراء التحويل البسيط التالي:

$$(1 - \emptyset_1 L^1 - \emptyset_2 L^2) y_t = \delta + \varepsilon_t$$
$$y_t = \frac{\delta}{(1 - \emptyset_1 - \emptyset_2)} + \frac{\varepsilon_t}{(1 - \emptyset_1 L^1 - \emptyset_2 L^2)}$$
$$E(y_t) = \mu = \frac{\delta}{(1 - \emptyset_1 - \emptyset_2)}$$

2.1.4.2 دالة التغاير الذاتي

- **حساب التباين$(h = 0)$**

$$\gamma_0 = E(y_t^2) = E((\emptyset_1 y_{t-1} + \emptyset_2 y_{t-2} + \varepsilon_t) \quad y_t)$$
$$\gamma_0 = E((\emptyset_1 y_{t-1} y_t + \emptyset_2 y_{t-2} y_t + \varepsilon_t y_t) \quad)$$
$$\gamma_0 = \emptyset_1 E(y_{t-1} y_t) + \emptyset_2 E(y_{t-2} y_t) + E(\varepsilon_t y_t)$$
$$\gamma_0 = \emptyset_1 \gamma_1 + \emptyset_2 \gamma_2 + E(\varepsilon_t y_t)$$

نقوم بحساب $(E(\varepsilon_t y_t))$ فنجد:

$$E(\varepsilon_t y_t) = E(\varepsilon_t(\emptyset_1 y_{t-1} + \emptyset_2 y_{t-2} + \varepsilon_t))$$
$$= \emptyset_1 E(\varepsilon_t y_{t-1}) + \emptyset_2 E(\varepsilon_t y_{t-2}) + E({\varepsilon_t}^2)$$

نحسب كل جزء فنجد:

$$E(\varepsilon_t y_{t-1}) = E(\varepsilon_t y_{t-2}) = 0 \;, \qquad E({\varepsilon_t}^2) = \sigma_\varepsilon^2$$

نستنتج ان: $(E(\varepsilon_t y_t) = \sigma_\varepsilon^2)$ ومنه:

$$\gamma_0 = \emptyset_1\gamma_1 + \emptyset_2\gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2$$

- **حساب دالة التغاير الذاتي من الرتبة الاولى $(h = 1)$**

$$\gamma_1 = E(y_t y_{t-1}) = E((\emptyset_1 y_{t-1} + \emptyset_2 y_{t-2} + \varepsilon_t)\ \ y_{t-1})$$
$$\gamma_1 = E((\emptyset_1 {y_{t-1}}^2 + \emptyset_2 y_{t-2} y_{t-1} + \varepsilon_t y_{t-1})\ \ )$$
$$\gamma_1 = \emptyset_1 E({y_{t-1}}^2) + \emptyset_2 E(y_{t-2} y_{t-1}) + E(\varepsilon_t y_{t-1})$$
$$\gamma_1 = \emptyset_1\gamma_0 + \emptyset_2\gamma_1 + E(\varepsilon_t y_{t-1})$$

نحسب الجزء الاخير $(E(\varepsilon_t y_t))$ فنجد:

$$E(\varepsilon_t y_{t-1}) = E(\varepsilon_t(\emptyset_1 y_{t-2} + \emptyset_2 y_{t-3} + \varepsilon_{t-1}))$$
$$= \emptyset_1 E(\varepsilon_t y_{t-2}) + \emptyset_2 E(\varepsilon_t y_{t-3}) + E(\varepsilon_t\ \ \varepsilon_{t-1})$$

وحيث ان $E(\varepsilon_t\ \ \varepsilon_{t-1}) = 0\ ,\ E(\varepsilon_t y_{t-2}) = E(\varepsilon_t y_{t-3}) = 0$ إذا:

$$E(\varepsilon_t y_{t-1}) = 0$$

ومنه نجد ان التباين من الرتبة الأولى يساوي:

$$\gamma_1 = \emptyset_1\gamma_0 + \emptyset_2\gamma_1 \quad \Rightarrow \gamma_1 = \frac{\emptyset_1\gamma_0}{1 - \emptyset_2}$$

- **حساب دالة التغاير الذاتي من الرتبة الثانية $(h = 2)$**

$$\gamma_2 = E(y_t y_{t-2}) = E((\emptyset_1 y_{t-1} + \emptyset_2 y_{t-2} + \varepsilon_t)\ \ y_{t-2})$$
$$\gamma_2 = E((\emptyset_1 y_{t-1}\ \ y_{t-2} + \emptyset_2 {y_{t-2}}^2 + \varepsilon_t y_{t-2})\ \ )$$
$$\gamma_2 = \emptyset_1 E(y_{t-1}\ \ y_{t-2}) + \emptyset_2 E({y_{t-2}}^2) + E(\varepsilon_t y_{t-2})$$

نعلم ان $\left(\gamma_1 = E\left(y_{t-1}\ \ y_{t-2}\right), \gamma_0 = E({y_{t-2}}^2), E(\varepsilon_t y_{t-2}) = 0\ \ \right)$ ومنه نجد:

$$\gamma_2 = \emptyset_1\gamma_1 + \emptyset_2\gamma_0$$

يمكن تلخيص النتائج السابقة في المعادلات التالية:

$$\gamma_1 = \emptyset_1\gamma_0 + \emptyset_2\gamma_1$$
$$\gamma_2 = \emptyset_1\gamma_1 + \emptyset_2\gamma_0$$
$$\gamma_3 = \emptyset_1\gamma_2 + \emptyset_2\gamma_1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

وبالتعميم نجد:

$$\gamma_k = \emptyset_1\gamma_{k-1} + \emptyset_2\gamma_{k-2}$$

3.1.4.2 دالة الارتباط الذاتي

بتقسيم المعادلات السابقة كما جرت العادة على (γ_0) يمكننا استخراج معاملات الارتباط الذاتي من مختلف الرتب. فنتحصل على:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$
$$\rho_0 = 1$$
$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\emptyset_1\gamma_0 + \emptyset_2\gamma_1}{\gamma_0} = \emptyset_1 + \emptyset_2\frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \emptyset_1 + \emptyset_2\rho_1 \Rightarrow \rho_1 = \frac{\emptyset_1}{1-\emptyset_2}$$
$$\rho_1 = \frac{\emptyset_1}{1-\emptyset_2}$$
$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{\emptyset_1\gamma_1 + \emptyset_2\gamma_0}{\gamma_0} = \emptyset_1\rho_1 + \emptyset_2 = (\frac{{\emptyset_1}^2}{1-\emptyset_2}) + \emptyset_2$$
$$\rho_2 = (\frac{{\emptyset_1}^2}{1-\emptyset_2}) + \emptyset_2$$
$$\rho_3 = \emptyset_1\rho_2 + \emptyset_2\rho_1$$

وعلى العموم يمكن استخراج معاملات الارتباط من مختلف الرتب في نموذج (AR(2)) باستعمال العلاقة التالية:

$$\rho_k = \emptyset_1\rho_{k-1} + \emptyset_2\rho_{k-2}$$

كما يمكن تعميم هذه العلاقة لاستخراج معاملات الارتباط الذاتي من الرتب المختلفة في نموذج (AR(p)) في الصيغة التالية:

$$\rho_k = \emptyset_1\rho_{k-1} + \emptyset_2\rho_{k-2} + .. + \emptyset_p\rho_{k-p}$$

4.1.4.2 دالة الارتباط الذاتي الجزئي

كما رأينا سابقا فانه بالتعريف لدينا:

$$\emptyset_{00} = 1$$
$$\emptyset_{11} = \rho_1$$
$$\emptyset_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - {\rho^2}_1}{1 - {\rho^2}_1} \neq 0$$
$$\emptyset_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{|\ \ | > 0} = 0$$

وذلك لأن العمود الأخير في محدد البسط هو تركيب خطي من العمودين الأول والثاني،

$$\begin{cases} \rho_1 = \emptyset_1 + \emptyset_2\rho_1 \\ \rho_2 = \emptyset_1\rho_1 + \emptyset_2 \\ \rho_2 = \emptyset_1\rho_2 + \emptyset_2\rho_1 \end{cases}$$

وعموما تكتب دالة الترابط الذاتي الجزئي على الشكل الدالي:

$$\emptyset_{kk} = \begin{cases} 1 \quad , & k = 0 \\ \rho_1 \quad , & k = 1 \\ \dfrac{\rho_2 - \rho^2{}_1}{1 - \rho^2{}_1}, & k = 2 \\ 0 \, , & k \geq 3 \end{cases}$$

5.1.4.2 معادلات يول –ولكر Yule-Walker

تسمح لنا معادلات **يول –ولكر** باستخراج معاملات الارتباط الذاتي الجزئية، كما تسمح لنا بتقدير معاملات الانحدار للنموذج باستعمال معاملات الارتباط الذاتي الجزئية في حالة توفرها.

لاستخراج معادلات (Yule-Walker) نقوم بكتابة النموذج العام ((AR(p)) التالي:

$$y_t = \emptyset_1 y_{t-1} + \emptyset_2 y_{t-2} + .. + \emptyset_p y_{t-p} \ + \varepsilon_t$$

بضرب هذه المعادلة ب (y_t) و(y_{t-1}) و(y_{t-p}) و (y_{t-k}) ثم اخذ التوقع الرياضي لها نحصل على التباينات والتباينات المشتركة $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, .. \gamma_p, .. \gamma_k)$ كالاتي:

نضرب معادلة الشكل العام في (y_t) وندخل معامل الامل الرياض فنتحصل على التباين (γ_0):

$$y_t^2 = \emptyset_1 y_{t-1} y_t + \emptyset_2 y_{t-2} y_t + .. + \emptyset_p y_{t-p} \, y_t + \varepsilon_t y_t$$

$$\gamma_0 = E(y_t^2) \quad = \emptyset_1 \gamma_1 + \emptyset_2 \gamma_2 + .. + \emptyset_p \gamma_p + \sigma_\varepsilon^2$$

نضرب معادلة الشكل العام في (y_{t-1}) وندخل معامل الامل الرياض فنتحصل على التباين المشترك من الرتبة الاولى (γ_1):

$$\gamma_1 = E(y_t y_{t-1}) = \emptyset_1 \gamma_0 + \emptyset_2 \gamma_1 + .. + \emptyset_p \gamma_{p-1}$$

بنفس الطريقة نضرب في (y_{t-2}) فنستخرج (γ_2) ، ونضرب في (y_{t-p}) فنستخرج (γ_p) :

$$\gamma_2 = E(y_t y_{t-2}) = \emptyset_1 \gamma_1 + \emptyset_2 \gamma_0 + \emptyset_3 \gamma_1 + .. + \emptyset_p \gamma_{p-2}$$

$$\gamma_p = E\left(y_t y_{t-p}\right) = \emptyset_1 \gamma_{p-1} + \emptyset_2 \gamma_{p-2} + .. + \emptyset_p \gamma_0$$

كما رأينا في دالة الارتباط الذاتي في حالة النموذج ((AR(1)) والنموذج ((AR(2)) فإنها لا تبتر مباشرة عند الدرجة p ، بل يستمر هذا الارتباط إلى أجل مسمى وغير معروف لحد الآن، ولهذا فإن التباينات المشتركة لا تنتهي عند هذه الدرجة بل تبقى مستمرة وكما يلي:

$$\gamma_k = E(y_t y_{t-k}) = \emptyset_1 \gamma_{k-1} + \emptyset_2 \gamma_{k-2} + .. + \emptyset_p \gamma_{k-p}$$

بقسمة هذه المعادلات المختلفة على التباين، نحصل على معاملات دالة الارتباط هذه في شكل معادلات تسمى معادلات يول–ولكر التالية:

$$\rho_1 = \emptyset_1 + \emptyset_2 \rho_1 + .. + \emptyset_p \rho_{p-1}$$

$$\rho_2 = \emptyset_1 \rho_1 + \emptyset_2 + .. + \emptyset_p \rho_{p-2}$$

… … … …

$$\rho_p = \emptyset_1\rho_{p-1} + \emptyset_2\rho_{p-2} + .. + \emptyset_p$$

… … … …

$$\rho_k = \emptyset_1\rho_{k-1} + \emptyset_2\rho_{k-2} + .. + \emptyset_p\rho_{k-p}$$

فبمعرفة معلمات دالة الارتباط الذاتي (ρ_k) حيث (k=1..K) يمكن معرفة $(\emptyset_1, \emptyset_2, .. \emptyset_p)$ ، والعكس صحيح، و لهذا يمكن الحصول على هذه الأخيرة بعد تعويض (ρ_k) بمقدراتها أي (r_k) من دالة الارتباط الذاتي للعينة ، ولكن المشكل الذي يبقى مطروحا بإلحاح هو كيفية تحديد الدرجة (p) ولهذا سنعود إلى معادلات يول–ولكر وتعويض (ρ_k) بمقدراتها (r_k) ثم افتراض ان السلسلة تخضع لنموذج من الدرجة الأولى ثم الثانية وهكذا.

$$p = 1 \ , AR(1) \ \rightarrow \hat{\rho}_1 = r_1 = \widehat{\emptyset}_1$$

$$p = 2 \ , AR(2) \ \rightarrow \begin{cases} \hat{\rho}_1 = r_1 = \widehat{\emptyset}_1 + \widehat{\emptyset}_2 r_1 \\ \hat{\rho}_2 = r_2 = \widehat{\emptyset}_1 r_1 + \widehat{\emptyset}_2 \end{cases}$$

وبالتعويض نحصل على $(\widehat{\emptyset}_1)$ و$(\widehat{\emptyset}_2)$ وعلى العموم:

لما $(p = 1)$ نحصل على $(\widehat{\emptyset}_1 = \emptyset_{11})$

لما $(p = 2)$ نحصل على $(\widehat{\emptyset}_1)$ و$(\widehat{\emptyset}_2)$ ونأخذ $(\widehat{\emptyset}_2 = \emptyset_{22})$

لما $(p = 3)$ نحصل على $(\widehat{\emptyset}_1)$ و$(\widehat{\emptyset}_2)$ و $(\widehat{\emptyset}_3)$ ونأخذ $(\widehat{\emptyset}_3 = \emptyset_{33})$

لما $(k > p)$ فاننا نتوقع ان يكون $(\emptyset_{kk} = 0)$ ويمكن التأكد من ذلك باستخدام احصائية (ستوذنت) لاختبار الفرضية التالية عند كل مرحلة:

$$\begin{cases} H_0 = \emptyset_{kk} = 0 \\ H_1 = \emptyset_{kk} \neq 0 \end{cases}$$

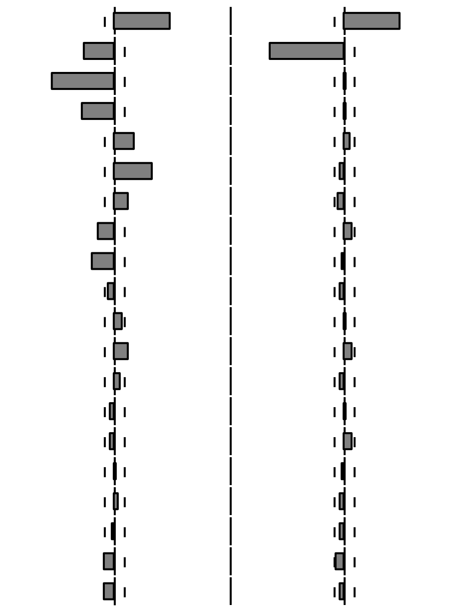
$$t_{cal} = \frac{\widehat{\emptyset}_{kk} - \emptyset_{kk}}{se(\widehat{\emptyset}_{kk})} \sim N(0,1)$$

حيث $\left(se(\widehat{\emptyset}_{kk}) = {}^{1}/_{\sqrt{T}}\right)$.

نسمي هذه المقدرات بمعاملات دالة الارتباط الذاتي الجزئية، التي تبتر مباشرة كما رأينا سابقا بعد الدرجة (p) في نموذج (AR(p)).

شكل رقم (5) التمثيل البياني لدالة الارتباط الذاتي الجزئية لنموذج AR(2)

$$\emptyset_1 = 0.9,\ \emptyset_1 = -0.7$$



	AC	PAC
1	0.496	0.496
2	-0.265	-0.679
3	-0.560	-0.007
4	-0.279	0.025
5	0.180	0.060
6	0.344	-0.043
7	0.123	-0.059
8	-0.142	0.067
9	-0.191	-0.016
10	-0.065	-0.049
11	0.067	-0.007
12	0.115	0.067
13	0.049	-0.045
14	-0.043	-0.004
15	-0.042	0.081
16	0.009	-0.013
17	0.025	-0.030
18	-0.013	-0.033
19	-0.082	-0.076
20	-0.098	-0.028

- **نتيجة عامة نهائية**

تبتر معاملات الارتباط الذاتي الجزئية في نماذج (AR) بعد التأخير (p) ، عكس ذلك فأن معاملات دالة الارتباط الذاتي البسيط تنطلق من الواحد وتبقى مستمرة التدهور أو الاضمحلال، لهذا لا يمكن الاستعانة بهذه الدالة لتحديد درجة نماذج الانحدار الذاتي، لكنه يستعان بها للأغراض الأخرى التالية:

- تقيس درجة الارتباط بين مشاهدات الظاهرة المدروسة .
- تساعد في تحديد درجة نماذج المتوسطات المتحركة .
- تعكس مدى إستقرارية السلسلة الزمنية، والذي يتجلى في أن معاملات دالة الارتباط الذاتي تتلاشى بسرعة أي قبل الدرجة K والتي تعادل الفترة (T/4).
- كشف أسباب عدم الاستقرار من اتجاه العام وفصلية...الخ.

2.4.2 السيرورة السببية

لا نهتم في الحالة التطبيقية (الهدف هو التنبؤ) الا بالسيرورة المسماة بالسيرورة السببية–بمعنى ان تمثيل السيرورة لا يعتمد على الصخب (التشويش) المستقبلي (ε_{t+1}) (السيرورة تعتمد فقط على الصخب الماضي والحالي) $(\varepsilon_{t-1} ,\varepsilon_t)$. لأنه في هذه الحالة الصخب الموجود في توصيف السيرورة لا يعتبر استحداث (innovation) للسيرورة.

- **تعريف (14) :**

نسمي سيرورة خطية $\{Y_t, t \in \{\dots, -1,0,1,2,..\}\}$ بسيرورة سببية (causal) إذا كان يمكن تمثيلها في الشكل:

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$$

مع (ε_t) صخب ابيض و $(\sum \psi_i{}^2 < \infty)$

- **نظرية:**

تكون السيرورة (AR(P)) سببية بمعنى انه يمكن تمثيلها في الشكل:

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$$

مع $(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i{}^2 < \infty)$ تكون محققة، فقط وفقط اذا كانت جذور كثير الحدود $(\Phi(L) = 0)$ خارج دائرة الوحدة (او اذا كانت جذور المعادلة المميزة لكثير الحدود داخل دائرة الوحدة)

في هذه الحالة فانه يمكن حساب المعاملات (ψ_k) الخاصة بنشر (taylor) لدالة التحويل عن طريق تحديد معاملات (L^k) من خلال المساواة:

$$\psi(L) = \Phi(L) = 1$$

وتسمى هذه الخاصية بخاصية الانعكاس (الانقلاب)

5.2 نماذج المتوسطات المتحركة (MA(q))

تعريف (15): تقبل السيرورة الخطية $\{Y_t, t \in \{\dots, -1,0,1,2,..\}\}$ تمثيل متوسطات متحركة من الرتبة (q) (MA(q)) إذا كانت تحقق العلاقة التالية:

$$Y_t = \delta + \sum_{i=0}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

مع (ε_t) صخب ابيض بتباين (σ^2) و $(\theta_0 = 1)$، باستعمال مفهوم معامل التاخير نتحصل على:

$$Y_t = \delta + \Theta(L)\varepsilon_t$$

حيث $(\Theta(L))$ كثير حدود من الرتبة (q).

يكتب النموذج MA(q) في الشكل الخطي العام التالي:

$$y_t = \delta + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

ويسمى نموذج المتوسطات المتحركة من الدرجة (q)، مع (ε_t) سيرورة صخب ابيض بمعنى

$$E(\varepsilon_t) = 0 \qquad , E({\varepsilon_t}^2) = \sigma_\varepsilon^2, \qquad E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0 \;, \forall k \neq 0$$

$$E(y_t) = \delta = \mu$$

نلاحظ ان الثابت يساوي المتوسط وهي خاصية تتميز بها نماذج (MA(q)) عكس ما رأيناه في نماذج (AR)

بينما تباينها هو:

$$Var(y_t) = \gamma_0 = E(y_t - \mu)^2 = E(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q})^2$$

بما ان (ε_t) سيرورة صخب ابيض بمعنى:

$$E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0 \;, \forall k \neq 0$$

إذا نتحصل على:

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2)$$

وهو مقدار نهائي أي:

$$\sum_{i=1}^{q} \theta_i^2 < \infty$$

1.5.2 شرط الاستقرارية وشرط الانعكاس

تعريف (16): تكون السيرورة $(\{Y_t, t \in \{\dots, -1,0,1,2,..\}\})$ التي تقبل تمثيل $(MA(q))$ دائما مستقرة، كما انها تكون قابلة للانعكاس بشرط ان جذور كثير الحدود $(\Theta(L)$) المعرفة ب$(\lambda_j \in \mathbb{C}, \forall j \leq q)$ تكون اكبر تماما من الواحد .

هذا يعني ان كل سيرورة من النوع $(MA(q))$ محددة المعالم ما هي الا المجموع الترجيحي لسيرورة صخب ابيض وبالتالي فهي مستقرة بالتعريف، كما يمكن قلبها او تحويلها الى نموذج (AR) في الحالة الوحيدة التي يكون فيها كثير الحدود المرتبط ب$(\Theta(L))$ قابل للقلب ، بمعنى اذا كانت كل جذوره اكبر من الواحد.

ليكن $(\{Y_t, t \in \{\dots, -1,0,1,2,..\}\})$ سيرورة (MA(1)) ذات متوسط معدوم معرفة ب:

$$Y_t = \Theta(L)\varepsilon_t = (1 - \theta L)\varepsilon_t$$

بقلب كثير الحدود $(\Theta(L))$ يمكننا كتابة (Y_t) على شكل نموذج $(AR(\infty))$

$$\Theta(L)^{-1} Y_t = \varepsilon_t$$

إذا كان $(|\theta| < 1)$ فان $(\Theta(L))$ قابل للقلب ومقلوبه هو:

$$(1-\theta L)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j L^j$$

وبالتالي فالسيرورة (Y_t) يمكن تعريفها كسيرورة $(AR(\infty))$ تعطى معالمها من خلال العلاقة التالية:

$$\Theta(L)^{-1} Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j Y_{t-j} = \varepsilon_t$$

6.2 نموذج المتوسط المتحرك من الرتبة الأولى $(\boldsymbol{ARMA}(\mathbf{0},\mathbf{1}) \equiv \boldsymbol{MA}(\mathbf{1}))$:

إذا كانت $(q = 1)$ فان النموذج هو نموذج $(MA(1))$ ويكتب في الشكل التالي:

$$y_t = \delta + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}\ , \qquad \varepsilon_t \sim i.i.d(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

1.6.2 خصائص النموذج

1.1.6.2 الامل الرياضي

$$E(y_t) = E(\delta + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})$$

تحت فرضية سيرورة الصخب الأبيض ل (ε_t) نجد:

$$E(y_t) = \delta = \mu$$

2.1.6.2 دالة التغاير الذاتي

$$\gamma_h = E[(y_t - \mu)(y_{t-h} - \mu)]$$

- **التباين $(\boldsymbol{h} = \mathbf{0})$**

$$\gamma_0 = Var(y_t) = E(y_t - \mu)^2$$
$$\gamma_0 = E(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})^2 = E({\varepsilon_t}^2 + 2\theta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + {\theta_1}^2 {\varepsilon_{t-1}}^2)$$
$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 (1 + {\theta_1}^2)$$

- **دالة التغاير الذاتي من الرتبة الأولى $(\boldsymbol{h} = \mathbf{1})$**

$$\gamma_1 = E(y_t - \mu)\ \ (y_{t-1} - \mu)$$
$$\gamma_1 = E(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})\ \ (\varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2})$$
$$\gamma_1 = \theta_1 \sigma_\varepsilon^2$$

مع الإشارة الى ان $(\gamma_1 = \gamma_{-1})$ حيث:

$$\gamma_{-1} = E(y_{t-1} - \mu)\ \ (y_t - \mu) = \theta_1 \sigma_\varepsilon^2$$

- **دالة التغاير الذاتي من الرتبة الثانية $(\boldsymbol{h} = \mathbf{2})$**

$$\gamma_2 = E(y_t - \mu)\ \ (y_{t-2} - \mu) = E(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})\ \ (\varepsilon_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-3})$$
$$\gamma_2 = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-3} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2} + {\theta_1}^2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-3})$$
$$\gamma_2 = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) + \theta_1 E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-3}) + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}) + {\theta_1}^2 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-3})$$

نعلم ان (ε_t) سيرورة صخب ابيض وبالتالي فان الأخطاء مستقلة فيما بينها بمعنى:

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-3}) = E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}) = E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-3}) = 0$$

مما يعطينا كنتيجة لذلك:

$$\gamma_2 = 0$$

وعلى العموم يكون لدينا:

$$\gamma_k = 0 \ ,\forall k > 1$$

يمكن تلخيص هذه النتائج الخاصة بالتباينات المشتركة لنموذج (MA(1)) في التالي:

لما يكون $(k \leq q)$ يكون (γ_k) غير معدوم، لما يكون $(k > q)$ يكون (γ_k) معدوما.

3.1.6.2 دالة الارتباط الذاتي

تبعا لما سبق تكون دالة الارتباط الذاتي للنموذج كالتالي:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

لما $(k = 1)$ يكون لدينا:

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\theta_1 \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2(1+{\theta_1}^2)} = \frac{\theta_1}{(1+{\theta_1}^2)}$$

ولما $(k = 2)$ يكون لدينا:

$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = 0$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = 0 \quad , \quad k = 2,3..$$

4.1.6.2 دالة الارتباط الذاتي الجزئي

تعطى دالة الارتباط الذاتي الجزئية كالتالي:

بالتعريف:

$$\emptyset_{00} = 1$$
$$\emptyset_{11} = \rho_1$$

اما البقية فتستخرج كالتالي:

$$\emptyset_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 \end{vmatrix}}{1-{\rho^2}_1} = \frac{-{\rho^2}_1}{1-{\rho^2}_1} = \frac{-{\theta^2}_1}{1+{\theta^2}_1+{\theta^4}_1} = \frac{-{\theta^2}_1(1-{\theta^2}_1)}{1-{\theta^6}_1}$$

$$\emptyset_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & 0 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ 0 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{{\rho^3}_1}{1-2{\rho^2}_1} = \frac{-{\theta^3}_1(1-{\theta^2}_1)}{1-{\theta^8}_1}$$

وعموما تكتب دالة الترابط الذاتي الجزئي على الشكل الدالي:

$$\emptyset_{kk} == \frac{-\theta_1^k(1-\theta^2{}_1)}{1-\theta_1^{2(k+1)}} \quad , \quad k>0$$

الشكل رقم (6) دالة الارتباط الذاتي الجزئي لنموذج MA(1)

$$\emptyset_1 = 0.8$$

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
		1	0.447	0.447
		2	-0.029	-0.286
		3	0.023	0.229
		4	0.017	-0.161
		5	0.059	0.207
		6	0.060	-0.130
		7	-0.081	-0.036
		8	-0.105	-0.041
		9	0.016	0.084
		10	0.038	-0.046
		11	-0.013	0.006
		12	0.029	0.066
		13	0.037	-0.019
		14	-0.028	-0.038
		15	-0.002	0.031
		16	0.003	-0.041
		17	-0.056	-0.025
		18	-0.070	-0.063
		19	-0.080	-0.034
		20	-0.086	-0.027

7.2 نموذج المتوسطات المتحركة من الرتبة الثانية $(ARMA(0,2) \equiv MA(2))$

يعطى النموذج في الصيغة التالية:

$$y_t = \delta + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} \quad , \qquad \varepsilon_t \sim i.i.d(0,\sigma_\varepsilon^2)$$

1.7.2 خصائص النموذج

1.1.7.2 الامل الرياضي

$$E(y_t) = E(\delta + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}) = \delta$$

حيث $(E(y_t) = \delta = \mu)$ بينما تبايناته تعطى كالتالي:

2.1.7.2 دالة التغاير الذاتي

$$\gamma_h = E[(y_t - \mu)(y_{t-h} - \mu)]$$

- التباين $(h = 0)$

$$\gamma_0 = Var(y_t) = E(y_t-\mu)^2 = E(\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1}+\theta_2\varepsilon_{t-2})^2$$

$$\gamma_0 = E((\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1}+\theta_2\varepsilon_{t-2})\ \ (\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1}+\theta_2\varepsilon_{t-2}))$$

$$\gamma_0 = E(({\varepsilon_t}^2+\theta_1\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}+\theta_2\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}+\ \ \theta_1\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t+{\theta_1}^2{\varepsilon_{t-1}}^2+\theta_1\theta_2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} + \theta_2\varepsilon_{t-2}\varepsilon_t+\theta_2\theta_1\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-1}+{\theta_2}^2{\varepsilon_{t-2}}^2))$$

$$\gamma_0 = E({\varepsilon_t}^2)+\theta_1E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})+\theta_2E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2})+\ \ \theta_1E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t)+{\theta_1}^2E({\varepsilon_{t-1}}^2) + \theta_1\theta_2E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2})+\theta_2E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_t)+\theta_2\theta_1E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-1}) + {\theta_2}^2E({\varepsilon_{t-2}}^2)$$

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2+\theta_1(0)+\theta_2(0)+\ \ \theta_1(0\ \ )+{\theta_1}^2\sigma_\varepsilon^2+\theta_1\theta_2(0)+\theta_2(0)+\theta_2\theta_1(0\ \ ) + {\theta_2}^2\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2+{\theta_1}^2\sigma_\varepsilon^2+{\theta_2}^2\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2(1+{\theta_1}^2++{\theta_2}^2)$$

- دالة التغاير الذاتي من الرتبة الأولى $(\boldsymbol{h}=\mathbf{1})$

$$\gamma_1 = E(y_t-\mu)\ \ (y_{t-1}-\mu) = E((\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1}+\theta_2\varepsilon_{t-2})\ \ (\varepsilon_{t-1}+\theta_1\varepsilon_{t-2}+\theta_2\varepsilon_{t-3}))$$

$$\gamma_1 = E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})+(\theta_1E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}))+(\theta_2E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-3}))+\left(\theta_1E({\varepsilon_{t-1}}^2)\right) + \left({\theta_1}^2E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2})\right)+(\theta_1\theta_2E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-3}))+(\theta_2E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-1})) + \left(\theta_2\theta_1E({\varepsilon_{t-2}}^2)\right)+(\theta_2\theta_1E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-3}))$$

$$\gamma_1 = 0+\theta_1(0)+\theta_2(0)+\theta_1(\sigma_\varepsilon^2)+{\theta_1}^2(0)+\theta_1\theta_2(0)+\theta_2(0)+)(\theta_2\theta_1(\sigma_\varepsilon^2) + \theta_2\theta_1(0)$$

$$\gamma_1 = \theta_1(\sigma_\varepsilon^2)+\theta_2\theta_1(\sigma_\varepsilon^2) = \sigma_\varepsilon^2(\theta_1+\theta_2\theta_1)$$

- دالة التغاير الذاتي من الرتبة الثانية $(\boldsymbol{h}=\mathbf{2})$

$$\gamma_2 = E(y_t-\mu)\ \ (y_{t-2}-\mu)$$

$$\gamma_2 = E((\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1}+\theta_2\varepsilon_{t-2})\ \ (\varepsilon_{t-2}+\theta_1\varepsilon_{t-3}+\theta_2\varepsilon_{t-4}))$$

$$\gamma_2 = E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2})+(\theta_1E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-3}))+(\theta_2E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-4}))+\left(\theta_1E(\varepsilon_{t-1}\ \ \varepsilon_{t-2})\right) + \left({\theta_1}^2E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-3})\right)+(\theta_1\theta_2E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-4}))+\left(\theta_2E({\varepsilon_{t-2}}^2)\right) + \left(\theta_2\theta_1E(\varepsilon_{t-2}\ \ \varepsilon_{t-3})\right)+\left({\theta_2}^2E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-4})\right)$$

$$\gamma_2 = 0 + \theta_1(0) + \theta_2(0) + \theta_1(0) + {\theta_1}^2(0) + \theta_1\theta_2(0) + \theta_2(\sigma_\varepsilon^2) \\ + (\quad))\theta_2\theta_1(0) + {\theta_2}^2(0)$$

$$\gamma_2 = \theta_2\sigma_\varepsilon^2$$

- **دالة التغاير الذاتي من الرتبة الثالثة $(h = 3)$**

$$\gamma_3 = E(y_t - \mu)\ \ (y_{t-3} - \mu)$$

$$\gamma_3 = E((\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2})\ \ (\varepsilon_{t-3} + \theta_1\varepsilon_{t-4} + \theta_2\varepsilon_{t-5}))$$

$$\gamma_3 = E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-3}) + (\theta_1E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-4})) + (\theta_2E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-5})) + \Big(\theta_1E(\varepsilon_{t-1}\ \ \varepsilon_{t-3}\Big)) \\ + \Big({\theta_1}^2E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-4}\Big)) + (\theta_1\theta_2E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-5})) + \Big(\theta_2E(\varepsilon_{t-2}\ \ \varepsilon_{t-3}\Big)) \\ + \Big(\theta_2\theta_1E(\varepsilon_{t-2}\ \ \varepsilon_{t-4}\Big)) + \big({\theta_2}^2E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-5})\big)$$

$$\gamma_3 = 0 + \theta_1(0) + \theta_2(0) + \theta_1(0) + {\theta_1}^2(0) + \theta_1\theta_2(0) + \theta_2(\sigma_\varepsilon^2) \\ + (\quad))\theta_2\theta_1(0) + {\theta_2}^2(0)$$

$$\gamma_3 = 0$$

ويكون لدينا عموما:

$$\gamma_k = 0 \quad ,\ \forall k > 2$$

3.1.7.2 دالة الارتباط الذاتي

ومنه نستطيع حساب ورسم دالة الارتباط الذاتي:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

فاذا كان $(k = 1)$ يكون لدينا:

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\sigma_\varepsilon^2(\theta_1 + \theta_2\theta_1)}{\sigma_\varepsilon^2(1 + {\theta_1}^2 + {\theta_2}^2)} = \frac{(\theta_1 + \theta_2\theta_1)}{(1 + {\theta_1}^2 + {\theta_2}^2)}$$

اما إذا كان $(k = 2)$ يكون لدينا:

$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{\theta_2\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2(1 + {\theta_1}^2 + {\theta_2}^2)} = \frac{\theta_2}{(1 + {\theta_1}^2 + {\theta_2}^2)}$$

ويكون لدينا عموما:

$$\rho_k = 0 \quad ,\ \forall k > 2$$

الشكل رقم (7) دالة الارتباط الذاتي لنموذج (MA(2))

$$(\theta_1 = 0.6\,,\;\; \theta_1 = -0.3\,)$$

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
		1	0.240	0.240
		2	-0.233	-0.309
		3	0.035	0.214
		4	-0.009	-0.199
		5	0.051	0.238
		6	0.091	-0.107
		7	-0.091	0.002
		8	-0.118	-0.116
		9	0.048	0.116
		10	0.049	-0.074
		11	-0.044	0.021
		12	0.030	0.034
		13	0.050	0.034
		14	-0.053	-0.067
		15	0.007	0.058
		16	0.027	-0.054
		17	-0.049	0.018
		18	-0.042	-0.089
		19	-0.045	-0.008
		20	-0.070	-0.072

على ضوء ما سبق يمكن القول ان دالة الارتباط الذاتي تنعدم مباشرة بعد الدرجة (q)، فاذا كان النموذج (MA(1)) فإنها تبتر بعد الدرجة (1) بمعنى ان $(\rho_2 = \rho_3 =..= 0)$ اما إذا كان من الدرجة (2) فإنها تنعدم بعد الرتبة (2) أي ان $(\rho_3 = \rho_4 =..= 0)$ وهكذا بالنسبة الى جميع الرتب.

✓ **ملاحظة:**

ان معرفتنا ان دالة التغاير الذاتي $(\gamma(k))$ ودوال الارتباط $(\rho(k))$ لنموذج (MA(q)) التي تنعدم عند الرتبة (k) حيث $(k > q)$ ، يسمح لنا بمعرفة السيرورات التي يمكن نمذجتها في شكل سيرورة (MA(q)).بمعنى انه لقبول فرضية ان السلسلة تتبع نموذج (MA(q)) بالنسبة الى رتبة (q) محددة، نتحقق ان جميع معاملات الارتباط من الرتبة (k) حيث $(k > q)$ تحقق العلاقة التالية:

$$|\rho_n(k)| \le z_\alpha \sigma_q$$

$$\sigma_q{}^2 = \frac{1 + 2(\hat{\rho}(1)^2 + \hat{\rho}(2)^2 + .. + \hat{\rho}(q)^2)}{n}$$

وهذه الصيغة تسمى بصيغة بارتلت ((formule de Bartlett) و (z_α) يسمى (la "fractile") من الرتبة (α) للتوزيع الطبيعي وترتبط بمستوى الثقة (α) المرغوب (مثال $(z_{0.95} = 2)$).

إذا كانت جميع معاملات الارتباط من اجل $(k > q)$ داخل مجال الثقة، نقبل فرضية ان السيرورة من النوع (MA(q))

- **نتيجة**

من خلال ما سبق، رأينا أن دالة الارتباط الذاتي في حالة (MA(q)) ودالة الارتباط الذاتي الجزئية في حالة (AR(p)) تبتر مباشرة بعد الدرجة q و p على الترتيب نظريا، إلا أنه وفي الواقع العملي، لا يتم ذلك بهذه السهولة، ولهذا وجب استعمال أدوات إختبارية خاصة للبحث في معنوية هذه المعاملات ثم تحديد ثم عزل المعلمات غير الصفرية لكل دالة، ثم تحديد درجة النموذج المناسبة إن أمكن.

8.2 نموذج انحدار ذاتي_متوسط متحرك من الرتبة (1،1): ARMA(1,1)

تحتوي هذه النماذج على الجزء (AR) من الرتبة (p) والجزء (MA) من الرتبة (q) ، لهذا فهي تسمى النماذج المختلطة، فاذا كان (p=1) و(q=1) فنحن امام نموذج (ARMA(1,1)) ، تعطى صيغته في الشكل الخطي التالي:

$$y_t = \delta + \emptyset_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad , \qquad \varepsilon_t \sim i.i.d(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

باستعمال معامل التأخير يكتب النموذج في الشكل:

$$(1 - \emptyset_1 L) y_t = \delta + (1 - \theta_1 L) \varepsilon_t$$

1.8.2 شرط الاستقرارية وشرط الانعكاس

شرط الاستقرارية في هذه النماذج متعلق بالجزء (AR) $(|\emptyset_1| < 1)$ اما شرط الانعكاس (الانقلاب) فمتعلق بالجزء (MA) $(|\theta_1| < 1)$، كما ان هناك شرط اخر يسمى شرط الامتساخ (Degeneracy condition) وهو $(\emptyset_1 \neq \theta_1)$ وهذا الشرط الأخير يضمن عدم امتساخ (تحول) النموذج الى نموذج اقل درجة، ففي حالة كان $(\emptyset_1 = \theta_1)$ فمن العلاقة:

$$(1 - \emptyset_1 L) y_t = \delta + (1 - \theta_1 L) \varepsilon_t$$

وبالقسمة على $((1 - \emptyset_1 L))$ يتحول النموذج الى:

$$y_t = \frac{\delta}{(1 - \emptyset_1 L)} + \varepsilon_t$$

وهو نموذج $(ARMA(0,0))$. اما في حالة كان النموذج بدون ثابت فانه يتحول في حالة عدم توفر شرط الامتساخ الى سيرورة صخب ابيض $(y_t = \varepsilon_t)$.

2.8.2 خصائص النموذج

1.2.8.2 الامل الرياضي

انطلاقا من الصيغة المختصرة للنموذج وبإدخال معامل الامل الرياضي نجد:

$$(1-\emptyset_1 L)y_t = \delta + (1-\theta_1 L)\varepsilon_t$$

$$y_t = \frac{\delta}{(1-\emptyset_1 L)} + \frac{(1-\theta_1 L)}{(1-\emptyset_1 L)}\varepsilon_t$$

$$E(y_t) = \frac{\delta}{(1-\emptyset_1)} = \mu$$

لكي يكون (μ) قيمة محددة يشترط ان يكون $(\emptyset_1 \neq 1)$ وهو نفس الشرط الخاص بنموذج (AR(1)).

2.2.8.2 دالة التغاير الذاتي

بغرض تبسيط الحسابات سنفترض ان النموذج لا يحتوي على ثابت، بمعنى ان متوسطه معدوم $(\mu = 0)$.

- **حساب التباين $(h = 0)$**

$$\gamma_h = E[(y_t-\mu)(y_{t-h}-\mu)]$$

$$\gamma_0 = E({y_t}^2) = E(y_t(\emptyset_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}))$$

$$\gamma_0 = E({y_t}^2) = E((\emptyset_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1})(\emptyset_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}))$$

$$\gamma_0 = E({\emptyset_1}^2{y_{t-1}}^2 + \emptyset_1 y_{t-1}\varepsilon_t + \emptyset_1\theta_1 y_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \emptyset_1 y_{t-1}\varepsilon_t + {\varepsilon_t}^2 + \theta_1\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \theta_1\emptyset_1\varepsilon_{t-1}y_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t + {\theta_1}^2{\varepsilon_{t-1}}^2)$$

$$\gamma_0 = {\emptyset_1}^2E({y_{t-1}}^2) + \emptyset_1E(y_{t-1}\varepsilon_t) + \emptyset_1\theta_1E(y_{t-1}\varepsilon_{t-1}) + \emptyset_1E(y_{t-1}\varepsilon_t) + E({\varepsilon_t}^2) + \theta_1E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) + \theta_1\emptyset_1E(\varepsilon_{t-1}y_{t-1}) + \theta_1E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t) + {\theta_1}^2E({\varepsilon_{t-1}}^2)$$

$$\gamma_0 = {\emptyset_1}^2\gamma_0 + \emptyset_1(0) + \emptyset_1\theta_1(\sigma_\varepsilon^2) + \emptyset_1(0) + \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1(0) + \theta_1\emptyset_1(\sigma_\varepsilon^2) + \theta_1(0) + {\theta_1}^2(\sigma_\varepsilon^2)$$

$$\gamma_0 = {\emptyset_1}^2\gamma_0 + \emptyset_1\theta_1(\sigma_\varepsilon^2) + \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1\emptyset_1(\sigma_\varepsilon^2) + {\theta_1}^2(\sigma_\varepsilon^2)$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2(2\,\emptyset_1\theta_1 + {\theta_1}^2 + 1)}{1-{\emptyset_1}^2}$$

- **دالة التغاير الذاتي من الرتبة الاولى $(h = 1)$**

نضرب طرفي المعادلة في (y_{t-1}) وندخل الامل الرياضي فنجد:

$$\gamma_1 = E(y_t y_{t-1}) = E((\emptyset_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}) y_{t-1})$$

$$\gamma_1 = E(y_t y_{t-1}) = E((\emptyset_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}) y_{t-1})$$

$$\gamma_1 = E(\emptyset_1 {y_{t-1}}^2 + \varepsilon_t y_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} y_{t-1})$$

$$\gamma_1 = \emptyset_1 E({y_{t-1}}^2) + E(\varepsilon_t y_{t-1}) + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1} y_{t-1})$$

نحسب كل طرف على حدا فنجد:

$$E({y_{t-1}}^2) = y_0\,,\quad E(\varepsilon_t y_{t-1}) = 0,\quad E(\varepsilon_{t-1} y_{t-1}) \quad = \sigma_\varepsilon^2$$

لان:

$$E(\varepsilon_{t-1} y_{t-1}) = E(\varepsilon_{t-1}(\emptyset_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2}))$$

$$E(\varepsilon_{t-1} y_{t-1}) = E((\emptyset_1 \varepsilon_{t-1} y_{t-2} + {\varepsilon_{t-1}}^2 + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}))$$

$$E(\varepsilon_{t-1} y_{t-1}) = \emptyset_1 E(\varepsilon_{t-1} y_{t-2}) + E({\varepsilon_{t-1}}^2) + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2})$$

$$E(\varepsilon_{t-1} y_{t-1}) = \emptyset_1(0) + \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1(0) = \sigma_\varepsilon^2$$

ومنه:

$$\gamma_1 = \emptyset_1 y_0 + \theta_1 \sigma_\varepsilon^2$$

بالتعويض بقيمة (y_0) نجد:

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2 (2\, \emptyset_1 \theta_1 + {\theta_1}^2 + 1)}{1 - {\emptyset_1}^2}$$

$$\gamma_1 = \emptyset_1 \Big(\frac{\sigma_\varepsilon^2 (2\, \emptyset_1 \theta_1 + {\theta_1}^2 + 1)}{1 - {\emptyset_1}^2}\Big) + \theta_1 \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = \sigma_\varepsilon^2 \left(\frac{{\emptyset_1}^2 \theta_1 + \emptyset_1 {\theta_1}^2 + \emptyset_1 + \theta_1}{1 - {\emptyset_1}^2}\right) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 (\emptyset_1 + \theta_1)(1 + \emptyset_1 \theta_1)}{1 - {\emptyset_1}^2}$$

ولما تكون $(k > 1)$ أي أكبر من درجة المتوسطات المتحركة فان:

$$\gamma_2 = \emptyset_1 y_1$$

$$\gamma_k = \emptyset_1 y_{k-1}$$

3.2.8.2 دالة الارتباط الذاتي

بقسمة العلاقة الأخيرة على (γ_0) يمكننا استخراج معاملات الارتباط الذاتي، ومنه تكون معاملات دالة الارتباط الذاتي:

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(\emptyset_1 + \theta_1)(1 + \emptyset_1\theta_1)}{(2\,\emptyset_1\theta_1 + {\theta_1}^2 + 1)}$$

ويمكن استخراج معاملات الارتباط من الرتب الأكبر من الواحد $(k > q = 1)$ باستعمال العلاقة:

$$\rho_k = \emptyset_1\rho_{k-1}$$

ويمكن حل هذه المعادلة تكراريا لجميع قيم $(k \geq 2)$ باستخدام القيم الأولية $(\rho_0 = 1)$ و قيمة (ρ_1):

$$\rho_1 = \frac{(\emptyset_1 + \theta_1)(1 + \emptyset_1\theta_1)}{(2\,\emptyset_1\theta_1 + {\theta_1}^2 + 1)}$$

فمثلا (ρ_2) و(ρ_3) تعطى كالتالي:

$$\rho_2 = \emptyset_1\rho_1 = \emptyset_1\frac{(\emptyset_1 + \theta_1)(1 + \emptyset_1\theta_1)}{(2\,\emptyset_1\theta_1 + {\theta_1}^2 + 1)}$$

$$\rho_3 = \emptyset_1\rho_2 = \emptyset_1^2\frac{(\emptyset_1 + \theta_1)(1 + \emptyset_1\theta_1)}{(2\,\emptyset_1\theta_1 + {\theta_1}^2 + 1)}$$

4.2.8.2 دالة الارتباط الذاتي الجزئية

تحسب دالة الارتباط الذاتي الجزئية تكراريا حيث انها تعطى من خلال العلاقات:

$$\emptyset_{00} = 1$$

$$\emptyset_{11} = \rho_1 = \frac{(\emptyset_1 + \theta_1)(1 + \emptyset_1\theta_1)}{(2\,\emptyset_1\theta_1 + {\theta_1}^2 + 1)}$$

اما البقية فتستخرج كالتالي:

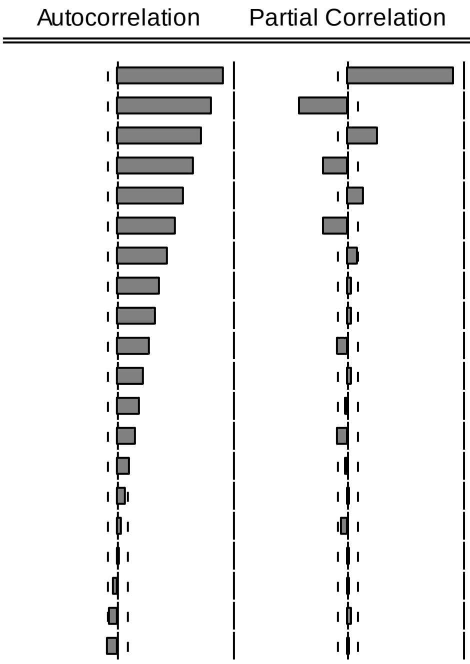
$$\emptyset_{22} = \frac{\rho_2 - \emptyset_{11}\rho_1}{1 - \emptyset_{11}\rho_1}$$

$$\emptyset_{33} = \frac{\rho_3 - \emptyset_{21}\rho_2 - \emptyset_{22}\rho_1}{1 - \emptyset_{21}\rho_1 - \emptyset_{22}\rho_2}\ , \qquad \emptyset_{21} = \emptyset_{11} - \emptyset_{22}\,\emptyset_{11}$$

وهكذا تحسب بقية القيم تكراريا.

شكل رقم (8) التمثيل البياني لدالة الارتباط الذاتي الجزئية لنموذج ARMA(1,1)

$$\emptyset_1 = 0.9 \quad , \quad \theta_1 = 0.8$$



	AC	PAC
1	0.944	0.944
2	0.845	-0.435
3	0.758	0.273
4	0.677	-0.228
5	0.601	0.144
6	0.524	-0.217
7	0.446	0.093
8	0.383	0.028
9	0.336	0.031
10	0.292	-0.095
11	0.245	0.025
12	0.203	-0.018
13	0.160	-0.094
14	0.114	-0.014
15	0.073	0.006
16	0.032	-0.062
17	-0.008	0.001
18	-0.041	-0.007
19	-0.067	0.034
20	-0.083	0.016

نلاحظ ان دالة الارتباط الذاتي الجزئي لنموذج (ARMA(1,1)) تضمحل اسيا في اتجاه واحد او مترددد بين القيم الموجبة والسالبة وهي في هذا تشبه تماما دالة الارتباط الذاتي الجزئي لنموذج (MA(1))، ما عدا ان التناقص يبدا بعد القيمة الأولية. لهذا تكون دالة الارتباط الذاتي الجزئية غير مسيرة من طرف جزء الانحدار الذاتي بعد الفترة p ، بل موجهة من طرف المتوسطات المتحركة، لهذا السبب يصعب التعرف على النماذج المختلطة ، فنعتمد على التجربة ثم الخبرة فيما بعد لتحديد p و q.

3. تطبيقات

1.3 تطبيقات حول الاستقرارية

❖ التطبيق رقم (1)

لتكن السيرورة العشوائية التالية:

$$X_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

مع (ε_t) سيرورة صخب ابيض،

$$E(\varepsilon_t) = 0 \ , \ V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \quad , \ Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0 \quad \forall \quad t \neq s$$

1. حدد هل هذه السيرورة مستقرة.

➢ **الحل:**

يكفي ان نقوم باستخراج كل من الامل الرياضي، التباين، والتباين المشترك ونتحقق من ان جميع هذه العزوم ليست دالة للزمن.

- **حساب الامل الرياضي:**

$$X_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} \quad , \qquad \varepsilon_t \sim BB\left(0, \sigma_\varepsilon^2\ \right)$$

$$E(X_t) = E(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$$

$$E(X_t) = E(\varepsilon_t) - E(\varepsilon_{t-1}) = 0$$

الامل الرياضي معدوم (مستقل عن الزمن) وبالتالي فالشرط الأول من شروط الاستقرارية محقق.

- **حساب التباين:**

$$V(X_t) = V(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) = V(\varepsilon_t) + V(\varepsilon_{t-1}) - 2Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1})$$

$$V(X_t) = \sigma_\varepsilon^2 \ + \sigma_\varepsilon^2 \ = 2\sigma_\varepsilon^2$$

التباين مستقل عن الزمن، إذا الشرط الثاني من شروط الاستقرارية محقق.

- **حساب دالة التغاير الذاتي (التباين المشترك الذاتي) $\boldsymbol{COV(X_t X_{t-h})}$**

$$COV(X_t X_{t-h}) = E(X_t X_{t-h}) - E(X_t)E(X_{t-h})$$

بما ان $(E(X_t)E(X_{t-h})=0)$ فان:

$$COV(X_tX_{t-h})=E(X_tX_{t-h})$$

$$COV(X_tX_{t-h})=E[(\varepsilon_t-\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-h}-\varepsilon_{t-h-1})]$$

$$COV(X_tX_{t-h})=E[(\varepsilon_t\varepsilon_{t-h}-\varepsilon_t\varepsilon_{t-h-1}-\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-h}+\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-h-1})]$$

$$COV(X_tX_{t-h})=E[(\varepsilon_t\varepsilon_{t-h}-\varepsilon_t\varepsilon_{t-h-1}-\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-h}+\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-h-1})]=0$$

$$\forall\ h\geq 2$$

هذا يعني ان جميع التباينات المشتركة الذاتية من الرتب الأعلى من اثنان معدومة. إذا التباين المشترك ليس دالة ل(t) بل هو دالة فقط للتأخير $(\boldsymbol{h})$.

إذا كان $(\boldsymbol{h=1})$ يكون لدينا عند التعويض النتيجة التالية:

$$COV(X_tX_{t-1})=E[(\varepsilon_t-\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1}-\varepsilon_{t-1-1})]$$

$$COV(X_tX_{t-1})=E[(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}-\varepsilon_t\varepsilon_{t-1-1}-\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1-1})]$$

$$COV(X_tX_{t-1})=E[(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}-\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}-\varepsilon^2{}_{t-1}+\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2})]$$

$$COV(X_tX_{t-1})=E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})-E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2})-E(\varepsilon^2{}_{t-1})+E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2})$$

$$COV(X_tX_{t-1})=0-0-\sigma_\varepsilon^2\ +0$$

التباين المشترك الذاتي من الرتبة الأولى ليس دالة للزمن، فهو ثابت ويساوي $(\sigma_\varepsilon^2\ )$

- **حساب الارتباط الذاتي:**

يعطى الارتباط الذاتي من الرتبة (h) بالعلاقة التالية:

$$\rho_h=\frac{\boldsymbol{\gamma_h}}{\boldsymbol{\gamma_0}}$$

حيث $(\boldsymbol{\gamma_h})$ يمثل التباين المشترك الذاتي من الرتبة (h)، و$(\boldsymbol{\gamma_0})$ يمثل التباين.

$$\rho_h=\frac{COV(X_tX_{t-h})}{\sigma_{X_t}\sigma_{X_{t-h}}}$$

بما ان $(\sigma_{X_t}=\sigma_{X_{t-h}})$ تصبح العلاقة كالتالي:

$$\rho_h=\frac{COV(X_tX_{t-h})}{\sigma_X^2}$$

بالتعويض بقيمة كل من $(COV(X_tX_{t-h}))$ و$(\sigma_X^2\ )$ نتحصل على:

$$\rho_h = \begin{cases} \frac{-\sigma_\varepsilon^2}{2\sigma_\varepsilon^2} = -\frac{1}{2} \ , & h = 1 \\ 0 & \forall h \geq 2 \end{cases}$$

- **النتيجة**

السيرورة (X_t) مستقرة حيث ان الامل الرياضي والتباين ثابتان ومستقلان عن الزمن، كما ان التباين المشترك بين فترتين (t) و(t−h) هو دالة فقط للفرق بين الفترتين (t−(t−h) = h)

❖ **التطبيق رقم(2):**

لتكن السيرورة العشوائية التالية:

$$X_t = \varepsilon_t\varepsilon_{t-1} \quad , \varepsilon_t \sim BB\left(0, \sigma_\varepsilon^2\ \right)$$

1. حدد هل هذه السيرورة مستقرة

➢ **الحل:**

نحسب العزوم من الرتبة الأولى والثانية ونتحقق من انها مستقلة عن الزمن.

- **حساب الامل الرياضي $\boldsymbol{E(X_t)}$:**

$$E(X_t) = E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})$$
$$E(X_t) = E(\varepsilon_t)E(\varepsilon_{t-1}) = 0$$

- **حساب التباين** $V(\ X_t)$:

$$V(X_t) = V(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})$$
$$V(X_t) = \sigma_\varepsilon^2\ \sigma_\varepsilon^2\ = \sigma_\varepsilon^4$$

- **حساب التباين المشترك من الرتبة (h)** $COV(X_tX_{t-h})$:

$$COV(X_tX_{t-h}) = E(X_tX_{t-h})$$
$$COV(X_tX_{t-h}) = E[(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-h}\varepsilon_{t-h-1})] = 0 \quad , h \neq 0$$

- **حساب الارتباط الذاتي:**

$$\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} = \frac{COV(X_t X_{t-h})}{\sigma_{X_t}\sigma_{X_{t-h}}} = \frac{COV(X_t X_{t-h})}{\sigma_X^2}$$

$$\rho_h = \begin{cases} 1 \ , & h = 0 \\ 0 \ , & \forall h \neq 0 \end{cases}$$

هذه السيرورة اذا مستقرة حيث ان الامل الرياضي والتباين ثابتان ومستقلان عن الزمن، كما ان التباين المشترك بين فترتين (t) و(t−h) هو دالة فقط للفرق بين الفترتين (t− (t−h)=h)

❖ **التطبيق رقم (3):**

ليكن النموذج التالي:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 \, t + \beta_2 \, t^2 + \varepsilon_t$$

1. هل النموذج مستقر؟
2. نقوم بإجراء التحويل $(W_t = \Delta^2 y_t)$، هل السيرورة المحولة (W_t) مستقرة؟
3. هل السيرورة قابلة للانعكاس؟

➢ **الحل:**

1.نحسب الامل الرياضي:

$$\mu_t = E(y_t) = E(\beta_0 + \beta_1 \, t + \beta_2 \, t^2 + \varepsilon_t) = \beta_0 + \beta_1 \, t + \beta_2 \, t^2$$

بما ان المتوسط دالة للزمن، إذا السيرورة غير مستقرة في المتوسط.

2.إذا كان النموذج في الفترة (t) هو:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 \, t + \beta_2 \, t^2 + \varepsilon_t \qquad (1)$$

إذا في الفترة (t−1) يصبح:

$$y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 \, (t-1) + \beta_2 \, (t-1)^2 + \varepsilon_{t-1} \qquad (2)$$

عملية طرح المعادلة الثانية من الأولى تعطي:

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = \beta_1 - \beta_2 + 2\beta_2 t + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} \qquad (3)$$

بتأخير المعادلة (3) بفترة واحدة نتحصل على:

$$\Delta y_{t-1} = \beta_1 - \beta_2 + 2\beta_2 (t-1) + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2} \qquad (4)$$

بطرح المعادلتين (4) و(3) نتحصل على:

$$W_t = \Delta y_t - \Delta y_{t-1} = \Delta^2 y_t = 2\beta_2 + \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$$

كنتيجة فان السيرورة (W_t) سيرورة مستقرة اذ انها تمثل سيرورة (MA)، والسيرورة (MA) المحددة الرتبة مستقرة بالتعريف.

4. تعطى المعادلة المميزة لكثير الحدود للجزء (MA) للنموذج المستخرج:

$$W_t = 2\beta_2 + \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$$

من خلال:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

بحل المعادلة نتحصل على الجذور:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

كنتيجة لهذا الحل فان السيرورة غير قابلة للانعكاس.

❖ **التطبيق رقم (4):**

لدينا السيرورات التالية مع (ε_t) صخب ابيض.

$$X_t = a + b\varepsilon_t + c\,\varepsilon_{t-1} \qquad ,a,b,c \in R$$

$$X_t = \varepsilon_t \cos(ct) + \varepsilon_{t-1}\sin(ct) \qquad ,c \in R$$

$$X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t$$

1. هل هذه السيرورات مستقرة؟ هل يمكن ان تكون مستقرة مع بعض الشروط على المعالم؟

➢ **الحل:**

$$X_t = a + b\varepsilon_t + c\,\varepsilon_{t-1} \qquad ,a,b,c \in R$$

نحسب كل من المتوسط، التباين والتباين المشترك:

- **حساب المتوسط:**

$$E(X_t) = E(a + b\varepsilon_t + c\,\varepsilon_{t-1}) = a + b\,E(\varepsilon_t) + c\,E(\varepsilon_{t-1}) = a$$

حيث ان (ε_t) صخب ابيض اذا $(E(\varepsilon_t) = 0)$ مما يعني ان $(E(X_t))$ ثابت:

$E(X_t) = a$

- **حساب التباين:**

$$Var(X_t) = E(X_t - E(X_t))^2 = E(a + b\varepsilon_t + c\ \varepsilon_{t-1} - a\ )^2 = E(b\varepsilon_t + c\ \varepsilon_{t-1}\ )^2$$
$$= E(b\varepsilon_t + c\ \varepsilon_{t-1}\ )^2 = E(b^2{\varepsilon_t}^2 + c^2\ {\varepsilon_{t-1}}^2 + 2bc\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})$$
$$= b^2E({\varepsilon_t}^2) + c^2E(\ {\varepsilon_{t-1}}^2) + 2bcE(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) = (b^2 + c^2)\sigma^2$$

بما ان (ε_t) هو الصخب الأبيض فتباينه (σ^2) وتباينه المشترك معدوم $E(\varepsilon_t\ \ ,\varepsilon_{t-1}) = 0$

التباين ثابت وغير مرتبط بالزمن.

- **حساب التباين المشترك من الرتبة الاولى**

$$Cov(X_t\ \ ,X_{t-1}) = E(X_t - E(X_t))(X_{t-1} - E(X_{t-1}))$$
$$= E(b\varepsilon_t + c\ \varepsilon_{t-1}\ )\ \ (b\varepsilon_{t-1} + c\ \varepsilon_{t-2}\ )$$
$$= E(b^2\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + bc\ \varepsilon_t\varepsilon_{t-2} + cb{\varepsilon_{t-1}}^2 + c^2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2})$$
$$= b^2E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) + bc\ E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}) + cbE({\varepsilon_{t-1}}^2) + c^2E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2})$$
$$Cov(X_t\ \ ,X_{t-1}) = bc\sigma^2$$

يمكن حسابها بطريقة أخرى:

$$Cov(X_t\ \ ,X_{t-1}) = E(X_tX_{t-1}) - E(X_t)E(X_{t-1})$$
$$Cov(X_t\ \ ,X_{t-1}) = E\{(a + b\varepsilon_t + c\ \varepsilon_{t-1})(a + b\varepsilon_{t-1} + c\ \varepsilon_{t-2})\ \ \} - a^2 = bc\sigma^2$$

هذا يعني ان التباين المشترك مستقل عن الزمن (t) أيضا.

- **حساب التباين المشترك من الرتبة (h)**

$$Cov(X_t\ \ ,X_{t-h}) = E(X_t - E(X_t))(X_{t-h} - E(X_{t-h}))$$
$$= E(b\varepsilon_t + c\ \varepsilon_{t-1}\ )\ \ (b\varepsilon_{t-h} + c\ \varepsilon_{t-h-1}\ )$$
$$= b^2E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-h}) + bc\ E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-h-1}) + cbE\left(\varepsilon_{t-1}\ \ \varepsilon_{t-h}\right) + c^2E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-h-1})$$

إذا:

$$Cov(X_t\ \ ,X_{t-h}) = 0\ \ \ ,\ \ h > 1$$

جميع العزوم مستقلة عن الزمن إذا السيرورة (X_t) مستقرة.

2-

$$X_t = \varepsilon_t \cos(ct) + \varepsilon_{t-1} \sin(ct) \quad , c \in R$$

- **حساب الامل الرياضي:**

$$E(X_t) = E(\varepsilon_t) \cos(ct) + E(\varepsilon_{t-1}) \sin(ct) = 0$$

حيث ان (ε_t) صخب ابيض إذا $(E(\varepsilon_t) = 0)$ مما يعني ان $(E(X_t))$ ثابت:

$$E(X_t) = 0$$

- **حساب التباين**

$$Var(X_t) = E({X_t}^2) = E(\varepsilon_t \cos(ct) + \varepsilon_{t-1} \sin(ct))^2$$

$$Var(X_t) = E({\varepsilon_t}^2 \cos^2(ct) + {\varepsilon_{t-1}}^2 \sin^2(ct)) \quad + 2\, \varepsilon_t\, \varepsilon_{t-1} \cos(ct) \sin(ct))$$

بما ان $(Cov(\varepsilon_t \ , \varepsilon_{t-1}) = 0)$ حيث (ε_t) صخب ابيض إذا:

$$Var(X_t) = (Cos^2(ct) + Sin^2(ct))\sigma^2$$

- **حساب التباين المشترك**

$$Cov(X_t \ , X_{t-1}) = E(X_t X_{t-1})$$

$$= E\{\varepsilon_t \cos(ct) + \varepsilon_{t-1} \sin(ct))(\varepsilon_{t-1} \cos(c(t-1)) + \varepsilon_{t-2} \sin(c(t-1)) \ \}$$

$$\begin{aligned} = \varepsilon_t \ \ \varepsilon_{t-1} & \cos(ct) \cos\big(c(t-1)\big) \\ & + \varepsilon_t \varepsilon_{t-2} \cos(ct) \sin\big(c(t-1)\big) + {\varepsilon_{t-1}}^2 \ Sin(ct) Cos\ c(t-1) \\ & + \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2} Sin(ct) \sin(c(t-1)) \end{aligned}$$

$$= \sigma^2 (Sin(ct)\ Cos\ c(t-1))$$

التباين المشترك مرتبط بالزمن (t) من اجل $(c \notin \pi Z)$ إذا السيرورة (X_t) غير مستقرة.

- 3. يمكن كتابة السيرورة (X_t) في الصيغة التالية:

$$X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t \rightarrow X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

بالتعويض التراجعي نجد:

$$t = 1 \Rightarrow X_1 = X_0 + \varepsilon_1$$

$$t = 2 \Rightarrow X_2 = X_1 + \varepsilon_2 \Rightarrow X_2 = X_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$t = 3 \Rightarrow X_3 = X_2 + \varepsilon_3 \Rightarrow X_3 = X_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

وبالتعويض ب($t = 4,5..$) يمكننا كتابة (X_t) في الصيغة:

$$X_t = \sum_{k=1}^{t} \varepsilon_k + X_0$$

الصيغة الأخيرة هي صيغة نموذج سير عشوائي (نزهة عشوائية)، يمكن من خلال حساب التباين ملاحظة ارتباطه بالزمن (t)

$$Var(X_t) = Var\left(\sum_{k=1}^{t} \varepsilon_k\right) = \sum_{k=1}^{t} \left(Var(\varepsilon_k)\right) = t\sigma^2$$

وبالتالي فالسيرورة (X_t) غير مستقرة.

التطبيق رقم(5):

لتكن (ε_t) و(η_t) سيرورتي صخب ابيض و $(\theta \in (-1,0) \cup (0,1))$

1. بين ان السلسلتين (X_t, Y_t) لهما نفس دوال الارتباط الذاتي حيث.

$$X_t = \varepsilon_t + \theta \quad \varepsilon_{t-1} \qquad , \quad Y_t = \eta_t + \frac{1}{\theta} \eta_{t-1}$$

➢ **الحل:**

1. نلاحظ ان كلا من السيرورة (Y_t) و(X_t) يتبعان سيرورة $(MA(1))$ هذا يعني ان:

$$(\rho_X(h) = \rho_Y(h) = 0\,, \ |h| > 1\,)$$

يبقى ان نبرهن ان معاملا الارتباط للسيرورتان من الرتبة الأولى متساويان وبالتالي فلهما لهما نفس دوال الارتباط الذاتي:

$$(\rho_X(1) = \rho_Y(1))$$

بما ان (ε_t) و(η_t) سيرورتي صخب ابيض فالأمل الرياضي للسيروراتان معدوم بمعنى ان:

$$\rho_X(1) = \frac{COV(X_t, X_{t-1})}{Var(X_t)} = \frac{E(X_t, X_{t-1})}{E({X_t}^2)}$$

نحسب البسط والمقام:

1. لدينا:

$$E({X_t}^2) = E[(\varepsilon_t + \theta \quad \varepsilon_{t-1})^2]$$
$$E({X_t}^2) = E[{\varepsilon_t}^2 + \theta^2 \quad {\varepsilon_{t-1}}^2 + 2\theta \quad \varepsilon_t\varepsilon_{t-1}]$$
$$E({X_t}^2) = E({\varepsilon_t}^2) + \theta^2 E({\varepsilon_{t-1}}^2) + 2\theta E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})$$
$$E({X_t}^2) = \sigma_\varepsilon^2 \quad + \theta^2\sigma_\varepsilon^2 \quad + 0$$
$$E({X_t}^2) = (1 + \theta^2)\sigma_\varepsilon^2$$

باعتبار ان: $E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) = 0$

2. لدينا: $E(X_t, X_{t-1})$

$$E(X_t, X_{t-1}) = E[(\varepsilon_t + \theta \quad \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} + \theta \quad \varepsilon_{t-2})]$$
$$E(X_t, X_{t-1}) = E[(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) + \theta \quad (\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}) + \theta(\varepsilon_{t-1})^2 + \theta^2 \quad (\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2})]$$
$$E(X_t, X_{t-1}) = E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) + \theta \quad E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}) + \theta E(\varepsilon_{t-1})^2 + \theta^2 \quad E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2})$$
$$E(X_t, X_{t-1}) = 0 + \theta(0) + \theta\sigma_\varepsilon^2 \quad + \theta^2(0)$$
$$E(X_t, X_{t-1}) = \theta\sigma_\varepsilon^2$$

إذا لدينا قيمة $\rho_X(1)$:

$$\rho_X(1) = \frac{E(X_t, X_{t-1})}{E({X_t}^2)} = \frac{\theta\sigma_\varepsilon^2}{(1 + \theta^2)\sigma_\varepsilon^2} = \frac{\theta}{(1 + \theta^2)}$$

بالنسبة الى السيرورة الثانية:

$$Y_t = \eta_t + \frac{1}{\theta}\eta_{t-1}$$
$$\rho_Y(1) = \frac{COV(Y_t, Y_{t-1})}{Var(Y_t)} = \frac{E(Y_t, Y_{t-1})}{E({Y_t}^2)}$$

يكفي ان نضع: $\delta = \frac{1}{\theta}$

يصبح لدينا:

$$Y_t = \eta_t + \delta\eta_{t-1}$$

هذا يعني اننا سنتحصل على نفس النتيجة السابقة حيث ان النموذج هو MA(1):

$$\rho_Y(1) = \frac{COV(Y_t, Y_{t-1})}{Var(Y_t)} = \frac{\delta\sigma_\varepsilon^2}{(1+\delta^2)\sigma_\varepsilon^2} = \frac{\delta}{(1+\delta^2)} = \frac{\theta^{-1}}{(1+\theta^{-2})}$$

$$\rho_Y(1) = \frac{\theta^{-1}}{(1+\theta^{-2})}$$

إذا قمنا بضرب البسط والمقام بالمقدار θ^2 نتحصل على النتيجة الأولى الخاصة بالسيرورة (X_t) ومنه:

$$\rho_Y(1) = \frac{\theta}{(1+\theta^2)}$$

هذا يعني ان:

$$\rho_X(1) = \rho_Y(1)$$

وبالتالي فان فالسيرورتان (X_t, Y_t) لهما نفس دوال الارتباط الذاتي.

❖ **التطبيق رقم (6):**

لتكن السيرورة (ε_t) صخب ابيض و (X_t) سيرورة معرفة من خلال:

$$X_t = \sum_{k=0}^{t} \lambda^k \ (\varepsilon_{t-k} - \varepsilon_{t-k-1}), \quad \lambda \in R$$

1.حدد هل السيرورة (X_t) مستقرة؟ هل هي مستقرة ببعض الشروط على المعالم؟

ليكن (ε_t) سيرورة صخب ابيض، ولتكن السيرورات $(X_t, Y_t \ , \ Z_t)$ المعرفة كالتالي:

$$X_t = \varepsilon_t \quad , \quad Y_t = (-1)^t \varepsilon_t \quad , \quad Z_t = X_t + Y_t \quad , \quad t \in Z$$

2.هل السيرورات $(X_t, Y_t \quad Z_t)$ مستقرة؟

3.هل مجموع سيرورتان مستقرتان يعطي سيرورة مستقرة؟

➢ **الحل:**

1. السيرورة (X_t) سيرورة متوسطها معدوم بمعنى ان:

$$E(X_t) = 0$$

يمكن كتابة (X_t) في التمثيل التالي:

$$X_t = \lambda^0(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) + \lambda^1(\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2}) + \lambda^2(\varepsilon_{t-2} - \varepsilon_{t-3}) + .. + \lambda^{t-1}(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) + \lambda^t(\varepsilon_0 - 0)$$

مع $(\varepsilon_{-1} = 0)$ ، يمكن إعادة كتابة هذه العلاقة باستخراج (ε_{t-i}) كعامل مشترك في الصيغة التالية:

$$X_t = \lambda^0\varepsilon_t + (\lambda^1 - \lambda^0)\varepsilon_{t-1} + (\lambda^2 - \lambda^1)\varepsilon_{t-2} + (\lambda^3 - \lambda^2)\varepsilon_{t-3} + .. + (\lambda^{t-1} - \lambda^{t-2})\varepsilon_1 + (\lambda^t - \lambda^{t-1})\varepsilon_0$$

$$= \lambda^0\varepsilon_t + (\lambda - 1)(\varepsilon_{t-1} + \lambda\varepsilon_{t-2} + \lambda^2\varepsilon_{t-3} + \lambda^3\varepsilon_{t-4} + .. + \lambda^{i-1}\varepsilon_{t-i} + .. + \lambda^{t-2}\varepsilon_1 + \lambda^{t-1}\varepsilon_0)$$

من الكتابة الأخيرة نستنتج انه إذا كان $(\lambda = 1)$ فان:

$$X_t = \varepsilon_t$$

وبالتالي فالسيرورة مستقرة. اما إذا كان $(\lambda \neq 1)$ فان:

$$X_t = \varepsilon_t + (\lambda - 1)\sum_{k=0}^{t-1} \lambda^k\, \varepsilon_{t-k-1}$$

يعطى **التباين** في هذه الحالة من خلال العلاقة التالية:

$$Var(X_t) = \sigma^2 + (\lambda - 1)^2 \sum_{k=0}^{t-1} \lambda^{2k}\, \sigma^2 = \sigma^2 + (\lambda - 1)^2 \frac{1 - \lambda^{2t}}{1 - \lambda^2}\sigma^2$$

يلاحظ ان تباين (X_t) مرتبط بالزمن (t) وبالتالي فشرط من شروط الاستقرارية غير متوفر مما يعني عدم استقرارية السيرورة (X_t). وكنتيجة لكل ما سبق نستنتج ان السيرورة (X_t) تكون مستقرة في حالة كانت المعلمة $(\lambda = 1)$، اما في حالة عدم تحقق هذا الشرط فالسيرورة غير مستقرة.

2. السيرورة (X_t) صخب ابيض، إذا فهي مستقرة بالتعريف. اما السيرورة (Y_t) فان املها الرياضي معدوم $(E(Y_t) = 0)$ وتباينها ثابت:

$$\gamma_0 = Var(Y_t) = E(Y_t{}^2) = E(\varepsilon_t{}^2) = \sigma^2$$

أخيرا بالنسبة الى كل $(h \neq 0)$ فان التباين المشترك من الرتبة (h) (γ_h) يحقق العلاقة:

$$\gamma_h = E(Y_t Y_{t-h}) = E((-1)^{2t-h}\, \varepsilon_t\, \varepsilon_{t-h}) = \pm E(\,\varepsilon_t\, \varepsilon_{t-h}) = 0$$

اذا السيرورة (Y_t) سيرورة مستقرة، كما انها صخب ابيض.

- أخيرا بالنسبة الى السيرورة (Z_t) التي هي $(X_t + Y_t)$ حيث:

$$Z_t = X_t + Y_t = \varepsilon_t + (-1)^t \varepsilon_t$$

بتعويض (t) بمختلف القيم بالترتيب نجد:

$$Z_t = \varepsilon_t + (-1)^t \varepsilon_t = \varepsilon_t(1 + (-1)^t)$$
$$Z_1 = \varepsilon_1(1 + (-1)^1) = 0$$
$$Z_2 = \varepsilon_2(1 + (-1)^2) = 2\,\varepsilon_t$$
$$Z_3 = \varepsilon_3(1 + (-1)^3) = 0$$
$$Z_4 = \varepsilon_4(1 + (-1)^4) = 2\,\varepsilon_t$$

عموما يكون لدينا:

$$Z_t = \begin{cases} 2\,\varepsilon_t & : t \text{ زوجي} \\ 0 & : t \text{ فردي} \end{cases}$$

فاذا كانت $(E(Z_t) = 0)$ (المتوسط ثابت) فان التباين غير ثابت، ففي حين انه يساوي إذا كان (t) زوجي $(E({Z_t}^2) = 4\sigma^2)$ فانه يساوي $(E({Z_t}^2) = 0)$ إذا كان (t) فردي.

3. رأينا في السؤال السابق انه إذا كان (X_t) سيرورة مستقرة و(Y_t) أيضا سيرورة مستقرة فانه لا يعني بالضرورة ان مجموعهما يعطي سيرورة مستقرة. ومنه فمجموع سيرورتين مستقرتين ليس بالضرورة سيرورة مستقرة.

❖ **التطبيق رقم (7):**

لتكن (η_t) متتالية من المتغيرات المتطابقة التوزيع والمستقلة فيما بينها (i.i.d) تتبع القانون الطبيعي $(N(0,1))$ و $(k \in N_*)$ ، لدينا:

$$\varepsilon_t = \eta_t . \eta_{t-1} \dots \eta_{t-k}$$

المطلوب:

1. بين ان (ε_t) صخب ابيض ضعيف، وليس صخب ابيض قوي.

2. بين ان $(\varepsilon_t{}^2)$ تتبع السيرورة (MA(q)).

➢ **الحل:**

1. نبدأ بماهية سيرورة الصخب الأبيض الضعيف، نعلم ان السيرورة ممركزة (متوسط معدوم) مما يعني ان

$$\gamma\ \ (h) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h})$$

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}) = E([\eta_t.\eta_{t-1} \dots \eta_{t-k}][\eta_{t-h}.\eta_{t-h-1} \dots \eta_{t-k-h}])$$

نعلم ان كل المتغيرات مستقلة فيما بينها وخاصة (η_t) فهو مستقل عن كل المتغيرات الأخرى في حالة $(h \neq 0)$ اذا:

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}) = E(\eta_t)E([\eta_{t-1} \dots \eta_{t-k}][\eta_{t-h}.\eta_{t-h-1} \dots \eta_{t-k-h}]) = 0$$

لأنه بالتعريف:

$$E(\eta_t) = 0$$

إذا برهنا بكل بساطة ان (ε_t) صخب ابيض ضعيف. بقي الان ان نبرهن انه ليس صخب ابيض قوي.

لكي نبرهن انه ليس صخب ابيض قوي يكفي ان نبرهن ان $(Cov(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-k}^2 \neq 0))$

لهذا نكتب:

$$Cov(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-k}^2) = Cov([\eta_t.\eta_{t-1} \dots \eta_{t-k}]^2, [\eta_{t-k}.\eta_{t-k-1} \dots \eta_{t-2k}]^2)$$

نستعمل خاصية خطية التباين المشترك بمعنى:

$$Cov(aX + bY, Z) = a\ Cov(X, Z) + b\ Cov(Y, Z)$$

بحيث:

$$Cov(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-k}^2) = Cov(\eta_{t-k}^2, \eta_{t-k}^2) + \sum_{i \neq j} Cov\left(\eta_{t-i}^2, \eta_{t-j}^2\right)$$

نعلم ان:

$$\sum_{i \neq j} Cov\left(\eta_{t-i}^2, \eta_{t-j}^2\right) = 0$$

حيث انه تباينات مشتركة بين مركبات مستقلة فيما بينها، مما يعطينا في النهاية النتيجة التالية:

$$Cov(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-k}^2) = Var(\eta_{t-k}^2) > 0$$

وبالتالي فـ(ε_t) ليس سيرورة صخب ابيض قوي.

2. البرهنة على ان (ε_t^2) تتبع سيرورة (MA(q)).

للبرهنة نستعمل دائما خصائص نموذج (MA(q)) الخاصة بالتباينات المشتركة، يكفي ان نبرهن ان ($Cov(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-k-h}^2) = 0 \ , \ \ h \geq 1$) لضمان ان ($\varepsilon_t^2$) تتبع سيرورة (MA(q))

كنا قد بينا ان:

$$\begin{cases} \gamma_{\varepsilon^2}(k) = Cov(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-k}^2) \neq 0 \\ \gamma_{\varepsilon^2}(h) = Cov(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-h}^2) = 0 \ , \ \ h > k \end{cases}$$

النتيجة الأخيرة تعتبر خاصية من خصائص السيرورة ((MA(q)).

2.3 تطبيقات حول نماذج AR

❖ **التطبيق رقم(1):**

لتكن السيرورة العشوائية التالية:

$$X_t = \emptyset_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

1. ناقش استقرارية السلسلة من حيث الامل الرياضي في حالة $|\emptyset_1| < 1$ وحالة $|\emptyset_1| = 1$
2. **هل تختلف النتائج بين حالة** $E(\varepsilon_t) = \mu = 0$ وحالة $E(\varepsilon_t) = \mu \neq 0$

سنفترض فيما سياتي ان: $E(\varepsilon_t) = 0$

3. ناقش استقرارية السلسلة من حيث التباين والتباين المشترك في حالة $|\emptyset_1| < 1$ و حالة $|\emptyset_1| = 1$
4. احسب دالة الارتباط الذاتي.

➢ **الحل:**

1. هذه السيرورة تمثل نموذج (AR(1)) ، يمكن دراسة استقراريته بدون حساب مختلف العزوم كما في التطبيقان السابقان، وهذا من خلال مراقبة قيمة معامل الانحدار ($\emptyset_1$). غير اننا سنتطرق الى هذا النوع من الشروط في استقرارية نماذج (AR) في التطبيقات اللاحقة الخاصة بهذه النماذج، لذا سنقوم بدراسة استقراريته من خلال حساب العزوم بنفس الطريقة المستعملة في التطبيقات السابقة.

- **حساب الامل الرياضي $E(X_t)$**

من اجل تسهيل عملية حساب الامل الرياضي نجري بعض التحويلات المهمة .

$$X_t = \emptyset_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

نعوض (X_{t-1}) داخل المعادلة فنتحصل على:

$$X_t = \emptyset_1(\emptyset_1 X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) \quad + \varepsilon_t$$

$$X_t = {\emptyset_1}^2 X_{t-2} + \emptyset_1 \varepsilon_{t-1} \quad + \varepsilon_t$$

بنفس الطريقة نعوض (X_{t-2}) ثم (X_{t-3}) في المعادلة التي تليها وهكذا حتى التأخير (τ)، فنتحصل على العلاقة التالية:

$$X_t = {\emptyset_1}^{\tau} X_{t-\tau} + \sum_{j=0}^{\tau-1} \emptyset_1^j \, \varepsilon_{t-j}$$

باستعمال الشرط الخاص ببداية السيرورة حيث نفترض ان: $X_0 = 0$ أي : $(t - \tau = 0 \quad \Rightarrow t = \tau)$

نتحصل على: $X_1 = \varepsilon_1$ ، والعبارة الأخيرة تكتب في الصيغة التالية:

$$X_t = \varepsilon_t + \ \emptyset_1 \varepsilon_{t-1} + {\emptyset_1}^2 \, \varepsilon_{t-2} + \cdots$$

$$X_t = \sum_{j=0}^{t-1} \emptyset_1^j \, \varepsilon_{t-j}$$

نلاحظ ان (X_t) أصبحت دالة فقط للقيمة الحالية والقيم السابقة ل(ε_t). ادخال معامل الامل الرياضي يعطينا:

$$E(X_t) = E\left(\sum_{j=0}^{t-1} \emptyset_1^j \, \varepsilon_{t-j} \quad \right) = \sum_{j=0}^{t-1} \emptyset_1^j \, E(\varepsilon_{t-j} \quad)$$

فلنفترض ان: $E(\varepsilon_t) = \mu$ ، اذا يكون لدينا:

$$E(X_t) = \mu \, (1 + \ \emptyset_1 + {\emptyset_1}^2 \ + \cdots + {\emptyset_1}^{t-1} \,)$$

الان نحن امام حالتين:

- فاذا كان $| \ \emptyset_1 | < 1$: فأن:

$$\left(1+\ \emptyset_1+{\emptyset_1}^2\ +\cdots+{\emptyset_1}^{t-1}\right)=\frac{1-{\emptyset_1}^t}{1-\emptyset_1}$$

- الامل الرياضي يساوي:

$$E(X_t)=\ \mu(\frac{1-{\emptyset_1}^t}{1-\emptyset_1})$$

$$\lim E(X_t)_{t\sim\infty}=\frac{\mu}{1-\emptyset_1}$$

كنتيجة لذلك فان الامل الرياضي ثابت وليس دالة للزمن، مما يعني ان الشرط الأول للاستقرارية متوفر.

- اما اذا كان: $|\ \emptyset_1|=1$ فأن:

$$\left(1+\ \emptyset_1+{\emptyset_1}^2\ +\cdots+{\emptyset_1}^{t-1}\right)=1+1+..+1=t$$

وبالتالي الامل الرياضي يساوي:

$$E(X_t)=t\ \mu$$

في هذه الحالة فان الامل الرياضي دالة للزمن، والشرط الأول للاستقرارية غير متوفر.

2. من كل ما سبق يمكن التفريق بين نتيجتين:

النتيجة الأولى: اذا كان الامل الرياضي ل(ε_t) معدوم : $E(\varepsilon_t)=\mu=0$

إذا السيرورة (X_t) مستقرة من ناحية الامل الرياضي تبعا لأية قيمة يأخذها $(\emptyset_1)$، اذ ان:

$$E(\varepsilon_t)=\mu=0\ \ \Rightarrow E(X_t)=0$$

هذه النتيجة تبين ان الامل الرياضي للسيرورة (X_t) مستقل عن الزمن سواء في حالة $(|\ \emptyset_1|<1)$ او $(|\ \emptyset_1|=1)$.

النتيجة الثانية: اذا كان الامل الرياضي ل(ε_t) غير معدوم : $E(\varepsilon_t)=\mu\neq0$

في هذه الحالة يكون الامل الرياضي $E(X_t)$ دالة للزمن (t) و تكون السيرورة (X_t) غير مستقرة من جهة الامل الرياضي في حالة كان $|\ \emptyset_1|=1$، ولا تأثير على استقرارية السلسلة في حالة $|\ \emptyset_1|<1$

3. سنفترض فيما سياتي ان: $E(\varepsilon_t)=0$

- **حساب التباين** $V(X_t)$:

$$V(X_t) = V\left(\sum_{j=0}^{t-1} \emptyset_1^j\, \varepsilon_{t-j}\right) = \sum_{j=0}^{t-1} \emptyset_1^{2j}\, V(\varepsilon_{t-j})$$

كذلك نحن هنا امام حالتين، وهما اذا كان $(|\emptyset_1| < 1)$ والحالة الثانية اذا كان $(|\ \emptyset_1| = 1)$

- **الحالة الأولى:** $(|\emptyset_1| < 1)$

$$V(X_t) = \ \sigma_\varepsilon^2\ (\frac{1-{\emptyset_1}^{2t}}{1-{\emptyset_1}^2})$$

$$\lim V(X_t)_{t\sim\infty} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-{\emptyset_1}^2}$$

عندما تؤول $(t\sim\infty)$ فان التباين يكون قيمة ثابتة غير مرتبطة بالزمن، مما يعني ان الشرط الثاني للاستقرارية متوفر في هذه الحالة.

- **الحالة الثانية:** $(|\ \emptyset_1| = 1)$

$$V(X_t) = t\ \sigma_\varepsilon^2$$

عندما تؤول $(t\sim\infty)$ فان التباين يكون غير منتهي، مما يعني ان الشرط الثاني للاستقرارية غير متوفر في هذه الحالة.

- **حساب التباين المشترك** $\gamma_h = COV(X_t X_{t+h})$

$$COV(X_t X_{t+h}) = E(X_t X_{t+h})$$

$$COV(X_t X_{t+h}) = E\left[\left(\sum_{j=0}^{t-1} \emptyset_1^j\, \varepsilon_{t-j}\right)\left(\sum_{j=0}^{t+h-1} \emptyset_1^j\, \varepsilon_{t+h-j}\right)\right]$$

- **الحالة الأولى:** $(|\emptyset_1| < 1)$

$$COV(X_t X_{t+h}) = \ \sigma_\varepsilon^2\ \emptyset_1^\tau(\frac{1-{\emptyset_1}^{2t}}{1-{\emptyset_1}^2})$$

$$\lim Cov(X_t X_{t+h})_{t\sim\infty} = \sigma_\varepsilon^2\ \frac{{\emptyset_1}^h}{1-{\emptyset_1}^2}$$

التباين المشترك الذاتي غير مرتبط بالزمن، فهو بدلالة فقط الفجوة (h) ، هذا يعني انه يلبي شرط الاستقرارية الثالث بالمعنى الضعيف.

- **الحالة الثانية:** ($|\emptyset_1|=1$)

$$COV(X_t X_{t+h}) = t\,\sigma_\varepsilon^2$$

التباين المشترك الذاتي مرتبط بالزمن، فهو بدلالة (t) ، هذا يعني انه لا يلبي الشرط الثالث للاستقرارية.

- **سنفترض من الان** ان $|\emptyset_1|<1$ وان $t\sim\infty$ (لدينا عدد كبير من المشاهدات).

4. **حساب دالة الارتباط الذاتي:**

$$\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0}$$

$$\rho_h = \frac{COV(X_t X_{t+h})}{\gamma_0} = \frac{\sigma_\varepsilon^2 \dfrac{{\emptyset_1}^h}{1-{\emptyset_1}^2}}{\dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{1-{\emptyset_1}^2}} = {\emptyset_1}^h$$

- **التطبيق رقم (2):**

احسب معاملات الارتباط الذاتي حتى الرتبة 15 للنموذج التالي:

$$y_t = -0.8\;\; y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- **الحل**

بما ان النموذج من النوع (AR(1)) فيمكن استعمال العلاقة التي تربط معامل الانحدار بمختلف معاملات الارتباط المعطى في الصيغة:

$$\rho_\tau = \emptyset_1^\tau$$

نجد:

$$\rho_1 = {\emptyset_1}^1 = -0.8\;, \rho_2 = {\emptyset_1}^2 = (-0.8)^2 = 0.64\;, \rho_3 = {\emptyset_1}^3 = (-0.8)^3 = -0.512\ldots$$

$$\rho_4 = {\emptyset_1}^4 = (-0.8)^4 = 0.4096\;, \rho_{10} = {\emptyset_1}^{10} = (-0.8)^{10} = 0.1074\;, \rho_{15} = {\emptyset_1}^{15} = (-0.8)^{15} = -0.0352\ldots$$

- **التطبيق رقم (3):**

لدينا النموذج (AR(1)) التالي:

$$Y_t = 0.8Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

مع: $\sigma_\varepsilon^2 = 2$

1. هل النموذج مستقر
2. هل هو قابل للانعكاس (الانقلاب)
3. احسب $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_5)$
4. احسب معاملات الارتباط الذاتي $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_5)$
5. استخرج معاملات $(\psi_1, \psi_2, \psi \quad, \ldots, \psi_5)$ للنموذج $(MA(\infty))$ الموافق.

➢ **الحل:**

1. بما ان $(|\emptyset_1| < 1)$ فالنموذج مستقر .
2. بالتعريف فان كل نموذج $(\mathrm{AR}(1))$ مستقر فهو قابل للقلب (الانعكاس).
3. حساب $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_5)$.

بما ان $(|\emptyset_1| < 1)$ لدينا في نموذج $(\mathrm{AR}(1))$:

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \emptyset_1^2} = \frac{2}{1 - 0.8^2} = 5.5$$

$$\gamma_1 = \emptyset_1 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \emptyset_1^2} = \emptyset_1 \gamma_0$$

لاستخراج معاملات التباين المشترك الذاتي من الرتب المختلفة نستعمل العلاقة:

$$\gamma_h = \emptyset_1 \gamma_{h-1}$$

$$\gamma_1 = \emptyset_1 \gamma_0 = 4.4, \quad \gamma_2 = \emptyset_1 \gamma_1 = 3.52, \quad \gamma_3 = \emptyset_1 \gamma_2 = 2.82,$$

$$\gamma_4 = \emptyset_1 \gamma_3 = 2.25, \qquad \gamma_5 = \emptyset_1 \gamma_4 = 1.8$$

4. حساب معاملات الارتباط الذاتي $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_5)$

باستعمال العلاقة

$$(\rho_h = \emptyset_1 \rho_{h-1} \quad \text{او} \quad \rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0})$$

يمكننا استخراج كل المعاملات المطلوبة انطلاقا $(\rho_0 = 1)$:

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{4.4}{5.5} = 0.8 \qquad \text{او} \quad \rho_1 = \emptyset_1 \rho_0 = 0.8$$

بنفس الطريقة نستخرج البقية فنتحصل على:

$$\rho_2 = \emptyset_1\, \rho_1 = 0.64, \quad \rho_3 = \emptyset_1\, \rho_2 = 0.512, \quad \rho_4 = \emptyset_1\, \rho_3 = 0.41,$$
$$\rho_5 = \emptyset_1\, \rho_4 = 0.328$$

5. نستخرج المعاملات $(\psi_1, \psi_2, \psi \quad, \dots, \psi_5)$ للنموذج $(MA(\infty))$ الموافق.

نعلم ان نموذج $(MA(\infty))$ يعطى في الصيغة التالية:

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j\, \varepsilon_{t-j}$$

نستعمل الصيغة النظرية لنموذج $(\mathrm{AR}(1))$:

$$Y_t = \emptyset_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

باستعمال خواص معامل التأخير مع توفر شرط الانعكاس $(|\emptyset_1| < 1)$ $(\mathrm{AR}(1))$ مستقر) نجد:

$$Y_t - \emptyset_1 Y_{t-1} = \varepsilon_t \Rightarrow (1 - \emptyset_1 L) Y_t = \varepsilon_t \Rightarrow Y_t = \frac{1}{1 - \emptyset_1 L} \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \emptyset_1^j\, \varepsilon_{t-j}$$

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \emptyset_1^j\, \varepsilon_{t-j}$$

نلاحظ ان المطابقة بين النموذج $(\mathrm{AR}(1))$ بعد التحويل مع نموذج $(MA(\infty))$ تبين ان:

$$\psi_j = \emptyset_1^j$$

وبالتالي يمكننا استخراج $(\psi_1, \psi_2, \psi \quad, \dots, \psi_5)$ للنموذج $(MA(\infty))$ الموافق، حيث:

$$\psi_j = \emptyset_1^j \Rightarrow \psi_1 = \emptyset_1^1 = 0.8, \quad \psi_2 = \emptyset_1^2 = 0.64, \quad \psi_3 = \emptyset_1^3 = 0.512$$
$$\psi_4 = \emptyset_1^4 = 0.41, \quad \psi_5 = \emptyset_1^5 = 0.328$$

❖ **التطبيق رقم (4):**

ليكن النموذج $(\mathrm{AR}(1))$ التالي:

$$y_t = -y_{t-1} + \varepsilon_t$$

1. هل المرشح (التحويل) (W_t) حيث $(W_t = \Delta y_t)$ مستقر؟

➢ **الحل:**

باستعمال معامل التأخير نتحصل على:

$$(1+L)y_t = \varepsilon_t \qquad (1)$$

من جهة أخرى لدينا:

$$W_t = \Delta y_t = (1-L)y_t$$

$$y_t = (1-L)^{-1}W_t \qquad (2)$$

بتعويض المعادلة (1) في المعادلة (2) نتحصل على:

$$(1+L)(1-L)^{-1}W_t = \varepsilon_t$$

بمعنى:

$$(1+L)W_t = (1-L)\quad \varepsilon_t$$

$$W_t = -W_{t-1} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

إذا نلاحظ ان السيرورة (W_t) لا تحقق شروط الاستقرارية.

ملاحظة: السيرورة (W_t) في هذه الحالة هي سيرورة (ARMA(1,1)) ، وشرط استقرارية هذه النماذج مرتبط بجذر كثير الحدود للجزء (AR) ، الذي نلاحظ في هذه الحالة انه يساوي الواحد بالقيمة المطلقة ($|-1|$)، وبالتالي فالسيرورة تحتوي على جذر الوحدة فهي غير مستقرة.

❖ **التطبيق رقم (5):**

لتكن السيرورة (AR(1)) التالية:

$$y_t = \delta + 0.9\, y_{t-1} + \varepsilon_t$$

مع (δ) ثابت. و(ε_t) صخب ابيض.

المطلوب:

1-بين ان معاملات الارتباط الذاتي للنموذج ليست دالة للقيم التي يمكن ان يأخذها الثابت δ.

➢ **الحل:**

بإدخال معامل التأخير يصبح النموذج في الصيغة التالية:

$$y_t = \delta + 0.9\,L\,y_t + \varepsilon_t \rightarrow y_t(1-0.9\,L) = \delta + \varepsilon_t$$

$$y_t = \frac{1}{1-0.9\,L}(\delta + \varepsilon_t) = \frac{1}{1-0.9}\delta + \frac{1}{1-0.9\,L}\varepsilon_t$$

نعلم ان:

$$\frac{1}{1-\emptyset L}\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty}\emptyset^j\,\varepsilon_{t-j} \Rightarrow \frac{1}{1-0.9\,L}\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty}0.9^j\,\varepsilon_{t-j}$$

وبالتالي تكون النتيجة:

$$y_t = \frac{1}{1-0.9}\delta + \sum_{j=0}^{\infty}0.9^j\,\varepsilon_{t-j}$$

لاستخراج معاملات الارتباط المختلفة نقوم بحساب الامل الرياضي، التباين، والتباين المشترك.

حساب الامل الرياضي:

$$E(y_t) = \frac{\delta}{1-0.9}$$

حساب التباين:

$$\gamma_0 = E(y_t - E(y_t))^2 = E(y_t - \frac{\delta}{1-0.9})^2 = E(\sum_{j=0}^{\infty}0.9^j\,\varepsilon_{t-j})^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-0.9^2}$$

حساب التباينات المشتركة من الرتبة (τ):

$$\gamma_\tau = E\left(y_t - \frac{\delta}{1-0.9}\right)\ \left(y_\tau - \frac{\delta}{1-0.9}\right) = E(\sum_{j=0}^{\infty}0.9^j\,\varepsilon_{t-j})(\sum_{j=0}^{\infty}0.9^j\,\varepsilon_{t-j-\tau})$$

$$\gamma_\tau = E(\varepsilon_t + 0.9\varepsilon_{t-1} + .. + 0.9^\tau\varepsilon_{t-\tau} + ..)(\varepsilon_{t-\tau} + 0.9\varepsilon_{t-\tau-1} + 0.9^2\varepsilon_{t-\tau-2} + ..) =$$

$$\gamma_\tau = 0.9^\tau\frac{1}{1-0.9^2}\sigma_\varepsilon^2$$

النتيجة الهامة التي يمكن استخراجها من الحسابات السابقة هو عدم ارتباط كل من التباين والتباين المشترك بقيمة الثابت (δ) ، فاذا علمنا ان معامل الارتباط يعطى من خلال العلاقة التالية :

$$\rho_\tau = \frac{\gamma_\tau}{\gamma_0}$$

فهذا يعني ان قيم معاملات الارتباط الذاتي مستقلة عن القيمة التي يمكن ان يأخذها الثابت (δ).

❖ **التطبيق رقم (6):**

لدينا معاملات الارتباط الذاتي التالية:

$$\rho_1 = 0.7 \ , \rho_2 = 0.49 \ , \rho_3 = 0.34 \ , \rho_4 = 0.24 \ \ , \rho_5 = 0.17$$

المطلوب:

1. هل يمكن تحديد السيرورة (AR(p)) التي تولد هذه المعاملات؟

➢ **الحل:**

نبدأ أولا بمحاولة اختبار نموذج (AR(1))، نعلم انه في نموذج (AR(1)) يكون لدينا: $(\phi_1 = \rho_1)$

وبالتالي يكون نموذج (AR(1)) في هذه الحالة من الشكل:

$$y_t = 0.7 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

كما نعلم انه في هذا النموذج تتولد معاملات الارتباط الذاتي انطلاقا من المعادلة:

$$\rho_\tau = \phi_1 \rho_{\tau-1}$$

بتطبيق المعادلة السابقة لاستخراج معاملات الارتباط المختلفة مع $(\rho_0 = 1)$ ، نتحصل على النتائج التالية:

$$\rho_1 = 0.7 \ , \rho_2 = 0.49 \ , \rho_3 = 0.343 \ , \rho_4 = 0.2401 \ \ , \rho_5 = 0.1680$$

نلاحظ ان القيم المولدة من طرف النموذج (AR(1)) تتوافق تماما مع قيم معاملات الارتباط المعطاة. إذا النموذج المولد لهذه القيم هو بالتأكيد نموذج (AR(1)).

❖ **التطبيق رقم (7):**

لدينا نموذج (AR(2)) التالي:

$$Y_t = -0.8 Y_{t-1} + 0.1 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

1. هل النموذج مستقر
2. هل هو قابل للانعكاس
3. استخرج معاملات $(\psi_1, \psi_2, \psi \quad ,..., \psi_5)$ للنموذج $(MA(\infty))$ الموافق.
4. احسب معاملات الارتباط الذاتي حتى الرتبة الخامسة
5. استخرج دالة الارتباط الذاتي الجزئية

- **الحل:**

لدراسة استقرارية النموذج (AR(2)) لدينا طريقتين اما استخراج جذور المعادلة المميزة لكثير الحدود والتحقق من انها كلها اقل من الواحد بالقيمة المطلقة او مراقبة مباشرة شروط الاستقرارية الثلاث التالية:

$$\emptyset_1 + \emptyset_2 < 1$$
$$\emptyset_2 - \emptyset_1 < 1$$
$$|\emptyset_1| < 1$$

نتحقق من توفر هذه الشروط في النموذج:

$$\emptyset_1 + \emptyset_2 < 1 \Rightarrow -0.8 + 0.1 = -0.7 < 1$$
$$\emptyset_2 - \emptyset_1 < 1 \Rightarrow 0.1 - (-0.8) = 0.9 < 1$$
$$|\emptyset_1| < 1 \Rightarrow |0.1| < 1$$

جميع الشروط محققة مما يعني ان السيرورة مستقرة.

2.السيرورة (Y_t) هي سيرورة (AR(2)) وبالتالي فهي محددة الرتبة مما يعني انها قابلة للانعكاس بالتعريف، وبما انها مستقرة فانه تقبل تمثيل متوسطات متحركة (MA).

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} = \Psi(L)\varepsilon_t$$

مع:

$$\Psi(L) = \psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + .. + \psi_j L^j + ..$$

$$Y_t = \emptyset_1 Y_{t-1} + \emptyset_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \Rightarrow (1 - \emptyset_1 L - \emptyset_2 L^2) Y_t = \varepsilon_t \Rightarrow \Phi(L) Y_t = \varepsilon_t$$
$$\Rightarrow Y_t = \Phi(L)^{-1} \varepsilon_t$$

بالمطابقة بين النموذج في شكليه:

$$Y_t = \Psi(L)\varepsilon_t$$
$$Y_t = \Phi(L)^{-1}\varepsilon_t$$

نستخلص ان:

$$\Psi(L) = \Phi(L)^{-1} \Rightarrow \Phi(L) \quad \Psi(L) = 1$$
$$\Phi(L) \quad \Psi(L) = 1 \Rightarrow (1 - \emptyset_1 L - \emptyset_2 L^2)(\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + ..) = 1$$
$$\psi_0 + (\psi_1 - \emptyset_1\psi_0)L + (\psi_2 - \emptyset_1\psi_1 - \emptyset_2\psi_0)L^2 + (\psi_3 - \emptyset_1\psi_2 - \emptyset_2\psi_1)L^3 + .. = 1$$

بالتطابق بين طرفي المعادلة نستخلص ان:

$$\psi_0 = 1 , \qquad \psi_1 - \emptyset_1\psi_0 = 0 \Rightarrow \psi_1 = \emptyset_1\psi_0 = -0.8 \times 1 = -0.8$$

ومن خلال العلاقة التكرارية التالية يمكننا استخراج باقي المعالم الأخرى (ψ_j) حيث:

$$\psi_j - \emptyset_1\psi_{j-1} - \emptyset_2\psi_{j-2} = 0 \Rightarrow \psi_j = \emptyset_1\psi_{j-1} + \emptyset_2\psi_{j-2} \ , \quad j = 2,3,4, ..$$

مما يمكننا من استخراج النتائج التالية:

$$\psi_2 = \emptyset_1\psi_1 + \emptyset_2\psi_0 \Rightarrow \psi_2 = -0.8 \times (-0.8) + 0.1 \times 1 = 0.74$$
$$\psi_3 = \emptyset_1\psi_2 + \emptyset_2\psi_1 \Rightarrow \psi_3 = -0.8 \times (0.74) + 0.1 \times 0.8 = -0.672$$
$$\psi_4 = \emptyset_1\psi_3 + \emptyset_2\psi_2 \Rightarrow \psi_4 = -0.8 \times (-0.672) + 0.1 \times 0.74 = 0.611$$
$$\psi_5 = \emptyset_1\psi_4 + \emptyset_2\psi_3 \Rightarrow \psi_5 = -0.8 \times (0.611) + 0.1 \times (-0.672) = -0.556$$

4.استخراج معاملات الارتباط الذاتي حتى الرتبة الخامسة

لاستخراج هذه المعاملات نستعمل العلاقة العامة الخاصة بالنموذج (AR(2)) :

$$\rho_k = \emptyset_1\rho_{k-1} - \emptyset_2\rho_{k-2} + .. + \emptyset_p\rho_{k-p}$$

حيث:

$$\rho_0 = 1 , \qquad \rho_k = \rho_{-k}$$
$$\rho_1 = \emptyset_1\rho_0 - \emptyset_2\rho_1 \Rightarrow \rho_1 = \frac{\emptyset_1}{1 - \emptyset_2} = -0.888$$
$$\rho_2 = \emptyset_1\rho_1 - \emptyset_2\rho_0 = 0.811 , \qquad \rho_3 = \emptyset_1\rho_2 - \emptyset_2\rho_1 = -0.737$$
$$\rho_4 = \emptyset_1\rho_3 - \emptyset_2\rho_2 = 0.671 , \qquad \rho_5 = \emptyset_1\rho_4 - \emptyset_2\rho_3 = -0.61$$

5.استخراج دالة الارتباط الذاتي الجزئية

نعلم ان دالة الارتباط الذاتي الجزئية لسيرورة $(AR(p))$ تنعدم عند التأخير $(k = p + 1)$ وبالتالي فان $(\emptyset_{kk} = 0\ , k = 3,4,5..\ )$ ، يبقى فقط حساب $(\emptyset_{kk}\ \ , k = 1,2)$

يتم استخراج معاملات الارتباط الذاتي الجزئية من مختلف الرتب باستعمال العلاقة:

$$\emptyset_{kk} = 1\ ,\quad k = 0$$

$$\emptyset_{kk} = \rho_1\ ,\quad k = 1$$

$$\emptyset_{kk} = \frac{|k^*|}{|k|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}\ ,\qquad k = 2,3,..$$

المصفوفة (k) تمثل مصفوفة معاملات الارتباط الذاتي البسيطة.

المصفوفة (k^*) تمثل مصفوفة معاملات الارتباط الذاتي البسيطة بعد اجراء تحويل بسيط عليها حيث نحذف العمود (k) وتعويضه بالعمود المشكلة قيمه من $(\rho_1,\ \rho_2,)$.

يمكننا إذا استنتاج ان:

$$\emptyset_{11} = \rho_1 = -0.888\,,$$

$$\emptyset_{22} = \frac{|k^*|}{|k|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - {\rho^2}_1}{1 - {\rho^2}_1} = \frac{0.811 - (-0.888)^2}{1 - (-0.888)^2} = 0.1$$

التطبيق رقم (8):

ليكن نموذج (AR(2)) التالي:

$$y_t = y_{t-1} - 0.21\, y_{t-2} + \varepsilon_t$$

1.هل النموذج مستقر؟ هل هو قابل للانعكاس؟

2.احسب المعاملات الخمسة الأولى $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \quad \omega_5)$ لنموذج $(MA(\infty))$ المقابل.

➢ **الحل:**

1. لكي يكون نموذج (AR(2)) مستقر يجب ان تكون جذور المعادلة المميزة اقل من الواحد بالقيمة المطلقة.

باستعمال المعادلة المميزة:

$$\lambda^2 - \lambda + 0.21 = 0$$

نتحصل على الجذور التالية:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{(-1)^2 - 4 \times 0.21}}{2} = 0.5 \pm 0.2$$

$$\lambda_1 = 0.7 \ , \lambda_2 = 0.3$$

إذا (λ_1) و(λ_2) جذور حقيقية وبالقيمة المطلقة فهي أصغر من الواحد.

$$|\lambda_1| = |0.7| < 1 \ , |\lambda_2| = |0.3| < 1$$

شرط الاستقرارية للنموذج متحقق وبالتالي فالنموذج مستقر.

–النموذج قابل للانعكاس لأنه بالتعريف كل نموذج (AR) محدد الرتبة قابل للانعكاس.

2. لتحديد معاملات نموذج $(MA(\infty))$ الموافقة لنموذج (AR(2))، يمكننا استعمال اجراء (procédé des fractions rationnelles) او استعمال النظام $(\omega(L)\phi(L) = 1)$

–باستعمال طريقة (procédé de des fractions rationnelles) نتحصل على :

$$y_t = \left(\frac{1.75}{1 - 0.7L} - \frac{0.75}{1 - 0.3L}\right)\varepsilon_t = \left(1.75\sum_{j=0}^{\infty}(0.7L)^j - 0.75\sum_{j=0}^{\infty}(0.3L)^j\right)\varepsilon_t$$

$$y_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + 0.79\varepsilon_{t-2} + 0.58\varepsilon_{t-3} + 0.4\varepsilon_{t-4} + 0.29\varepsilon_{t-5} + ..$$

–باستعمال النظام $(\omega(L)\phi(L) = 1)$ نتحصل على:

$$\omega_1 - \phi_1 = 0$$

$$\omega_2 - \omega_1\phi_1 - \phi_2 = 0$$

$$\omega_j = \phi_1\omega_{j-1} - \phi_2\omega_{j-2} \ , \ \ j > 0$$

بما ان $(\phi_1 = 1)$ و $(\phi_2 = -0.21)$ نجد من خلال التعويض:

$$\omega_1 = 1$$

$$\omega_2 = 1 \times 1 - 0.21 = 0.79$$

$$\omega_3 = 1 \times 0.79 - 0.21 \times 1 = 0.58$$

$$\omega_4 = 1 \times 0.58 - 0.21 \times 0.79 = 0.41$$

$$\omega_5 = 1 \times 0.41 - 0.21 \times 0.58 = 0.29$$

❖ **التطبيق رقم (9):**

لدينا نموذج (AR(2)) التالي:

$$Y_t = 0.9Y_{t-1} - 0.7Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

1. هل النموذج مستقر

➢ **الحل:**

نستخرج جذور كثير الحدود ونتحقق من انها أكبر من الواحد بالقيمة المطلقة

$$Y_t - 0.9Y_{t-1} + 0.7Y_{t-2} = \varepsilon_t \Rightarrow (1 - 0.9L + 0.7L^2)Y_t = \varepsilon_t$$

$$\Rightarrow (1 - 0.9L + 0.7L^2) = 0$$

من اجل تسهيل الحسابات نضرب المعادلة في العدد 10 ونستخرج المميز

$$\Delta = (-9)^2 - 40 \times 7 \times 1 = 81 - 280 = -199$$

بما ان المميز سالب فهذا يعني ان حل المعادلة يمثله جذرين مركبين في الشكل:

$$L = \frac{9 \pm i\sqrt{199}}{14} = \frac{9}{14} \pm i\frac{\sqrt{199}}{14}$$

للتمكن من مقارنة الحل مع الواحد نحسب ρ (module).

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{9}{14}\right)^2 + (\frac{\sqrt{199}}{14})^2} \approx 1.2 \Rightarrow \rho > 1$$

بما ان $(\rho > 1)$ إذا النموذج مستقر.

❖ **التطبيق رقم (10):**

لدينا النموذج (AR(2)) التالي:

$$Y_t = 0.6Y_{t-1} + 0.3Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

مع: $\sigma_\varepsilon^2 = 3$

1. هل النموذج مستقر
2. هل هو قابل للانعكاس (الانقلاب)
3. احسب $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_5)$
4. احسب معاملات الارتباط الذاتي $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_5)$

➢ **الحل:**

1. لكي يكون نموذج (AR(2)) مستقر يجب ان تكون جذور المعادلة المميزة لكثير الحدود أصغر من الواحد بالقيمة المطلقة، او بطريقة بديلة إذا كانت جذور كثير الحدود المميز أكبر من الواحد بالقيمة المطلقة (خارج دائرة الوحدة)

باستعمال المعادلة المميزة:

$$\lambda^2 - 0.6\lambda - 0.3 = 0$$

نحسب المميز ونستخرج جذري حل المعادلة فنجد:

$$\Delta = (-0.6)^2 + 4 \times 0.3 = 1.56 > 0$$

وبالتالي:

$$\lambda_1 = \frac{0.6 + \sqrt{1.56}}{2} = 0.92, \qquad \lambda_2 = \frac{0.6 - \sqrt{1.56}}{2} = -0.325$$

بما ان $(|\lambda_1| < 1)$ و$(|\lambda_2| < 1)$ فان السيرورة مستقرة.

باستعمال كثير الحدود المميز:

$$1 - 0.6L - 0.3L^2 + 0$$

$$\Delta = (-0.6)^2 + 4 \times 0.3 = 1.56 > 0$$

$$\lambda_1 = \frac{0.6 - 1.25}{-2 \times 0.3} = 1.08, \qquad \lambda_2 = \frac{0.6 + \sqrt{1.56}}{-2 \times 0.3} = -3.08$$

بما ان $(|L_1| > 1)$ و$(|L_2| > 1)$ أكبر من الواحد بالقيمة المطلقة (خارج دائرة الوحدة) فان هذه السيرورة مستقرة.

2. بالتعريف كل نموذج (AR) محدد الرتبة فهو قابل للقلب(الانعكاس)
3. لحساب (γ_0) نستعمل العلاقة:

$$\gamma_0 = \emptyset_1\gamma_1 + \emptyset_2\gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2$$

ولاستخراج (γ_1) و(γ_2) نستعمل العلاقة العامة:

$$\gamma_h = \emptyset_1\gamma_{h-1} + \emptyset_2\gamma_{h-2} \quad , \quad h > 0$$

فنتحصل على:

$$\gamma_1 = \emptyset_1\gamma_0 + \emptyset_2\gamma_1$$
$$\gamma_2 = \emptyset_1\gamma_1 + \emptyset_2\gamma_0$$

حل هذا النظام بالتعويض يعطينا

$$\gamma_1 = \frac{\emptyset_1}{1-\emptyset_2}\gamma_0 \ , \qquad \gamma_2 = \frac{\emptyset_1^2 + \emptyset_2 - \emptyset_2^2}{1-\emptyset_2}\gamma_0$$

وبتعويض (γ_1) و(γ_2) في علاقة التباين (γ_0) علما ان $(\emptyset_1 = 0.6 \ , \ \emptyset_2 = 0.3 \ , \ \sigma_\varepsilon^2 = 3)$ نتحصل على:

$$\gamma_0 = \emptyset_1\gamma_1 + \emptyset_2\gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2$$
$$\gamma_0 = \frac{1-\emptyset_2}{(1+\emptyset_2)[(1-\emptyset_2)^2 - \emptyset_1]}\sigma_\varepsilon^2 = 12.42$$

يمكننا الان استخراج قيم (γ_1) و(γ_2) حيث:

$$\gamma_1 = \frac{\emptyset_1}{1-\emptyset_2}\gamma_0 = 10.64$$

حساب (γ_0) و(γ_1) يسمح لنا باستخراج كل معاملات التباين المشترك الذاتي من أي رتبة من خلال استعمال العلاقة التكرارية:

$$\gamma_h = \emptyset_1\gamma_{h-1} + \emptyset_2\gamma_{h-2}$$
$$\gamma_2 = \emptyset_1\gamma_1 + \emptyset_2\gamma_0 = 10.11\,, \quad \gamma_3 = \emptyset_1\gamma_2 + \emptyset_2\gamma_1 = 9.26$$

$\gamma_4 = \emptyset_1\gamma_3 + \emptyset_2\gamma_2 = 8.59\,, \quad \gamma_5 = \emptyset_1\gamma_4 + \emptyset_2\gamma_3 = 7.93$

4. حساب معاملات الارتباط الذاتي $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, .., \rho_5)$

نستعمل مباشرة العلاقة: $\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0}$

$$\rho_1 = 0.86\,, \quad \rho_2 = 0.81\,, \quad \rho_3 = 0.75\,, \quad \rho_4 = 0.69\,, \quad \rho_5 = 0.64$$

- **التطبيق رقم (11):**

إذا كان (ε_t) صخب ابيض ضعيف، و(X_t) سيرورة مستقرة يحقق العلاقة التالية:

$$X_t = \varepsilon_t - 0.4\,X_{t-1} + 0.12\,X_{t-2}$$

1. تحديد نوع نموذج (ARMA)
2. بين ان (ε_t) هي استحداث (l'innovation) السيرورة (X_t)، و ان دالة الارتباط الذاتي ل(X_t) $(\rho(.))$ تحقق العلاقة التراجعية التالية:

$$\rho(h) = a\rho(h-1) + b\rho(h-2) \quad , h \geq 2$$

مع (a) و(b) ثوابت يطلب تحديدهم

3. استخرج تباين (ε_t) التي من اجلها يكون تباين (X_t) وحدوي (واحد).
4. بين ان:

$$\rho(h) = \frac{2}{11}(0.2)^h + \frac{9}{11}(-0.6)^h \,, h \geq 0$$

- **الحل:**

1. النموذج هو (AR(2)) او (ARMA(2,0))
2. يعتبر الصخب (ε_t) سيرورة الاستحداث في نموذج (AR(2)) ، في حالة كانت جذور كثير الحدود خارج دائرة الوحدة، كثير الحدود في هذه الحالة هو:

$$\Phi(L) = (1 + 0.4L - 0.12L^2) = (1 + 0.6L)(1 - 0.2L)$$

وبالتالي فالجذور هي: $(L_1 = {}^{-1}/_{0.6}) \quad (L_2 = {}^{1}/_{0.2})$

وهي أكبر من الواحد بالقيمة المطلقة اذا (ε_t) تمثل استحداث نموذج (AR(2)) .

التحقق من العلاقة التراجعية التالية:

$$\rho(h) = a\rho(h-1) + b\rho(h-2) \quad , h \geq 2$$

بما ان السيرورة ممركزة (متوسط معدوم) لدينا:

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

$$\gamma(h) = E(X_t\, X_{t-h})$$

لاستخراج $(E(X_t\, X_{t-h}))$ نقوم بكل بساطة بضرب النموذج ب$((X_{t-h}))$ فنتحصل على:

$$X_t X_{t-h} = \varepsilon_t X_{t-h} - 0.4\, X_{t-1} X_{t-h} + 0.12\, X_{t-2}\, X_{t-h}$$

بما ان (ε_t) هو سيرورة الاستحداث اذا $(E(\varepsilon_t X_{t-h}) = 0)$ ، ومنه نتحصل بعد ادخال معامل الامل الرياضي على العلاقة التالية:

$$\gamma(h) = -0.4\, \gamma(h-1) + 0.12\, \gamma(h-2) \quad , h \geq 2$$

بقسمة المعادلة على $(\gamma(0))$ نتحصل على:

$$\rho(h) = -0.4\, \rho(h-1) + 0.12\, \rho(h-2) \quad , h \geq 2$$

ومنه: $(a = -0.4)$ و $(b = 0.12)$

3. توقفنا في السؤال السابق عند $(h \geq 2)$ ، لنرى الان الأمور من اجل $(h = 1)$:

بنفس الطريقة السابقة نقوم بضرب المعادلة الأساسية بالمقدار X_{t-1} فنتحصل على:

$$X_t X_{t-1} = \varepsilon_t X_{t-1} - 0.4\, {X_{t-1}}^2 + 0.12\, X_{t-2}\, X_{t-1}$$

$$E(X_t X_{t-1}) = E(\varepsilon_t X_{t-1}) - 0.4 E\left({X_{t-1}}^2\right) + 0.12\, E\, (X_{t-2}\, X_{t-1})$$

$$E(X_t X_{t-1}) = E(\varepsilon_t X_{t-1}) - 0.4 E\left({X_{t-1}}^2\right) + 0.12\, E\, (X_{t-2}\, X_{t-1})$$

$$\gamma(1) = -0.4\, \gamma(0) + 0.12\, \gamma(1) \quad , \qquad E(\varepsilon_t X_{t-1}) = 0$$

أخيرا نستخرج $(\rho(1))$

$$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{-0.4\, \gamma(0) + 0.12\, \gamma(1)}{\gamma(0)} = -0.4 + 0.12\rho(1)$$

$$\rho(1) = -0.4 + 0.12\rho(1) \Rightarrow \rho(1) = \frac{-0.4}{1 - 0.12} = \frac{-5}{11}$$

الان لحساب تباين (X_t) نعلم ان:

تباين السيرورة (X_t) التي تتبع نموذج (AR(2)) من الشكل:

$$X_t = \emptyset_1 X_{t-1} + \emptyset_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

يمكن استخراجها بطرق عديدة، فيمكن استعمال العبارة التالية:

$$E(X_t{}^2) = E[(\emptyset_1 X_{t-1} + \emptyset_2 X_{t-2} + \varepsilon_t)^2]$$

او استعمال العبارة التالية:

$$E(X_t \;\; X_t) = E\left[(\emptyset_1 X_{t-1} + \emptyset_2 X_{t-2} + \varepsilon_t) \;\; X_t \;\; \right]$$

الطريقة الاولى

$$E(X_t{}^2) = E\left[(\emptyset_1 X_{t-1} + \emptyset_2 X_{t-2} + \varepsilon_t) \;\; X_t \;\; \right]$$

$$\gamma(0) = E\left[(\emptyset_1 X_t X_{t-1} + \emptyset_2 X_t X_{t-2} + \varepsilon_t X_t) \quad \right]$$

$$\gamma(0) = \emptyset_1 E(X_t X_{t-1}) + \emptyset_2 E(X_t X_{t-2}) + E(\varepsilon_t X_t)$$

$$\gamma(0) = \emptyset_1 \gamma(1) + \emptyset_2 \gamma(2) + \sigma_\varepsilon^2$$

نعلم ان: $E(\varepsilon_t X_t) = \sigma_\varepsilon^2$ حيث:

$$E(\varepsilon_t X_t) = \emptyset_1 \; E(\varepsilon_t X_{t-1}) + \emptyset_2 \; E(\varepsilon_t X_{t-2}) + E(\varepsilon_t{}^2)$$

بما ان سيرورة الاستحداثات (ε_t) ليس لها علاقة بالسلوك الماضي ل(X_t) فهي عمودية (orthogonal) لماضي (X_t) اذا $(E(\varepsilon_t X_{t-1}) = E(\varepsilon_t X_{t-2}) = 0)$ مما يعني ان :

$$\gamma(0) = \emptyset_1 \gamma(1) + \emptyset_2 \gamma(2) + \sigma_\varepsilon^2$$

الطريقة الثانية

بالتعويض واستعمال العلاقة الأولى نجد:

$$E(X_t{}^2) = E[(\emptyset_1 X_{t-1} + \emptyset_2 X_{t-2} + \varepsilon_t)^2]$$

$$E(X_t{}^2) = E\left[(\emptyset_1 X_{t-1} + \emptyset_2 X_{t-2})^2 + \varepsilon_t{}^2 + 2(\emptyset_1 X_{t-1} + \emptyset_2 X_{t-2})\varepsilon_t) \;\; \right]$$

$$E(X_t{}^2) = E\Big[(\emptyset_1{}^2 X_{t-1}{}^2 + \emptyset_2{}^2 X_{t-2}{}^2 \quad + 2\emptyset_1\emptyset_2 X_{t-1}X_{t-2} + \varepsilon_t{}^2 + 2\emptyset_1 \varepsilon_t X_{t-1} + 2\emptyset_2 \varepsilon_t X_{t-2}) \;\; \Big]$$

$$E\left(X_t^{2}\right)=\emptyset_1^{\,2}E\left(X_{t-1}^{\,2}\right)+\emptyset_2^{\,2}E\left(X_{t-2}^{\,2}\right)+2\emptyset_1\emptyset_2E(X_{t-1}X_{t-2})+E(\varepsilon_t^{\,2})$$
$$+2\emptyset_1E(\varepsilon_tX_{t-1})+2\emptyset_2E(\varepsilon_tX_{t-2})$$

بما ان $(E(X_t^{2})=E(X_{t-1}^{\,2})=E(X_{t-2}^{\,2}))$ و $(E(\varepsilon_tX_{t-1})=E(\varepsilon_tX_{t-2})=0)$

$$E\left(X_t^{2}\right)=\emptyset_1^{\,2}E\left(X_t^{2}\right)+\emptyset_2^{\,2}E\left(X_t^{2}\right)+2\emptyset_1\emptyset_2E(X_{t-1}X_{t-2})+E(\varepsilon_t^{\,2})$$

$$E\left(X_t^{2}\right)=(0.4^2+0.12^2)\,E\left(X_t^{2}\right)-2.\ 0.4\,.0.12E(X_{t-1}X_{t-2})+E(\varepsilon_t^{\,2})$$

$$E(X_{t-1}X_{t-2})=E(X_tX_{t-1})=\gamma(1)=\rho(1)E\left(X_t^{2}\right)$$

بتعويض قيمة $(\rho(1)=-5/11)$ وقيمة $(\gamma(1))$ في المعادلة نتحصل على:

$$E\left(X_t^{2}\right)=(0.4^2+0.12^2)\,E\left(X_t^{2}\right)-2\times\ 0.4\ \times 0.12\ \left(\frac{-5}{11}E\left(X_t^{2}\right)\right)+E(\varepsilon_t^{\,2})$$

$$\left(1-(0.4^2+0.12^2)\ -2\times\ 0.4\ \times 0.12\ \frac{-5}{11}\right)Var(X)=Var(\varepsilon_t\ )$$

$$Var(X)=\frac{Var(\varepsilon_t\ )}{\left(1-(0.4^2+0.12^2)\ -2\times\ 0.4\ \times 0.12\ \frac{-5}{11}\right)}$$

هذا يعني انه لكي يكون تباين (X_t) مساوي للواحد يجب ان يتحقق الشرط:

$$Var(\varepsilon_t\ )=\left(1-(0.4^2+0.12^2)\ -2\times\ 0.4\ \times 0.12\ \frac{-5}{11}\right)$$

4. نعلم ان الحل العام للصيغة المعرفة بقانون التراجع التالي:

$$\rho(h)=-0.4\,\rho(h-1)+0.12\,\rho(h-2)\quad ,h\geq 2$$

هي من الشكل:

$$\rho(h)=Ar_1^h+Br_2^h\quad ,h\geq 0$$

مع العلم ان $(r_1\ )$ $(r_2\ )$ هما جذرا كثير الحدود المميز التي تم حسابها في السؤال الثاني حيث:

$$\rho(h)=A(0.2)^h\ +B(-0.6)^h\quad ,h\geq 0$$

نتحصل على قيمة المقادير (A) و(B) من خلال القيم الأولى:

$$h=0\Rightarrow\rho(0)=A(0.2)^0\ +B(-0.6)^0\ =A+B=1$$

$$h = 1 \Rightarrow \rho(1) = A(0.2)^1 \ + B(-0.6)^1 \ = 0.2\,A - 0.6\,B = \frac{-5}{11}$$

هذا يعني اننا امام جملة معادلتين من الشكل:

$$A + B = 1 \qquad (1)$$

$$0.2\,A - 0.6\,B = \frac{-5}{11} \qquad (2)$$

من المعادلة (1) نستخرج قيمة (A) ونعوضها في المعادلة الثانية:

$$A = 1 - B$$

$$0.2\,(1 - B) - 0.6\,B = \frac{-5}{11} \Rightarrow B = \frac{9}{11}$$

$$A = 1 - \frac{9}{11} = \frac{2}{11}$$

❖ **التطبيق رقم (12):**

لدينا معاملات الارتباط الذاتي التالية:

$$\rho_1 = 0.8 \ , \rho_2 = 0.82 \ , \rho_3 = 0.74 \ , \rho_4 = 0.71 \ \ , \rho_5 = 0.66$$

1. هل يمكن تحديد السيرورة (AR(p)) التي تولد هذه المعاملات؟

➢ **الحل:**

نبدأ أولا بمحاولة اختبار نموذج (AR(1))، نعلم انه في نموذج (AR(1)) يكون لدينا: $(\phi_1 = \rho_1)$

وبالتالي يكون نموذج (AR(1)) في هذه الحالة من الشكل:

$$y_t = 0.8 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

كما نعلم انه في هذا النموذج تتولد معاملات الارتباط الذاتي انطلاقا من المعادلة:

$$\rho_\tau = \phi_1 \rho_{\tau-1}$$

عند تطبيق المعادلة لحساب (ρ_2) نجد النتيجة التالية:

$\rho_2 = 0.8 \times 0.8 = 0.64 \neq 0.82$

مما يعني ان هذا النموذج لا يولد نفس معاملات الارتباط الذاتي السابقة، وبالتالي فالنموذج المولد لهاذه المعاملات ليس نموذج (AR(1)).

نحاول الان تجربة نموذج (AR(2))، باستعمال جملة معادلات (نظام يول وركر) (yule-walker) نتحصل على التالي:

$$p = 2 \ , AR(2) \ \rightarrow \begin{cases} \hat{\rho}_1 = r_1 = \widehat{\emptyset}_1 + \widehat{\emptyset}_2 r_1 \\ \hat{\rho}_2 = r_2 = \widehat{\emptyset}_1 r_1 + \widehat{\emptyset}_2 \end{cases} = \begin{cases} 0.8 = \phi_1 + 0.8\phi_2 \\ 0.82 = 0.8\phi_1 + \phi_2 \end{cases}$$

نقوم بحل جملة المعادلتين بالنسبة ل(ϕ_1) و(ϕ_2) فنجد:

$$\phi_1 = 0.4 \ , \phi_2 = 0.5$$

بعد الحصول على القيم المقدرة ل(ϕ_1) و(ϕ_2) نقوم بعدها باستعمال المعادلة الخاصة بالصيغة العامة لمعاملات الارتباط من الرتبة (τ)

$\rho_\tau = \phi_1 \rho_{\tau-1} + \phi_2 \rho_{\tau-2}$

بالتعويض بقيمة (ϕ_1) و(ϕ_2) نتحصل على:

$\rho_\tau = 0.4\rho_{\tau-1} + 0.5\rho_{\tau-2}$

ومنه يمكننا استخراج معاملات الارتباط في حالة $(\tau = 3,4,5..)$

$\rho_3 = 0.4\rho_2 + 0.5\rho_1 = 0.4(0.82) + 0.5(0.80) = 0.32 + 0.41$

$$\rho_3 = 0.73$$

وبنفس الطريقة نستخرج:

$$\rho_4 = 0.701, \qquad \rho_5 = 0.6448$$

نلاحظ ان معاملات الارتباط المولدة من النموذج (AR(2)) تتساوى الى حد كبير مع معاملات الارتباط المعطاة، مما يؤكد ان النموذج المولد لها هو النموذج (AR(2)).

❖ **التطبيق رقم (13):**

في نموذج (AR (2)) لدينا ($\phi_1 = 0.7 \ , \rho_1 = 0.9$)، هل يمكن استخلاص قيمة (ϕ_2) ؟

➢ **الحل:**

في سيرورة مستقرة، تعطى المعادلة الأولى (نظام يول ووركر) (yule-walker) في نموذج ((AR(2)) في الصيغة التالية:

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1$$

بما انه لدينا (ρ_1) و(ϕ_1) فيمكن استخراج (ϕ_2):

$$\phi_2 = \frac{\rho_1 - \phi_1}{\rho_1} = \frac{0.9 - 0.7}{0.9} = 0.22$$

❖ **التطبيق رقم (14):**

في نموذج ((AR (2)) لدينا $(\rho_1 = 0.71 \ ,\phi_1 = -0.4)$، هل يمكن استخلاص قيم (ϕ_2) ؟

➢ **الحل:**

إذا افترضنا ان السيرورة مستقرة فان المعادلة الأولى ليول ولكر لنموذج ((AR (2)) تعطى في الصيغة التالية:

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1$$

بما انه لدينا (ρ_1) و(ϕ_1) فيمكن استخراج (ϕ_2) حيث:

$$\phi_2 = \frac{\rho_1 - \phi_1}{\rho_1} = \frac{0.7 + 0.4}{0.7} = 1.57$$

في هذه الحالة لدينا:

$$\phi_2 = 1.57 > 1$$

وهي قيمة أكبر من الواحد ولا تحقق شرط الاستقرارية في نموذج ((AR(2))، إذا فهي لا تتوافق مع نموذج ((AR(2)) مستقر. وهذا يتناقض مع فرضية استقرارية السيرورة التي افترضناها مسبقا، إضافة الى ان **معادلات يول وكر لا تكون صحيحة الا في حالة السيرورة المستقرة**، مما يعني انه لا يمكننا استنتاج قيمة (ϕ_2) .

التطبيق رقم (15):

في نموذج $(AR\ (2))$ لدينا $(\rho_2 = 0.6\ , \phi_1 = 0.8)$، هل يمكن استخلاص قيم (ϕ_2) ؟

- **الحل:**

لنفترض ان السيرورة التي نبحث عنها مستقرة، من اجل استخراج قيمة (ϕ_2) من الضروري استعمال المعادلتان الاوليتان ليول ولكر لنموذج $(AR\ (2))$ التي تعطى في الصيغة التالية:

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1$$

$$\rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2$$

بما ان قيم (ϕ_1) و(ρ_2) معطاة فان المجاهيل هي (ϕ_2) و(ρ_1) ، وبالتالي لدينا معادلتين بمجهولين ، نستعمل طريقة التعويض. حيث من المعادلة الأولى نستخرج (ρ_1) ثم نعوضه في المعادلة الثانية فنحصل على:

$$\rho_2 = \phi_1\frac{\phi_1}{1-\phi_2} + \phi_2$$

بعد اجراء الحسابات نحصل على:

$$\phi_1{}^2 - (1+\rho_2)\phi_2 + \rho_2 - \phi_2{}^2 = 0$$

بحل المعادلة بعد تعويض (ϕ_1) و(ρ_2) بقيمهم $\phi_1 = 0.8\ , \rho_2 = 0.6$

$$0.8^2 - (1+0.6)\phi_2 + 0.6 - \phi_2{}^2 = 0 \Rightarrow 1.24 - 1.6\phi_2 - \phi_2{}^2 = 0$$

نتحصل على معادلة من الدرجة الثانية، حلها بطريقة المميز يعطينا حلان هما:

$$\phi_2^* = 1.62, \qquad \phi_2^{**} = -0.02$$

في حالة : $\phi_2^* = 1.62$ نجد ρ_1^* يساوي من المعادلة الأولى ليول ولكر:

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1 \Rightarrow \rho_1 = 0.8 + 1.62\ \rho_1 \Rightarrow \rho_1 = \frac{0.8}{1-1.62} = \frac{0.8}{-0.62} = -1.29$$

في حالة: $\phi_2^{**} = -0.02$ نجد ρ_1^{**} يساوي من المعادلة الأولى ليول ولكر دائما:

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1 \Rightarrow \rho_1 = 0.8 - 0.02\ \rho_1 \Rightarrow \rho_1 = \frac{0.8}{1+0.02} = \frac{0.8}{1.02} = 0.78$$

بما ان (ϕ_2^*) لا تحقق شروط الاستقرارية (اكبر من الواحد)، وبما ان قيمة (ρ_1^*) ليس لها معنى (أكبر من الواحد وهو ما يتناقض مع مفهوم معامل الارتباط). نستنتج ان القيمة المناسبة ل(ϕ_2) هي القيمة $(\phi_2^{**} = -0.02)$ التي تعطي $(\rho_1^{**} = 0.78)$.

❖ التطبيق رقم (16):

ليكن نموذج (AR(2)) التالي:

$$y_t = 0.1y_{t-1} - 0.9\ y_{t-2} \ + \varepsilon_t$$

1. حلل شروط الاستقرارية.
2. في حالة إذا كان النموذج غير مستقر، هل يمكن اجراء بعض التحويلات لجعله مستقرا؟

➢ **الحل:**

1. جذور كثير الحدود المميز للنموذج المعطى في الشكل التالي:

$$1 - 0.1L - 0.9L^2 \quad = 0$$

باستعمال المميز نتحصل على جذري كثير الحدود:

$$L_1 = 1, \qquad\qquad L_2 = -1.11$$

بما ان $(L_1 = 1)$ هذا يعني ان شرط الاستقرارية غير محقق.

2.باستعمال جذور كثير الحدود المميز يمكن كتابة النموذج في الصيغة التالية من خلال استخلاص جذور المعادلة المميزة لكثير الحدود:

$$\lambda_1 = \frac{1}{L_1} = \frac{1}{-1} = -1 \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1}{L_2} = \frac{1}{1.11} = 0.9$$

$$(1 + 0.9L)(1 - L)y_t = \varepsilon_t$$

بأخذ الفرق الأول ل(y_t)

$$W_t = \Delta y_t = (1 - L)y_t$$

بالتعويض في المعادلة السابقة نتحصل على:

$$(1+0.9L)W_t = \varepsilon_t$$

التي تكتب في شكل نموذج $(AR(1))$:

$$W_t + 0.9W_{t-1} = \varepsilon_t \rightarrow W_t = -0.9W_{t-1} + \varepsilon_t$$

وبما ان $(|-0.9| < 1)$ فهذا يعني ان السيرورة الموافقة ل (W_t) مستقرة.

❖ **التطبيق رقم (17):**

ليكن نموذج $(AR(2))$ التالي:

$$X_t = 40 + 0.4\,X_{t-1} - 0.2X_{t-2} + \varepsilon_t \quad , \qquad \varepsilon_t \sim BB(0, \sigma^2 = 12.8)$$

1. تحقق من استقرارية السيرورة.
2. احسب الامل الرياضي ل(X_t).
3. استخرج معادلات (Yule-Walker) لهذه السيرورة.
4. احسب التباين ومعاملات الارتباط الذاتي الخمس الأولى.
5. احسب ثلاث معاملات للارتباط الذاتي الجزئية.

➢ **الحل:**

1.التحقق من استقرارية السيرورة.

يمكن كتابة النموذج بإدخال معامل التأخير في الشكل التالي:

$$(1 - 0.4\,L + 0.2L^2)X_t = 40 + \varepsilon_t$$

تكون السيرورة مستقرة في حال كانت جذور كثير الحدود خارج دائرة الوحدة.

$$1 - 0.4\,ZL + 0.2L^2 = 0$$

$$L = \frac{0.4 \pm i\sqrt{0.64}}{0.4} = \begin{cases} Z = 1 + 2i \\ Z = 1 - 2i \end{cases}$$

إذا:

$$\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} > 1$$

مما يعني ان السيرورة مستقرة، وقد كان بالإمكان معرفة استقرارية السيرورة من خلال مراقبة شروط الاستقرارية في نموذج ((AR(2 المتمثلة في:

$$\emptyset_1 + \emptyset_2 < 1$$
$$-\emptyset_1 + \emptyset_2 < 1$$
$$\emptyset_2 > -1$$

2.النموذج هو نموذج ((AR(2 غير ممركز (المتوسط غير معدوم) وبالتالي:

$$(1 - 0.4\,L + 0.2L^2)X_t = 40 + \varepsilon_t \Rightarrow$$
$$X_t = \frac{40}{1 - 0.4\,L + 0.2L^2} + \frac{\varepsilon_t}{1 - 0.4\,L + 0.2L^2}$$
$$\mu = E(X_t) = {}^{40}/_{0.8} = 50$$

3. نسمي (Y_t) السيرورة المحولة حيث:

$$Y_t = X_t - 50$$
$$Y_{t-1} = X_{t-1} - 50$$
$$Y_{t-2} = X_{t-2} - 50$$

يصبح لدينا:

$$X_t - 50 = 0.4(X_{t-1} - 50) - 0.2(X_{t-2} - 50) + \varepsilon_t$$
$$Y_t = 0.4Y_{t-1} - 0.2Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

مع: $E(Y_t) = 0$

دالة التباين المشترك ل (Y_t) التي هي نفسها دالة التباين المشتك ل(X_t)

$$E(Y_tY_{t-h}) = 0.4\,E(Y_{t-1}Y_{t-h}) - 0.2E(Y_{t-2}Y_{t-h}) + E(\varepsilon_tY_{t-h})$$

المعادلة الأخيرة تعطينا معادلة **يول وركر** ، حيث نعلم ان $(E(\varepsilon_tY_{t-h}) = 0)$:

$$\gamma_h = 0.4\gamma_{h-1} - 0.2\gamma_{h-2}$$

تعويض قيم (h) بالواحد واثنين تعطينا:

$$\begin{cases}\gamma_1 = 0.4\gamma_0 - 0.2\gamma_1\\ \gamma_2 = 0.4\gamma_1 - 0.2\gamma_0\end{cases}$$

4. المعادلة الأولى تسمح لنا بكتابة:

$$\gamma_1 = 0.4(\gamma_0/_{1.2}) = \gamma_0/_3$$

اما المعادلة الثانية فتسمح بكتابة:

$$\gamma_2 = -0.2(\gamma_0/_3)$$

مع العلم ان (γ_0) معطى من خلال العلاقة:

$$\gamma_0 = E(Y_tY_t) = 0.4\, E(Y_{t-1}Y_t) - 0.2E(Y_{t-2}Y_t) + E(\varepsilon_tY_t)$$

$$\gamma_0 = 0.4\gamma_1 - 0.2\gamma_2 + E(\varepsilon_tY_t)$$

وبما ان:

$$\varepsilon_tY_t = 0.4\varepsilon_tY_{t-1} - 0.2\varepsilon_tY_{t-2} + {\varepsilon_t}^2$$

نستنج ان:

$$E(\varepsilon_tY_t) = \sigma^2$$

وبالتالي فان:

$$\gamma_0 = 0.4\gamma_1 - 0.2\gamma_2 + \sigma^2$$

بالتعويض (γ_1) و(γ_2) نحصل على (γ_0):

$$\gamma_0 = 0.4(\gamma_0/_3) - 0.2(-0.2\,\gamma_0/_3) + \sigma^2$$

$$\gamma_0 = 3(\sigma^2/_{2.56}) = 3(12.8/_{2.56}) = 15$$

ثم يمكننا استخراج التباينات المشتركة من مختلف الرتب:

$$\gamma_1 = \gamma_0/_3 = 5$$

$$\gamma_2 = -0.2\,\gamma_0/_3 = -1$$

$$\gamma_3 = 0.4 \times -1 - 0.2 \times 5 = -1.4$$

$$\gamma_4 = 0.4 \times -1.4 - 0.2 \times -1 = 0.36$$

$$\gamma_5 = 0.4 \times -0.36 - 0.2 \times -1.4 = 0.136$$

وبالمثل يمكننا استخراج معاملات ارتباط الذاتي الخمسة الأولى من خلال العلاقة $\left(\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0}\right)$:

$$\rho_1 = 0.333,\ \ \rho_2 = -0.068,\ \ \rho_3 = -0.093,\ \ \rho_4 = -0.024,\ \ \rho_5 = 0.009$$

5.يتم حساب معاملات الارتباط الذاتي الجزئية باستعمال محدد مصفوفة معاملات الارتباط الذاتي. مع معامل الارتباط الذاتي الجزئي من الرتبة الأولى يساوي معامل الارتباط الذاتي الكلي من الرتبة الاولى:

$$\emptyset_{11} = \frac{|\rho_1|}{|1|} = 0.33$$

معامل الارتباط الذاتي الجزئي من الرتبة الثانية:

$$\emptyset_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - {\rho_1}^2}{1 - {\rho_1}^2} = -0.199$$

معامل الارتباط الذاتي الجزئي من الرتبة الثالثة:

$$\emptyset_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = -0.00069$$

نلاحظ ان $(\emptyset_{33})$ ضعيف جدا مما يؤكد ان النموذج من النوع (AR(2)).

3.3 تطبيقات حول نماذج MA

❖ **التطبيق رقم (1):**

لدينا النموذج (MA(1)) التالي:

$$Y_t = \varepsilon_{t-1} - 0.9\varepsilon_t$$
$$\sigma_\varepsilon^2 = 4$$

1. هل هو مستقر
2. هل هو قابل للانعكاس
3. احسب $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_5)$
4. احسب $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_5)$

5. احسب المعاملات $(\pi_1, \pi_2, .., \pi_5)$ الموافقة للنموذج المعكوس $(AR(\infty))$

➢ **الحل:**

1. النموذج مستقر بالتعريف حيث ان جميع نماذج (MA) المحددة الرتبة مستقرة
2. نعم هو قابل للانعكاس حيث ان شرط الانعكاس محقق $(|\theta_1| = |-0.9| < 1)$
3. حساب $\gamma_0, \gamma_1, .., \gamma_5$

كنا قد بينا كيفية حساب التباينات المشتركة الذاتية لنموذج (MA(1)) التي تعطى في الشكل التالي:

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2 = (1 + (-0.9)^2) \times 4 = 7.24$$

$$\gamma_1 = \theta_1\sigma_\varepsilon^2 = -0.9 \times 4 = -3.6$$

$$\gamma_h = 0 \ , \ \ h > 1$$

4. حساب معاملات الارتباط الذاتي $\rho_1, \rho_2, .., \rho_5$

تعطى معاملات الارتباط الذاتي في نموذج (MA(1)) في الصيغة التالية:

$$\rho_1 = \frac{\theta_1}{(1 + \theta_1^2)} = -0.497$$

$$\rho_h = 0 \ , \ \ h > 1$$

5. بما ان $(|\theta_1| < 1)$ فان نموذج $(AR(\infty))$ يعطى في الصيغة التالية إذا كان يوافق مقلوب نموذج (MA(1))

$$\varepsilon_t = Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_1^2 Y_{t-2} + \ldots + \theta_1^5 Y_{t-5} + ..$$

مع: $\pi_j = \theta_1^j$ فمثلا $\pi_1 = \theta_1^1 = -0.9$

والبقية تستخرج كالتالي:

$$\pi_2 = \theta_1^2 = 0.81, \quad \pi_3 = \theta_1^3 = -0.729, \quad \pi_4 = \theta_1^4 = 0.656\,, \quad \pi_5 = \theta_1^5 = 0.59$$

❖ **التطبيق رقم (2):**

لدينا النموذج (MA(2)) التالي:

$$Y_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.1\varepsilon_{t-2}$$

1. ادرس قابلية النموذج للانعكاس

➢ **الحل:**

لكي يكون النموذج قابل للانعكاس يجب ان يكون جذر كثير الحدود أكبر من الواحد بالقيمة المطلقة.

$$Y_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.1\varepsilon_{t-2} \Rightarrow Y_t = (1 - 0.5L + 0.1L^2)\varepsilon_t$$

$$\Rightarrow (1 - 0.5L + 0.1L^2) = 0$$

$$\Delta = (0.25) \quad - 0.4 = -0.15$$

بما ان المميز سالب فهذا يعني ان حل المعادلة يمثله جذرين مركبين في الشكل:

$$L = \frac{0.5 \pm i\sqrt{0.15}}{0.2} = \frac{0.5}{0.2} \pm i\frac{\sqrt{0.15}}{0.2}$$

$$L_1 = \frac{0.5}{0.2} + i\frac{\sqrt{0.15}}{0.2}, \qquad L_2 = \frac{0.5}{0.2} - i\frac{\sqrt{0.15}}{0.2}$$

للتمكن من مقارنة الحل مع الواحد نحسب (module)

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{0.5}{0.2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{0.15}}{0.2}\right)^2} \approx 3.16 \Rightarrow \rho > 1$$

بما ان $(\rho > 1)$ اذا النموذج قابل للانعكاس.

❖ **التطبيق رقم (3):**

1. احسب دالة الارتباط الذاتي النظرية لنموذج (MA(1)) التالي:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + 0.7\,\varepsilon_{t-1}$$

➢ **الحل**

باستعمال العلاقات $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_k)$ الخاصة بنموذج MA(1) نحصل على:

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2(1 + {\theta_1}^2) \quad \Rightarrow \gamma_0 = 1.49\,\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = \theta_1\sigma_\varepsilon^2 = 0.7\,\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_2 = 0$$

وعلى العموم يكون لدينا $(\gamma_k = 0, \;\; k > 1)$

يتم حساب معاملات دالة الارتباط الذاتي كما يلي:

$$\rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1$$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{0.7\ \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2(1+(0.7)^2)} = \frac{0.7\ \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2 1.49} = 0.47$$

لما تكون $(k > 1)$ فان $(\rho_k = 0\ )$ ، اذا :

$$\rho_k = 0\ \ ,\forall k > 1$$

❖ **التطبيق رقم (4):**

لدينا السيرورتان $(\mathrm{MA}(1))$ التاليتان مع (ε_t) و(η_t) سيرورتي صخب ابيض و$(0 < |\theta| < 1)$:

$$X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

$$Y_t = \eta_t + \frac{1}{\theta}\eta_{t-1}$$

1. بين ان هاتان السيرورتان لهما نفس دالة الارتباط الذاتي.

➢ **الحل:**

بما ان السيرورة (X_t) املها الرياضي معدوم وتمثل نموذج $(\mathrm{MA}(1))$ فانه يمكن استخراج مباشرة النتائج التالية:

$$\rho_1(X) = \frac{E(X_t X_{t-1})}{E(X_t^2)} = \frac{\theta E(\varepsilon_t^2)}{(1+\theta^2)E(\varepsilon_t^2)} = \frac{\theta}{(1+\theta^2)}$$

$$\rho_h(X) = \frac{E(X_t X_{t-h})}{E(X_t^2)} = \frac{0}{(1+\theta^2)E(\varepsilon_t^2)} = 0\quad ,h \geq 2$$

بنفس الطريقة يمكن مباشرة استخراج أيضا بالنسبة الى (Y_t) باعتباره نموذج $(\mathrm{MA}(1))$ النتائج التالية:

بعد اجراء التحويل البسيط التالي:

$$k = \frac{1}{\theta}\qquad \Rightarrow Y_t = \eta_t + k\eta_{t-1}$$

$$\rho_1(Y)=\frac{E(Y_tY_{t-1})}{E(Y_t^2)}=\frac{kE(\eta_t^2)}{(1+k^2)E(\eta_t^2)}=\frac{k}{(1+k^2)}=\frac{1/\theta}{(1+1/\theta^2)}=\frac{\theta}{\theta^2+1}$$

$$\rho_h(Y)=\frac{E(Y_tY_{t-h})}{E(Y_t^2)}=\frac{0}{(1+k^2)E(\eta_t^2)}=0\ ,\ \ h\geq 2$$

نلاحظ انه بالنسبة الى كل (h) فان $(\rho_h(X)=\rho_h(Y))$ وبالتالي فان للسيرورتان نفس دالة الارتباط.

❖ **التطبيق رقم (5):**

لدينا النموذج

$$Y_t=\varepsilon_t-0.4\varepsilon_{t-1}+0.5\varepsilon_{t-2}$$
$$\sigma_\varepsilon^2=2$$

1. هل هو مستقر
2. هل هو قابل للانعكاس
3. احسب $(\gamma_0,\gamma_1,..,\gamma_5)$
4. احسب $(\rho_1,\rho_2,..,\rho_5)$

➢ **الحل**

1. بالتعريف كل نموذج (MA) محدد الرتبة مستقر.
2. لمعرفة هل شرط الانعكاس محقق نحسب جذور المعادلة المميزة لكثير الحدود.

$$\lambda^2-0.4\lambda-0.5=0$$

باستعمال المميز نجد ان:

$$\Delta=(-0.4)^2-4\times(-0.5)=2.16>0$$

المعادلة تقبل إذا جذرين حقيقين هما:

$$\lambda_1=\frac{0.4+1.47}{2}=0.935\ ,\qquad \lambda_2=\frac{0.4-1.47}{2}=-0.535$$

بما ان $(\ |\lambda_1|<1,\quad |\lambda_2|<1\ )$ هذا يعني ان السيرورة $(MA(2))$ قابلة للانعكاس.

الطريقة الثانية لاستخراج شرط الانعكاس هي ان تكون جذور كثير الحدود المميز أكبر من الواحد.

يعطى كثير الحدود المميز في الصيغة:

$$1 - 0.4L - 0.5L^2 = 0$$

باستعمال المميز نجد ان:

$$\Delta = (-0.4)^2 - 4 \times (-0.5) = 2.16 > 0$$

المعادلة تقبل إذا جذرين حقيقين هما:

$$L_1 = \frac{0.4 - 1.47}{2 \times (-0.5)} = 1.07\,, \qquad L_2 = \frac{0.4 + 1.47}{2 \times (-0.5)} = -1.87$$

بما ان $(|L_1| > 1, \quad |L_2| > 1)$ هذا يعني ان السيرورة $(MA(2))$ قابلة للانعكاس.

يجب الإشارة الى العلاقة التي تربط جذور كثير الحدود المميز وجذور المعادلة المميزة لكثير الحدود حيث ان:

$$L_2 = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{-0.535} = -1.87 \qquad L_1 = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{0.935} = 1.07$$

3. حساب $\gamma_0, \gamma_1, .., \gamma_5$

لحساب $\gamma_0, \gamma_1, .., \gamma_5$ نستعمل العلاقات المعروفة بنموذج $(MA(2))$

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2 = 2.82$$
$$\gamma_1 = (-\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma_\varepsilon^2 = -0.4$$
$$\gamma_2 = \theta_2\sigma_\varepsilon^2 = -0.8$$
$$\gamma_h = 0\ ,\ \ h > 2$$

4. حساب $\rho_1, \rho_2, .., \rho_5$

انطلاقا من التباين والتباينات المشتركة الذاتية يمكننا استخراج معاملات ارتباط المختلفة.

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = -0.14, \quad \rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = -0.28\,, \quad \rho_h = 0 \ \ \forall h > 2$$

❖ **التطبيق رقم (6):**

احسب دالة الارتباط الذاتي النظرية لنموذج (MA(2)) التالي:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + 0.4\,\varepsilon_{t-1} + 0.5\,\varepsilon_{t-2}$$

➢ **الحل**

باستعمال العلاقات السابقة الخاصة ب $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_k)$ لنموذج (MA(2)) نحصل على:

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2(1 + {\theta_1}^2 + {\theta_2}^2) \quad = \sigma_\varepsilon^2(1 + (0.4)^2 + (0.5)^2) \quad = 1.41\,\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = \sigma_\varepsilon^2(\theta_1 + \theta_2\theta_1) = \sigma_\varepsilon^2\big(0.4 + (0.5)(0.4)\big) = 0.6\,\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_2 = \theta_2\,\sigma_\varepsilon^2 = 0.5\,\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_3 = 0$$

وعلى العموم إذا كان $(k > 2)$ فان $(\gamma_k = 0)$

ومنه نتحصل على:

$$\rho_1 = 0.43 \;\;,\; \rho_2 = 0.35, \quad \rho_2 = 0\;\forall k > 2$$

❖ **التطبيق رقم (7):**

لدينا نموذج (MA(2)) التالي القابل للانعكاس:

$$y_t = \varepsilon_t - 1.2\varepsilon_{t-1} + 0.32\varepsilon_{t-2}$$

المطلوب: حساب المعاملات $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 \quad \pi_5)$ للنموذج الموافق $(AR(\infty))$ باستعمال:

1. طريقة (fractions rationnelles).
2. المساواة $(\pi(L)\theta(L) = \emptyset(L))$

➢ **الحل:**

1. لتطبيق طريقة (fractions rationnelles) يجب أولا حساب جذور المعادلة المميزة لكثير الحدود، التي تعطى في الصيغة التالية:

$$\lambda^2 - 1.2\lambda + 0.32 = 0$$

حل المعادلة بطريقة المميز يعطي الجذور:

$\lambda_1 = 0.8, \quad \lambda_2 = 0.4$

إذا يمكن صياغة النموذج في الصيغة:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{(1-0.8L)(1-0.4L)} y_t$$

$$\frac{1}{(1-0.8L)(1-0.4L)} = \frac{A}{(1-0.8L)} + \frac{B}{(1-0.4L)}$$

حيث عند توحيد المقامات نجد:

$$1 = (1-0.4L)A + (1-0.8L)B$$

$$1 = (A+B) - (0.4A + 0.8B)L$$

اجراء التطابق بين الطرف الأيمن والطرف الايسر تعطينا النظام التالي:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 0.4A + 0.8B = 0 \end{cases}$$

نحن هنا في جملة معادلتين بمجهولين، حل هذه الجملة بالتعويض يعطينا قيمة (A) و(B) كالتالي:

$$A = 2$$

$$B = -1$$

بتعويض قيمة (A) و(B) في الصيغة السابقة نجد:

$$\varepsilon_t = \left[\frac{A}{(1-0.8L)} + \frac{B}{(1-0.4L)}\right] y_t$$

$$\varepsilon_t = \left[\frac{2}{1-0.8L} - \frac{1}{1-0.4L}\right] y_t = \left[2\sum_{j=0}^{\infty}(0.8L)^j - \sum_{j=0}^{\infty}(0.4L)^j\right] y_t$$

ومنه تكون الخمس معاملات الأولى معطاة في الصيغة التالية:

$$\varepsilon_t = y_t + 1.2y_{t-1} + 1.12y_{t-2} + 0.96y_{t-3} + 0.79y_{t-4} + 0.65y_{t-5} + ..$$

وبتحويل بسيط يكتب النموذج $(AR(\infty))$ في الشكل العام التالي بمعاملاته الخمسة الأولى:

$$y_t = -1.2y_{t-1} - 1.12y_{t-2} - 0.96y_{t-3} - 0.79y_{t-4} - 0.65y_{t-5} - .. + \varepsilon_t$$

1. بما انها سيرورة متوسطات متحركة فان المساواة $(\pi(L)\theta(L) = \emptyset(L))$ تختصر في المساواة:

$$\pi(L)\theta(L) = 1$$

مما يعني ان:

$$\pi(L)\theta(L) = 1 \Rightarrow (1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \pi_3 L^3 - \pi_4 L^4 - \ldots)(1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2) = 1$$

بعد اجراء مختلف عمليات الضرب واستخراج العوامل المشتركة نتحصل على:

$$1 - (\pi_1 + \theta_1)L - (\pi_2 - \pi_1\theta_1 + \theta_2)L^2 - (\pi_3 - \pi_2\theta_1 - \pi_1\theta_2)L^3 - .. = 1$$

إذا كان الواحد يساوي الواحد، فمعلمة (L) في الطرف الايسر يقابله القيمة (0) في الطرف الأيمن، اذ لا وجود لمعامل التأخير (L) وهكذا بالنسبة الى معلمة (L^2) في الطرف الايسر اد يقابلها القيمة(0) في الطرف الأيمن حيث لا يوجد معامل التأخير (L^2) وهكذا بالنسبة للبقية.

بتحديد كل طرف من يمين المعادلة وما يقابلها في الطرف الايسر يمكن استخراج النتائج التالية:

$$\pi_1 = -\theta_1 = -1.2$$

$$\pi_2 = \pi_1\theta_1 - \theta_2 = -1.12$$

يمكننا بكل بساطة من استخراج المعادلة المولدة ل(π_j) في حالة $(j > 2)$ (equation en differences)، فمن خلال المعادلة الثالثة:

$$\pi_3 = \pi_2\theta_1 + \pi_1\theta_2 \Rightarrow \pi_j = \pi_{j-1}\theta_1 + \pi_{j-2}\theta_2$$

إذا:

$$\pi_3 = \pi_2\theta_1 + \pi_1\theta_2 = -1.12 \times -1.2 - 1.2 \times 0.32 = -0.96$$

$$\pi_4 = \pi_3\theta_1 + \pi_2\theta_2 = -0.96 \times -1.2 - 1.12 \times 0.32 = -0.79$$

$$\pi_5 = \pi_4\theta_1 + \pi_3\theta_2 = -0.79 \times -1.2 - 1.12 \times 0.32 = -0.64$$

❖ **التطبيق رقم (8):**

ليكن النموذج (MA(2)) التالي:

$$y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

نعلم ان جذور المعادلة المميزة لكثير الحدود:

$$\lambda^2 - \theta_1\lambda - \theta_2 = 0$$

هما على التوالي:

$$\lambda_1 = 0.6 \ , \qquad \lambda_2 = 0.3$$

1. هل يمكن تحديد قيمة المعاملات (θ_1) و(θ_2).

➢ **الحل:**

جذور المعادلة المميزة لكثير الحدود تعطى كالتالي:

$$\lambda_1 = \frac{\theta_1}{2} + \frac{\sqrt{{\theta_1}^2 + 4\theta_2}}{2} \quad , \qquad \lambda_2 = \frac{\theta_1}{2} - \frac{\sqrt{{\theta_1}^2 + 4\theta_2}}{2}$$

انطلاقا من الصيغ السابقة يمكننا جمع هذين الجذرين وحساب جدائهما من الحصول على (θ_1) و (θ_2)

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \theta_1 \Rightarrow \theta_1 = 0.6 + 03 = 0.9$$

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = \frac{{\theta_1}^2}{4} - \frac{({\theta_1}^2 + 4\theta_2)}{4} = -\theta_2 \Rightarrow \theta_2 = -(0.6 \times 0.3) = -0.18$$

❖ **التطبيق رقم (9):**

1.ادرس استقرارية السيرورة $(\mathrm{MA}(2))$ التالية:

$$Y_t = (1 - 2.4L + 0.8L^2)\varepsilon_t$$

مع:

$$E(\varepsilon_s\varepsilon_t) = \begin{cases} 1 & si \ \ s = t \\ 0 & \quad sinon \end{cases}$$

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

2. إذا كانت السيرورة مستقرة، احسب دالة الارتباط الذاتي $(\gamma_h = cov(X_t, X_{t+h}))$

➢ **الحل:**

1. سيرورة متوسطات متحركة محددة الرتبة تكون دائمة مستقرة.

2. تعطى دالة الارتباط الذاتي لسيرورة المتوسطات المتحركة (MA(q)) عموما في الصيغة التالية:

$$\gamma_h = cov(X_t, X_{t+h})$$

$$\gamma_h = E\left[(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + .. + \theta_q\varepsilon_{t-q})(\varepsilon_{t-h} + \theta_1\varepsilon_{t-h-1} + .. + \theta_q\varepsilon_{t-h-q})\right]$$

$$\gamma_h = \begin{cases} \left(\theta_h + \theta_{h+1}\theta_1 + .. + \theta_q\theta_{q-h}\right)\sigma^2 & si\ 1 \le h \le q \\ 0 & si \quad h > q \end{cases}$$

في حالة التباين ($h = 0$) فان قيمته تعطى من خلال:

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + .. + \theta_q^2)\sigma^2$$

ويكون لدينا في حالة السيرورة (MA(2)) التباينات المشتركة التالية:

$$\gamma_h = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2 , & h = 0 \\ \theta_1(1 + \theta_2)\sigma^2 , & h = 1 \\ \theta_2\sigma^2 , & h = 2 \\ 0 , & h = 2 \end{cases}$$

وبالتالي فان دالة الارتباط الذاتي الكلية في حالة النموذج المعطى:

$$Y_t = (1 - 2.4L + 0.8L^2)\varepsilon_t$$

$$var(\varepsilon_t) = 1$$

تأخذ القيم التالية:

$$\gamma_0 = (1 + 2.4^2 + 0.8^2) \times 1 = 7.4$$

$$\gamma_1 = -2.4(1 + 0.8) = -4.32$$

$$\gamma_2 = 0.8$$

$$\gamma_h = 0 , \qquad h \ge 3$$

4.3 تطبيقات حول نماذج ARMA

❖ **التطبيق رقم(1):**

لتكن السيرورة (ARMA(1,1)) التالية:

$$X_t = \emptyset_1 X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}$$

$$X_t - \emptyset_1 X_{t-1} = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}$$

$$(1-\emptyset_1 L)X_t=(1-\theta_1 L)\varepsilon_t$$
$$\Phi(L)X_t=\Theta(L)\varepsilon_t$$

سنفترض ان $|\emptyset_1|<1$ و $|\theta_1|<1$ و ان $\emptyset_1\neq\theta_1$

سنفترض أيضا ان $(\varepsilon_t \sim BB(0,\sigma_\varepsilon^2))$، وبالتالي فان السيرورة (ARMA(1,1)) تقاربيا مستقرة، وسنفترض ان الشرط الأول محقق بحيث ان جميع العزوم ثابتة. لتكن $(\mu_x,\gamma_0,\gamma_h)$ الامل الرياضي، التباين ودالة التباين المشترك الذاتي للسيرورة.

1. احسب الامل الرياضي للسيرورة (X_t)
2. استخرج تباين السيرورة (X_t)
3. استخرج دالة التباين المشترك الذاتي للسيرورة X_t
4. استخرج دالة الارتباط الذاتي للسيرورة X_t

- **الحل:**

1. حساب الامل الرياضي

بما ان السيرورة مستقرة فتطبيق معامل الامل الرياضي يعطينا مباشرة العلاقة التالية:

$$X_t=\emptyset_1 X_{t-1}+\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1} \qquad (1)$$
$$E(X_t)=\emptyset_1 E(X_{t-1})+E(\varepsilon_t)-\theta_1 E(\varepsilon_{t-1})\Rightarrow \mu_x=\emptyset_1\mu_x$$
$$\mu_x-\emptyset_1\mu_x=0$$

بما ان المعادلة وجب ان تكون محققة من اجل اية قيمة ل $(\emptyset_1)$ إذا فالحل الوحيد هو:

$$\mu_x=0$$

إذا السيرورة (ARMA(1,1)) ذات امل رياضي معدوم وهي نتيجة متوقعة حيث ان النموذج لا يحتوي على حد ثابت.

كما يمكن حساب الامل الرياضي بطريقة أخرى باستعمال معامل التأخير يكون لدينا:

$$(1-\emptyset_1 L)X_t=(1-\theta_1 L)\varepsilon_t \Rightarrow X_t=\frac{(1-\theta_1 L)}{(1-\emptyset_1 L)}\varepsilon_t$$

$$E(X_t)=\frac{(1-\theta_1 L)}{(1-\emptyset_1 L)}E(\varepsilon_t)=0$$

نتيجة ان (ε_t) صخب ابيض.

2. حساب التباين

يعرف التباين من خلال العلاقة:

$$\sigma_x^2 = \gamma_0 = E(X_t^2)$$

هناك عدة طرق لحساب تباين نموذج (ARMA(1,1)) سنقتصر في هذه المرحلة على طريقة واحدة.

$$X_t = \emptyset_1 X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \qquad (1)$$

نقوم بضرب المعادلة ب(X_t) فنتحصل على :

$$\mathrm{X}_t^2 = \emptyset_1 X_t X_{t-1} + X_t \varepsilon_t - \theta_1 X_t \varepsilon_{t-1}$$

بإدخال معامل الامل الرياضي نتحصل على:

$$E(\mathrm{X}_t^2) = \emptyset_1 E(X_t X_{t-1}) + E(X_t \varepsilon_t) - \theta_1 E(X_t \varepsilon_{t-1})$$

$$\gamma_0 = \emptyset_1 \gamma_1 + E(X_t \varepsilon_t) - \theta_1 E(X_t \varepsilon_{t-1})$$

نقوم بحساب كل من $(E(X_t \varepsilon_t))$ و$(E(X_t \varepsilon_{t-1}))$:

$$E(X_t \varepsilon_t) = \emptyset_1 E(X_{t-1} \varepsilon_t) + E({\varepsilon_t}^2) - \theta_1 E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1})$$

بما ان $(\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2))$ فان: $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = 0$ و $(E({\varepsilon_t}^2) = \sigma_\varepsilon^2)$ وبما ان الخطأ العشوائي (ε_t) مستقل عن القيم الماضية للمتغير (X_t) اذا $(E(X_{t-1} \varepsilon_t) = 0)$، بمعنى ان القيم الماضية للمتغير العشوائي (X_t) ليست لها علاقة بالاستحداثات الحالية (ε_t) وبالنتيجة تكون النتيجة:

$$E(X_t \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \qquad \forall t$$

بالنسبة الى الجزء الثاني:

$$\begin{aligned} E(X_t \varepsilon_{t-1}) &= \emptyset_1 E(X_{t-1} \varepsilon_{t-1}) + E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}) \\ &= \emptyset_1 \sigma_\varepsilon^2 + 0 - \theta_1 \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

بناء على ان (ε_t) سيرورة صخب ابيض بمتوسط وتباين مشترك معدوم، وتباين يساوي (σ_ε^2).

كنتيجة نهائية نتحصل على:

$$\gamma_0 = \emptyset_1 \gamma_1 + \sigma_\varepsilon^2 - \theta_1 (\emptyset_1 - \theta_1) \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_0 = \emptyset_1 \gamma_1 + [1 - \theta_1 (\emptyset_1 - \theta_1)] \sigma_\varepsilon^2$$

المعادلة الأخيرة تبين ان (γ_0) دالة ل (γ_1) الذي هو مجهول ولكل من $(\emptyset_1)$ (θ_1) (σ_ε^2) المعلومة.

3. **دالة التباين المشترك الذاتي (التغاير الذاتي):**

تعطى الدالة من خلال العلاقة التالية:

$$\gamma_h = E[(X_t - \mu_x)(X_{t-h} - \mu_x)]$$

بما ان الامل الرياضي معدوم إذا يكون لدينا:

$$\gamma_h = E(X_t X_{t-h})$$

للحصول على التباين المشترك الذاتي من الرتبة الأولى نقوم بضرب المعادلة رقم (1) ب(X_{t-1}) فنتحصل على:

$$X_t X_{t-1} = \emptyset_1 X_{y-1}^2 + X_{t-1}\varepsilon_t - \theta_1 X_{t-1}\varepsilon_{t-1}$$

بإدخال معامل الامل الرياضي تصبح العلاقة كالاتي:

$$E(X_t X_{t-1}) = \emptyset_1 E(X_{y-1}^2) + E(X_{t-1}\varepsilon_t) - \theta_1 E(X_{t-1}\varepsilon_{t-1})$$

$$\gamma_1 = \emptyset_1 \gamma_0 + E(X_{t-1}\varepsilon_t) - \theta_1 E(X_{t-1}\varepsilon_{t-1})$$

بما ان الاستحداث (ε_t) مستقل عن القيم الماضية ل(X_{t-1}) اذا: $(E(X_{t-1}\varepsilon_t) = 0)$ وبما ان:

$$E(X_{t-1}\varepsilon_{t-1}) = E(X_t \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$$

ومنه تصبح العلاقة السابقة:

$$\gamma_1 = \emptyset_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_\varepsilon^2$$

بهذه الطريقة نكون قد تحصلنا على جملة معادلتين، معادلة التباين ومعادلة التباين المشترك الذاتي:

$$\gamma_0 = \emptyset_1 \gamma_1 + [1 - \theta_1(\emptyset_1 - \theta_1\ )]\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = \emptyset_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_\varepsilon^2$$

نتحصل على (γ_0) باحلال المعادلة الثانية في المعادلة الأولى، ثم بتعويض عبارة (γ_0) في المعادلة الثانية فنتحصل على (γ_1).

$$\gamma_0 = \frac{1 + \theta_1^2 - 2\emptyset_1\theta_1}{1 - \emptyset_1^2}\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = \frac{(1-\emptyset_1\theta_1)(\emptyset_1-\theta_1)}{1-\emptyset_1^2}\sigma_\varepsilon^2$$

-حساب التباين المشترك الذاتي من الرتبة الثانية:

لاستخراج التباين المشترك الذاتي من الرتبة الثانية نتبع نفس الطريقة السابقة من خلال ضرب العلاقة الأولى في $((X_{t-2}))$ ثم تطبيق معامل الامل الرياضي فنتحصل:

$$X_tX_{t-2} = \emptyset_1X_{t-1}X_{t-2} + X_{t-2}\varepsilon_t - \theta_1X_{t-2}\varepsilon_{t-1}$$

بإدخال معامل الامل الرياضي تصبح العلاقة كالاتي:

$$E(X_tX_{t-2}) = \emptyset_1E(X_{t-1}X_{t-2}) + E(X_{t-2}\varepsilon_t) - \theta_1E(X_{t-2}\varepsilon_{t-1})$$

$$\gamma_2 = \emptyset_1\gamma_1 + 0 - 0$$

بما ان الاستحداث (ε_t) مستقل عن القيم الماضية ل(X_t)، اذا يكون لدينا $(E(X_{t-2}\varepsilon_t = 0)$ $E(X_{t-2}\varepsilon_{t-1}) = 0$.

ومنه تعطى عبارة التباين المشترك الذاتي من الرتبة الثانية في الصيغة:

$$\gamma_2 = \emptyset_1\gamma_1$$

يمكن تعميم النتائج اللاحقة في العلاقة:

$$\gamma_h = \emptyset_1\gamma\ \ (h-1)\ \ ,\ \forall h$$

إذا التباينات المشتركة الذاتية للسيرورة (ARMA(1,1)) تعطى من خلال العلاقات التالية:

$$\begin{cases} \gamma_0 = \dfrac{1+\theta_1^2-2\emptyset_1\theta_1}{1-\emptyset_1^2}\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_1 = \dfrac{(1-\emptyset_1\theta_1)(\emptyset_1-\theta_1)}{1-\emptyset_1^2}\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_h = \emptyset_1\gamma\ \ (h-1) \qquad \forall|h| > 1 \end{cases}$$

4. الارتباطات الذاتية بالمقابل تعطى أيضا في الصيغ التالية:

$$\begin{cases} \rho_x(1) = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_0} = \dfrac{(1-\emptyset_1\theta_1)(\emptyset_1-\theta_1)}{1+\theta_1^2-2\emptyset_1\theta_1} \\ \rho_x(h) = \dfrac{\gamma_h}{\gamma_0} = \emptyset_1\rho_x(h-1) \qquad \forall|h| > 1 \end{cases}$$

نلاحظ ان هذه النتائج تماثل النتائج الخاصة بالتباينات المشتركة المستخرجة من نموذج $(AR(1))$ في حالة $(\theta_1 = 0)$ وتماثل نتائج نموذج $(MA(1))$ في حالة $(\emptyset_1 = 0)$.

❖ **التطبيق رقم (2) :**

لدينا السيرورة $(ARMA(1,1))$ التالية:

$$y_t = \emptyset_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

1. ادرس استقرارية السيرورة
2. ادرس قابلية الانعكاس للسيرورة
3. إذا كانت السيرورة قابلة للانعكاس استخرج المعاملات $(\psi_1, \psi_2, \psi \quad , \ldots, \psi_5)$ للنموذج $(MA(\infty))$ الموافق.

➢ **الحل:**

1. استقرارية السيرورة $(ARMA(1,1))$ متعلقة بالجزء (AR) فاذا كان جذر هذا الأخير أصغر من الواحد بالقيمة المطلقة فالسيرورة مستقرة $(|\emptyset_1| < 1)$
2. شرط الانعكاس للسيرورة $(ARMA(1,1))$ متعلق بمركبة الجزء (MA) فاذا كان جذر هذا الأخير أصغر من الواحد بالقيمة المطلقة فالسيرورة قابلة للانعكاس $(|\theta_1| < 1)$.
3. سنفترض ان السيرورة مستقرة وقابلة للانعكاس وبالتالي فهي تقبل تمثيل سيرورة $(MA(\infty))$،

لاستخراج المعالم $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_5$ نعيد كتابة السيرورة باستعمال معامل التأخير :

$$y_t - \emptyset_1 y_{t-1} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \Rightarrow (1 - \emptyset_1 L) y_t = (1 - \theta_1 L) \varepsilon_t$$

$$\Rightarrow y_t = \frac{(1 - \theta_1 L)}{(1 - \emptyset_1 L)} \varepsilon_t = \Psi(L) \varepsilon_t$$

$$\Rightarrow (1 - \theta_1 L) = (1 - \emptyset_1 L)\, \Psi(L) \varepsilon_t$$

$$\Rightarrow (1 - \theta_1 L) = (1 - \emptyset_1 L)\, (\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + ..)$$

$$\Rightarrow (1 - \theta_1 L) = \psi_0 + (\psi_1 - \emptyset_1 \psi_0) L + (\psi_2 - \emptyset_1 \psi_1) L^2 + (\psi_3 - \emptyset_1 \psi_2) L^3 + ..$$

بالمطابقة بين الطرفين نستخرج:

$$\psi_0 = 1\,, \qquad \psi_1 - \emptyset_1 \psi_0 = -\theta_1 \;\Rightarrow \psi_1 = \emptyset_1 - \theta_1\;,$$

$$\psi_j - \emptyset_1\psi_{j-1} = 0 \Rightarrow \psi_j = \emptyset_1\psi_{j-1} \quad , \qquad j = 2,3,4,5,$$

❖ **التطبيق رقم (3):**

لدينا السيرورة (Y_t) المعرفة كالتالي:

$$Y_t = X_t + \varepsilon_t$$

مع (ε_t) صخب ابيض و (X_t) تتبع السيرورة التالية:

$$X_t = \emptyset X_{t-1} + \eta_t + \theta\eta_{t-1}$$

مع (η_t) سيرورة صخب ابيض، وحيث $(E(\varepsilon_t\eta_s) = 0)$ بالنسبة الى كل (s) و(t).

سنفترض ان $(|\emptyset| < 1)$ و$(|\theta| < 1)$ مع $(\theta \neq \emptyset)$ وان السيرورتان (ε_t) و(η_t) لهما نفس التباين $(\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\eta^2)$.

1. برهن ان السيرورة (Y_t) مستقرة
2. استنتج دالة الارتباط الخاصة بها.

➢ **الحل:**

1. البرهنة على ان (Y_t) سيرورة مستقرة.

يمكننا كتابة السيرورة (Y_t) في الصيغة:

$$Y_t = X_t + \varepsilon_t = \emptyset X_{t-1} + \eta_t + \theta\eta_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \emptyset(Y_{t-1} - \varepsilon_{t-1}) + \eta_t + \theta\eta_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \emptyset Y_{t-1} + \varepsilon_t - \emptyset\varepsilon_{t-1} + \eta_t + \theta\eta_{t-1}$$

نسمي:

$$u_t = \varepsilon_t - \emptyset\varepsilon_{t-1} + \eta_t + \theta\eta_{t-1}$$

مما يمكننا من كتابة (Y_t) في الصيغة التالية:

$$Y_t = \emptyset Y_{t-1} + u_t$$

بما ان $(|\emptyset| < 1)$ (شرط استقرارية نموذج (AR)) فيكفي ان نبرهن ان (u_t) مستقرة، وبالتالي تكون (Y_t) ككل مستقرة.

بما ان (u_t) هي مجموع سيرورات صخب ابيض، فمن الممكن إذا اثبات ان (u_t) ما هي الا سيرورة متوسطات متحركة (MA(q))، علما انه لا يمكن الجزم بان (u_t) مستقرة باعتبار انها مجموع سيرورتين مستقرتين، فمجموع سيرورتين مستقرتين لا تعطي دائما سيرورة مستقرة.

سنبين ان السيرورة (u_t) سيرورة ((MA(q)) من خلال حساب معاملات الارتباط الخاصة بها (لأننا نعرف خواص معاملات الارتباط للسيرورة (MA(q))). علما ان $(E(u_t) = 0)$ لأنه من خلال المعطيات نعلم ان: $(E(\varepsilon_t) = E(\eta_t) = 0)$

بما ان حساب معاملات الارتباط يتطلب معرفة التباين والتباينات المشتركة من مختلف الرتب، إذا نقوم بحسابها أولا.

- **حساب التباين:**

$$E({u_t}^2) = E([\varepsilon_t - \emptyset\varepsilon_{t-1} + \eta_t + \theta\eta_{t-1}]^2)$$

$$= E([\varepsilon_t - \emptyset\varepsilon_{t-1} + \eta_t + \theta\eta_{t-1}]\ \ [\varepsilon_t - \emptyset\varepsilon_{t-1} + \eta_t + \theta\eta_{t-1}])$$

$$\begin{aligned}= E({\varepsilon_t}^2 + \emptyset^2{\varepsilon^2}_{t-1} + {\eta^2}_t + \theta^2{\eta^2}_{t-1} + 2\emptyset\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + 2\varepsilon_t\eta_t + 2\theta\varepsilon_t\eta_{t-1}\\ - 2\emptyset\varepsilon_{t-1}\eta_t + 2\emptyset\theta\varepsilon_{t-1}\eta_{t-1} + 2\theta\eta_t\eta_{t-1})\end{aligned}$$

باستعمال خطية الامل الرياضي، وبمعرفة ان (ε_t) و(η_t) صخب ابيض بمعنى ان:

$$E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) = 0 \qquad E(\eta_t\eta_{t-1}) = 0$$

وتحت فرضية عدم وجود ارتباط بين (ε_t) و(η_t) فان $(E(\varepsilon_t\eta_s) = 0)$ من اجل كل (t) و(s) ، اذا:

$$E(\varepsilon_t\eta_t) = \ E(\eta_{t-1}\varepsilon_{t-1}) = \ E(\varepsilon_t\eta_{t-1}) = \ E(\varepsilon_{t-1}\eta_t) = 0$$

مما يبسط العبارة الخاصة بالتباين الى الشكل التالي:

$$E({u_t}^2) = E({\varepsilon_t}^2) + \emptyset^2E({\varepsilon^2}_{t-1}) + E({\eta^2}_t) + \theta^2E({\eta^2}_{t-1})$$

$$E({u_t}^2) = (1 + \emptyset^2)\sigma_\varepsilon^2 + (1 + \theta^2)\sigma_\eta^2$$

مع (σ_ε^2) و(σ_η^2) يمثلان تباين الصخب الأبيض (ε_t) و(η_t) على التوالي.

- **حساب التباين المشترك من الرتبة الأولى:**

$$E(u_t u_{t-1}) = E([\varepsilon_t - \emptyset\varepsilon_{t-1} + \eta_t + \theta\eta_{t-1}]\ \ [\varepsilon_{t-1} - \emptyset\varepsilon_{t-2} + \eta_{t-1} + \theta\eta_{t-2}])$$

$$= E(\varepsilon_t\ \ \varepsilon_{t-1} - \emptyset\ \ \varepsilon_t\ \ \varepsilon\ \ {}_{t-2} + \varepsilon_t\eta\ \ {}_{t-1} + \theta\ \ \varepsilon_t\eta\ \ {}_{t-2} - \emptyset{\varepsilon^2}_{t-1} + \emptyset^2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} - \emptyset\varepsilon_{t-1}\eta_{t-1} - \emptyset\theta\varepsilon_{t-1}\eta_{t-2} + \theta\eta_{t-1}\varepsilon_{t-1} - \theta\emptyset\eta_{t-1}\varepsilon_{t-2} + \theta{\eta^2}_{t-1} + \theta^2\eta_{t-1}\eta_{t-2})$$

باستعمال دائما خطية الامل الرياضي وفرضية الصخب الأبيض للسيرورتين ($E(\varepsilon_s\varepsilon_t) = E(\eta_s\eta_t) =$ 0) بالنسبة الى كل $(t \neq s)$ إضافة الى الفرضية $(E(\varepsilon_t\eta_s) = 0)$ حتى بالنسبة الى (t=s) نتحصل على:

$$E(u_t u_{t-1}) = -\emptyset E({\varepsilon^2}_{t-1}) + \theta E\left({\eta^2}_{t-1}\right) = -\emptyset\sigma_\varepsilon^2 + \theta\sigma_\eta^2$$

$$E(u_t u_{t-1}) = \theta\sigma_\eta^2 - \emptyset\sigma_\varepsilon^2$$

- لحساب التباين المشترك من الرتبة (h) بنفس الطريقة فإننا نتحصل على:

$$E(u_t u_{t-h}) = 0\ \ ,h \geq 2$$

نستنتج أولا انه من اجل كل (h) وكل(t) فان $(E(u_t u_{t-h}))$ غير متعلقة ب(t) مما يعني ان السيرورة (u_t) مستقرة. ثانيا ونتيجة حساب معاملات الارتباط الذاتي:

$$\rho_u(h) = \frac{E(u_t u_{t-h})}{E({u_t}^2)}$$

التي تبين انعدام جميع المعاملات من الرتبة (h) حيث $(h \geq 2)$، نستنتج ان (u_t) تتبع السيرورة (MA(1))

هذا يعني ان (Y_t) تتبع السيرورة (ARMA(1,1)) حقيقية باعتبار ان جذور كثير الحدود للجزء (MA) تختلف عن جذور كثير الحدود للجزء (AR). وهي مستقرة باعتبار شرط الاستقرارية مرتبط بالجزء (AR) والذي يحقق هذا الشرط، اذ ان $(|\emptyset| < 1)$ كما اننا برهنا ان الجزء (MA(1)) مستقر.

يمكن إذا كتابة (u_t) في الصيغة (MA(1)) كالتالي:

$$u_t = v_t + \alpha v_{t-1}$$

لاستخراج قيمة (α)، نعلم ان معامل الارتباط الذاتي من الرتبة الأولى (ρ_1) في نموذج (MA(1)) السابق يساوي:

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$

وبما اننا وجدنا في نموذجنا ان:

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\theta\sigma_\eta^2 - \emptyset\sigma_\varepsilon^2}{(1+\emptyset^2)\sigma_\varepsilon^2 + (1+\theta^2)\sigma_\eta^2}$$

وبالتالي فيمكن إيجاد (α) من خلال حل المساواة التالية:

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{\theta\sigma_\eta^2 - \emptyset\sigma_\varepsilon^2}{(1+\emptyset^2)\sigma_\varepsilon^2 + (1+\theta^2)\sigma_\eta^2}$$

حل هذه المساواة يعطينا معادلة من الدرجة الثانية لها جذران أحدهما مقلوب الاخر (يكفي فقط معرفة المعطيات الخاصة بكل من $(\theta\ ,\ \emptyset,\ \sigma_\varepsilon^2\ ,\ \sigma_\eta^2\ )$.

2. استنتاج دالة ارتباط السيرورة (Y_t)

بما اننا بينا ان (Y_t) تتبع سيرورة ARMA(1,1) فيمكن كتابتها في الصيغة:

$$Y_t = \emptyset Y_{t-1} + v_t + \alpha v_{t-1}$$

مع (v_t) صخب ابيض. وبحساب معاملات الارتباط الذاتي نجد:

$$\rho_1 = \frac{(1+\emptyset\alpha)(\emptyset+\alpha)}{1+\alpha^2+2\emptyset\alpha}$$

$$\rho_h = \emptyset^h\rho_1\ , \qquad h \geq 2$$

❖ **التطبيق رقم (4):**

لتكن (M) مصفوفة من الرتبة (2×2).

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$$

مع $(a\ c\ \neq b\ d)$

1. بين انه توجد مصفوفة $(N(2\times 2))$ بحيث تكون $(N \times M)$ مصفوفة قطرية (diagonale)
2. لدينا سلسلتان زمنيتان

$$\begin{cases} X_t = \alpha X_{t-1} + \beta Y_{t-1} + \mu_t \\ Y_t = \delta X_{t-1} + \gamma Y_{t-1} + \nu_t \end{cases}$$

مع (μ_t) و(ν_t) صخب ابيض ومستقلين فيما بينهما $(E(\mu_t\nu_s) = 0)$ من اجل (s) (t)

- بين ان (X_t) و (Y_t) سلسلتان زمنيتان تتبع نموذج (ARMA(2,1)) تحت شروط خاصة بالمعالم الأربعة ، يطلب تحديد هذه الشروط.

➢ **الحل:**

1. اذا كان $(a\,c \neq b\,d)$ اذا $(\det M \neq 0)$ وبالتالي يوجد معكوس للمصفوفة (M) حيث $(M \times M^{-1} = I)$ ، اذا كانت (N) نسبية (proportionnelle) الى معكوس المصفوفة (M) ، نتحصل على مصفوفة قطرية من خلال جداء المصفوفتان. بالتفصيل نجد:

$$\begin{pmatrix} c & -b \\ -d & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & 0 \\ 0 & ac-bd \end{pmatrix}$$

2. يمكن كتابة النموذج كالتالي:

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha L & \beta \\ \delta & 1-\gamma L \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_t \\ \nu_t \end{pmatrix}$$

باستعمال الخاصية المستخرجة في السؤال الأول يمكننا كتابة:

$$\begin{pmatrix} 1-\gamma L & -\beta L \\ -\delta L & 1-\alpha L \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-\alpha L & \beta L \\ \delta L & 1-\gamma L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\gamma L & -\beta L \\ -\delta L & 1-\alpha L \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_t \\ \nu_t \end{pmatrix}$$

هذا الجداء يعطينا مصفوفة قطرية بنفس الطريقة المستخرجة في السؤال الأول:

$$\begin{pmatrix} (1-\gamma L)(1-\alpha L)-\beta\delta L^2 & 0 \\ 0 & (1-\gamma L)(1-\alpha L)-\beta\delta L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\gamma L & -\beta L \\ -\delta L & 1-\alpha L \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_t \\ \nu_t \end{pmatrix}$$

نتخلى الان عن الصيغة المصفوفية حيث نقوم بحل المعادلة الأولى اذ ان الثانية متناظرة فنحصل على:

$$((1-\gamma L)(1-\alpha L)-\beta\delta L^2)X_t = U_t$$

لا ننسى ان:

$$U_t = (1-\gamma L)\mu_t - \beta L \nu_t$$

من خلال عملية تحويل بسيطة يمكننا الحصول على:

$$(1-[\gamma+\alpha]L + [\alpha\gamma-\beta\delta]L^2)X_t = U_t$$

المعادلة الأخيرة تعني ان لدينا انحدار ذاتي لكثير حدود من الرتبة الثانية (النموذج من النوع (AR(2)) بشرط ان يكون $(\alpha\gamma \neq \beta\delta)$.

للبرهنة على ان (U_t) تتبع سيرورة (MA(1)) سنستعمل خصائص هذه السيرورة فيما يتعلق بالتباين المشترك الذاتي، اذ نعلم ان جميع قيم التباين المشترك الذاتي بعد الرتبة الأولى لنموذج (MA(1)) تنعدم. سنبين ان (U_t) تتبع سيرورة (MA(1)) من خلال حساب التباينات المشتركة الذاتية، نعلم ان:

$$\gamma_u(1) = E(U_tU_{t-1}) = E([\mu_t - \gamma\mu_{t-1} - \beta\nu_{t-1}][\mu_{t-1} - \gamma\mu_{t-2} - \beta\nu_{t-2}]) = -\gamma$$

هذا يعني ان $(\gamma_u(1))$ يكون غير معدوم في حالة $(\gamma \neq 0)$.

الان عند حساب التباينات المشتركة الذاتية من الرتب اعلى من الواحد $(h > 1)$ نجد:

$$\gamma_u(h) = E(U_tU_{t-h}) = E([\mu_t - \gamma\mu_{t-1} - \beta\nu_{t-1}][\mu_{t-h} - \gamma\mu_{t-h-1} - \beta\nu_{t-h-1}])$$

$$\begin{aligned}\gamma_u(h) &= E(U_tU_{t-h}) \\ &= E([\mu_t\mu_{t-h} - \gamma\mu_t\mu_{t-h-1} - \beta\mu_t\nu_{t-h-1} - \gamma\mu_{t-1}\mu_{t-h} \\ &+ \gamma^2\mu_{t-1}\mu_{t-h-1} + \gamma\beta\mu_{t-1}\nu_{t-h-1} - \beta\nu_{t-1}\mu_{t-h} + \beta\gamma\nu_{t-1}\mu_{t-h-1} \\ &+ \beta^2\nu_{t-1}\nu_{t-h-1}]) = 0\end{aligned}$$

لان:

$$\begin{aligned}E(\mu_t\mu_{t-h}) &= E(\mu_t\mu_{t-h-1}) = E(\mu_t\nu_{t-h-1}) = E(\mu_{t-1}\mu_{t-h}) = E(\mu_{t-1}\mu_{t-h-1}) \\ &= E(\mu_{t-1}\nu_{t-h-1}) = E(\nu_{t-1}\mu_{t-h}) = E(\nu_{t-1}\mu_{t-h-1}) \\ &= E(\nu_{t-1}\nu_{t-h-1}) = 0 \quad , \quad h > 1\end{aligned}$$

من خلال هذه النتيجة يتبين لنا ان السيرورة هي سيرورة (MA(1)) مما يعني وجود (θ) ووجود صخب ابيض (ε_t) بحيث:

$$(1 - [\gamma + \alpha]L + [\alpha\gamma - \beta\delta]L^2)X_t = (1 + \theta L)\varepsilon_t$$

وكنتيجة نهائية:

إذا كان $(\alpha\gamma \neq \beta\delta)$ و$(\gamma \neq 0)$ فان (X_t) تتبع سيرورة (ARMA(2,1)).

وبشكل متناظر إذا كان $(\alpha\gamma \neq \beta\delta)$ و$(\alpha \neq 0)$ فان (Y_t) تتبع سيرورة (ARMA(2,1)).

❖ **التطبيق رقم (5):**

لدينا نموذج (ARMA(1,1)) التالي:

$$y_t = 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t + 0.7\varepsilon_{t-1}$$

1.احسب المعاملات الخمسة الأولى $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \ \ \omega_5)$ لنموذج $(MA(\infty))$ الموافق.

2. احسب المعاملات الخمسة الأولى $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 \quad \pi_5)$ للنموذج $(AR(\infty))$ الموافق.

➢ **الحل:**

نستعمل المساواة المبرهن عليها:

$$\omega(L)\emptyset(L) = \theta(L)$$

$$\omega(L)\emptyset(L) = \theta(L) \Rightarrow (\omega_0 - \omega_1 L - \omega_2 L^2 - \omega_3 L^3 - \omega_4 L^4 - \ldots)(1 - \emptyset_1 L) = 1 - \theta_1 L$$

$$1 - \emptyset_1 L - \omega_1 L + \omega_1 \emptyset_1 L^2 - \omega_2 L^2 + \omega_2 \emptyset_1 L^3 - \omega_3 L^3 + \omega_3 \emptyset_1 L^4 - \omega_4 L^4 + \omega_4 \emptyset_1 L^5 - .. = 1 - \theta_1 L$$

$$1 - (\emptyset_1 + \omega_1)L + (\omega_1 \emptyset_1 - \omega_2)L^2 + (\omega_2 - \emptyset_1 \omega_3)L^3 + (\omega_3 \emptyset_1 - \omega_4)L^4 + \omega_4 \emptyset_1 L^5 - .. = 1 - \theta_1 L$$

بعد اجراء مختلف عمليات الضرب واستخراج العوامل المشتركة نتحصل على:

$$\emptyset_1 + \omega_1 = \theta_1 \Rightarrow \omega_1 = \theta_1 - \emptyset_1 = 0.7 - 0.8 = -0.1$$

$$\omega_1 - \emptyset_1 = -\theta_1 \Rightarrow \omega_1 = \emptyset_1 = \emptyset_1 - \theta_1$$

$$\omega_j - \emptyset_1 \omega_{j-1} = 0 \Rightarrow \ \omega_j = \emptyset_1 \omega_{j-1} \quad , \qquad j > 1$$

$$\omega_0 = 1$$

$$\omega_1 = 0.8 + 0.7 = 1.5, \qquad \omega_2 = 0.8 \times 1.5 = 1.2, \qquad \omega_3 = 0.8 \times 1.2 = 0.96$$

$$\omega_4 = 0.8 \times 0.96 = 0.77\,, \qquad \omega_5 = 0.8 \times 0.77 = 0.61$$

نستعمل المساواة المبرهن عليها:

$$\omega(L)\theta(L) = \emptyset(L)$$

$$\pi(L)\theta(L) = \emptyset(L) \Rightarrow (1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \pi_3 L^3 - \pi_4 L^4 - \ldots)(1 - \theta_1 L) = 1 - \emptyset_1 L$$

$$\pi_1 + \theta_1 = \emptyset_1$$

$$\pi_j - \theta_1 \pi_{j-1} = 0 \rightarrow \ \pi_j = \theta_1 \pi_{j-1} \quad , \qquad j > 1$$

$$\pi_1 = 0.8 + 0.7 = 1.5$$

$$\pi_2 = -0.7 * 1.5 = 1.05$$

$$\pi_3 = 0.7 * 1.05 = 0.74$$

$$\pi_4 = -0.7 * 0.74 = -0.52$$

$$\pi_5 = 0.7 * 0.52 = 0.36$$

❖ **التطبيق رقم (6):**

ليكن نموذج (ARMA(1,1)) التالي:

$$y_t = 0.6y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.6 \ \varepsilon_{t-1}$$

1. احسب دالة الارتباط الذاتي.

2.هل يمكن كتابة هذا النموذج في صيغة اخرى؟

➢ **الحل:**

1. انطلاقا من المعادلات الخاصة بمعاملات الارتباط الذاتي لنموذج (ARMA(1,1)) يمكن تبيان ان:

$$\rho_1 = \frac{(1 - \emptyset_1\theta_1)(\emptyset_1 - \theta_1)}{1 - 2\theta_1\emptyset_1 + {\theta_1}^2}$$

اما بالنسبة الى الرتبة (τ) حيث $(\tau > 1)$ فانه يمكن استخراج معاملات الارتباط المختلفة انطلاقا من المعادلة:

$$\rho_\tau = \emptyset_1\rho_{\tau-1}$$

بالتعويض نتحصل على:

$$\rho_1 = \frac{(1 - (0.6)^2)(0)}{1 - 2(0.6)^2 + (0.6)^2} = 0$$

كما ان جميع معاملات الارتباط من الرتبة (τ) حيث $(\tau > 1)$ تكون معدومة:

$$\rho_\tau = 0 \ , \ \ \tau > 1$$

هذا يعني ان جميع معاملات الارتباط الذاتي لهذا النموذج معدومة.

2. بما ان جميع معاملات الارتباط الذاتي معدومة بسبب وجود معامل مشترك بين جزء الانحدار الذاتي وجزء المتوسطات المتحركة في نموذج (ARMA(1,1)) ، اذ نلاحظ ان النموذج يمكن كتابته باستعمال معامل التأخير في الصيغة التالية:

$$(1-0.6L)y_t = (1-0.6L)\varepsilon_t$$

بقسمة الطرفين على $((1-0.6L))$ نتحصل على الصيغة المبسطة لنموذج ((ARMA(1,1) السابق:

$$y_t = \varepsilon_t$$

هذا النموذج المبسط بكل بساطة هو نموذج صخب ابيض، الذي يتميز بان جميع معاملات الارتباط الذاتي الخاصة به معدومة $(\rho_\tau = 0)$.

❖ التطبيق رقم (7):

ليكن نموذج ((ARMA(2,2) التالي:

$$y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-2} + \varepsilon_t - 1.3\ \varepsilon_{t-1} + 0.4\ \varepsilon_{t-2}$$

1. هل يمكن تبسيط هذا النموذج (جعله مختصرا).

- **الحل:**

لمعرفة هل يمكننا اجراء بعض التغييرات على النموذج نقوم باستخراج جذور المعادلة المميزة لكثير الحدود الخاص بجزء الانحدار الذاتي ونفس الشيء للجزء الخاص بالمتوسطات المتحركة.

تعطى المعادلة المميزة لكثير الحدود الخاص بجزء الانحدار الذاتي في الصيغة التالية:

$$\lambda_{AR}{}^2 - 0.9\lambda_{AR} + 0.2 = 0$$

حل هذه المعادلة يعطينا الجذور:

$$\lambda_{AR1} = 0.5\ , \qquad \lambda_{AR2} = 0.4$$

تعطى المعادلة المميزة لكثير الحدود الخاص بجزء الانحدار الذاتي في الصيغة التالية:

$$\lambda_{MA}{}^2 - 1.3\lambda_{MA} + 0.4 = 0$$

حل هذه المعادلة يعطينا الجذور:

$$\lambda_{MA1} = 0.8\ , \qquad \lambda_{MA2} = 0.5$$

بالاستعانة بحلول المعادلات المميزة السابقة يمكن كتابة النموذج في الشكل العاملي (forme factorisée) كالتالي:

$$(1-0.5L)(1-0.4L)y_t = (1-0.8L)(1-0.5L)\varepsilon_t$$

نلاحظ ان $((1-0.5L))$ يمثل عامل مشترك بين الجزء الانحداري والجزء الخاص بالمتوسطات المتحركة، إذا بقسمة الطرفين على $((1-0.5L))$ نتحصل على:

$$(1-0.4L)y_t = (1-0.8L)\varepsilon_t$$

إعادة كتابة النموذج في الصيغة الجديدة المختصرة تعطينا النموذج المبسط من نوع (ARMA(1,1)) التالي:

$$y_t = 0.4y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.8\ \varepsilon_{t-1}$$

❖ التطبيق رقم (8):

لدينا النموذج التالي:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.09\ \varepsilon_{t-1}$$

1. اكتب النموذج في شكل نموذج $(AR(\infty))$
2. نسمي (π_j) معاملات النموذج $(AR(\infty))$ ، برهن ان $(\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1)$

➢ **الحل:**

1. يمكن كتابة هذا النموذج في الشكل:

$$y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t(1-\theta_1 L) \Rightarrow \varepsilon_t = \frac{y_t - y_{t-1}}{(1-\theta_1 L)} = \frac{y_t}{1-\theta_1 L} - \frac{y_{t-1}}{1-\theta_1 L}$$

$$= \left(y_t + \theta_1 y_{t-1} + \theta_1^2 y_{t-2} + ..\right)\left(y_{t-1} + \theta_1 y_{t-2} + \theta_1^2 y_{t-3} + ..\right)$$

$$= y_t - (1-\theta_1)y_{t-1} - (1-\theta_1)\theta_1 y_{t-2} - (1-\theta_1)\theta_1^2 y_{t-3} - ..$$

نعوض (θ_1) بقيمته $(\theta_1 = 0.09)$ نتحصل على المعالم (π_j) للنموذج $(AR(\infty))$:

$$y_t = 0.91y_{t-1} + 0.082y_{t-2} + 0.007y_{t-3} + .. + \varepsilon_t$$

$$y_t = \pi_1 y_{t-1} + \pi_2 y_{t-2} + \pi_3 y_{t-3} + .. + \varepsilon_t$$

2. بالمطابقة بين كل (π_j) وقيمته المتحصل عليها نستنتج:

$$\pi_1 = (1-\theta_1), \qquad \pi_2 = (1-\theta_1)\theta_1\ , \qquad \pi_3 = (1-\theta_1)\theta_1^2\ , \qquad .....$$

هذا يعني ان مجموع (π_j) يمكن كتابتها في الشكل:

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + .. = (1-\theta_1) + (1-\theta_1)\theta_1 + (1-\theta_1)\theta_1^2 + ..$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = (1-\theta_1)\sum_{j=1}^{\infty}\theta_1^j = (1-\theta_1)\frac{1}{(1-\theta_1)} = 1$$

المراجع

سمير مصطفى شعراوي، مقدمة في التحليل الحديث للسلاسل الزمنية، مركز النشر العلمي، جامعة الملك عبد العزيز ، جدة، الطبعة الأولى، 2005 .

عدنان ماجد عبد الرحمان بري، طرق التنبؤ الاحصائي بواسطة R، الجزء الأول الطبعة الثانية، 2018، على الرابط : http://www.abarry.ws/statisticalForecast1.pdf

زين العابدين البشير، تحليل السلاسل الزمنية، في مجال التكرار ومجال الزمن، دار الجنان للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان، 2016.

والتر فاندل، ترجمة **عبد المرضي حامد عزام**، السلاسل الزمنية ونماذج بوكس جنكنز، دار المريخ للنشر،المملكة العربية السعودية، 1992.

مولود حشمان، السلاسل الزمنية وتقنيات التنبؤ قصير المدى، ديوان المطبوعات الجامعية، طبعة ثالثة ...

Djalil Chafaï , Marc Hoffmann , Introduction aux séries temporelles Master 1 Mathématiques Appliquées Annales d'examens AnnéeMathématiques et Informatique de la Décision et des Organisations, 2016/2017

Arthur, Charpentier ,Cours De Series Temporelles Theorie Et Applications, DESS Actuariat & DESS Mathématiques de la Décision,universite paris dauphine.

Christophe Hurlin, Econométrie Appliquée Séries Temporelles, U.F.R. Economie Appliquée Maîtrise d'Economie Appliquée Cours de Tronc Commun.

Bernard Rapacchi, Dur, dur!! Les series chronologiques!!, Centre Interuniversitaire de Calcul de Grenoble, 18 aout 1993.

Régis Bourbonnais Michel Terraza, Analyse des séries temporelles, 3e édition, © Dunod, Paris, 2010.

Guillaume Chevillon, Econom´etrie, OFCE & Univ of Oxford guillaume.chevillon@sciences-po.fr Master Gouvernance Economique IEP 2005.

Mohamed merouani, Exercices sur les series temporelles pour Gestion et finance,

Michio Hatanaka, Time-Series-Based Econometrics Unit Roots and Co-Integrations, OXFORD UNIVERSITY PRESS, 2003.

Peijie Wang, Financial Econometrics Methods and models, Routledge Tayloy and Francis Group, 2003.

Arthur, Charpentier , Series Chronologiques, Hiver 2014, MAT8181

Jean-Michel ETIENNE, EconomÈtrie des Series Temporelles Correction Travaux DirigÈs N1, UniversitÈ PanthÈon-Assas (Paris 2) Octobre 2015.