

N° Ordre..../FT/UMBB/2022

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA DE BOUMERDES



Faculté de Technologie
Département Génie Mécanique

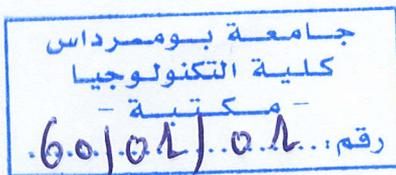
Polycopie de cours

Titre:

Dynamique des Structures

Réalisé par:

Dr. CHELLIL Ahmed



Année Universitaire 2021/2022



Préface

La pratique d'enseignement, nous a amené à constater la difficulté qu'ont les étudiants pour bien assimiler le cours, et c'est pour cette raison qu'il a paru utile d'écrire ce support.

Le programme de ce support correspond à ce qui peut être dispensé raisonnablement durant un semestre de cours, en permettant une assimilation progressive des systèmes vibratoires.

Ce recueil est un support pédagogique destiné aux étudiants de Licence et Master des filières Electromécanique et Génie mécanique. Ce manuel regroupe des différents chapitres, à savoir :

- Rappel de cours sur les vibrations,
- Généralités sur les vibrations
- Oscillations libres des systèmes à un seul degré de liberté,
- Oscillations amorties des systèmes à un seul degré de liberté,
- Oscillations forcées des systèmes à un seul degré de liberté
- Régimes des vibrations harmonique et périodique
- Oscillations libres des systèmes à plusieurs degrés de libertés.
- Vibration des poutres droites
- Vibration des plaques
- Recueils d'exercices

Je souhaite que ce manuel de cours recueil en Dynamique des structures puisse aider de manière efficace la majorité d'étudiants.

Sommaire

Préface

CHAPITRE I- Systèmes à un seul degré de liberté	1
CHAPITRE II- Oscillations libres des systèmes à un seul degré de liberté	6
CHAPITRE III- Oscillations libres amorties des systèmes à un seul degré de liberté..	10
CHAPITRE IV- Régimes des vibrations.....	15
CHAPITRE V- Oscillateur généralisé.....	36
CHAPITRE VI Vibration des poutres droites.....	44
CHAPITRE VII- Vibration des plaques.....	75
CHAPITRE VIII- Recueil d'exercices.....	89
<i>Références Bibliographiques.....</i>	<i>106</i>

Systèmes à un seul degré de liberté

1. Définitions et généralités sur les vibrations :

1.1. Mouvement Vibratoire :

On appelle mouvement vibratoire le mouvement d'un système qui s'effectue périodiquement de part et d'autre d'une position d'équilibre.

1.2. Mouvement périodique :

On appelle mouvement périodique, un mouvement qui se répète identique à lui-même à des intervalles de temps successifs de même durée T .

1.3. Mouvement sinusoïdale :

On dit qu'un mouvement vibratoire est sinusoïdal, si l'élongation x (y ou z) d'un point vibrant est une fonction sinusoïdale simple du temps.

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi) \text{ Ou bien } x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$$

Avec X : l'amplitude d'un mouvement. Elle se place à l'origine.

Et ω : étant sa pulsation:

Ce type de mouvement est appelé mouvement harmonique simple.

Un mouvement oscillatoire n'est harmonique que s'il est linéaire d'une position d'équilibre stable.

On dit que le mouvement oscillatoire est linéarisé si la réponse est directement proportionnelle à la force appliquée.

Pour linéariser le mouvement d'un système oscillatoire, on fait appel à des petites oscillations au voisinage d'une position d'équilibre stable afin d'obtenir des équations différentielles du mouvement linéarisé facile à résoudre.

1.4. Coordonnées généralisées :

On appelle coordonnées généralisées d'un système physique, un ensemble de variables réelles permettant de décrire ce système (position et mouvement (translation ou rotation)).

1.5. Degré de liberté :

On appelle degré de liberté (ddl) d'un système la capacité de ce système d'effectuer le mouvement de translation et de rotation par rapport aux axes.

1.6 Qu'est ce que la vibration mécanique?

Il s'agit de l'étude du comportement dynamique des corps. Cette définition peut se scinder en deux sous parties:

-1- l'étude des **vibrations libres**: soit un mouvement oscillatoire non entretenu (pendule, circuit résonnant,...).

-2- les **vibrations forcées**: soit un système soumis à des sollicitations extérieures. On peut en définir deux catégories :

- Le **régime transitoire**: le système est soumis à des sollicitations extérieures et répond. On cherche alors à savoir quelle est sa réponse avant stabilisation (s'il y a lieu).

- Le **régime permanent**: le système est soumis à des sollicitations extérieures périodiques et l'on cherche à savoir quel est son comportement une fois dépassé le stade du régime transitoire.

2- Représentation de l'oscillateur :

Un système mécanique possède un seul degré de liberté quand sa configuration peut être caractérisée à chaque instant par une seule variable.

Le système est linéaire quand il est décrit au moyen d'équations différentielles linéaires.

Prenons pour exemple un système **Masse - Ressort - Amortisseur**, ce système est l'Oscillateur élémentaire linéaire de la mécanique :

Il est modélisé par :

- Une masse m indéformable
- Un ressort sans masse qui fournit une force élastique proportionnelle et opposée au déplacement $x(t)$.
- Le coefficient de proportionnalité k est appelé la rigidité ou raideur.
- Un amortisseur de masse négligeable qui fournit une force de freinage proportionnelle et opposée à la vitesse $\dot{x}(t)$.
- Le coefficient de proportionnalité c est appelé la rigidité ou raideur.
- Le coefficient de proportionnalité c est appelé la constante d'amortissement visqueux linéaire ou résistance du système.

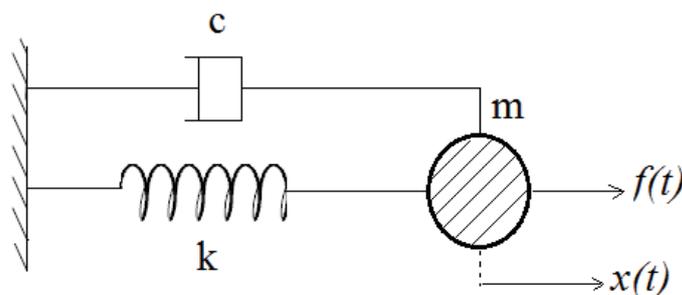


Fig.1 Oscillateur élémentaire linéaire de la mécanique

2. Equation du mouvement :

L'équation du mouvement est établie d'après la loi de Newton :

$$m \ddot{x} = \sum \vec{F}$$

$f(t)$: La force extérieure appliquée au système

$m \ddot{x}$: La force d'inertie

$c \dot{x}$: La force d'amortissement

$k x$: La force élastique

$$m \ddot{x} = -c \dot{x} - k x + f(t)$$

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = f(t) \quad (1)$$

Le régime libre correspond à la solution générale de l'équation générale sans second membre c.à.d. $f(t) = 0$.

Le régime forcé correspond à la solution complète du $m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = f(t)$

Le régime permanent est le régime forcé après disparition des termes transitoires provoqués par des forces périodiques

On prend l'équation (1) :

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = f(t)$$

Divisons par la masse :

$$m \ddot{x} + 2 \frac{c}{2m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{1}{m} f(t) \quad (2)$$

Introduisons les notations :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ Pulsation propre de l'oscillateur conservatif}$$

$$\lambda = \frac{c}{2m} \text{ Coefficient d'amortissement}$$

$$\eta = \frac{c}{2m\omega_0} = \frac{\lambda}{\omega_0} \text{ Amortissement relatif ou facteur d'amortissement}$$

D'où l'équation devient :

$$m \ddot{x} + 2 \lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} f(t) \quad (3)$$

3. Bilan énergétique :

L'énergie cinétique d'un système mécanique s'écrit sous la forme :

$$E_c = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2} m_n \dot{q}_n^2$$

L'énergie potentielle d'un système mécanique s'écrit à partir de développement limité de Taylor sous la forme:

$$E_p = E_p(0) + \left. \frac{\partial E_p}{\partial q} \right|_{q=0} q + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial q^2} \right|_{q=0} q^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 E_p}{\partial q^3} \right|_{q=0} q^3 + \dots$$

La valeur $q=0$ correspond à la position d'équilibre du système caractérisée par :

$$\left. \frac{\partial E_p}{\partial q} \right|_{q=0} = 0$$

Il existe deux types d'équilibre :

□ Equilibre stable, figure 2:

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial q^2} \right|_{q=0} > 0$$

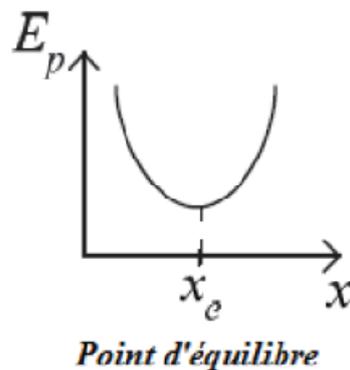


Fig. 2 Equilibre stable

□ Equilibre instable, figure 3:

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial q^2} \right|_{q=0} < 0$$

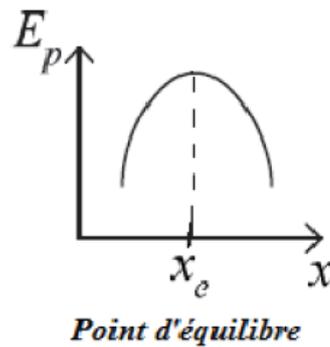


Fig. 3 Equilibre instable

Le mouvement oscillatoire est dit linéaire si cet écart est infinitésimal. Ainsi, l'énergie potentielle prend la forme quadratique en fonction de l'écart par rapport à la position d'équilibre telle que :

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_p}{\partial q^2} \Big|_{q=0} q^2$$

La constante $\frac{\partial^2 E_p}{\partial q^2}$ est appelée la constante de rappel.

Ainsi ; la force de rappel prend la forme linéaire en fonction de l'allongement et opposée au mouvement telle que:

$$\vec{F}(t) \cong - \frac{\partial^2 E_p}{\partial q^2} \Big|_{q=0} \vec{q}$$

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial E_c}{\partial q} \right) + \left(\frac{\partial E_p}{\partial q} \right) = \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \right)$$

$D = -\frac{1}{2} c \dot{q}_i^2$: Fonction de dissipation de Rayleigh.

Oscillations libres des systèmes à un seul degré de liberté

1- Définition :

On appelle oscillations libres ou naturelles le mouvement d'un système isolé auquel on donne une excitation initiale à l'aide d'un système de perturbation extérieure et on l'abandonne à ses oscillations libres (à lui-même).

Un oscillateur est un système qui n'est immobile qu'à la position d'équilibre

2- Description et équation du mouvement :

Le régime libre est décrit le comportement de l'oscillateur élémentaire après un lâcher initial, sans fourniture ultérieure d'énergie par une force extérieure, donc lorsque $f(t) = 0$.

Ce lâcher est défini, au temps $t = 0$ par une élongation initiale $\delta_{ST} = x(0)$

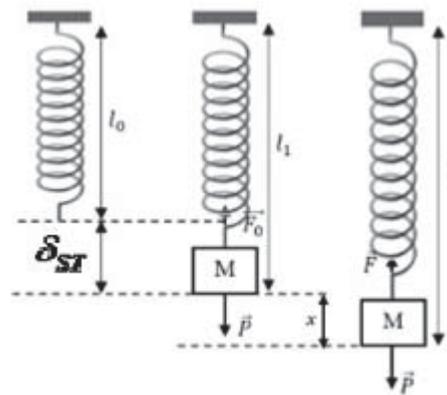


Fig.4 Oscillateur libre non amorti (masse-ressort)

A l'équilibre :

$$0 = \Sigma F_{EXT} \Rightarrow \vec{F}_0 + \vec{P} = 0$$

$$-k\delta_{ST} + mg = 0 \Rightarrow k\delta_{ST} = mg \text{ (Condition d'équilibre)}$$

En mouvement :

$$m\ddot{x} = \Sigma F_{EXT} \Rightarrow m\ddot{x} = -k(\delta_{ST} + x) + mg \quad (4)$$

$$m \ddot{x} = -kx + (-k\delta_{ST} + mg)$$

Connaissant qu'à l'équilibre $k\delta_{ST} = mg$

ceci implique que l'équation (4) devient

$$m \ddot{x} = -kx \Rightarrow m \ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

C'est une équation différentielle du second ordre de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

3- Représentations graphiques de l'oscillateur :

L'oscillateur est dit conservatif quand l'amortissement est nul, $c = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

$$\text{Donc : } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

La solution de cette équation donne le déplacement de la masse :

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

$$= A \cos \omega_0 t + B \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Ou

$$x(t) = X \cos(\omega_0 t - \varphi) \quad (5)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} X = \sqrt{A^2 + B^2} \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A} \end{cases}$$

Donc la masse décrit un mouvement harmonique de pulsation ω_0 , fréquence f_0 et période T_0 .

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}, \quad T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

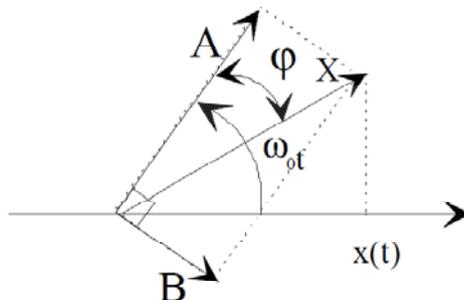


Fig.5 Vecteurs tournants Représentant le déplacement $x(t)$

On obtient la vitesse par dérivation de (5)

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 X \sin(\omega_0 t - \varphi) = \omega_0 X \cos(\omega_0 t - \varphi + \frac{\pi}{2})$$

Une nouvelle dérivation donne l'accélération :

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 X \cos(\omega_0 t - \varphi) = \omega_0^2 X \cos(\omega_0 t - \varphi + \pi)$$

Nous pouvons voir dans la figure ci dessous, la représentation en vecteurs tournants de $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$.

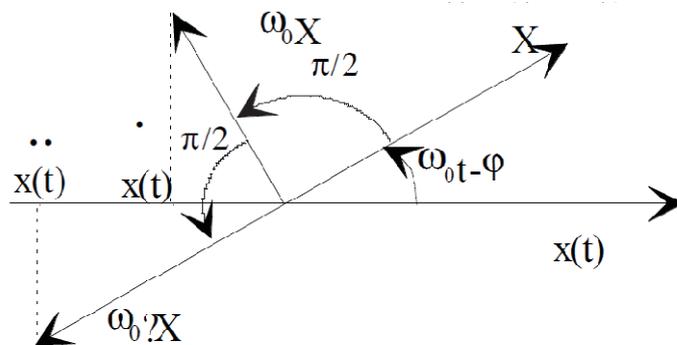


Fig.6 Vecteurs tournants Représentant le déplacement, la vitesse et l'accélération

La vitesse est déphasée de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à $x(t)$ et l'accélération est déphasée de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à $\dot{x}(t)$. Nous pouvons voir dans la figure ci dessous, la représentation de $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$ par rapport au temps.

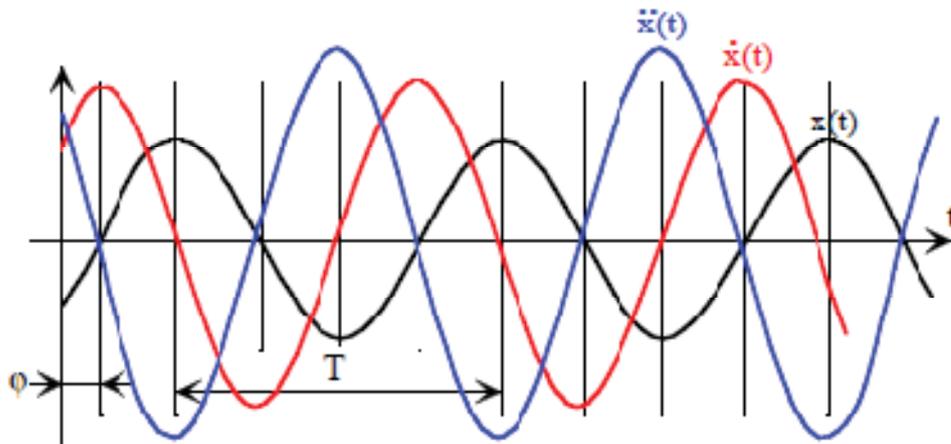


Fig. 7 Déplacement, vitesse et accélération par rapport au temps.

Ces trois grandeurs sont toujours en quadrature de phase de l'une à sa dérivée. En ce qui concerne les valeurs de ces fonctions, il est à noter que les fréquences jouent un rôle très important dans leurs évolutions.

$$\begin{cases} x(t) = X \cos(\omega_0 t - \varphi) \\ \dot{x}(t) = X \omega_0 \cos(\omega_0 t - \varphi + \frac{\pi}{2}) \\ \ddot{x}(t) = X \omega_0^2 \cos(\omega_0 t - \varphi + \pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{MAX} = X \\ \dot{x}_{MAX} = X_{MAX} 2 \pi f_0 \\ \ddot{x}_{MAX} = V_{MAX} 2 \pi f_0 = X_{MAX} 4 \pi^2 f_0^2 \end{cases}$$

On comprend alors qu'à basse fréquence, les déplacements sont plus faciles à lire et qu'à haute fréquence les accélérations sont plus faciles à lire. On peut utiliser le calcul ou des abaques pour convertir les amplitudes des signaux "déplacement-vitesse-accélération" en fonction de la fréquence.

Oscillations libres amorties des systèmes à un seul degré de liberté

1- Définition :

L'oscillateur est qualifié de dissipatif quand l'amortissement n'est pas nul.

Revenons à l'équation (3) avec $f(t) = 0$.

$$m \ddot{x} + 2 \lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (6)$$

Elle a pour solution :

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad (7)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \\ r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \end{cases} \quad (8)$$

En fonction de la valeur de l'amortissement relatif η , il est nécessaire pour la suite de distinguer les trois cas suivants :

- ✓ $\eta > 1$ Amortissement sur-critique
- ✓ $\eta = 1$ Amortissement critique
- ✓ $\eta < 1$ Amortissement sous-critique

Par ailleurs, il est commode d'introduire la grandeur ω_1 , toujours réelle et positive, ainsi définie :

$$\omega_1^2 = \left| \lambda^2 - \omega_0^2 \right| = \omega_0^2 \left| \eta^2 - 1 \right| \quad (9)$$

1. Amortissement sur-critique :

Quand l'amortissement relatif est plus grand que l'unité, on doit écrire d'après la relation (9) :

$$\eta > 1 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = \omega_0 \sqrt{\eta^2 - 1}$$

Les racines (8) sont alors :

$$\begin{cases} r_1 = -\lambda + \omega_1 \\ r_2 = -\lambda - \omega_1 \end{cases} \quad (10)$$

Elles sont toutes deux négatives et le déplacement devient :

$$x(t) = e^{-\lambda t} (Ae^{\omega_1 t} + Be^{-\omega_1 t}) \quad (11)$$

On obtient la vitesse par dérivation :

$$\dot{x}(t) = -e^{-\lambda t} ((\lambda - \omega_1)Ae^{\omega_1 t} + (\lambda + \omega_1)Be^{-\omega_1 t})$$

Pour un lâcher correspondant aux conditions initiales $x(0) = X_0$, $\dot{x}(0) = V_0$ les relations précédentes donnent,

$$\begin{cases} X_0 = A + B \\ V_0 = -(\lambda - \omega_0)A - (\lambda + \omega_0)B \end{cases} \quad (12)$$

On en déduit les constantes d'intégration A et B :

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2\omega_0}(X_0(\lambda + \omega_0) + V_0) \\ B = \frac{-1}{2\omega_0}(X_0(\lambda - \omega_0) + V_0) \end{cases} \quad (13)$$

La figure suivante représente $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ dans le cas $X_0 > 0$ et $V_0 > 0$ (se sont des fonctions apériodiques donc le système n'est plus un oscillateur)

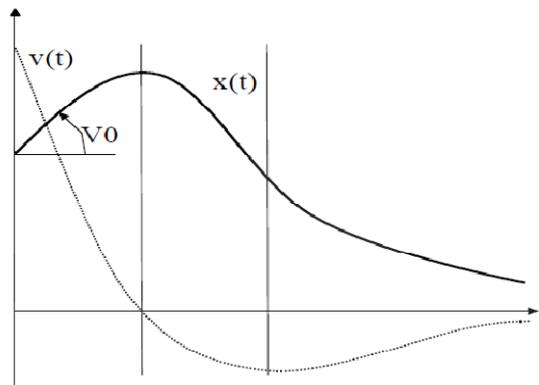


Figure 3.1. Régime libre avec amortissement sur-critique

Compte tenu de (13), le déplacement x donné par la relation (11) peut se mettre sous la forme :

$$x(t) = e^{-\lambda t} (X_0 \operatorname{ch} \omega_1 t + \frac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1} \operatorname{sh} \omega_1 t) \quad (14)$$

2. Amortissement critique :

Quand l'amortissement relatif est égal à l'unité $\eta = 1$, l'équation caractéristique de (6) possède une solution double

$$r_1 = r_2 = -\lambda = -\omega_0 \quad (15)$$

Chapitre III Oscillations libres amorties des systèmes à un seul degré de liberté

La solution générale de toute équation différentielle du second ordre est donnée par la combinaison linéaire de deux solutions particulières linéairement indépendantes ; il est de même si $r_1 = r_2$

Une première solution particulière est de la forme :

$$x_1 = e^{-\omega_0 t}$$

On peut se rendre compte, par substitution dans l'équation différentielle, qu'il existe une deuxième solution particulière de la forme :

$$x_2 = u(t) e^{-\omega_0 t}$$

En effet

$$\dot{x}_2 = e^{-\omega_0 t} (\dot{u}(t) - \omega_0 u(t))$$

$$\ddot{x}_2 = e^{-\omega_0 t} (\ddot{u}(t) - 2\omega_0 \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t))$$

Avec $\lambda = \omega_0$, la substitution dans (6) donne :

$$\ddot{u}(t) = 0 \Rightarrow u(t) = Ct + D \Rightarrow x_2 = (Ct + D) e^{-\omega_0 t}$$

D'où la solution générale pour $x(t)$

$$x = E x_1 + F x_2 = ((CE + FD) + FCt) e^{-\omega_0 t}$$

Et par changement d'écriture des constantes :

$$x = (A + Bt) e^{-\omega_0 t}$$

La vitesse est donnée par :

$$\dot{x} = ((B - \omega_0 A) - \omega_0 Bt) e^{-\omega_0 t}$$

Les conditions initiales $x(0) = X_0$ et $\dot{x}(0) = V_0$ déterminent les constantes A et B :

$$\begin{cases} A = X_0 \\ B = X_0 \omega_0 + V_0 \end{cases} \quad (17)$$

3. Amortissement sous-critique :

Revenons aux racines (8) de l'équation caractéristique

$$\begin{cases} r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \\ r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

Elles sont complexes car $\eta < 1 \Rightarrow \lambda^2 - \omega_0^2 < 0$

La relation (9) permet alors d'écrire :

$$\begin{cases} r_1 = -\lambda + j\omega_1 \\ r_2 = -\lambda - j\omega_1 \end{cases} \quad (18)$$

Dans ce cas, la grandeur ω_1 est la pulsation propre de l'oscillateur amorti :

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \eta^2} \quad (19)$$

Et le déplacement $x(t)$ devient

$$x(t) = e^{-\lambda t} (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t) \quad (20)$$

On déduit la vitesse

$$\dot{x}(t) = e^{-\lambda t} ((-\lambda A + \omega_1 B) \cos \omega_1 t - (\omega_1 A + \lambda B) \sin \omega_1 t)$$

Les conditions initiales $x(0) = X_0$ et $\dot{x}(0) = V_0$, on détermine les constantes A et B :

$$\begin{cases} A = X_0 \\ B = \frac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1} \end{cases} \quad (21)$$

Le régime libre peut se mettre sous la forme :

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left(X_0 \cos \omega_1 t + \frac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \quad (22)$$

Ou bien :

$$x(t) = X e^{-\lambda t} (\cos \omega_1 t - \phi) \quad (23)$$

Avec :

$$\begin{cases} X = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1} \right)^2} \\ \text{Tg} \phi = \frac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1 X_0} \end{cases} \quad (24)$$

En fonction du temps, le déplacement est représenté par une sinusoïde amortie comprise entre les deux enveloppes $\pm X e^{-\lambda t}$

La période de $x(t)$ (ou la pseudo-période) a pour valeur :

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

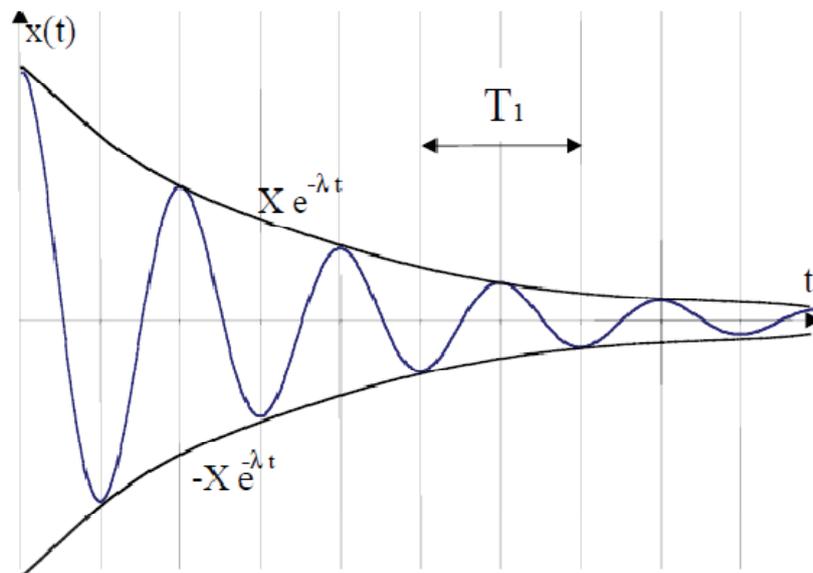


Figure 3.2 Régime libre de l'oscillateur amorti (déplacement en fonction du temps)

L'amortissement diminue la pulsation et augmente la période des oscillations.

En effet :

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \eta^2} \quad \omega_1 < \omega_0$$

$$T_1 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \eta^2}} \quad T_1 > T_0 \quad (25)$$

4. Le décrétement logarithmique :

Il est utile en particulier d'utiliser la notion de décrétement logarithmique, ainsi définie :

$$\Lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{x(t)}{x(t + nT_1)} \quad (26)$$

C'est le logarithme, divisé par n , du rapport entre deux déplacements séparés par un nombre entier n de période T_1 .

D'après (23) :

$$x(t + nT_1) = X e^{-\lambda(t + nT_1)} (\cos \omega_1(t + nT_1) - \phi) = e^{-\lambda n T_1} x(t)$$

D'où le décrétement :

Chapitre III Oscillations libres amorties des systèmes à un seul degré de liberté

$$\Lambda = \frac{1}{n} \ln e^{n\lambda T_1} = \lambda T_1 \quad (\text{Indépendant de } n)$$

$$\text{Comme } \lambda = \eta \omega_0 \quad \text{et} \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\eta^2}}$$

Le décrément logarithmique est fonction de l'amortissement relatif

$$\Lambda = \frac{2\pi\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \quad (27)$$

$$\text{Et } \eta = \frac{\Lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}} \quad (28)$$

$$\text{Quand : } \eta^2 \ll 1 \Rightarrow \eta \cong \frac{\Lambda}{2\pi} \quad (29)$$

1-Régime permanent harmonique

Le régime forcé est le comportement de l'oscillateur soumis à l'action d'une force extérieure dans notre cas considérant ce régime avec une force extérieure harmonique qui est un régime permanent harmonique.

1- Amplitude et phase en fonction de la fréquence :

Reprenons l'équation (1) avec $f(t) = F \cos \omega t$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \cos \omega t \quad (30)$$

La solution permanente sans termes transitoires est de la forme

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (31)$$

en introduisant x et ses dérivées dans l'équation, on obtient, par identification des termes en $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$

$$\begin{cases} A(k - \omega^2 m) + B \omega c = F \\ -A \omega c + B(k - \omega^2 m) = 0 \end{cases}$$

On en tire facilement les constantes A et B

$$\begin{cases} A = F \frac{k - \omega^2 m}{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2} \\ B = F \frac{\omega c}{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2} \end{cases} \quad (32)$$

En combinant les deux fonctions harmoniques, la solution devient

$$x = X \cos(\omega t - \varphi) \quad (33)$$

avec $X = \sqrt{A^2 + B^2}$ et $\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A}$, soit

$$\begin{cases} X = \frac{F}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}} - A \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega c}{k - \omega^2 m} - B \end{cases} \quad (34)$$

Introduisons les grandeurs :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{Pulsation propre de l'oscillateur conservatif}$$

$$\tau = \frac{c}{2m\omega_0} \quad \text{Amortissement relatif} \quad (35)$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{Pulsation relative de la force extérieure} \quad (35)$$

$$X_s = \frac{F^0}{k} \quad \text{Déplacement statique dû à une force constante F} \quad (36)$$

$$u = \frac{X}{X_s} \quad \text{facteur d'amplification dynamique} \quad (37)$$

La relation (34 A) peut s'écrire

$$X = \frac{F/K}{\sqrt{(1 - \omega^2 \frac{m}{k})^2 + \frac{\omega^2 c^2}{k^2}}} = \frac{F/K}{\sqrt{(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + 4\tau^2 (\frac{\omega}{\omega_0})^2}}$$

En divisant par X_0 , on obtient le facteur d'amplification dynamique :

$$X = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\tau^2 \beta^2}} \quad (38)$$

L'oscillateur est en résonance d'amplitude quand X est maximum c.à.d. que le dénominateur de (38) égale à zéro

$$\frac{d}{d\beta} ((1 - \beta^2)^2 + 4\tau^2 \beta^2) = 0 \Rightarrow \beta(-1 + \beta^2 + 2\tau^2) = 0$$

$$\beta = 0 \Rightarrow \omega = 0$$

$\beta_2 = \sqrt{1 - 2\tau^2}$, la solution non nulle correspond à la pulsation cherchée par conséquent

$$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 - 2\tau^2} \quad (39)$$

Introduisant β_2 dans (38), on aura :

$$\mu_{Max} = \frac{1}{2\tau\sqrt{1 - \tau^2}} \quad (40)$$

2- Diagramme de vecteurs tournants :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \cos \omega t$$

en régime permanent : $x = X \cos (\omega t - \varphi)$, les forces sont :

$f(t)$ force extérieure en avance de phase φ sur le déplacement x ,

$$f(t) = F \cos \omega t$$

$f_m(t)$ force d'inertie, en opposition de phase avec le déplacement

$$f_m(t) = m\ddot{x} = -\omega^2 m X \cos(\omega t - \varphi) = \omega^2 m X \cos(\omega t - \varphi + \pi)$$

$f_c(t)$ force de frottement visqueux en avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ sur le déplacement

$$f_c(t) = -c\dot{x} = -\omega c X \sin(\omega t - \varphi) = \omega c X \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$f_k(t)$ force de rappel élastique, en phase avec le déplacement

$$f_k(t) = kx = k X \cos(\omega t - \varphi)$$

Ces forces sont égales aux projections sur un axe de vecteurs tournants à la même vitesse angulaire

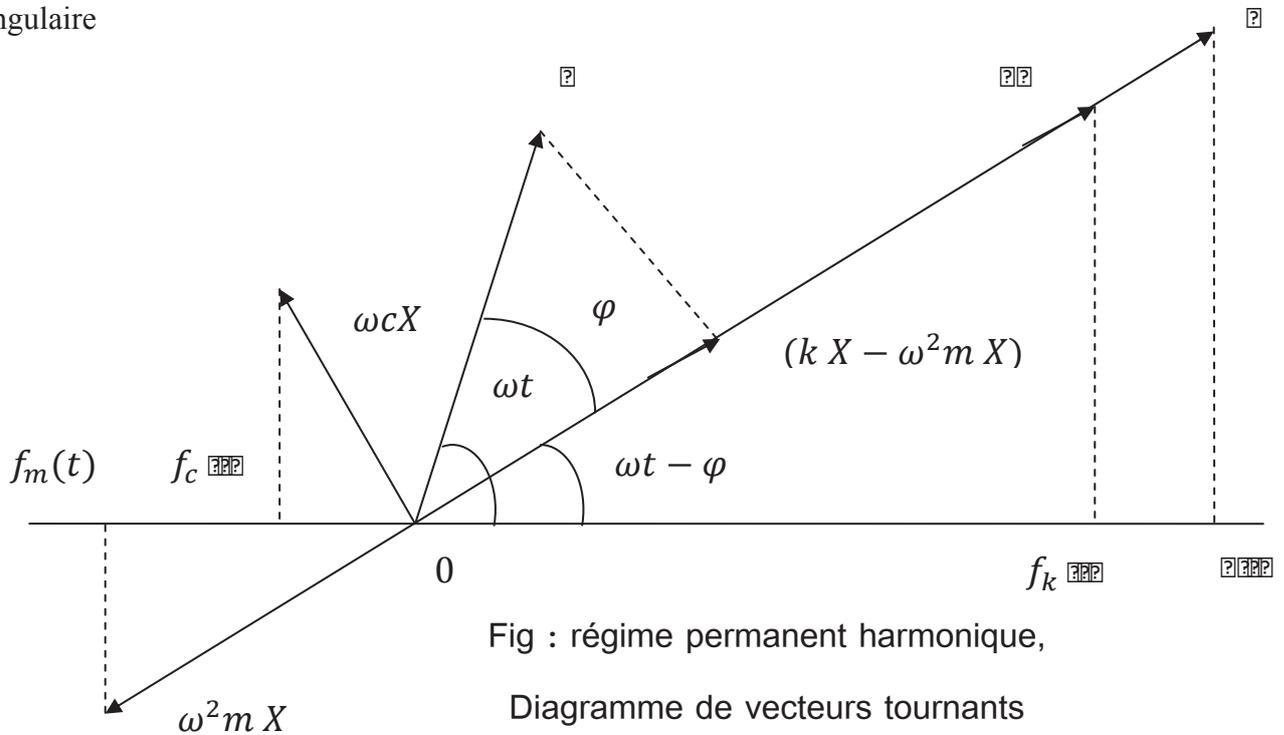


Fig : régime permanent harmonique,
Diagramme de vecteurs tournants

Les inconnues sont l'amplitude X et la phase φ , le diagramme permet de calculer :

$$(kX - \omega^2 m X)^2 + \omega c X^2 = F^2 \Rightarrow X = \frac{F}{\sqrt{(K - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}}$$

$$\text{tg} \varphi = \frac{\omega c}{K - \omega^2 m}$$

3-utilisation des nombres complexes : (réponse en fréquence)

Cette méthode consiste à remplacer les vecteurs par des nombres complexes.

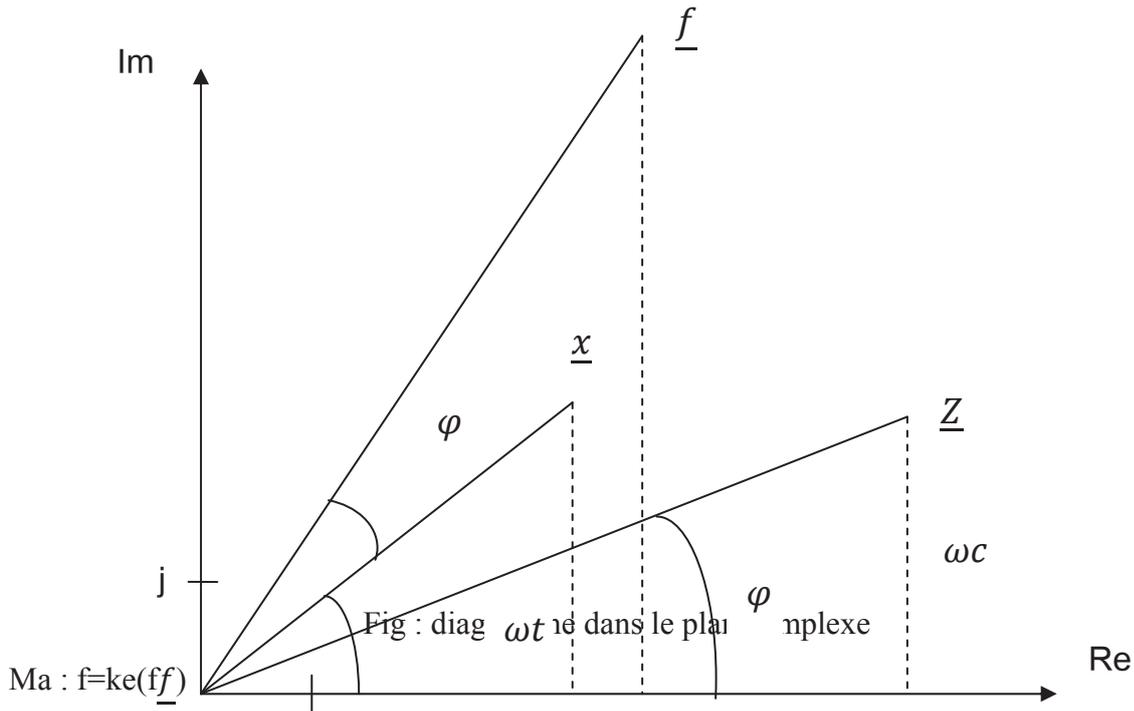
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \cos \omega t$$

la solution permanente sous la forme : $x = X \cos (\omega t - \varphi)$

ou X et φ sont les inconnues

la force extérieure $f = F \cos \omega t$ est considérée comme la partie réelle d'une force complexe définie par :

$$f = F e^{j\omega t} = F(\cos \omega t + j \sin \omega t) \quad (41)$$



Le déplacement $x(t)$ est alors la partie réelle de $x(t) = \text{Re}(x)$ qui est en phase avec $(K - \omega^2 m)$

$$\begin{cases} \underline{x} = X e^{j(\omega t - \varphi)} \\ x = \text{Re}(\underline{x}) \end{cases} \quad (42)$$

L'équation (30) représente la partie réelle de l'équation complexe :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f \quad (43)$$

$$\dot{x} = j\omega X e^{j(\omega t - \varphi)} = j\omega \underline{x}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 X e^{j(\omega t - \varphi)} = -\omega^2 \underline{x}$$

Introduisons ces valeurs dans l'équation

$$((K - \omega^2 m) + j\omega c) \underline{x} = \underline{f} \quad (44)$$

On appelle impédance complexe la quantité

$$\underline{Z} = ((K - \omega^2 m) + j\omega c) = \sqrt{((K - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2)} e^{j\varphi} \quad (45)$$

Son inverse est l'admittance complexe

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{(K - \omega^2 m) + j\omega c} = \frac{e^{-j\varphi}}{\sqrt{(K - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}} \quad (46)$$

L'angle φ : $\text{tg}\varphi = \frac{\omega c}{K - \omega^2 m}$

Il vient finalement:

$$\underline{Zx} = \underline{f}$$

D'on la solution :

$$\underline{x} = \frac{\underline{f}}{\underline{Z}} = \underline{Yf} \quad (47)$$

$$\underline{x} = \frac{Fe^{j\omega t}}{(K - \omega^2 m) + j\omega c} = \frac{Fe^{j(\omega t - \varphi)}}{(K - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2} \quad (48)$$

En comparant (42) et (48), on retrouve :

$$x = \frac{F}{(K - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}, \text{tg}\varphi = \frac{\omega c}{K - \omega^2 m}$$

Donc : $\underline{H} = K \underline{Y}$ (49) \underline{H} : sans dimension

Il s'agit de la réponse complexe en fréquence, dont le module μ (facteur d'amplification dynamique)

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{(K - \omega^2 m) + j\omega c} = \frac{1}{(1 - \omega^2 \frac{m}{K}) + j\frac{\omega c}{K}} = \frac{1}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}) + 2j\tau \frac{\omega}{\omega_0}} \quad (50)$$

en introduisant la pulsation relative

$$\underline{H}(\beta) = \frac{1}{(1 - \beta^2) + 2j\tau\beta} \quad (51)$$

On peut écrire également

$$\begin{cases} \underline{H} = \mu e^{-j\varphi} = \frac{e^{-j\varphi}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\tau^2\beta^2}} \\ \tau f \varphi = \frac{2\tau\beta}{1-\beta^2} \end{cases} \quad (52)$$

Il est commode de faire apparaître la réponse complexe en fréquence et le déplacement statique dans (47)

$$\underline{x} = (\underline{KY}) \frac{1}{K} \underline{f} = (\underline{KY}) \frac{F}{K} e^{j\omega t}, \underline{x} = \underline{HX}_s e^{j\omega t} \quad (53)$$

La quantité $X_s e^{j\omega t}$ représente la forme complexe \underline{x}_e du déplacement élastique défini par

$$x_e(t) = \frac{1}{K} f(t)$$

$$(53) \text{ peut s'écrire : } \underline{x} = \underline{HX}_e \quad (54)$$

4-pulsation propres et pulsations de résonance :

L'objet de ce paragraphe est déterminer les pulsations de résonance de vitesse et d'accélération

$$x = X \cos(\omega t - \varphi)$$

$$X = \mu X_s = \frac{X_s}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\tau^2\beta^2}}$$

$$\text{La vitesse : } \dot{x} = -\omega X \sin(\omega t - \varphi) = -V \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\text{Son amplitude : } V = \omega X = \omega_0 X_s \frac{\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\tau^2\beta^2}} \quad (55)$$

La pulsation pour laquelle l'oscillateur est en résonance c'est la vitesse V est minimum

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} = 0 \quad \Leftrightarrow (1-\beta^2)(1+\beta^2) = 0$$

β est réelle et positif

$$\text{La seule racine } \beta = 1 \Leftrightarrow \omega = \omega_0$$

En procédant de même pour l'accélération

$$\ddot{x} = -\omega^2 X \cos(\omega t - \varphi) = -A \cos(\omega t - \varphi)$$

$$A = \omega^2 X = \omega_0^2 X_s \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\tau^2\beta^2}} \quad (56)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} = 0 \quad \Leftrightarrow \beta^2(1 - 2\tau^2) - 1 = 0$$

Soit β_3 la solution :

$$\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\tau^2}}$$

La résonance d'accélération apparait pour une pulsation $\omega_3 : \omega_3 > \omega_0$

$$\omega_3 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\tau^2}} \quad (57)$$

on résumé :

un oscillateur élémentaire linéaire possède les pulsations suivantes

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{Pulsation propre sans amortissement}$$

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \tau^2} \quad \text{Pulsation propre avec amortissement}$$

$$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 - 2\tau^2} \quad \text{Pulsation propre de résonance d'amplitude}$$

$$\omega_3 = \omega_0 \frac{1}{\sqrt{1 - 2\tau^2}} \quad \text{Pulsation propre de résonance d'accélération}$$

Elles sont classées dans l'ordre suivant $\omega_2 < \omega_1 < \omega_0 < \omega_3$

2- Régime permanent périodique

1-série de Fourier : Spectres de l'excitation et de la réponse le régime permanent est un régime qui se maintient après disparition des termes transitoires d'un oscillateur dissipatif excité par une force extérieure périodique $f(t)$ quelconque

Soit $f(t)$ de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Peut être décomposée en série de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2}F_0 + \sum_n^{\infty} (A_n \cos n\omega t + \beta_n \sin n\omega t) \quad (58)$$

Les coefficients A_n et β_n :

$$\begin{cases} F_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt \\ A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt \\ \beta_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt \end{cases} \quad (59)$$

Quant la Fonction $f(t)$ est paire ($f(-t)=f(t)$), les constantes β_n sont nulles et la série ne comprend que des termes en cosinus

Si la Fonction $f(t)$ est impaire ($f(-t)=-f(t)$), les constantes A_n sont nulles et la série ne comprend que des termes en sinus

En regroupant les cos et sin de même pulsation

$$f(t) = \frac{1}{2}F_0 + \sum_n^{\infty} F_n \cos(n\omega t - \varphi_n) \quad (60)$$

$$\begin{cases} F_n = \sqrt{A_n^2 + \beta_n^2} \\ \text{tg } \varphi_n = \frac{\beta_n}{A_n} \end{cases} \quad (61)$$

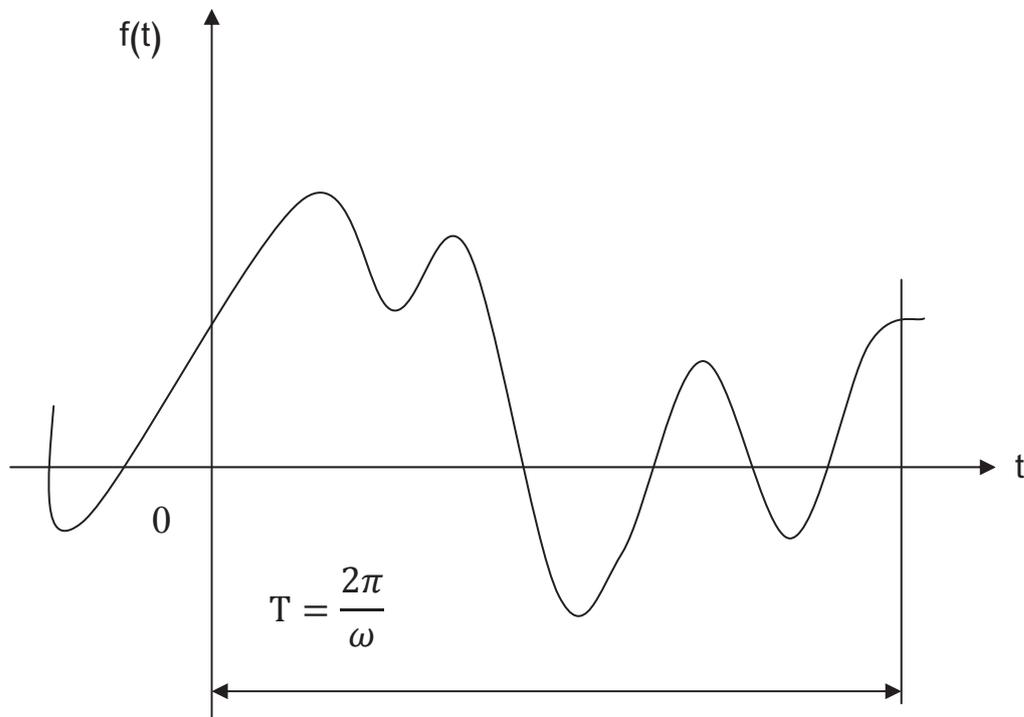


Fig : force extérieure périodique

La figure suivante montre comment la série des amplitudes F_n (spectre de $f(t)$) se transforme en une série des amplitudes X_n (spectre de $x(t)$) au moyen des exemples suivants :

- 1- La pulsation de résonance d'amplitude ω_2 est inférieure à la pulsation fondamentale de $f(t)$, une série décroissante F_n se transforme alors en une série X_n plus fortement décroissante.
- 2- La pulsation ω_2 est voisine par $\omega_2 = 3\omega_0$ L'amplitude ω_3 du 3^{ème} harmonique de $x(t)$ peut devenir supérieure à X_1 , même si $F_3 < F_1$.

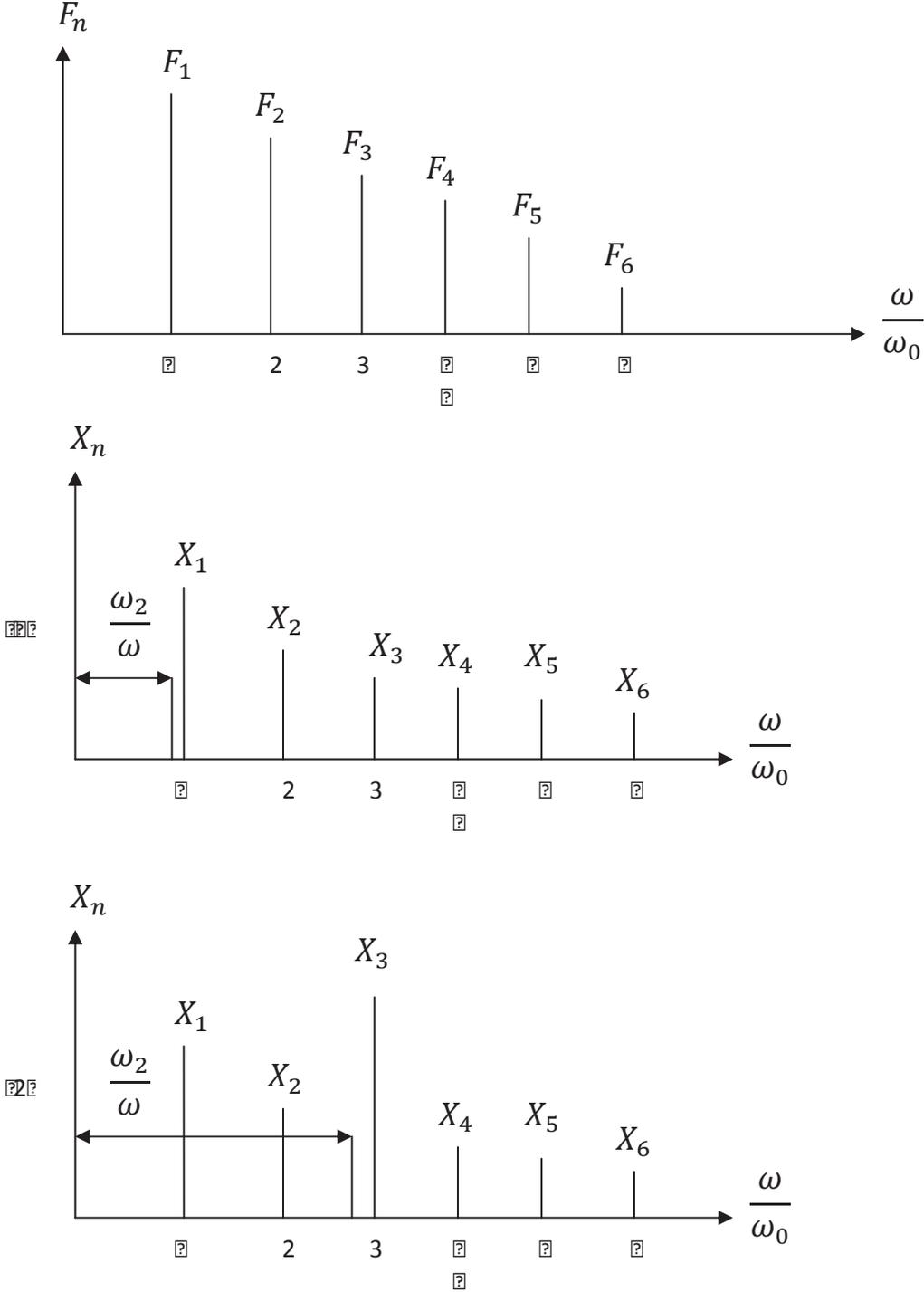


Fig : spectres de f(t) et de x(t)

- (1) $\frac{\omega_2}{\omega} < 1$
- (2) $\frac{\omega_2}{\omega} \approx 3$

L'amplitude des harmoniques de $x(t)$ décroît plus rapidement que celle des harmoniques de $f(t)$ dès que leur pulsation $n\omega$ est supérieur à racine de 2 fois ($n\omega \geq \sqrt{2}\omega_2$) la pulsation ω_2 l'oscillateur se comporte comme filtre des hautes fréquences.

Le terme $F_1 \cos(\omega t - \varphi_1)$ est la fondamentale de la force extérieure, les termes d'ordre supérieur ($n > 1$) sont appelés harmoniques.

Revenons à l'équation :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

il s'agit d'une équation différentielle linéaire, ce qui permet de superposer les solutions particulières correspondront à chaque terme de (60).

On aura donc

$$X(t) = \frac{1}{2} \frac{F_0}{K} + \sum_n X_n \cos(n\omega t - \varphi_n - \varphi_n) \quad (62)$$

ce résultat montre que $x(t)$ est une fonction périodique de même période que $f(t)$.

l'amplitude X_n de l'harmonique de rang \underline{n} est calculée au moyen de la relation (34,A) :

$$X_n = \frac{F_n}{\sqrt{(K - n^2\omega^2 m)^2 + n^2\omega^2 c^2}} = \mu_n X_{sn} \quad (63)$$

Par analogie avec (36) et (38), le déplacement statique et le facteur amplification dynamique correspondants ont pour valeurs

$$X_{sn} = \frac{F_n}{K} \quad (64)$$

$$\mu_n = \frac{1}{\sqrt{(1 - n^2\beta^2)^2 + 4\tau^2 n^2 \beta^2}} \quad (65)$$

Le déphasage est donné par :

$$\tan \varphi_n = \frac{n\omega c}{K - n^2\omega^2 m} = \frac{2\tau n\beta}{1 - n^2\beta^2} \quad (66)$$

Cet effet apparait clairement en écrivant les relations (65) et (66) comme suit :

$$\mu_n = \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{n^2} - \beta^2\right)^2 + \frac{4\tau^2 \beta^2}{n^2}}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{1}{n} \frac{2\tau\beta}{\frac{1}{n^2} - \beta^2}$$

Pour les grandes valeurs de n , elles deviennent

$$\mu_n \approx \frac{1}{n^2\beta^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_n \approx -\frac{2\tau}{n\beta}$$

Ainsi l'amplitude X_n décroît comme $\frac{1}{n^2}$ et le déphasage φ_n tend vers π

Séries de Fourier sous forme complexe :

En utilisant les relations d'Euler liant fonctions trigonométriques aux fonctions exponentielles complexes.

$$\cos n\omega t = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2}, \quad \sin n\omega t = \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j}$$

La décomposition en série de Fourier prend la forme :

$$X(t) = \frac{1}{2}F_0 + \frac{1}{2} + \sum_n (A_n(e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}) - j\beta_n(e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}))$$

On, en groupant les termes différemment,

$$X(t) = \frac{1}{2}F_0 + \frac{1}{2} + \sum_n ((A_n - j\beta_n)e^{jn\omega t} + (A_n + j\beta_n)e^{-jn\omega t})$$

Introduisons les notations

$$\begin{cases} C_0 = \frac{1}{2}F_0 \\ \underline{C}_n = \frac{1}{2}(A_n - j\beta_n) \\ \underline{C}_n^* = \underline{C}_{-n} = \frac{1}{2}(A_n + j\beta_n) \end{cases} \quad (67)$$

La série devient ainsi :

$$X(t) = c_0 + \sum_n (\underline{C}_n e^{jn\omega t} + \underline{C}_n^* e^{-jn\omega t}) \quad (68)$$

Ou encore, en sommant de $-\infty$ à $+\infty$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \underline{C}_n e^{jn\omega t} \quad (69)$$

les coefficients complexes \underline{C}_n peuvent être calculés à partir de (59)

$$\underline{C}_n = \frac{1}{2} (A_n - j\beta_n) = \frac{1}{T} \int_n^T f(t) (\cos n\omega t - j \sin n\omega t) dt, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_n^T f(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (70)$$

3-Régime forcé

Le régime forcé de l'oscillateur correspond à la solution complète de l'équation différentielle

$$m\ddot{x}+cx+kx=f(t)$$

il est donc la somme d'une solution particulière $x_p(t)$ de l'équation avec second membre et de la solution générale $x_G(t)$ de l'équation sans second membre ce problème peut être abordé par :

- La recherche directe de solutions particulières
- La transformation de Laplace
- La transformation de Fourier
- L'analyse numérique

1- Transformation de Laplace :

La Transformation de Laplace permet de remplacer un problème différentiel par un problème algébrique.

La Transformation de Laplace d'une fonction $f(x)$ de la variable réelle t , dite fonction génératrice et définie pour $t \geq 0$ par :

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = l(f(t))$$

Cette transformée est une fonction de la variable si réelle ou complexe on appelle abscisse de convergence le nombre réel a tel que la condition

$\text{Re}(s) > a$ assure la convergence de l'intégrale, et donc l'existence de $F(s)$

On appelle la transformée de Carson, Laplace, la définition modifiée

$$F'(s) = S \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = l'(f(t))$$

Elle présente l'avantage de transformer une constante en constante

$$F'(s) = S F(s) \leftrightarrow F(s) = \frac{1}{S} F'(s)$$

Propriétés fondamentales de la transformée de Laplace :

$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}(f(t))$	Remarques
$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$C_1 F_1(s) + C_2 F_2(s)$	Théorème de linéarité
$f'(t)$	$SF(s)-f(0)$	
$f''(t)$	$S^2 F(s) - (Sf(0) + f'(0))$	Théorème des dérivées
$f^n(t)$	$S^n F(s) - (S^{n-1} f(0) + \dots + S f^{n-2}(0) + f^{n-1}(0))$	
$h(t)=\int_0^t f(U)g(t-u)du$	$H(s)=F(s)G(s)$	Théorème de composition
$h(t)=\int_0^t f(t-u)g(U)du$	$G(s)=$	
$g(t)=0$ pour $t < a$	$e^{-as} F(s)$	Théorème du retard
$g(t)=f(t-a)$ pour $t \geq a$	$\frac{1}{S} F(s) + \frac{1}{S} \int_{t_0}^0 f(U)du$	
$\int_{t_0}^t f(U)du$	$\frac{1}{S} F(s)$	
$\int_0^t f(U)du$	$F(s+a)$	
$e^{-at} f(t)$		

Table des transformée de Laplace élémentaires :

$f(t)$	$F(s)=\ell (f(t))$	$f(t)$	$F(s)=\ell (f(t))$
1	$\frac{1}{s}$	$t \cos \omega t$	$\frac{S^2 - \omega^2}{(S^2 + \omega^2)^2}$
T	$\frac{1}{s^2}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(S^2 + \omega^2)^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{S + a}{(S + a)^2 + \omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{S - a}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(S + a)^2 + \omega^2}$
$t e^{at}$	$\frac{1}{(S - a)^2}$	$ch\omega t$	$\frac{S}{S^2 - \omega^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(S - a)^{n+1}}$	$sh\omega t$	$\frac{\omega}{S^2 - \omega^2}$
$(1 + at)e^{at}$	$\frac{1}{(S - a)^2}$	$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{S(S^2 + \omega^2)}$
$\frac{1}{r_1+r_2} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t})$	$\frac{1}{(S - r_1)(S - r_2)}$	$ch\omega t - 1$	$\frac{\omega^2}{S(S^2 - \omega^2)}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$		
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$		

2- Solution générale du régime forcé :

Revenons à l'équation (1)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

et prenons la transformée de Laplace des deux membres avec les notations

$$X(s) = \ell(x(t)) \quad x(0) = X_0 \quad \dot{x}(0) = V_0$$

$$F(s) = \ell(f(t))$$

Il vient

$$m(S^2 x(s) - sX_0 - V_0) + c(s x(s) - X_0) + kX(s) = F(s)$$

$$X(s)(m s^2 + cs + k) = F(s) + X_0(ms + c) + V_0 m$$

On désigne sous le nom d'impédance opérationnelle la quantité

$$Z(s) = ms^2 + cs + K \quad (71)$$

Son inverse est appelé admittance opérationnelle ou fonction de transfert

$$Y(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + K} \quad (72)$$

Suit: $Z(s) = m\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{K}{m}\right)$

On fait apparaître les grandeurs définies par :

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m}, \quad d = \frac{c}{2m}, \quad \tau = \frac{1}{\omega_0}$$

Il vient donc :

$$Z(s) = m(s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2) \quad (73)$$

$$Y(s) = \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} \quad (74)$$

La transformée $X(s)$ de la solution recherchée $x(t)$ a pour expression d'après et

$$X(s) = Y(s) F(s) + \frac{X_0(s + 2\lambda) + V_0}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} \quad (75)$$

Si les fonctions inverses des deux termes du second membre sont respectivement $X_a(t)$ et $X_b(t)$, il vient

$$X(t) = X_a(t) + X_b(t)$$

La fonction $X_b(t)$ est connue après avoir déterminé l'admittance temporelle $Y(t)$, inverse de $Y(s)$, la théorie de composition permet de calculer $X_a(t)$

Par l'intégrale suivante, « intégrale de convolution ».

$$X_a(t) = \int_0^t y(t-u) f(u) du = \int_0^t y(u) f(t-u) du \quad (75)$$

Comme précédemment, il faut distinguer trois cas en fonction de la valeur de l'amortissement relatif n

Amortissement sur critique $n > 1$

$$n > 1 \Rightarrow \lambda^2 > \omega_0^2 \Rightarrow \omega_1^2 = \lambda^2 - \omega_0^2$$

L'admittance peut se mettre sous la forme

$$Y(s) = \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} = \frac{1}{(s - r_1)(s - r_2)}$$

$$\text{Avec: } \begin{cases} r_1 = -\lambda + \omega_1 \\ r_2 = -\lambda + \omega_2 \end{cases}$$

d'après la table des transformations:

$$Y(s) = \frac{e^{-\lambda t}}{2m\omega_1} (e^{\omega_1 t} - e^{-\omega_1 t}) = \frac{e^{-\lambda t}}{m\omega_1} \text{sh}\omega_1 t \quad (76)$$

Pour $X_b(t)$ le plus commode est d'utiliser la relation (14)

Le régime forcé est ainsi

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_1} \int_0^t e^{-\lambda u} \text{sh}\omega_1 u f(t-u) du + e^{-\lambda t} (x_1 \text{ch}\omega_1 t + \frac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1} \text{sh}\omega_1 t) \quad (77)$$

Amortissement critique $n=1$

$$n=1 \Rightarrow \lambda = \omega_0$$

L'admittance déduit

$$Y(s) = \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + 2\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{1}{m} \frac{1}{(s + \omega_0)^2}$$

Par conséquent d'après la table

$$Y(s) = \frac{1}{m} e^{-\omega_0 t} \quad (78)$$

La fonction $X_b(t)$ étant donnée par , on a

$$x(t) = \frac{1}{m} \int_0^t u e^{-\omega_0 u} f(t-u) du + (x_0 + (\omega_0 x_0 + V_0)t) e^{-\omega_0 t} \quad (79)$$

L'amortissement sous critique $n < 1$

$$n > 1 \Rightarrow \lambda^2 > \omega_0^2 \Rightarrow \omega_1^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$$

Pour utiliser la table, le plus commode est de procéder :

$$Y(s) = \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} = \frac{1}{m} \frac{1}{(s + \lambda)^2 + \omega_0^2 - \lambda^2} = \frac{1}{m\omega_1} \frac{\omega_1}{(s + \lambda)^2 + \omega_1^2}$$

$$Y(s) = \frac{e^{-\lambda t}}{m\omega_1} \sin\omega_1 t \quad (80)$$

Ce résultat ainsi que les relations (23) et (24) déterminant le régime force

$$X(t) = \frac{1}{m\omega_1} \int_0^t e^{-\lambda u} \sin\omega_1 u f(t-u) du + X e^{-\lambda t} \cos(\omega_1 t - \varphi) \quad (81)$$

Avec :

$$X = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1}\right)^2} t g \varphi = \frac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1 X_0}$$

3- Réponses à une impulsion et à un échelon de force :

3.1. Réponse impulsionnelle :

Soit une force extérieure F , très intense (force impulsionnelle), soit appliquée à l'oscillateur durant un intervalle de temps très court (fig), par analogie avec la distribution de Dirac, une telle sollicitation est appelée impulsion de Dirac si le produit $F \cdot \varepsilon$ est égale à l'unité quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et $F \rightarrow \infty$ $F \varepsilon = 1$

$$[F \varepsilon] = 1 \text{Ns} = 1 \text{ Newton} \times \text{seconde}$$

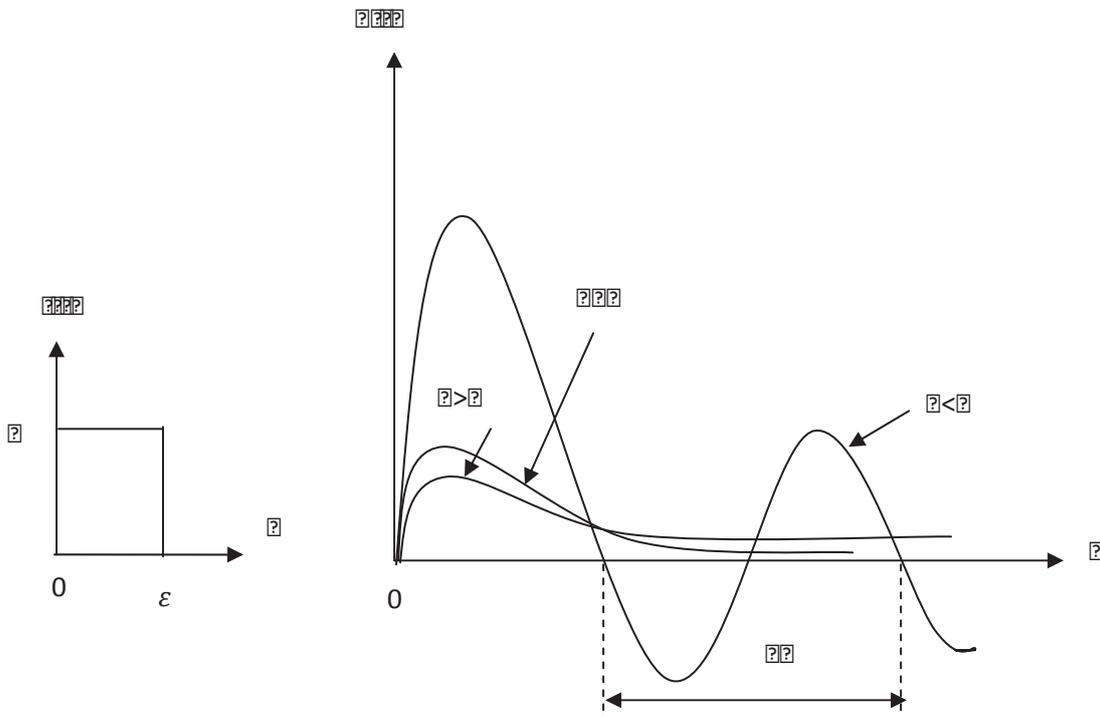


Fig : impulsion de Dirac et réponse impulsionnelle

Démonstrons que la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac est égale à 1 si l'on désigne par $d(t)$ la réponse de l'oscillateur, dite réponse impulsionnelle on a via d'après (75)

$$D(s) = Y(s) \cdot 1 \rightarrow d(t) = Y(t) \quad (82)$$

Cette réponse est égale à l'admet tance temporelle.

Considérant les dimensions physiques de ces grandeurs :

- Réponse impulsionnelle : $[d(t)] = m$
- Admittance temporelle : $[y(t)] = \frac{s}{kg}$
- Admittance opérationnelle : $[y(s)] = \frac{N}{n} = \frac{s^2}{kg}$
- Variable de Laplace : $[s] = [\omega_0] \frac{1}{s} \quad (\forall x(t))$

Amortissement sur critique $\tau > 1$

$$d(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{2m\omega_1} (e^{\omega_1 t} - e^{-\omega_1 t}) = \frac{e^{-\lambda t}}{m\omega_1} \text{sh}\omega_1 t$$

Amortissement critique $\tau = 1$

$$d(t) = \frac{1}{m} e^{-\omega_1 t}$$

Amortissement critique $\tau < 1$

$$d(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{m\omega_1} \sin \omega_1 t$$

L'oscillateur généralisé

:

1- Définition et forme énergétiques de l'oscillateur généralisé :

Un système oscillant linéaire général discret est un système de la mécanique linéaire comportant un nombre (n) quelconque, mais fini de degrés de liberté et dont le comportement est régi par l'équation différentielle du second ordre suivante.

$$[M] \ddot{x} + [C] \dot{x} + [K] x = f(x) \quad (2.1)$$

Où x , \dot{x} , \ddot{x} sont respectivement les vecteurs des déplacements, des vitesses et des accélérations.

Le vecteur $f(t)$ représente les forces extérieures agissant sur le système les composantes linéaire du vecteur (x) sont appelées coordonnées généralisées avec ces différentes dimensions physiques (longueur, angles, volume, ...) de même pour (\dot{x}), (\ddot{x}) et $f_i(t)$

les matrices $[M]$, $[C]$ et $[K]$, que l'on suppose symétriques, sont appelées respectivement matrice des masses matrice d'amortissement et matrice de rigidité le concept d'oscillateur généralisé, implique que les forme énergétiques correspondantes sont données par les expressions ci-dessous.

L'énergie cinétique ne dépend que des vitesses généralisées.

$$T = \frac{1}{2} \dot{x}^t [M] \dot{x} \quad (2.2)$$

C'est une forme quadratique symétrique définie positive des vitesses généralisées, elle ne s'annule que pour ($\dot{x}=0$)

La matrice $[M]$ est également symétrique définie positive (elle satisfait le critère de Silvestre) : le déterminant de $[M]$ et les déterminants de tous les mineurs diagonaux doivent être positifs.

$$\Delta_n = |M| = \begin{vmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{vmatrix} > 0, \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} m_{11} & \dots & m_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n-1,1} & \dots & m_{n-1,n-1} \end{vmatrix} > 0, \dots$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} m_{11} & \dots & m_{12} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ m_{21} & \dots & m_{22} \end{vmatrix} > 0, \Delta_1 = m_{11} > 0$$

L'énergie potentielle, de type élastique, a pour expression

$$T = \frac{1}{2} x^t [K] x \tag{2.3}$$

C'est une forme quadratique symétrique semi-définie positive des déplacements généralisés. Elle est dite semi-définie car elle peut éventuellement être nulle pour une valeur de (x) différente de zéro.

On appelle fonction de dissipation de Rayleigh la demi-puissance totale consommée par le système.

$$\omega = \frac{1}{2} x^t [C] x \tag{2.4}$$

En dérivant les relation (2.2) à (2.4) on retrouve l'équation (2.1)

2- Dérivation d'une forme quadratique symétrique Equation de la grange :

On considère une forme quadratique symétrique des variables (x_i)

$$Q = x^t [S] x = \sum_i^n \sum_j^n S_{ij} x_i x_j$$

$$S_{ij} = S_{ji} \tag{2.5}$$

On calcule les dérivées partielles $\frac{\partial Q}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial x_n}$ et on exprime le résultat sous forme matricielle.

Si (x_k) est l'un des (x_i) la forme quadratique peut s'écrire

$$\varphi = \sum_{i \neq k}^n S_{ik} x_i x_k + \sum_{i \neq k}^n S_{kj} x_k x_d + S_{kk} x_k^2 + Q \tag{2.6}$$

(n-1) termes (n-1) termes 1 termes (n-1)² termes

Dans cette expression, le terme Q ne dépend pas de l'indice (K) la dérivation donne ainsi.

$$\frac{\partial Q}{\partial x_k} = \sum_{i \neq k}^n S_{ik} x_i + \sum_{i \neq k}^n S_{kj} x_k + 2S_{kk} x_k = \sum_i^n S_{ik} x_i + \sum_j^n S_{kj} x_j$$

Comme S_{ik} = S_{ki}, si i=j les deux sommes sont égales

$$\frac{\partial Q}{\partial x_k} = 2 \sum_i^n S_{ik} x_i = 2 \sum_j^n S_{kj} x_j$$

En faisant varier l'indice (K) entre 1 et n, on obtient

$$\begin{matrix} \frac{\partial Q}{\partial x_1} = 2 \sum_j^n S_{1j} x_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial Q}{\partial x_n} = 2 \sum_j^n S_{nj} x_j \end{matrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial Q}{\partial x_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial Q}{\partial x_n} \end{matrix} \right\} = 2[S]x$$

On peut définir l'opérateur matriciel

$$\left\{ \frac{\partial Q}{\partial x_i} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial Q}{\partial x_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial Q}{\partial x_n} \end{matrix} \right\} \quad (2.7)$$

En résumé, si Q est une forme quadratique symétrique

$$\left\{ \frac{\partial Q}{\partial x_i} \right\} = 2[S]x \quad (2.8)$$

Si l'on désigne par T, V et W l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et la fonction de dissipation, les équations de Lagrange d'un système dissipatif à (n) degrés de liberté s'écrivent

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial W}{\partial \dot{x}_k} = f_k(t) \quad k = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

Dans le cas particulier, l'énergie cinétique ne dépend pas des déplacements et l'équation précédente se simplifie :

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \right\} + \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_i} \right\} + \left\{ \frac{\partial W}{\partial x_i} \right\} = f(t) \quad (2.11)$$

Elles sont au nombre de (n) mais peuvent être condensées en une équation unique en utilisant l'opérateur matriciel

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \right\} - \left\{ \frac{\partial T}{\partial x_i} \right\} + \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_i} \right\} + \left\{ \frac{\partial W}{\partial x_i} \right\} = f(t) \quad (2.10)$$

Rappelons que : $T = \frac{1}{2} \dot{x}^t [M] \dot{x}$, $V = \frac{1}{2} x^t [K] x$, $W = \frac{1}{2} x^t [C] \dot{x}$

En utilisant (2.8), l'équation (2.11) devient

$$\frac{d}{dt} [M] \dot{x} + [K] x + [C] \dot{x} = f(t)$$

Comme les matrices sont indépendantes du temps, on écrit

$$[M] \ddot{x} + [C] \dot{x} + [K] x = f(t)$$

2-Régime libre de l'oscillateur généralisé conservatif

Introduction :

En régime libre conservatif l'équation (2.1) devient

$$[M]\ddot{x} + [K]x = 0 \quad (2.12)$$

Multiplions par $[M]^{-1}$

$$\ddot{x} + [M]^{-1}[K]x = 0 \quad (2.13)$$

On appelle noyau du système le produit

$$[A] = [M]^{-1}[K]$$

L'équation (2.13) n'écrit :

$$\ddot{x} + [A]x = 0 \quad (2.14)$$

Cette équation matricielle correspond à un système de (n) équations différentielles du second ordre qu'on peut résoudre par deux approches différentes :

- la combinaison linéaire des solutions particulières
- un changement de base faisant intervenir les coordonnées normales (découplées).

Résolution du système par combinaison linéaire de solutions particulières :

1- Recherche de solution particulière :

on cherche d'abord s'il existe des solutions $x_i(t)$ du système (2.14) de la forme $x_i(t) = x_i g(t)$
 $g(t)$: fonction harmonique

la solution est de type : $x = X \cos(\omega t - \varphi) \dots \dots \dots (2.15)$

il vient, par introduction dans (2.14)

$$[-\omega^2 [I] + [A]]X \cos(\omega t - \varphi) = 0$$

Adoptant la convention d'écriture : $\delta = \omega^2$ (2.16)

On obtient, après simplification par $\cos(\omega t - \varphi)$

$$[[A] - \delta[I]]X = 0 \quad (2.17)$$

Il s'agit d'un système d'équations homogènes qui n'admet de solutions non toutes nulles que si son déterminant est nul

$$[[A] - \delta[I]] = 0 \quad (2.18)$$

Soit, en développant

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \delta) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \delta) & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \delta) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.19)$$

Les scalaires $\delta = \omega^2$ sont ainsi les valeurs propres de la créatrice [A] l'équation précédente, appelée équation aux pulsations propres du système oscillant, on équation caractéristique, est de la forme :

$$\delta^n + a_1 \delta^{n-1} + a_2 \delta^{n-2} + \dots + a_{n-1} \delta + a_n = 0 \quad (2.20)$$

On peut écrire :

$$\delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_p < \dots < \delta_n$$

En pulsation propre :

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_p < \dots < \omega_n$$

Acha une des pulsations propres ω_p correspond une solution particulière du système différentiel

$$x_p = X_p \cos(\omega_p t - \varphi_p) \quad (2.21)$$

Ou, en revenant à une notation indicielle

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1p} = X_{1p} \cos(\omega_p t - \varphi_p) \\ \dots \\ x_{ip} = X_{ip} \cos(\omega_p t - \varphi_p) \\ \dots \\ x_{np} = X_{np} \cos(\omega_p t - \varphi_p) \end{array} \right.$$

Solution générale modes propres :

le vecteur $x_p(t)$ représente le mouvement du système lié à la pulsation propre ω_p , on l'appelle mode propre de rang P

le vecteur X_p donne les amplitudes de x_p , on l'appelle forme propre de rang P

on obtient les composantes de X_p en introduisant la valeur $\delta = \delta_p$ dans les équations (2.17)

on écrira :

$$\beta_{ip} = \frac{x_{ip}}{X_p} ; X_p = \beta_p X_p \quad (2.22)$$

la solution générale du système différentiel est donnée par combinaison linéaire des solutions particulières, soit par (2.21)

$$x = \sum_p^n \gamma_p x_p = \sum_p^n \gamma_p \beta_p X_p \cos(\omega_p t - \varphi_p)$$

on choisir : $\gamma_p=1$ (X_p sont arbitraires)

$$x = \sum_p^n \beta_p X_p \cos(\omega_p t - \varphi_p) \quad (2.23)$$

Effectuons le développement :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \vdots \\ \beta_{i1} \\ \vdots \\ \beta_{n1} \end{pmatrix} X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \dots + \begin{pmatrix} \beta_{1p} \\ \vdots \\ \beta_{ip} \\ \vdots \\ \beta_{np} \end{pmatrix} X_p \cos(\omega_p t - \varphi_p) + \dots \\ &+ \begin{pmatrix} \beta_{1n} \\ \vdots \\ \beta_{in} \\ \vdots \\ \beta_{nn} \end{pmatrix} X_n \cos(\omega_n t - \varphi_n) \end{aligned}$$

1^{ere} mode
mode p
mode n

$$\begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_i \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \beta_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{i1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{n1} \end{array} \right\} X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \dots + \left\{ \begin{array}{c} \beta_{1p} \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{ip} \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{np} \end{array} \right\} X_p \cos(\omega_p t - \varphi_p) + \dots + \left\{ \begin{array}{c} \beta_{1n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{in} \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{nn} \end{array} \right\} X_n \cos(\omega_n t - \varphi_n) \end{array}$$

1^{ère} mode
mode p
mode n (2.24)

Vibration des poutres droites

VI.1 Introduction :

Parmi les éléments constituant une structure, on trouve fréquemment des éléments de poutre, de plaque, de coque les solutions analytiques permettant de déterminer leur comportement n'existent que rarement dans le cas où la recherche de solutions analytiques est très pénible, il est préférable d'utiliser systématiquement des méthodes numériques.

Dans cette partie on choisit généralement la méthode numérique de Rayleigh-Ritz.

VI.2 Equations des mouvements des poutres :

L'étude des systèmes continus correspond à une étape logique de ce texte puisqu'ils peuvent être considérés comme une extension des systèmes à N degrés de liberté avec N tend vers ∞ , dans ce qui suit, les équations classiques des poutres droites sont présentées dans le cas des mouvements classiques longitudinal, torsion et flexion.

VI.2.1 Mouvement longitudinal :

Le mouvement est défini par :

U : Déplacement axial

N : Force axiale agissant sur le plan de section droite

N_{ex} : Force extérieure par unité de longueur

S : aire de la section droite

E : module de Young

ρ : masse volumique

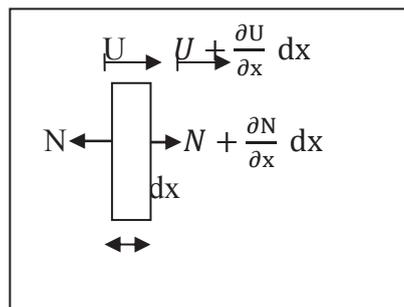


Fig.6.1 Mouvement longitudinal d'une poutre droite

Le théorème de la résultante cinétique appliqué à un élément de longueur dx entraîne :

$$\sum_{i=1}^N \varphi = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{v}_i = M \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\varphi s dx \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = N + \frac{\partial N}{\partial x} dx - N + N_{ex} dx \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{Soit } \varphi s \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial N}{\partial x} + N_{ex} \dots\dots\dots(2)$$

Par ailleurs, d'après la loi de Hooke, la force et le déplacement sont reliés par :

$$\frac{N}{s} = E \frac{\partial U}{\partial x} \dots\dots\dots(3)$$

En combinant (2) et (3), l'équation aux dérivées partielles du mouvement s'écrit :

$$\varphi s \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (E s \frac{\partial U}{\partial x}) + N_{ex} \dots\dots\dots(4)$$

Et dans le cas d'une section constante :

$$\varphi s \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = E s \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + N_{ex} \dots\dots\dots(5)$$

VI.2.2 Vibration de torsion:

Le mouvement est défini par :

O : angle de torsion

T: couple de torsion

T_{ex} : couple extérieur par unité de longueur

I_o : inertie de masse par rapport à l'axe x et par unité de longueur

J : inertie polaire de la section droite

G : module de coulomb ou de torsion

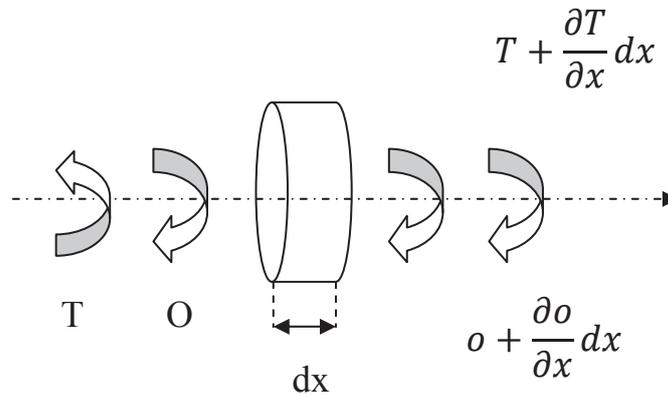


Fig.6.2 Mouvement de torsion d'une poutre droite

Le théorème du moment cinétique appliqué à un élément de longueur **dx** entraîne :

$$I_o dx \frac{\partial^2 o}{\partial t^2} = T + \frac{\partial T}{\partial x} dx - T + T_{ex} dx \dots\dots\dots(6)$$

$$\text{Soit : } I_o \frac{\partial^2 o}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x} + T_{ex} \dots\dots\dots(7)$$

Par ailleurs le couple et l'angle de torsions sont reliés par :

$$T = GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} \dots \dots \dots (8)$$

En combinant (7) et (8), l'équation aux dérivées partielles du mouvement s'écrit :

$$I_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (GJ \frac{\partial \theta}{\partial x}) + T_{ex} \dots \dots \dots (9)$$

Et dans le cas d'une section constante :

$$I_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + T_{ex} \dots \dots \dots (10)$$

($I_0 = J \cdot \varphi$ Pour Les Sections Droites)

VI.2.3 Vibration De Flexion Des Poutres :

Le Mouvement est défini par :

V : la flèche

θ : pente due au moment fléchissant

T : effort tranchant

C : moment fléchissant

T_{ex} : force extérieure par unité de longueur

I : inertie de section

a : facteur de forme il est de l'ordre de l'unité pour des section usuelles

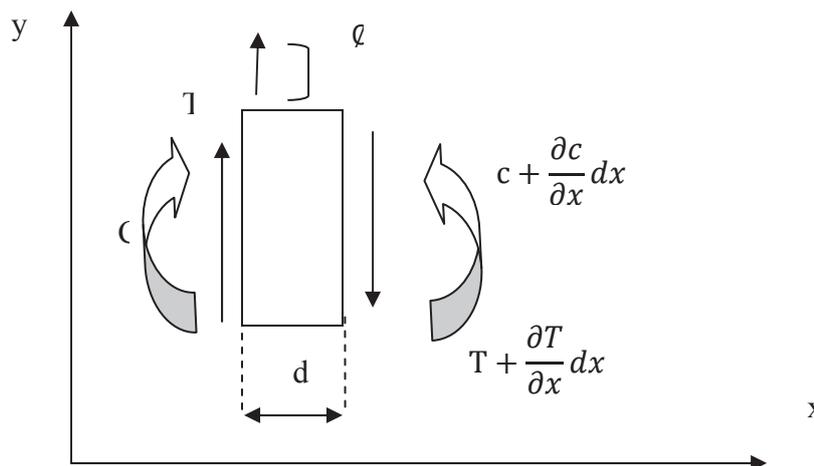


Fig.6.3 Mouvement de flexion d'une poutre droite

L'application des théorèmes généraux de la dynamique conduit à:

$$\varphi S dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = T - T - \frac{\partial T}{\partial x} dx + T_{ex} dx \dots\dots\dots(11)$$

$$\varphi I dx \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial t^2} = -c + c + \frac{\partial c}{\partial x} dx - T dx \dots\dots\dots(12)$$

Soit après simplification :

$$\varphi S dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{\partial c}{\partial x} + T_{ex} \dots\dots\dots(13)$$

$$\text{Et } \varphi I dx \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial t^2} = \frac{\partial c}{\partial x} T \dots\dots\dots(14)$$

Par ailleurs, entre T, C, V, \varnothing , les relations classiques de RDM sont les suivantes :

$$\frac{\partial \varnothing}{\partial x} = \frac{c}{EI} \dots\dots\dots(15)$$

$$\varnothing - \frac{T}{aSG} = \frac{\partial v}{\partial x} \dots\dots\dots(16)$$

Les termes $\varphi I \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial t^2}$ et $\frac{T}{aSG}$ sont les effets secondaires de flexion.

Le premier est l'effet d'inertie de rotation mis en évidence par Rayleigh, le second est l'effet de cisaillement mis en évidence par Timoshenko.

Dans la suite, les effets secondaires ne sont pas pris en compte et les équations (13), (14), (15), (16), s'écrivent :

$$\varphi S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{\partial T}{\partial x} + T_{ex}$$

$$0 = \frac{\partial c}{\partial x} - T$$

$$\frac{\partial \varnothing}{\partial x} = \frac{c}{EI}$$

$$\varnothing = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Par élimination de T, C, \varnothing , entre les quatre équations précédentes, l'équation aux dérivées du mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \varphi S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - T_{ex} = 0 \dots\dots\dots(18)$$

Et pour une poutre de section constante:

$$\left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \varphi S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - T_{ex} = 0 \dots\dots\dots(19)$$

VI.3 Fréquences et modes

VI.3.1 Introduction:

Les sections droites des poutres sont supposées constantes lors de la recherche des fréquences et modes et les équations du mouvement libre sont résolues par la méthode classique de séparation des variables, l'équation aux dérivées.

Partielles de la torsion étant formellement, dentique à celle du m^{vt} longitudinal, le m^{vt} de torsion n'est pas traité.

VI.3.2 Vibration longitudinal:

$$\text{Posons : } U(x,t)=\varphi(x) f(t) \dots\dots\dots(20)$$

Et reportions (5) :

$$\varphi \varphi(x) \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} - ES f(t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \dots\dots\dots(21)$$

La séparation de la fonction de la variable d'espace de celle de la variable du temps conduit à :

$$\frac{E}{\varphi} \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = \frac{1}{f(t)} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = -\omega^2 \dots\dots\dots(22)$$

La constante est prise égale à $-\omega^2$ a fin que les solutions restent bornées dans le temps il s'en suit que :

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \omega^2 f(t) = 0 \dots\dots\dots(23)$$

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \omega^2 \frac{\varphi}{E} \varphi(x) = 0 \dots\dots\dots(24)$$

Les équations (23) et (24) ont comme solution :

$$f(x) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \dots\dots\dots(25)$$

$$\varphi(x) = C \sin \omega \sqrt{\frac{\varphi}{E}} x + D \cos \omega \sqrt{\frac{\varphi}{E}} x \dots\dots\dots(26)$$

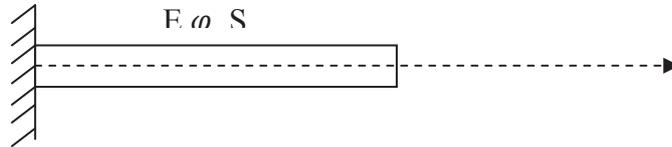
Et à une valeur de ω est associée la solution :

$$U(x, t) = (A \sin \omega t + B \cos \omega t) (C \sin \omega \sqrt{\frac{\varphi}{E}} x + D \cos \omega \sqrt{\frac{\varphi}{E}} x) \dots\dots\dots(27)$$

Les fréquences ω sont déterminées par l'application des conditions aux limites.

Exercice: poutre en mouvement longitudinal elle est en castrée à une extrémité à une extrémité et libre de l'autre extrémité :

Calculer les fréquences et les modes associés.



On à quelque soit l'instant t :

Pur $x=0, \varnothing(0), f(t)=0$

Et pour $x = L$

$$N(L, t) = ES \frac{d\varnothing(x)}{dx^2} f(x) = 0$$

La fonction $f(t)$ ne pouvant être nulle quelque soit t, la première condition entraîne $D=0$ et la seconde :

$$C \cos \omega \sqrt{\frac{\varphi}{E}} L = 0$$

A fin d'éviter la solution identiquement nulle, il faut que :

$$\cos \omega \sqrt{\frac{\varphi}{E}} L = 0$$

$$\omega \sqrt{\frac{\varphi}{E}} L = (2n-1)\frac{\pi}{2} \dots\dots\dots ;(n=1,2,\dots)$$

$$\omega_n = (2n-1)\frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\varphi}} \dots\dots\dots ;(n=1,2,\dots)$$

Et les modes associés à ω_n , définis à une constante près, s'écrivent :

$$\varnothing_n(x) = \sin (2n - 1) \frac{\pi x}{2L}$$

En M^{vt} libre le solution générale de l'équation aux dérivées partielles c'écrit donc :

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \sin (2n - 1) \frac{\pi x}{2L}$$

E-L	$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\varphi}}$	$\varnothing_n(x) = \sin (2n - 1) \frac{\pi x}{2L}$ avec $n=1,2,\dots$
E-E	$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\varphi}}$	$\varnothing_n(x) = \sin n \frac{\pi x}{L}$ avec $n=1,2,\dots$
L-L	$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\varphi}}$	$\varnothing_n(x) = \cos n \frac{\pi x}{L}$ avec $n=1,2,\dots$

VI.3.2 Vibration de flexion :

Posons : $V(x, t) = \varnothing_n(x) f(x)$

Qui reportée dans (19) entraîne :

$$EI \frac{d^4 \varnothing(x)}{dx^4} f(x) + \varphi s \varnothing_n(x) \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = 0$$

La séparation des variables conduit à :

$$\frac{EI}{\varphi s} \frac{1}{\varnothing(x)} \frac{d^4 \varnothing(x)}{dx^4} = - \frac{1}{f(x)} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \text{cte} = \omega^2$$

Où dans ce cas la constante doit être prise égale à $+\omega^2$ il en découle :

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \omega^2 f(x) = 0$$

$$\frac{d^2 \varnothing(x)}{dx^4} - \frac{\varphi s}{EI} \omega^2 \varnothing(x) = 0$$

La solution de (x) est $f(x) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$

Les solutions de (A,B) sont cherchées sous la forme e^{rx} d'où l'équation caractéristique :

$$r^4 - \frac{\varphi s \omega^2}{EI} = 0$$

Qui a comme racines : $r = \beta; -\beta; j\beta; -j\beta$

$$\text{Avec : } \beta = \sqrt[4]{\frac{\varphi s \omega^2}{EI}}$$

Pour chaque valeur de β ; $\varnothing(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$\varnothing(x) = C \sin \beta x + D \cos \beta x + E \operatorname{sh} \beta x + F \operatorname{ch} \beta x \dots (1)$$

Les fréquences ω sont déterminées par l'application des conditions aux limites les conditions

les plus courantes sont :

Libre(L) : $T=0, C=0$

Encastrée (E) : $V=0, \varnothing=0$ (2)

Appuyée (A) : $V=0, C=0$

Exercice 2 :

Trouver les fréquences naturelles et les modes associés à une poutre en mouvement longitudinal (libre-libre)

La poutre d'extrémité libre $\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = 0$ à $x=0$ et $x=L$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$U(x)\phi(x)(A\sin\omega t + B\cos\omega t)(C\sin\omega\sqrt{\frac{\varphi}{E}}x + D\cos\omega\sqrt{\frac{\varphi}{E}}x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = (A\sin\omega t + B\cos\omega t)(C\omega\sqrt{\frac{\varphi}{E}} \cdot \cos\omega\sqrt{\frac{\varphi}{E}}x - D\omega\sqrt{\frac{\varphi}{E}} \cdot \sin\omega\sqrt{\frac{\varphi}{E}}x)$$

Par conséquent :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=0} = (C\omega\sqrt{\frac{\varphi}{E}})(A\sin\omega t + B\cos\omega t) = 0 \leftrightarrow C = 0$$

Et :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=L} = (\omega\sqrt{\frac{\varphi}{E}})(-D\sin\omega\sqrt{\frac{\varphi}{E}}L)(A\sin\omega t + B\cos\omega t) = 0$$

Donc :

$$\sin\omega\sqrt{\frac{\varphi}{E}}L = 0; \quad \text{si } \beta \neq 0; \quad \omega\sqrt{\frac{\varphi}{E}} = \pi, 2\pi, \dots, n\pi$$

Donc :

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{\varphi}{E}}Vd/S$$

La solution générale est :

$$\phi_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}$$

La solution générale est :

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Exercice 3 :

Soit la poutre encastree libre en flexion, et en supposant que l'extremite encastree soit à $x=0$, et l'extremite libre à $x=L$, on a compte tenu de (17) et (1),(2)

$$D+F=0$$

$$C+E=0$$

$$-C \sin \beta L - D \cos \beta L + E \operatorname{sh} \beta L + F \operatorname{ch} \beta L = 0$$

$$-C \sin \beta L + D \cos \beta L + E \operatorname{sh} \beta L + F \operatorname{ch} \beta L = 0$$

Les solutions autres que les solutions identiquement nulles impliquent que le determinant du système III soit nul les calculs conduisent à :

$$1 + \cos \beta L \operatorname{ch} \beta L = 0$$

Les solutions de cette equation ont la forme :

$$\beta_n L = X_n$$

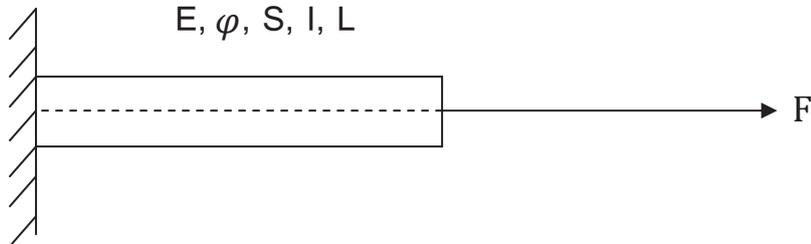
Compte tenu de $\beta = \left(\frac{\rho S \omega^2}{EI}\right)^{\frac{1}{4}}$, les frequences s'ecrivent :

$$\omega_n = \frac{X_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

Exercice N°4 : Effet de la force axiale

Une poutre libre encastrée est soumise à une force axiale constante F_0 , utiliser la méthode de Rayleigh pour calculer la fréquence avec la fonction de déplacement

$$v(x, t) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3$$



L'énergie cinétique de la poutre s'écrit:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \varphi s \left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \varphi s \left[3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right]^2 \dot{P}^2 dx$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \varphi s \left[9 \left(\frac{x}{L} \right)^4 - 6 \left(\frac{x}{L} \right)^5 + \left(\frac{x}{L} \right)^6 \right] \dot{P}^2 dx$$

$$T = 0.4714 \varphi s L \dot{P}^2$$

L'énergie de déformation de la poutre est donnée :

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[\frac{6}{L^2} - \frac{6x}{L^3} \right]^2 P^2 dx$$

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[\frac{36}{L^4} - \frac{72}{L^5} x + 36 \frac{x^2}{L^6} \right] P^2 dx$$

$$U_b = 6 \frac{EI}{L^3} P^2$$

L'énergie de déformation de la force axiale est donnée par:

$$U_{F_0} = \frac{F_0}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{F_0}{2} \int_0^L EI \left[\frac{6}{L^2} - \frac{3x^2}{L^3} \right]^2 P^2 dx$$

$$U_{F_0} = \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[36 \frac{x^2}{L^4} - 36 \frac{x^3}{L^5} + 9 \frac{x^4}{L^6} \right] P^2 dx$$

$$U_{F_0} = \frac{F_0 P^2}{2} \left[12 \frac{x^3}{L^4} - 9 \frac{x^4}{L^5} + \frac{9x^5}{5L^6} \right]_0^L = \frac{2.4F_0}{L} P^2$$

L'énergie de déformation du système est donnée par:

$$U = U_{\text{bean}} + U_{F_0} = 6 \frac{EI}{L^3} P^2 + \frac{2.4F_0}{L} P^2 = \left(6 \frac{EI}{L^3} + \frac{2.4F_0}{L} \right) P^2$$

L'application des équations Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{P}} \right) - \frac{\partial T}{\partial P} + \frac{\partial U}{\partial P} = 0$$

L'équation du mouvement est donnée par:

$$0.9428 \varphi s L \ddot{P} + \left(\frac{12EI}{L^3} + \frac{4.8F_0}{L} \right) P = 0 \quad (1)$$

Les solutions: $P = \underline{P} e^{j\omega t} \Rightarrow \dot{P} = -\underline{P} \omega^2 e^{j\omega t}$

Remplaçons dans (1): $0.9428 \varphi s L (-\underline{P} \omega^2 e^{j\omega t}) + \left(\frac{12EI}{L^3} + \frac{4.8F_0}{L} \right) \underline{P} e^{j\omega t} = 0$

$$-0.9428 \varphi s L \omega^2 + \left(\frac{12EI}{L^3} + \frac{4.8F_0}{L} \right) = 0$$

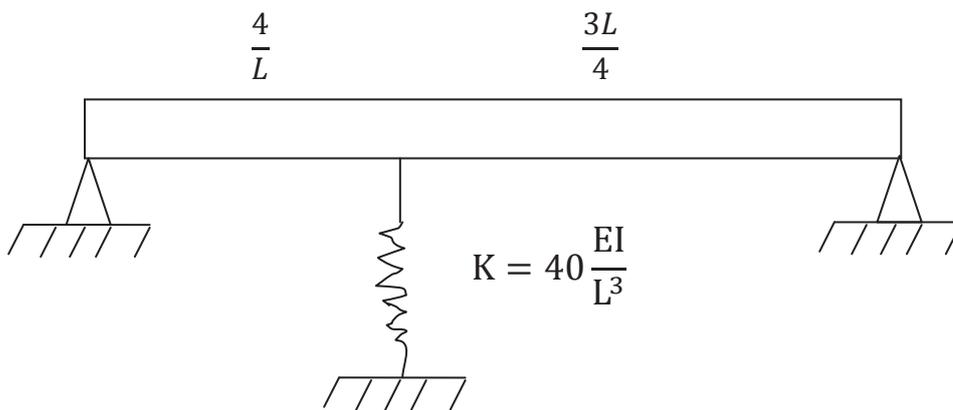
$$\omega^2 = \frac{\frac{12EI}{L^3} + \frac{4.8F_0}{L}}{0.9428 \varphi s L}$$

La fréquence est donnée par:

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{12EI}{L^3} + \frac{4.8F_0}{L}}{0.9428 \varphi s L}}$$

Exercice N°5: Une poutre simplement appuyée à chaque extrémité possède un ressort de raideur

$K = 40 \frac{EI}{L^3}$ à son quart de point voir figure utiliser la méthode de Rayleigh pour calculer la fréquence la plus basse.



Pour une poutre appuyée-appuyée, la fonction d'approximation est $\sin(\pi \frac{x}{L})$

Utilisons (1) et (2)

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \varphi_s \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (1)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (2)$$

L'énergie cinétique de la poutre est donnée :

$$T_{\text{bean}} = \frac{1}{2} \int_0^L \varphi_s \left(\sin \pi \frac{x}{L} \right)^2 \dot{P}^2 dx = \frac{\varphi_s L}{4} \dot{P}^2$$

L'énergie de déformation de la poutre est donnée:

$$U_{\text{bean}} = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{L} \right)^2 P^2 dx = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{L^3} P^2$$

L'énergie de déformation du ressort est:

$$U_{\text{ressort}} = \frac{1}{2} KV^2$$

$$K = 40 \frac{EI}{L^3}, \quad U = P \sin \frac{\pi x}{L}, \quad \text{for } x = \frac{L}{4}$$

$$U_{\text{spring}} = P \sin \frac{\pi}{4}$$

$$U_{\text{spring}} = \frac{1}{2} \frac{40EI}{L^3} P^2 \left(\sin \frac{\pi}{4} \right)^2 = \frac{10EI}{L^3} P^2$$

L'énergie de déformation du système:

$$U = U_{\text{bean}} + U_{\text{spring}} = \frac{EI}{L^3} \left(\frac{\pi^2}{4} + 10 \right) P^2$$

Appliquons les équations de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{P}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial P_i} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial P_i} \right) = 0$$

L'équation du mouvement est donnée par:

$$\varphi_s L \ddot{P} + \frac{EI}{L^3} (\pi^4 + 40) P = 0$$

$$P = \underline{P} e^{j\omega t} \Rightarrow \ddot{P} = -\underline{P} \omega^2 e^{-t}$$

$$\varphi_s L (-\underline{P} \omega^2 e^{j\omega t}) + \frac{EI}{L^3} (\pi^4 + 40) \underline{P} e^{j\omega t} = 0$$

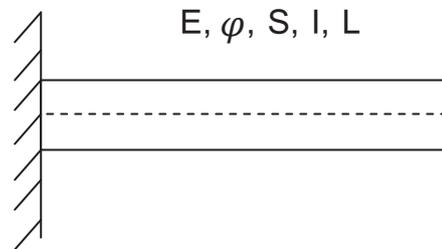
$$-\varphi_s L \omega^2 + \frac{EI}{L^3} (\pi^4 + 40) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{EI}{\varphi_s} \frac{1}{L^4} (\pi^4 + 40)$$

La fréquence est donnée par:

$$\omega = \frac{1}{L^2} \sqrt{\pi^4 + 40} \sqrt{\frac{EI}{\varphi S}} = \frac{11.72}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\varphi S}}$$

Activity N^o6 : considérez la poutre encastree-libre illustré sur la figure, utilisez la méthode Rayleigh Ritz pour calculer les deux premières fréquences et modes, utilisez la fonction de déplacement : $v(x, t) = \left(\frac{x}{L}\right)^2 P_1 + \left(\frac{x}{L}\right)^3 P_2$



L'énergie cinétique de la poutre est:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \varphi S \left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \varphi S \left[\left(\frac{x}{L} \right)^2 \dot{P}_1 + \left(\frac{x}{L} \right)^3 \dot{P}_2 \right]^2 dx$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \varphi S \left[\left(\frac{x}{L} \right)^4 \dot{P}_1^2 + 2 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 \dot{P}_1 \dot{P}_2 + \left(\frac{x}{L} \right)^6 \dot{P}_2^2 \right] dx$$

$$T = \frac{\varphi S L}{10} \dot{P}_1^2 + \frac{\varphi S L}{6} \dot{P}_1 \dot{P}_2 + \frac{\varphi S L}{14} \dot{P}_2^2$$

L'énergie de déformation de la poutre est:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[\frac{2}{L^2} P_1 - \frac{6x}{L^3} P_2 \right]^2 dx$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[\frac{4}{L^4} P_1^2 + 2 \frac{2}{L^2} P_1 - \frac{6x}{L^3} P_2 + \frac{36}{L^6} x^2 P_2^2 \right] dx$$

$$U = \frac{2EI}{L^3} P_1^2 + \frac{6EI}{L^3} P_1 P_2 + \frac{6EI}{L^3} P_2^2$$

L'application des équations de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{P}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial P_i} + \frac{\partial U}{\partial P_i} = 0$$

Les équations du mouvement sont données par:

$$\varphi sL \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{7} \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{P}_1 \\ \ddot{P}_2 \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (1)$$

La solution est de la forme:

$$P_1 = \underline{P}_1 e^{j\omega t}, \quad P_2 = \underline{P}_2 e^{j\omega t}, \quad \ddot{P}_1 = -\underline{P}_1 \omega^2 e^{j\omega t}, \quad \ddot{P}_2 = -\underline{P}_2 \omega^2 e^{j\omega t}$$

Replace in (1):

$$\varphi sL \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{7} \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega^2 e^{j\omega t} \underline{P}_1 \\ -\omega^2 e^{j\omega t} \underline{P}_2 \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_1 e^{j\omega t} \\ \underline{P}_2 e^{j\omega t} \end{bmatrix} = 0$$

$$\varphi sL \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{7} \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega^2 \underline{P}_1 \\ -\omega^2 \underline{P}_2 \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{-\varphi sL^4 \omega^2}{EI} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{7} \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (2)$$

donc:

$$r = \omega^2 \frac{\varphi sL^4}{EI}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{r}{5} & -\frac{r}{6} \\ \frac{r}{6} & -\frac{r}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 - \frac{r}{5} & 6 - \frac{r}{6} \\ 6 - \frac{r}{6} & 12 - \frac{r}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{Dét} : [K] - \omega^2 [M] = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 - \frac{r}{5} & 6 - \frac{r}{6} \\ 6 - \frac{r}{6} & 12 - \frac{r}{7} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 1224 r + 15120 = 0$$

$$\Rightarrow r_1 = 12.48 \quad \text{et} \quad r_2 = 1211.5$$

La fréquence:

$$r_i = \omega_i^2 \frac{\varphi sL^4}{EI} \Rightarrow \omega_i^2 = r_i \frac{EI}{\varphi sL^4}$$

$$\omega_i = \frac{\sqrt{r_i}}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\varphi S}}$$

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{r_1}}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\varphi S}} = \frac{3.53}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\varphi S}}$$

Remplaçons ω_1 and ω_2 dans (2), on trouve

Pour ω_1 : $\underline{P}_2 = -0.383 \underline{P}_1$

Avec le mode $\begin{bmatrix} 1 \\ -0.3836 \end{bmatrix}$

Pour ω_2 : $\underline{P}_1 = -0.8221 \underline{P}_2$

Avec le mode $\begin{bmatrix} -0.8221 \\ 1 \end{bmatrix}$

Finalement: $\phi_1(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^2 P_1 + \left(\frac{x}{L}\right)^3 P_2 = \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 0.3836 \left(\frac{x}{L}\right)^3$

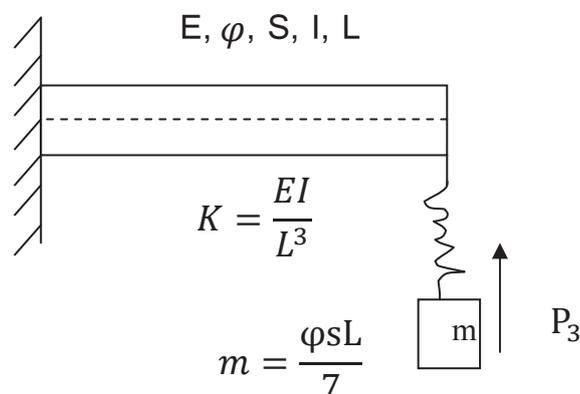
$$\phi_2(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^2 P_2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3 P_1 = -0.8221 \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3$$

Exercice N⁰⁷:

Le système représenté sur la figure est constitué d'une poutre encastree-libre avec un système masse-ressort suspendu à son extrémité libre, utiliser la méthode de Rayleigh Ritz pour calculer les trois premières fréquences et les modes du système pour la poutre, le

déplacement de la masse est P_3 , aussi : $K = \frac{EI}{L^3}$, $m = \frac{\varphi S L}{7}$

La fonction du déplacement: $v(x, t) = \left(\frac{x}{L}\right)^2 P_1 + \left(\frac{x}{L}\right)^3 P_2$ pour la poutre:



L'énergie cinétique de la poutre est donnée par:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \varphi_S \left[\left(\frac{x}{L} \right)^2 \dot{P}_1 + \left(\frac{x}{L} \right)^3 \dot{P}_2 \right]^2 dx$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \varphi_S \left[\left(\frac{x}{L} \right)^4 \dot{P}_1^2 + 2 \dot{P}_1 \dot{P}_2 \left(\frac{x}{L} \right)^5 + \left(\frac{x}{L} \right)^6 \dot{P}_2^2 \right] dx$$

$$T = \frac{1}{2} \varphi_S \left[\dot{P}_1^2 \frac{1}{5} \frac{x^5}{L^4} + \frac{1}{3} \dot{P}_1 \dot{P}_2 \frac{x^6}{L^5} + \frac{1}{7} \dot{P}_2^2 \frac{x^7}{L^6} \right]_0^L$$

$$T_{\text{beam}} = \frac{\varphi_S L}{10} \dot{P}_1^2 + \frac{\varphi_S L}{6} \dot{P}_1 \dot{P}_2 + \frac{\varphi_S L}{14} \dot{P}_2^2$$

L'énergie cinétique de la masse est donnée par :

$$T_{\text{mass}} = \frac{1}{2} m \dot{P}_3^2 = \frac{\varphi_S L}{14} \dot{P}_3^2$$

L'énergie cinétique du système est donnée:

$$T = T_{\text{beam}} + T_{\text{mass}} = \frac{\varphi_S L}{10} \dot{P}_1^2 + \frac{\varphi_S L}{6} \dot{P}_1 \dot{P}_2 + \frac{\varphi_S L}{14} \dot{P}_2^2 + \frac{\varphi_S L}{14} \dot{P}_3^2$$

L'énergie de déformation de la poutre est donnée par:

$$U_{\text{beam}} = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[\frac{2}{L^2} P_1 + \frac{6x}{L^3} P_2 \right]^2 dx$$

$$U_{\text{beam}} = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[\frac{4}{L^4} P_1^2 + \frac{24x}{L^5} P_1 P_2 + \frac{36x^2}{L^6} P_2^2 \right] dx$$

$$U_{\text{beam}} = \frac{1}{2} EI \left[\frac{4}{L^4} P_1^2 x + \frac{12 P_1 P_2}{L^5} x^2 + \frac{12 P_2^2}{L^6} x^3 \right]_0^L$$

L'énergie de déformation du ressort est donnée par:

$$\text{Le déplacement: } v(x,t) - P_3 = \left(\frac{x}{L} \right)^2 P_1 + \left(\frac{x}{L} \right)^3 P_2 \quad / \quad -P_3 = P_1 + P_2 - P_3$$

$$U_{\text{spring}} = \frac{1}{2} K (P_1 + P_2 - P_3)^2 = \frac{1}{2} \frac{EI}{L^3} (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + 2P_1 P_2 - 2P_1 P_3 - 2P_2 P_3)$$

L'énergie de déformation du système est donnée par:

$$U = U_{\text{beam}} + U_{\text{spring}} = \frac{5EI}{2L^3} P_1^2 + \frac{13EI}{2L^3} P_2^2 + \frac{EI}{2L^3} P_3^2 + \frac{7EI}{L^3} P_1 P_2 + \frac{EI}{L^3} (P_1 + P_2) P_3$$

L'application des équations de Lagrange conduit à:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{P}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial P_i} + \frac{\partial U}{\partial P_i} = 0 \quad , \quad i = 1 - 3$$

Les équations du mouvement sont données par:

$$\varphi sL \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{P}_1 \\ \ddot{P}_2 \\ \ddot{P}_3 \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 7 & 13 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (1)$$

Les solutions:

$$\begin{cases} P_1 = \underline{P}_1 e^{j\omega t} \\ P_2 = \underline{P}_2 e^{j\omega t} \\ P_3 = \underline{P}_3 e^{j\omega t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{P}_1 = -\underline{P}_1 \omega^2 e^{j\omega t} \\ \ddot{P}_2 = -\underline{P}_2 \omega^2 e^{j\omega t} \\ \ddot{P}_3 = -\underline{P}_3 \omega^2 e^{j\omega t} \end{cases}$$

Remplaçons dans (1):

$$\frac{-\varphi sL^4 \omega^2}{EI} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 \\ \underline{P}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 7 & 13 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 \\ \underline{P}_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (2)$$

Avec:

$$r = \omega^2 \frac{\varphi sL^4}{EI}$$

$$(2) \Rightarrow \begin{bmatrix} -r & -r & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 \\ \underline{P}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 7 & 13 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 \\ \underline{P}_3 \end{bmatrix} = 0$$

Finalement:

$$\begin{bmatrix} 5 - \frac{r}{6} & 7 - \frac{r}{6} & -1 \\ 7 - \frac{r}{6} & 13 - \frac{r}{7} & -1 \\ -1 & -1 & 1 - \frac{r}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 \\ \underline{P}_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{Det: } [[K] - \omega^2 [M]] = 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 - \frac{r}{5} & 7 - \frac{r}{6} & -1 \\ 7 - \frac{r}{6} & 13 - \frac{r}{7} & -1 \\ -1 & -1 & 1 - \frac{r}{7} \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(5 - \frac{r}{5}\right) \begin{vmatrix} 13 - \frac{r}{7} & -1 \\ -1 & 1 - \frac{r}{7} \end{vmatrix} - \left(7 - \frac{r}{6}\right) \begin{vmatrix} 7 - \frac{r}{6} & -1 \\ -1 & 1 - \frac{r}{7} \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 7 - \frac{r}{6} & 13 - \frac{r}{7} \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

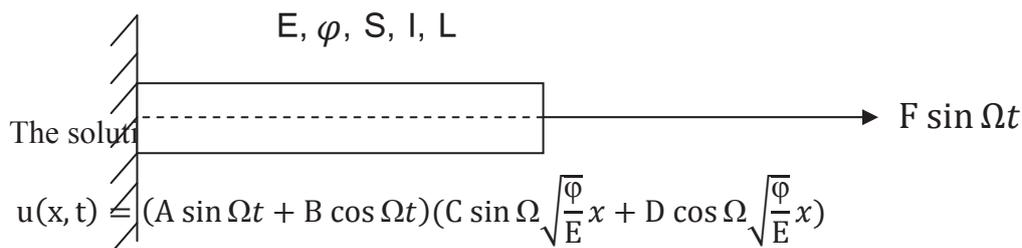
$$\begin{cases} r_1 = 4.592 \\ r_2 = 18.887 \\ r_3 = 1219.40 \end{cases}$$

Les fréquences:

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{\sqrt{r_1}}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\varphi S}} = \frac{2.143}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\varphi S}} \\ \omega_2 = \frac{\sqrt{r_2}}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\varphi S}} = \frac{4.346}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\varphi S}} \\ \omega_3 = \frac{\sqrt{r_3}}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\varphi S}} = \frac{34.92}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\varphi S}} \end{cases}$$

Exercice N°8 :

Une barre encadrée-libre est soumise à une force d'excitation sinusoïdale longitudinale $F \sin \Omega t$ à son extrémité libre comme indiqué sur la figure. Trouver la solution analytique pour le mouvement en régime permanent



Puisque $u(0, t) = 0$

$$u(0, t) = (A \sin \Omega t + B \cos \Omega t) \left(C \sin \left(\Omega \sqrt{\frac{\Phi}{E}} x_0 \right) + D \cos \left(\Omega \sqrt{\frac{\Phi}{E}} x_0 \right) \right)$$

$$u(0, t) = (A \sin \Omega t + B \cos \Omega t) D \cos 0 = 0$$

$$D = 0$$

$$u(x, t) = (A \sin \Omega t + B \cos \Omega t) C \sin \Omega \sqrt{\frac{\Phi}{E}} x$$

$$\begin{cases} A^* = A C \\ B^* = B C \end{cases}$$

$$u(x, t) = (A^* \sin \Omega t + B^* \cos \Omega t) \sin \Omega \sqrt{\frac{\Phi}{E}} x$$

At: $x=L$

$$N(L, t) = ES \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = F \sin \Omega t$$

Qui donne:

$$ES \Omega \sqrt{\frac{\Phi}{E}} \cos \Omega \sqrt{\frac{\Phi}{E}} L (A^* \sin \Omega t + B^* \cos \Omega t) = F \sin \Omega t + 0 \cos \Omega t$$

Ce qui necessaite:

$$\begin{cases} B^* = 0 \\ \text{and} \\ A^* = \frac{F}{ES} \Omega \sqrt{\frac{\Phi}{E}} \cos \left(\Omega \sqrt{\frac{\Phi}{E}} L \right) \end{cases}$$

Finalement:

$$u(x, t) = \frac{F}{ES \Omega \sqrt{\frac{\Phi}{E}} \cos \Omega \sqrt{\frac{\Phi}{E}} L} \sin \Omega \sqrt{\frac{\Phi}{E}} x \sin \Omega t$$

sabstitutions ω_1 , ω_2 and ω_3 into (2) gives

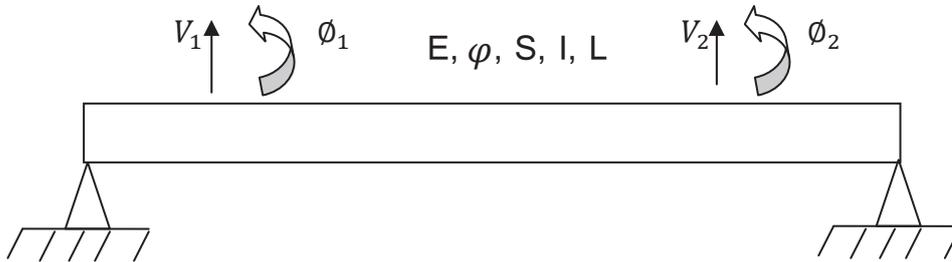
$$\text{pour } \omega_1: \text{ avec le mode } \phi_1 = \begin{bmatrix} 0.5308 \\ -0.1871 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2: \text{ avec le mode } \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.4077 \\ -0.3486 \end{bmatrix}$$

$$\omega_3: \text{ avec le mode } \phi_3 = \begin{bmatrix} -0.8215 \\ 1 \\ -0.0010 \end{bmatrix}$$

Modélisation des poutres par éléments finis :

Exercice 01 : une poutre en flexion (fig), est appuyée aux deux extrémités calculer en un le sont un seul élément fini, la première et le mode correspondant.



Le vecteur des déplacements modaux n'écrit :

$$\delta = (V_1 \phi_1, V_2 \phi_2) t$$

$$\text{avec } \phi = \frac{\partial v}{\partial x}$$

L'expression générale de l'énergie de déformation d'un élément fini en flexion est :

$$U = \frac{1}{2} \frac{EI}{L^3} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \phi_1 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12L & -6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \phi_1 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}$$

La matrice de rigidité est :

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12L & -6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Pour une poutre appuyée -appuyée $V_1 = V_2 = 0$ donc : supprimant la 1^{ère} ligne et la première colonne correspondant au round (1) : (le flèche $V_1 = 0$)

En supprimant le 3^{ème} ligne et la 3^{ème} colonne correspondant au prend (2) : (le flèche $V_2 = 0$)

Donc :

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Donc l'énergie de déformation:

$$U = \frac{1}{2} \frac{EI}{L^3} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 4L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

L'expression générale de l'énergie cinétique d'un élément en flexion est :

$$U = \frac{1}{2} \frac{\varphi SL}{420} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \varphi_1 \\ V_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \varphi_1 \\ V_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

La matrice masse est donnée par :

$$M = \frac{\varphi SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

($V_1 = 0$ et $V_2 = 0$) donc :

En supprimant la 1^{ère} ligne et la 1^{ère} colonne correspondant au nœud (1) : (le flèche $V_1 = 0$)

En supprimant le 3^{ème} ligne et la 3^{ème} colonne correspondant au nœud (2) : (le flèche $V_2 = 0$)

Donc :

$$M = \frac{\varphi SL}{420} \begin{bmatrix} 4L^2 & -3L^2 \\ -3L^2 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

donc l'expression de l'énergie cinétique est :

$$T = \frac{1}{2} \frac{\varphi SL}{420} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 4L^2 & -3L^2 \\ -3L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Application de équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_i} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_i} \right) = 0$$

Les équations du M^{vt} sont donnée par :

$$\frac{\varphi SL}{420} \begin{bmatrix} 4L^2 & -3L^2 \\ -3L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} + \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3)$$

Les solutions :

$$\varphi_1 = \varphi_1 e^{j\omega t}, \quad \varphi_2 = \varphi_2 e^{j\omega t}$$

$$\varphi_1 = -\varphi_1 \omega^2 e^{j\omega t}, \quad \varphi_2 = -\varphi_2 \omega^2 e^{j\omega t}$$

Remplaçons dans (3) :

$$\frac{\varphi SL}{420} \begin{bmatrix} 4L^2 & -3L^2 \\ -3L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\omega^2 e^{j\omega t} \varphi_1 \\ -\omega^2 e^{j\omega t} \varphi_2 \end{Bmatrix} + \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 e^{j\omega t} \\ \varphi_2 e^{j\omega t} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3)$$

Simplifiant par $e^{j\omega t}$:

$$\frac{\varphi S L^3}{420} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega^2 \varphi_1 \\ -\omega^2 \varphi_2 \end{bmatrix} + \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{-\varphi S L^4 \omega^2}{420 EI} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (4)$$

On compose :

$$r = \frac{\varphi S L^4 \omega^2}{420 EI}$$

donc :

$$\begin{bmatrix} -4r & 3r \\ 3r & -4r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 - 4r & 2 + 3r \\ 2 + 3r & 4 - 4r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = 0$$

Det

$$[[K] - \omega^2 [M]] = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 - 4r & 2 + 3r \\ 2 + 3r & 4 - 4r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$(4 - 4r)^2 - (2 + 3r)^2 = 0 \rightarrow r_1 = \frac{2}{7} \rightarrow \text{correspond au 1}^{\text{ere}} \text{prequence}$$

$$\rightarrow r_2 = 6$$

La fréquence :

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{420 \times r}}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\varphi S}} = \frac{10.95}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\varphi S}}$$

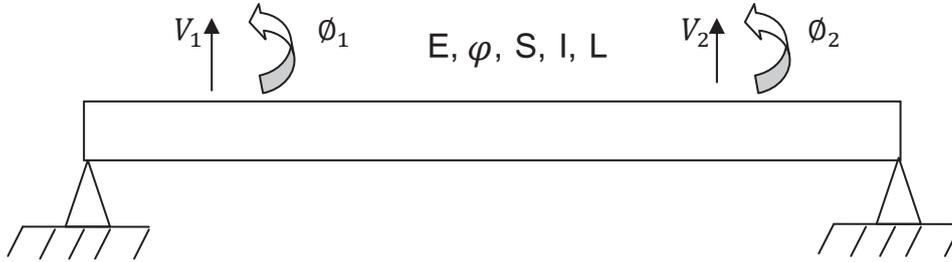
Remplaçant : ω_1 dans (4) \Rightarrow pour $\varphi_2 = -\varphi_1$

Donc

le mode

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Exercice 02 : une poutre en flexion est en castrée libre calculée en utilisant un seul élément fini et une matrice de masse distribuée, la première fréquence et le mode correspondant.



L'expression générale de l'énergie de déformation d'un élément en flexion est :

$$U = \frac{1}{2} \frac{EI}{L^3} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \phi_1 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12L & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \phi_1 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}$$

La matrice de rigidité est :

$$K = \frac{1}{2} \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12L & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Pour une poutre en castra libre :

Pour le nœud (2) : libre : $V_2 \neq 0$, $\phi_2 \neq 0$

Pour le nœud (1) : encastrée $V_1 = 0$, $\phi_1 = 0$

En supprimant la 1^{ère} ligne et la 1^{ère} colonne correspondant $V_1 = 0$

En supprimant la 2^{ème} ligne et la 2^{ème} colonne correspondant $\phi_1 = 0$

Donc :

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Donc l'énergie de déformation :

$$U = \frac{1}{2} \frac{EI}{L^3} \begin{Bmatrix} V_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

L'expression générale de l'énergie cinétique d'un élément en flexion est :

$$T = \frac{1}{2} \frac{\varphi SL}{420} \begin{pmatrix} V_1 \\ \varnothing_1 \\ V_2 \\ \varnothing_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \varnothing_1 \\ V_2 \\ \varnothing_2 \end{bmatrix}$$

La matrice masse est donnée par :

$$M = \frac{\varphi SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Nœud (1) en castrée : ($V_1 = 0$ et $\varnothing_1 = 0$) :

En supprimant la 1^{ère} ligne et la première colonne correspondant $V_1 = 0$

En supprimant la 2^{ème} ligne et la 2^{ème} colonne correspondant $\varnothing_1 = 0$

Donc :

$$M = \frac{\varphi SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Donc l'énergie cinétique est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \frac{EL}{420} \begin{Bmatrix} V_2 \\ \varnothing_2 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \varnothing_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Application de équations de la grange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right) = 0 \quad q_i \equiv V_2, \varnothing_2$$

Les équation du M^{Vt} sont donnée par :

$$\frac{\varphi SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \varnothing_2 \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \varnothing_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3)$$

Les solution :

$$\begin{cases} V_2 = V_2 e^{j\omega t} \\ \varnothing_2 = \varnothing_2 e^{j\omega t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_2 = -V_2 \omega^2 e^{j\omega t} \\ \varnothing_2 = \varnothing_2 \omega^2 e^{j\omega t} \end{cases}$$

Remplaçons dans (3) :

$$\frac{\varphi SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega^2 e^{j\omega t} V_2 \\ -\omega^2 e^{j\omega t} \varnothing_2 \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 e^{j\omega t} \\ \varnothing_2 e^{j\omega t} \end{bmatrix} = 0$$

Simplifiant par $e^{j\omega t}$:

$$\frac{\varphi SL^4}{420EI} \begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega^2 V_2 \\ -\omega^2 \varnothing_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \varnothing_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{-\phi S L^4 \omega^2}{420EI} \begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = 0$$

On compose :

$$r = \frac{\phi S L^4 \omega^2}{420EI}$$

donc :

$$\begin{bmatrix} -156r & -22Lr \\ -22Lr & -4L^2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 12 - 156r & -6L + 22Lr \\ -6L + 22Lr & 4L^2 - 4L^2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = 0$$

Det

$$[[K] - \omega^2[M]] = 0$$

$$\begin{bmatrix} 12 - 156r & -6L + 22Lr \\ -6L + 22Lr & 4L^2 - 4L^2r \end{bmatrix} = 0$$

$$(-6L + 22Lr)^2 - (12 - 156r)(4L^2 - 4L^2r) = 0$$

$$25r^2 - 102r + 3 = 0 \rightarrow r_1 = 0.0296 \rightarrow r_2 \cong 4.15$$

r_1 Correspond à la pulsation ω_1

La fréquence :

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{420 \times r_1}}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\phi S}} = \frac{3.53}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\phi S}}$$

Remplaçant : ω_1 dans (4) \Rightarrow pour $(12 - 156r)V_2 + (-6L + 22Lr)\phi_2 = 0$

pour $r = 0.0296$: $7.38 V_2 - 5.35 \phi_2 = 0$

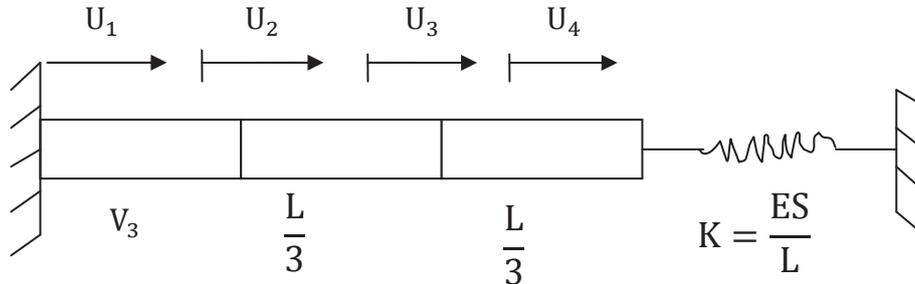
$$\phi_2 = \frac{7.38}{5.35 L} \quad , \quad V_2 = \frac{1.379}{L} V_2$$

Le mode

$$\begin{vmatrix} V_2 \\ \phi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ \frac{1.379}{L} \end{vmatrix}$$

Exercice 03 : poutre en mouvement longitudinal, elle est encadrée à une extrémité et a un récrit de raideur K à l'autre extrémité la poutre est modélisée par 3 éléments finis.

Calculer les deux premières fréquences et les modes associés.



Nœud (1) : $U_1 = 0$ (encastrement)

U l'énergie de déformation s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} \frac{3ES}{L} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{3EL}{L} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{3EL}{L} \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} KU_4^2$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{3ES}{L} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{3ES}{L} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{3ES}{L} \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{ES}{L} U_4^2$$

Assemblage :

$$U = \frac{1}{2} \frac{3ES}{L} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ 1 & 1+1 & -1 & \\ & -1 & 1+1 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{ES}{L} U_4^2$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{3ES}{L} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{ES}{L} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{ES}{L} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

La matrice de rigidité K est :

$$K = \frac{3ES}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

L'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \frac{\varphi SL}{18} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{\varphi SL}{18} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{\varphi SL}{18} \begin{Bmatrix} \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{Bmatrix}$$

Assemblage :

$$T = \frac{1}{2} \frac{\varphi SL}{18} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} [2 & 1] & & \\ [1 & [2+2] & 1] & \\ & [1 & [2+2] & 1] \\ & & [1 & 2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{Bmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{\varphi SL}{18} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{Bmatrix}$$

Finalement :

$$T = \frac{1}{2} \frac{\varphi SL}{18} \begin{Bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

La matrice masse :

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Les equation de lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{U}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial U_i} + \frac{\partial U}{\partial U_i} = 0$$

Les équations du M^{vt} sont données par:

$$\frac{\varphi SL}{18} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_2 \\ \ddot{U}_3 \\ \ddot{U}_4 \end{bmatrix} + \frac{3ES}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (3)$$

La solution :

$$\begin{cases} U_4 = \mathcal{U}_4 e^{j\omega t} \\ U_2 = \mathcal{U}_2 e^{j\omega t} \\ U_3 = \mathcal{U}_3 e^{j\omega t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{U}_4 = -\omega^2 \mathcal{U}_4 e^{j\omega t} \\ \ddot{U}_2 = -\omega^2 \mathcal{U}_2 e^{j\omega t} \\ \ddot{U}_3 = -\omega^2 \mathcal{U}_3 e^{j\omega t} \end{cases}$$

Remplaçons dans (3) :

$$\frac{\varphi SL}{18} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega^2 e^{j\omega t} \mathcal{U}_2 \\ -\omega^2 e^{j\omega t} \mathcal{U}_3 \\ -\omega^2 e^{j\omega t} \mathcal{U}_4 \end{bmatrix} + \frac{3ES}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j\omega t} \mathcal{U}_2 \\ e^{j\omega t} \mathcal{U}_3 \\ e^{j\omega t} \mathcal{U}_4 \end{bmatrix} = 0$$

Simplifiant par $e^{j\omega t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi SL^2}{54ES} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega^2 \mathcal{U}_2 \\ -\omega^2 \mathcal{U}_3 \\ -\omega^2 \mathcal{U}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_3 \\ \mathcal{U}_4 \end{bmatrix} &= 0 \\ -\frac{\varphi SL^2 \omega^2}{54ES} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_3 \\ \mathcal{U}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_3 \\ \mathcal{U}_4 \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

On pose :

$$r = \frac{\varphi SL^2 \omega^2}{54ES} = \frac{\varphi L^2 \omega^2}{54E}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4r & -r & 0 \\ -r & -4r & -r \\ 0 & -r & -2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_3 \\ \mathcal{U}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_3 \\ \mathcal{U}_4 \end{bmatrix} &= 0 \\ \begin{bmatrix} 2-4r & -1-r & 0 \\ -1-r & 2-4r & -1-r \\ 0 & -1-r & \frac{4}{3}-2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_3 \\ \mathcal{U}_4 \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Det :

$$\begin{aligned} [K] - \omega^2 [M] &= 0 \\ \begin{bmatrix} 2-4r & -1-r & 0 \\ -1-r & 2-4r & -1-r \\ 0 & -1-r & \frac{4}{3}-2r \end{bmatrix} &= 0 \\ (2-4r)((2-4r)\left(\frac{4}{3}-2r\right) - (1+r)^2) - (1+r)^2\left(\frac{4}{3}-2r\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$r_1 = 0.079$$

$$r_2 = 0.55$$

D'où :

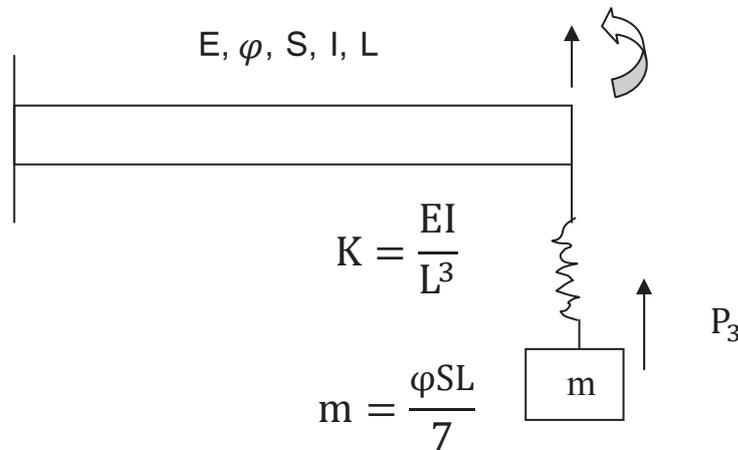
$$\omega_1 = \frac{2.068}{L} \sqrt{\frac{E}{\varphi}} \quad \text{le mode} \begin{pmatrix} 1 \\ 1.56 \\ 1.433 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2 = \frac{5.474}{L} \sqrt{\frac{E}{\varphi}} \quad \text{le mode} \begin{pmatrix} 1 \\ -0.1410 \\ -0.9801 \end{pmatrix}$$

Exercice 06 :

Le système représenté sur la figure est constitué d'une poutre en castrée libre avec un système masse-ressort à l'extrémité libre.

Si la poutre est modélisée par un élément fini calculer Les trois premières fréquences et les modes associés L'expression simplifiée de l'énergie cinétique s'écrit



L'expression simplifiée de l'énergie cinétique n'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \frac{\varphi SL}{420} \begin{Bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\square} \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\square} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{\varphi SL}{7} P^2 \quad (1)$$

L'expression simplifiée de l'énergie de déformation n'écrit :

$$U = \frac{1}{2} \frac{EI}{L^3} \begin{Bmatrix} V \\ \emptyset \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V \\ \emptyset \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{EI}{L^3} (V - P)^2 \quad (2)$$

Application Les équation de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad q_i \equiv V, \emptyset, P$$

Les équations du M^{vt} sont données par :

$$\varphi SL \begin{bmatrix} \frac{156}{420} & -\frac{22L}{420} & 0 \\ -\frac{22L}{420} & \frac{4L^2}{420} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{V} \\ \ddot{\emptyset} \\ \ddot{P} \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 13 & -6L & -1 \\ -6L & 4L^2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \emptyset \\ P \end{bmatrix} = 0 \quad (3)$$

La solution :

$$\begin{cases} V = V e^{j\omega t} \\ \emptyset = \emptyset e^{j\omega t} \\ P = P e^{j\omega t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{V} = -\omega^2 V e^{j\omega t} \\ \ddot{\emptyset} = -\omega^2 \emptyset e^{j\omega t} \\ \ddot{P} = -\omega^2 P e^{j\omega t} \end{cases}$$

$$\varphi SL \begin{bmatrix} \frac{156}{420} & -\frac{22L}{420} & 0 \\ -\frac{22L}{420} & \frac{4L^2}{420} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega^2 e^{j\omega t} V \\ -\omega^2 e^{j\omega t} \emptyset \\ -\omega^2 e^{j\omega t} P \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 13 & -6L & -1 \\ -6L & 4L^2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V e^{j\omega t} \\ \emptyset e^{j\omega t} \\ P e^{j\omega t} \end{bmatrix} = 0$$

Simplifiant par $e^{j\omega t}$ multiplier par $\frac{L^3}{EI}$:

$$\frac{\varphi SL^4}{EI} \begin{bmatrix} \frac{156}{420} & -\frac{22L}{420} & 0 \\ -\frac{22L}{420} & \frac{4L^2}{420} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega^2 V \\ -\omega^2 \emptyset \\ -\omega^2 P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & -6L & -1 \\ -6L & 4L^2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \emptyset \\ P \end{bmatrix} = 0$$

$$-\frac{\varphi SL^4 \omega^2}{EI} \begin{bmatrix} \frac{156}{420} & -\frac{22L}{420} & 0 \\ -\frac{22L}{420} & \frac{4L^2}{420} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \emptyset \\ P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & -6L & -1 \\ -6L & 4L^2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \emptyset \\ P \end{bmatrix} = 0$$

On pose :

$$r = \frac{\varphi S L^4 \omega^2}{EI}$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} -\frac{156r}{420} + \frac{22Lr}{420} & 0 & 0 \\ \frac{22Lr}{420} & -\frac{4L^2r}{420} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [V] \\ [\emptyset] \\ [P] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & -6L & -1 \\ -6L & 4L^2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [V] \\ [\emptyset] \\ [P] \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 13 - \frac{156}{420}r & -6L + \frac{22L}{420}r & -1 \\ -6L + \frac{22L}{420}r & 4L^2 - \frac{4L^2}{420}r & 0 \\ -1 & 0 & 1 - \frac{r}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [V] \\ [\emptyset] \\ [P] \end{bmatrix} = 0$$

Det :

$$[K] - \omega^2[M] = 0$$

$$\begin{bmatrix} 13 - \frac{156}{420}r & -6L + \frac{22L}{420}r & -1 \\ -6L + \frac{22L}{420}r & 4L^2 - \frac{4L^2}{420}r & 0 \\ -1 & 0 & 1 - \frac{r}{7} \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(13 - \frac{156}{420}r\right) \left(4L^2 - \frac{4L^2}{420}r\right) \left(1 - \frac{r}{7}\right) - \left(-6L + \frac{22L}{420}r\right)^2 \left(1 - \frac{r}{7}\right) - \left(4L^2 - \frac{4L^2}{420}r\right) = 0$$

$$\begin{cases} r_1 = 4.592 \\ r_2 = 18.887 \\ r_3 = 1219.4 \end{cases}$$

$$\omega_1 = \frac{2.143}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\varphi S}} \quad \text{le mode} \begin{pmatrix} 0.3437 \\ 0.5004 \\ \square \end{pmatrix}$$

$$\omega_2 = \frac{4.346}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\varphi S}} \quad \text{le mode} \begin{pmatrix} 0.7624 \\ \frac{1}{\square} \\ -0.4488 \end{pmatrix}$$

$$\omega_3 = \frac{34.92}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\varphi S}} \quad \text{le mode} \begin{pmatrix} 0.1316 \\ \frac{1}{\square} \\ -0.0007 \end{pmatrix}$$

VII-1. Introduction

Il existe des modèles mathématiques adaptés aux plaques, qui permettent de calculer les caractéristiques dynamiques. Les nombreux travaux de recherches visant à déterminer les caractéristiques dynamiques des plaques en vibration libre ont conduit à l'élaboration de différents modèles analytiques et numériques. Mais les modèles proposés jusqu'à ces dernières années sont soit limités à des analyses statiques, soit à des analyses dynamiques. Les rares études qui traitent les problèmes des vibrations des plaques avec les différentes conditions aux bords avec une étude paramétrique sont limitées.

Ce travail permet d'étudier plusieurs modèles avec des différentes combinaisons d'appuis aux bords en vue de calculer les fréquences des plaques et les modes propres en vibration libre. Les éléments de plaque en flexion jouent un rôle très important dans l'analyse de nombreux types de structures.

VII-2. Vibration libre

Les vibrations naturelles sont des vibrations inhérentes aux propriétés propres de la structure en l'absence des forces extérieures. Dans tous les cas, les vibrations mettent en jeu un échange permanent entre l'énergie cinétique et l'énergie de déformation des éléments de la plaque. L'énergie cinétique est associée à la vitesse vibratoire et la masse des éléments déformés. Alors que la déformation est associée aux contraintes dynamiques liées à la rigidité des éléments déformés par le mouvement vibratoire. La vibration des plaques est un cas particulier du problème plus général des vibrations mécaniques. Les équations régissant le mouvement des plaques.

VII-3. Charge répartie

Les fréquences d'une plaque rectangulaire isotrope simplement appuyée sur les quatre bords avec une charge répartie en vibration libre sont déterminées en utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz. La solution du problème aux valeurs propres est obtenue en proposant une déformée de fonction forme de séries qui vérifie les conditions aux limites de la plaque. Les fréquences obtenues par l'approche énergétique en utilisant un programme, sont comparées avec celles obtenues par d'autres nouvelles méthodes ou d'autres cas des plaques. Ensuite, une étude paramétrique fréquentielle de la plaque est nécessaire afin de comprendre le comportement dynamique d'une plaque.

VII- 1.1 Analyse vibratoire

Le domaine des vibrations connaît un regain d'intérêt du fait du besoin d'optimiser, d'alléger les structures couramment utilisées et soumises à de différents niveaux d'excitations. D'une autre manière, la compréhension de l'identité vibratoire de plaque devient donc d'une grande importance et aide les ingénieurs à concevoir de meilleures structures. Au final, les problématiques rencontrées concernent essentiellement des questions d'analyse des réponses dynamiques des plaques et leur dimensionnement.

L'analyse vibratoire est une question d'actualité importante qui se pose fréquemment au chercheur qu'à l'ingénieur mécanicien, et afin d'assurer ce contrôle, la détermination des caractéristiques dynamiques de la structure est indispensable. Cette thématique touche aussi d'autres domaines, tels que l'automobile, les ponts, les bâtiments, ou encore le génie nucléaire.

VII- 1.2 Équation de la théorie de plaque

Considérons des petites déflexions et écrivons l'équilibre des forces suivant l'axe $x=0$, il vient d'après la figure II-1.

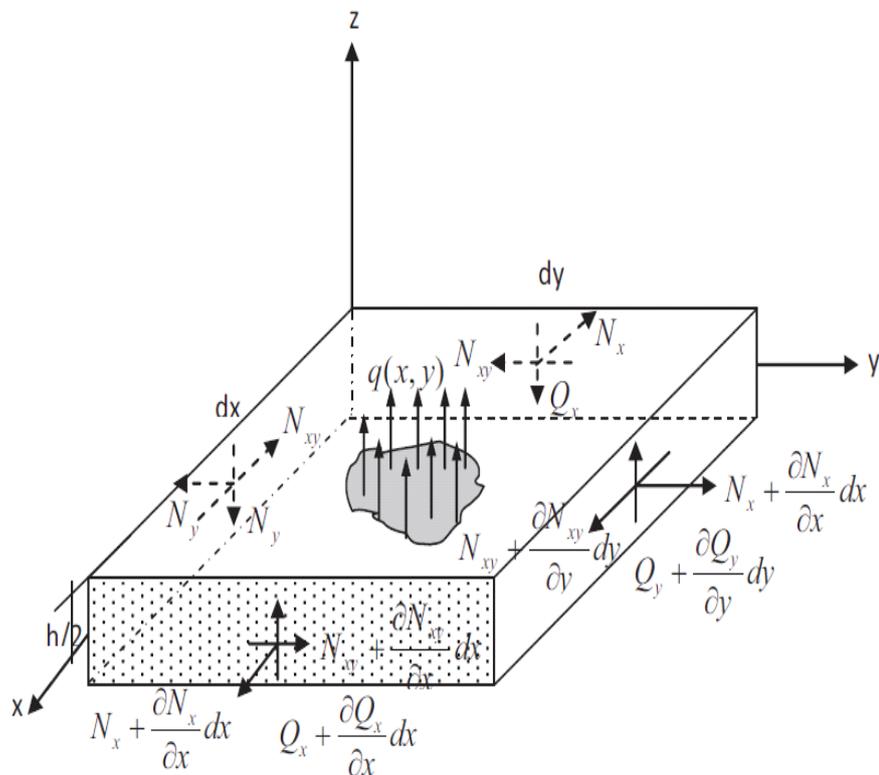


Figure VII-1. Forces agissant sur l'élément plaque

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy - N_y dy \frac{\partial w}{\partial x} + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial x^2} dx \right) \\
& - N_y dx \frac{\partial w}{\partial y} + \left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy \right) dx \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial y^2} dy \right) - N_{xy} dx \frac{\partial w}{\partial x} - N_{xy} dy \frac{\partial w}{\partial y} \\
& + \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dy \right) dx \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial x \partial y} dy \right) + \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial x \partial y} dx \right) + q dx dy \\
& = ph dx dy \frac{\partial w^2}{\partial X^2} \quad (\text{VII. 1})
\end{aligned}$$

L'accélération suivant l'axe Oz .

En développant (VII.1) et en négligeant les termes d'ordre supérieur à $dx dy$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + q \\
& = ph \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (\text{VII. 2})
\end{aligned}$$

Cette équation peut encore se simplifier si l'on considère les équations d'équilibre d'élasticité tridimensionnelle.

$$\sigma_{ij,j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (\text{VII.3})$$

Avec $(u_i)_i = (u, v, w)$ et u, v les déplacements suivant les axes ox et oy respectivement.

Quand les forces d'inertie dans le plan de la plaque sont négligées et que les contraintes σ_{yz}, σ_{zx}

sont petites par rapport aux autres contraintes, alors :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (\text{VII.4})$$

Comme ces équations doivent être satisfaites pour toute épaisseur infinitésimale dz de l'élément de plaque, on peut intégrer ces deux équations suivant l'épaisseur h de la plaque, d'où

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{VII.5})$$

En utilisant (VII.5), l'équation (VII.2) devient

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial w^2}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial w^2}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial w^2}{\partial y \partial x} + q = ph \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{VII.6})$$

L'équilibre des forces suivant les deux axes ox et oy s'écrit

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(Q_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(Q_y \frac{\partial w}{\partial x} \right) = ph \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(VII.7)

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(Q_x \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(Q_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) = ph \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Quand on néglige de nouveau les forces d'inertie suivant les axes ox et oy , et que les efforts tranchants sont négligeables devant les efforts normaux N_x , N_y et que les pentes devant l'unité, alors (VII.7) équivaut à (VII.5)

Il reste maintenant à écrire les équations d'équilibre des moments par rapport aux axes ox et oy , on obtient alors

$$Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \frac{ph}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}$$

(VII.8)

$$Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} = \frac{ph}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2}$$

Où on a négligé les termes N_x , N_y et N_{xy} car ils conduisent à des différentielles d'ordre plus grand que les autres. Les termes de droite dans les équations (VII.8) représentent l'inertie de rotation de l'élément de plaque.

VII-1. Calcul des contraintes et des efforts

On suppose que les contraintes $\sigma_{zz}, \sigma_{zy}, \sigma_{zx}$ sont petites par rapport aux contraintes $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$. Par conséquent la loi de Hooke se résume aux équations:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} \quad (\text{VII.9})$$

Les moments et les forces sont alors obtenus en intégrant les contraintes normales sur l'épaisseur de la plaque pour les efforts, et à intégrer ces contraintes multipliées par z pour les moments, soit

$$(N_x, N_y, N_{xy}) = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (\text{VII.10})$$

$$(M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) z dz$$

Sans remonter trop loin dans la théorie de la mécanique des milieux continus, et sans rentrer dans les détails des champs de déplacements et de contraintes, la loi de Hooke et les équations de lame-Navier permettent d'écrire les moments dans le plan de la plaque. Ainsi l'expression des moments

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -2(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial w \partial y} \quad (\text{II. 11})$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Où ν : le coefficient de poisson

D: le coefficient de rigidité en flexion de la plaque.

Remplaçons les moments dans (VII.10) par leurs expressions données par (VII.11) et on reportant dans (VII.5)

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \quad (\text{VII.12})$$

On obtient ainsi l'équation classique de la théorie des plaques qui pour la majorité des applications techniques est suffisante pour l'étude des problèmes de flexion.

$$-D \nabla^4 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{VII.13})$$

Si on ne s'intéresse qu'au problème de flexion pure, en supposant les effets de tension et de flexions découplés, l'approximation de l'élasticité linéaire aboutit à l'équation suivante:

$$D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (\text{VII.14})$$

Où ρ la masse volumique du matériau constituant la plaque, D le module de rigidité en flexion h , l'épaisseur de la plaque la force imposée et enfin ∇^2 l'opérateur : $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)$.

VII-1. Conditions aux limites

Ces conditions sont matérialisées par le blocage de certaines composantes (degrés de liberté) du déplacement. Les ouvrages reposent généralement sur des appuis (ou liaison externes) par l'intermédiaire d'appareils qui permettent de bloquer certains degrés de liberté du déplacement ou de la rotation. Ces appareils, conçus pour travailler dans les directions privilégiées, autorisent sélectivement le développement des effets structuraux dus aux charges statiques ou dynamiques.

Considérons une plaque homogène de dimensions a, b et h et on suppose que ses cotés sont parallèles aux axes x et y .

Ces diverses conditions vont s'écrire sur les expressions des déplacements u, v et w , on aura ainsi d'abord pour la théorie classique de Love – Kirchhoff.

VII-1.1. Type de support simple

Si le bord $x=a$ de la plaque est simplement appuyé, la flèche w le long de celui-ci est nulle. Et en même temps, ce bord peut tourner librement autour de l'axe x , c'est-à-dire qu'il n'existe pas de moments de flexion M_x le long de ce bord.

$$(M_x)_{x=a} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0$$

VII-2. Type de support et conditions

Si le bord $x=a$ de la plaque est encastré, la flèche le long de ce bord est nulle et le plan tangent au feuillet moyen fléchi, le long de ce bord, coïncide avec la position initiale du plan moyen de la plaque. En conséquence le déplacement vertical et la rotation sont nuls.

$$(w)_{x=a} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a} = 0$$

VII-3. Forme de la flexion

Considérons donc une plaque rectangulaire, de longueur a , de largeur b et d'épaisseur constante h . Soit D son module de rigidité en flexion, et $q(x, y, t)$ la charge extérieure appliquée par unité de surface, alors dans une première approximation l'équation du mouvement en flexion s'écrit:

$$D\nabla^4 w + ph \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t) \quad (\text{VII.15})$$

VII-4. Énergie d'une plaque

Le problème de la flexion d'une plaque revient donc à chercher la fonction $w(x, y)$ qui vérifie les conditions aux limites et qui rend minimale l'énergie totale qui la somme de l'énergie de déformation et de l'énergie potentielle. On sera amené à distinguer localement :

L'énergie interne de déformation de la plaque est donnée par l'intégrale sur le feuillet moyen des produits des efforts généralisés par leur grandeur duale des déformations généralisées.

$$V = \frac{1}{2} \int_A (\vec{N} \cdot \vec{\epsilon} + \vec{M} \cdot \vec{\chi} + \vec{Q} \cdot \vec{\lambda}) dA \quad (\text{VII.16})$$

Les déformations généralisées associées au mouvement du feuillet moyen et de sa Normale peuvent être écrites sous formes de vecteurs.

Déformation dans le plan :
$$\vec{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{VII.17})$$

Courbures :
$$\vec{\chi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{VII.18})$$

Déformation de cisaillement :
$$\vec{\lambda} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \end{bmatrix} \quad (\text{VII.19})$$

Les contraintes dans la structure, peuvent être modélisés par des efforts généralisés résultants de membrane notés N_x, N_y, N_{xy}

De membrane :

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h}^{+h} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (\text{VII. 20})$$

Et trois moments de flexion notés M_x, M_y, M_{xy}

De flexion:
$$\vec{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h}^{+h} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (\text{VII.21})$$

Deux efforts tranchants notés Q_x, Q_y .

$$\text{Tranchants : } \vec{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h}^{+h} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (\text{VII. 22})$$

La loi de comportement relie le vecteur des efforts généralisés $[N \ M \ Q]^t$ au vecteur des déformations généralisées $[e \ x \ \sigma]^t$,

VII-1. Méthode des énergies

VII-1-1. Généralité

Ces méthodes donnent d'assez bons résultats de façon générale, même lorsque les Conditions aux limites ne sont pas simples. Seulement la précision de la solution trouvée dépend pour beaucoup du choix des fonctions cinématiques admissibles, il faut que les fonctions satisfassent les conditions aux limites mais aussi respectent la géométrie et approchent les modes de vibrations. Ce choix est fondamental, car il peut conduire à des erreurs très importantes sur les fréquences.

VII-1-2. Expression de l'énergie potentielle pour le plaqué isotrope

Elle s'exprime comme la somme:

$$\Pi = U + V + T \quad (\text{VII.23})$$

Où U est l'énergie de déformation

V est l'énergie potentielle des forces extérieures

T est l'énergie cinétique

Soit en théorie classique pour les plaques isotropes:

$$U_{max} = \frac{D}{2} \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)^2 \right] \right\} dx dy$$

$$- \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} q w dx dy + \frac{1}{2} \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} p h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) dx dy \quad (\text{VII.24})$$

VII-11. La méthode de Rayleigh

C'est sans aucun doute la méthode la plus simple puisqu'elle conduit à des formules Polynomiales pour les fréquences propres. L'idée fondamentale de cette méthode est de donner une forme approchée de la déflexion w d'une plaque en utilisant des résultats des poutres. Ainsi, pour un mode (m, n) d'une plaque rectangulaire de dimensions a et b , soumise à des conditions aux limites quelconques (les nombres m et n servant à distinguer les modes entre eux et correspondent aux nombres de lobes du mode dans les directions ox et oy , la déflexion w sera prise telle que :

$$w_{min}(x, y) = X_n(x) Y_n(y) \sin wt \quad (\text{VII.25})$$

Où $X(x)$ est le n_i^{eme} mode d'une poutre de longueur a .

$Y(y)$ est le n_i^{eme} mode d'une poutre de longueur b .

Il existe de nombreuses méthodes éprouvées pour estimer les fréquences propres et modes propres, mais les choses sont beaucoup moins établies en ce qui concerne l'effet de cisaillement. Il s'agit d'un problème difficile en raison de la complexité de la compréhension de la linéarité et la non linéarité de l'effet de cisaillement. Les nombreux travaux visant à caractériser le comportement des plaques en flexion ont conduit à l'élaboration de différents modèles analytique et numérique. Pour les vibrations linéaires, la gamme de techniques ou de logiciels dédiés à l'étude expérimentale ou numérique est très large et permet de traiter un grand nombre de problèmes de structures telles que les plaques minces et épaisses.

Toute la difficulté de la méthode de Rayleigh est de bien choisir le vecteur ou la fonction de forme à tester. On se contraint en fait à rechercher la solution dans un espace des solutions à une dimension : Vecteurs proportionnels au vecteur choisi, des fonctions de formes proportionnelles à la fonction forment. La méthode de Rayleigh sert à calculer la plus petite fréquence.

La méthode de Rayleigh sert à calculer la plus petite fréquence appelée "Fréquence fondamentale". Pour cela on pose que le déplacement u ou v est égal au produit d'une fonction de déplacement. A noter que cette méthode donne une valeur un peu erronée Dans la pratique, il est souvent commode de recourir à la méthode de Rayleigh car, pour les systèmes un peu compliqués, le calcul exact des pulsations peu devenir très difficiles. On obtient alors une pulsation fondamentale avec une erreur admissible en pratique. On se place dans le cas des vibrations propres, c'est-à-dire que l'énergie potentielle des forces extérieures est nulle. Cette méthode consiste à calculer les expressions de l'énergie cinétique T et de l'énergie de déformation U pour w des fonctions de forme, vérifiant les conditions aux limites. En appliquant le théorème de conservations des énergies, le maximum de l'énergie cinétique doit être égal au maximum de l'énergie de déformation.

Soit : $U_{max} = T_{MAX}$ (VII.26)

La déflexion $w(x, y, t) = W(x, y) \sin \omega t$

Où $W(x, y)$ est la fonction de forme et ω la pulsation inconnue.

Remplaçons W dans l'expression des énergies:

$$T = \frac{w^2}{2} \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} \rho h w^2(x, y) dx dy \quad (\text{VII.27})$$

L'énergie cinétique sera à son maximum lorsque la vitesse de la plaque sera 0 son

Maximum donc lorsque: $\sin \omega t = 0$, d'où son expression:

$$T = \frac{w^2}{2} \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} \rho h w^2(x, y) dx dy \quad (\text{VII.28})$$

D'autre part l'énergie de flexion U sera maximum quand la déflexion de la plaque sera

Maximale, donc lorsque: $\sin \omega t = 1$ d'où son expression:

$$U_{max} = \frac{1}{2} \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (\text{VII.29})$$

On déduit alors la fréquence fondamentale ω d'après l'expression suivante:

$$\omega^2 = \frac{2U_{max}}{\int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} \rho h w^2(x, y) dx dy} \quad (\text{VII.30})$$

VII-2. Méthode de Rayleigh-Ritz

VII-2-1. Introduction

La méthode de Rayleigh-Ritz est une extension de la méthode de Rayleigh. C'est une Méthode approchée également fondée sur des méthodes énergétiques. Le principe général consiste à ramener le problème à celui d'un système comportant un nombre fini de degrés de liberté. Pour cela on fixe un modèle hypothétique de déformation de la structure, satisfaisant les conditions aux limites et dépendant de plusieurs (m) coordonnées généralisées. Cette méthode est utilisée pour calculer les m premiers modes. Son rôle n'est pas seulement de donner une solution plus exacte de la fréquence fondamentale mais aussi elle donne des résultats approximatifs des hautes fréquences et des modes. Du moment que les fréquences obtenues, sont toujours plus grandes que les valeurs exactes en raison des termes utilisés dans la fonction de forme lesquels augmente la rigidité de la plaque. Toute la difficulté de cette méthode est de « bien choisir » la fonction forme à tester.

VII-2-2. Formulation générale

L'étude de la vibration de la plaque passe par la connaissance de l'amplitude des ses déplacements en chaque point. Dans le cas de vibration libre, la méthode de Raleigh-Ritz permet d'approcher ces fréquences propres. Afin de les déterminer, on établit l'équation du mouvement de la plaque en réalisant une étude énergétique, faisant intervenir les différentes énergies du système (énergie cinétique, énergie potentielle). Cette méthode est utilisée pour développer le déplacement de la plaque selon des bases sinusoïdales ou polynomiales :

$\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_i(x), \dots, \phi_n(x)$ Soit une classe de fonctions de la forme généralisée, On écrira ainsi la déflexion sous forme de séries:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y)$$

Où les A_{mn} représentent l'amplitude du mode (m, n) à déterminer et les fonctions X_m et Y_n vérifient individuellement les conditions aux limites mais pas forcément l'équation différentielle du mouvement. Cette méthode due à Ritz généralise la méthode de Rayleigh en

incluant plusieurs paramètres dans les fonctions de forme. Les coefficients A_{mn} sont obtenus en rendant minimum la quantité $U_{max} - T_{max}$, soit:

$$\frac{\partial}{\partial A_{mn}} (U_{max} - T_{max}) = 0 \quad (VII.31)$$

Les A_{mn} sont alors solutions du système.

$$\frac{\partial U_{max}}{\partial A_{mn}} - \frac{w^2}{2} \frac{\partial f}{\partial A_i} = 0 \quad (VII.32)$$

Cette méthode conduit donc à un système linéaire homogène où les A_{mn} et ω_{mn} sont les inconnues. Ce système peut également s'interpréter comme un problème de valeurs propres et de vecteurs propres, à chaque valeur ω_{mn} solutions annulant le déterminant du système sera associé les coefficients A_{mn} qui détermineront alors les modes w_{mn} .

Tout repose maintenant sur le choix des fonctions de forme ϕ_i , la précision sur les fréquences en dépend beaucoup. La solution approchée est recherchée sous la forme usuelle d'une série double. D'une façon générale, on recherchera les déplacements sous la forme

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (VII.33)$$

VII-2-3. Méthode de Rayleigh-Ritz

L'équation de la fréquence peut être obtenue en utilisant la méthode approchée de Rayleigh-Ritz où l'énergie de déformation maximale d'une plaque isotrope est de la forme :

$$U_{max} = \frac{D}{2} \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (VII.34)$$

Avec : D la rigidité de flexion $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

ν Coefficient de Poisson

L'énergie maximale de la plaque en vibration libre avec une amplitude w et les fréquences naturelle ω est donnée est :

$$T_{max} = \frac{\omega^2}{2} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \gamma(x, y) w^2(x, y) dx dy \quad (VII.35)$$

VII-3. Le quotient de Rayleigh

Le quotient de Rayleigh est le rapport de l'énergie de déformation maximale et de l'énergie cinétique maximale.

Ce quotient est défini comme suit:

$$\lambda_R = w^2 = \frac{U_{max}}{T_{max}} = \frac{U_{max}}{\frac{w^2}{2} \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} \gamma(x,y) w^2(x,y) dx dy} \quad (\text{VII.36})$$

Où U_{max} et T_{max} sont donnés par les équations (VII.34) et (VII.35) respectivement.

Basé sur le principe de l'énergie potentielle, et appliquant la méthode de Rayleigh –Ritz, l'équation (VII.28) est minimisée par rapport aux coefficients inconnus A_{mn} pour donner des séries d'équations simultanées et homogènes

$$\frac{\partial \lambda_R}{\partial A_{mn}} = \frac{\partial (w^2)}{\partial A_{mn}} = 0 \quad m = 1, 2 \dots n = 1, 2, \dots \quad (\text{VII.37})$$

Substituant le quotient donné par Eq (VII.36) dans Eq (VII.37) nous mène à :

$$\frac{\partial \lambda_R}{\partial A_{mn}} = \frac{T_{max} \frac{\partial u_{max}}{\partial A_{mn}} - U_{max} \frac{\partial T_{max}}{\partial A_{mn}}}{T_{max}^2} = 0 \quad (\text{VII.38})$$

Recueil d'exercices

Série de TD N°1

Exercice1 :

Un élément de suspension, destiné à un véhicule routier, est soumis à des essais en laboratoire qui donnent les résultats suivants :

- Le poids d'une masse de 200 kg, égale au quart environ de celle du véhicule, provoque un déplacement statique $\delta = 0.20$ m (fig.1),
- Les oscillations autour de la position d'équilibre ont une fréquence $f_1 = 0.835$ Hz.

A partir de ces mesures, calculer les caractéristiques de l'élément de suspension.

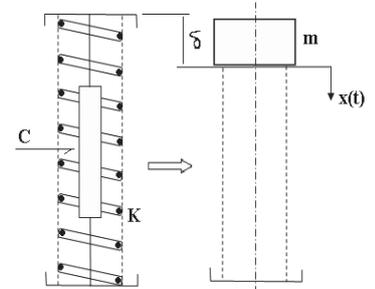


Figure.1

1- Calcule de la rigidité du ressort :

$$k\delta = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{\delta} = \frac{200 \times 9,81}{0,20} = 9810 \text{ N/m}$$

2- Calcule de la pulsation propre de l'oscillateur conservatifs :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9810}{200}} = 7 \text{ rd/s}$$

3- la pulsation de l'oscillateur amortis :

$$\omega_1 = 2\pi f_1 \Rightarrow \omega_1 = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,75 = 4,71 \text{ rd/s}$$

4- l'amortissement relatif τ :

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \tau^2} \Rightarrow \tau = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{4,71}{7}\right)^2} = 0,74$$

5- la constante d'amortissement :

$$\tau = \frac{\lambda}{\omega_0} = \frac{C}{2m\omega_0} \Rightarrow C = 2m\tau\omega_0$$

$$C = 2 \cdot 200 \cdot 0,74 \cdot 7$$

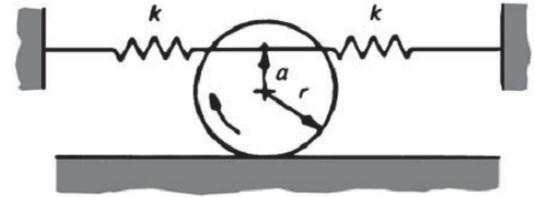
$$C = 2071,35 \text{ kg/s}$$

Exercice :

Un cylindre uniforme de masse m (fig.2), tourne d'un faible angle θ autour de la position d'équilibre.

Si le cylindre roule sans glissement.

- 1- Donner l'expression du déplacement de l'axe du cylindre x en fonction de θ .
- 2 -Trouver les expressions de l'énergie cinétique et de déformation.
- 3 -Déterminer l'équation du mouvement.
- 4 -Trouver la fréquence de vibration libre.



Figure

1- l'expression de x en fonction de θ :

$$x = r \theta$$

2- l'energie cinétique :

$$EC = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

avec :

$$I = \frac{1}{2} m r^2 \quad \text{et} \quad x = r \theta$$

3- l'energie potentielle :

$$E_p = 2x \frac{1}{2} k [(r+a)\theta]^2 = k(r+a)^2 \theta^2$$

4- l'équation du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial EC}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial EC}{\partial \theta} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{3}{2} m r^2 \ddot{\theta} + 2k(r+a)^2 \theta = 0$$

Finalement propre :

$$\ddot{\theta} + \frac{4k(r+a)^2}{3mr^2} \theta = 0 \quad (1)$$

4- La fréquence propre :

L'équation (1) est de la forme :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

Avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4k(r+a)^2}{3mr^2}} \quad \text{rd/s}$$

□□ercice □:

Afin de mesurer le coefficient d'amortissement interne d'un barreau de polymère, on enregistre les oscillations en régime libre du système constitué par un barreau et une masse m indéformable fixée à l'extrémité libre du barreau (fig.3). On constate que l'amplitude de la sixième oscillation est égale à 30 % de celle de la première. Avec les valeurs suivantes:

Longueur $L=1,5 \text{ m}$, module d'élasticité $E=2,2 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$
 section: $A=5 \text{ cm}^2$ masse: $m=100 \text{ kg}$

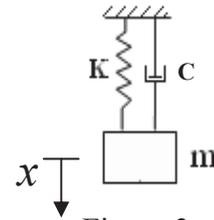


Figure.3

Déterminer la résistance de c de l'oscillateur élémentaire équivalent (on néglige la masse du barreau), puis la constante d'amortissement interne τ du polymère

Solution :

Négliger la masse du barreau relativement à m revient à considérer le système comme un oscillateur élémentaire dont la rigidité et la pulsation propre sont :

$$k = \frac{EA}{L} \quad \text{AN: } k = \frac{2,2 \cdot 10^9 \times 5 \times 10^{-4}}{1,5} = 0,733 \cdot 10^6 \text{ N/m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{AN: } \omega_0 = \sqrt{\frac{0,733 \cdot 10^6}{100}} = 85,6 \text{ rd/s}$$

Le décaissement logarithmique :

$$\Delta = \frac{1}{5} \ln \frac{100}{0,30} = 0,244079$$

L'amortissement relatif :

$$\tau = \frac{\Delta}{\sqrt{4\pi^2 + \Delta^2}} \quad \text{AN: } \tau = 0,0383$$

la résistance de l'oscillateur équivalent :

$$C = 2\tau\omega_0 m \quad \text{AN: } C = 2 \times 0,0383 \times 85,6 \times 100 = 656 \text{ kg/s}$$

La constante d'amortissement interne du polymère τ :

L'égalité entre les forces de frottement dans le barreau et dans l'oscillateur équivalent :

$$A\tau\dot{\varepsilon} = c x \quad \left(\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} \right)$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d x}{dt L} = \frac{1}{L} \frac{du}{dt} = \frac{\dot{x}}{L}$$

Il vient donc :

$$A\tau = \frac{\dot{x}}{L} = c\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{A\tau}{L} = c$$

$$\tau = \frac{cL}{A}$$

$$\text{AN: } \tau = \frac{656 \times 1,5}{5 \cdot 10^{-4}} = 1,97 \cdot 10^6 \text{ kg/m.s}$$

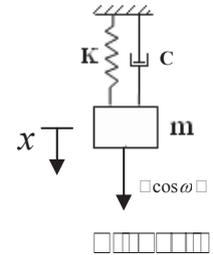
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

La masse du système représenté sur la figure 1 est soumise à l'action d'une force extérieure

$F \cos \Omega t$

- 1- Déterminer l'équation du mouvement.
- 2- Déterminer le déplacement en régime permanent.

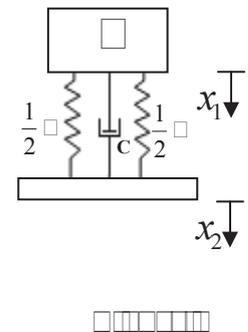


□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

Le modèle général de mesure des vibrations est représenté par la figure 2, ce modèle est composé d'un corps de masse m attachée à une base.

Si la base se déplace d'un mouvement de $x_2 \sin \omega t$:

- 1- Déterminer l'équation du mouvement.
- 2- Déterminer le déplacement de la masse en régime permanent.



□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

Nous nous proposons de déterminer expérimentalement les caractéristiques mécaniques (m, c, k) de l'accéléromètre schématisé par la figure 3.

Suspendons une masse de 200 grammes à la masselotte de l'accéléromètre.

Le système étant à l'équilibre, la surcharge est décrochée.

Nous observons un mouvement sinusoïdal amorti, les mesures effectuées donnent :

La pseudo période : $T = 20 \cdot 10^{-3}$ s.

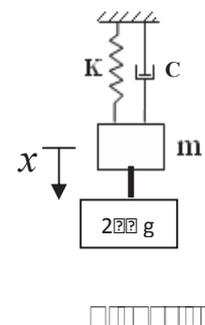
L'amplitude initiale et celle du premier maximum de même signe :

$A_0 = 1,25$ mm et $A_1 = 0,05$ mm

1- Trouver l'expression du déplacement $x(t)$

2- Calculer les caractéristiques suivantes :

- 1- La pulsation propre ω_0
- 2- L'amortissement relatif η
- 3- La masse m et la raideur k



Suspections une masse de 200g à la masselotte de l'accéléromètre le système étant à l'équilibre, la surcharge est décrochée le problème à résoudre est :

$$m\ddot{x} = -kx - C\dot{x} = 0$$

les conditions initiales :

$$\begin{cases} x_0 = \frac{m+M}{k}g \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$$

on pose :

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ 2\tau\omega_0 = \frac{C}{m} \end{cases}$$

En supposant $\tau < 1$

Le solution est de la forme :

$$x(t) = e^{-\tau\omega_0 t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

$$\text{Avec : } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \tau^2}$$

Les conditions initiales :

$$\begin{cases} A = x_0 \\ B = \frac{\tau x_0}{\sqrt{1 - \tau^2}} \end{cases}$$

D'où :

$$x = x_0 e^{-\tau\omega_0 t} \left(\cos \omega t + \frac{\omega}{\sqrt{1 - \tau^2}} \sin \omega t \right)$$

2- calcule les caractéristiques : ω_0 , τ , m et k :

On : $T=20$ s , $A_0 = 1.25$ mn , $A_1 = 0.05$ mm

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \tau^2}} \rightarrow (1 - \tau^2)\omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} \quad (1)$$

$$A_1 = A_0 e^{-\tau\omega_0 t} \rightarrow \tau \omega_0 = \frac{1}{T} \ln \frac{A_0}{A_1} \quad (2)$$

Posons

$$1 = \ln \frac{A_0}{A_1} \quad (n = 1) :$$

Remplaçons dans (2) :

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau T} 1$$

Dans (1) :

$$(1 - \tau^2) \left(\frac{1}{\tau}\right)^2 = 4\pi^2$$

On peut calculer τ :

$$\tau^2 = \frac{1}{1^2 + 4\pi^2}$$

On en déduit :

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau T}$$

Ayant ω_0 on peut calculer la masse m et la raideur k avec A_0

Les deux relations :

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ A_0 = \frac{m+M}{k} g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{Mg}{A_0\omega_0^2 - g} \\ k = \frac{Mg}{\frac{A_0 - g}{\omega_0^2}} \end{cases}$$

A.N :

$$1 = \ln(25) = 3.22 \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{1^2}{1^2 + 4\pi^2}} = \sqrt{\frac{1^2}{1 + 4\pi^2}} = 0.46$$

Pour :

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau T} = 353 \text{ rd/S}$$

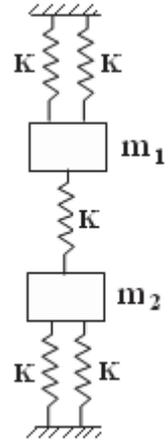
D'où :

$$\begin{cases} m = 13.4 \text{ g} \\ k = 1675 \text{ N/m} \end{cases}$$

Exercice 8

Exercice :

La masse m_2 d'un système oscillatoire se déplace de 0.25 m de sa position d'équilibre statique (Fig.1).



Exercice

- 1- Déterminer les équations du mouvement.
- 2- Trouver les fréquences propres du système.
- 3- Déterminer les déplacements des masses x_1 et x_2 .

Les équations :

$$\Sigma F = ma$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -kx_1 - kx_1 - k(x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -kx_2 - kx_2 - k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

noies :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -3kx_1 - kx_2 \\ m_2 \ddot{x}_2 = -3kx_2 - kx_1 \end{cases}$$

ne :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + 3kx_1 - kx_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + 3kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

Les déplacements propres :

es son :

$$\begin{cases} x_1 = A \cos(\omega t + \phi) & \dot{x}_1 = -A \omega^2 \cos(\omega t + \phi) \\ x_2 = B \cos(\omega t + \phi) & \dot{x}_2 = -B \omega^2 \cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

$$m_1 = m_2 = m$$

Remplaçant dans le système d'équations on trouve :

$$\begin{cases} (3k - m\omega^2)A - kB = 0 \\ -kA + (3k - m\omega^2)B = 0 \end{cases}$$

La solution A=B=0 définit l'état d'équilibre du système l'autre solution est obtenue en égalant à « zero » le déterminant des coefs A et B :

$$\begin{vmatrix} (3k - m\omega^2) & -k \\ -k & (3k - m\omega^2) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3k - m\omega^2)^2 - k^2 = 0$$

Développent le déterminant :

$$3k - m\omega^2 = \pm k$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{4k}{m}} = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

les déplacements en s des masses x_1 et x_2

$$x_1(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \phi_1\right) + A_2 \cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_2\right)$$

$$x_2(t) = B_1 \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \phi_1\right) + B_2 \cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_2\right)$$

les conditions aux limites :

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{k}{3k - m\omega_1^2} = \frac{k}{3k - 2k} = 1, \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{k}{3k - m\omega_2^2} = \frac{k}{3k - 4k} = -1$$

on les écrit :

$$x_1(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \phi_1\right) + A_2 \cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_2\right)$$

$$x_2(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \phi_1\right) - A_2 \cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_2\right)$$

Les 4 constants d'intégration sont déterminées par les 4 conditions initiales :

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = \frac{1}{4}, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0$$

$$0 = A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2 \quad (1)$$

$$0 = A_1 \cos\phi_1 - A_2 \cos\phi_2 \quad (2)$$

$$0 = -\omega_1 A_1 \sin\phi_1 - \omega_2 A_2 \sin\phi_2 \quad (3)$$

$$0 = -A_1 \omega_1 \sin\phi_1 + A_2 \omega_2 \sin\phi_2 \quad (4)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow A_1 = \frac{1}{8\cos\phi_1}$$

$$(3) + (4) \Rightarrow \sin\phi_1 = \sin\phi_2 = 0 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2 = 0$$

Donc

$$A_1 = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad A_2 = -\frac{1}{8}$$

Finalement :

$$x_1(t) = \frac{1}{8} \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t - \frac{1}{8} \cos 2 \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

$$x_2(t) = \frac{1}{8} \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t - \frac{1}{8} \cos 2 \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

□□e□□□e □:

Un arbre en torsion (figure 2), est discrétisé par deux (02) degrés de liberté θ_1, θ_2 , aux quels correspondent les inerties J, J . La raideur en torsion de chaque élément élastique est K .

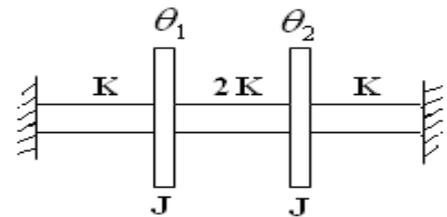
La rotation de l'arbre s'effectue à vitesse constante Ω , et les angles θ_1, θ_2 sont mesurées par rapport à la position instantanée de l'arbre.

1-Ecrire les énergies cinétique et de déformation de l'arbre.

2- Ecrire les équations du mouvement.

3-calculer les fréquences propres de l'arbre.

Figure 2



1- Calcul des énergies :

a- l'énergie cinétique : \dot{Q}_1^2

$$E_c = \frac{1}{2} J_1 \dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{Q}_2^2 = \frac{1}{2} J (\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2)$$

b- l'énergie potentielle :

$$E_p = \frac{1}{2} k Q_1^2 + \frac{1}{2} 2k (Q_1 - Q_2)^2 + \frac{1}{2} k Q_2^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k Q_1^2 + k (Q_1 - Q_2)^2 + \frac{1}{2} k Q_2^2$$

2- l'équations de M^{vt} :

$$\begin{cases} J \ddot{Q}_1 + 3k Q_1 - 2k Q_2 = 0 \\ J \ddot{Q}_2 + 3k Q_2 - 2k Q_1 = 0 \end{cases}$$

3- les fréquences propres

Les M^{vts} sont périodiques :

$$\begin{cases} Q_1 = A \cos \omega t \\ Q_2 = B \cos \omega t \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{Q}_1 = -A\omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{Q}_2 = -B\omega^2 \cos \omega t \end{cases}$$

Remplaçons dans le système d'équations :

$$\begin{cases} (3k - J\omega^2)A - 2kB = 0 \\ 2kA + (3k - J\omega^2)B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} (3k - J\omega^2) & -2k \\ -2k & (3k - J\omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$$

le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 3k - J\omega^2 & -2k \\ -2k & 3k - J\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Développent le déterminant :

$$(3k - \omega^2 J)(3k - \omega^2 J) - 4k^2 = 0$$

$$(3k - \omega^2 J)^2 = 4k^2$$

$$\begin{cases} 3k - J\omega^2 = 2k \\ 3k - J\omega^2 = -2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J\omega^2 = k \\ J\omega^2 = 5k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{J}} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{5k}{J}} \end{cases}$$

Exercice 3 :

Deux masses m_1 et m_2 égales sont attachées par des fils (Fig.3), avec faibles oscillations.

On suppose que les tensions des fils sont constantes.

- 1- Déterminer les équations du mouvement.
- 2- Trouver les fréquences propres du système.
- 3- Déterminer les déplacements des masses x_1 et x_2 .

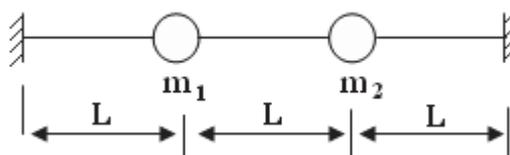


Figure 3

□ Les équations du M^{vts} :

□ Appliquant les équations de Newton :

□ on trouve :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -\left(\frac{x_1}{L}\right)T - ((x_1 - x_2)L)T \\ m_2 \ddot{x}_2 = -\left(\frac{x_2}{L}\right)T - ((x_2 - x_1)L)T \end{cases}$$

Finalemment :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + 2\left(\frac{T}{L}\right) x_1 - \left(\frac{T}{L}\right) x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + 2\left(\frac{T}{L}\right) x_2 - \left(\frac{T}{L}\right) x_1 = 0 \end{cases}$$

□ Les fréquences propres :

Les M^{vts} sont périodiques :

$$\begin{cases} x_1 = A \cos \omega t & \ddot{x}_1 = -A \omega^2 \cos \omega t \\ x_2 = B \cos \omega t & \ddot{x}_2 = -B \omega^2 \cos \omega t \end{cases}$$

□ Utilisant ce système ces valeurs, le système d'équations devient :

$$\begin{cases} -m_1 \omega^2 A + \frac{2T}{L} A - \frac{T}{L} B = 0 \\ -m_2 \omega^2 B + \frac{2T}{L} B - \frac{T}{L} A = 0 \end{cases}$$

En regroupant :

$$\begin{cases} \left(\frac{2T}{L} - m\omega^2\right)A - \frac{T}{L}B = 0 \\ -\frac{T}{L}A + \left(\frac{2T}{L} - m\omega^2\right)B = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \left(\frac{2T}{L} - m\omega^2\right) & -\frac{T}{L} \\ -\frac{T}{L} & \left(\frac{2T}{L} - m\omega^2\right) \end{vmatrix} = 0$$

L'équation des fréquences est donnée par :

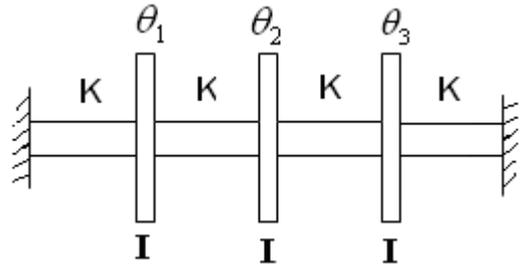
$$\omega^4 - \left(\frac{4T}{Lm}\right)\omega^2 + 3\left(\frac{T}{Lm}\right)^2 = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{T}{Lm}} \quad , \quad \omega_2 = 1,73 \sqrt{\frac{T}{Lm}} = \sqrt{\frac{3T}{Lm}}$$

Exercice □:

Un arbre en torsion (figure 4), est discrétisé par trois (03) degrés de liberté θ_1, θ_2 et θ_3 . La raideur en torsion de chaque élément élastique est K.

- 1- Ecrire les énergies cinétique et de déformation de l'arbre.
- 2- Ecrire les équations du mouvement.
- 3- calculer les fréquences propres de l'arbre et les modes associés.

**Figure 3**

1- L'énergie cinétique et l'énergie de déformation:

Energie cinétique:

$$\square_{\square} = \frac{1}{2} I \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}_3^2$$

Energie de déformation:

$$\square_{\square} = \frac{1}{2} K \theta_1^2 + \frac{1}{2} K (\theta_1 - \theta_2)^2 + \frac{1}{2} K (\theta_2 - \theta_3)^2 + \frac{1}{2} K \theta_3^2$$

2- Les équations du mouvement:

Appliquant les équations de Lagrange

$$\frac{\square}{\square} \left(\frac{\partial \square}{\partial \dot{\theta}_{\square}} \right) - \frac{\partial \square}{\partial \theta_{\square}} + \frac{\partial \square}{\partial \theta_{\square}} = 0$$

On trouve:

$$\begin{cases} I \ddot{\theta}_1 + 2K \theta_1 - K \theta_2 = 0 \\ I \ddot{\theta}_2 + 2K \theta_2 - K \theta_1 - K \theta_3 = 0 \\ I \ddot{\theta}_3 + 2K \theta_3 - K \theta_2 = 0 \end{cases}$$

3- Recherche des fréquences propres:

Les mouvements sont périodiques, donc les fonctions des déplacements et des accélérations sont données respectivement par:

$$\begin{cases} \theta_1 = A \cos(\omega t + \phi) \\ \theta_2 = B \cos(\omega t + \phi) \\ \theta_3 = C \cos(\omega t + \phi) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = -A \omega^2 \cos(\omega t + \phi) \\ \ddot{\theta}_2 = -B \omega^2 \cos(\omega t + \phi) \\ \ddot{\theta}_3 = -C \omega^2 \cos(\omega t + \phi) \end{cases} \quad (2)$$

Remplaçant (1) et (2) dans les équations du mouvement, on trouve un système des équations algébriques :

$$\begin{cases} (2K - I\omega^2)A - KB = 0 \\ -KA + (2K - I\omega^2)B - KC = 0 \\ -KB + (2K - I\omega^2)C = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Sous forme matricielle le système s'écrit:

$$\begin{bmatrix} (2K - I\omega^2) & -K & 0 \\ -K & (2K - I\omega^2) & -K \\ 0 & -K & (2K - I\omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = 0$$

C'est un système algébrique admettant comme solutions:

- La solution nulle (solution sans intérêt)
- L'autre solution est obtenue en égalant à zéro le déterminant du système

$$\Delta = \begin{vmatrix} (2K - I\omega^2) & -K & 0 \\ -K & (2K - I\omega^2) & -K \\ 0 & -K & (2K - I\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

En développant le déterminant:

$$(2K - I\omega^2)[(2K - I\omega^2)(2K - I\omega^2) - K^2] + K[-K(2K - I\omega^2)] = 0$$

$$(2K - I\omega^2)[(2K - I\omega^2)(2K - I\omega^2) - K^2] + K[-K(2K - I\omega^2)] = 0$$

$$(2K - I\omega^2)[(2K - I\omega^2)(2K - I\omega^2) - 2K^2] = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} (2K - I\omega^2) = 0 \\ \vee \\ (2K - I\omega^2)(2K - I\omega^2) - 2K^2 = 0 \end{cases}$$

Les pulsations sont données par:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{2})K}{I}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{I}}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(2 + \sqrt{2})K}{I}}$$

Les fréquences sont données par:

$$\omega_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{2})K}{I}}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{I}}$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(2 + \sqrt{2})K}{I}}$$

Exercice 4:

Calculer les fréquences naturelles du système montré sur la figure 3 en utilisant les équations de Lagrange et en prenant comme coordonnées généralisées, les déplacements angulaires des pendules. les pendules dans la position verticale sont couplées par des ressorts de même raideurs.

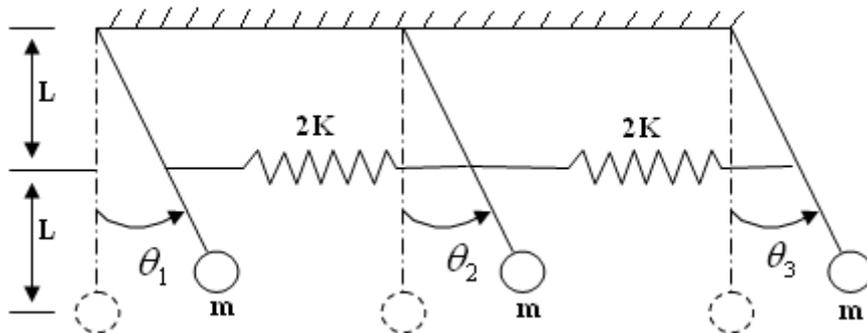


Figure 4

1- L'énergie cinétique et l'énergie de déformation:

Energie cinétique:

$$\square_{\square} = \frac{1}{2} \square (2 \square \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} \square (2 \square \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2} \square (2 \square \dot{\theta}_3)^2$$

Energie de déformation

$$\begin{aligned} \square_{\square} &= 2 \square \square (1 - \cos \theta_1) + 2 \square \square (1 - \cos \theta_2) + 2 \square \square (1 - \cos \theta_3) \\ &\quad + \frac{1}{2} 2 \square (\square \theta_2 - \square \theta_1)^2 + \frac{1}{2} 2 \square (\square \theta_3 - \square \theta_2)^2 \\ \square_{\square} &= 2 \square \square [(1 - \cos \theta_1) + (1 - \cos \theta_2) + (1 - \cos \theta_3)] \\ &\quad + \square \square [(\theta_2 - \theta_1)^2 + (\theta_3 - \theta_2)^2] \end{aligned}$$

Pour les faibles oscillations $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

Donc

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) + \frac{1}{2} K [(\theta_2 - \theta_1)^2 + (\theta_3 - \theta_2)^2]$$

2-Les équations du mouvement:

Appliquant les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0$$

On trouve:

$$\begin{cases} 4m\ddot{\theta}_1 + 2K(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ 4m\ddot{\theta}_2 + 2K(\theta_2 - \theta_1) - 2K(\theta_3 - \theta_2) = 0 \\ 4m\ddot{\theta}_3 + 2K(\theta_3 - \theta_2) = 0 \end{cases}$$

Finalemment :

$$\begin{cases} 4m\ddot{\theta}_1 + 2K(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ 4m\ddot{\theta}_2 + 2K(\theta_2 - \theta_1) - 2K(\theta_3 - \theta_2) = 0 \\ 4m\ddot{\theta}_3 + 2K(\theta_3 - \theta_2) = 0 \end{cases}$$

Les mouvements sont périodiques donc les fonctions des déplacements et des accélérations sont données respectivement par:

$$\begin{cases} \theta_1 = A \cos(\omega t + \phi) \\ \theta_2 = B \cos(\omega t + \phi) \\ \theta_3 = C \cos(\omega t + \phi) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = -A \omega^2 \cos(\omega t + \phi) \\ \ddot{\theta}_2 = -B \omega^2 \cos(\omega t + \phi) \\ \ddot{\theta}_3 = -C \omega^2 \cos(\omega t + \phi) \end{cases} \quad (2)$$

Remplaçons dans le système d'équations, et après simplification on trouve :

$$\begin{cases} [4m(\omega^2 - \frac{K}{2m})]A - K B = 0 \\ -K A + [4m(\omega^2 - \frac{K}{2m})]B - K C = 0 \\ -K B + [4m(\omega^2 - \frac{K}{2m})]C = 0 \end{cases}$$

Sous forme matricielle, le système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} [4m(\omega^2 - \frac{K}{2m})] & -K & 0 \\ -K & [4m(\omega^2 - \frac{K}{2m})] & -K \\ 0 & -K & [4m(\omega^2 - \frac{K}{2m})] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = 0$$

C'est 'un système algébrique admettant comme solutions:

- La solution nulle (solution sans intérêt)
- L'autre solution est obtenue en égalant à zéro le déterminant du système

Le déterminant est nul : $\Delta=0$

$$\begin{cases} \square\square + \square\square - 2\square\square^2\omega^2 = 0 \\ \omega^4 - \left(\frac{\square}{\square} + \frac{3\square}{2\square}\right)\omega^2 + \left(\frac{\square}{2\square}\right)^2 + \frac{3}{4}\frac{\square\square}{\square\square} = 0 \end{cases}$$

Après résolution de deux équations, on trouve les pulsations classés dans l'ordre : $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\square}{2\square}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\square}{2\square} + \frac{\square}{2\square}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{\square}{2\square} + \frac{3\square}{2\square}}$$

Les fréquences sont données par:

$$\square_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\square}{2\square}}, \quad \square_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\square}{2\square} + \frac{\square}{2\square}}, \quad \square_3 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\square}{2\square} + \frac{3\square}{2\square}}$$

Références Bibliographiques

- [1] Geradin & Rixen Théorie des vibrations : application à la dynamique des structures
1996 ed. MASSON
- [2] M. Lalanne, J. Der Hagopian, P. Berthier, Mécanique des vibrations linéaires,
Masson,. 1986.
- [3] DEL PEDRO Michel & PAHUD Pierre MECANIQUE VIBRATOIRE - Systèmes
discrets linéaires PPUR,1992
- [4] John M. Vance, Machinery Vibration and Rotordynamics, John Wiley & Sons , 2010,
416 pages.
- [5] Marc Thomas, fiabilité, maintenance prédictive et vibration des machines, presses
de l'université du québec , 2012, 616 pages.