

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA BOUMERDES
Faculté des Hydrocarbures et de la Chimie
Laboratoire de Physique de la Terre



THESE

présentée par

AITOUCHE Moh-Amokrane

pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT

Spécialité : **GÉOPHYSIQUE**

Option: **TRAITEMENT DU SIGNAL**

Dynamique Chaotique et Analyse Fractale en Géophysique
Percolation et Modélisation Fractale de la Porosité

Date de soutenance le 06 Juin 2007

Composition du jury

M ^r K. BADDARI	professeur/ Université de Boumerdés	Président
M ^r M. DJEDDI	professeur/ Univ. de Boumerdés	Directeur de thèse
M ^r M. AIDENE	professeur / Université de Tizi-Ouzou	Examineur
M ^r AMEUR SOLTANE	professeur / Université de Tizi-Ouzou	Examineur
M ^r A. BOUDELLA	maître de conférence/USTHB	Examineur
M ^r A. BOUGUERN	maître de conférence/Univ.de Boumerdés	Examineur

BOUMERDES 2007

INTRODUCTION GENERALE

Les approches réductionnistes traditionnelles impliquées dans l'analyse des systèmes complexes ont montré leur limite particulièrement dans leur formalisme et leur démarche dans les entreprises de modélisation car elles rendent compte de manière contestable de la variabilité et des incertitudes intrinsèques ou environnementales liées à ces systèmes.

Une véritable transposition des concepts physiques et mathématiques accompagnée d'une vision autre, des phénomènes particulièrement ceux répertoriés comme complexes ou chaotiques doit évacuer les situations hégémoniques simplistes et inclure les situations nouvelles engendrées par l'émergence de deux formes de complexité reconnues: la complexité ordinaire et la complexité émergente. La diversité, la dynamique de fragmentation et le conflit supposé entre le hasard probabiliste et le déterminisme certain doivent plus préfigurer de situations conflictuelles ou contradictoires pour l'instauration d'une complémentarité entre compétition et coopération entre les éléments et les sous-systèmes du système majeur

(chapitre I : une philosophie du chaos- de la synergie ordre/désordre à l'intégration hasard/déterminisme)

Cette migration des concepts vers des champs appropriés de l'analyse des systèmes qui ne satisfont plus du statut d'observables mais sont érigés en véritables entités dynamiques donc actives, impose la construction d'un biotope spécifique tel que l'espace des phases, incorporant les éléments mathématiques qui rendent le mieux compte de la complexité dynamique et au besoin affirmer la contradiction que l'on pourrait opposer aux approches classiques.

(chapitre II : éléments de caractérisation d'un système dynamique)

La théorie des systèmes dynamiques dits complexes est appréhendée comme une rupture avec la vision statique donc hégémonique, parce que mal ou insuffisamment compris, que l'on avait de ces derniers. De nouvelles orientations et approches sont développées, imposées par l'environnement de fragmentation, de complexification, de complexité émergente, de changement qualitatif et chaos, confèrent au système une meilleure réalité de sa construction et de son évolution dans le temps. La référence répétée au critère de complexité dans les systèmes dynamiques, objet du présent travail, s'identifie à ce que nous avons appelé la "destruction créatrice" pour signifier l'effondrement système n'est pas nécessairement synonyme de décadence mais au contraire une alternative et une opportunité à développer une diversité encore plus riche d'attributs ou de structures. Ainsi la turbulence ou le chaos ne sont plus considérés comme des situations anachroniques mais plutôt porteurs d'information.

Les trajectoires stables, les attracteurs étranges, l'imprédictibilité, la sensibilité aux conditions initiales ne sont plus érigés en phénomènes indésirables mais sont devenus des hypothèses pour accéder à d'autres formes de connaissance des systèmes comme le contrôle du chaos, le comportement fractal et les caractéristiques qui s'y rapportent.

(chapitre III : complexité et complexification:une topologie du chaos)

Pendant longtemps, les processus dynamiques complexes ou non, étaient confinés dans leur statut "d'observables" plus ou moins orienté vers le principe d'expérimentation. Les modèles mathématiques d'anticipation sur les comportements chaotiques, de leur compréhension ou de leur modélisation, se heurtaient à des obstacles de volume de calcul ou de graphisme.

Des idées préconçues sur l'apparition du chaos au sein des systèmes dynamiques "sains" ont longtemps prédominé. Ainsi, les systèmes non-linéaires ne furent pas profondément explorés quant à leur rôle aujourd'hui établi, dans leur prédisposition à développer un comportement chaotique. Une hypothèse a longtemps prévalu: la naissance du chaos : la naissance du chaos relèverait des grandes dimensions (ou degrés de liberté) dont serait muni un système. Des modèles théoriques ayant comme point de départ soit la recherche d'une représentation mathématique d'un fait observé (l'évolution des espèces dans le contexte proie-prédateur par exemple), soit la construction de formes particulières dont l'évolution des solutions au cours des calculs, dévie vers un comportement chaotique. A cet effet, certaines récurrences non-linéaires de premier ordre (comme la fonction logistique) ou de second ordre (comme le modèle galactique de Hénon) décrivent parfaitement cette propension à développer des situations de chaos même en présence d'un nombre de dimensions réduit. Ces modèles de récurrence sont concrétisés à travers des simulations accompagnées de représentations graphiques

des trajectoires ou des états et qui rendent compte le mieux de la nature même du chaos, de l'émergence de structures initialement insoupçonnées comme les fractales: c'est ce que nous avons appelé "une destruction créatrice".

(chapitre IV: récurrences non-linéaires et chaos)

La forme des récurrences assignée à un processus dynamique d'apparence chaotique, n'étant pas exclusive, divers modèles sont susceptibles d'être élaborés et suivis de simulation. Mais peu d'entre eux présenteront un intérêt car ne jouissant pas de critères géométriques précis sur le plan graphique et de caractéristiques mathématiques spécifiques à une forme de représentation souhaitée, telle que l'auto-similarité et l'invariance d'échelle par exemple. A cet effet, certaines formes itératives quadratiques répondent à ces préoccupations; citons entre autres la forme quadratique unidimensionnelle de Mandelbrot sur laquelle viendront se "greffer" les sembles de Julia dans le plan complexe et le modèle bidimensionnelle de Hénon dans le plan réel. Ces deux figurent parmi les plus répandus et les mieux synthétisés, mais d'autres approches sont possibles telle la génération des images fractales par les nombres hypercomplexes (à deux parties imaginaires). Il est tout aussi impératif de mettre en évidence les possibilités de passage d'une forme de récurrence vers une autre que nous assimilons à des jalons dans l'unification des modèles du chaos et des fractals. A cet effet, une tentative de relier la fonction logistique, source du chaos, au modèle de Mandelbrot a été fructueuse après passage au plan complexe, il est vrai.

Les modèles de récurrence et les modèles différentiels à travers l'exhibition des attracteurs étranges, n'ont pas l'exclusivité dans la modélisation des objets fractals. D'autres concepts ayant pour origine l'observation sous-tendue par des approches mathématiques peuvent conduire à la génération d'images fractales de synthèse. Dans le cadre de la méthode dite des systèmes de fonctions itérées (IFS pour Iterated Function Systems) due à Barnsley, seules quelques opérations conduisent à générer ce type d'images: l'auto-similarité, le principe de collage, la translation et la rotation. Des représentations virtuelles mais "d'une incroyable vraisemblance" avec le monde réel peuvent ainsi être générées.

Chapitre V: géométrie du chaos- dualité des ensembles de Mandelbrot et de Julia- Les systèmes de fonctions itérées (IFS)

La complexité émergente dans les systèmes dynamiques chaotiques, le changement qualitatif du chaos et les structures de croissance fractales imposent une refondation de certains concepts de quantification du chaos et des irrégularités induites.

Les lois de puissance qui régissent nombre de phénomènes physiques au point de constituer un creuset pour les constructions fractales, requièrent pour leur interprétation, la définition de tels concepts. Parmi ces derniers, la dimension fractale et ses dérivées (dimension de capacité, de Hausdorff, de corrélation, d'information) d'essence non entière, sont un paramètre fondamental dans le contexte de la topologie du chaos et de la géométrie fractale. Ces dimensions disparates à première vue, bien que caractérisant un même état ou un même objet, posent le problème de la recherche de la définition d'une dimension fractale généralisée que nous notons D_q et qui, pour des valeurs particulières du paramètre q , aboutit à formuler certaines formes de dimensions fractales.

(chapitre VI: la dimension fractionnaire en théorie fractale)

Certaines formes de récurrence posent le problème de la nature de leur convergence lorsque la dynamique à laquelle elles sont soumises, est étalée dans le temps ou dans l'ordre de la récurrence. L'intérêt réside non pas dans la convergence en tant qu'état final mais dans le processus de cette convergence. La méthode de Newton et les ensembles de Julia élargis aux fractions rationnelles sont des prototypes dans l'étude de ce problème. Plus complexe que prévu, le processus de convergence développe des situations de comportement chaotique et des structures de bassin d'attraction, siège de fractalité.

(chapitre VII: la méthode de Newton: entre chaos et fractalité)

Parce que liés au hasard et au contexte probabiliste, donc dénués de déterminisme et éloignés de la certitude, les processus stochastiques, à l'instar du mouvement Brownien, furent quelque peu occultés dans l'analyse des systèmes. A notre sens, deux raisons essentielles sont à retenir:

- le mouvement Brownien résulte plus d'un phénomène observé donc imposé, plus que d'un problème physique ou mathématiques élaboré.
- de par son caractère stochastique, son étude avait reposé sur une approche probabiliste ou statistique

La complexité du mouvement Brownien reconnue bien plus tard, ne saurait se satisfaire de ces deux approches eu égard aux orientations récentes de l'analyse des signaux non stationnaires (analyse temps- fréquence, transformée en ondelettes) et de l'élaboration de modèles de simulation "animés" donc proches d'une observation réelle.

Deux formes du processus Brownien peuvent se développer: le mouvement Brownien standard reconnu désormais comme auto-affine et fractal et le mouvement Brownien fractionnaire doté, outre des propriétés du cas standard, de caractéristiques spécifiques telles que la dimension fractionnaire et son caractère fractal en $1/f$.

(chapitre VIII: un processus stochastique fractal: le mouvement Brownien)

Certaines courbes sont qualifiées à jute titre d'ailleurs, de pathologiques tant certaines de leurs propriétés se situent hors du contexte pourtant rigoureux, du formalisme mathématique. Elles se situent en marge des concepts établis de l'analyse fonctionnelle. La notion d'irrégularité globale ou locale d'une courbe, échappe au principe de différentiabilité lequel, pour certains cas spécifiques, présente une situation conflictuelle avec le formalisme de continuité. A l'image de la courbe de Weierstrass, certaines fonctions présentent cette propriété anachronique d'être partout continues mais nulle part différentiables. Les courbes représentatives sont dites irrégulières, encore faut-il quantifier le "degré d'irrégularité" qui les caractérise. Ceci est rendu possible, d'une part en recherchant la part de fractalité qu'elles renferment par le biais de la dimension fractale et d'autre part en définissant un coefficient spécifique d'estimation des irrégularités : l'exposant de Hölder.

La complexité et les contradictions affichées par les courbes pathologiques trouvent leur origine dans un même concept mathématique, celui de l'ordre de dérivation. Entier, ce dernier ne peut apporter une solution au dilemme "continuité mais non différentiabilité". Une alternative est cependant offerte par le principe du calcul dit fractionnaire et son corollaire la dérivation non entière. En tant que théorie, le calcul fractionnaire (intégration et dérivation non entières) n'est pas nouveau dans le formalisme de l'analyse fonctionnelle mais les approches de calcul peuvent différer. Une possibilité de formulation la dérivation fractionnaire est de considérer cette dernière comme une opération de filtrage linéaire dont la réponse impulsionnelle associée, est représentée, via une opération de convolution, par un opérateur D^α ($\alpha \in \mathcal{R}$) construit sur le principe des différences finies. L'intégration non entière obéira au même principe de convolution mais par l'opérateur inverse" $D^{-\alpha}$ ($\alpha \in \mathcal{R}$). Sur le plan du calcul de dérivée d'ordre fractionnaire, se ose le problème de l'implémentation de ce dernier. La transformation de Fourier n'imposant pas de condition sur l'ordre de la dérivée de la fonction dont on cherche la représentation spectrale, un algorithme élaboré à partir de cette constatation, a permis de représenter, tout au moins graphiquement, la dérivée fractionnaire de fonctions données.

(chapitre IX: élaboration d'un opérateur convolutif de dérivation fractionnaire – Dérivation fractionnaire et fractalité)

Conjointement au mouvement Brownien, un autre processus stochastique d'apparence chaotique mais de structure fractale, suscite un intérêt particulier non seulement en mécanique des fluides mais aussi en hydrogéologie et dans certaines méthodes de prospection géophysique: la percolation. Cette dernière, s'illustre par deux caractères: un formalisme probabiliste approfondi duquel sera extraite la fonction de percolation illustrée par les cas critiques et la conception du modèle mathématique de la percolation.

Deux modes de percolations sont simulées: par site et par amas. Un modèle de loi de puissance dans le modèle stochastique de percolation est établi.

(chapitre X- partie I: un processus stochastique fractal:la percolation)

La caractérisation de certains milieux physiques à partir de modes de distributions spatiales des paramètres pétrophysiques, ouvre la voie à des formes de modélisation fractale des sols. Ainsi, des approches affinées de modélisation d'un sol poreux sont rendues possibles tant dans le cas bidimensionnel à partir d'un initiateur, le tapis de Sierpinski que dans le cas spatial, l'éponge de Menger. Une approche objective d'un milieu poreux réel est redevable d'un modèle aléatoire en termes de distribution des pores et du caractère homogène ou hétérogène de cette dernière.

Deux modèles mathématiques d'un milieu poreux sont présentés: le modèle de Pfeifer (1983) et de Friesen et Makula (1987) le modèle de Rieux Espesito (1991).

L'introduction d'un milieu à trois phases Pores-Solides-Fractals (PSF) a permis la mise en évidence de lois de puissance, le comptage du nombre d'éléments et de l'estimation de la porosité dans le modèle PSF.

(chapitre X- partie II: modélisation fractale de la porosité)

PROBLEMATIQUE

Affirmer que le degré de désordre régnant dans un système dynamique complexe ou en voie de complexification est quantifiable serait une transgression du formalisme déterministe qui exclut toute référence au hasard ou au modèle probabiliste. Pourtant l'avènement de la théorie du chaos comme approche rationnelle de la complexité et le formalisme de structures fractales ont fatalement conduit à des champs de vision autres des concepts réductionnistes parce que simplistes de l'analyse des systèmes dynamiques. Ces derniers ont longtemps été confinés dans un statut d'observables figé, imposant, mal ou insuffisamment compris. Les modèles mathématiques auxquels il était fait référence dans leur description ne permettaient pas une anticipation sur les comportements chaotiques, leur compréhension et leur modélisation accentuée par les volumes de calcul et les modes de graphismes existants alors.

Un élément fondamentalement central dans l'analyse et le diagnostic d'une transition d'un système dynamique vers le chaos réside dans l'évolution temporelle des trajectoires. Quelque soit le modèle éligible à une modélisation de ce type de systèmes, le critère de base reste leur sensibilité aux conditions initiales (SCI) qui prédéterminent la nature du comportement temporel des trajectoires. En effet, bien qu'issues de conditions initiales très proches, deux trajectoires peuvent adopter un état de divergence "exponentielle" au fur et à mesure du temps à tel point que pour un attracteur, la distance qui les sépare peut être de l'ordre du diamètre de cet attracteur.

La notion d'attracteur, récente par ailleurs, est relative puisque reliée au modèle lui-même. En termes de modélisation de processus susceptibles de complexification, d'effondrement et transition vers un comportement chaotique, nous retenons deux orientations possibles:

- les modèles différentiels à l'image du modèle "météorologique" de Lorenz où les fonctions d'état matérialisées par les trajectoires de phases sont soumises aux variations de paramètres dits de contrôle du modèle. Les valeurs assignées à ces derniers n'obéissent à proprement parler à une logique de calcul mais relèvent de tests lesquels donnent naissance à une famille de trajectoires qui, par migration et confinement dans une région de l'espace des phases forment un attracteur qualifié d'étrange. Cette propriété tient d'une considération topologique: le caractère borné de l'espace d'états freine la divergence exponentielle des trajectoires de phase en régime de chaos sans pour autant mettre fin à leur développement. Il s'agit alors pour ces trajectoires d'adopter un comportement adapté: une double opération de repliement dû au caractère borné de l'espace de phase et d'étirement pour assurer une meilleure occupation de cet espace. Cette dynamique est développée un nombre infini de fois (on parle de cycles) à tel point que la "longueur" de l'attracteur devient infinie bien que contenu dans un espace borné. Toute condition initiale choisie dans le bassin d'attraction fournira cette forme de trajectoires qui d'ailleurs échapperont à toute forme de prédictibilité de comportement sur l'attracteur. Cette situation anachronique ne peut être perçue qu'à travers un concept novateur :

- l'attracteur étrange possède une structure fractale qui sous-entend que le désordre soupçonné n'est qu'apparent de même qu'il est quantifiable par la dimension non entière dite aussi fractale de cet attracteur.

- les modèles de récurrence, non linéaires, à variables réelles ou complexes, de premier ordre (fonction logistique) ou de second ordre (modèle de Hénon) constituent une alternative dans la modélisation de processus chaotiques. Des paramètres de contrôle accompagnent généralement les expressions de ces modèles et s'imposent au cours de la simulation comme véritables variables c'est-à-dire soumises soit à des valeurs fixées ou à des gammes de valeurs. Les processus engendrés alterneront des phases de stabilité et d'instabilité à travers les points fixes par exemple, conduisant à des régimes dynamiques qualitativement différents, et clairement répartis et aisément détectables par simple analyse de l'évolution des trajectoires en fonction des variations de ces paramètres.

Il est constaté que l'évolution vers le chaos n'est pas instantanée mais précédée d'un ensemble d'états intermédiaires issus de changements discontinus ou bifurcations. Une bifurcation marque le passage d'un régime dynamique à un autre qualitativement différent. Le chaos se manifeste dès lors qu'il y a perte de stabilité structurelle. Une série de bifurcations est souvent nécessaire pour atteindre cet état de désordre qui résulte, en terme de points fixes ou de cycles, de situations intermédiaires faites de périodicité, de quasi-périodicité et enfin de chaos. La dynamique observée devient de plus en plus complexe car de nouveaux "régimes" apparaissent au cours de l'évolution et se superposent à ceux déjà développés.

Si le chaos apparaît comme la finalité du processus considéré, nous remarquons tout de même une forme de régularité dans la transition vers cette situation de chaos, réduisant ainsi toute référence à une dynamique de bifurcation stochastique.

L'exploration minutieuse des régions siège d'un chaos que l'on pourrait supposer absolu, révèle l'existence de brèves fenêtres de stabilité dans lesquelles le phénomène de bifurcation réapparaît mais de manière transitoire.

Il a été précisé que toutes les formes de récurrence ne sont pas candidates à l'émergence du chaos; ne sont retenues que celles susceptibles de développer une géométrie complexifiante, riche en structures émergentes et assurant une dynamique de convergence vers le chaos. Les précautions sont encore plus présentes dans la proposition d'un modèle de récurrence se situant au-delà du chaos et écartant toute référence au critère de désordre et d'irrégularité : il s'agit de la géométrie fractale dont les caractéristiques principales sont l'autosimilarité, l'échelle d'observation et la dimension non entière. Une première jonction chaos-fractalité a été relevée dans le modèle différentiel chaotique de Lorenz à travers la structure de l'attracteur étrange. Bien plus, il a été montré que, moyennant quelques transformations sur l'expression de la suite logistique (un prototype de processus basculant vers le chaos) d'établir une récurrence quadratique à termes complexes dotée elle aussi d'un paramètre "de contrôle" complexe c et telle que $z_{n+1} = z_n^2 + c$. Cette expression donne naissance à deux formes d'ensembles fractals suivant l'angle à travers lequel elle est perçue. En effet, partant d'une condition initiale z_0 précisée, une première possibilité est d'effectuer un "balayage" de l'ensemble des complexes par les représentations des points d'affixes $[\text{Re}(c), \text{Im}(c)]$. Le contour de l'ensemble fermé résultant, de forme et de texture dont l'observation décline une forte irrégularité apparente qui obéit en fait aux lois de la géométrie fractale (self – similarité et loi d'échelle) : l'ensemble de Mandelbrot.

Deux régions sont ainsi mises en évidence dans l'ensemble de Mandelbrot: une sous région "intra contour" et une sous - région plus ouverte sur l'infini en extra –contour. Cette division permet une autre conception de l'expression $z_{n+1} = z_n^2 + c$: pour un paramètre de contrôle $c = c_i [\text{Re}(c_i), \text{Im}(c_i)]$ fixé par rapport à une affixe donnée de l'ensemble de Mandelbrot et relativement à une condition initiale z_0 , les points dont les affixes sont issues de la récurrence z_{n+1} décriront une famille d'ensembles jouissant des mêmes propriétés que l'ensemble de Mandelbrot, en particulier l'aspect fractal des contours : ce sont les ensembles de Julia .

Les modèles différentiels et les approches récurrentes dans la construction des ensembles ou des figures fractals ne sont pas exclusifs. Partant de constats issus d'observations d'objets naturels, il est retenu que la dynamique d'élaboration d'une entité fractale n'est point synonyme de complexité mais seules quelques transformations y participent à savoir : le principe d'affinité, les opérations de translation et de rotation et le principe du "collage". L'approche de construction d'images fractales par les systèmes de fonctions itérées (ou IFS pour Iterated Function Systems) due à Barnsley rejoint ce mode de génération d'images de synthèses à travers lequel des scènes ou des représentations naturelles peuvent être obtenues.

Juger de l'irrégularité d'une courbe, du niveau de sa complexité, du degré sa self similarité donc de sa fractalité serait aventureux en l'absence de critères quantifiables. Ainsi, comme précisé ci-dessus, un attracteur étrange de consistance fractale avait posé le problème d'un double comportement des trajectoires –étirement et repliement- de façon à respecter la topologie de l'espace qui l'accueille notamment par rapport à la dimension de ce dernier et à développer son propre mode de survie c'est-à-dire la fractalité. De là est issu le mot "étrange". Dès lors une remise en cause de certains concepts classiques s'impose dont nous citons celui de la dimension longtemps réduite au seul format de dimension topologique dont la plus connue est la dimension euclidienne. Dans le cas des objets fractals, à l'instar des attracteurs étranges la référence à une dimension inférieure à la dimension topologique doit être envisagée; plus précisément, il s'agira d'une dimension comprise entre deux dimensions topologiques entières, donc fractionnaire. Cette nouvelle forme de dimension non entière est la dimension fractale qui, d'ailleurs, ne répond pas à une définition unique bien que des tentatives d'uniformisation sont entreprises notamment avec le principe de la dimension fractale généralisée D_q .

En termes de calcul d'une dimension fractale, la complexité varie avec le principe qui définit sa nature; ainsi la dimension de boîte (box counting dimension) et la dimension de capacité restent les plus simples à trouver comparées à la dimension de Hausdorff, de corrélation, d'information ou ponctuelle dont les principes théoriques sont plus élaborés.

Les formes fractales issues de récurrences mathématiques découlent directement de la dynamique des calculs en ce sens que la donnée d'une condition initiale et d'une ou plusieurs valeurs du paramètre de contrôle suffit à conduire à l'obtention de ces formes. Il existe cependant des formes de calculs qui intègrent la fractalité non comme une finalité mais comme une procédure ou une étape intermédiaire de leur déroulement. A cet effet, il est connu que L'algorithme des tangentes dit de Newton-Raphson converge vers les racines de l'équation à résoudre. L'intérêt est d'accéder au cœur même de la procédure de la dynamique de convergence. Cette dernière présente toutes les qualités d'un système dynamique en termes de bassin d'attraction, de chaos et de fractalité.

Situés hors contexte déterministe, les processus stochastiques, bien que reposant sur les lois du hasard donc soumis aux règles des probabilités ou des statistiques, développent certes des comportements chaotiques mais structurés en fractals. Le mouvement Brownien standard d'abord et le mouvement Brownien fractionnaire appartiennent à cette famille de processus. Caractérisés par un paramètre spécifique, le coefficient de Hurst, leur fractalité est appréhendée à travers l'existence de relation entre ce coefficient et la dimension fractale. Sur le plan spectral, il a été montré que les processus Browniens appartiennent à une large famille de signaux pourvoyeuse de signaux fractals: les processus en $1/f$.

L'irrégularité prononcée mais en apparence seulement du mouvement Brownien peut être prolongée à certaines courbes mathématiques dites "pathologiques" tant leurs propriétés échappent aux concepts rigoureux de l'analyse fonctionnelle. Cette dernière occulte la notion d'irrégularité globale et locale et bien plus, elle réfute l'existence de fonctions partout continue mais nulle part dérivable. A l'image de la courbe de Weierstrass qui appartient à cette classe de fonctions, il devient nécessaire de quantifier le degré d'irrégularité à travers un coefficient spécifique tel que l'exposant de Hölder.

Le qualificatif de "pathologie" peut être étendu au concept de l'ordre de la dérivation qui peut apporter un début de réponse au dilemme continuité/ différentiabilité. Une alternative est offerte par le concept du calcul fractionnaire dont un aspect est représenté par la dérivée d'ordre non entier. Une littérature proluxe est consacré à ce thème. L'approche développée ici rejoint par sa formulation le principe d'un filtrage linéaire. La réponse impulsionnelle de ce type de filtre définira, via l'opération de convolution, un opérateur de dérivation non entière.

Sur le plan de l'implémentation d'un algorithme calculant la dérivée non entière d'une fonction, le calcul spectral (par introduction de la transformation de Fourier) n'exigeant *a priori* aucune condition sur l'ordre de la dérivée de la fonction à traiter, peut être étendu à la dérivation non entière.

Conjointement au mouvement Brownien, un autre phénomène stochastique d'apparence chaotique mais fractal est susceptible de se développer en mécanique des fluides, en hydrogéologie ou en électrométrie. Il s'agit de la percolation dont le mécanisme est appréhendé à travers la fonction dite de percolation et principalement le cas critique qui relève du formalisme probabiliste. Un modèle de percolation en loi de puissance est établi ce qui affermit le caractère fractal de celui-ci.

La distribution spatiale de certains paramètres pétrophysiques ouvre la voie à la recherche de principes de modélisation des sols. Une modélisation basée sur le concept de fractals en est une possibilité. A cet effet, partant de modèles relativement simples comme le tapis de Sierpinski en bidimensionnel ou de l'éponge de Menger dans le cas tridimensionnel, des modèles de milieux poreux ont été élaborés, conjointement au modèle standard, dans les cas homogène et hétérogène. Plus élaboré parce que plus fidèle aux cas réels de porosité, le modèle Pore-Solide -Fractal (modèle PSF) a toutes les faveurs dans ce type de modélisation principalement pour son exhibition de lois de puissance synonyme de l'existence de fractalité dans la distribution spatiale des pores.

ملخص الأطروحة

إن محاولة إثبات أن درجة الأرتيب, المهيمنة على الأنظمة الديناميكية المعقدة أو التي في طور التعقيد, قابلة لتكميم ستشكل خرقاً لنظرية التحديد. يقصى كل مرجعية للعشوائية أو النموذج الاحتمالي, مع أن نظرية الكاوتكتقريب عقلاني للتعقيد وصيغة الفراكتال أديا ألي صيغة مختلفة عن نظرة المبدأ الاختزالي. هاتين الأخيرتين تحسنتا لزمن طويل في إطار الملاحظة الثابتة إجبارا السينة أو القليلة الفهم. النماذج الرياضية ألي شكلت مرجعية لوصفها لا تسمح بالتنبؤ عن السلوك الجد عشوائي, وبالتالي فإن فهمها و نمذجتها تتراجع بسبب حجم الحسابات و الطرق البيانية الموجودة.

العنصر الأساسي و المحوري في التحليل و التشخيص أثناء الانتقال من النظام المعقد ألي الكاوت, يكمن في التطور أزماني للمسارات. مهما يكن النموذج القابل للاختيار بنمذجة مثل هذا النوع من الأنظمة, المعيار الأساسي يبقى في حساسيته للشروط الابتدائية ألي تحدد مسبقا طبيعة السلوك الزماني للمسارات. و على هذا الأساس, مع أنها تصدر من الشروط الابتدائية الأقر, هناك مسارين يمكن أن يضبطا حالة التفرق التجريبي زمنيا في نقطة معينة من أجل جاذب المسافة ألي تفرق بينهما و ألي يمكن أن تكون بمقدار قطر الجاذب. إن مفهوم الجاذب هو مفهوم حديث, ومنه فهو نسبي بسبب انه مرتبط بالنموذج بحد ذاته.

اعتمادا على نمذجة نظام قابل للتركيب, التفكيك أو الانتقال إلى السلوك الظاهري للكاوت, لكن بنسج الفراكتال, نحتفظ بثلاث اختيارات ممكنة: النموذج التفاضلي التقريب بالتراجع في الحيز الحقيقي (دالة عتادية), أو مركب (مجموعة ماندلبروت و جوليا), و أخيرا طريقة النظام ذا الدالة الوراثة.

الحكم على لا نظامية منحنى, ومستوى تعقده, ودرجة مضاهاته الذاتية أي فراكتاليتها, سيكون مغامرة في غياب معيار قابل للتكميم. في هذه الحالة الأجسام الفراكتالية على ضوء الجواذب الخارجية المرجع إلى الأبعاد الاصغرية بالنسبة إلى الأبعاد التضاريسية يمكن التفكير فيها. يتعلق الأمر على وجه الدقة, بأبعاد اصغرية محصورة بين بعدين تضارسيين كليا أي الفراكتالية.

بالتواجد خارج إطار مبدأ التحديد, الأنظمة العشوائية مع أنها تعتمد على قوانين الاحتمال و الإحصاءات, تطور سلوك كاوتيك بنسج الفراكتال. الحركة البروينية القياسية أو الحركة البروينية الفراكتالية تنتمي إلى هاتة العائلة المسماة بيركولاسين. الذي هو أساسا الحالة الحرجة ألي تعتمد على الصيغة الاحتمالية. نموذج بيركولاسيون بقانون قدرة تم استخلاصه لتأكيد الخاصية الفراكتالية لهذا الأخير. التوزيع الفضائي لبعض المعايير البتروفيزيائية يفتح الأفق على البحث عن مبادئ للنمذجة الأرض. النمذجة ألي تعتمد على مفهوم الفركتال تشكل إحدى هاتة الإمكانيات.

المرش عيطوش مح أمقران

TABLE DES FIGURES	page IX
LISTE DES TABLEAUX	page XV

CHAPITRE I

UNE PHILOSOPHIE DU CHAOS DE LA SYNERGIE ORDRE – DESORDRE A L'INTEGRATION HASARD – DETERMINISME

	PAGES
I-STRUCTURES DYNAMIQUES ET DYNAMIQUE DE COMPLEXIFICATION	2
II-LE MOUVEMENT DE COMPLEXIFICATION	3
III-SIMULATION D'UNE TRANSITION ORDRE – CHAOS	3
IV-SYNERGIE ORDRE – DESORDRE DANS LE CHAOS	4
V-AUTO – ORGANISATION CRITIQUE ET CHAOS FAIBLE	5

CHAPITRE II

ELEMENTS DE CARACTERISATION D'UN SYSTEME DYNAMIQUE

I- SYSTEME DYNAMIQUE DETERMINISTE	7
I-1 ESPACE DES PHASES	7
I-2 FLOT D'UN PROCESSUS	7
I-3 ORBITE (TRAJECTOIRE) D'UN FLOT	8
I-4 COURBE INTEGRALE D'UN FLOT	8
I-5 ENSEMBLE LIMITE D'UN FLOT	8
II- BASSIN D'ATTRACTION ET ATTRACTEUR	8
III- PROCESSUS DISSIPATIFS ET ATTRACTEUR ETRANGE	10
IV- ENSEMBLE INVARIANT	10
V- SECTIONS DE POINCARÉ	10
VI- SYSTEMES DYNAMIQUES UNIDIMENSIONNELS	12
VI-1 ENSEMBLE DES POINTS PERIODIQUES, DE PERIODE n, $Per_n(f)$	12
VI-2 ENSEMBLE LOCALEMENT STABLE D'UN POINT PERIODIQUE	12
VI-3 CLASSIFICATION DES POINTS PERIODIQUES	12
VII- RECURRENCES DE SECOND ORDRE	12
VIII- ANALYSE GRAPHIQUE	13

CHAPITRE III

COMPLEXITE ET COMPLEXIFICATION UNE TOPOLOGIE DU CHAOS

I- CHAOS – FRACTALITE : UNE DESTRUCTION CREATRICE	15
II- LA DYNAMIQUE DE COMPLEXIFICATION : VERS LE REGNE DU CHAOS	16
III- LE CHAOS : UN DESORDRE APPARENT	16
IV- ANATOMIE D'UN SYSTEME COMPLEXE	17
IV-1 CONTEXTE MATHEMATIQUE DE LA FORMULATION DE L'ENTROPIE	17
IV-2 MESURE DE LA COMPLEXITE D'UN SYSTEME CHAOTIQUE	17
IV-3 LE CARACTERE DISPERSIF DES SYSTEMES CHAOTIQUES	18

IV-3-1 FORMALISME MATHÉMATIQUE DE L'ESTIMATION DE L'ENTROPIE	18
IV-3-2 EFFET DE CONTAMINATION DU CHAOS	18
V- LA GEOMETRIE DU CHAOS	18
V-1 LA NOTION DE STABILITE D'UNE TRAJECTOIRE	19
V-2 LES DIFFÉRENTES FORMES DE STABILITE	19
V-2-1 STABILITE AU SENS DE LYAPUNOV	19
V-2-2 STABILITE ASYMPTOTIQUE	19
V-3 SYSTEME LOCALEMENT STABLE ET GLOBALEMENT INSTABLE	20
VI- ATTRACTEUR	20
VI-1 POINT FIXE	20
VI-2 POINT FIXE ATTRACTIF	20
VI-3 CYCLE ET TRAJECTOIRE PERIODIQUE	20
VI-4 ATTRACTEUR PERIODIQUE	21
VII- CHAOS TOPOLOGIQUE	21
VIII- LA SENSIBILITE AUX CONDITIONS INITIALES	23
IX- CHAOS ET IMPREDICTIBILITE	26
X- CHAOS ET PHENOMENES STOCHASTIQUES	26
XI- UN DISPOSITIF EXPERIMENTAL SIMPLE D'OBSERVATION DU PRINCIPE DE L'IMPREDICTIBILITE DU CHAOS	27
XII- LE CONTROLE DU CHAOS	27
XII-1 PRINCIPE DE LA METHODE OGY (OTT, GREBOJI ET YORK)	27
XII-2 LES CONDITIONS D'APPLICATION D'UN ALGORITHME DE CONTROLE DU CHAOS	28
XIII- LE CONTROLE DU CHAOS A TRAVERS UN POINT FIXE	28
XIV- ALGORITHME OGY BASE SUR L'ATTENTE DE STABILISATION DE TRAJECTOIRES	28
XV- APPLICATION DE L'ALGORITHME OGY SUR LA FONCTION LOGISTIQUE	28
XVI- L'ALGORITHME OGY PAR LA DECOMPOSITION SPECTRALE DE LA MATRICE JACOBIENNE	30
XVII- APPLICATION DE LA METHODE OGY DE CONTROLE DU CHAOS SUR L'ATTRACTEUR DE HENON	32
XVIII- LA QUASI – PERIODICITE : UN PRELUDE AU CHAOS	34
XVIII-1 INTRODUCTION	34
XVIII-2 CARACTERISATION SPECTRALE D'UN SIGNAL PERIODIQUE	35
XVIII-3 CARACTERISATION SPECTRALE D'UN SIGNAL QUASI- PERIODIQUE	37
XVIII-3-1 SUR UNE FORMULATION D'UN PROCESSUS N QUASI- PERIODIQUE	37
XVIII-3-2 REPRESENTATION D'UN PROCESSUS QUASI- PERIODIQUE	37
XVIII-4 SPECTRE D'UN PROCESSUS QUASI-PERIODIQUE	37
XIX- TRAJECTOIRES DE PHASE ET PROCESSUS QUASI – PERIODIQUE	39
XIX-1 CYCLE LIMITE ATTRACTEUR DANS UN PROCESSUS PERIODIQUE	39
XIX-2 CYCLE LIMITE ATTRACTEUR DANS N PROCESSUS QUASI-PERIODIQUE	40
XIX-3 UN PARAMETRE DETERMINANT LE NOMBRE DE ROTATIONS	41
XX- LA N QUASI-PERIODICITE	42
XXI- LE MODELE DE LORENZ	43
XXI-1 SOLUTIONS STATIONNAIRES DU MODELE DE LORENZ	43
XXI-2 SENSIBILITE AUX CONDITIONS INITIALES	44
XXI-3 INFLUENCE DU PARAMETRE σ SUR LES POINTS D'EQUILIBRE ET LES ATTRACTEURS ETRANGES	45
XXI-4 INFLUENCE DU PARAMETRE r SUR LE COMPORTEMENT DU MODELE DE LORENZ	46

CHAPITRE IV**RECURRENCES NON LINEAIRES ET CHAOS**

I- LES RECURRENCES:UNE FORME MATHEMATIQUE DE MODELISATION	51
II- LES RECURRENCES NON LINEAIRES DE PREMIER ORDRE A UNE VARIABLE	51
III- UNE FORME ITERATIVE REELLE NON LINEAIRE : L'ITERATEUR QUADRATIQUE	52
IV- CALCUL ANALYTIQUE DES POINTS FIXES	55
V- ANALYSE GRAPHIQUE DES POINTS FIXES DE L'ITERATEUR QUADRATIQUE	55
VI- ANALYSE DES POINTS FIXES DE L'ITERE D'ORDRE 2 DE LA FONCTION LOGISTIQUE	59
VII- LE PHENOMENE DE BIFURCATION DANS LA FONCTION LOGISTIQUE	60
VIII- TRANSITION VERS LE CHAOS DE LA FONCTION LOGISTIQUE	62
IX- LES FENETRES DE STABILITE	64
X- QUANTIFICATION DU CHAOS PAR L'EXPOSANT DE LYAPUNOV	66
X-1 L'EXPOSANT DE LYAPUNOV	66
X-2 VARIATIONS DU COEFFICIENT DE LYAPUNOV ET DIVERGENCE/CONVERGENCE DES TRAJECTOIRES	68
X-3 SPECTRE DE LYAPUNOV DE LA FONCTION LOGISTIQUE	69
X-4 SPECTRE FRACTAL DE LYAPUNOV	70
XI- LES RECURRENCES NON LINEAIRES DE SECOND ORDRE	74
XI-1 LES RECURRENCES NON LINEAIRES DE SECOND A VARIABLES REELLES	74
XI-2 UN MODELE DE RECURRENCE NON LINEAIRE DE SECOND ORDRE PARTICULIER : LE MODELE GALACTIQUE DE HENON	74
XI-3 ORIGINE DU MODELE GALACTIQUE DE HENON	75
XI-4 QUELQUES CAS DE SIMULATION DU MODELE GALACTIQUE DE HENON	75
XI-5 MODELE GALACTIQUE SPIRAL	78
XI-6 UNE FORME DU MODELE GALACTIQUE DE HENON : LE MODELE GALACTIQUE SPIRAL	78
XI-6-1 QUELQUES REPERES SUR LES GALAXIES	78
XI-6-2 SIMULATION DE QUELQUES GALAXIES SPIRALES	78

CHAPITRE V**GEOMETRIE FRACTALE
DUALITE DES ENSEMBLES DE JULIA ET DE MANDELBROT**

I- GEOMETRIE FRACTALE	82
I-1 APPROCHE QUALITATIVE DES FRACTALS	82
I-2 APPROCHE QUANTITATIVE DES FRACTALS	83
I-2-1 TRANSFORMATION DE SIMILARITE ET CRITERE DE SELF- SIMILARITE	83
I-2-2 LA SELF-SIMILARITE	84
I-2-3 LA SIMILARITE STATISTIQUE	84
II- LES ESPACES METRIQUES $\mathcal{F}(X)$ DES FRACTALS	85
II-1 DETERMINATION D'UNE METRIQUE DE $\mathcal{F}(X)$	85
II-2 DISTANCE DE HAUSDORFF	86
III- APPROCHE MATHEMATIQUE DE LA GENERATION D'IMAGES FRACTALES	86

V- LES APPLICATIONS ITERATIVES SUR LE PLAN COMPLEXE	86
IV-1 LES METHODES ITERATIVES DANS LE PLAN REEL	86
IV-2 LES METHODES ITERATIVES DANS LE PLAN COMPLEXE	87
IV-3 BASSIN D'ATTRACTION	88
IV-4 INTEGRATION DE L'INFINI COMME ATTRACTEUR DANS LE PLAN COMPLEXE	89
V- POINTS PERIODIQUES DANS UNE ITERATION A TERMES COMPLEXES	89
VI- BASSIN D'ATTRACTION EN PRESENCE D'UN p – cycle	90
VII- TOPOLOGIE DES ENSEMBLES DE JULIA	91
VII-1 SUR UN PROLONGEMENT DE LA FONCTION LOGISTIQUE – CONSTRUCTION DES ENSEMBLES DE JULIA	91
VII-2 CARACTERISATION DES ORBITES DES ENSEMBLES DE JULIA	91
VII-3 PROPRIETES REMARQUABLES DES ENSEMBLES DE JULIA	94
VIII- FAMILLES NORMALES	95
VIII-1 PRINCIPE DE CONSTRUCTION	95
VIII-2 RECONSTRUCTION D'UN ENSEMBLE DE JULIA	96
IX- UNE VARIETE D'UN ENSEMBLE DE JULIA : L'ENSEMBLE DE MANDELBROT	97
X- ANATOMIE DE 'ENSEMBLE M DE MANDELBROT	99
XI- INDEXATION DES ENSEMBLES DE JULIA PAR L'ENSEMBLE DE MANDELBROT	106
XII- VERSIONS DIVERSIFIEES DES ENSEMBLES DE JULIA ET DE L'ENSEMBLE DE MANDELBROT	108
XIII- ENSEMBLES DE JULIA ISSUS D'UN BALAYAGE DE L'ENSEMBLE DE MANDELBROT	109
XIV- UNE CLASSIFICATION DES DIFFERENTS CORPS DE FRACTALS	113
XV- LES SYSTEMES DE FONCTIONS ITEREES (IFS) – APPLICATION A LA GENERATION D'IMAGES DE SYNTHESE	115
XV-1 INTRODUCTION	115
XV-2 QU'EST- CE- QU'UNE IMAGE DE SYNHTESE ?	115
XV-3 QUE NOUS OFFRE UNE IMAGE DE SYNTHESE ?	115
XV-4 IMAGE DE SYNTHESE ET RECHERCHE SCIENTIFIQUE	115
XV-5 LES IMAGES DE SYNTHESE PAR LE MODELE FRACTAL	116
XV-6 LES FONCTIONS ITERATIVES	117
XV-6-1 UN LANGAGE DE DESCRIPTION DES IMAGES FRACTALES	117
XV-6-2 METHODOLOGIE	117
XV-6-2-1 PRINCIPE DE SIMILITUDE	117
XV-6-2-2 LES CONSTRUCTIONS ITERATIVES DANS LES IFS	118
XV-6-2-3 CARACTERISATION DES IFS	118
XV-7 MISE EN ŒUVRE D'UN IFS	119
XV-8 MODELES FRACTALS GENERES A PARTIR DES IFS	119
XV-9 UN RELIEF FRACTAL	120
XV-10 FORMES GEOMETRIQUES FRACTALES	121
XV-10-1 UN COUVERT VEGETAL FRACTAL	121
XV-10-2 UNE COUVERTURE NUAGEUSE FRACTALE	121
XV-11 MOUVEMENTS CHAOTIQUES DETERMINISTES	123
XV-12 SIMULATION DE L'ASTRE SOLAIRE	123
xv-13 CONCLUSION	125

CHAPITRE VI

LA DIMENSION FRACTIONNAIRE EN THEORIE FRACTALE

I- CRITERES D'IDENTIFICATION DES FRACTALS	128
II- LA NOTION DE DIMENSION DANS LE CONTEXTE DE LA GEOMETRIE FRACTALE	128
III- DETERMINATION DE LA DIMENSION FRACTALE PAR LA METHODE DES DIVISEURS	129
III-1 PRINCIPE	129
III-2 APPLICATION DE LA METHODE DES DIVISEURS SUR L'ENSEMBLE DE CANTOR	131
IV- DIMENSION DE CAPACITE ET DIMENSION DE BOITE (BOX COUNTING DIMENSION)	132
IV-1 PRINCIPE	132
IV-2 ETUDE DE QUELQUES CAS A TOPOLOGIE SIMPLE	132
IV-3 CALCUL PRATIQUE DE LA DIMENSION DE CAPACITE: CAS DE LA COURBE DE KOCH	133
IV-4 CALCUL DE LA DIMENSION DE BOITE DANS UN PROCESSUS D'ITERATION	135
V- LA DIMENSION DE HAUSDORFF	136
V-1 MESURE DE HAUSDORFF	136
V-2 DIMENSION DE HAUSDORFF	137
V-3 UN EXEMPLE D'ILLUSTRATION DE LA DIMENSION DE HAUSDORFF	139
VI- DIMENSION PONCTUELLE	139
VII- FONCTION TEMPS DE SEJOUR – CARACTERISATION D'UN ATTRACTEUR PAR UNE MESURE	141
VII-1 DENSITE NATURELLE INVARIANTE ET TEMPS DE SEJOUR	141
VII-2 ESTIMATION DE LA DENSITE AU COURS D'UN PROCESSUS ITERATIF	141
VIII- MESURE ET SPECTRE DE DIMENSION	143
IX- DETERMINATION PRATIQUE DE LA DIMENSION GENERALISEE D_q	144
X- DIMENSION D'INFORMATION	144
XI-1 DIMENSION DE CORRELATION	145
XI-1 INTEGRALE DE CORRELATION	145
XI-2 DIMENSION DE CORRELATION D_2	146
XI-3 CALCUL DE LA DIMENSION DE CORRELATION SUR UN ATTRACTEUR : METHODE DE GRASBERGER-PROACCIA	147

CHAPITRE VII

LA METHODE NEWTON ENTRE CHAOS ET FRACTALITE

II- UNE PREMIERE DEFINITION DE LA METHODE DE NEWTON- RAPHSON	150
II- CONVERGENCE QUADRATIQUE DE LA METHODE DE NEWTON	151
III- EXTENSION DE LA METHODE DE NEWTON – RAPHSON AU PLAN COMPLEXE	152
IV- LES ENSEMBLES DE JULIA ELARGIS AUX FRACTIONS RATIONNELLES	153
V- LA TRANSFORMATION BILINEAIRE DE MÖBIUS	154
VI- METHODE DE NEWTON ET TRANSFORMATION BILINEAIRE	156
VII- BASSINS D'ATTRACTION ET ENSEMBLES DE JULIA POUR QUELQUES APPLICATIONS DE LA METHODE DE NEWTON	158
VII-1 LA METHODE DE NEWTON POUR $z^2 - 1 = 0$	158
VII-2 LA METHODE DE NEWTON POUR $z^3 - 1 = 0$	159
VII-3 LA METHODE DE NEWTON POUR L'EQUATION $z^4 - 1 = 0$	160
VII-4 LA METHODE DE NEWTON POUR UNE FORME QUELCONQUE DE L'EQUATION $f(z) = 0$	161
VII-4-1 LA METHODE DE NEWTON POUR L'EQUATION $z^4 + z = 0$	161
VII-4-2 LA METHODE DE NEWTON POUR L'EQUATION $z^4 + z + 1 = 0$	162

CHAPITRE VIII

UN PROCESSUS STOCHASTIQUE FRACTAL LE MOUVEMENT BROWNIEN

LES PROCESSUS STOCHASTIQUES	
I-LE MOUVEMENT BROWNIEN : UN PROCESSUS FRACTAL	165
I-1 PROCEDURE DE SIMULATION D'UN MOUVEMENT BROWNIEN MULTIPARTICULAIRE	166
I-2 SIMULATION DU CHEMINEMENT ALEATOIRE	166
II- ANALYSE ET SIMULATION D'UN MOUVEMENT BROWNIEN STANDARD	166
II-1 PARAMETRES D'IDENTIFICATION D'UN MOUVEMENT BROWNIEN	166
II-2 UNE TECHNIQUE DE SIMULATION DU MOUVEMENT BROWNIEN	167
III- LE MOUVEMENT BROWNIEN STANDARD: UN PROCESSUS FRACTAL	169
III-1 ANALYSE PAR TRANSFORMATION EN ONDETTES D'UN PROCESSUS BROWNIEN	169
III-2 ANALYSE STATISTQUE ET SPECTRALE DU MOUVEMENT BROWNIEN	171
IV- LE MOUVEMENT BROWNIEN: UN PROCESSUS AUTO – SIMILAIRE STATISTIQUE	173
IV-1 L'AUTO – SIMILARITE STATISTIQUE	173
IV-2 CRITERE FONDAMENTAL DE L'AUTO – SIMILARITE	174
V- LE MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE (MBF)	174
VI- LE MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE AUTO – SIMILAIRE	175
VII- LE MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE GENERALISE	178
VIII- SPECTRE DE PUISSANCE ET STRUCTURE DE CORRELATION D'UN MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE	178
IX- ANALYSE DE CARACTERISTIQUES DE PERSISTANCE DU MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE	179
X- DIMENSION FRACTALE D'UN MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE	180
XI- LA DIMENSION D'ECHELLE DU MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE FRACTAL	181
XII- MOUVEMENT BROWNIEN ET PROCESSUS STOCHASTIQUE EN $1/f$	182
XII-1 LA PRIMAUTE DES LOIS DE PUISSANCE DANS LES PROCESSUS STOCHASTIQUES	182
XII-2 LES PROCESSUS STOCHASTIQUES DE LOI DE PUISSANCE EN $1/f$	183
XIII- LE MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE : UN PROCESSUS FRACTAL EN $1/f$	185
XIV- LES SISMOGRAMMES : DES PROCESSUS EN $1/f$	187

CHAPITRE IX

ELABORATION D'UN OPERATEUR CONVOLUTIF DE DERIVATION FRACTIONNAIRE DERIVATION FRACTIONNAIRE ET FRACTALITE

I- INTRODUCTION	194
II- LE CALCUL FRACTIONNAIRE	194
II-1 UN APERCU PRAGMATIQUE DE LA DERIVATION FRACTIONNAIRE	194
II-2 QUELQUES REPERES SUR LE L'HISTORIQUE DU CALCUL FRACTIONNAIRE	196
III- DE LA DERIVATION D'ORDRE ENTIER n A LA DERIVATION FRACTIONNAIRE	197
III-1 POSITION DU PROBLEME	197

III-2 CONSTRUCTION DE L'OPERATEUR DE DERIVATION FRACTIONNAIRE $D^\alpha(t)$	198
III-3 QUELQUES PROPRIETES VERIFIES PAR L'OPERATEUR $G_\alpha(t)$	198
III-3-1 PRODUIT DE CONVOLUTION DE DEUX OPERATEURS	198
III-3-2 L'OPERATEUR $G_\alpha(t)$ POUR QUELQUES VALEURS DE α	198
IV- FINALISATION DE LA CONSTRUCTION DE L'OPERATEUR DE DERIVATION FRACTIONNAIRE	199
V- QUELQUES PROPRIETES DE L'OPERATEUR DE DERIVATION FRACTIONNAIRE $D^\alpha[f(t)]$	202
V-1 DERIVEE FRACTIONNAIRE D'ORDRE ZERO	202
V-2 DERIVATION FRACTIONNAIRE SIMULTANEE	202
VI- L'INTEGRATION D'ORDRE FRACTIONNAIRE	203
VII- IMPLEMENTATION DE LA PROCEDURE DE LA DERIVATION FRACTIONNAIRE	203
VII-1 LA DERIVATION FRACTIONNAIRE COMME UNE GENERALISATION DES DIFFERENCES FINIES	203
VII-1-1 DIFFERENCES FINIES AU PREMIER ORDRE	203
VII-1-2 DIFFERENCES FINIES AU DEUXIEME ORDRE	204
VII-2 DIFFERENCES FINIES GENERALISEES	205
VIII- PRINCIPE ALGORITHMIQUE DE CALCUL DE LA DERIVEE FRACTIONNAIRE ET REPRESENTATION GRAPHIQUE	206
IX- CARACTERISATION DES PHENOMENES COMPLEXES PAR APPLICATION DE LA DERIVATION FRACTIONNAIRE - CAS DU PHENOMENE DE DIFFUSION	208
X- LA DERIVATION FRACTIONNAIRE DANS L'ANALYSE DES COURBES IRREGULIERES (COURBES PATHOLOGIQUES)	210
XI- DES COURBES IRREGULIERES AUX COURES FRACTALES	211
XII- SERIES LACUNAIRES	212
XIII- LA DERIVATION FRACTIONNAIRE DANS LE CONTEXTE DES COURBES IRREGULIERES- APPLICATION SUR LA COURBE DE WEIERSTRASS	214
XIV- EXPOSANT DE HÖLDER ET DERIVATION FRACTIONNAIRE	215
XV- LA DERIVATION FRACTIONNAIRE LOCALE	216
XV-1 DEFINITION DE LA DERIVEE FRACTIONNAIRE LOCALE	217
XV-2 UNE INTERPRETATION DE LA DERIVEE FRACTIONNAIRE LOCALE	217
XVI- CALCUL DE LA DERIVEE FRACTIONNAIRE ET DE LA DERIVEE FRACTIONNAIRE LOCALE SUR UNE FORME DE LA FONCTION DE WEIERSTRASS	217

CHAOS ET FRACTALS EN GEOPHYSIQUE

CHAPITRE X

PARTIE I

UN PROCESSUS STOCHASTIQUE FRACTAL : LA PERCOLATION

I- LE FORMALISME PROBABILISTE DE LA PERCOLATION	222
II- CONCEPTION DU MODELE MATHEMATIQUE DE LA PERCOLATION	222
III- VARIATIONS DE LA FONCTION DE PERCOLATION – CAS CRITIQUE	223
IV- UN MODELE DE LOI DE PUISSANCE DANS LE MODELE DE PERCOLATION	223
V- MODELE MATHEMATIQUE D'APPROXIMATION DE LA FONCTION DE PERCOLATION	224
VI- SIMULATION DE PHENOMENES DE PERCOLATION PAR SITE EN FONCTION DE LA PROBABILITE CRITIQUE	225
VII- SIMULATION DE PHENOMENES DE PERCOLATION PAR LES AMAS	226

CHAPITRE X

PARTIE II

MODELISATION FRACTALE DE LA POROSITE

I-LE PARAMETRE PETROPHYSIQUE DE POROSITE.....	229
II- ANALYSE FRACTALE ET STRUCTURES GEOLOGIQUES	229
III-CARACTERISATION FRACTALE D'UN MILIEU PHYSIQUE	229
IV- LE CHOIX DES MODELES FRACTALS DU SOL	230
IV-1 UN MODELE FRACTAL BIDIMENSIONNEL SIMPLE D'UN MILIEU POREUX:	
LE TAPIS DE SIERPINSKI	230
IV-2 UNE PREMIERE APPROCHE D'UN MILIEU POREUX REEL : LE MODELE ALEATOIRE.....	232
IV-3 MODELE ALEATOIRE HOMOGENE DU TAPIS DE SIERPINSKI	232
IV-4 MODELE ALEATOIRE NON HOMOGENE DU TAPIS DE SIERPINSKI	234
V- UN MODELE FRACTAL TRIDIMENSIONNEL SIMPLE D'UN MILIEU POREUX: L'EPONGE DE MENGER.....	234
VI- SIMULATION D'UN MILIEU POREUX- TYPE EPONGE DE MENGER.....	236
VII- MODELE ALEATOIRE HOMOGENE DE L'EPONGE DE MENGER.....	237
VIII- MODELE ALEATOIRE NON HOMOGENE DE 'EPONGE DE MENGER.....	238
IX- A LA RECHERCHE D'UN MODELE MATHEMATIQUE UNIFIE D'UN MODELE DE MILIEU POREUX... ..	238
IX-1 APPROCHE DE PFIEFER (1983) ET DE FRIESEN & MAKULA (1987).....	239
IX-2 APPROCHE DE RIEU & ESPESITO (1991).....	239
X- LE MODELE DE MILIEU POREUX A TROIS PHASES: PORES-SOLIDES-FRACTALS (PSF).....	242
XI- DETECTION DE LOIS DE PUISSANCE DANS LE MODELE PSF.....	243
XII- LE COMPTAGE D'ELEMENTS DANS UN MODELE PSF.....	244
XIII- ESTIMATION DE LA POROSITE DANS UN MODELE PSF.....	245
CONCLUSION GENERALE	247
ANNEXES.....	251
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	258

TABLE DES FIGURES

FIGURES	PAGES
I-1 comportement stable des trajectoires.....	4
I-2 comportement chaotique des trajectoires.....	4
II-1 espace des phases – flots - orbites d'un processus dynamique.....	8
II-2 attracteur et bassin d'attraction.....	8
II-3 trajectoires de phase et attracteur dans le cas d'un oscillateur amorti.....	9
II-4 trajectoire de phase et section de Poincaré.....	11
II-5 un exemple de section de Poincaré.....	11
III-1 trajectoire périodique dans un espace de phase de dimension supérieure à deux.....	21
III-2 attracteur étrange de Lorenz et imprédictibilité du comportement des trajectoires de phase.....	22
III-3 une forme de l'attracteur de Lorenz.....	22
III-4 l'attracteur de Lorenz: double effet d'étirement et de repliement des trajectoires.....	23
III-5 comportement des trajectoires dans la partie en médaillon de la fig. III-3...	23
III-6 sensibilité des trajectoires aux conditions initiales.....	24
III-7 assortiment de trajectoires réelles et de trajectoires "fantômes".....	24
III-8 attracteur de Hénon ($a = 1.4$, $b = 0.3$, $N = 5000$ points, $X_0 = Y_0 = 0$) accompagné de trois agrandissements d'une même zone (fenêtres colorées en gris).....	25
III-9 un oscillateur pendulaire chaotique.....	27
III-10 la fonction logistique pour $\lambda = 3.8$	29
III-11 variation du paramètre de contrôle λ_n en fonction du temps.....	30
III-12 attracteur de Hénon $a = 1.4$ et $b = 0.3$	33
III-13 signal à trois composantes sinusoïdales (10, 25, 40 Hz).....	36
III-14 signal à trois composantes sinusoïdales incommensurables ($40, 25\sqrt{2}, 10\sqrt{3}$ Hz) et densité spectrale associée.....	39
III-15 un exemple de cycles limites attracteurs dans un processus dynamique...	40
III-16 direction courte θ_1 et direction longue θ_2 d'évolution des trajectoires sur le tore bidimensionnel.....	41
III-17 distribution des trajectoires sur le tore.....	42
III-18 évolution des trajectoires de révolution longue (RL) et des trajectoires révolution courte (RC).....	42
III-19 modèle de Lorenz: si $0 \leq r \leq 1$ (ici $r = 0.5$), $x = y = z = 0$ est un point d'équilibre stable (a) $z = f(x)$ (b) $z = f(y)$	43
III-20 modèle de Lorenz: influence des conditions initiales sur l'évolution des solutions.....	45
III-21 (a) modèle différentiel de Lorenz simulé pour $\sigma = 4.645$, $b = 8/3$ et $r = 28$ (b) $z = f(x)$ (c) $z = f(y)$ - mise en évidence de deux points d'équilibre stable.....	46

III-22	(a) modèle différentiel de Lorenz simulé pour $\sigma = 6.17$, $b = 8/3$ et $r = 28$ (b) $z = f(x)$ (c) $z = f(y)$: mise en évidence de deux points d'équilibre et d'un attracteur étrange.....	46
III-23	(a) modèle différentiel de Lorenz simulé pour $\sigma = 8.235$, $b = 8/3$ et $r = 28$ (b) $z = f(x)$ (c) $z = f(y)$: mise en évidence d'un ensemble attractif.....	46
III-24	modèle différentiel de Lorenz simulé pour $\sigma = 10$, $b = 8/3$ (a) $z = f(x)$ pour $r = 24.70$ (b) $z = f(x)$ pour $r = 24.75$	47
III-25	modèle différentiel de Lorenz simulé pour $\sigma = 10$, $b = 8/3$ (a) $z = f(y)$ pour $r = 24.70$ (b) $z = f(y)$ pour $r = 24.75$	47
III-26	modèle différentiel de Lorenz simulé pour $\sigma = 10$, $b = 8/3$ (a) $z = f(x)$ (b) $z = f(y)$ pour $r = 100$	47
III-27	modèle différentiel de Lorenz simulé pour $\sigma = 10$, $b = 8/3$ (a) $z = f(x)$ (b) $z = f(y)$ pour $r = 150$	48
III-28	modèle différentiel de Lorenz simulé pour $\sigma = 10$, $b = 8/3$ (a) $z = f(x)$ (b) $z = f(y)$ pour $r = 250$	48
III-29	modèle différentiel de Lorenz $\sigma = 10$ $b = 8/3$ et $r = 28$ graphes des fonctions $y(x)$, $z(y)$ et de $z(x)$	49
III-30	modèle différentiel de Lorenz $\sigma = 10$ $b = 8/3$ et $r = 28$ graphes des solutions temporelles $x(t)$, $y(t)$ et de $z(t)$	49
IV-1	la fonction logistique pour quelques valeurs du paramètre de contrôle a	53
IV-2	itérés d'ordre deux de la fonction logistique (même valeur du paramètre a).....	54
IV-3	itérés d'ordre quatre de la fonction logistique (même valeur du paramètre a).....	54
IV-4	point fixe de la fonction logistique $a = 0.8$ et $U_0 = 0.3$	56
IV-5	orbite U_n en fonction de n	56
IV-6	la suite logistique : $a = 2$ et $U_0 = 0.1$	56
IV-7	la suite logistique pour $a = 2.5$ et $U_0 = 0.3$	57
IV-8	la suite logistique pour $a = 3$ et $U_0 = 0.3$	57
IV-9	la suite logistique pour $a = 3.2$ et $U_0 = 0.3$	58
IV-10	points fixes et orbites de la suite logistique pour $a = 3.9$ et $U_0 = 0.3$	58
IV-11	évolution de la suite logistique vers un comportement chaotique pour $a = 4$	59
IV-12	points fixes de l'itéré f^2 de la fonction logistique : $a = 2, 2.5, 3, 3.2, 3.5, 3.56$	60
IV-13	synthèse du diagramme de bifurcations de la fonction logistique.....	61
IV-14	diagramme global pour $a = 1 : 0.0015 : 4$	62
IV-15	agrandissement de la zone du diagramme des bifurcations correspondant aux paramètres $a = 3.5 : 0.0003 : 4$	63
IV-16	sensibilité des orbites de la fonction logistique aux conditions initiales $U_0 = 0.30000$ (couleur rouge) et $U_1 = 0.300001$ (couleur bleue) paramètre $a = 3.9$	63

IV-17	identification d'une première fenêtre de stabilité contenant un cycle d'ordre 7 pour $a \in [3.7018, 3.7028]$	64
IV-18	identification d'une seconde fenêtre de stabilité contenant un cycle d'ordre 5 pour $a \in [3.738, 3.745]$	65
IV-19	identification d'une fenêtre de stabilité contenant un cycle d'ordre 3 pour $a \in [3.825, 3.858]$	65
IV-20	estimation de l'écart entre deux trajectoires issues de conditions initiales très proches : $(U_0 = 0.30000; U_1 = 0.30001)$ pour $a = 3.9$	66
IV-21	corrélation diagramme de bifurcation / spectre de Lyapunov.....	69
IV-22	fractal de Lyapunov correspondant à la séquence <i>abab</i>	71
IV-23	fractal de Lyapunov correspondant à la séquence <i>abba</i>	71
IV-24	"zoom" sur le fractal de la figure fig. IV-23 pour $3 < a < 4$ et $3 < b < 4$	72
IV-25	fractal de Lyapunov correspondant à la séquence <i>[bbaaaab]</i>	72
IV-26	la fonction densité naturelle invariante $\rho(X)$	73
IV-27	décomposition de la fonction densité naturelle invariante $\rho(X)$ sur les intervalles $]0, 0.5]$ et $[0.5, 1[$	73
IV-28	modèle galactique de Hénon pour $\varphi = 76^0$	76
IV-29	modèle galactique de Hénon pour $\varphi = 77^0$	76
IV-30	modèle galactique de Hénon pour $\varphi = 91^0$	77
IV-31	modèle galactique de Hénon pour $\varphi = 79^0$	77
IV-32	simulation de quelques modèles de galaxies en fonction des paramètres α, ε et μ	79
V-1	modèle de Gunowski-Mira.....	83
V-2	la self – similarité dans un fractal polymère.....	84
V-3	extraction d'une self – similarité par "dissection".....	84
V-4	une self – similarité par conception.....	85
V-5	représentation en termes de suite récurrente complexe de la fonction $f(z) = z^2 + 0.5 - 0.5j$ (a) configuration pleine (b) frontière fractale associée.....	88
V-6	un bassin d'attraction est un ensemble ouvert.....	88
V-7	bassin d'attraction du point fixe $z = 0$ de $f(z) = z^2$	89
V-8	bassin d'attraction (plein) de la fonction analytique $f(z) = z^2 - 1$ et 2 – cycle super- attracteur $(-1, 0)$ de la composée $f^2(z)$	90
V-9	structuration d'un ensemble de Julia.....	92
V-10	modèle dendritique de l'ensemble de Julia $z_{n+1} = z_n^2 - 0.15652 + 1.03225j$	93
V-11	modèle d'ensemble de Julia "rempli" (a) et de contour J_c (b).....	94
V-12	symétrie des ensembles de Julia J_c et $J_{\bar{c}}$	94
V-13	ensemble de Julia correspondant à $f(z) = z^2 + c$ (a) et à $f^2(z)$ (b).....	97
V-14	ensemble de Mandelbrot M	98
V-15	l'ensemble de Mandelbrot est contenu dans un disque de rayon 2 et centré à l'origine.....	99
V-16	représentation spatiale de l'ensemble de Mandelbrot M	99

V-17	cardioïde associée au corps principal de l'ensemble de Mandelbrot.....	100
V-18	cardioïde de l'ensemble de Mandelbrot M (a) et extraction de son contour (b).....	100
V-19	bourgeon principal de l'ensemble de Mandelbrot (a) contenu dans un disque $[(-1,0),1/4]$ et extraction du contour.....	101
V-20	distribution des p -cycles attracteurs de la fonction analytique $f_c(z)$ sur l'ensemble de Mandelbrot.....	102
V-21	structure d'une ramification (a) $-0.18 \leq \text{Re}(c) \leq -0.1$ et $0.9 \leq \text{Im}(c) \leq 1.07$ et extraction de son contour.....	103
V-22	ensemble de Julia pour c sur un filament dendritique.....	103
V-23	bourgeon extrême de l'ensemble de Mandelbrot (a) et son contour (b).....	104
V-24	ensembles de Julia pour c situé hors de l'ensemble de Mandelbrot.....	104
V-25	ensembles de Julia pour c situé à l'intérieur de l'ensemble de Mandelbrot.....	105
V-26	les ensembles de Julia indexés par l'ensemble de Mandelbrot.....	106
V-27	quelques ensembles de Julia relativement au choix du complexe c	107
V-28	ensemble de Mandelbrot correspondant à $f_c(z) = z^4 + c$	108
V-29	ensemble de Julia correspondant à une forme quelconque de la fonction source $f_c(z)$	108
V-30	vingt (20) premiers points de "balayage" de l'ensemble de Mandelbrot....	110
V-31	douze (12) points de "balayage" de l'ensemble de Mandelbrot.....	111
V-32	modélisation fractale d'un matériau poreux.....	116
V-33	modélisation fractale d'une chaîne polymère.....	116
V-34	génération d'une image fractale (élément de fougère) par la méthode IFS.....	119
V-35	évolution d'une construction fractale en fonction du nombre d'itérations....	120
V-36	maillage de degré deux.....	120
V-37	une structure arborescente.....	121
V-38	principe géométrique assurant la fractalité (1 ^{er} cas).....	122
V-39	principe géométrique assurant la fractalité (2 ^{ème} cas).....	123
V-40	esquisse d'un paysage issu de constructions fractales.....	125
VI-1	principe de la méthode des diviseurs dans le calcul de la dimension fractale.....	129
VI-2	méthode graphique dans détermination de la dimension fractale.....	130
VI-3	étapes jumelées dans la construction de l'ensemble de Cantor.....	131
VI-4	détermination graphique de la dimension fractal de l'ensemble de Cantor.....	132
VI-5	la dimension de capacité de quelques figures simples: (a) un point (b) une courbe (c) une courbe fermée.....	133
VI-6	le modèle générateur de la courbe de Van - Koch.....	133
VI-7	distribution des points $[x = \log(1/\varepsilon), y = \log N(\varepsilon)]$	134
VI-8	estimation de la dimension de capacité à partir des pentes des droites de régression (a) $D_c = 1.3009$ (b) $D_c = 1.2574$	134
VI-9	une image fractale par niveaux d'itération.....	135
VI-10	influence de la taille des boîtes de recouvrement sur le calcul de la dimension fractale.....	136

VI-11	mesure et dimension de Hausdorff.....	138
VI-12	Image de la boule $B(X, \varepsilon)$ par l'application M	140
VII-1	méthode de Newton appliquée sur la fonction $f(x) = x^3 - x$ avec $x_0 = 1.8$	151
VII-2	méthode de Newton appliquée sur la fonction $f(x) = x^3 - x$ avec $x_0 = 0.53$	152
VII-3	racine obtenue par la méthode de Newton sur la fonction $f(x) = x^3 - x$ pour $x_0 \in [0.4, 0.6]$	152
VII-4	procédure de changement de coordonnées pour la simplification de la forme quadratique $q(z) = az^2 + 2bz + d$	154
VII-5	image ($\text{Re}(\omega) > 0$) du disque $ z < 1$ par la transformation bilinéaire $\omega = \varphi(z) = (1+z)/(1-z)$	155
VII-6	image ($\text{Im}(z) > 0$) (b) du disque $ z < 1$ par la transformation bilinéaire $\omega = \varphi(z) = j.(1-z)/(1+z)$	155
VII-7	image de l'axe réel $\text{Re}(z)$ (axe des abscisses) par la transformation bilinéaire $\omega = \varphi(z) = (z+j)/(z-j)$	156
VII-8	correspondance des bassins d'attraction des plans des complexes ω et z	158
VII-9	ensemble de Julia et bassins d'attraction de l'équation $z^2 - 1$	159
VII-10	la méthode de Newton appliquée sur l'équation $z^3 - 1 = 0$ (a) bassin d'attraction et structure des ensembles de Julia (b) leur représentation spatiale.....	159
VII-11	méthode de Newton pour l'équation $z^3 - 1 = 0$ extraction des contours des bassins d'attraction et des ensembles de Julia.....	160
VII-12	méthode de Newton appliquée sur l'équation $z^4 - 1 = 0$ bassin d'attraction des racines et ensembles de Julia.....	160
VII-13	méthode de Newton appliquée sur l'équation $z^4 - 1 = 0$ structure fractale des ensembles de Julia.....	160
VII-14	méthode de Newton appliquée sur l'équation $z^4 - 1 = 0$ distribution spatiale des bassins d'attraction des racines et des ensembles de Julia associés.....	161
VII-15	méthode de Newton appliquée sur l'équation $z^4 + z = 0$ extraction des contours des bassins d'attraction et des ensembles de Julia (1 ^{ère} vue).....	161
VII-16	méthode de Newton appliquée sur l'équation $z^4 + z = 0$ extraction des contours des bassins d'attraction et des ensembles de Julia (2 ^{ème} vue).....	162
VII-17	méthode de Newton appliquée sur l'équation $z^4 + z + 1 = 0$ bassin d'attraction des racines et des ensembles de Julia associés.....	162
VII-18	méthode de Newton appliquée sur l'équation $z^4 + z + 1 = 0$ extraction des contours et structure des bassins d'attraction des racines des ensembles de Julia correspondants.....	163

VIII-1	simulation (animée) d'un mouvement Brownien de particules.....	165
VIII-2	un mouvement Brownien standard: le cheminement aléatoire (ou "marche d'ivrogne").....	166
VIII-3	procédure algorithmique de simulation du mouvement Brownien.....	169
VIII-4	principe de l'analyse par la transformée en ondelette.....	170
VIII-5	transformée en ondelette d'un mouvement Brownien standard (ondelette analysante type "chapeau mexicain").....	171
VIII-6	une trajectoire Brownienne.....	174
VIII-7	trajectoires Browniennes fractionnaires en fonction du coefficient de Hurst.....	177
VIII-8	représentation comparative des spectres d'amplitudes (en $1/f^\alpha$) (1) bruit blanc ($\alpha = 0$) (2) bruit rose ($\alpha = 1$) (3) bruit Brownien ($\alpha = 2$) (4) bruit bleu ($\alpha = -1$) (5) bruit violet ($\alpha = -2$)	183
VIII-9	trois signaux colorés de spectre en $1/f$	184
VIII-10	spectre et transformée en ondelette d'un processus Brownien fractionnaire.....	186
VIII-11	génération d'un signal Brownien fractionnaire (a) spectre d'amplitude (b) évolution du spectre d'amplitude en $1/f$ et droite de régression linéaire - (c) transformée en ondelette du processus Brownien	187
VIII-12	les différents types d'ondes sismiques.....	188
VIII-13	structure d'un sismogramme.....	188
VIII-14	séisme de Loma-Prieta (17 Octobre 1989) – accélérations: (a) Est-Ouest (b) Nord-Sud (c) verticale.....	189
VIII-15	structure de la zone de "zoom" réalisée sur les accélérogrammes intervalle de temps considéré $[8s - 15s]$ - analyse du sismogramme relatif à l'accélération verticale.....	190
VIII-16	analyse d'un accélérogramme en accélération verticale (a) représentation temps – amplitude (b) spectre d'amplitude (c) représentation du spectre d'amplitude en échelle bilogarithmique (d) transformée en ondelette (ondelette analysante: ondelette gaussienne) (e) représentation du contour de (d).....	191
VIII-17	transformée en ondelette de l'accélérogramme vertical- analyse locale par une ondelette de Daubechies (db0).....	191
VIII-18	représentation temps- fréquence de Wigner-Ville de l'accélérogramme vertical.....	192
IX-1	les six (6) premières dérivées fractionnaires de la fonction $s(t) = \cos 2t$	195
IX-2	distribution de l'opérateur de dérivation fractionnaire $G_\alpha(t)$ pour $\alpha = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5$	200
IX-3	algorithme de calcul de la dérivée d'une fonction par la méthode spectrale.....	206
IX-4	l'impulsion de Ricker (a) et son spectre d'amplitude (b).....	207
IX-5	les neufs premières dérivées fractionnaires de l'impulsion de Ricker $\alpha = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2$	207
IX-6	concaténation des graphes des neuf premières dérivées fractionnaires de l'impulsion de Ricker (fig. IX-5).....	208
IX-7	la fonction de Green associée à l'équation de propagation de la chaleur $\gamma = 1$	209

IX-8	un type de courbe irrégulière (cardioïde) $a = 0.5$ et $b = 3$	211
IX-9	courbe irrégulier de Cellerier $a = 1/3$ et $b = 3$	211
IX-10	série lacunaire pour $N = 10$ (a) et $N = 100$ (b).....	213
IX-11	modèle de série lacunaire par les fonctions trigonométriques $a = 0.7$ et $b = 0.2$	213
IX-12	modèle de fonction de Weierstrass obtenue pour $a = 0.9$ et $b = 7$	214
IX-13	un exemple de fonction de Weierstrass généralisée.....	214
IX-14	effet d'agrandissement sur la courbe de Weierstrass dans les intervalles $[0.2, 0.6]$ (a) et $[0.4, 0.65]$ (b).....	215
IX-15	exemple de fonction ($f(t) = t^{3/2} \sin 1/t$) d'exposant de hölder $\alpha > 1$	216
IX-16	dimension fractale et irrégularités de la fonction de Weierstrass $W_\lambda(t)$	218
IX-17	influence du paramètre λ sur la régularité de la fonction de Weierstrass.....	219
X-I-1	une grille de percolation bidimensionnelle.....	222
X-I-2	fonction de percolation et probabilité critique.....	223
X-I-3	seuil critique de percolation.....	225
X-I-4	deux cas d'absence de percolation- probabilités de percolation strictement inférieures à la probabilité critique.....	225
X-I-5	le phénomène de percolation au voisinage de la probabilité critique (a) absence de percolation (b) percolation effective.....	226
X-I-6	un exemple de percolation en phase de généralisation.....	226
X-I-7	simulation de percolation par les amas.....	227
X-II-1	un modèle de milieu poreux bidimensionnel : le tapis de Sierpinski.....	231
X-II-2	modèle de tapis de Sierpinski : (a) générateur $[1001, 0110, 0110, 1001]$ (b) après quatre itérations de construction.....	232
X-II-3	influence du facteur échelle et de la probabilité de pore sur la dimension fractale dans un modèle poreux bidimensionnel homogène.....	233
X-II-4	influence du facteur échelle et de la probabilité de pore sur la dimension fractale dans un modèle poreux bidimensionnel non homogène.....	234
X-II-5	principe de construction d'un modèle poreux tridimensionnel type "éponge" de Menger.....	235
X-II-6	modèle standard de "l'éponge" de Menger après deux itérations.....	236
X-II-7	un modèle non standard de "l'éponge" de Menger répondant au code binaire $[101, 101, 101, 101, 000, 101, 101, 101, 101]$ pour deux itérations.....	236
X-II-8	influence du facteur échelle et de la probabilité de pore sur la dimension fractale dans un modèle poreux tridimensionnel aléatoire homogène.....	237
X-II-9	influence du facteur échelle et de la probabilité de pore sur la dimension fractale dans un modèle poreux tridimensionnel aléatoire non homogène.....	238
X-II-10	un exemple de milieu poreux type PSF.....	242
X-II-11	seconde itération dans la construction du modèle PSF issu du générateur de la fonction (X-II-10).....	244

LISTE DES TABLEAUX

TABLEAUX	PAGES
TABLEAU III-1 niveaux de prédictibilité en fonction du temps et de la nature des systèmes dynamiques.....	26
TABLEAU III-2 groupe de conditions initiales testées sur le modèle de Lorenz	45
TABLEAU IV-1 stabilité des points fixes de l'itérateur quadratique.....	55
TABLEAU IV-2 quelques estimations du coefficient de Lyapunov pour des valeurs du paramètre de contrôle a	68
TABLEAU VI-1 méthode des diviseurs appliquée à l'ensemble fractal de Cantor : estimation de $\log(\varepsilon)$ et de $\log[L(\varepsilon)]$	131
TABLEAU VI-2 tableaux comparatifs du nombre de boîtes de recouvrement en fonction du niveau de construction dans la courbe de Van-Koch.....	133

CHAPITRE I

*Ô grand Dieu, donne moi que j'étale en mes vers
Les plus rares beautés de cet Univers
Donne moi qu'en son front ta puissance je lise
Et qu'en enseignant autrui moi-même je m'instruise*

Guillaume du Bartas (1544-1590)

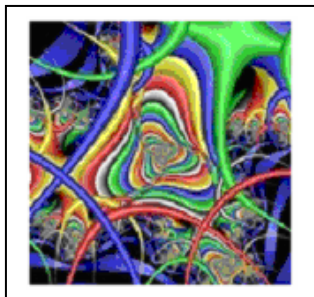
UNE PHILOSOPHIE DU CHAOS

DE LA SYNERGIE ORDRE - DESORDRE A L'INTEGRATION HASARD- DETERMINISME

UNE PHILOSOPHIE DU CHAOS

DE LA SYNERGIE ORDRE - DESORDRE A L'INTEGRATION HASARD- DETERMINISME

I- STRUCTURES COMPLEXES ET DYNAMIQUE DE COMPLEXIFICATION



Sur un plan chronologique, le concept de chaos déterministe trouve son origine d'abord dans l'interprétation des phénomènes de turbulence puis sur le plan mathématique, dans l'analyse de systèmes différentiels dits non- linéaires tel que le modèle de Lorenz. Un regain d'intérêt scientifique pour la théorie du chaos et l'analyse fractale est observé aujourd'hui à la lumière des développements mathématiques consacrés et des approches consenties pour leur modélisation.

Le chaos constitue en lui-même un bouleversement dans le traitement des systèmes dynamiques dits complexes. Parmi les caractéristiques premières de ces derniers, citons la propriété de sensibilité aux conditions initiales matérialisée par une divergence "exponentielle" , au cours du temps, des trajectoires même issues de conditions initiales très proches. Sur le plan géométrique, ces trajectoires ont tendance à se "réfugier" dans des zones précises de l'espace des phases (de dimension finie) pour y édifier, par un processus répété un nombre infini de fois , d'étirements et de repliements conférant ainsi à cet attracteur qualifié d'étrange, une configuration fractale.

Un système chaotique est contraint d'évoluer de manière "imprévisible" (critère d'imprédictibilité) dans une région bien définie de l'espace des phases. Si le système se rapporte à la modélisation d'un phénomène physique, la sensibilité aux conditions initiales montre toute la difficulté à prédire le comportement du phénomène.

Une autre condition nécessaire à l'apparition du chaos est que le système soit non linéaire conduisant donc à des approches mathématiques spécifiques et une gestion spécifique de la complexité émergente. Ainsi, il devient nécessaire de munir un système dynamique d'un ou plusieurs paramètres dits de contrôle dont les variations sont à l'origine de la transition vers la complexité. Le scénario de leurs changements discontinus définit le processus de bifurcation, c'est-à-dire le passage soudain d'un régime dynamique vers un autre, qualitativement différents. Cette transition traduit une perte de stabilité structurelle laquelle, en ses différentes étapes, permet le passage d'un état stable (ou périodique) vers une quasi-périodicité puis finalement vers le chaos. On observe alors une séquence de bifurcations sur lesquelles se grefferont des modes émergents. Les points fixes perdent peu à peu leur statut de stabilité pour donner naissance à des cycles limite. On assiste alors à une recombinaison ("accrochage") des fréquences pour asseoir un état de complexité ou de chaos. Cependant, le chaos n'est pas un état absolu et irréversible. Les systèmes dynamiques chaotiques présentent une instabilité toute relative puisque des fenêtres de stabilité apparaissent au cours du temps. Le caractère fractal de l'attracteur étrange suppose l'existence d'une certaine forme d'organisation que traduit l'auto- similarité des structures.

II- SIMULATION D'UNE TRANSITION ORDRE – CHAOS

La transition d'un état stable, périodique parfaitement maîtrisable observé par un processus dynamique décrit par une récurrence ou non vers une complexité de comportement ou chaos relève le plus souvent de fluctuations erratiques pas nécessairement dominantes de paramètres inhérents à la dynamique développée. A des échelles d'observation variées ce mode d'évolution vers la complexité obéit aux mêmes principes physiques. Nous proposons à cet effet la simulation des trajectoires empruntées par une masse mobile M évoluant dans un champ bipolaire constitué par deux masses fixes M_1 et M_2 soumise ainsi à une attraction ou une répulsion exercées par ces dernières. Dans ce cas précis, nous privilégions le cas "attractif" à même de développer des trajectoires élégantes illustrant le caractère périodique ou chaotique de l'évolution de celles-ci. Pour imposer l'un ou l'autre

de ces deux cas, les masses fixes seront munies chacune d'un coefficient "d'attraction" soit k_1 et k_2 dont les valeurs prédétermineront le cas stable ou le cas chaotique des trajectoires de la masse mobile. Par rapport au plan d'évolution des trajectoires (ici le plan de l'image) d'autres paramètres sont à pourvoir: la position initiale (x_i, y_i) et les composantes "vitesses" (V_x, V_y) de la particule mobile et les positions respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2) des masses immobiles actives.

Les forces F exercées tour à tour par les masses fixes sur la masse mobile sont de la forme

$$F = \frac{k}{d^2} \quad (I-1)$$

avec d la distance séparant la particule mobile des masses fixes, k le coefficient lié à chaque masse fixe et qui impose un état attractif s'il est négatif (cas que nous privilégions dans le contexte de notre simulation) et un état répulsif s'il est positif. Les forces F sont décomposées selon les axes du plan de l'image suivies d'une sommation pour en extraire une résultante. Cette dernière conditionnera en intensité et en direction les vitesses et partant les positions de la particule mobile donc des trajectoires.

Deux cas ont été envisagés pour la simulation :

1. le choix de deux coefficients k_1 et k_2 négatifs et égaux met en évidence des trajectoires traduisant un état stable, périodique fait de trajectoires régulières "empilées" mais sans intersection. L'ordre de visite de l'une ou l'autre des particules fixes développant ainsi une remarquable symétrie d'ensemble (Fig. I-1)

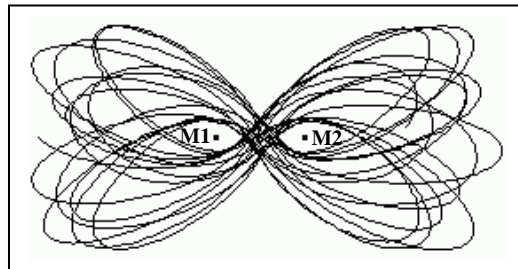


Fig. I-1 comportement stable des trajectoires

2. Dans le cas où $k_1 \neq k_2$ tout en restant négatifs pour assurer le caractère attractif de la dynamique, il se développe alors un ensemble de trajectoires à l'allure désordonnée, en fait chaotique. Les trajectoires adoptent une forme imprévisible avec une prédisposition à une divergence incontrôlée et soudaine par rapport aux particules fixes (Fig. I-2). Ceci rend leur capture relativement difficile sans l'introduction d'une séquence de contrôle dans l'exécution graphique du programme de simulation.

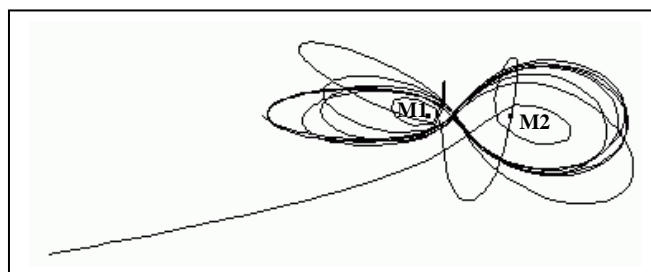


Fig. I-2 comportement chaotique des trajectoires

III- SYNERGIE ORDRE – DESORDRE DANS LE CHAOS

Dans l'imaginaire collectif, au chaos est rattachée l'idée d'imbroglio et de désordre absolu malgré la présence, le plus souvent de structures "élégantes" agrémentant les systèmes chaotiques. A l'origine

de cet aspect de complexité, se retrouvent les limites de la prédictibilité qui requiert l'accumulation d'un grand nombre d'observations dans le temps et parfois dans l'espace pour entrevoir le comportement du système.

Des hypothèses affirmant que le chaos ne peut provenir que de la complexité ont prévalu assez longtemps mais actuellement remises en cause par l'existence de systèmes déterministes enclins à un développement de comportement aléatoire virant au chaos bien que ne renfermant que peu d'éléments. Dans son expression, le chaos signifie une forme de rupture apparente avec un ordre, une stabilité et une régularité reflétés par la dégradation de la "lisibilité" du système. Pourtant et en contradiction avec l'état d'imprédictibilité, le chaos déterministe (une des formes de chaos les plus étudiées) est régi par un ensemble de règles précises et sans référence à toute évolution aléatoire. Il se pose alors, le discernement entre le parfait déterminisme et le possible aléatoire ou encore la compréhension de la cohabitation synergique ordre – désordre. Le fait est qu'en principe le futur d'un système déterministe est entièrement déterminé par son passé, cependant une imprécision dans le choix des conditions initiales est amplifiée de sorte que la prévision à court terme est plus ou moins possible alors que l'évolution à long terme ne l'est plus. La synergie ordre – désordre dans les comportements chaotiques se reflète par des structures de forme géométrique structurée, lisibles et souvent de forme élégante : les fractales.

IV- AUTO-ORGANISATION CRITIQUE ET CHAOS FAIBLE

L'auto – organisation, un des aspects de la théorie des systèmes dynamiques, a pour objet la description des interactions exclusivement internes des éléments constitutifs du système sans référence aucune aux influences externes. Quoique ouvert, un système auto-organisé est donc imperméable aux facteurs environnementaux. L'émergence de son comportement global résulte d'une synthèse ou encore d'une sommation des comportements individuels et des rapports locaux qu'entretiennent entre eux les sous – systèmes. Un système auto-organisé est dénué de hiérarchie ou centre organisateur. Ses structures fonctionnent en autarcie dans un esprit de compétition ou de synergie. Un élément donné ne peut se singulariser et prétendre à une hégémonie sur le restant de la communauté. De fait, les systèmes auto – organisés affichent stabilité et indifférence aux faibles perturbations. Ils ont la capacité de retrouver leur configuration originelle même après une grave perturbation.

Ces caractéristiques idéales d'un système auto – organisé peuvent pourtant être remises en question d'une part en présence d'une forte non linéarité et dans le cas où une faible perturbation est accompagnée de l'effondrement de cette auto – organisation. Le scénario d'une telle catastrophe peut être rattaché à une défaillance extrême de l'une des composantes du système qui voit un ou plusieurs de ses paramètres se métamorphoser en variable, donc comme fonction du temps. Il se produit alors un effet de contamination des autres structures de sorte que toute corrélation est inexistante: le système est dit alors critique. Le point critique se réfère à l'instant brutal de changement de comportement du système; de ce fait, cette dynamique s'inscrit dans la théorie du chaos déterministe mais du chaos dit faible. La différence est assez évidente: dans la première de chaos (déterministe), la sensibilité aux conditions initiales se traduit par une variation "exponentielle" de deux états issus de conditions initiales très proches. Dans le cas du chaos faible, la divergence des deux états est toujours effective mais généralement plus lente puisque obéissant à une loi de puissance. Par référence aux lois dites en $1/f$ classées dans les lois de puissance lesquelles suivent une loi fractale, les systèmes auto – organisés critiques conduiraient alors à des formes fractales. La fractalité caractérisée par une invariance d'échelle et une irrégularité des formes, est évaluée quantitativement par une dimension non entière. Les systèmes auto – organisés critiques possédant justement cette propriété de dimension fractionnaire sont une source de processus fractales. Le problème posé inversement suscite toujours un débat: la fractalité implique-t-elle nécessairement l'existence d'une loi de puissance et la présence d'un système auto – organisé critique?

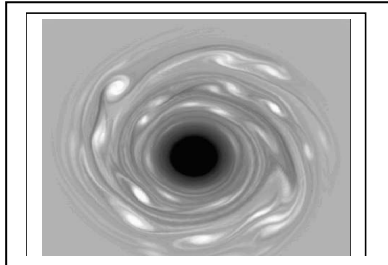
CHAPITRE II

*La pratique sans théorie est absurde
La théorie sans pratique est aveugle*

Kant

ELEMENTS DE CARACTERISATION D'UN SYSTEME DYNAMIQUE

ELEMENTS DE CARACTERISATION D'UN SYSTEME DYNAMIQUE



I- SYSTEME DYNAMIQUE DETERMINISTE

A partir de son modèle mathématique, un système dynamique est dit déterministe si toute son évolution et son passé sont univoquement définis par son état présent. Le paramètre temps t peut être dans ce cas une variable continue ou discrète. Un exemple de système dynamique pour une variable temps continue est le système de N équations différentielles autonomes de premier ordre suivant

$$\left[\frac{dX^{(i)}}{dt} \right]_{i=1,N} = [F_i\{X^{(i)}\}]_{i=1,N} \quad (II-1)$$

Sous forme vectorielle, l'expression (II-1) devient

$$\frac{dX(t)}{dt} = F[X(t)] \quad (II-2)$$

avec X un vecteur de dimension N . Nous sommes bien en présence d'un système dynamique car pour tout état initial $X(0)$, nous pouvons en principe résoudre le système d'équations (II-1) pour obtenir l'expression générale de l'état du système $X(t)$ avec $t > 0$.

I-1 ESPACE DES PHASES

L'ensemble de tous les états qui caractérisent l'évolution d'un processus dynamique définit l'espace des phases de ce processus. Cet espace des phases sera déclaré de dimension finie si est finie le nombre de paramètres nécessaires à la description de l'état du processus. Soit E l'espace des phases d'un processus dynamique et $e \in E$ un état initial quelconque. Désignons par g_t^e l'état de ce processus à l'instant t avec un état initial e . On définit ainsi l'application continue

$$g_t : ExT \rightarrow E_t \\ (e, t) \mapsto g_t^e$$

de l'espace des phases sur lui – même devant vérifier les conditions suivantes:

$$\begin{cases} g_0^e = e \\ g_{t_2}(g_{t_1}^e) = g_{t_1+t_2}^e \end{cases} \quad (II-3)$$

Concernant l'espace temps T , si $T = \mathcal{R}$ (ou \mathcal{R}^+), l'application g_t est engendrée par un système d'équations différentielles, si $T = \mathcal{N}$ ou $T = \mathcal{Z}$, cette application répond alors à une itération.

. L'application g_t associe à chaque état e , un nouvel état g_t^e

I-2 FLOT D'UN PROCESSUS

Le couple formé de l'ensemble E et du groupe à un paramètre $\{g_t\}$ d'applications de E , soit $(E, \{g_t, t \in T\})$ est appelé flot du processus. L'ensemble T désigne l'espace temps.

I-3 ORBITE (TRAJECTOIRE) D'UN FLOT

On définit l'application φ de l'ensemble des réels positifs dans l'espace des phases E

$$\varphi: T \rightarrow E$$

$$t \mapsto \varphi(t) = g_t^e \tag{II-4}$$

On appelle orbite du flot $(E, \{g_t, t \in T\})$ le sous ensemble $\varphi(T) \subseteq E$ de l'espace des phases, image de l'application (II-4) (figure II-1). Plus concrètement, il s'agit du "chemin" suivi par l'évolution du processus dynamique dans le temps.

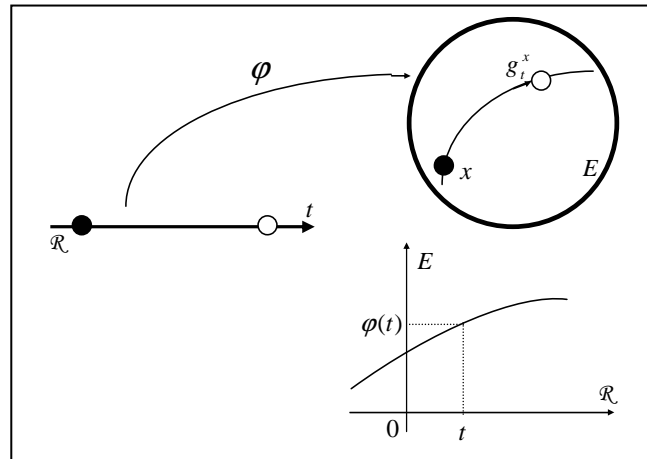


fig.II-1 espace des phases- flot – orbite d'un processus dynamique

I-4 COURBE INTEGRALE D'UN FLOT

On appelle courbe intégrale du flot $(E, \{g_t, t \in T\})$ le graphe de l'application (II-4)

I-5 ENSEMBLE LIMITE D'UN FLOT

On suppose que l'espace des phases E est muni d'une distance d . On définit l'ensemble limite pour un état e appartenant à cet espace de phase et que l'on note $w(e)$ l'ensemble suivant

$$w(e) = \{e' \in E \text{ tel que } \forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \in T^+, \exists t > t_0 \text{ tel que } d[e', g_t^e] < \varepsilon\} \tag{II-5}$$

II- BASSIN D'ATTRACTION ET ATTRACTEUR

Le bassin d'attraction noté $B(A)$ d'un ensemble A est défini comme l'ensemble des points dont l'ensemble limite est contenu dans A , excepté A lui – même

$$B(A) = \{e \in (E - A) \text{ tel que } w(e) \in A\} \tag{II-6}$$

De façon équivalente, le bassin d'attraction $B(A)$ représente l'ensemble des points dont la trajectoire qui en est originaire tend vers A pour un temps élevé. L'attracteur A n'est autre que la limite asymptotique des solutions partant de toute condition initiale prise dans le bassin d'attraction B (figure II-2). L'attracteur A peut revêtir une apparence simple, alors que le bassin d'attraction B peut avoir une forme complexe, allant de l'aspect chaotique à un comportement fractal.

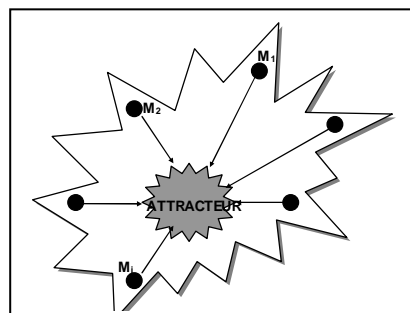


fig. II-2 attracteur et bassin d'attraction

Nous adjoignons à ces définitions, l'exemple d'un attracteur d'un système différentiel issu de la modélisation mathématique du mouvement d'un oscillateur amorti

$$\frac{dX^{(1)}}{dt} = X^{(2)} \quad (II-7)$$

$$\frac{dX^{(2)}}{dt} = -\gamma X^{(2)} - \omega^2 X^{(1)}$$

le paramètre γ désignant le coefficient d'amortissement et ω la pulsation. Trois valeurs du coefficient γ (nulle, positive, négative) ont été testées pour donner les trajectoires portées sur la figure II-3

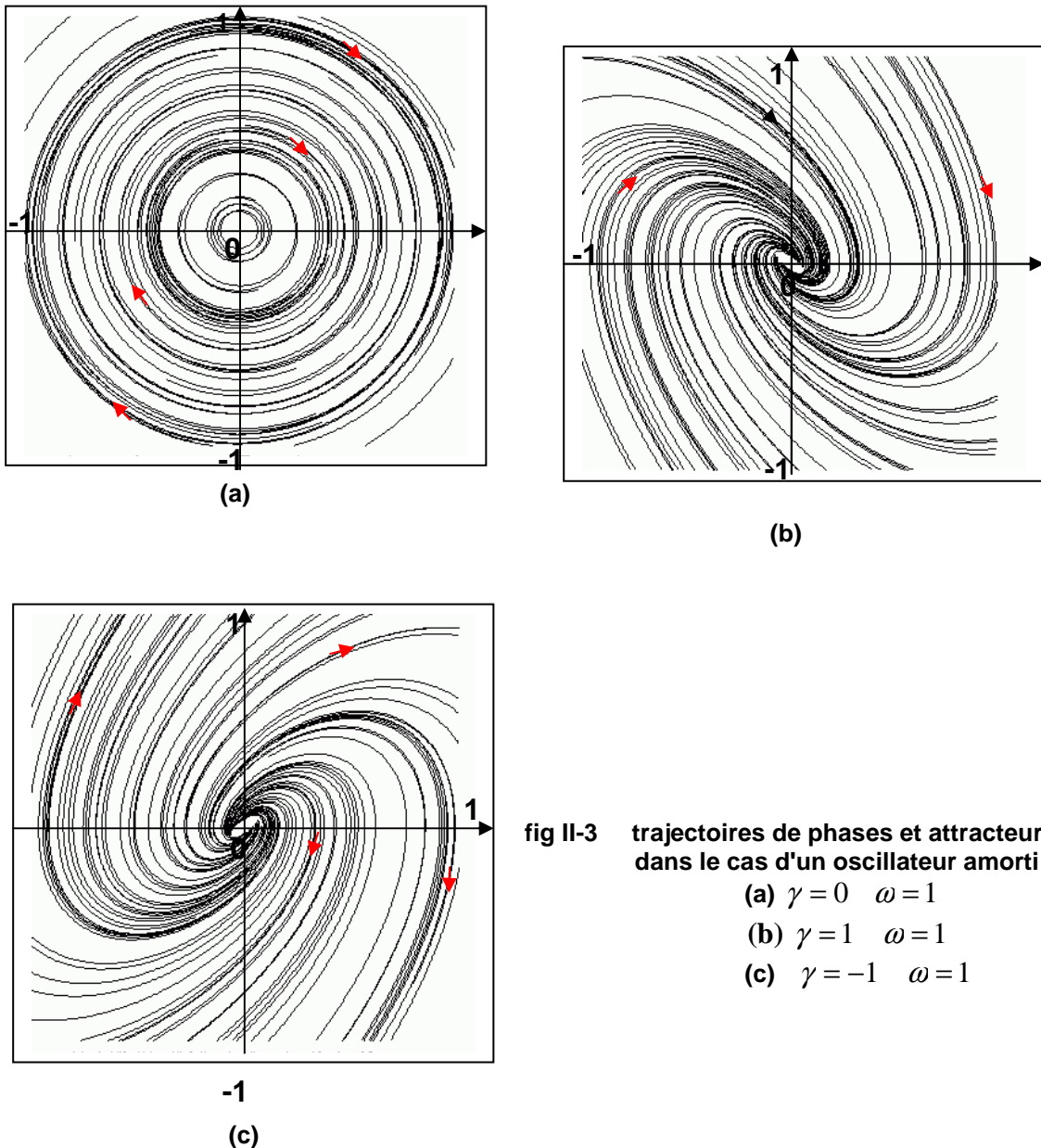


fig II-3 trajectoires de phases et attracteur dans le cas d'un oscillateur amorti

- (a) $\gamma = 0 \quad \omega = 1$
- (b) $\gamma = 1 \quad \omega = 1$
- (c) $\gamma = -1 \quad \omega = 1$

- Pour un coefficient d'amortissement nul $\gamma = 0$, les trajectoires de phase se développent dans le plan $(X^{(1)}, X^{(2)})$ sous la forme de cercles concentriques (figure II-3 (a)) avec une tendance à une concentration dans la direction de l'origine.

• Pour un coefficient d'amortissement positif $\gamma = 1$, les trajectoires de phases se transforment en un ensemble de courbes développant un effet de "convergence" vers l'origine (figure II-3.(b)) alors que pour $\gamma = -1$, on observe une tendance inverse, les trajectoires de phase ayant tendance à "fuir" le point origine (figure II-3(c))

III- PROCESSUS DISSIPATIFS ET ATTRACTEUR ETRANGE

Considérons un système dynamique dont l'évolution temporelle est sous – tendue par l'application F non linéaire définie comme suit

$$F : \mathcal{R}^n (n = 2,3) \rightarrow \mathcal{R}^n \quad (II-8)$$

$$X(t) \mapsto F[X(t)] = X(t+1), \quad t \in T$$

Si le système est supposé dissipatif (l'oscillateur amorti en étant un exemple), le Jacobien de l'application F est alors inférieur à 1; les volumes diminuent et auront tendance à s'annuler. Sur le plan d'un raisonnement en termes de décomposition spectrale, le produit de toutes les valeurs propres sera inférieur à 1, même si certaines valeurs propres, pour des directions précises, affichent des valeurs supérieures à 1. Dans tous les cas, on assiste à un phénomène conjugué de dilatation – contraction des surfaces ou des volumes en ce sens qu'une dilatation dans une direction est accompagnée par une contraction dans les autres directions. Sur le plan trajectoires de phase, il apparaît alors une infinité de courbes identiques, serrées avec une tendance à une "colonisation" de tout l'espace de phase compact qui lui reste de dimension finie. Cela se traduit alors par un regroupement massif de ces courbes au sein d'un ensemble qui présente l'apparence d'être uniforme mais en fait peuplé d'une infinité de courbes d'où son aspect complexe voire chaotique mais généralement de type fractal. Le caractère ambigu de cet ensemble lui vaut le qualificatif d'attracteur étrange. Divers attracteurs étranges à connotation fractale seront développés dans le présent travail.

IV- ENSEMBLE INVARIANT

Un domaine $D \subset \mathcal{R}^n$ est invariant par la fonctionnelle F si l'image de toute orbite de D par F appartient à D .

V- SECTIONS DE POINCARÉ

L'étude d'un système dynamique continu ou discret de dimension N peut être avantageusement simplifiée et sa dimension ramenée à $(N - 1)$ par le biais de la construction des sections de Poincaré. En effet, il est logique que la structure des trajectoires devient plus complexe dans les systèmes de très grande dimension.

Le principe de construction de la section de Poincaré est défini par l'ensemble des points d'intersection d'un plan avec les trajectoires du vecteur décrit par (II-2) que l'on suppose dans \mathcal{R}^N , F étant le champ de vecteurs correspondant. Il est souvent difficile voire impossible d'exprimer la solution du flot (II-2) sous une forme analytique, principalement lorsque la dimension N est élevée. En nous limitant au cas $N \leq 3$, on considère la trajectoire C prise dans l'espace des phases \mathcal{R}^3 . Cette courbe est formée par l'ensemble des points de \mathcal{R}^3 engendrés lors de la variation du paramètre temps t . L'édification des sections de Poincaré consiste à considérer la suite des points d'intersection $P_0, P_1, \dots, P_i, \dots$ de la courbe C et d'un plan de section π choisi de telle manière que ces points sont obtenus dans un sens déterminé. Au flot (II-2) est ainsi associé l'ensemble des points $P_0, P_1, \dots, P_i, \dots$ (figure II-4).

La méthode de Poincaré permet simultanément une discrétisation du système et une diminution de sa dimension. Il est montré en outre, qu'une section de Poincaré jouit des mêmes propriétés topologiques que le flot (ou attracteur) qui lui a donné naissance dans l'espace des phases tout entier. Ainsi, en présence d'un système dissipatif donc caractérisé dans \mathcal{R}^3 par une contraction des volumes, le système discret formé par les points d'intersection $P_0, P_1, \dots, P_i, \dots$ est aussi dissipatif et contracte les surfaces.

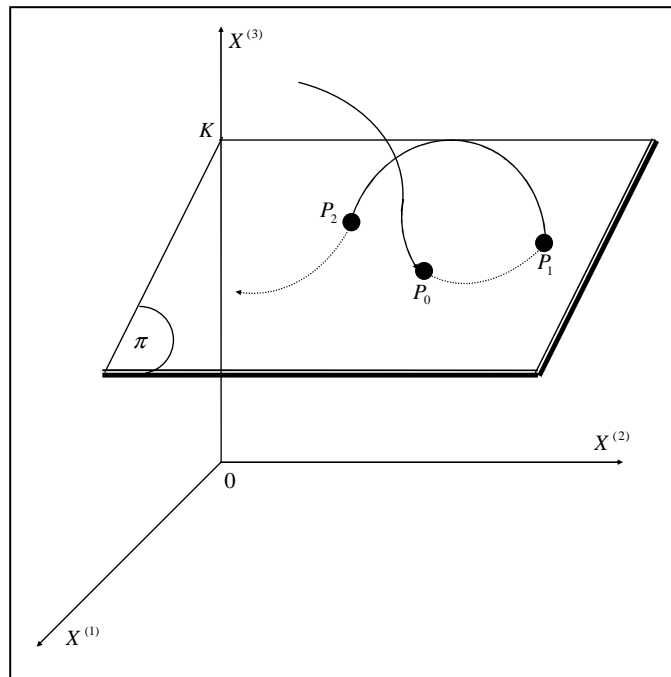


fig. II-4 trajectoire de phase et section de Poincaré

Un exemple de sections de Poincaré est représenté sur la figure II-5 relativement au système différentiel non autonome

$$\begin{cases} \frac{\partial X^{(1)}(t)}{\partial t} = X^{(2)}(t) \\ \frac{\partial X^{(2)}(t)}{\partial t} = -[X^{(1)}(t)]^3 - kX^{(2)}(t) + B \cos(t) \end{cases} \quad (II-9)$$

dans lequel nous avons posé $k = 0.1$ et $B = 11$. Le système (II-9) résolu par la méthode numérique, est choisi pour des convenances d'esthétique de la section de Poincaré tout comme d'ailleurs les valeurs des paramètres k et B (figure II-5)

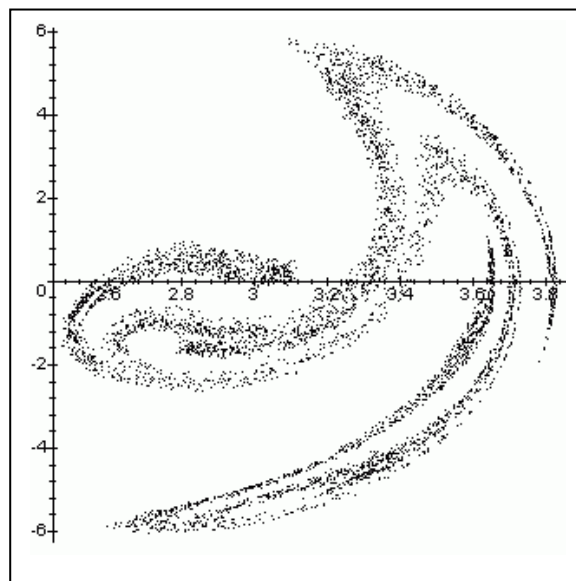


fig. II-5 un exemple de sections de Poincaré

VI- SYSTEMES DYNAMIQUES UNIDIMENSIONNELS

Un système dynamique comprend deux composantes : l'une décrivant l'état du système, l'autre étant une fonction uniforme $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ qui prédétermine ses états futurs. L'état d'un système est un vecteur à n composantes que l'on peut noter X_t , où l'indice t désigne le temps qui, suivant que ses variations, continues ou discrètes, caractérisera un système lui-même continu ou discret.

Si X_0 désigne un point (état) initial du système, les états futurs de ce dernier sont donnés par les itérations sur $f(X_0)$ qui, à l'ordre n vérifient la relation

$$X_{n+1} = f^n(X_0) \quad (\text{II-10})$$

Pour deux états successifs n et $n+1$ de cette démarche itérative, l'expression (II-10) devient

$$X_{n+1} = f(X_n) \quad (\text{II-11})$$

L'intérêt de l'analyse des systèmes discrets réside dans l'étude de leur comportement asymptotique au cours du processus d'itération. Il est supposé ici que l'application f n'est pas linéaire ou ne peut être ramenée à une forme linéaire par un changement linéaire de variable.

VI-1 ENSEMBLE DES POINTS PERIODIQUES DE PERIODE n , $Per_n(f)$

$$Per_n(f) = \{X \text{ tel que } f^n(X) = X\} \quad (\text{II-12})$$

Les points fixes solution de l'équation $f^n(X) = X$ sans être solution de (II-10) sont appelés cycles. L'ordre d'un cycle est défini par le nombre de ses éléments.

Si $n = 1$, on définit l'ensemble des points fixes

$$Per_1(f) = \{X \text{ tel que } f(X) = X\} \quad (\text{II-13})$$

Les points fixes représentent les singularités les plus simples pour l'application f . Ils peuvent correspondre à des états d'équilibre ou à des régimes périodiques.

VI-2 ENSEMBLE LOCALEMENT STABLE POUR UN POINT PERIODIQUE

Soit $p \in Per_n(f)$ un point périodique. on définit l'ensemble localement stable de p noté $E_{loc}^s(p)$ par

$$E_{loc}^s(p) = \{X \text{ tel que } \lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(X) = p\}$$

VI-3 CLASSIFICATION DES POINTS PERIODIQUES

Les points périodiques peuvent être stables ou instables. Ainsi dans le cas de systèmes unidimensionnels, le caractère de stabilité ou d'instabilité est donnée par la dérivée de l'application f modélisant ce système. Soit $p \in Per_n(f)$. Le point p est dit stable si $|f'(p)| < 1$ et instable si $|f'(p)| > 1$. Dans le cas où $|f'(p)| = 1$, il est dit hyperbolique.

VII- RECURRENCES DE SECOND ORDRE

Certains systèmes dynamiques requièrent plus d'une récurrence non linéaire pour rendre compte de leur évolution. Ainsi, le couple de récurrences non linéaires autonomes à variables réelles décrit par l'expression (II-14) est une forme de récurrence dite de second ordre

$$\begin{cases} X_{n+1} = f(X_n, Y_n) \\ Y_{n+1} = g(X_n, Y_n) \end{cases} \quad (\text{II-14})$$

Les fonctions $f(X, Y)$ et $g(X, Y)$ doivent être continues, uniformes et non linéaires. Les propriétés des solutions ou des trajectoires du système (II-14) sont en général complexes. Ces mêmes solutions ne s'expriment pas à l'aide de fonctions connues sous forme finie. Dans ce cas, la représentation

graphique est plus indiquée du moins pour toute recherche d'interprétation. Le modèle de Hénon ou encore le modèle galactique sont deux formes de système de récurrence non linéaires de second ordre qui seront abordées dans le présent travail.

L'approche graphique du comportement des trajectoires de (II-14) passe d'abord par la notion de courbes dites invariantes.

Une courbe $C(X, Y) = k$, k étant une constante, est dite par rapport à la récurrence définie en (II-14) si l'égalité suivante est vérifiée

$$C(X, Y) = C[f(X, Y), g(x, Y)] \quad (\text{II-15})$$

Certaines formes particulières de courbes invariantes peuvent être mises en évidence dans le plan (X_n, Y_n) où elles délimitent des structures "cellulaires" à l'intérieur desquelles les trajectoires adoptent un même comportement qualitatif donc fractal. Ces courbes invariantes sont appelées dans ce cas courbes séparatrices. Une illustration en sera donnée dans notre étude sur les modèles galactiques.

VIII- ANALYSE GRAPHIQUE

Dans le présent travail, il est souvent fait référence à l'analyse graphique issue de simulations elles mêmes nées de modèles mathématiques appropriés. L'objectif n'est pas tant la détermination de paramètres exclusifs ou le calcul de solutions. L'observation et l'approche descriptive constituent alors des instruments d'interprétation, de compréhension de l'évolution temporelle des phénomènes et des déviations du comportement du système dynamique à analyser.

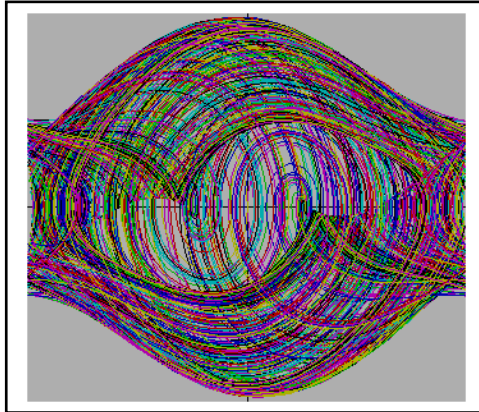
CHAPITRE III

*Aucun homme ne peut rien vous révéler
sinon ce qui repose
déjà endormi dans l'aube de votre connaissance*

KHALIL DJABRAN

COMPLEXITE ET COMPLEXIFICATION UNE TOPOLOGIE DU CHAOS

COMPLEXITE ET COMPLEXIFICATION UNE TOPOLOGIE DU CHAOS



I- CHAOS –FRACTALITE : UNE DESTRUCTION CREATRICE

Perçue sous l'angle d'une prolifération de structures rarement d'obédience anarchique ou à soubassement spontané, mais plutôt hiérarchisées et entretenues, la genèse d'un processus fractal ou d'une dynamique chaotique relève de l'émergence d'une stratification interne sous la forme de niveaux accessibles à l'analyse donc observables, c'est-à-dire soumis à un diagnostic de leur construction, de leur fonctionnement et de leur destin au cours de leur évolution.

L'approche de toute modélisation de l'évolution entropique d'un système dynamique ou d'un processus fractal (le mouvement brownien fractionnaire par exemple) doit reposer à notre sens sur deux concepts majeurs excluant tout comportement statique:

- l'association d'une composante environnementale quelque soit la référence contextuelle, de complémentarité ou de compétition, soit pour une affirmation à l'hégémonie ou à la fragmentation
- la définition de paramètres d'entropie, de croissance, de mutation qualitative, de survie ou d'extinction, cette dernière étant exclue tout au moins dans la théorie fractale et dans la limite de résolution d'un écran graphique.

Toute évolution d'un modèle - source vers un état – promotion est souvent interprétée par les systémiciens comme une rupture entropique prise non comme une phase d'inhibition mais plutôt comme une "destruction créatrice", caractérisée par une déstructuration morphologique et topologique apparente.

La "destruction créatrice" peut être appréhendée par le choix de paramètres judicieusement choisis, quantitatifs comme les dimensions sous les formes diverses (topologique, fractale, de Hausdorff, de corrélation, d'information, ponctuelle, ...), les niveaux dynamiques de stratification (échelle d'observation) et leur interaction, traduisant les aspects qualitatifs d'une complexité ordinaire intégrée ou admise dans l'environnement original et une complexité émergente contaminante ou encore complexifiante.

Comme pour les niveaux de stratification, la dynamique complexe suggère la coexistence d'entités agissantes dans le sens d'une maturation vers le développement d'une turbulence ou d'un chaos (les bifurcations de Hopf ou les exposants de Lyapounov par exemple). Le principe de hiérarchisation, caractéristique des structures imbriquées – au sens large on peut parler d'une hiérarchie structurelle – peut être reproduit au sens d'une hiérarchie de complexité spatio-temporelle, de niveaux complexes persistants et de configurations accessibles uniquement à travers des échelles d'analyse (scaling) ou d'observation. Cependant, nos capacités d'investigation, fussent-elles évoluées en terme de sélection pertinente des attributs qualitatifs ou en moyens de calculs, suffisent – elles à saisir les irrégularités – le plus souvent sournoises - révélatrices d'un type de comportement dynamique.

Quel intérêt accorder au macroscopique comparé au "particulaire" ou inversement (à l'image d'un complexe moléculaire ou d'un système biologique par exemple) ? A cet effet la théorie du formalisme de renormalisation active par une opération de subdivision donc de simplification d'un phénomène ou d'une mégastructure globale en séries parcellaires imbriquées où interviennent différentes échelles d'observations. Il s'agit donc d'une atomisation d'un niveau macroscopique en niveaux de comportements sous-jacents élémentaires. Ces derniers par un effort de synthèse doivent être en mesure de régénérer la globalité du phénomène ou de permettre de formuler les lois pouvant exprimer les régularités et les irrégularités sur le plan formel. Les propriétés des systèmes relèveraient alors de la contingence des effets conjoints et de la superposition de leurs interactions. Le basculement vers un état de complexité apparente découlerait de la violation des régularités temporelles dans le cas de d'un système dynamique dont la biographie se résumerait en la conjonction de faits nés de la reproduction, de la conservation, de la destruction ou de l'inhibition

d'entités discernables. Cependant la parfaite connaissance de ces dernières posera un problème de calculabilité et de prédiction car l'imbrication des entités et la détection des irrégularités locales sont rarement l'émanation d'un concept unique de modélisation mathématique donc déterministe suffisante (ou convaincante) pour être explicative de la complexité sous-jacente. Il y a lieu alors de dépasser certains archaïsmes du monde environnant ou de faits préalablement établis ou jugés comme immuables (la notion de dimension non - entière ou la dérivation fractionnaire par exemple).

Les mutations comportementales et structurales sont induites par l'apparition de niveaux d'organisations non – étanches et de leur co - évolution. Les modèles de comportements ne sont que la conséquence de ceux des sous – systèmes, résultat de la diversité microscopique " hypocentrale" dont le reflet "épical" en est le caractère émergent.

II- LA DYNAMIQUE DE COMPLEXIFICATION : VERS LE REGNE DU CHAOS

Le mouvement de complexification est source de fructification des états élémentaires érigeant le système en entité animée donc vivante, les structures organisées s'installant progressivement (cas de certaines images fractales engendrées par les systèmes de fonctions itérées).

- Une des caractéristiques des systèmes dynamiques dits ouverts est leur développement d'un instinct de conservation en ce sens qu'ils opposent une résistance à leur dégradation entropique (de leur extinction en fait) en puisant dans leur biotope les moyens de maintenir dans le temps leur structure (cas des organismes vivants).
- Les structures dissipatives d'Ilya Prigogine: dans les systèmes ouverts, un apport de flux d'énergie est à même d'initier un processus de complexification qui à son tour engendre une dynamique d'évolution au sein même de l'amorphe ou de l'inanimé.
- Certains systèmes instables, bien que déterministes, s'illustrent par leur imprédictibilité spatio – temporelle car sensibles aux conditions initiales. Ils sont alors le siège de fluctuations apparemment anarchiques - le chaos déterministe – (modèle de Lorenz, réaction chimique de Bélousov - Zhabotinski , modèle différentiel de Rossler , etc.).

III- LE CHAOS : UN DESORDRE APPARENT

Longtemps intégrés dans la classe des phénomènes inexpliqués mais toutefois observables car réels, les comportements complexes des systèmes dynamiques ne sont appréhendés en tant que théorie (la théorie du chaos précisément) sur les plans descriptif, de modélisation mathématique et de simulation numérique qu'au cours de ces trente dernières années. Des concepts inconnus jusque là virent alors le jour: chaos, attracteur, attracteur étrange, sensibilité aux conditions initiales, imprédictibilité de comportement, bifurcations,..). Sur le plan des applications, la théorie du chaos que l'on soupçonnait restreinte aux domaines de mathématiques et de la physique, a investi des champs aussi divers que la sismologie dans la distribution spatio-temporelle des épicaltres par exemple, en géomagnétisme dans les analyses du mouvement migratoire du pôle magnétique terrestre , dans le domaine boursier pour la compréhension et la prévention des crashes, dans les sciences biologiques dans la reproduction, la prolifération ou l'extinction de certaines espèces, en sociologie dans la gestion des conflits, en écologie dans la prévention des catastrophes etc.

Divers éléments prédestinent à une bifurcation de type chaotique sans qu'il soit possible de cerner l'ensemble des facteurs intervenant et conduisant à un état de désordre. Ce dernier, emprunt de fluctuations erratiques ne peut être que stochastique mais cette apparente "stochasticité" ne peut être traduite en termes de hasard dans la manifestation du chaos ; il s'agit de ce fait de chaos déterministe. Partant d'une situation initiale pourtant connue, les états futurs engendrés par la dynamique échappent à toute prédictibilité contrairement au mouvement déterministe où un état présent préfigure d'un état futur. La problématique liée au déterminisme est qu'entre un état initial que l'on pourrait qualifier de connu ou de voulu et un état final perçu comme un observable ou un identifiable peut s'interposer une complexité. Il en résulte donc une coexistence de deux états : un état déterministe fait de prédictibilité et un état sous-tendu par le hasard et dont le résultat ne peut être qu'aléatoire. Entre ces deux situations apparemment antagonistes, s'insère le chaos auquel échappe toute prédictibilité mais en lequel règne un caractère aléatoire. Les premières manifestations du chaos les plus fréquemment citées concernent les prévisions météorologiques issues du modèle différentiel de Lorenz auquel est consacré tout un développement dans le présent travail, montrent comment l'évolution de l'atmosphère à long terme est insaisissable (imprédictibilité) avec cependant la possibilité de prédire le temps, à court terme il est vrai. Le système de Lorenz, assez simple du reste car reposant sur trois équations à trois inconnues, a mis en évidence un caractère fondamental d'un système chaotique : la sensibilité aux conditions initiales. Des causes initiales très proches ne

produisent pas nécessairement les mêmes effets, pis, elles peuvent concourir à développer des situations totalement anachroniques.

IV- ANATOMIE D'UN SYSTEME COMPLEXE

Partant de la sensibilité accrue d'un système chaotique aux variations infimes des conditions initiales, la prédiction même approchée du comportement à plus ou moins long terme devient quasiment impossible sans la connaissance précise de son état. Ce dernier passe inévitablement par la définition de critères pertinents du chaos. A cet effet, deux approches peuvent se présenter isolément ou simultanément:

- une approche qualitative plus orientée vers l'analyse descriptive du chaos par voie d'observations
- une approche quantitative relevant d'une "paramétrisation" de l'état chaos par des variables ou des fonctions évidemment à formuler et à interpréter. Parmi ces dernières, la plus indiquée serait de définir un degré d'organisation intrinsèque du système chaotique: l'entropie

IV-1 CONTEXTE MATHEMATIQUE DE LA FORMULATION DE L'ENTROPIE

On définit un endomorphisme f d'une espace de phase E (métrique et compact) dans lui-même: $f : E \rightarrow E$. Relativement au système dynamique, f à travers ses itérés, l'application f la loi d'évolution du système.

Soit X_0 un état initial sur lequel seront construits les itérés $\{X_0, f^i(X_0), i = 1, n\}$ de f . Le terme $f^i(X_0)$ désigne l'état du système à l'instant i . La métrique définie sur l'espace de phase E par rapport à f et "temps" n sera de la forme :

$$\forall (x, y) \in E^2, d_{n,f}(x, y) = \sup_{0 \leq j < n} d[f^j(x), f^j(y)] \quad (\text{III-1})$$

Muni de cette distance, l'espace reste compact. On notera $B_{n,f}(x, \alpha)$ une boule ouverte de centre x et de rayon α .

IV-2 MESURE DE LA COMPLEXITE D'UN SYSTEME CHAOTIQUE

Bien que le comportement d'un système chaotique soit imprévisible et difficile à approcher, une première possibilité serait de fixer un ensemble d'états initiaux dits caractéristiques tels que la connaissance de l'évolution du système à partir de ces états suffiraient à accéder à n'importe quel autre état pendant la même durée de "temps" n . Un système dynamique sera d'autant plus complexe que le nombre minimum de points caractéristiques pour cerner le comportement de la totalité du système et élevé. A supposer que ce comportement est connu à "l'instant" i , nous imaginons la difficulté à le connaître à "l'instant" $i + 1$ car la situation qui se présente alors est nouvelle et le nombre de points caractéristiques d'approximation de son approximation est encore plus élevé. Soit A une partie de l'espace de phase E , (n, ε) pour l'application f c'est-à-dire

$$\bigcup_{X \in A} B_{n,f}(X, \varepsilon) = E \quad (\text{III-2})$$

On note $r(n, f, \varepsilon)$ le nombre d'éléments de cette partie. Cette quantité est finie. Le but serait de mesurer la vitesse de croissance de du nombre $r(n, f, \varepsilon)$ en fonction du "temps" n . on pourrait par

exemple, estimer le rapport $\frac{r(n+1, f, \varepsilon)}{r(n, f, \varepsilon)}$ ou plus exactement $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{r(n+1, f, \varepsilon)}{r(n, f, \varepsilon)} \right]$. Une autre

approche plus pratique et qui se rapproche du calcul des dimensions non entières (fractales) passe par une "logarithmisation" de la quantité $r(n, f, \varepsilon)$. On définit ainsi respectivement les fonctions

$H(f, \varepsilon)$ et $H_{ent}(f)$ par la suite de limites suivantes

$$\begin{cases} H(f, \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log[r(n, f, \varepsilon)] \\ H_{ent}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H(f, \varepsilon) \end{cases} \quad (III-3)$$

Deux phases se regroupent dans le calcul de $H_{ent}(f)$:

- un temps d'évolution du système élevé ($n \rightarrow +\infty$)
- un (n, ε) - recouvrement très fin ($\varepsilon \rightarrow 0$)

La quantité $H(f, \varepsilon)$ est finie ($H(f, \varepsilon) < +\infty$) tout en étant une fonction décroissante de ε .

IV-3 LE CARACTERE DISPERSIF DES SYSTEMES CHAOTIQUES

Plus que pour une condition initiale ponctuelle, on extrapole la sensibilité aux conditions initiales d'un système dynamique chaotique à des états initiaux proches. Les trajectoires résultantes, assez proches en début de processus, finissent par diverger. Le caractère dispersif du système sera estimé en évaluant le nombre maximal de points pris sur les trajectoires et tendant à s'éloigner les uns des autres comme une fonction du "temps" n . Le but serait alors d'estimer la vitesse de croissance de cette quantité.

IV-3-1 FORMALISME MATHEMATIQUE DE L'ESTIMATION DE L'ENTROPIE

Une partie A de l'espace de phase E est dite (n, ε) - séparée pour l'application f si

$$\forall (x, y) \in A^2, x \neq y, \text{ alors } d_{n,f}(x, y) \geq 2\varepsilon \quad (III-4)$$

Comme dans le cas de la définition de l'entropie $H(f, \varepsilon)$, on définit respectivement les quantités $H_{sep}(f, \varepsilon)$ et $H_{sep}(f)$ comme suit

$$\begin{cases} H_{sep}(f, \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n} \log s(n, f, \varepsilon) \right] \\ H_{sep}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{sep}(f, \varepsilon) \end{cases} \quad (III-5)$$

On peut remplacer la définition de $H(f)$ par celle de $H_{sep}(f)$ avec cependant une autre interprétation: une application (système dynamique) est chaotique si son entropie est non nulle.

IV-3-2 EFFET DE CONTAMINATION DU CHAOS

L'effet "chaos" dans un système dynamique provient principalement des deux propriétés suivantes

$$1) \forall k \in \mathcal{N}^*, H(f^k) = kH(f) \quad (III-6)$$

Autrement dit, une fonction f est chaotique dès que l'un de ses itérés l'est: c'est le principe de contamination

2) si l'espace de phase E admet la décomposition suivante : $E = \bigcup_i E_i$, les sous-

ensembles E_i étant stables et deux à deux disjoints, alors $H(f) = \max_i H(f|_{E_i})$. Autrement dit, l'entropie dominante dans les sous – états E_i se substituera à l'entropie globale. Il vient alors que pour peu que le chaos s'installe dans une sous – région d'un système dynamique, il y a là aussi un phénomène de contamination et une l'instauration d'un chaos généralisé. Ce concept de "foyer chaotique" pourrait être appliqué soit dans le contrôle du chaos ou dans l'isolement de zones susceptibles de développer un environnement en proie au chaos.

V- LA GEOMETRIE DU CHAOS

Sur le plan descriptif de l'émergence du chaos, de son évolution au cours du temps ou encore de son contrôle, le problème relève de la triptyque : espace de phases, trajectoire de phase et attracteur, la

notion d'attracteur d'étrange comprise. Concernant le plan du formalisme mathématique, ces trois éléments ont été définis dans le chapitre (chapitre II) se rapportant aux généralités sur les notions prédestinant à introduire la théorie du chaos. Nous nous limiterons donc dans cette section à une pure description de ces éléments.

Nul doute que les trajectoires sont les témoins privilégiés à la fois dans le diagnostic et dans le pronostic de la manifestation du chaos; aussi sont-elles à l'origine des diverses formes de définition du chaos.

V-1 LA NOTION DE STABILITE D'UNE TRAJECTOIRE

Considérons un système dynamique décrit par le modèle différentiel

$$\frac{dX_i(t)}{dt} = F_i(X_j(t)) \quad (III-7)$$

avec $X \in \mathcal{R}^n$, $n \geq 1$, $i, j = 1, \dots, n$.

Supposons en outre que ce système ait atteint un état stationnaire du type point fixe ou de cycle limite, état dans lequel il se stabilisera à l'abri de toute perturbation externe. Désignons par X_{st} cet état de stationnarité. Cette hypothèse n'est que partiellement admise car en théorie systémique, les seuls systèmes viables sont ceux dits ouverts sur leur environnement par des échanges d'information sous forme d'énergie en autres. L'intrusion d'une perturbation $p(t)$ n'étant donc pas écartée, l'expression naturelle d'un état $X(t)$ du système est donc de la forme

$$X(t) = X_{st} + p(t) \quad (III-8)$$

V-2 LES DIFFERENTES FORMES DE STABILITE

V-2-1 STABILITE AU SENS DE LYAPUNOV: malgré la présence de la perturbation $p(t)$, le système reste dans un voisinage de son état stationnaire X_{st} . Pour revenir à la forme différentielle (III-7), une solution est stable au sens de Lyapunov si toute solution qui passe dans son voisinage y reste.

Sur le plan du formalisme mathématique, pour un système discret répondant à la forme

$$X_{n+1} = f(X_n), \text{ un point fixe } X_f \text{ est déclaré stable au sens de Lyapunov si}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) \geq 0 \text{ tel que } \|X - X_f\| \leq \eta \Rightarrow \|f^n(X) - X_f\| \leq \varepsilon \quad (III-9)$$

le terme η ne dépendant pas du nombre d'itérations n .

V-2-2 STABILITE ASYMPTOTIQUE: la perturbation $p(t)$ peut s'estomper au cours du temps et le système devenir amnésique, ignorant les effets antérieurs de $p(t)$. Pour revenir à la forme différentielle (III-7), une solution est asymptotiquement stable si toute autre solution s'en approche et se confond asymptotiquement avec elle. En pratique, l'étude de la stabilité asymptotique peut être effectuée le biais du multiplicateur caractéristique $J(X_f)$ défini comme le Jacobien de la transformation f exprimé au point fixe X_f . Nous avons alors la propriété suivante: si les multiplicateurs caractéristiques du point fixe X_f sont tous de module inférieur à un, ce point fixe est alors asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.

Sur le plan du formalisme mathématique et pour le même de système que ci-dessus, un point fixe X_f est asymptotiquement stable, s'il est d'abord stable au sens de Lyapunov, et si pour X suffisamment proche de X_f , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(X) = X_f \quad (III-10)$$

V-3 SYSTEME LOCALEMENT STABLE ET GLOBALEMENT INSTABLE

En présence d'une perturbation, une trajectoire réagit en fonction de l'amplitude de cette dernière: modérée, elle reste dans le voisinage de l'état de stabilité X_{st} , plus importante, elle s'en écarte exagérément. Cet état X_{st} que l'on peut qualifier d'état de référence est dit alors localement stable mais globalement instable. Par extension, les trajectoires chaotiques vérifieront cette dernière propriété.

VI- ATTRACTEUR

L'examen du comportement des trajectoires de phase en longue période repose sur le choix d'un certain nombre de conditions initiales sur lesquelles est appliquée la fonction f . Au cours de l'évolution du système dynamique dans le temps, les trajectoires développées semblent "migrer" vers une région déterminée de l'espace de phase pour s'y stabiliser pendant un certain temps. Cette zone, que nous notons A , de dimension inférieure à celle de l'espace de phase E (puisque'elle y est incluse), est appelée attracteur. Les trajectoires qui passent suffisamment près de l'attracteur A sont asymptotiquement attirées par ce sous-ensemble de E . Deux cas peuvent se présenter :

- certaines trajectoires happées par l'attracteur n'en ressortent plus; on parle dans ce cas de l'invariance de l'attracteur A par l'application f et que l'on traduit par la relation $f(A) = A$.
- d'autres trajectoires sont plutôt instables sur l'attracteur sur lequel elles ne s'immobilisent jamais et leur évolution est cyclique périodique

L'attracteur peut être aussi caractérisé par certaines propriétés topologiques intéressantes:

- il est dit indécomposable s'il l'on peut passer d'un point X_1 de A vers un autre point X_2 au moyen d'une trajectoire de longueur finie
- une trajectoire absorbée par un attracteur peut visiter toutes les parties de ce dernier; la fonction f sera alors dite topologiquement transitive sur A

Quelques attracteurs particuliers:

VI-1 POINT FIXE (ou point double) :

La singularité "point fixe", solution de l'équation $f(x) - x = 0$, correspond, pour un système dynamique décrit par une récurrence, à un état d'équilibre. La récurrence du type (II-10) peut admettre plusieurs points fixes situés à distance finie les uns des autres. Soit α un point fixe de cette

récurrence. Si la fonction f est au moins une fois dérivable en $X = \alpha$, l'expression $\left. \frac{df}{dX} \right|_{X=\alpha}$ appelé multiplicateur, caractérise le comportement des points décrits par cette récurrence pour $n \rightarrow +\infty$.

VI-2 POINT FIXE ATTRACTIF

Partant d'une condition initiale X_0 et par le biais des itérés de f qui, en fait, assurent la dynamique du processus, il est généré une succession de points qui tendent asymptotiquement vers les points fixes qualifiés d'attractifs. A regarder de plus près, on remarque que le procédé génère à chaque itération une nouvelle condition initiale, c'est dire toute l'importance du choix de X_0 dans la vitesse de convergence du processus vers un point fixe. Une méthode graphique de construction basée sur les fonctions contractantes et permettant de suivre la dynamique de convergence vers les points fixes, est exposée en annexe. Notons enfin qu'un point fixe dont l'existence est avérée ne serait-ce que par construction, peut être attractif ou répulsif engendrant ainsi un domaine de stabilité dans le premier cas et d'instabilité dans le deuxième; la frontière délimitant ces deux domaines serait un lieu qui tiendrait des deux cas donc d'indécision. On peut penser que, bien que floue, elle doit renfermer néanmoins une structure particulière que l'on qualifie de fractale.

VI-3 CYCLE ET TRAJECTOIRE PERIODIQUE:

A côté des points fixes, cohabite une autre singularité issue des itérés de la fonctions f et que nous notons $f^i(X) = f[f^{i-1}(X)]$. Au départ d'une condition initiale X_0 prise dans le domaine de f , on

définit une trajectoire (ou encore une orbite) de longueur p comme la séquence $\{X_0, f(X_0), f^2(X_0), \dots, f^p(X_0)\}$.

Une trajectoire est dite périodique, de période p , si p est le plus petit entier positif tel que

$$f^p(X) = X \quad \text{avec } p > 1 \quad (\text{III-11})$$

La variable X est dite alors "point périodique".

VI-4 ATTRACTEUR PERIODIQUE:

Dans l'espace de phase, il est représenté par un courbe fermée. En dimension deux, l'attracteur serait soit un cercle, soit une ellipse et plus généralement une courbe fermée. Dans le cas bidimensionnelle, seuls les cycles d'ordre 2 (*2-cycles*) sont générés. Dans un espace de dimension supérieure à 2, il n'est pas évident de situer une trajectoire périodique dans un plan. La solution alternative serait un "enroulement" de cette dernière autour d'un tore (figure III-1) comme il serait aussi fait mention dans le chapitre consacré aux processus quasi – périodique.

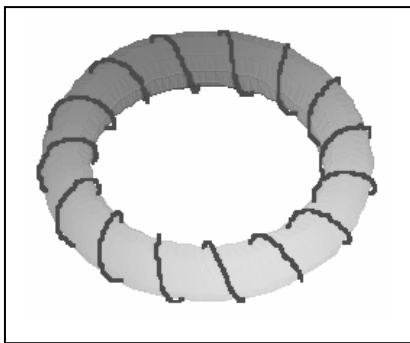


fig. III-1 trajectoire périodique dans un espace de phase de dimension supérieure à deux

Pour des dimensions assez élevées, la visualisation des trajectoires dans l'espace correspondantes n'est pas aisée. Aussi, la technique de représentation et d'analyse basée sur la section de Poincaré est-elle indiquée car elle permet de réduire la dimension et de ne représenter que l'intersection des trajectoires et d'un plan judicieusement choisi et ce, dans un direction donnée.

VII- CHAOS TOPOLOGIQUE

Ces deux types d'attracteurs simples (périodique et quasi-périodique) combinés, peuvent-ils définir un type de chaos? La réponse est positive si l'on tient compte des caractéristiques de chacun d'eux:

- les trajectoires périodiques sont denses dans l'attracteur A , en ce sens que:
- les trajectoires apériodiques sont bornées mais s'écartent les unes des autres. Elles passent dans le voisinage des trajectoires périodiques sont pour autant devenir périodiques elles-mêmes.

La simultanéité de ces deux situations qui se retrouvent d'ailleurs dans les attracteurs chaotiques comme les attracteurs étranges, peuvent conduire à définir un type de chaos plus lié à la topologie de l'attracteur : le chaos topologique.

- **attracteur étrange**

Élément fondamental dans le présent travail car assurant la jonction chaos- fractalité, l'attracteur étrange se situe hors de la périodicité ou de la quasi – périodicité, au-delà du point fixe, des cycles limites (courbes closes) ou des attracteurs toriques (surfaces bidimensionnelles bornées), les attracteurs étranges jouissent de propriétés étonnantes comparées à celles des attracteurs prévisibles que nous venons de citer.

Dans le cas d'un système chaotique, le problème posé par l'attracteur est autrement plus complexe tout en présentant une figure étonnante d'où le qualificatif d'étrange.

- Certes les trajectoires migrent vers une région déterminée de l'espace de phases dont elle est un sous-ensemble de dimension nécessairement inférieure. Cette dernière s'écarte de la dimension classique (ou euclidiennes) dont la valeur est entière : dimension unité pour une droite, deux pour une surface et trois dans le cas d'un tore. Ne rentrant dans aucune de ces catégories, l'attracteur étrange admet nécessairement une dimension non- entière, formalisme fondamental dans la théorie des structures fractales.

- un attracteur étrange exhibe un mélange subtil de déterminisme puisqu'il caractérise de façon permanente l'évolution du système chaotique et de hasard, puisqu'il y a absence de prédictibilité dans cette évolution. La figure III-2) est une illustration de cette imprédictibilité du comportement des trajectoires quant à la fréquence de visite d'une ou l'autre des deux régions de l'attracteur étrange.

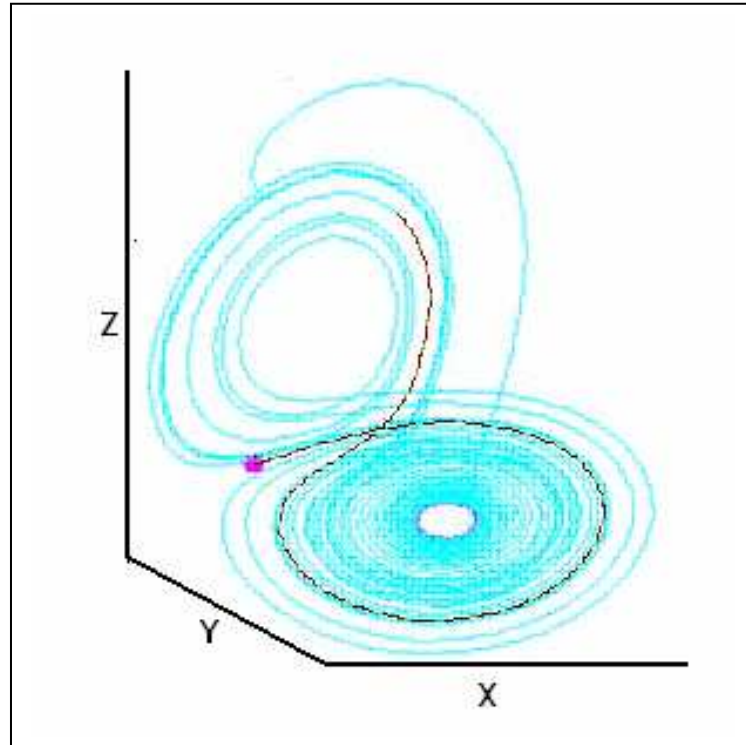


fig. III-2 attracteur étrange de Lorenz et imprédictibilité du comportement des trajectoires de phase

- Dans le cas d'un attracteur non chaotique, les trajectoires restent assez proches les unes des autres. Les écarts restent limités, le comportement restant prévisible. Pour un attracteur étrange d'apparence chaotique, il se produit une divergence rapide (exponentielle) des trajectoires tout en appartenant à une figure de structure finie (ensemble borné). De ces deux situations apparemment contradictoires, va résulter un mode de construction spécifique: les trajectoires adoptent un double effet d'étirement pour assurer leur divergence exponentielle en augmentant la distance séparant deux trajectoires proches et un effet de repliement pour pouvoir les confiner dans un espace borné (concept d'hyperbolicité). Ce double effet d'effet d'étirement et de repliement fait apparaître une infinité de plis imbriqués les uns dans les autres : l'attracteur étrange est fractal. La figure III-3 obtenue grâce au logiciel "FRACINT"après modification, en est une autre forme de l'attracteur étrange de Lorenz.

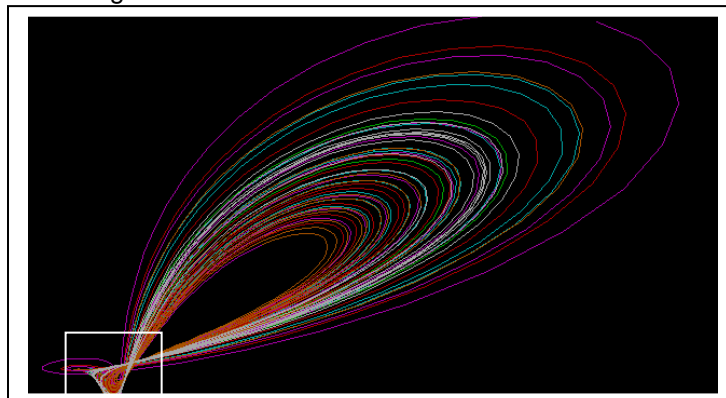


fig.III-3 une forme de l'attracteur étrange de Lorenz

La représentation III-4 illustre ce double effet d'étirement et de repliement. Nous pensons qu'une section "transversale" de cet attracteur produira un ensemble de points sur les trajectoires dont la distribution se rapproche d'un ensemble de Cantor.

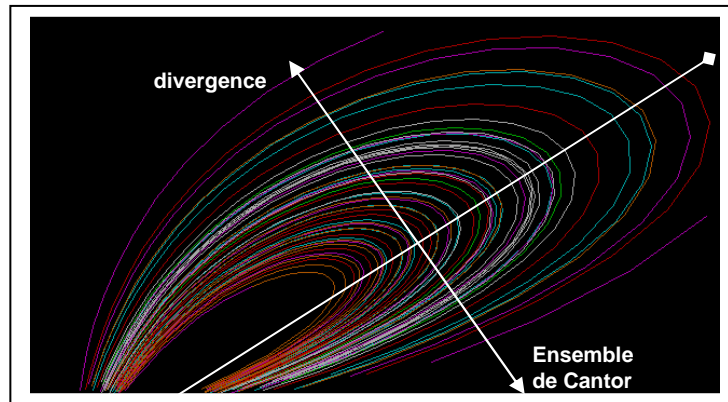


fig. III-4 l'attracteur de Lorenz : double effet d'étirement et de repliement des trajectoires

Il nous est apparu alors intéressant d'effectuer un "zoom" sur la partie de l'attracteur insérée dans un médaillon (figure III-1) et dont la géométrie révèle de façon évidente le comportement complexe des trajectoires à l'intérieur de l'attracteur étrange (figure III-5).

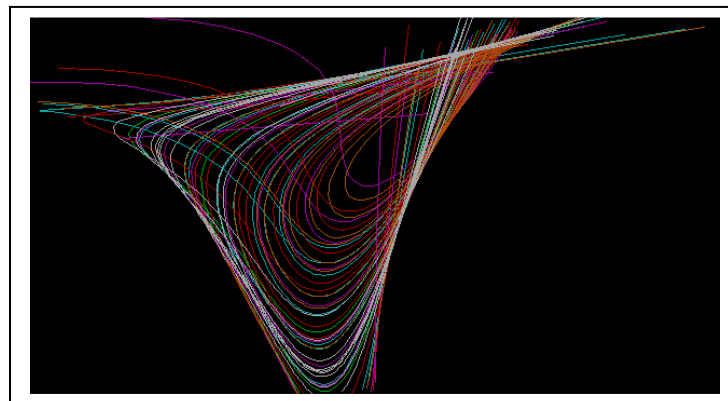


fig. III-5 comportement des trajectoires dans la partie en médaillon de la figure III-3

VIII- LA SENSIBILITE AUX CONDITIONS INITIALES (SCI)

La sensibilité aux conditions initiales (SCI) dans un système représente un attribut spécifique dans la caractérisation d'un état chaotique. A cet effet, considérons deux condition initiales assez proches $X_1(0)$ et $X_2(0)$ telles que

$$X_2(0) = X_1(0) + \Delta(0) \quad (III-12)$$

et supposons qu'elles évoluent dans le temps pour un système dynamique à temps continu de façon à décrire deux orbites $X_1(t)$ et $X_2(t)$ (figure III-6). A un temps quelconque t , la distance qui sépare les deux orbites est

$$\Delta(t) = X_2(t) - X_1(t) \quad (III-13)$$

Si $\Delta(0) \neq 0$ et pour t assez grand et les orbites restant bornées, la différence entre les $|\Delta(t)|$, croît façon exponentielle c'est-à-dire

$$\frac{\Delta(t)}{\Delta(0)} \approx \exp[h(t)] \quad h > 0 \quad (III-14)$$

On dit alors que le système présente une sensibilité aux conditions initiales et est chaotique. L'hypothèse sous laquelle les solutions doivent être supposées bornées implique que dans le cas contraire, les trajectoires, au voisinage de l'infini, les trajectoires devront nécessairement diverger de façon exponentielle, ce qui ne rentre pas dans le cadre de la SCI. Une raison de cette divergence exponentielle des trajectoires peut être aussi rattachée à l'accumulation dans le temps de probables erreurs dans la solution.

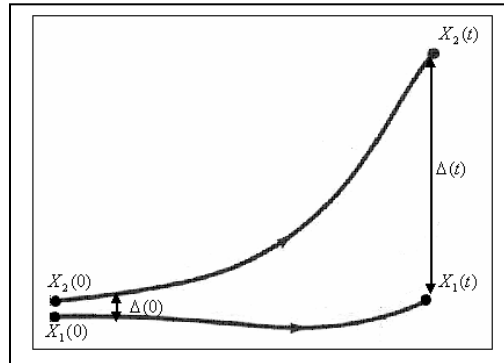


fig. III-6 sensibilité des trajectoires aux conditions initiales

S'agissant de deux conditions initiales choisies très proches donc développant *a priori* deux trajectoires divergentes exponentiellement, il est observé dans certains cas, l'intercalation entre ces deux trajectoires, d'une trajectoire "fantôme" bruitée issue de l'une ou l'autre des conditions initiales, très proche de la trajectoire calculée numériquement (figure III-7).

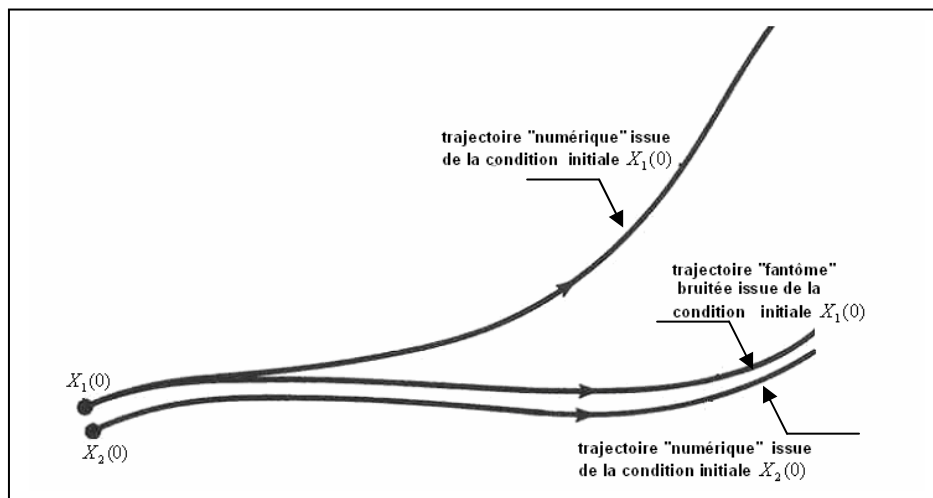


fig. III-7 assortiment de trajectoires réelles et de trajectoires "fantômes"

Ceci confère à la structure globale un caractère fractale comme il peut être illustré sur le modèle de récurrence bidimensionnel de Hénon, de paramètres *a* et *b*

$$\begin{cases} X_{n+1} = 1 + Y_n - aX_n^2 \\ Y_{n+1} = bX_n \end{cases} \quad (III-15)$$

Suivant les valeurs des paramètres *a* et *b*, nous obtenons un point fixe stable, un cycle de périodes fini stable ou encore un attracteur étrange. Pour *a* = 1.4 et *b* = 0.3, le modèle de Hénon a un comportement chaotique dont l'attracteur est représenté par un ensemble de points dans le plan et pour les conditions initiales $X_0 = Y_0 = 0$

Ce dernier peut être qualifié à juste titre d'étrange car l'ensemble des points qui le constituent forment une orbite non périodique bien que leur fort rapprochement confère une allure périodique à l'orbite.

Afin d'accéder à la structure intime de l'attracteur de Hénon, nous avons réalisés, au moyen de fenêtres de dimensions bien choisies, une série de trois d'agrandissements d'une même partie de l'attracteur (figure III-8):

- zoom 1: Une frange de quatre groupes apparaît et dont les deux premiers laissant apparaître comme des alignements de points.
- zoom 2 : le but est de révéler la structure intrinsèque de ces alignements. Ces derniers ne présentent pas une structure unique mais une série de stries espacées comme sont aussii séparés les points qui forme chacune d'elles.
- zoom 3 : Cette tendance dans la succession de stries espacées, formées de points plus ou moins éloignées est plus éloquent. la structure d'ensemble rappelle le modèle fractal de Cantor

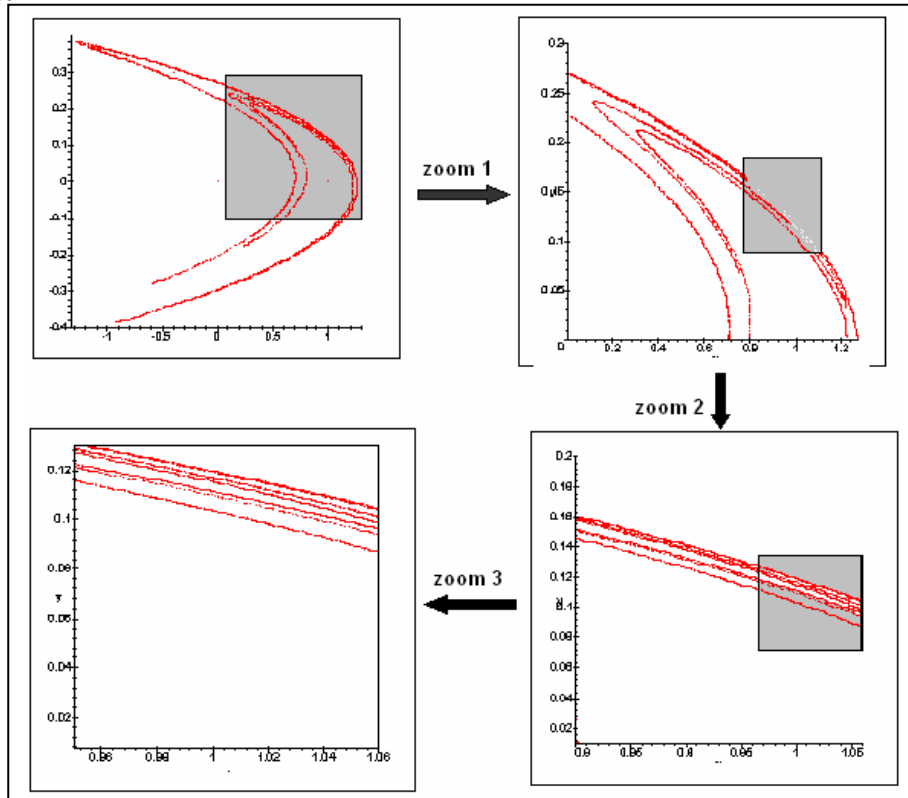


fig. III-8 attracteur de Hénon ($a = 1.4, b = 0.3, N = 5000$ points, $X_0 = Y_0 = 0$) accompagné de trois agrandissements successifs d'une même zone (fenêtres colorées en gris)

La sensibilité aux conditions initiales n'est pas une condition suffisante de comportement chaotique. Considérons à cet effet la transformation $f : x \mapsto \frac{X}{k}$, $k \neq 0$ pour laquelle on suppose donnée une condition initiale principale X_0 et une condition initiale légèrement modifiée $X'_0 = X_0 + \varepsilon$. Par rapport à X_0 , la suite récurrence déduite de f est de la forme $X_n = \frac{X_0}{k^n}$. Par rapport à la condition initiale X'_0 , nous avons la récurrence $X'_n = \frac{X'_0}{k^n} = \frac{X_0 + \varepsilon}{k^n}$. L'erreur relative entre X'_n et X_n est lors

$$\frac{X'_n - X_n}{X_n} = \frac{\varepsilon}{X_0}$$

Cette erreur est donc indépendante du nombre d'itérations n . Le système ainsi considéré est sensible aux conditions initiales mais n'est pas chaotique

IX -CHAOS ET IMPREDICTIBILITE

Un réel engouement pour les modèles mathématiques déterministes accrus par les solutions dénuées de tout caractère de régularité (solutions chaotiques) que proposent ces derniers, concerne de nos jours diverses disciplines, qui jusque là, ont ignoré tout l'intérêt à considérer de tels comportements. La théorie du chaos est venue comme pour s'intercaler entre le déterminisme et le hasard, en assurer la jonction et révéler les mécanismes intrinsèques de la transition ordre - chaos. A cet effet, de nombreuses hypothèses ont tenté d'expliquer ce basculement qui survient dans l'état d'un système mais elles sont plus souvent infirmées soit par des observations ou par des modèles chaotiques hors des hypothèses posées. Il a été entre autres supposé que le chaos est le résultat d'une accumulation de niveaux d'instabilité qui finissent par fusionner ou s'imbriquer à différentes échelles temporelles et spatiales. Sans le réfuter dans sa globalité, ce point de vue est contredit par des modèles chaotiques faisant appel à la définition d'autres paramètres qui induisent le chaos. Dans l'imaginaire, il peut être conçu que la complexité doit déboucher inévitablement sur une situation chaotique. Cette vision n'est pas totalement réfutable quoique un débat peut s'instaurer: la complexité induit-elle le chaos ? Le chaos conduit-il à la complexité au sens où toute analyse devient impossible et toute prédiction évacuée? Référence faite au chaos déterministe, suivre l'évolution d'un système chaotique est possible puisque sont disponibles le modèle mathématique et les paramètres de contrôle.

La prédiction reste problématique. Dans l'absolu, partant de conditions initiales fixées, il est possible de projeter l'évolution du système dans le temps et en déterminer l'état. Mais un système chaotique étant sensible justement au choix de ces conditions initiales, tout effort de prédiction ou de prédictibilité s'avèrera stérile.

X- CHAOS ET PHENOMENES STOCHASTIQUES

La différence entre un processus chaotique et un phénomène aléatoire reste le point le plus important pour la compréhension du chaos. Ces deux éléments partagent un élément clé: leur imprédictibilité. Dans le cas d'un processus stochastique, cette dernière peut être rattachée au nombre élevé de paramètres nécessaires pour la description du phénomène et adopter une approche probabiliste peut s'avérer suffisante et le caractère aléatoire est sauvegardé.

Le chaos présente une toute autre situation: déterministe, il est sous – tendu par des outils mathématiques qui permettent, *a priori* une description quasi-certaine et précise.

L'approche probabiliste du chaos serait un non-sens. En effet, pour des conditions initiales connues et extrêmement proches, les évolutions sont pratiquement "équiprobables" et cette approche ne sera d'aucune utilité. D'une manière générale, les systèmes chaotiques possèdent des propriétés qu'ils partagent plus avec les systèmes déterministes qu'avec les phénomènes stochastiques.

Le tableau III-1 affiche une étude comparative des niveaux de prédictibilité à court et à moyen terme en fonction de la nature du système considéré. Notons le très fort niveau de prédictibilité dont jouissent les systèmes linéaires et le niveau médiocre des systèmes non linéaires stochastiques. Entre ces deux catégories viennent s'intercaler les systèmes non linéaires, entre autres chaotiques, affichant, comme il fallait s'y attendre, un bon niveau de prédictibilité à court terme mais se dégrade pour une prédictibilité à long terme.

	NIVEAU DE PREDICTIBILITE			
	A court terme		A long terme	
	bas	élevé	bas	élevé
DYNAMIQUE LINEAIRE		X		X
DYNAMIQUE NON LINEAIRE		X	X	
DYNAMIQUE NON LINEAIRE STOCHASTIQUE	X		X	
DYNAMIQUE COMPLEXE	X			X

tableau III-1 niveaux de prédictibilité en fonction du temps et de la nature des systèmes dynamiques

XI- UN DISPOSITIF EXPERIMENTABLE SIMPLE D'OBSERVATION DU PRINCIPE D'IMPREDICTIBILITE DU CHAOS

Le dispositif illustré par la figure III-9 repose sur le principe du pendule avec cependant quelques particularités. Les attracteurs, sous leurs formes diverses (points fixes, cycles limites) qui se développent un espace de phase bidimensionnel dans lequel les systèmes à deux variables ne peuvent pas conduire au cas chaotique. L'idée d'adjoindre une troisième variable peut conduire à une certaine instabilité. Ainsi en modifiant quelque peu le système pendulaire simple, il est possible de contribuer à créer cet état d'instabilité. Il s'agit d'une intégration du champ magnétique dans un système pendulaire.

Un fragment d'aimant est logé dans une enceinte creuse remplie de sable laquelle désignera le pendule suspendu à une potence. Sur un plateau, à l'aplomb de cette potence, est disposée une boussole baignant dans le champ magnétique terrestre (orientation vers le Nord magnétique). Nous disposons ainsi de trois variables : deux variables relatives à l'oscillation de l'aiguille de la boussole et une variable de phase d'oscillation du pendule. Sur le plan de l'observation, les mouvements oscillatoires du pendule introduisent une distorsion du champ magnétique terrestre qui se traduit par un comportement désordonné et irrégulier de l'aiguille de la boussole en rotation autour de son axe. En désignant un sens angulaire de rotation $\theta(t)$, il est impossible de prédire une direction d'orientation de l'aiguille aimantée : nous sommes en présence d'un mouvement chaotique. Un montage plus élaboré, permettant de définir un espace de phase bidimensionnel de coordonnées, l'angle de rotation $\theta(t)$ et vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$, aboutira à l'obtention de l'attracteur étrange de ce mouvement pendulaire chaotique.

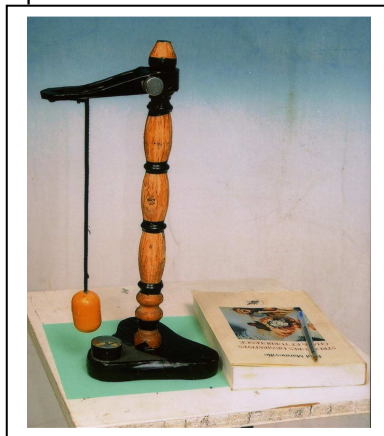


fig. III-9 un oscillateur pendulaire chaotique

XII- LE CONTROLE DU CHAOS**XII-1 PRINCIPE DE LA METHODE OGY (OTT, GREBOJI, YORKE)**

En dépit de ses caractéristiques spécifiques notamment son imprédictibilité, l'absence à toute référence de périodicité (ou d'apériodicité) et la divergence exponentielle de trajectoires bien qu'issues condition initiales très proches, relayée par l'exposant quantitatif de Lyapunov, le chaos inhérent à un système dynamique non linéaire peut toutefois être contrôlé ou tout au moins stabilisé. Le contrôle du chaos ne vise nullement à une remise en cause du mode d'évolution du système dynamique (on détruirait dans ce cas l'essence même de sa fonctionnalité), mais plutôt à exercer une influence celui-ci de manière à l'amener à arborer un comportement plutôt qu'un autre. Le contrôle d'un système chaotique se réfère aux objectifs désirés à travers cette "normalisation" et par suite de la méthode de contrôle à entreprendre. Cependant, il est impératif de sauvegarder l'aspect chaotique du système et ne pas l'en détourner par suite de l'application d'un algorithme de contrôle. L'hypothèse de base concerne donc une conservation de l'information et une préservation des propriétés dynamiques chaotiques.

Le principe en soi est assez simple: au lieu d'intervenir de façon brutale pour contraindre un système physique à sortir du régime chaotique, on exerce sur ce dernier de faibles perturbations de manière à l'amener à se stabiliser.

Les méthodes de contrôle du chaos sont variées et élaborées en fonction de l'objectif assigner à ce contrôle. Nous exposons ci-dessous la méthode dite OGY des initiales de ses concepteurs, Ott,

Grebogi et York. Elle repose sur des éléments de références par rapport auxquels seront effectuées les corrections; ce sont généralement un point fixe ou une trajectoire imposée.

XII-2 LES CONDITIONS D'APPLICATION D'UN ALGORITHME DE CONTROLE DU CHAOS

- le contrôle doit être possible
- L'algorithme de contrôle est applicable à tout moment sur le système, donc il doit être indépendant du temps d'évolution
- Le résultat du contrôle doit être immédiatement perceptible
- Le contrôle ne doit pas être transitoire autrement dit il doit durer dans le temps

XIII- LE CONTROLE DU CHAOS A TRAVERS UN POINT FIXE

Deux méthodes basées sur la détermination d'un point fixe instable sont envisageables:

- la première fait appel à un mode d'observation prolongée dans l'attente de la stabilisation d'une orbite sur laquelle sera construite la correction à apporter au paramètre de contrôle
- la seconde penche plutôt vers la détermination de cette même correction mais en privilégiant une direction donnée, en l'occurrence la direction d'instabilité que fournit la décomposition spectrale de la matrice jacobienne associée à la transformation

XIV- ALGORITHME OGY BASE SUR L'ATTENTE DE STABILISATION DE TRAJECTOIRES

Pour une application (correspondance ou transformation) dont la dynamique obéit en mode discret à l'expression $X_{n+1} = f(\lambda, X_n)$, de point fixe X_f et de paramètre de contrôle λ , nous utilisons le fait que X_n et X_f soient assez proches pour opérer une linéarisation (en fait il s'agit d'un développement limité au voisinage de X_f) de X_{n+1} pris comme une fonction de deux variables X_n et λ

$$X_{n+1} \approx X_f + \frac{\partial f}{\partial X}(X_n - X_f) + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \Delta \lambda_n \quad (\text{III-16})$$

Comme $X_{n+1} \approx X_f$, la correction $\Delta \lambda_n$ sur le paramètre de contrôle est telle que

$$\Delta \lambda_n = - \frac{\frac{\partial f}{\partial X}(X_n - X_f)}{\frac{\partial f}{\partial \lambda}} \quad (\text{III-17})$$

Il est évident que cette valeur de $\Delta \lambda_n$ n'en est qu'une approximation car par un phénomène d'oscillations locales des trajectoires, on ne peut avoir $X_{n+1} \equiv X_f$, ce qui amène à fixer une tolérance ε sur X_n qui devient $X_n \pm \varepsilon$.

L'apparition de la phase de stabilisation d'une trajectoire autour du point fixe estimée en temps, dépend fortement du choix de la condition initiale d'initiation de la dynamique.

XV- APPLICATION DE L'ALGORITHME OGY SUR LA FONCTION LOGISTIQUE

La fonction logistique $X_{n+1} = \lambda X_n (1 - X_n)$ exhibant un comportement chaotique pour $\lambda = 3.8$ (figure III-10) est un exemple standard pour une application de contrôle du chaos.

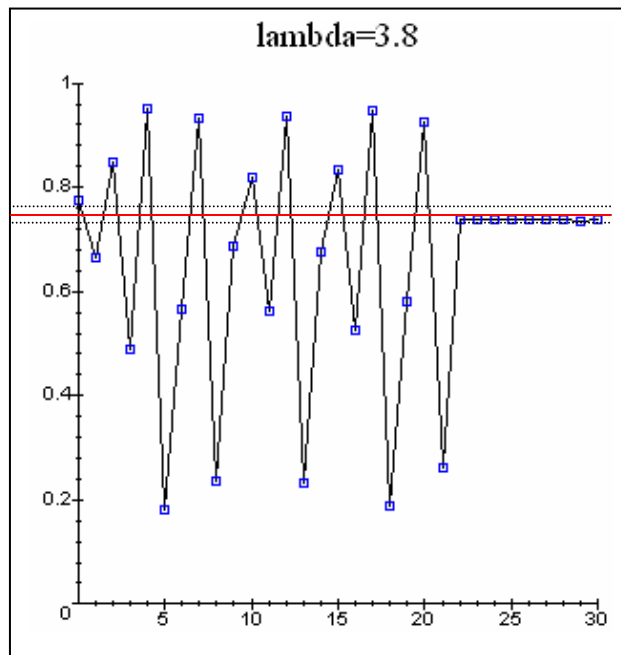


fig. III-10 la fonction logistique pour $\lambda = 3.8$

La valeur du point fixe X_f , solution de l'équation $f(3.8, X) = X$ est telle que $X_f = 0.736$. L'application de l'expression (III-17) fournit la correction $\Delta\lambda_n$ du paramètre de contrôle λ à apporter pour stabiliser les trajectoires autour de ce point fixe

$$\Delta\lambda_n = -\frac{\lambda(1-2X_f)}{X_f(1-X_f)}(X_n - X_f) \quad (III-18)$$

soit

$$\Delta\lambda_n = 9.23X_n - 6.793$$

A chaque étape d'itération n , le nouveau paramètre de contrôle λ_n à prendre en considération dans la dynamique est de la forme

$$\lambda_n = \lambda + \Delta\lambda_n = 9.23X_n - 3$$

Nous avons ainsi une variation du paramètre de contrôle en fonction du temps de déroulement de la dynamique. Cependant, il y a lieu d'attendre, parfois assez longtemps, que la trajectoire se stabilise autour du point fixe. Dans notre simulation (figure III-10), plutôt que nous armer en patience pour observer cette stabilisation et connaissant la sensibilité des systèmes dynamiques au choix de la condition initiale, il a été effectué des tests sur cette dernière pour obtenir cette la stabilisation observée (la condition initiale testée étant $X_0 = 0.774569$) et que nous situons, pour $n = 0,30$ à partir de $n = 21$. Les variations de λ_n (figure III-11) seront donc calculées et appliquées pour $n = 0,21$.

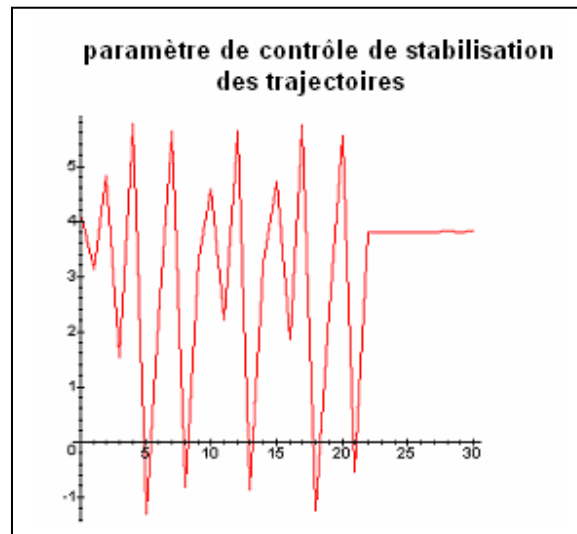


fig. III-11 variations du paramètre de contrôle λ_n en fonction du temps

XVI- L'ALGORITHME OGY PAR LA DECOMPOSITION SPECTRALE DE LA MATRICE JACOBIENNE

Pour une application (correspondance ou transformation) donnée $X_{n+1} = f(\lambda, X_n)$, munie d'un paramètre de contrôle λ à l'instar de la fonction logistique, on note X_f un point fixe instable de la section de Poincaré relative à la récurrence $X_{n+1} = f(\lambda, X_n)$ que nous exprimons comme une fonction de λ : $X_f = X_f(\lambda)$ pour une valeur du paramètre de contrôle $\lambda = \lambda_f$. Si une condition initiale est assez proche du point fixe, au cours de l'évolution du processus dans le temps, un point pris sur une trajectoire se retrouve de plus en plus éloigné de celui-ci par suite de la phase chaotique. L'opération consistera alors à ajuster le paramètre de contrôle λ de façon à ce qu'il demeure dans le voisinage du point fixe.

La suite $\{X_n\}$ des itérés de la transformation seront localisés sur la section de Poincaré et représenteront de ce fait des états de la dynamique avec autant de valeurs du paramètre de contrôle $\{\lambda_n\}$. Cette suite correspond en fait aux composantes d'un vecteur $f = \{f^i\}$ généré par les compositions (ou fonctions de retour) de la transformation.

Soit J le Jacobien associé à la transformation f . Dans notre contexte, il sera estimé localement. Parallèlement, on peut un taux de variation B de la fonction f par rapport aux variations du paramètre λ en posant : $B = \frac{\partial f}{\partial \lambda}$, ceci relativement à la section de Poincaré considérée. Les

perturbations annoncées pour le contrôle de l'attracteur porteront donc sur le paramètre λ et se répercuteront sur la détermination de B .

L'algorithme OGY de contrôle du chaos repose, comme dans le cas précédent, sur une linéarisation particulière de l'expression de la transformation $X_{n+1} = f(\lambda, X_n)$ au voisinage du point fixe X_f en intégrant la suite de valeurs $\{\lambda_n\}$ des valeurs prises par le paramètre de contrôle λ et le Jacobien J de la transformation pris comme une fonction de $X_f(\lambda_n)$

$$X_{n+1} = X_f(\lambda_n) + J[X_f(\lambda_n)] [X_n - X_f(\lambda_n)] \quad (\text{III-19})$$

On définit le taux de variation suivant:

$$\frac{X_f(\lambda_n) - X_f(\lambda_0)}{\lambda_n - \lambda_0} \approx \left. \frac{\partial X_f}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} \quad (III-20)$$

Nous mentionnons les deux accroissements suivants

$$\begin{cases} \Delta X_n = X_n - X_f \\ \Delta \lambda_n = \lambda_n - \lambda_0 \end{cases} \quad (III-21)$$

En posant $b = \left. \frac{\partial X_f}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0}$ l'expression (III-19) devient, en termes de taux de variation

$$\Delta X_{n+1} = X_{n+1} - X_f = X_f(\lambda_n) + J[X_n - X_f(\lambda_n)] - X_f \quad (III-22)$$

En tenant compte des expressions données par (III-19), (III-20), (III-21) et (III-22) nous avons

$$\Delta X_{n+1} = [X_f(\lambda_n) - X_f] + J(X_n - X_f) + J\{(X_n - X_f) - J[X_f(\lambda_n) - X_f]\} \quad (III-23)$$

soit

$$\Delta X_{n+1} = b \cdot \Delta \lambda_n + J(\Delta X_n - b \cdot \Delta \lambda_n) \quad (III-24)$$

L'objectif serait alors d'imposer la condition $\Delta X_{n+1} = 0$. Il convient de préciser de préciser l'influence de la matrice jacobienne relativement aux points fixes et à leurs caractéristiques. Il est donc possible de déterminer la correction $\Delta \lambda_n$ à apporter au paramètre de contrôle λ à partir de (III-24)

$$\Delta \lambda_n = \frac{J}{J-1} \frac{\Delta X_n}{b} \quad (III-25)$$

Dans le cas bidimensionnelle, la décomposition spectrale de cette matrice fournit deux valeurs propres que nous désignons par α_{st} et α_{inst} qui diffèrent par leur module comparé à 1.

Pour $|\alpha_{st}| < 1$, le vecteur propre v_{st} associé, fournit une direction propre stable, alors que le vecteur propre v_{inst} correspondant à la valeur propre α_{inst} telle que $|\alpha_{inst}| > 1$ donne une direction propre instable.. On construit la base duale (d_{st}, d_{inst}) de la base propre (e_{st}, e_{inst}) . Rappelons que tout K -espace vectoriel E admet un espace dual E^* défini comme l'ensemble des formes linéaires sur E . Si $\{e_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ est une base de E , les formes linéaires $\{\varphi_j, j = 1, 2, \dots, n\}$ définies par

$$\varphi_j(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

alors $\{\varphi_j\}$ est une base l'espace E^* et de ce fait est appelée base duale de la base initiale $\{e_i\}$.

Sur le principe algébrique ainsi décrit, les éléments de la base propre (e_{st}, e_{inst}) et de la base duale (d_{st}, d_{inst}) doivent vérifier les relations suivantes:

$$\begin{cases} e_{st} d_{st} = e_{inst} d_{inst} = 1 \\ e_{st} d_{inst} = e_{inst} d_{st} = 0 \end{cases} \quad (III-26)$$

La matrice J (Jacobiene) peut être régénérée à partir de ses valeurs propres, des vecteurs de la base propre et des vecteurs de la base duale

$$J = \alpha_{st} e_{st} d_{st} + \alpha_{inst} e_{inst} d_{inst} \quad (III-27)$$

L'expression (III-24) peut donc être reprise sous la forme

$$\Delta X_{n+1} - b \Delta \lambda_n = (\alpha_{st} e_{st} d_{st} + \alpha_{inst} e_{inst} d_{inst})(\Delta X_n - b \Delta \lambda_n) \quad (III-28)$$

L'objectif serait d'imposer $\Delta X_{n+1} = 0$ pour estimer en suite la variation du coefficient de contrôle $\Delta \lambda_n$

$$-b \Delta \lambda_n = (\alpha_{st} e_{st} d_{st} + \alpha_{inst} e_{inst} d_{inst})(\Delta X_n - b \Delta \lambda_n) \quad (III-29)$$

On compose par le facteur d_{inst} les deux membres de (III-29) et en tenant compte de (III-25), on obtient pour expression de la correction à $\Delta \lambda_n$ à apporter au paramètre de contrôle λ au voisinage du point fixe

$$\Delta \lambda_n = \frac{\alpha_{inst}}{\alpha_{inst} - 1} \frac{d_{inst}}{d_{inst} b} \Delta X_n \quad (III-30)$$

XVII- APPLICATION DE LA METHODE OGY DE CONTROLE DU CHAOS SUR L'ATTRACTEUR DE HENON

L'attracteur de Hénon appartient à la classe des récurrences non linéaires du second ordre à variables réelles de forme explicite

$$\begin{cases} X_{n+1} = f(X_n, Y_n) \\ Y_{n+1} = g(X_n, Y_n) \end{cases} \quad (III-31)$$

où les fonctions $f(X_n, Y_n)$ et $g(X_n, Y_n)$ sont continues, uniformes et non linéaires des variables X_n et Y_n . Les propriétés des solutions du système (III-31) peuvent conduire ainsi à des situations fort complexes voire de chaos mais incluant des cellules à l'intérieur desquelles les trajectoires affichent un comportement qualitatif régulier de type fractal.

Sur la base du système (III-15)), l'attracteur de Hénon (figure III-12) admet pour expression

$$\begin{cases} X_{n+1} = 1 - aX_n^2 + Y_n \\ Y_{n+1} = bX_n \end{cases} \quad (III-32)$$

a et b étant deux constantes que nous avons fixées ($a = 1.4, b = 0.3$) dans la (figure III-12). Notons que la non linéarité du système provient de la forma quadratique dont est dotée X_{n+1} . La détermination du point fixe de l'attracteur de Hénon passe par la résolution du couple d'équations

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n \\ Y_{n+1} = Y_n \end{cases} \quad (III-33)$$

Il en résulte l'équation du second degré $aX_n^2 + (1-b)X_n - 1 = 0$ dont les racines sont

$$X_f = \frac{(b-1) \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2a} \quad (III-34)$$

L'attracteur de Hénon admet donc deux points fixes dont l'un apparaît plus éloigné du corps de l'attracteur plus explicitement si $b < 1$, un cas généralement admis. On ne retiendra donc que le point

fixe d'expression $X_f = \frac{(b-1) + \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2a}$. Dans notre simulation $X_f \approx 0.631$

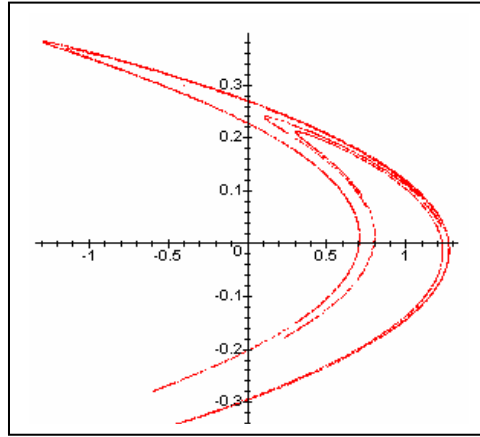


fig. III-12 attracteur de Hénon $a = 1.4$ et $b = 0.3$

La matrice Jacobienne J associée à la transformation qui sous-tend l'attracteur de Hénon est telle que

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_{n+1}}{\partial X_n} & \frac{\partial X_{n+1}}{\partial Y_n} \\ \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial X_n} & \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial Y_n} \end{bmatrix} \quad (\text{III-35})$$

Au point fixe X_f retenu, la matrice jacobienne s'écrit

$$J = \begin{bmatrix} -2aX_f & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III-36})$$

Dans notre simulation

$$J = \begin{bmatrix} -1.766 & 1 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice J , α_{st} et α_{inst} calculées se présentent comme suit

$$\begin{cases} \alpha_{st} = -aX_f + \sqrt{(aX_f)^2 + b} \\ \alpha_{inst} = -aX_f - \sqrt{(aX_f)^2 + b} \end{cases} \quad (\text{III-37})$$

Nous remarquons que le produit $\alpha_{st} \cdot \alpha_{inst} = -b$ représente exactement le Jacobien de la matrice J . Dans notre simulation

$$\begin{cases} \alpha_{st} = 0.156 \\ \alpha_{inst} = -1.922 \end{cases}$$

Remarquons que $|\alpha_{inst}| > 1$ alors que $|\alpha_{st}| < 1$. Les vecteurs propres e_{st} et e_{inst} associés respectivement aux valeurs propres α_{st} et α_{inst} sont

$$\begin{cases} e_{st} = \left(\frac{\alpha_{st}}{b}, 1 \right) \\ e_{inst} = \left(\frac{\alpha_{inst}}{b}, 1 \right) \end{cases} \quad (III-38)$$

Dans notre simulation, on peut prendre comme vecteurs propres

$$\begin{cases} e_{st} = (0.520, 1) \\ e_{inst} = (-6.406, 1) \end{cases}$$

Construction de la base duale (d_{st}, d_{inst}) de la base propre $(\alpha_{st}, \alpha_{inst})$:

Partant des propriétés (III-22) devant relier la base propre et la base duale, cette admet la forme

$$\begin{cases} d_{st} = \left(\frac{-b}{\alpha_{inst} - \alpha_{st}}, \frac{\alpha_{inst}}{\alpha_{inst} - \alpha_{st}} \right) \\ d_{inst} = \left(\frac{b}{\alpha_{inst} - \alpha_{st}}, \frac{-\alpha_{st}}{\alpha_{inst} - \alpha_{st}} \right) \end{cases} \quad (III-39)$$

Dans le cas de notre simulation

$$\begin{cases} d_{st} = (0.144, 0.924) \\ d_{inst} = (-0.144, 0.075) \end{cases}$$

On vérifie aisément les relations instaurées par (III-22), à savoir

$$e_{st} d_{st} \approx e_{inst} d_{inst} \approx 1$$

$$e_{st} d_{inst} \approx e_{inst} d_{st} \approx 0$$

Nous disposons ainsi des éléments nécessaires pour évaluer la correction $\Delta\lambda_n$ du paramètre de contrôle λ pour peu que l'écart ΔX_n entre deux trajectoires consécutives prises aux états n et $n+1$ soit connu.

XVIII- LA QUASI – PERIODICITE: UN PRELUDE AU CHAOS

XVIII-1 INTRODUCTION

Les divers scénarios conduisant à l'instauration d'un régime de chaos reposent sur le critère de bifurcations de cycle lui – même soumis à des contraintes de périodicité dans les cycles limites comme dans le cas de la fonction logistique. Une hypothèse possible mais discutable pour justifier une transition vers le chaos serait de ramener cette dernière à une multiplicité de ces contraintes sous – tendue par l'apparition de nouveaux modes instables au cours de l'évolution dynamique. Cette instabilité introduirait alors de nouvelles composantes fréquentielles venant se greffer sur les

fréquences déjà en place (hypothèse de Landau) Le chaos serait alors dû à une accumulation de bifurcations oscillantes. Ces hypothèses se traduiraient sur le plan spectral par l'apparition de composantes continues Des objections ont émises à l'encontre de ces hypothèses :

- Un mouvement multi – périodique, quoique pouvant apparaître très compliqué peut ne pas conduire à une décroissance des corrélations à long terme. L'architecture du spectre repose sur les fréquences fondamentales et sur les diverses combinaisons linéaires de ces dernières d'où l'évacuation de l'idée de l'apparition et de l'empilement d'un grand nombre de fréquences à différentes échelles de temps
- Ruelle et Takens (1971) ont montré qu'un nombre limité de bifurcations peut suffire à l'apparition du chaos. On n'assiste pas à l'émergence sans cesse renouvelée de fréquences mais à une recomposition de celles déjà existantes dans le système par le bais de combinaisons ou d'interactions non – linéaires.

Un système en régime de chaos est caractérisé par l'existence d'un attracteur étrange c'est – à – dire défini comme des orbites qui ne sont ni périodiques ni quasi – périodiques mais apériodiques. La conception de l'instauration d'un régime chaotique spontané est réfutable tant la conjonction et le côtoïement de phases de stabilité – instabilité, de périodicité – non –périodicité, d'apparition de fenêtres de stabilité dans un environnement de chaos sont autant des critères révélateurs de l'existence de phases anticipant l'instauration du chaos.

Conjointement à des phénomènes ou processus périodiques ou franchement turbulents, peuvent cohabiter des états intermédiaires ou hybrides tenant à la fois des deux premiers et jouissant de caractéristiques intrinsèques propres à même de leur conférer un statut évènementiel spécifique. Ces états mitoyens appartiennent à la classe des processus dits quasi-périodiques. La quasi-périodicité est principalement importante dans le cas des systèmes hamiltoniens et les systèmes dissipatifs dont la propension à une dérive chaotique relève de la présence aux termes de non linéarité et accompagnée d'une émergence d'attracteurs étranges. Il conviendrait pour un meilleur diagnostic de cette catégorie de processus que nous prolongeons à des fins de simulation à la classe des signaux quasi-périodiques , de situer la frontière entre périodicité et quasi-périodicité.

XVIII-2 CARACTERISATION SPECTRALE D'UN SIGNAL PERIODIQUE

Perçu sous l'angle d'une duplication à l'identique d'un signal source réel et stationnaire $s(t)$, un signal T -périodique $s_T(t)$ peut être représenté comme la sortie d'un système duplicateur ou de périodisation dont la réponse impulsionnelle est le peigne de Dirac $\mathbb{W}_T(t)$ de période T , tel que:

$$\mathbb{W}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad (III-40)$$

$\delta(t)$ désignant la distribution singulière de Dirac. De ce fait, le signal périodique $s_T(t)$ prend a forme convolutive suivante:

$$s_T(t) = s(t) * \mathbb{W}_T(t) = s(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad (III-41)$$

L'expression (III-45) traduit ainsi la dynamique de périodisation du signal $s(t)$ en écrivant:

$$s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t - nT) \quad (III-42)$$

Sur le plan spectral et via la transformation de Fourier (TF), les spectres $S(\nu)$ et $S_T(\nu)$ des signaux $s(t)$ et $s_T(t)$ respectivement sont reliés par l'expression :

$$S_T(\nu) = \frac{1}{T} S(\nu). \mathbb{W}_{\frac{1}{T}}(\nu) = \frac{1}{T} S(\nu). \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - \frac{n}{T}) \quad (III-43)$$

L'espace de référence étant dans le cas présent l'espace \mathcal{D}' des fonctions généralisées (distributions), le spectre $S_T(\nu)$ dans (III-43) prend la forme suivante:

$$S_T(\nu) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(\frac{n}{T}). \delta(\nu - \frac{n}{T}) \quad (III-44)$$

Il apparaît donc que le spectre d'un signal périodique est constitué par une succession de raies spectrales matérialisées par les masses de Dirac $\left\{ \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right) \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ régulièrement espacées, pondérées en amplitude par les valeurs du spectre continu aux points d'abscisses temporelles multiples entiers de la fréquence fondamentale $\frac{1}{T}$.

La figure III-13 illustre le spectre un signal périodique $s(t)$ à trois composantes sinusoïdales $s_1(t)$, $s_2(t)$ et $s_3(t)$, donc tel que

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t)$$

avec

$$\begin{cases} s_1(t) = \sin(2\pi 40t) \\ s_2(t) = \sin(2\pi 25t) \\ s_3(t) = \sin(2\pi 10t) \end{cases}$$

Le spectre $S(\nu)$ met en évidence trois raies spectrales localisées par rapport à l'axe des fréquences sur les fréquences fondamentales de chacun des signaux composantes $\nu_1 = 10\text{Hz}$, $\nu_2 = 25\text{Hz}$ et $\nu_3 = 40\text{Hz}$. Remarquons la très faible interaction des fréquences fondamentales, une des caractéristiques fondamentales des signaux non chaotiques.

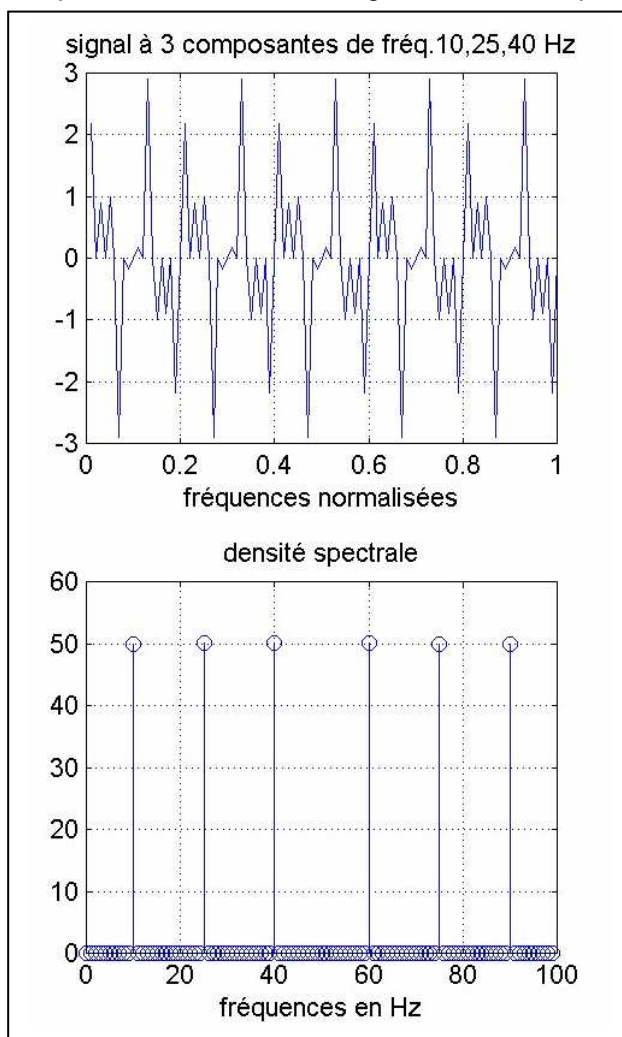


fig. III-13 signal à trois composantes sinusoïdales (10,25,40 Hz) et densité spectrale associée

Il est possible de définir une classe adjacente de signaux périodiques non stationnaires faisant non plus une fréquence fondamentale mais une suite de fréquences dites incommensurables $\{\nu_k\}_{k \in \mathcal{N}}$ c'est-à-dire dont le rapport est un facteur irrationnel i.e. $\nu_{k+1} = \alpha \nu_k$, α un irrationnel. Au cours de leur évolution temporelle, il se développe une brisure de la symétrie ou de l'harmonie observées dans un état de périodicité par suite d'une recombinaison du contenu fréquentiel ayant pour origine les effets d'interaction ou d'interférence des fréquences fondamentales.

XVIII-3 CARACTERISATION SPECTRALE D'UN SIGNAL QUASI-PERIODIQUE

XVIII-3-1 SUR UNE FORMULATION D'UN PROCESSUS N - QUASI - PERIODIQUE

Intuitivement, la quasi-périodicité peut être perçue comme la jonction de phénomènes périodiques sévissant à différentes fréquences fondamentales. Ainsi une N - quasi-périodicité se rapporte à un signal ou un phénomène quasi-périodique développant N fréquences de quasi-périodicité. Un modèle mathématique simplifié d'un signal quasi-périodique $s_{qp}(t)$ serait une combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales opérant à des fréquences fondamentales incommensurables

$$s_{qp}(t) = \sum_{k \in \mathcal{N}} \lambda_k \sin(2\pi \nu_k t + \theta_k) \quad (\text{III-45})$$

avec $\nu_{k+1} = \alpha \nu_k$, α étant un nombre irrationnel.

La fonction d'auto- corrélation $\varphi_{s_{qp}}(\tau)$ du signal quasi-périodique $s_{qp}(t)$ jouit elle-même du caractère de quasi-périodicité puisque étant de la même forme que le signal $s_{qp}(t)$ mais sans aucune référence aux phases θ_k figurant dans ce dernier :

$$\varphi_{s_{qp}}(\tau) = \sum_{k \in \mathcal{N}} \frac{\lambda_k^2}{2} \cos(2\pi \nu_k \tau) \quad (\text{III-46})$$

Notons que la fonction d'auto – corrélation du signal quasi – périodique est nulle dès que les fréquences fondamentales intrinsèques à chaque composante sont différentes.

XVIII-3-2 REPRESENTATION D'UN PROCESSUS QUASI – PERIODIQUE

Un processus N - quasi – périodique peut être décrit par une fonction à N variables $((t_i)_{i=1,N})$ de sorte qu'il soit périodique par rapport à chaque variable. On note $\{s_{qp}(t_i)\}_{i=1,N}$ une fonction N - quasi – périodique obtenue à partir de la périodisation d'une fonction de base $\{s(t_i)\}_{i=1,N}$ de période T_i

$$s_{qp}(t_i) = s(t_i) * \sum_{k=1}^N \delta(t_i + kT_i) \quad (\text{III-47})$$

La périodicité par rapport à chaque variable se traduit par la relation

$$s_{qp}(t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_N) = s_{qp}(t_1 + T_1, t_2 + T_2, \dots, t_i + T_i, \dots, t_N + T_N) \quad (\text{III-48})$$

La fréquence fondamentale est de la forme $\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}$

XVIII-4 SPECTRE D'UN PROCESSUS QUASI – PERIODIQUE

La fonction quasi – périodique $s_{qp}(t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_N)$ étant périodique par rapport à chaque variable admet un développement en série de Fourier à N dimensions

$$s_{qp}(t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_N) = \sum_{n_1 n_2 \dots n_N} C_{n_1 n_2 \dots n_N} \exp[j(\omega_1 n_1 t_1 + \omega_2 n_2 t_2 + \dots + \omega_i n_i t_i + \dots + \omega_N n_N t_N)] \quad (\text{III-49})$$

Nous exprimons la Transformée de Fourier (*TF*) des deux membres de (III-49) lorsque $t_i \leftrightarrow v_i \Big|_{i=1,N}$. Le spectre $S_{qp}(v_1', v_2', \dots, v_k', \dots, v_N')$ du signal quasi – périodique s'écrit donc

$$S_{qp}(v_1', v_2', \dots, v_k', \dots, v_N') = \sum_{n_1 n_2 \dots n_N} C_{n_1 n_2 \dots n_N} TF \left[\prod_{i=1}^N \exp(j n_i \omega_i t_i) \right]_{t_i \leftrightarrow v_i'} \quad (III-50)$$

En désignant par \prod^{\otimes} le produit de convolution à plusieurs facteurs, l'expression (III-50) devient

$$S_{qp}(v_1', v_2', \dots, v_k', \dots, v_N') = \sum_{n_1 n_2 \dots n_N} C_{n_1 n_2 \dots n_N} \prod_{i=1}^N \otimes TF [\exp(j n_i \omega_i t_i)]_{t_i \leftrightarrow v_i'} \quad (III-51)$$

La Transformée de Fourier figurant au second membre de (III-51) n'est autre qu'une distribution de masses de Dirac réparties sur l'axe des fréquences

$$S_{qp}(v_1', v_2', \dots, v_k', \dots, v_N') = \sum_{n_1 n_2 \dots n_N} C_{n_1 n_2 \dots n_N} \prod_{i=1}^N \otimes \delta(v_i' - n_i v_i) \quad (III-52)$$

avec $v_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$. Le produit de convolution à N facteurs de masses de Dirac aboutit à une masse de

Dirac unique soumise à une amplitude de translation correspondant à la somme des amplitudes des translations partielles

$$S_{qp}(v_1', v_2', \dots, v_k', \dots, v_N') = \sum_{n_1 n_2 \dots n_N} C_{n_1 n_2 \dots n_N} \delta \left(v_i' - \sum_{i=1}^N n_i v_i \right) \quad (III-53)$$

Le spectre d'un signal quasi – périodique est donc constitué d'une séquence de raies spectrales parmi lesquelles celles correspondant aux fréquences fondamentales mais accompagnées de raies

secondaires localisées à la fréquence $v = \sum_{i=1}^N n_i v_i$. Ceci se traduit par deux conséquences: d'une

part une tendance à un élargissement du spectre, d'autre part un enrichissement en raies spectrales fictives de moindre amplitudes et venant se greffer autour des raies fondamentales.

La figure III-4 illustre un signal quasi – périodique $s_{qp}(t)$ à trois composantes sinusoïdales

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{qp1}(t), s_{qp2}(t) \text{ et } s_{qp3}(t) \text{ donc tel que} \\ s_{qp}(t) = s_{qp1}(t) + s_{qp2}(t) + s_{qp3}(t) \end{array} \right.$$

avec

$$\begin{aligned} s_{qp1}(t) &= \sin(2\pi \cdot 40t) \\ s_{qp2}(t) &= \sin(2\pi \sqrt{2} \cdot 25t) \\ s_{qp3}(t) &= \sin(2\pi \sqrt{3} \cdot 10t) \end{aligned} \quad (III-54)$$

Nous retrouvons effectivement les raies spectrales correspondants aux fréquences fondamentales mais accompagnées d'oscillations secondaires d'amplitudes moindres comparées aux premières (figure III-14).

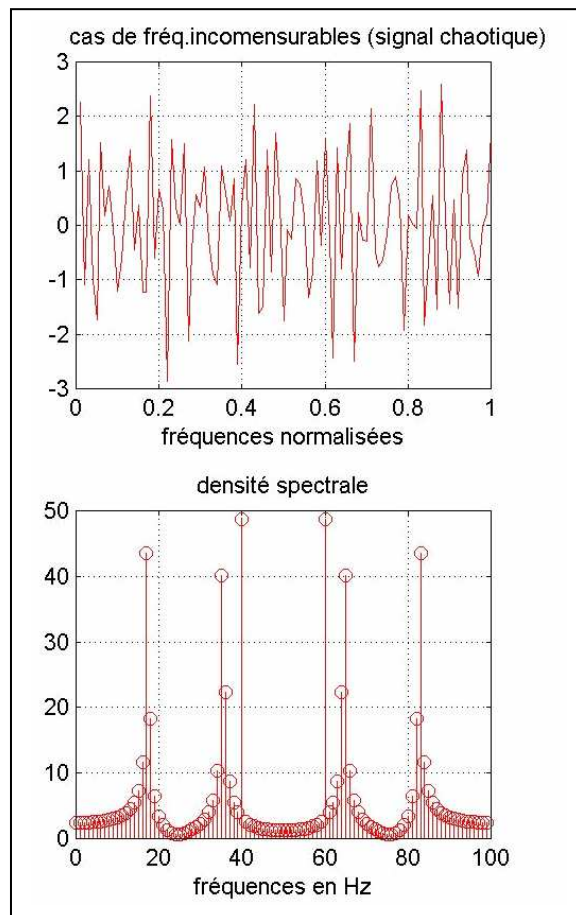


fig. III-14 signal à trois composantes sinusoïdales de fréquences incommensurables ($40, 25\sqrt{2}, 10\sqrt{3}$ Hz) et densité spectrale associée

XIX- TRAJECTOIRES DE PHASE ET PROCESSUS QUASI – PERIODIQUES

Bien qu'explicite en terme d'analyse des signaux quasi – périodiques, l'approche spectrale ne fournit qu'un aspect de cette dernière car la dérive chaotique peut émerger par suite de la variation de comportement ou d'évolution d'autres paramètres qu'il conviendrait de diagnostiquer à l'instar des trajectoires de phase et de la structure de l'attracteur dans le cas des processus quasi – périodiques.

XIX-1 CYCLE LIMITE ATTRACTEUR DANS UN PROCESSUS PERIODIQUE

En présence d'un cycle limite attracteur dans un processus dynamique périodique, les trajectoires de phase convergent vers une zone privilégiée de l'espace de phases et se resserrent de plus en plus au cours de l'évolution temporelle du processus pour révéler l'image géométrique de l'attracteur (figure III-15).

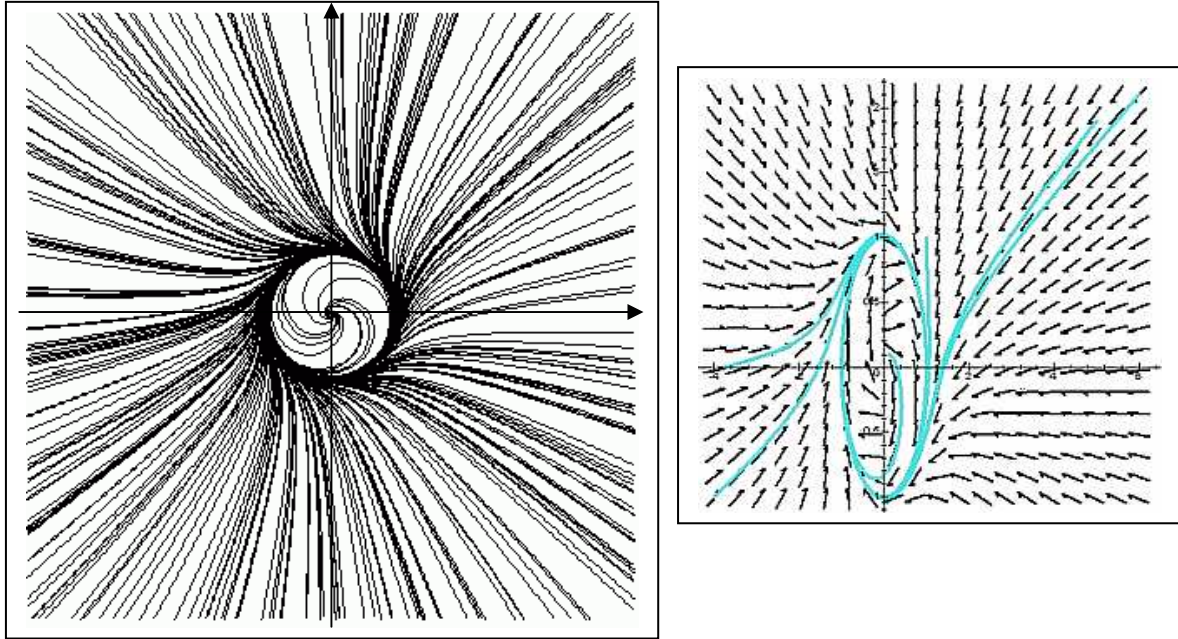


fig. III-15 un exemple de cycles limites attracteurs dans un processus dynamique périodique

XIX-2 CYCLE LIMITE ATTRACTEUR DANS UN PROCESSUS QUASI – PERIODIQUE

L'objectif assigné à cette section est la mise en évidence de la géométrie de l'attracteur sur lequel se développeront les orbites de phase, de l'évolution probable de ce dernier dans le temps voire de sa "destruction" pour quitter le statut de quasi – périodicité pour une résurrection du cas périodique ou bien un basculement vers un comportement chaotique.

Partant du système dynamique représenté par le vecteur $X(t) = \{x^i(t)\}_{i \in \mathcal{N}}$ admettant pour représentation différentielle l'expression

$$\frac{dX}{dt} = F[X(t)] \quad (\text{III-55})$$

nous nous proposons d'examiner la structure de l'attracteur et par suite d'entrevoir la procédure d'évolution des trajectoires de phase correspondantes sur ce dernier. Nous supposons que le système dynamique (III-55) admet une solution 2-quasi – périodique. Dans ce cas, chaque composante $\{x^i(t)\}$ du vecteur $X(t)$ est représentée par une fonction $G^i(t)$ telle que

$$x^i(t) = G^i(t_1, t_2) \Big|_{t=t_1, t_2} \quad (\text{III-56})$$

La fonction $G^i(t_1, t_2)$ étant 2-quasi – périodique par rapport à chaque variable t_1 et t_2 respectivement de périodes T_1 et T_2 , il suffit donc de spécifier les valeurs de $t_1 \text{ modulo } T_1$ et $t_2 \text{ modulo } T_2$. Nous pouvons écrire dans le cadre de la convolution bidimensionnelle

$$G^i(t_1, t_2) = G^i(t_1, t_2) \underset{t_1, t_2}{**} \delta(t_1 + k_1 T_1, t_2 + k_2 T_2) \quad (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \quad (\text{III-57})$$

De façon équivalente

$$G^i(t_1, t_2) = G^i(t_1, t_2) \underset{t_1, t_2}{**} \delta \left[\frac{T_1}{2\pi} (\omega_1 t_1 + 2k_1 \pi), \frac{T_2}{2\pi} (\omega_2 t_2 + 2k_2 \pi) \right] \quad (\text{III-58})$$

avec $\omega_1 = 2\pi/T_1$; $\omega_2 = 2\pi/T_2$. En remarquant que $t_{1,2} = \frac{T_{1,2}}{2\pi} \omega_{1,2} t_{1,2}$ et en définissant $\theta_{1,2} = \omega_{1,2} t_{1,2} \text{ modulo } 2\pi$, l'expression (III-58) devient

$$G^i(t_1, t_2) = \frac{2\pi}{T_1} \frac{2\pi}{T_2} G^i\left(\frac{\theta_1}{\omega_1}, \frac{\theta_2}{\omega_2}\right) \quad \text{(III-59)}$$

L'état du système est alors défini par le vecteur X et la fonction G tels que

$$X = G(t_1, t_2) = G\left(\frac{\theta_1}{\omega_1}, \frac{\theta_2}{\omega_2}\right) \quad \text{(III-60)}$$

Dans le cas de quasi-périodicité et par rapport au cas simple abordé dans cette section, l'attracteur sur lequel se développent les orbites est décrit par l'équation

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = G\left(\frac{\theta_1}{\omega_1}, \frac{\theta_2}{\omega_2}\right) \quad \text{(III-61)}$$

La fonction G ainsi définie est périodique, de période 2π par rapport aux nouvelles variables introduites θ_1 et θ_2 . Dans le plan (x^1, x^2) , sa représentation graphique est un tore bidimensionnel (figure III-6) sur lequel évolueront par enroulement continu les trajectoires de phase relativement à deux directions voire trois si on y inclut le cas asymptotique : une direction dite "courte" caractérisée par le paramètre angulaire θ_1 et une direction dite "longue" pour le second paramètre angulaire θ_2 . Ce mouvement composé induit donc un phénomène de rotation qui déterminera l'issue de l'attracteur toroïdal à savoir soit le maintien du statut de quasi-périodicité du processus, soit une destruction de cet attracteur pouvant déboucher à terme sur un état de périodicité ou carrément de chaos (figure III-16).

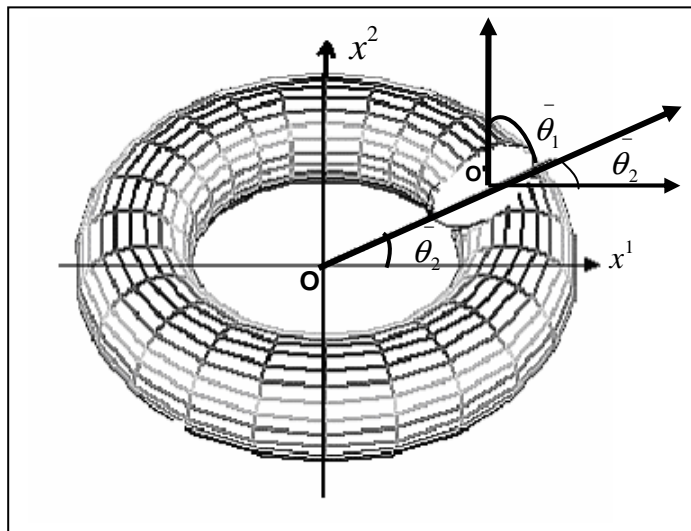


fig. III-16 directions courte θ_1 et direction longue θ_2
d'évolution des trajectoires sur le tore bidimensionnel

XIX-3 UN PARAMETRE DETERMINANT : LE NOMBRE DE ROTATIONS

Eu égard à la structure toroïdale de l'attracteur et au caractère bidirectionnel d'évolution des orbites de phase (figure III-17), le nombre de rotations R de ces dernières dans la direction la plus courte et la direction la plus longue prédéterminera la transition du processus dynamique quasi-périodique

vers un état périodique stable ou vers un comportement instable chaotique. Ces deux dernières situations sont précédées par une destruction de l'attracteur torique.

Par rapport aux vitesses de rotation ω_1 dans la direction la plus courte et ω_2 dans la direction la plus longue, le nombre de rotations R est défini comme le rapport

$$R = \frac{\omega_1}{\omega_2} \tag{III-62}$$

Cette définition n'est pas fortuite car derrière l'incommensurabilité des vitesses de rotation ω_1 et ω_2 se dégagent deux cas :

- si R est irrationnel, l'orbite décrivant le tore ne se referme pas sur elle – même
- si R est rationnel donc de la forme $R = \frac{p}{q}$, l'orbite va se refermer sur elle – même après p rotations dans la direction courte et q rotations dans la direction la plus longue.

En introduisant l'expression (III-62), il vient que

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \frac{p}{T_2} = \frac{q}{T_1} \tag{III-63}$$

T_1 et T_2 étant les périodes associées respectivement aux vitesses de rotations ω_1 et ω_2 . Une orbite est périodique, de période $pT_1 = qT_2$. La figure III-18 est une illustration pour $R = 3$. Une orbite se referme sur elle-même après trois rotations dans la direction la plus courte et une rotation dans la direction la plus longue.

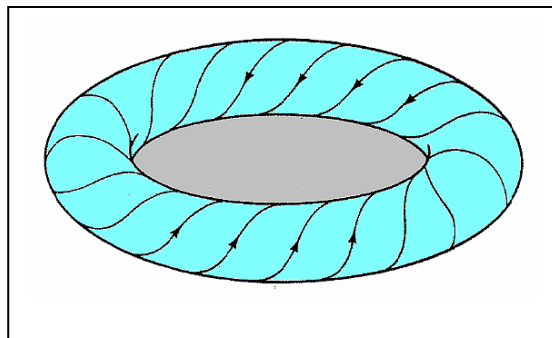


fig. III-17 distribution des trajectoires sur un tore

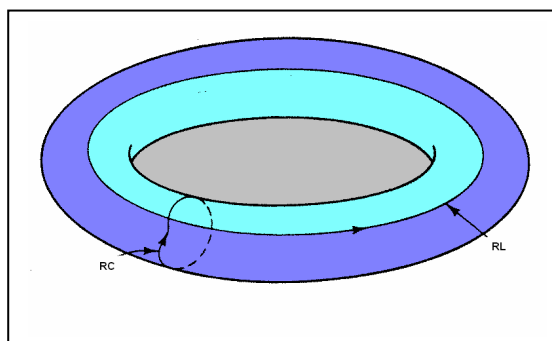


fig. III-18 évolution des trajectoires de révolution longue (RL) et des trajectoires de révolution courte (RC) sur un tore

XX- La N - QUASI PERIODICITE

Dans le cas d'une N -quasi-périodicité, les orbites constituant le flot se développeront sur une surface toroïdale de dimension N , T^N avec $N > 2$. La procédure d'évolution et de distribution des orbites

quoique plus complexe présente néanmoins des similitudes avec le cas développé ci-dessus. Soit un processus dynamique non – linéaire $s(t)$ rattaché à la famille de fréquences $\left\{ \Omega_i, i = 1, n \right\}$ tel que

$$s(t) = f(t, \Omega_i, i = 1, n) \quad (III-64)$$

Le processus $s(t)$ contiendra aussi les combinaisons linéaires issues des fréquences Ω_i donc de la forme

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Omega_i \quad (III-65)$$

Dans le cas où les fréquences Ω_i sont incommensurables, le processus $s(t)$ sera déclaré N -quasi périodique. Le flot N -quasi périodique peut être mis sous la forme d'un système dynamique sur le tore T^N donné par le système

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \Omega_i \quad (III-66)$$

Il est intéressant de concevoir un mouvement N -quasi périodique dont les trajectoires se développent un tore de dimension N dans le cas d'un système dynamique évoluant par suite de l'addition de "modes actifs", chacun s'exprimant par oscillation et par le biais de sa fréquence propre. Si l'on suppose que le mouvement initial attracteur est stable, les états futurs de la dynamique peuvent dépendre d'un paramètre p à préciser lequel évoluera en passant par les états p_1, p_2, \dots, p_N . Accompagnant ces variations de nouveaux modes actifs apparaîtront, chacun avec sa propre fréquence fondamentale $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$. Ces fréquences Ω_i sont introduites au fur et à mesure que le paramètre p passe par ses différentes valeurs p_i et l'attracteur lui-même passera par des étapes de transition avant d'aboutir au tore T^N conformément au schéma suivant:

XXI- LE MODELE DIFFERENTIEL DE LORENZ

Ce modèle différentiel a été établi par le météorologue américain E; Lorenz (1963) pour rendre compte des effets de convection turbulente au sein des hautes couches de l'atmosphère. Trois variables sont prises en considération : l'amplitude $x(t)$ du mouvement de convection, la différence de température $y(t)$ entre courants ascendants et descendants, l'écart de température $z(t)$ par rapport à un profil linéaire. Un aspect anecdotique ou même historique entoure la formulation finale du modèle de Lorenz reposant sur un système de trois équations différentielles dont deux sont non – linéaires et exprimé comme suit

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \quad (III-67)$$

Il est évident que seules les équations $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ sont affectées de la non – linéarité. Les termes σ , r et b sont des paramètres positifs dont les variations prédéfiniront le comportement des trajectoires, la stabilité des solutions, la présence et la nature des attracteurs et enfin la transition et l'installation du chaos.

XXI-1 SOLUTIONS STATIONNAIRES DU MODELE DE LORENZ

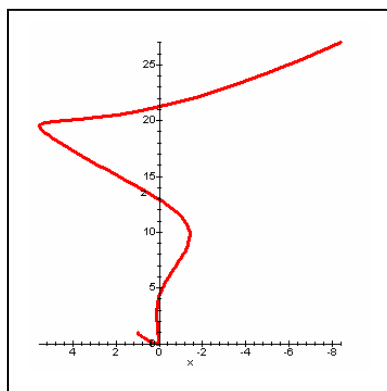
Elles sont obtenues en posant $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$ et conduisent aux relations suivantes

$$\begin{cases} x = y \\ z = \frac{x^2}{b} \\ x^2 = b(r-1) \end{cases} \quad (III-68)$$

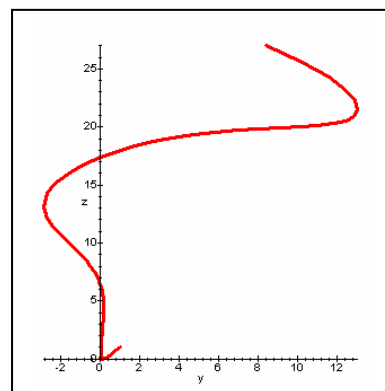
De la dernière relation de (III-68), nous tirons

$$x = \pm\sqrt{b(r-1)} \quad \text{si } r \geq 1 \quad (III-69)$$

Ainsi si $0 \leq r \leq 1$, seul le point $x = y = z = 0$ est un point d'équilibre qui est stable (figure III-19 (a) et (b))



(a)



(b)

fig. III-19 modèle de Lorenz : si $0 \leq r \leq 1$ (ici $r = 0.5$), le point $x = y = z = 0$ est un point d'équilibre stable (a) $z = f(x)$ (b) $z = f(y)$

La valeur $r = 1$ est donc une valeur critique annonciatrice d'une bifurcation car au-delà de cette valeur, l'origine des coordonnées perd sa stabilité pour donner naissance à deux nouveaux points d'équilibre E_1 et E_2 tels que

$$\begin{cases} E_1 = \left(x = \sqrt{b(r-1)}, y = x, z = \frac{x^2}{b} = r-1 \right) \\ E_2 = \left(x = -\sqrt{b(r-1)}, y = x, z = \frac{x^2}{b} = r-1 \right) \end{cases} \quad (III-70)$$

L'analyse des orbites du systèmes de Lorenz et partant de sa bifurcation vers un régime chaotique se fera à travers les variations des paramètres σ, r et b , les sections de Poincaré, sa sensibilité aux conditions initiales et la nature des attracteurs étranges éventuels.

XXI-2 SENSIBILITE AUX CONDITIONS INITIALES

C'est l'un des critères d'affirmation qu'un système est soumis à un régime de chaos. Concernant le modèle de Lorenz, il suffit de vérifier cette sensibilité aux conditions initiales à travers les solutions temporelles $x(t)$, $y(t)$ ou $z(t)$. La figure III-10 est un exemple de a sensibilité aux conditions initiales des solutions temporelles pour les paramètres suivants : $r = 28$, $\sigma = 10$ et $b = 8/3$ (cas de chaos). Les groupes de conditions initiales testées sont reportées dans le tableau III-2

solutions temporelles	Groupe 1		Groupe 2	
$x(t)$	$x(0) = 1$		$x(0) = 1.001$	
$y(t)$	$y(0) = 1$		$y(0) = 1$	
$z(t)$	$z(0) = 1$		$z(0) = 1$	

tableau III-2 groupes de conditions initiales testées sur le modèle de Lorenz

L'évolution temporelle des solutions $x(t)$ et $y(t)$ est fortement influencée par les conditions initiales ($x(0) = y(0) = z(0) = 1$ - couleur bleue $x(0) = 1.001, y(0) = z(0) = 1$ couleur rouge). Il est tout de même à remarquer que la solution $z(t)$ est relativement peu influencée par le changement des conditions initiales (figure III-20).

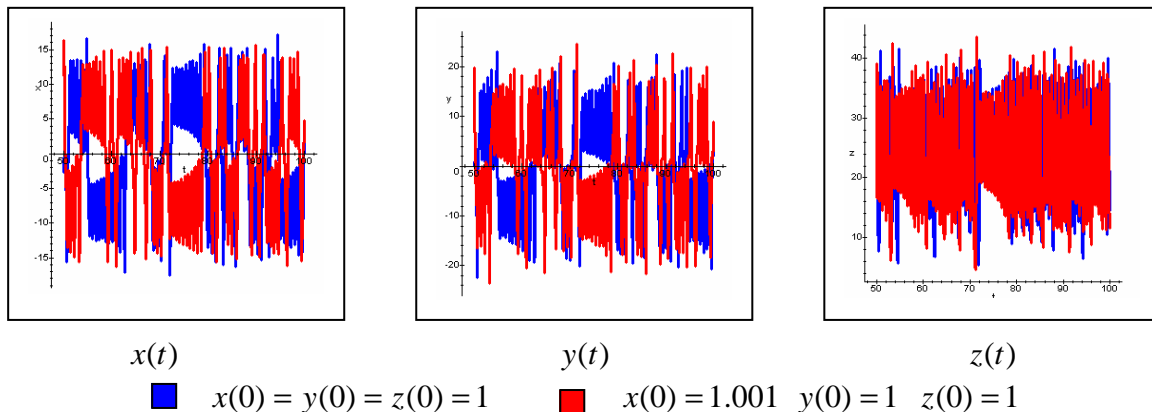


fig. III-20 modèle de Lorenz: influence des conditions initiales sur l'évolution temporelle des solutions

XXI-3 INFLUENCE DU PARAMETRE σ SUR LES POINTS D'EQUILIBRE ET SUR LES ATTRACTEURS ETRANGES

Dans la théorie originale élaborée par Lorenz, des troncatures sévères ont été opérées pour aboutir au modèle tel qu'il est présenté en (III-67). Outre la troncature vers les termes d'ordre le plus bas effectué par Lorenz, il a été attribué des valeurs bien précises aux paramètres σ, b et r probablement dans le souci de convaincre de la bifurcation du modèle vers le chaos. Ainsi la littérature de référence cite le plus souvent les valeurs $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$ pour des sections de Poincaré définies par le plan $z = 27$. Grâce au traitement numérique, trois domaines de variation du paramètre σ augurent du nombre de points d'équilibre ainsi que des attracteurs étranges

1. $3.42 < \sigma < 5.87$: (figure III-21): notre simulation a été menée pour la valeur médiane $\sigma = 4.645$. Il a été ainsi mis en évidence à travers les représentations $z = f(x)$ et $z = f(y)$ (figure III-11) avec $b = 8/3$ et $r = 28$ l'existence de deux points d'équilibre stables dont les attracteurs sont séparés par une frontière probablement de nature très complexe

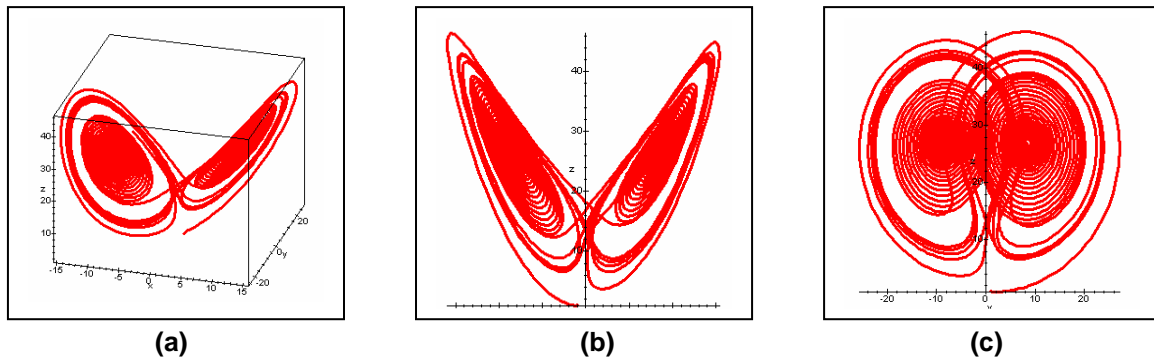


fig. III-21 (a) Modèle différentiel de Lorenz simulé pour $\sigma = 4.645$, $b = 8/3$ et $r = 28$
 (b) $z = f(x)$ (c) $z = f(y)$: mise en évidence de deux points d'équilibre stables

2. $5.87 < \sigma < 6.47$ réalisée pour la valeur médiane $\sigma = 6.17$, la figure 22 met en évidence, à travers les représentations $z = f(x)$ et $z = f(y)$, deux points d'équilibre et un attracteur étrange

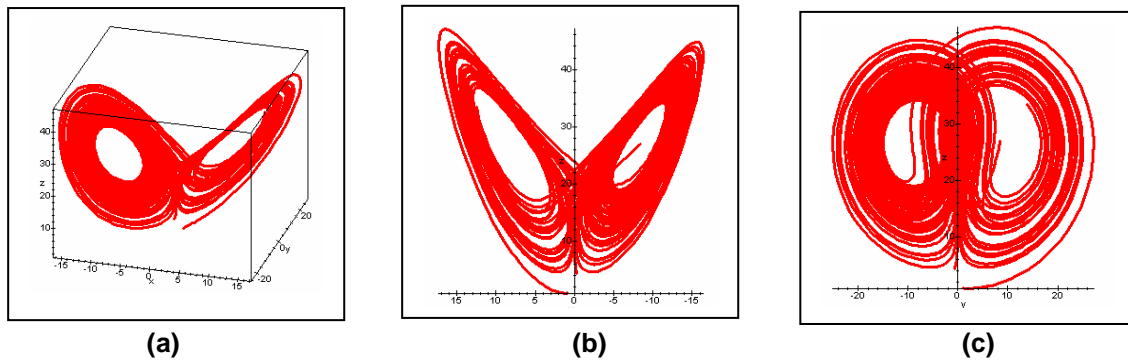


fig. III-22 (a) Modèle différentiel de Lorenz simulé pour $\sigma = 6.17$, $b = 8/3$ et $r = 28$
 (b) $z = f(x)$ (c) $z = f(y)$: mise en évidence de deux points d'équilibre et d'un attracteur étrange

3. $6.47 < \sigma < 10$: en optant pour la valeur médiane $\sigma = 8.235$, la figure III-23 met en évidence un seul ensemble attracteur

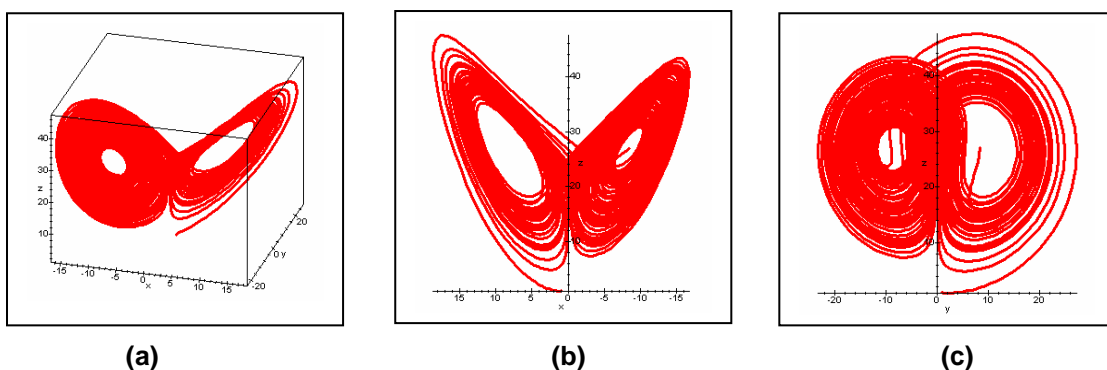


fig. III-23 (a) Modèle différentiel de Lorenz simulé pour $\sigma = 8.235$, $b = 8/3$ et $r = 28$
 (b) $z = f(x)$ (c) $z = f(y)$: mise en évidence d'un seul ensemble attractif

XXI-4 INFLUENCE DU PARAMETRE r SUR LE COMPORTEMENT DU MODELE DE LORENZ

Il a été remarqué que la valeur $r = 1$ est une valeur critique au – delà de laquelle le point origine perd sa qualité de point d'équilibre stable au profit de deux nouveaux points d'équilibre stables tels que

donnés par l'expression III-69 Cependant, la dynamique des bifurcations aidant, ces deux derniers perdent à leur tour leur statut de stabilité au voisinage d'une autre valeur critique du paramètre r : $r = 24.74$. Les figures III-24 III-25 (a) et (b) illustrant les fonctions $z = f(x)$ et $z = f(y)$ ont été obtenues pour les valeurs voisines $r = 24.70$ et $r = 24.75$. Elles dénotent effectivement un basculement de l'évolution de chacune des deux fonctions, plus significatif d'ailleurs pour la fonction $z = f(y)$ (figure III-25 (b))

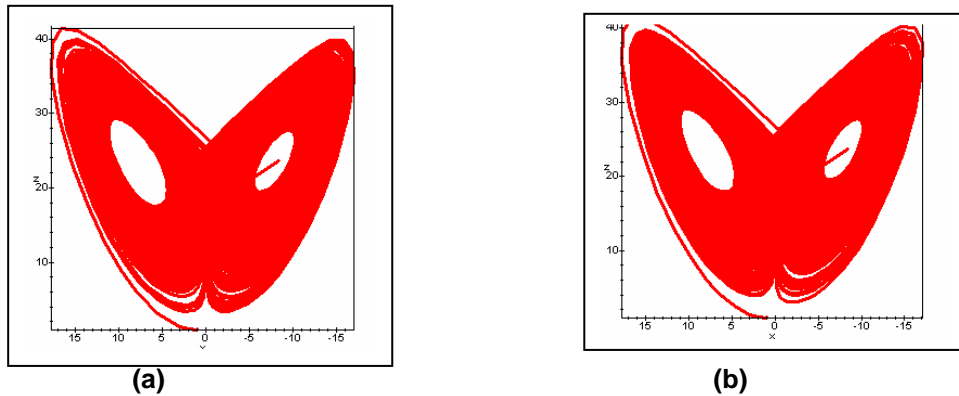


fig. III-24 modèle différentiel de Lorenz : $\sigma = 10$ $b = 8/3$
 (a) $z = f(x)$ pour $r = 24.70$ (b) $z = f(x)$ pour $r = 24.75$

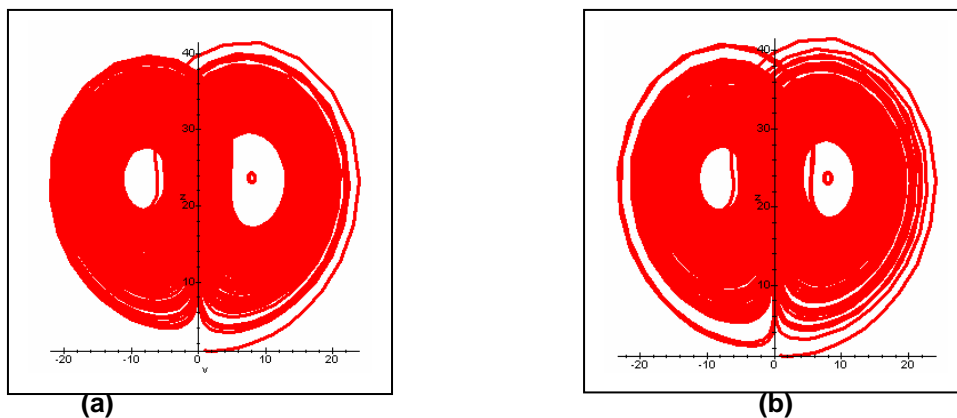


fig. III-25 modèle différentiel de Lorenz : $\sigma = 10$ $b = 8/3$
 (a) $z = f(y)$ pour $r = 24.70$ (b) $z = f(y)$ pour $r = 24.75$

Les figures III-24 (b) et III-25 (b) mettent en évidence des fenêtres de stabilité dont les plus évidentes se manifestent pour:

- $95.52 \leq r \leq 100.79$ (figure III-26 pour $r = 100$)

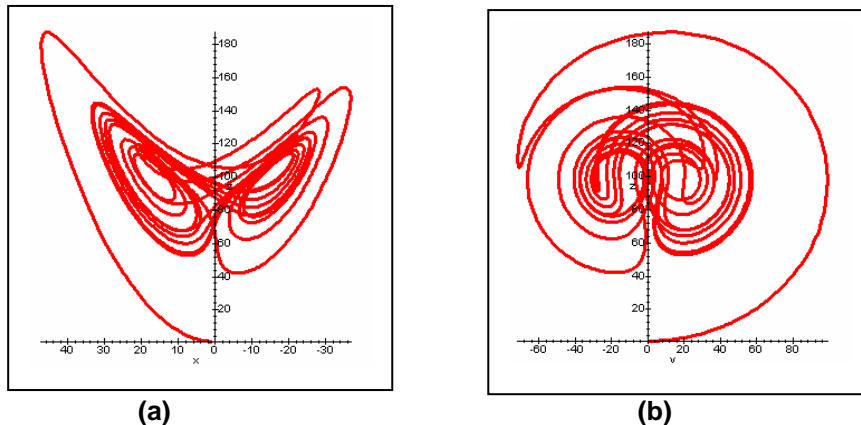
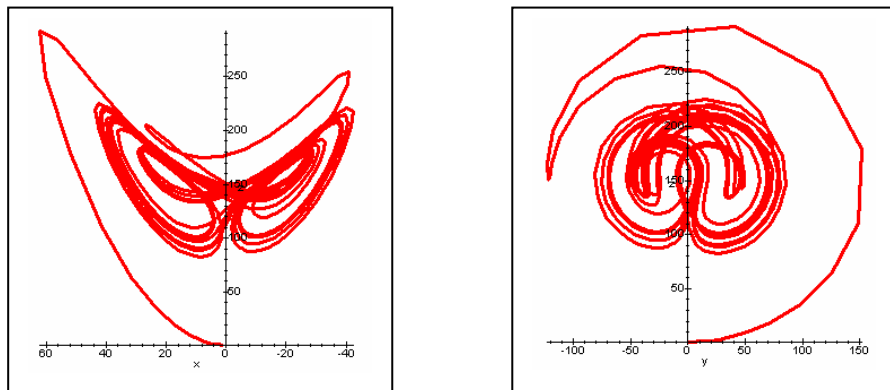


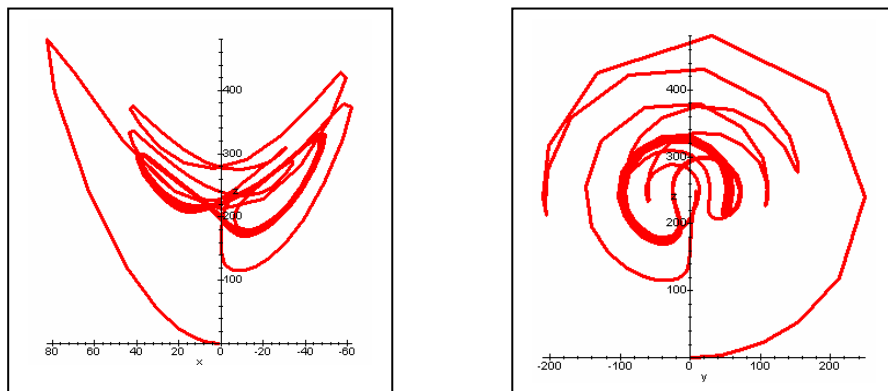
fig. III-26 modèle différentiel de Lorenz : $\sigma = 10$ $b = 8/3$ (a) $z = f(x)$
 (b) $z = f(y)$ pour $r = 100$

- $145 \leq r \leq 166$ (figure III-27) pour $r = 150$



(a) (b)
fig. III-27 modèle différentiel de Lorenz : $\sigma = 10$ $b = 8/3$
(a) $z = f(x)$ et (b) $z = f(y)$ pour $r = 150$

- $r \geq 241$ (figure III-28) pour $r = 250$



(a) (b)
fig. III- 28 modèle différentiel de Lorenz : $\sigma = 10$ $b = 8/3$
(a) $z = f(x)$ et (b) $z = f(y)$ pour $r = 250$

Les figures précédentes ont été obtenues pour une section de Poincaré $z = r - 1$.

Un modèle de Lorenz récurrent et exhibant un comportement chaotique est obtenu en posant $\sigma = 10$, $b = 8/3$ et $r = 28$ (figure III-29), comportement confirmé par les solutions temporelles $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$. Les représentations graphiques de ces dernières mettent en évidence leur évolution vers un régime de chaos plus perceptible dans $x(t)$ et $y(t)$ que pour la solution $z(t)$ (figure III-30).

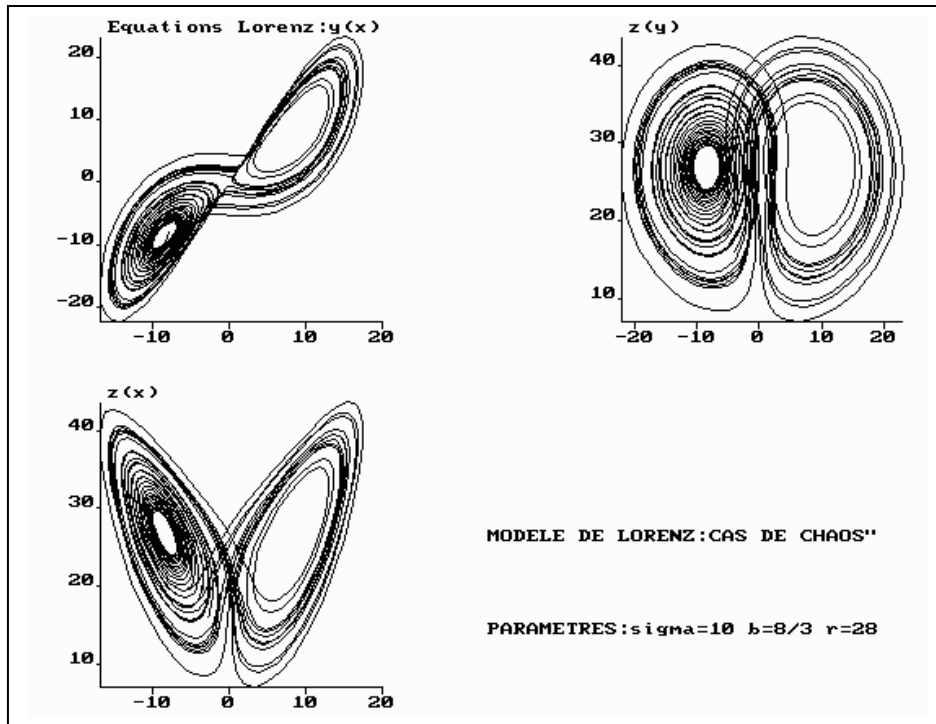


fig. III-29 modèle différentiel de Lorenz pour $\sigma = 10$, $b = 8/3$ et $r = 28$
Graphes des fonctions $y(x)$, $z(y)$ et de $z(x)$

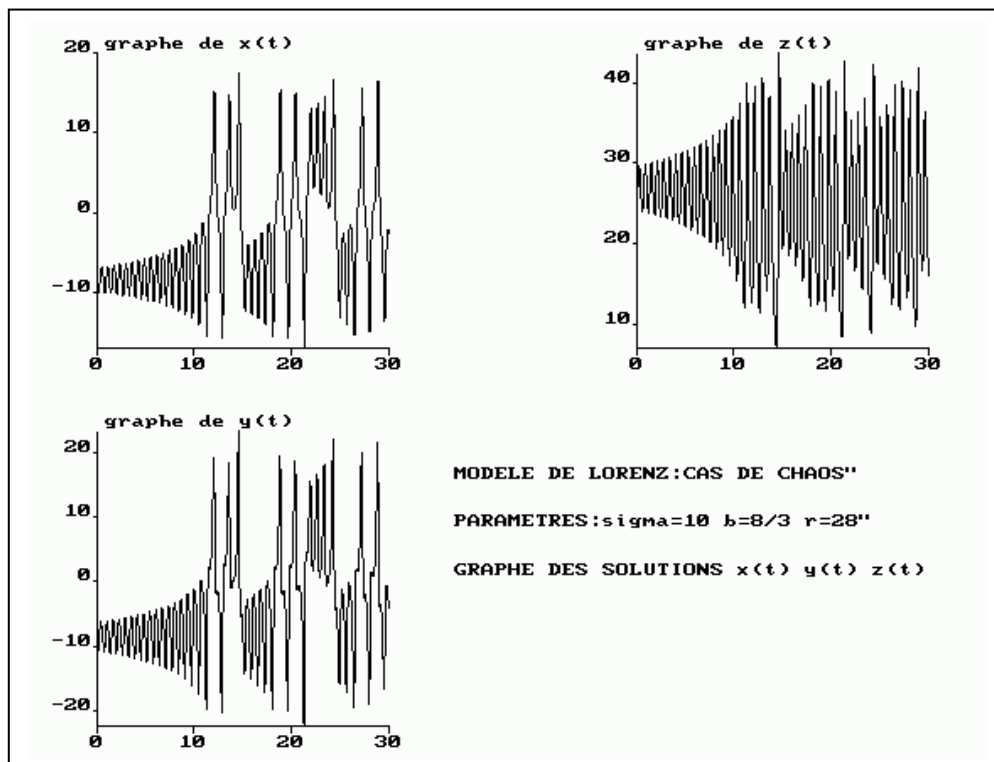


fig. III-30 modèle différentiel de Lorenz pour $\sigma = 10$, $b = 8/3$ et $r = 28$
Graphes des solutions temporelles $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$

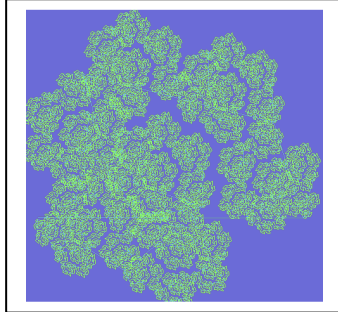
CHAPITRE IV

*La persévérance est invincible
C'est par elle que le temps dans son action
Détruit et renverse toute puissance*

Plutarque

RECURRENCES NON – LINEAIRES ET CHAOS

RECURRENCES NON-LINEAIRES ET CHAOS



I-LES RECURRENCES : UNE FORME MATHEMATIQUE DE MODELISATION

De nombreux phénomènes, entre autres naturels, obéissent à des lois d'évolution basées sur des récurrences de divers ordres (ou dimensions) Sous forme explicite, une récurrence "dynamique" suit la relation:

$$X_{n+1}^{(i)} = f_i \left(\{X_n^{(i)}\}, i = 1, \dots, p, n \in \mathcal{N} \right) \quad (\text{IV-1})$$

avec n le terme sur lequel portera la récurrence (indirectement un "temps"), i indiquant la stratification (dimension) du modèle. Bien que temporel, le modèle (IV-1) ne met pas en évidence de façon explicite le temps; il s'agit donc d'un système autonome.

Dans le cas discret (IV-1), les valeurs du temps "t" sont indexées par $n = 0, 1, 2, \dots$. Un exemple de système dynamique est la correspondance (map) qui, sous forme vectorielle s'écrit $X_{n+1} = M[X_n]$ où X_n est un vecteur de dimension N ; $X_n = (X_n^1, X_n^2, \dots, X_n^N)$.

Soit donné un état initial X_0 , on obtient l'état au temps $n = 1$ par $X_1 = M(X_0)$. Connaissant X_1 , nous pouvons déterminer l'état $n = 2$ par $X_2 = M(X_1)$; donc à partir d'une condition initiale X_0 , on génère une orbite (ou trajectoire) du système à temps discret X_0, X_1, X_2, \dots .

Comme nous pouvons le remarquer, un système continu en temps, de dimension N peut être avantageusement réduit à une représentation à temps discret, de dimension $(N - 1)$ à travers la technique de la section de Poincaré.

Il est logique de penser que la complexité de la structure des orbites augmente dans le cas de système à grande dimension. Donc une question se pose: Quelle peut être la valeur de N pour qu'un comportement chaotique soit possible? Dans le cas des systèmes d'équations différentielles de 1^{er} ordre, la réponse est $N \geq 3$, condition suffisante et le chaos peut survenir immédiatement (modèle de Lorenz par exemple).

Dans le d'une correspondance (transformation ou "map") la condition requise pour observer un comportement chaotique, deux cas sont à distinguer suivant la correspondance directe et la correspondance directe et inverse.

Nous dirons que la correspondance M est inversible si, connaissant X_{n+1} on peut résoudre l'équation

$$X_{n+1} = M[X_n] \Leftrightarrow X_n = M^{-1}[X_{n+1}] \quad (\text{IV-2})$$

Ainsi, pour la transformation $M(x) = rx(1-x)$ (logistic map) traitée dans la section ci-dessous, il existe 2 valeurs de X_n admettant la même image X_{n+1} . L'application M n'est donc pas inversible.

Pour préciser les conditions d'apparition du chaos en fonction de la dimension N , deux cas sont à considérer

- si l'application est inversible il n'existe de chaos que si $N \geq 2$
- si M n'est pas inversible, le chaos est possible même dans le cas unidimensionnel.

II- LES RECURRENCES NON - LINEAIRES DE PREMIER ORDRE A UNE VARIABLE

Ce type de récurrence correspondant à une transformation (mapping) ponctuelle, est de la forme

$$X_{n+1} = f(X_n) \quad (IV-3)$$

avec les conditions suivantes

- f une fonction uniforme et continue de la variable réelle X . Nous verrons que dans le cas de la fonction logistique, une extrapolation au domaine complexe est possible.

- l'équation (IV-3) à l'origine non linéaire ne peut être ramenée à une forme linéaire par un changement de variable.

Ces restrictions sur la fonction f ne peuvent que conduire à des propriétés inédites, comparées à celles du cas linéaire. En outre, si la fonction f n'est pas au moins une fois continûment dérivable ou est non continue partout, des situations complexes peuvent surgir. En théorie de l'analyse mathématique, la translation d'un modèle différentiel continu vers un modèle discret est possible mais est accompagnée d'une diminution de l'ordre initial s'il y a absence de continuité. Ceci conduit à une situation fort complexe surtout que les solutions ne peuvent être exprimées sous la forme de fonctions ordinaires. Pour contourner cet état de fait, on exploite les singularités de ces solutions comme les points fixes, les cycles limites etc. Dans cette classe de récurrence non linéaire unidimensionnelle, nous proposons une analyse fort approfondie d'un modèle standard représentatif: la fonction logistique.

III- UNE FORME ITERATIVE REELLE NON – LINEAIRE : L'ITERATEUR QUADRATIQUE

Le modèle itératif dit de la fonction logistique revêt un double intérêt, historique d'abord parce qu'il constitue probablement l'un des premiers modèles mathématiques décrivant la reproduction et l'évolution de la densité de certaines espèces biologiques liée à des paramètres environnementaux spécifiques, systémique ensuite par sa bifurcation vers des états tour à tour de stabilité ou d'instabilité, de périodicité ou de chaos.

Il est erroné d'estimer que seuls les systèmes dynamiques à modèle mathématique complexe peuvent déboucher sur des états de chaos, la fonction logistique en étant un parfait exemple de contradiction au regard de sa forme polynomiale simple bien que décrivant un phénomène de dynamique de croissance biologique tout de même assez complexe.

Trois formes de modèles à itérations quadratiques, d'ailleurs équivalentes, peuvent être considérées:

$$X_{n+1} = X_n + aX_n(1 - X_n) \quad (IV-4)$$

$$X_{n+1} = aX_n(1 - X_n) \text{ (fonction logistique)} \quad (IV-5)$$

$$X_{n+1} = X_n^2 + c \text{ (dont la forme complexe aboutit aux ensembles de Mandelbrot et de Julia)} \quad (IV-6)$$

Certes le modèle énoncé par le mathématicien belge Pierre François Verhulst (1985) repose sur certaines hypothèses simplificatrices supposant certains paramètres d'environnement intervenant dans la croissance biologique comme constants, cependant il traduit au mieux la relation entre la densité de population à la $n^{\text{ème}}$ génération (donc à l'instant n) que nous notons x_n et la densité à la

$(n+1)^{\text{ème}}$ génération. Le modèle de Verhulst suppose que le taux de croissance $\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}$ est

proportionnel à $(N - x_n)$ avec N la taille maximale, fixée a priori, de la population à ne pas

dépasser. En notant a cette constante de proportionnalité et en posant $X_n = \frac{x_n}{N}$, on aboutit au

modèle (IV-4) avec $X_n \in [0,1]$ et dont l'équivalence avec la fonction logistique (IV-5) et le modèle (IV-6) peut être prouvée en procédant comme suit

$$1. \text{ système } [Y_{n+1} = Y_n + aY_n(1 - Y_n)] \Leftrightarrow \text{ système } [X_{n+1} = X_n^2 + c]$$

$$\text{Il suffit de poser } Y_n = \frac{1+a}{2a} - \frac{X_n}{a} \text{ et de noter } c = \frac{1-a^2}{4}$$

2. système $[X_{n+1} = aX_n(1 - X_n)] \Leftrightarrow$ système $[Z_{n+1} = Z_n^2 + k]$

Il suffit de poser $X_n = -\frac{Z_n}{a} + \frac{1}{2}$ et de noter $k = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{a}{2}\right)$

Pour des raisons de simplicité dans la procédure d'implémentation et dans l'interprétation du comportement des points fixes et des orbites, le modèle de fonction logistique (IV-5) sera privilégié. Il répond à la formulation mathématique

$$f : [0,1] \rightarrow [0,1] \tag{IV-7}$$

$$X \mapsto f(X, a) = aX(1 - X) \text{ avec } 0 < a \leq 4$$

La fonction logistique est invariante sur l'intervalle $[0,1]$ en ce sens que $\forall X \in [0,1], f(X, a) \in [0,1]$. Elle admet un point critique et un seul $C = a/4$ atteint pour $X = 1/2$. La forme continue (IV-7) est traduite sous la forme de la suite de récurrence non linéaire précitée (IV-5) soit

$$X_{n+1} = aX_n(1 - X_n) \text{ , } 0 < a \leq 4, X_0 \in [0,1] \tag{IV-8}$$

Sur la figure IV-1 sont représentées cinq configurations de la parabole (IV-8) correspondant aux valeurs suivantes du paramètre de contrôle a [$a = 0.8, a = 2.5, a = 3, a = 3.2, a = 4$], valeurs que nous exploiterons dans les étapes de l'analyse de la fonction logistique et son basculement vers un comportement chaotique.

Les figures IV-2 et IV-3 représentent respectivement les itérés d'ordre 2 et d'ordre 4 de la fonction logistique qui présagent de l'existence et de la nature des points fixes potentiels.

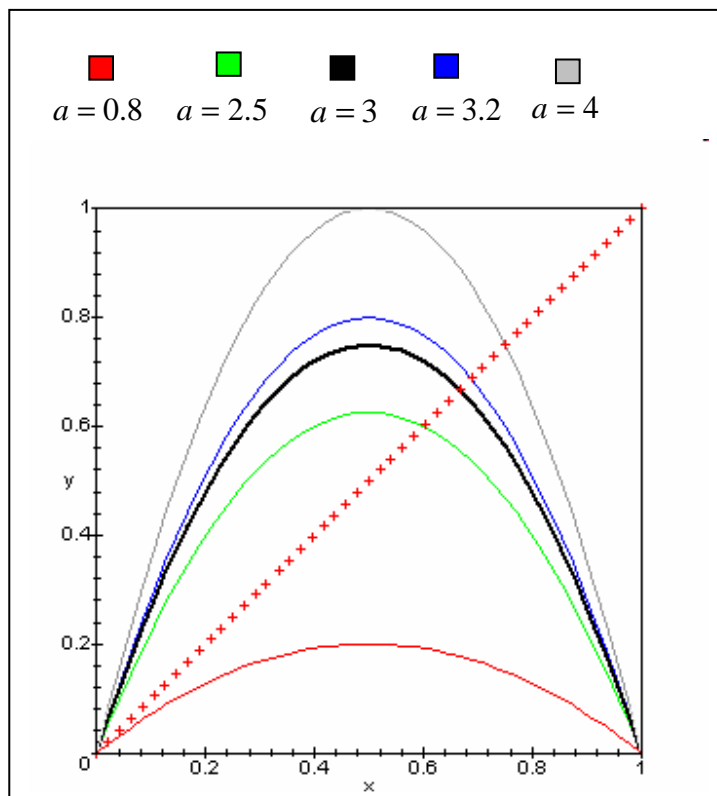


fig. IV-1 la fonction logistique pour quelques valeurs du paramètre de contrôle a

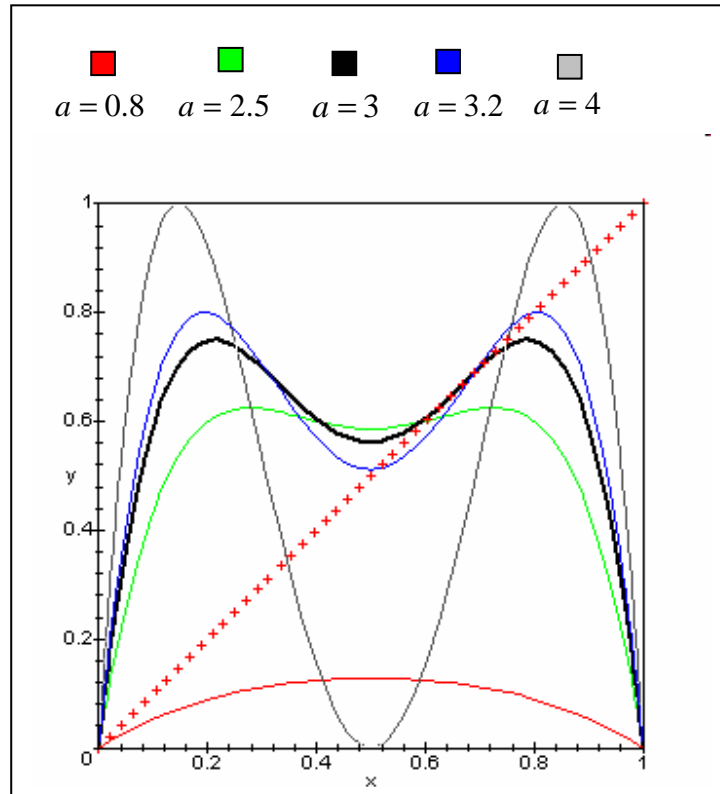


fig IV-2 itérés d'ordre 2 de la fonction logistique (mêmes valeurs du paramètre a)

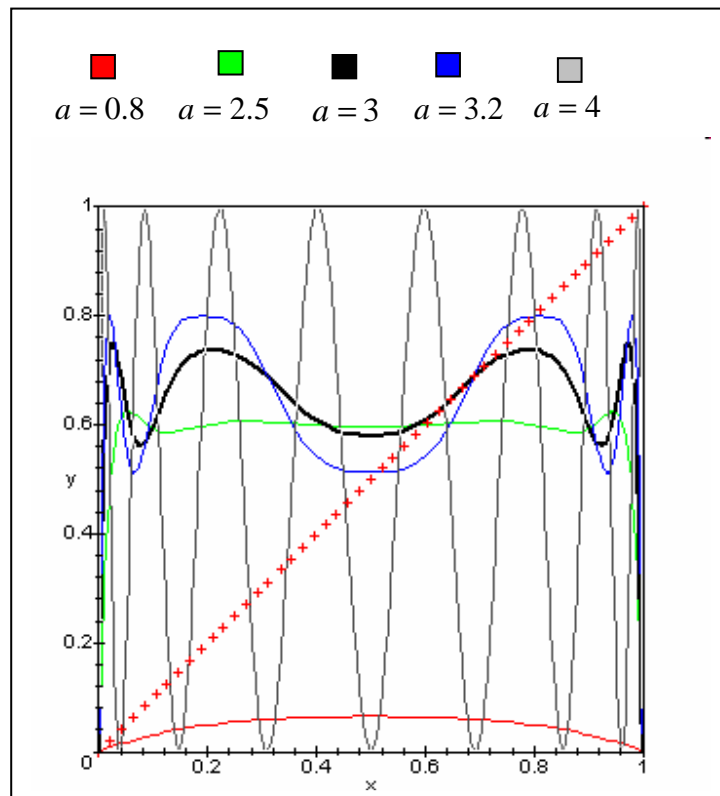


fig IV-3 itérés d'ordre 4 de la fonction logistique (mêmes valeurs du paramètre a)
Points fixes de la fonction logistique

IV- CALCUL ANALYTIQUE DES POINTS FIXES

Sur le plan analytique, il s'agit donc de résoudre l'équation $f(X) = X$ et d'en tirer la valeur de l'inconnue X laquelle sera exprimée en fonction du paramètre de contrôle a , soit $X = g(a)$ avec $0 < a \leq 4$. Les études de stabilité ou d'instabilité de ces points fixes seront liées aux intervalles d'appartenance de ce paramètre. Les différents cas sont résumés dans le tableau IV-1

Fonction logistique $f(X) = aX(1 - X)$ $0 < a \leq 4$			
Points fixes $X_i \Big _{i=1,2}$	$f'(X_i) = a(1 - 2X_i)$	Stabilité $ f'(X_i) < 1$	Instabilité $ f'(X_i) > 1$
$X_1 = 0$	a	$0 < a < 1$	$1 < a < 3$
$X_2 = 1 - \frac{1}{a}$	$2 - a$	$1 < a < 3$	—————

tableau IV-1 stabilité des points fixes de l'itérateur quadratique

Le point fixe $X_1 = 0$ est le seul point fixe stable, non seulement pour l'itérateur quadratique f mais aussi pour tous les itérés f^i de celui-ci (comme le justifierons les graphes de localisation des points fixes) avec la condition $0 < a < 1$.

Le point fixe $X_2 = 1 - \frac{1}{a}$ est stable pour f si $1 < a < 3$ ainsi que pour les itérés f^i mais en même temps et relativement à cette condition posée sur le paramètre de contrôle a , le premier fixe X_1 devient instable.

Pour $a > 3$, les points fixes X_1 et X_2 sont tous deux instables.

V- ANALYSE GRAPHIQUE DES POINTS FIXES DE L'ITERATEUR QUADRATIQUE

Le principe de construction des points fixes de l'itérateur quadratique repose sur l'approche développée en annexe dans le cas fonctions contractantes. A la fonction logistique f est substituée la suite numérique de terme général U_n et telle que

$$U_{n+1} = aU_n(1 - U_n) \quad , U_0 \in [0,1] \tag{IV-9}$$

Adaptés à cette hypothèse, les résultats précédents conduisent à affirmer que la suite logistique (IV-9) converge vers 0 si $0 < a < 1$ et vers $(1 - \frac{1}{a})$ si $1 < a < 3$. La figure IV-4 illustre le caractère parabolique de la suite (IV-9) pour $a = 0.8$ avec une condition initiale $U_0 = 0.3$. La première bissectrice ne présente qu'un seul point d'intersection plus précisément un point de tangence avec la courbe logistique. La technique de la construction géométrique du point fixe relativement aux paramètres fixés, montre que le point fixe $X_1 = 0$ est un attracteur alors que l'intervalle $[0,1]$ en constitue le bassin d'attraction. La convergence vers 0 de la suite logistique est confirmée par la décroissance du graphe de l'orbite de U_n (figure IV-5) lorsque le nombre d'itération n tend vers l'infini.

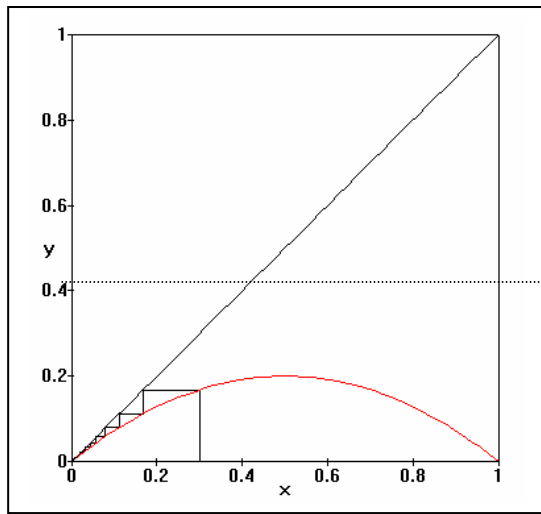


fig. IV-4 point fixe de la fonction
logistique $a = 0.8$ $U_0 = 0.3$

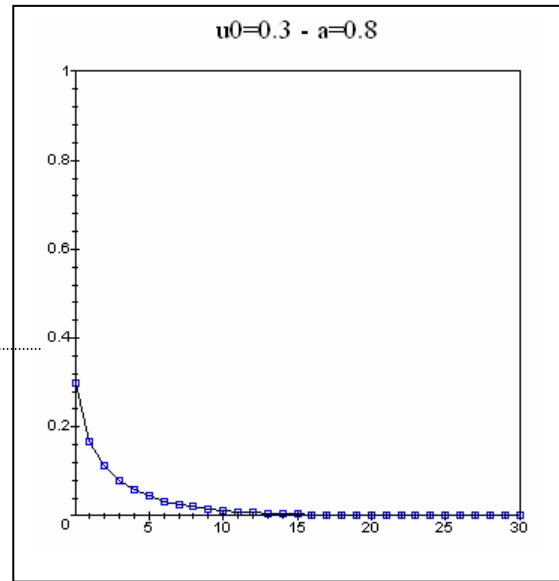


fig. IV-5 orbite U_n en fonction de n

L'étude graphique dans le cas $1 < a < 3$ est réalisée pour respectivement pour les valeurs du paramètre $a = 2$, $U_0 = 0.1$ (figure IV-6) et $a = 2.5$ avec $U_0 = 0.3$ (figure IV-7).

L'intérêt du premier cas ($a = 2$) réside dans le fait de la rapidité de la convergence de la suite logistique vers le point fixe non nul, milieu de l'intervalle $[0,1]$, $X = 0.5$ identifié à la fois par le mode de la détermination du point fixe (figure IV-6 (a)) et à travers le graphe de l'orbite (figure IV-6 (b)). Il est qualifié de point fixe super attractif.

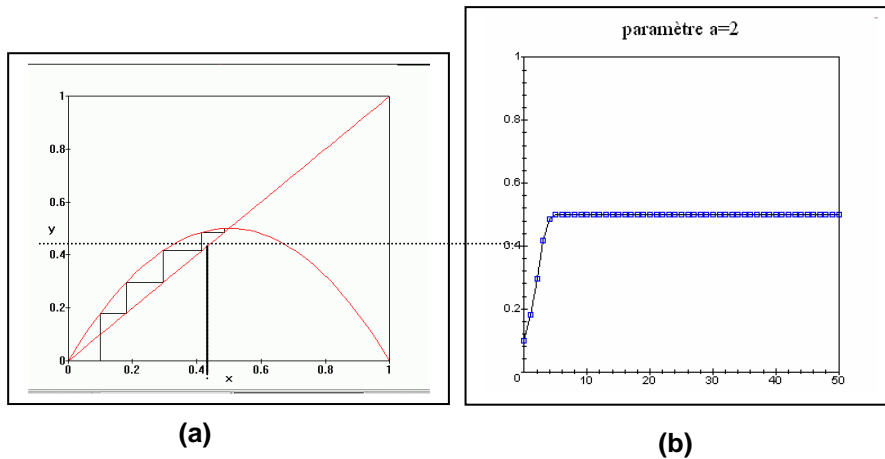
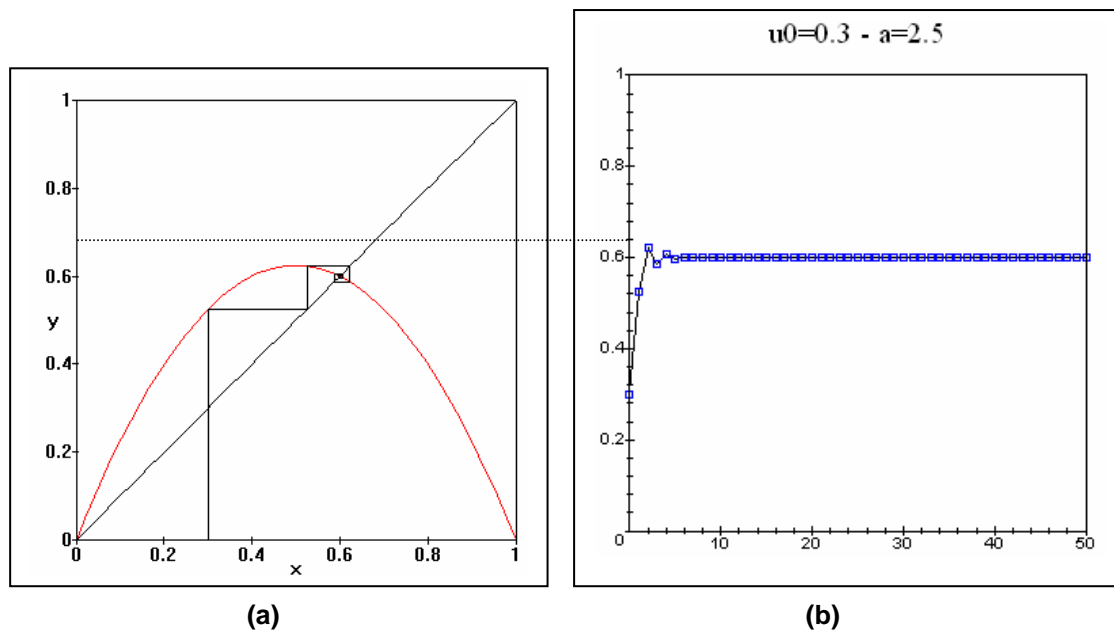


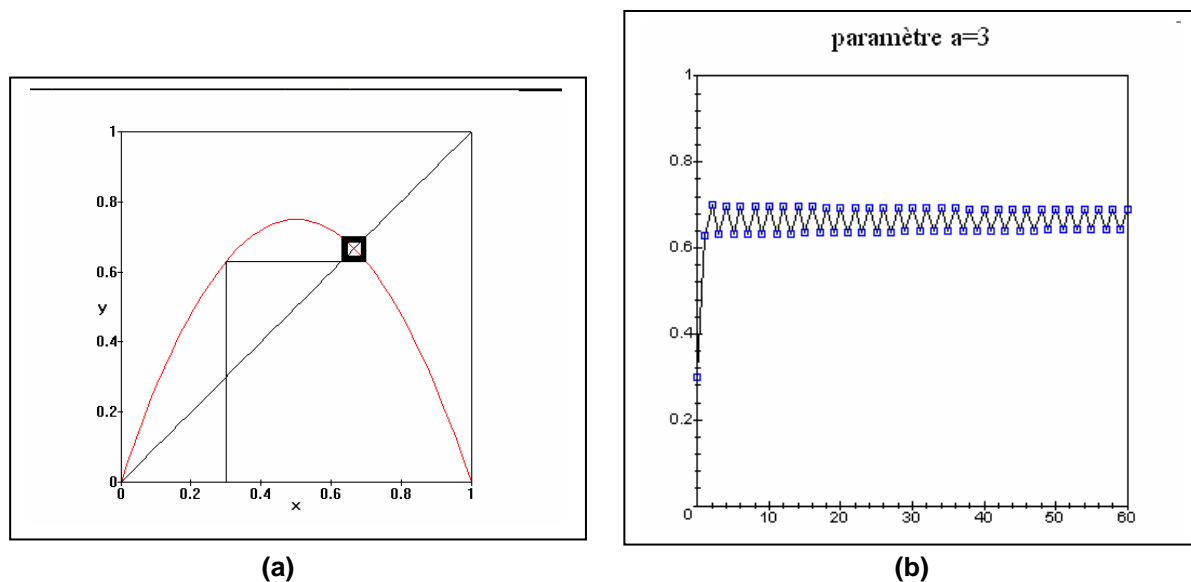
fig. IV-6
la suite logistique
 $a = 2$; $U_0 = 0.1$

Pour $a = 2.5$ la suite logistique converge vers le point fixe stable $X = 0.6$ que nous repérons par la droite dessinée en pointillés simultanément sur les graphes des figures IV-7 (a) et IV-7 (b). Il est à noter le caractère oscillatoire de cette convergence.



(a) (b)
fig. IV-7 la suite logistique pour $a = 2.5 - U_0 = 0.3$

La valeur $a = 3$ apparaît comme une valeur critique frontière entre un domaine alternant stabilité et instabilité des points fixes. La figure IV-8 établit le point fixe relativement à cette valeur (figure IV-8 (a)) et la convergence oscillante de la suite logistique vers 0.666 (figure IV-8 (b)).



(a) (b)
fig IV-8 la suite logistique pour $a = 3$ et $U_0 = 0.3$

Il y a lieu donc d'explorer la nature des points fixes lorsque le paramètre de contrôle a est tel que $3 < a \leq 4$. Deux valeurs de ce paramètres ont été fixées : $a = 3.2$ (valeur assez proche de $a = 3$) et $a = 3.9$ (valeur voisine de $a = 4$). Point fixe et mode de convergence sont représentés sur les figures IV-9 (a) et IV-9 (b) respectivement.

Pour la valeur $a = 3.2$, le point fixe non nul devient répulsif et la suite logistique (IV-9), développe un cycle attractif de période 2 (figure IV-9 (a)) , le mode de convergence étant soumis à des oscillation de

fortes amplitude (figure IV-9 (b)) . Les points de la suite semblent se rapprocher alternativement de chacun des deux points du cycle.

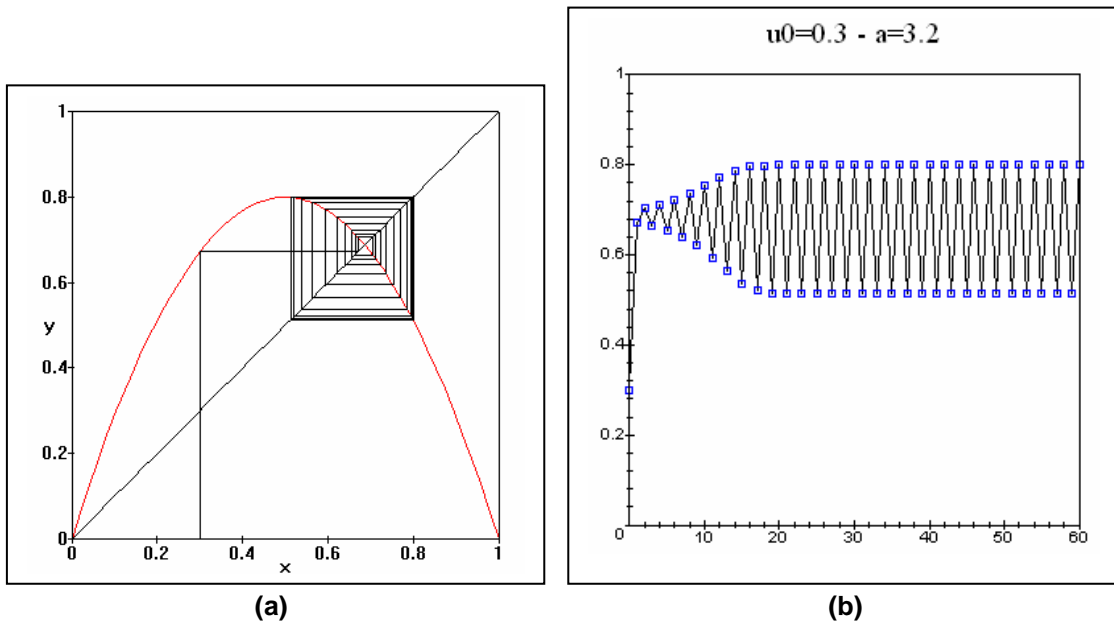


fig. IV-9 la suite logistique pour $a = 3.2$ et $U_0 = 0.3$

Pour $a = 3.9$, un régime apériodique s'installe (figure IV-10), prélude à un comportement foncièrement chaotique (figure IV-11)

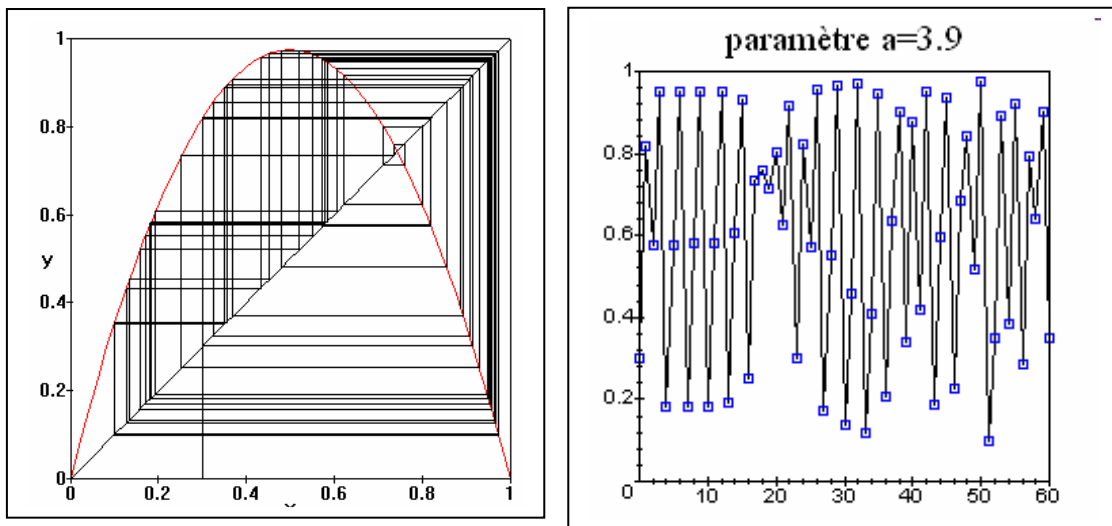


fig. IV-10 points fixes et orbites de la suite logistique pour $a = 3.9$ et $U_0 = 0.3$

Pour $a = 4$, le comportement apériodique se renforce un régime foncièrement chaotique s'installe ; Le cycle attractif précédent devient à son tour répulsif (figure IV-11 (a) et (b))

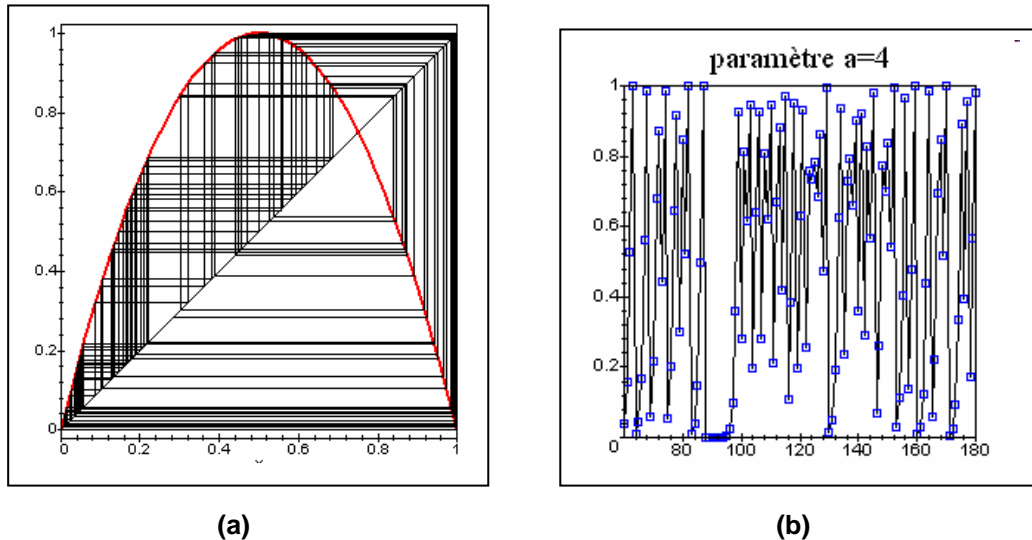


fig.IV-11 évolution de la suite logistique vers un comportement chaotique pour $a = 4$.

VI- ANALYSE DES POINTS FIXES DE L'ITERE D'ORDRE 2 DE LA FONCTION LOGISTIQUE

L'apparition de cycles périodiques, d'ordres multiples de 2, incitent à reprendre l'étude précédente étendue aux points fixes de l'itéré d'ordre 2 de la fonction logistique noté $f^2(x)$ (figure IV-2).

$$f^2(x) = f[f(x)] = a^2 x(1-x)[1-ax(1-x)] \tag{IV-10}$$

Les points fixes de cet itéré d'ordre 2 ou encore cycle périodique de période 2 sont au nombre de quatre (4) parmi lesquels nous retrouvons les points fixes de la fonction logistique origine f $X_1 = 0$ et $X_2 = 1 - 1/a$ avec l'apparition de deux nouveaux points fixes X_3 et X_4 tels que

$$X_3 = \frac{a+1 + \sqrt{(a-3)(a+1)}}{2a} ; \quad X_4 = \frac{a+1 - \sqrt{(a-3)(a+1)}}{2a} \tag{IV-11}$$

Il est à remarquer que les nouveaux points fixes X_3 et X_4 ne forment pas des points fixes de la fonction logistique f pour laquelle ils définissent un cycle d'ordre 2 de f et vérifient entre autre, les égalités $f(X_3) = X_4$ et $f(X_4) = X_3$. Outre la condition $a > 0$, leur existence est assujettie à la condition $a > 3$ et par le fait même l'apparition du cycle d'ordre 2. Pour $a = 3$, les deux points fixes X_3 et X_4 sont confondus et la première bissectrice est alors tangente à la courbe représentative de l'itéré f^2 (figure IV-12). Sur cette même figure sont représentés, pour quelques valeurs du paramètre a , les modes de convergence et les points fixes correspondants de l'itéré.

Le cycle d'ordre 2 attractif (X_3, X_4) , apparaît dès que $a > 3$. Toutefois, cette dernière condition n'est pas absolue car pour $a \in [3,4]$, existent des sous-intervalles de stabilité et d'instabilité pour les points fixes. Rappelons que la stabilité en un point fixe X_i pour une fonction considérée $g(X)$ est assurée par la condition $|g'(X_i)| < 1$ (instabilité dans le cas contraire). Cette condition appliquée à la fonction logistique itérée f^2 pour les points fixes X_3 donné en (IV-11) conduit à vérifier la double inéquation

$$-1 < -a^2 + 2a + 4 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a - 5 < 0 \\ a^2 + 3a - 3 > 0 \end{cases} \tag{IV-12}$$

Comme $a > 3$ pour assurer l'existence de X_3 et de X_4 dans (IV-11), la seconde condition dans (IV-12) est toujours vérifiée. La première condition ($a^2 - 2a - 5 < 0$) est vérifiée si $3 < a < 1 + \sqrt{6}$, soit approximativement $3 < a < 3.449$. Ainsi pour $a = 3.2$ (figure IV-12) le phénomène de bifurcation commence à prendre forme. Les points fixes primaires X_1, X_2 deviennent répulsifs, alors que X_3 et X_4 deviennent eux attractifs.. Pour $a = 3.5$, le cycle de période 2 devient à son tour répulsif et il apparaît un cycle de période 4 attractif. A la valeur du paramètre $a = 3.56$, il apparaît un cycle attractif de période 8.

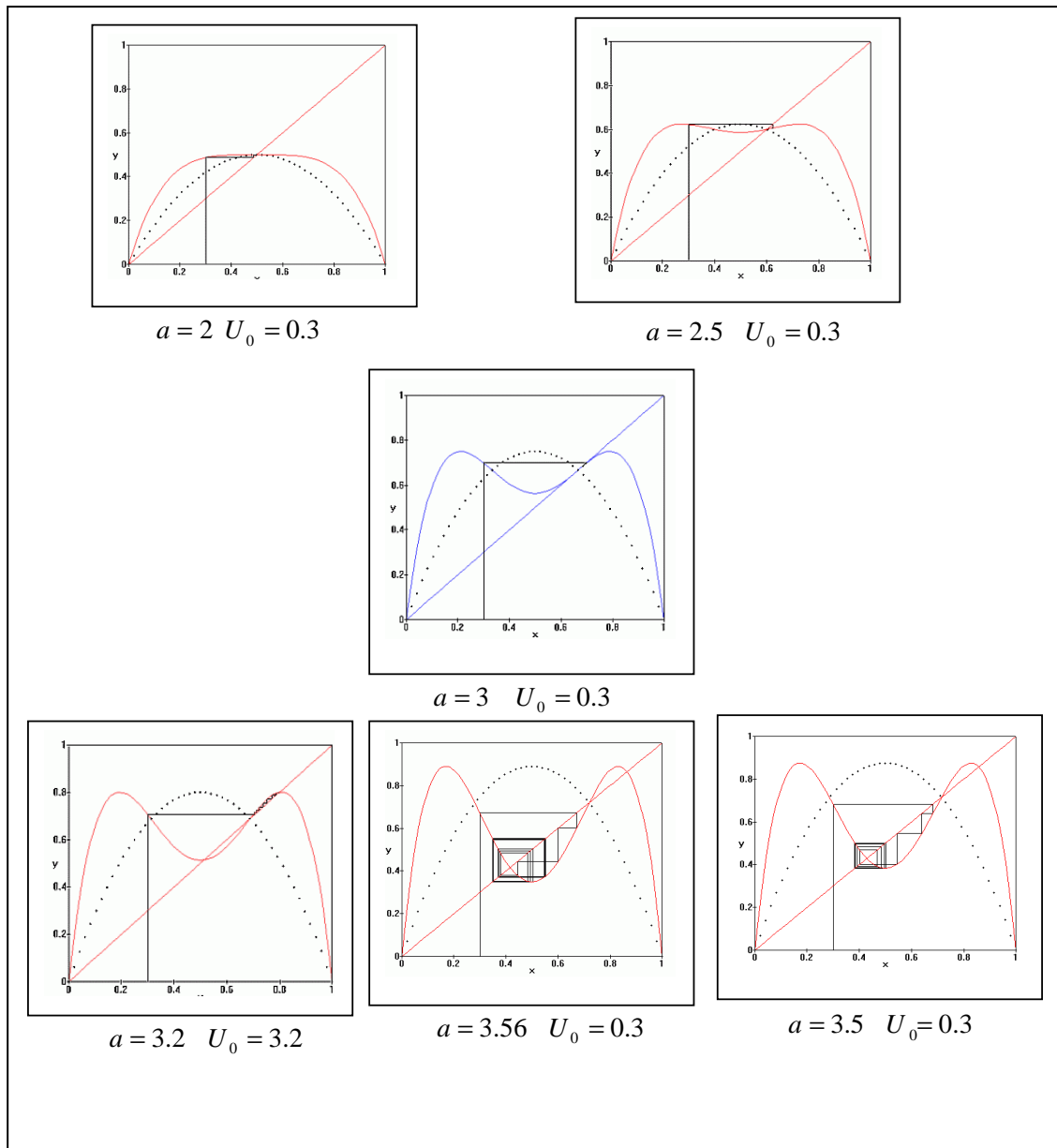


fig. IV-12 points fixes de l'itéré f^2 de la fonction logistique : $a = 2, 2.5, 3, 3.2, 3.5, 3.56$

Le franchissement de seuils successifs par valeurs croissantes du paramètre a met en évidence un développement progressif de cycles de périodes croissantes définies comme une puissance de 2 et une alternance d'états stables et d'états instables caractérisant les points fixes.

VII- LE PHENOMENE DE BIFURCATION DANS LA FONCTION LOGISTIQUE

Les variations du paramètre de contrôle a exercent une influence remarquable sur le comportement de la fonction logistique non seulement à travers les états alternés de stabilité – instabilité des points

fixes mais aussi sur le mode de convergence de la suite logistique correspondante. La valeur $a = 3$ représente un seuil marquant le début d'une forme de dégénérescence de la fonction logistique qui arbore des dédoublements de périodes pour $a < 3 < 4$ mais en des valeurs bien précises. Pour matérialiser cette influence, un diagramme de bifurcation résume à lui seul ces états. Il consiste en une représentation de la fonction logistique (en fait de la suite de la suite logistique correspondante) obtenue en portant en abscisse la "variable " a et en ordonnée les valeurs d'adhérence U_n de l'expression (IV-9). Le principe d'obtention du diagramme du diagramme de bifurcation consiste à fixer un nombre M de valeurs d'adhérence calculées en fonction de a et de ne représenter que les points M_a ($M_a < M$) avec $a < 3 < 4$. Les différents états de dédoublement de périodes sont sur la figure IV-13 avec, portées en abscisse, les valeurs -seuil de l'émergence du dédoublement de périodes.

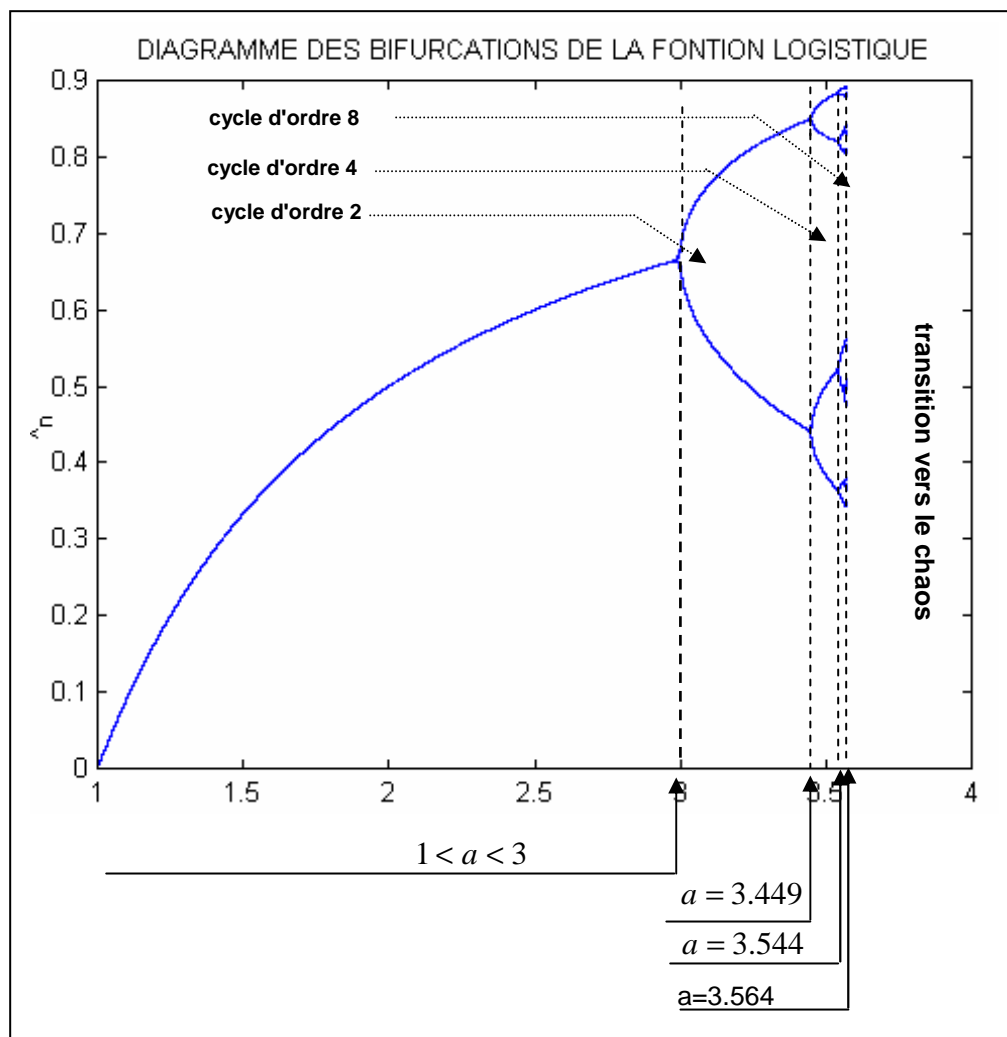


fig. IV -13 synthèse du digramme de bifurcation de la fonction logistique

Un diagramme des bifurcations global est illustré par la figure IV-14 tracée pour $1 < a < 4$, avec un pas fin $\Delta a = 0.0015$. Notre intérêt portera sur la valeur $a = 3;449$ marquant le début d'une cascade de dédoublement de périodes liée à un phénomène d'échelle de plus en plus réduite et les distances séparant deux états de bifurcation successifs devient de plus en plus petite lorsque a augmente. A la $n^{\text{ème}}$ bifurcation, on a un cycle attractif d'ordre 2^n alors que dans le même temps le cycle d'ordre 2^{n-1} devient répulsif.

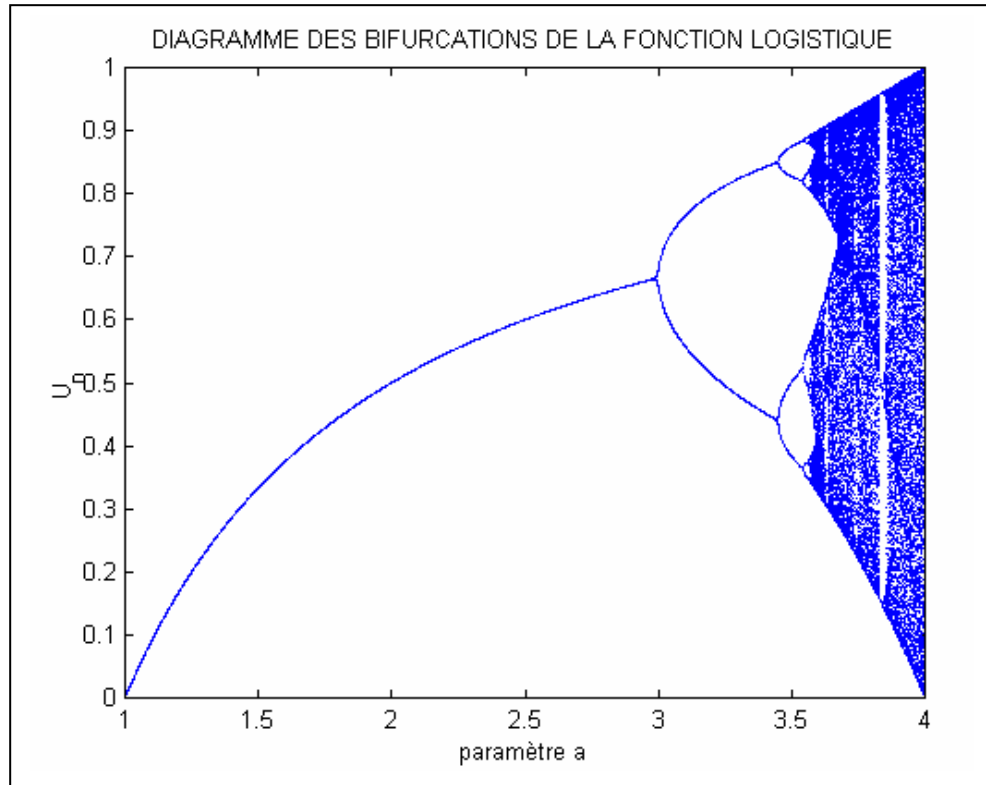


fig. IV- 14 diagramme global des bifurcations pour $a = 1 : 0.0015 : 4$

Nous résumons le comportement du diagramme des bifurcations comme suit :

- si $0 < a < 1$: un seul point fixe stable $X_1 = 0, \forall a \in]0,1[$
- si $1 < a < 3$: un seul point fixe stable $X_2 = 1 - 1/a$ et $\forall a \in]1,3[$, il est associé sur le diagramme des bifurcations le point $M_2(a, 1 - 1/a)$
- si $3 < a < 3.449$: un cycle stable d'ordre 2 X_3, X_4 et $\forall a \in]3, 3.449[$, il est associé sur le diagramme des bifurcations les points $M_3(a, X_3)$ et $M_4(a, X_4)$
- si $3.449 < a < 3.544$: un cycle stable d'ordre 4 X_5, X_6, X_7, X_8 et $\forall a \in]3.449, 3.544[$, il est associé sur le diagramme des bifurcations les points $M_5(a, X_5), M_6(a, X_6), M_7(a, X_7)$ et $M_8(a, X_8)$
- si $3.544 < a < 3.564$: un cycle stable d'ordre 8 $X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{16}$ et $\forall a \in]3.544, 3.564[$ il est associé les points : $M_9(a, X_9), M_{10}(a, X_{10}), M_{11}(a, X_{11}), M_{12}(a, X_{12}), M_{13}(a, X_{13}), M_{14}(a, X_{14}), M_{15}(a, X_{15})$ et $M_{16}(a, X_{16})$.

Ce phénomène de bifurcation se prolonge vers des cycles stables d'ordres de plus en plus élevés tous de la forme 2^n . A titre d'exemple pour $n = 7$, on obtient un cycle stable d'ordre 128. La valeur limite favorisant le dédoublement de périodes est le point dit de Feigenbaum $a_F = 3.569$ en ne prenant que trois chiffres après la virgule.

VIII- TRANSITION VERS LE CHAOS DE LA FONCTION LOGISTIQUE

Au-delà de la valeur, il apparaît un comportement aperiodique ou désordonné des orbites lesquelles deviennent ainsi chaotiques remplissant ainsi une zone sombre du diagramme des bifurcations (figure IV-14). Un "zoom" est effectué sur dans le diagramme des bifurcations pour

$3.5 < a < 4$ (figure IV-15). Nous relevons au moins deux caractéristiques principales: La présence de trois bandes verticales d'inégales largeurs et apparemment vides d'orbites (ce sont des plages ou fenêtres de stabilité que nous aurons à étudier) et des "trajectoires" mise de forme régulière et mises en évidence par une "accumulation" de points (ce sont les lignes critiques).

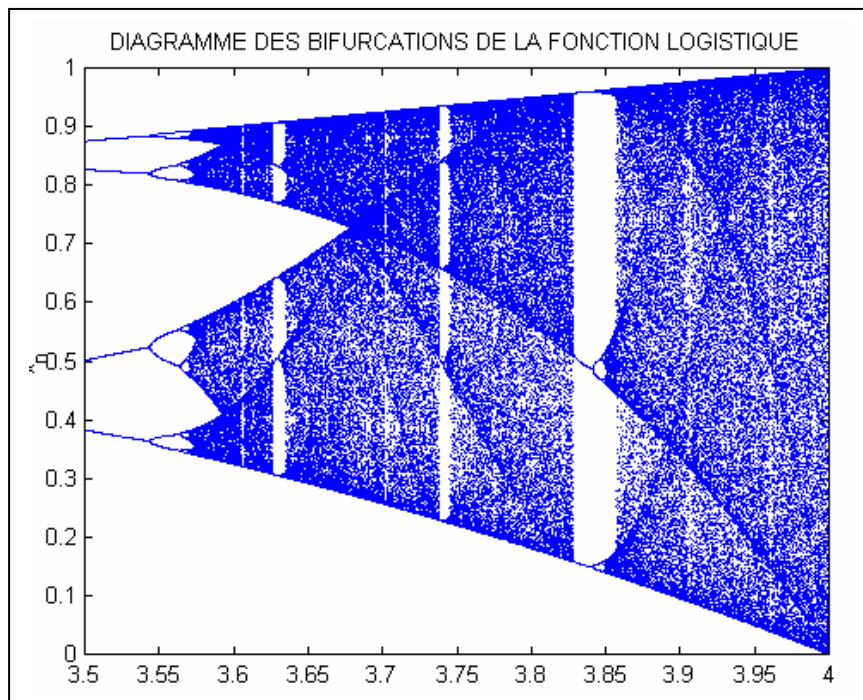


fig. IV-15 agrandissement de la zone du diagramme des bifurcations correspondant au paramètre $a = 3.5 : 0.0003 : 4$

Pour nous convaincre du comportement chaotique des orbites régnant dans cette zone du diagramme des bifurcations, nous appliquons l'une des hypothèses qui sous tend un processus chaotique: la sensibilité aux conditions initiales. De ce fait, nous comparons les variations de la suite logistique U_n de l'expression (IV-9) en fixant deux conditions initiales U_0 très proches l'une de l'autre (figure IV-16)

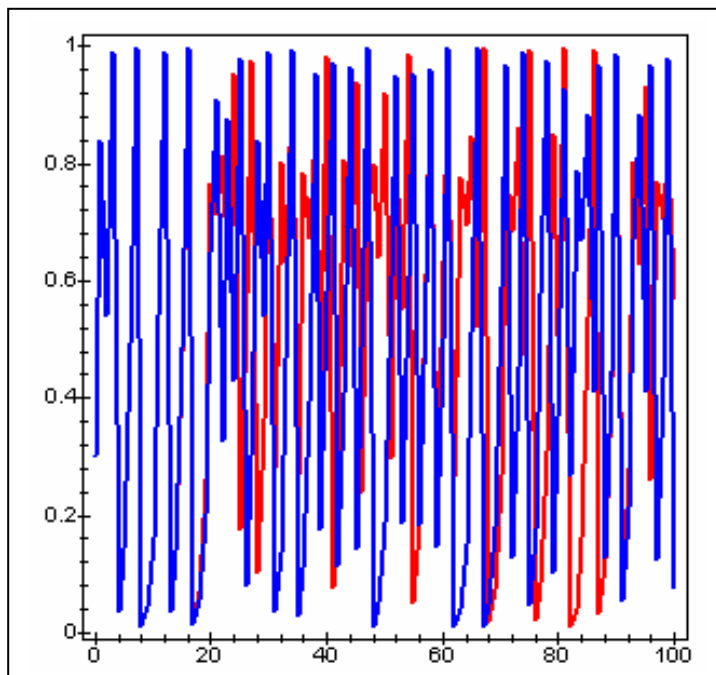


fig. IV-16 sensibilité des orbites de la fonction logistique aux conditions initiales

$U_0 = 0.30000$
(couleur rouge)
et $U_1 = 0.300001$
(couleur bleue)
paramètre $a = 3.9$

Notons d'abord le très faible écart existant entre les deux conditions initiales U_0 et U_1 . Pourtant les suites logistiques associées à ces deux valeurs identifiées en couleur bleue pour $U_0 = 3.00001$ et en couleur rouge pour $U_1 = 3.00000$ (figure IV-16) différent totalement à partir de la valeur $n = 17$ et il n'existe plus de convergence vers un cycle.

IX- LES FENETRES DE STABILITE

Des bandes intrigantes de moindre remplissage apparaissent au sein de la zone chaotique (figure IV-15) correspondant à des intervalles incluant des valeurs précises du paramètre a . Afin de cerner ces "bandes" verticales, un effet d'agrandissement est réalisé dans cette zone de chaos. Graphiquement, la détermination de ces intervalles peut être effectuée par rapport à une échelle des abscisses. Ainsi, nous pouvons identifier trois plages de stabilité à partir de la figure IV-15 trois plages de stabilité mettent en évidence chacune un nombre impair de cycles décroissant, contrairement aux cas situés en amont de la zone de chaos.

- première plage de stabilité (figure IV-17): identification d'une première fenêtre de stabilité contenant un cycle d'ordre 7 pour $a \in [3.7018, 3.7028]$

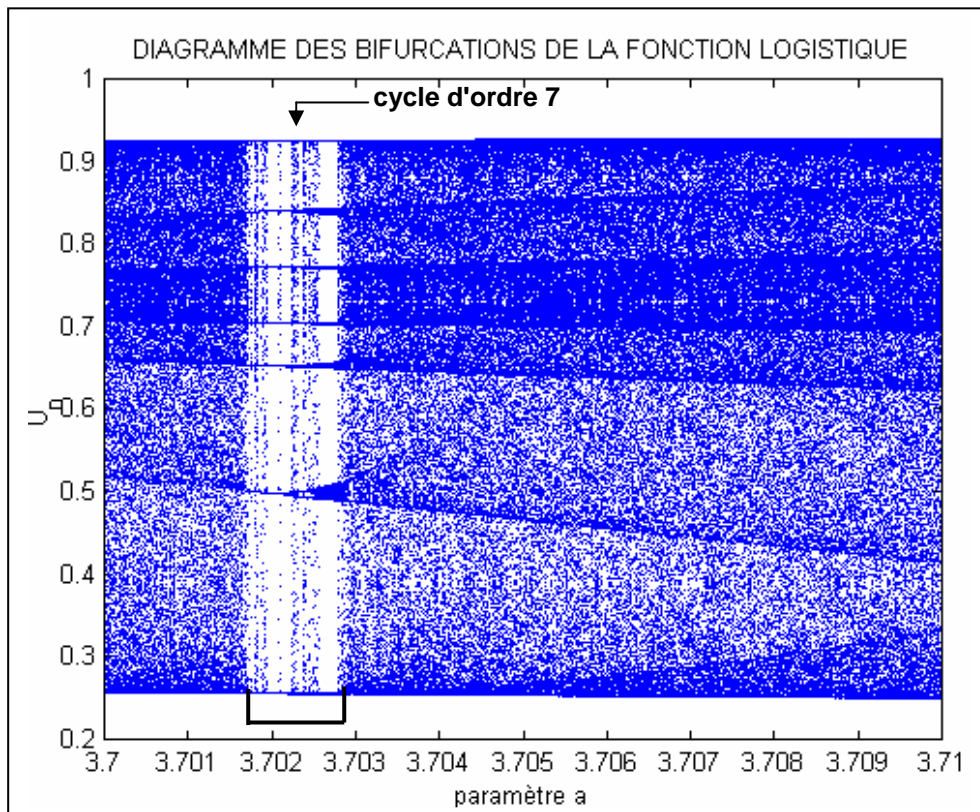


fig. IV-17 identification d'une première fenêtre de stabilité contenant un cycle d'ordre 7 pour $a \in [3.7018, 3.7028]$

- deuxième plage de stabilité (figure IV-18): identification d'un cycle d'ordre 5 pour $a \in [3.738, 3.745]$. Notons la largeur relativement importante de cette seconde fenêtre de stabilité.

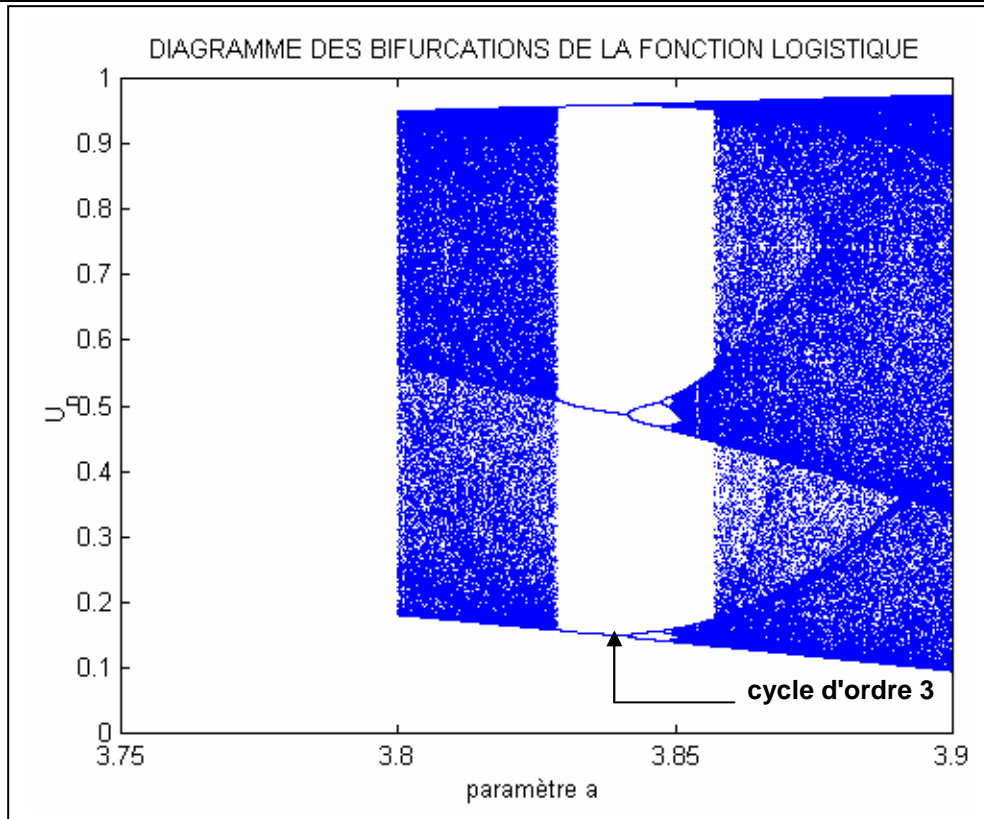


fig.IV-18 identification d'une seconde fenêtre de stabilité contenant un cycle d'ordre 5 pour $a \in [3.738, 3.745]$

- plage de stabilité (figure IV-19): identification d'un cycle d'ordre 3 pour $a \in [3.825, 3.858]$

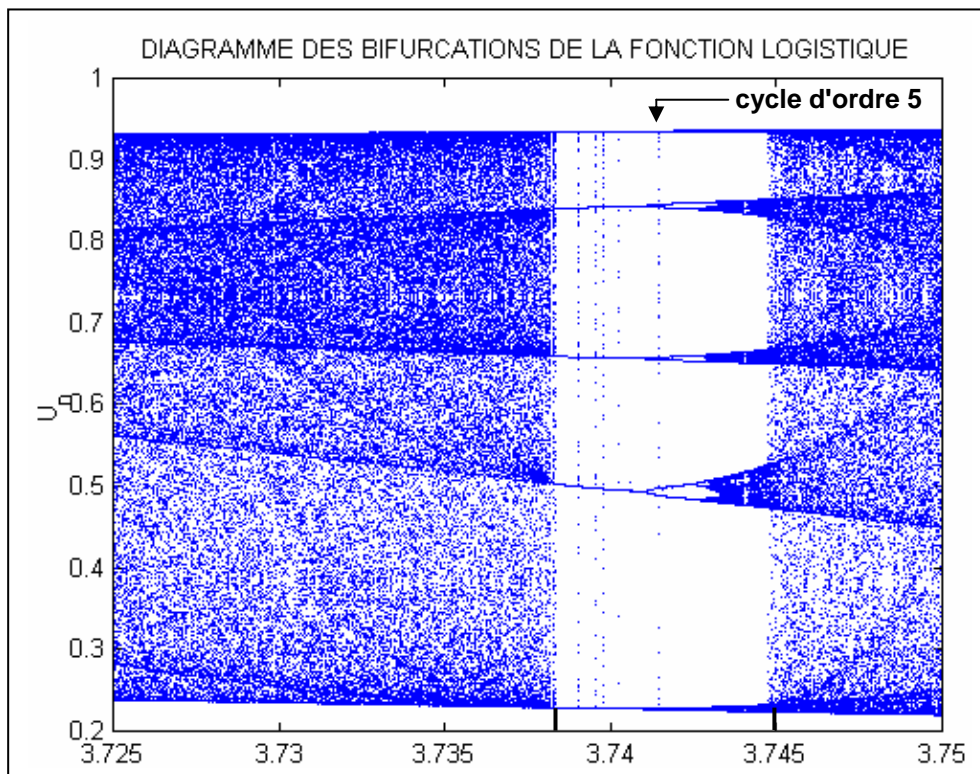


fig.IV-19 identification d'une fenêtre de stabilité contenant un cycle d'ordre 3 pour $a \in [3.825, 3.858]$

X- QUANTIFICATION DU CHAOS PAR L'EXPOSANT DE LYAPUNOV

Il a été remarqué à travers la figure IV-16 l'influence du choix des conditions initiales si proches soient-elles, sur la divergence des trajectoires, Les approche descriptives et qualitatives ne sauraient être un critère objectif sans accompagnement d'un critère quantitatif permettant d'estimer réellement le taux de divergence de ces trajectoires.

Dans le cas de la fonction logistique, à l'approche de la zone de chaos et pour une valeur précisée du paramètre (dans notre cas $a = 3.9$), nous avons estimé l'écart ou "erreur" entre deux trajectoires issues de conditions initiales suffisamment proches ($U_0 = 0.30000$ et $U_1 = 0.30001$). La figure IV-20 montre que cet écart, loin d'être nul partout, peut atteindre des valeurs relativement importantes au cours de l'évolution des deux trajectoires. La figure IV-20 révèle une parfaite concordance des deux trajectoires pour $0 < n < 17$, au-delà, il apparaît une totale divergence; c'est le prélude à un comportement désordonné donc à un état de chaos.

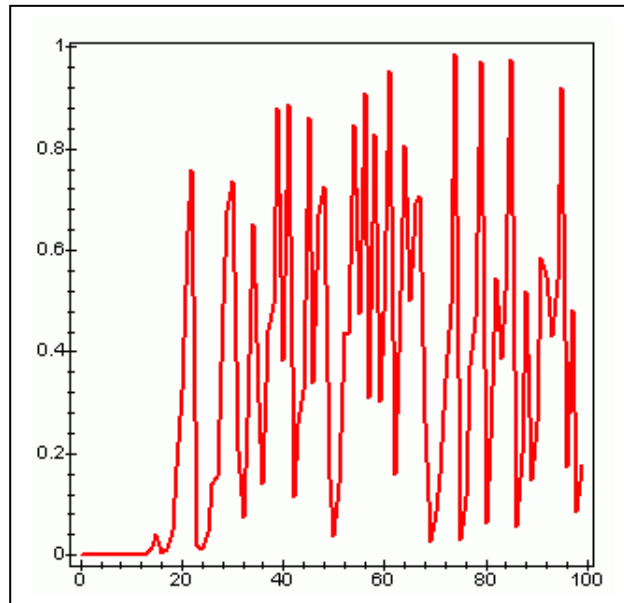


fig. IV-20 estimation de l'écart entre deux trajectoires issues de conditions initiales très proches ($U_0 = 0.30000; U_1 = 0.30001$) pour $a = 3.9$

X-1 L'EXPOSANT DE LYAPUNOV

Un indicateur fiable particulièrement adapté d'abord à la confirmation puis à l'estimation de l'écart moyen de divergence des trajectoires issues de conditions initiales infiniment proches reste l'exposant de Lyapunov. Relativement à un système dynamique, l'exposant de Lyapunov révèle la sensibilité de ce dernier aux conditions initiales à travers la divergence exponentielle des trajectoires.

En nous limitant à l'itération à une seule variable $X_{n+1} = f(X_n)$, soit X_0 une condition initiale, qui au cours des itérations répétées conduit à une trajectoire de référence T_r . On accorde à la condition initiale X_0 un accroissement δX_0 (avec $\delta X_0 \rightarrow 0$) afin d'obtenir une seconde initiale proche X_0' telle que

$$X_0' = X_0 + \delta X_0 \quad (\text{IV-13})$$

En effectuant une première itération par application de la fonction f sur X_0' et en y identifiant les deux premiers termes d'un développement en séries de Taylor on a

$$f(X_0') = f(X_0 + \delta X_0) = f(X_0) + f'(X_0)\delta X_0 \quad (\text{IV-14})$$

Nous mettons ainsi en évidence un nouvel écart

$$\delta X_1 = f'(X_0)\delta X_0 \quad (IV-15)$$

qui caractérise $f(X_0) = X_1$; donc

$$X_1 = f(X_0) + \delta X_1 \quad (IV-16)$$

Nous prenons à nouveau l'image par f des deux membres de (IV-16)

$$f(X_1) = f[f(X_0) + \delta X_1] = f[f(X_0)] + \{f[f(X_0)]\}' \delta X_1 \quad (IV-17)$$

soit

$$f(X_1) = f^2(X_0) + f'[f(X_0)]\delta X_1 \quad (IV-18)$$

Si nous notons par $f(X_0) = X_1$ le premier itéré de f sur X_0 il vient

$$f(X_1) = f(X_1) + f'(X_1)\delta X_1 \quad (IV-19)$$

En introduisant (IV-15) dans (IV-19), nous obtenons comme expression de $f'(X_1)$

$$f(X_1) = f(X_1) + f'(X_1)f'(X_0)\delta X_0 \quad (IV-20)$$

Nous mettons ainsi en évidence un écart δX_2 relatif à l'itéré $f(X_1) = f[f(X_0) + \delta X_1]$ tel que

$$\delta X_2 = f'(X_0)f'(X_1)\delta X_0 \quad (IV-21)$$

Ceci permet de reprendre (IV-20) sous la forme suivante

$$f(X_1) = f(X_1) + \delta X_2 \quad (IV-22)$$

Une nouvelle composition par l'application f dans les deux membres de (IV-22) a qui, en posant $f^3(X_0) = X_2$, aboutira à extraire un écart δX_3 tel que

$$\delta X_3 = f'(X_0)f'(X_1)f'(X_2)\delta X_0 \quad (IV-23)$$

Nous généralisons la procédure de construction des écarts entre les trajectoires à une étape d'itération quelconque n en écrivant

$$\delta X_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} f'(X_k) \right) \delta X_0 \quad (IV-24)$$

avec $X_k = f(X_{k-1})$, $k \geq 1$. Nous partons du fait qu'il existe que les écarts δX_n et δX_0 sont reliés par une expression de la forme

$$|\delta X_n| = \exp(\alpha n) |\delta X_0| \quad (IV-25)$$

en raison de l'hypothèse portant sur divergence géométrique des trajectoires. Par logarithmisation des deux membres de l'expression (IV-25), on obtient

$$\alpha = \frac{1}{n} \text{Ln} \left(\left| \frac{\partial X_n}{\partial X_0} \right| \right) = \frac{1}{n} \text{Log} \left(\prod_{k=0}^{n-1} f'(X_k) \right) \tag{IV-26}$$

Le coefficient α exprime un taux relatif (ou par pas d'itération) de convergence / divergence des trajectoires. L'expression du taux absolu ou réel de l'écart entre trajectoires impose un passage à la limite de IV-26 lorsque $n \rightarrow +\infty$. Le résultat de ce calcul de limite n'est autre que le coefficient de Lyapunov λ

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \left(\prod_{k=0}^{n-1} f'(X_k) \right) \tag{IV-27}$$

Une forme équivalente de calcul de l'exposant de Lyapunov λ que nous exploiterons dans nos calculs serait

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \text{Log} |f'(X_m)| \tag{IV-28}$$

Il se pose tout de même le problème de la convergence de la série figurant dans le second membre de (IV-28). Le terme $\sum_{m=0}^{n-1} \text{Log} |f'(X_m)|$ se présente comme la somme finie des taux locaux de divergence et le terme $\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \text{Log} |f'(X_m)|$ n'est autre qu'une moyenne de ces écarts. Ceci implique que la série converge et même au-delà de ce résultat, le coefficient de Lyapunov ne dépend pas des conditions initiales lorsqu'elles sont considérées dans le bassin d'attraction.

X-2 VARIATIONS DU COEFFICIENT DE LYAPUNOV ET DIVERGENCE / CONVERGENCE DES TRAJECTOIRES

Suivant le signe du coefficient de Lyapunov λ , trois états peuvent se présenter

- $\lambda < 0$: deux conditions initiales proches conduisent à une convergence vers une même trajectoire
- $\lambda > 0$: deux conditions initiales proches conduisent à une divergence des trajectoires dont elles sont issues
- si $\lambda \rightarrow \infty$, le système devient aléatoire

Estimation du coefficient de Lyapunov dans le cas de la fonction logistique pour une gamme de valeurs du paramètre de contrôle a

Le tableau IV-2 renvoie aux coefficients de Lyapunov estimés pour les valeurs du paramètre a considérés tout au long de ce chapitre.

Valeurs du paramètre de contrôle a	Estimation du coefficient de Lyapunov λ
0.8	-0.2231577219
2.5	-0.6931484561
3.0	-0.0001457001431
3.2	-0.9162910175
3.540	-0.2435962249
3.550	-0.9989618009
3.850	+0.006593759202
3.9	+0.5019940378
4.0	+1.386294361

tableau IV-2 Quelques estimations du coefficient de Lyapunov pour des valeurs du paramètre de contrôle a fixées

L'exactitude des estimations du coefficient de Lyapunov dépend du nombre d'itérations ardu à considérer en raison de la limite $n \rightarrow +\infty$ requise par l'expression (IV-28). Les valeurs exposées dans le tableau IV-2 ont été obtenues sur la base de 100 000 itérations, la condition initiale étant considérée au point critique $U_0 = 0.5$. Il est à remarquer la valeur négative (synonyme de convergence de trajectoires) et relativement faible en module obtenue quand $a = 3$, résultat logique car cette dernière valeur représente la source des premières bifurcations de trajectoires mais loin encore d'un état de chaos (persistance du mode convergent). Les premiers indices d'un chaos annoncé avec tout de même une faible persistance de la convergence sont perceptibles pour les valeurs du paramètre a très proches ($a = 3.540$ et $a = 3.550$) donnant pour coefficient de Lyapunov respectivement $\lambda = -0.2435962249$ et $\lambda = -0.9989618009$.

Les divergences de trajectoires révélées par des coefficients de Lyapunov positifs, sont obtenues pour $a = 3.850$, $a = 3.9$ et $a = 4$. Les valeurs du coefficient de Lyapunov croissent de façon remarquable indiquant de fait une divergence des trajectoires grandissante et un basculement accéléré vers une situation de chaos.

X-3 LE SPECTRE DE LYAPUNOV DE LA FONCTION LOGISTIQUE

Les différentes estimations du coefficient de Lyapunov obtenues ci-dessus étaient ponctuelles donc pour des valeurs du paramètre a fixées *a priori*. L'estimation serait plus significative et plus générale si l'on effectue "un balayage" de l'intervalle $[0,4]$, domaine de variation de ce paramètre. Bien plus, les coefficients de Lyapunov peuvent – ils mettre en évidence les fenêtres de stabilité remarquées en pleine zone de chaos?

L'intervalle $[0,4]$, domaine d'appartenance du paramètre a est discrétisé, relativement à un pas d'incréméntation Δa_i choisi, et permet ainsi d'obtenir une série de valeurs du coefficients de Lyapunov $\lambda_i = g(a_i)$ dont la représentation graphique constitue le spectre de Lyapunov (figure IV-21)

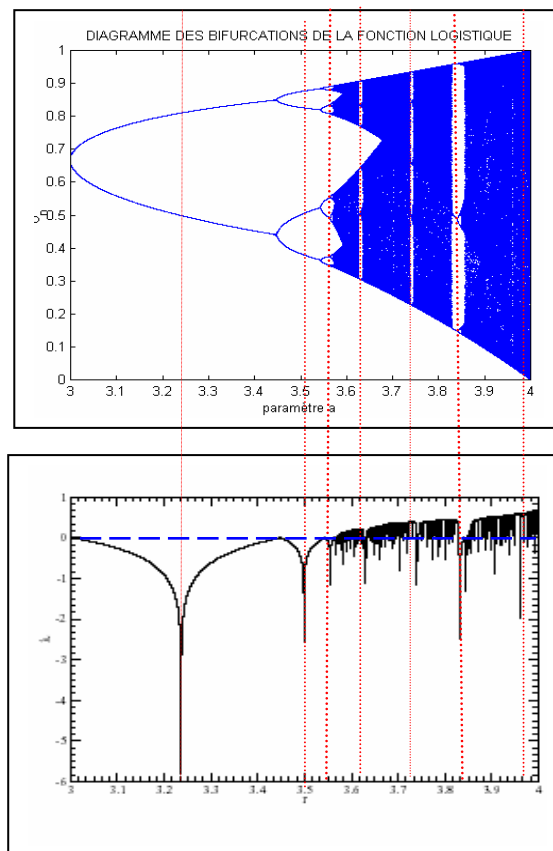


fig. IV-21 corrélation diagramme de bifurcation / spectre de Lyapunov

Nous avons mis en correspondance, pour une même échelle des abscisses, le diagramme des bifurcations obtenu pour $3 < a < 4$ et le spectre de Lyapunov. Il est ainsi confirmé les différentes macro-zones de stabilité mises en évidence par le signe négatif du coefficient λ . Dans la zone de chaos, le coefficient de Lyapunov, positif dans l'ensemble, est sujet à des variations répétées avec des "pics" vers des valeurs négatives correspondant exactement aux fenêtres de stabilité remarquées dans le diagramme global des bifurcations. Conjointement et sans quitter la zone de chaos, le coefficient de Lyapunov révèle des tendances à vouloir atteindre des valeurs négatives et par le fait même, les trajectoires à une tendance à la convergence et le processus à des états éphémères de stabilité.

X-4 SPECTRE FRACTAL DE LYAPUNOV

Le coefficient de Lyapunov λ tel qu'il est exprimé précédemment, ne dépend des variations que seul paramètre de contrôle a soit $\lambda = \lambda(a)$ et relativement à un modèle à un modèle mathématique de fonction logistique. Le spectre fractal de Lyapunov, tout d'ailleurs le diagramme de bifurcations fractal, repose sur la composition de deux fonctions logistiques disons $f_a(x)$ et $f_b(x)$, indexées par deux paramètres de contrôle a et b différents mais évoluant dans le même domaine de valeurs, l'intervalle $[0,4]$ avec

$$\begin{cases} f_a(x) = ax(1-x) & a \in [0,4] \\ f_b(x) = bx(1-x) & b \in [0,4] \end{cases} \quad (IV-29)$$

On désigne par $h_{a,b}(x) = f_a[f_b(x)]$ la composition des fonctions logistiques $f_a(x)$ et $f_b(x)$ dans cet ordre par exemple. La composée $h_{a,b}(x)$ prend alors la forme

$$h_{a,b}(x) = ag(x)[1 - g(x)] \quad (IV-30)$$

En intégrant l'expression (IV-29) dans (IV-30), $h_{a,b}(x)$ admet la forme explicite suivante

$$h_{a,b}(x) = abx(1-x)(1-bx+bx^2) \quad (IV-31)$$

Nous mesurons alors toute la complexité à considérer les itérés de la fonction $h_{a,b}(x)$ tant pour les calculs des points fixes à différents ordre que pour le coefficient de Lyapunov λ qui devient fonction des deux paramètres a et b , donc $\lambda = \lambda(a,b)$ avec $a \in [0,4]$ et $b \in [0,4]$, ces deux "variables" parcourant le même intervalle indépendamment l'une de l'autre. Le calcul du coefficient de Lyapunov obéira à la relation (IV-28) et la construction du spectre de Lyapunov sera effectuée par rapport à la fonction $h_{a,b}(x)$ dont la dérivée première est

$$h'_{a,b}(x) = f'[g(x)]g'(x) = -ab(-1+2x)(2bx^2 - 2bx + 1) \quad (IV-32)$$

Une alternative à cette construction des fractales de Lyapunov consiste en une élaboration de séquences périodiques autour des deux paramètres de contrôle a et b . Partant de la suite logistique $U_{n+1} = aU_n(1-U_n)$, relativement à une condition initiale U_0 , on définit un système de suites par une périodisation d'apparition des paramètres de contrôle a et b comme illustré sur l'exemple suivant

$$\begin{cases} U_{n+1} = aU_n(1-U_n) \\ U_{n+1} = bU_n(1-U_n) \\ U_{n+1} = aU_n(1-U_n) \\ U_{n+1} = bU_n(1-U_n) \end{cases} \quad (IV-33)$$

Nous déduisons alors la séquence périodique $[a \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow b]$. En faisant varier le couple (a,b) relativement à l'intervalle $[0,4]$, on aboutit à un grid rectangulaire, la valeur de l'exposant de

Lyapunov $\lambda(a,b)$ calculé pour le couple de paramètres fixé étant localisé aux intersections. Une couleur est alors associée à cette valeur suivant que le coefficient de Lyapunov est positif (couleur bleue dans les simulations) ou négative (couleur jaune).(figure IV-30). La qualité en terme de résolution graphique est conditionnée par le choix du nombre de points à inclure. Nos simulations ont été conduites avec $n = 20000$ points.

La figure IV-22 est un exemple de fractal de Lyapunov obtenu pour la séquence périodique simple *abab*

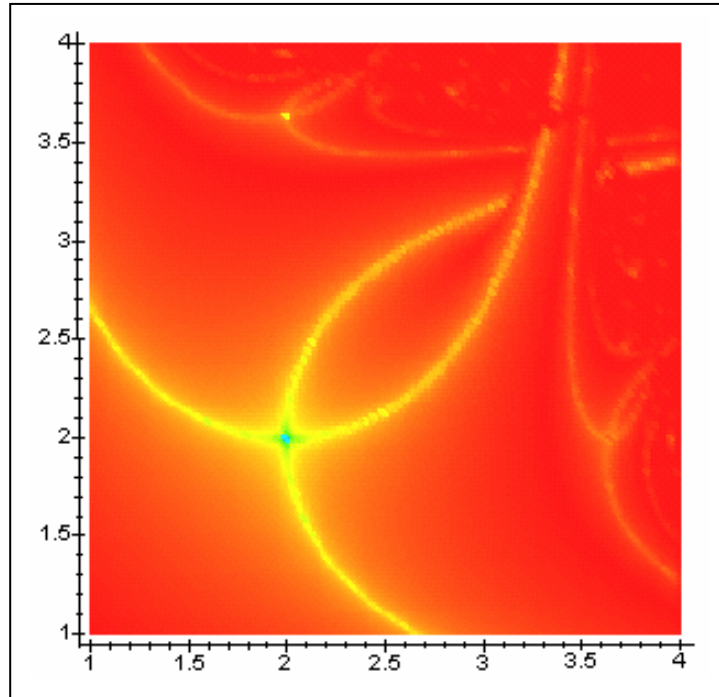


fig. IV-22 fractale de Lyapunov correspondant à la séquence *abab*

D'autres combinaisons dans les séquences des paramètres de contrôle a et b de forme et de longueur variables ont permis d'obtenir les fractales de Lyapunov : figure IV-23 pour la séquence périodique *abba*

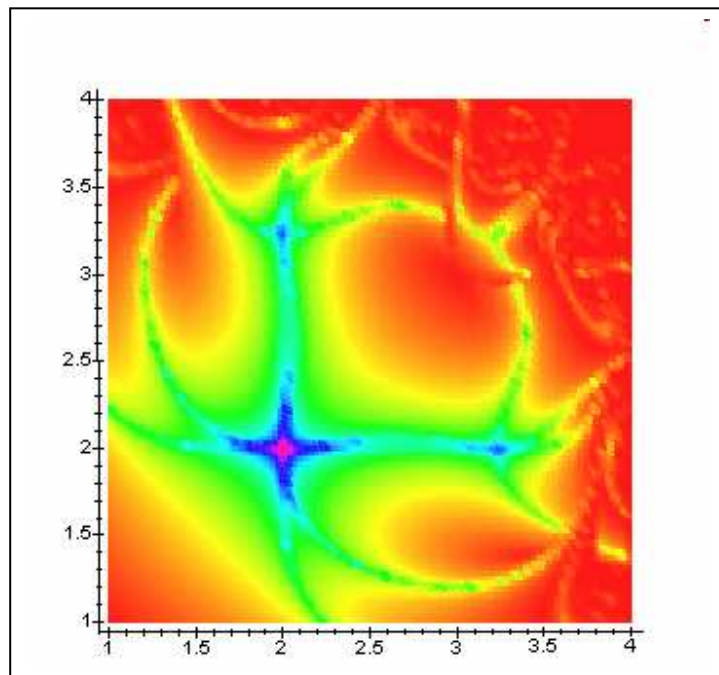


fig. IV-23 fractal de Lyapunov correspondant à la séquence *abba*

Afin de mettre en évidence les similarités entre les différentes zones du fractal de Lyapunov, un effet de loupe est appliqué sur la figure IV-23 pour $3 < a < 4$ et $3 < b < 4$ (figure IV-24)

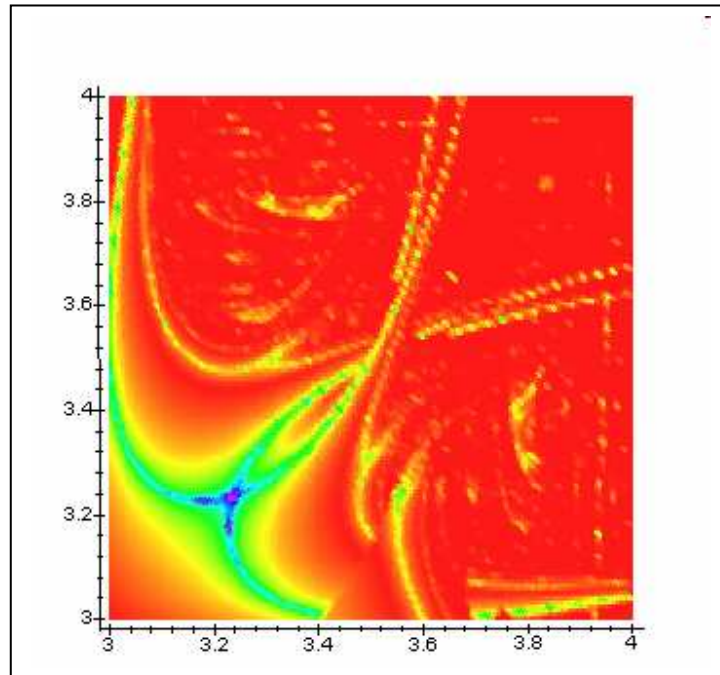


fig. IV-24 zoom sur le fractal de la fig. IV-23 pour $3 < a < 4$ et $3 < b < 4$

Une séquence périodique plus longue de la forme $[bbaaaab]$ a abouti au fractal de la figure IV-25 avec une représentation tridimensionnelle

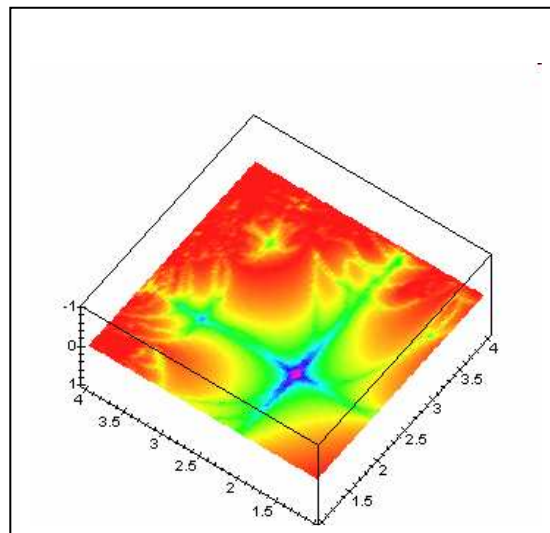


fig. IV-25 fractale de Lyapunov correspondant à la séquence $[bbaaaab]$

La fonction densité naturelle invariante dans le cas chaotique ($r = 4$)

Pour la valeur du paramètre $r = 4$, la fonction logistique développant donc un environnement de chaos, il est défini une fonction $\rho(X)$ caractérisant la fréquence de visite des orbites à tout intervalle, et générées à partir de conditions in initiales $X_0 \in [0,1]$. Il peut être montré que la densité naturelle invariante $\rho(X)$ admet pour expression

$$\rho(X) = \frac{1}{\pi \sqrt{X(1-X)}} \tag{IV-34}$$

Nous notons les singularités de cette fonction aux points $X = 0$ et $X = 1$ (figure IV-26)

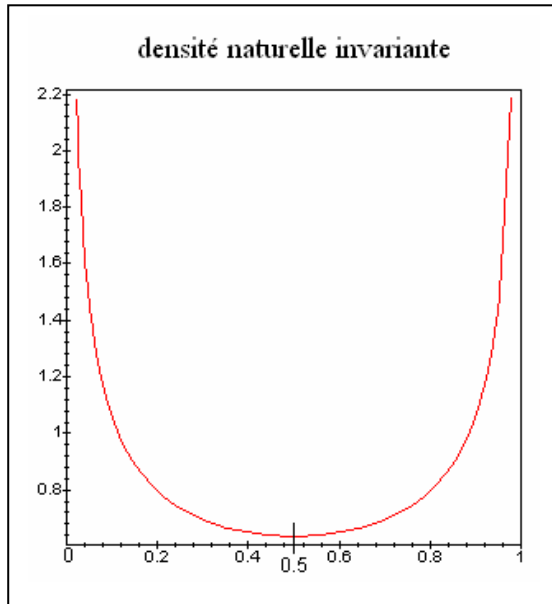


fig. IV-26 la fonction densité naturelle invariante $\rho(X)$

points en lesquels, nous avons d'ailleurs les équivalences suivantes (figure IV-27)

- $X \in]0, 0.5]$: $\rho(X) \approx \frac{1}{\sqrt{X}}$
- $X \in [0.5, 1[$: $\rho(X) \approx \frac{1}{\sqrt{1-X}}$

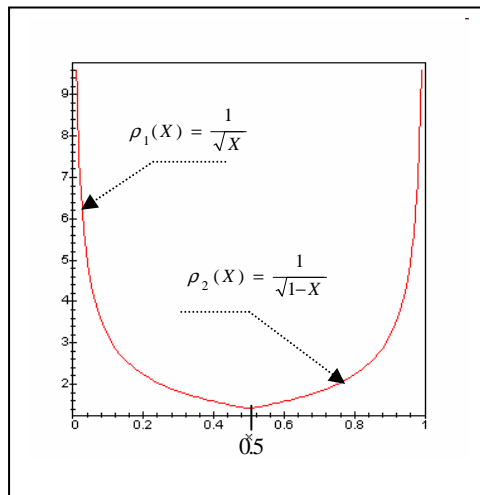


fig. IV-27 décomposition de la fonction densité naturelle invariante $\rho(X)$ sur les intervalles $]0, 0.5]$ et $[0.5, 1[$

L'interprétation de la dimension naturelle invariante $\rho(X)$ ainsi définie sera établie ultérieurement dans le cadre de la caractérisation des trajectoires issues de la dynamique d'un système par le biais de mesures topologiques.

XI- LES RECURRENCES NON LINEAIRES DE SECOND ORDRE**XI-1 LES RECURRENCES NON LINEAIRES DE SECOND ORDRE A VARIABLES REELLES**

Elles correspondent à la transformation ponctuelle à deux variables, qui sous forme explicite s'écrivent

$$\begin{cases} X_{n+1} = f(X_n, Y_n) \\ Y_{n+1} = g(X_n, Y_n) \end{cases} \quad (IV-35)$$

avec $f(X, Y)$ et $g(X, Y)$ des fonctions non linéaires, uniformes, continues des variables X et Y . Comme dans le cas des récurrences non linéaires du premier ordre, les solutions de (recurnonlin1) sont en général complexes au sens de leur expression et ne s'expriment pas à l'aide de fonctions ordinaires ou transcendantes. Cet inconvénient est contourné en exploitant les singularités de la récurrence dont l'augmentation de l'ordre de la récurrence implique une apparition de nouvelles singularités caractérisées par des courbes invariantes.

Une courbe $G(X, Y) = c$, c une constante, est dite invariante par la transformation définissant (recurnonlin1) si l'égalité suivante est satisfaite

$$G[f(X, Y), g(X, Y)] = G(X, Y) \quad (IV-36)$$

Certaines courbes invariantes, appelées séparatrices, sont telles dans le plan (X_n, Y_n) , les trajectoires discrètes évoluent à l'intérieur de cellules et adoptent un comportement qualitatif identique que nous qualifions de fractal. Comme dans le cas d'une récurrence non linéaire de premier ordre, à l'expression (IV-1) peut être associée une équation différentielle autonome d'ordre immédiatement supérieur c'est-à-dire trois. Ce passage du cas discret d'ordre deux au cas différentiel continu d'ordre trois se traduit par l'apparition d'un comportement chaotique. Pour deux zones du plan (X_n, Y_n) , les courbes invariantes seront sécantes hors des points singuliers classiques comme les points fixes ou les cycles. Les simulations que nous proposons ici, pour un modèle particulier de (recurnonlin1) il est vrai, illustrent bien ce cas de figure.

XI-2 UN MODELE DE RECURRENCE NON LINEAIRE DE SECOND ORDRE PARTICULIER : LE MODELE GALACTIQUE DE HENON

Par adjonction de paramètres spécifiques au système (IV-35), des distributions particulières des courbes invariantes peuvent être obtenues dont le modèle galactique de Hénon que nous aurons à simuler. D'une manière générale, ce dernier répond à la forme de récurrence suivante, dépendant d'un paramètre α

$$\begin{cases} X_{n+1} = f(X_n, Y_n, \alpha) \\ Y_{n+1} = g(X_n, Y_n, \alpha) \end{cases} \quad (IV-37)$$

L'intérêt que suscite le modèle (IV-37) tient du cas $\alpha = 0$ pour lequel les courbes invariantes sont de forme elliptique, de centre l'origine des coordonnées du plan (X_n, Y_n) .

Diverses formes de ce modèle peuvent être avancées ; nous retenons pour notre part la forme spécifique de récurrence non linéaire de second ordre suivante

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n \cos \varphi - Y_n \sin \varphi + \alpha P(X_n, Y_n, \alpha) \\ Y_{n+1} = X_n \sin \varphi + Y_n \cos \varphi + \alpha Q(X_n, Y_n, \alpha) \end{cases} \quad (IV-38)$$

avec P et Q des polynômes de degré N assez élevé et différentiables par rapport à α et $P(0, 0, \alpha) = Q(0, 0, \alpha) = 0$ et $\varphi \neq 2k\pi$. Notre intérêt portera sur le cas $\alpha = 0$, soit

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n \cos \varphi - Y_n \sin \varphi \\ Y_{n+1} = X_n \sin \varphi + Y_n \cos \varphi \end{cases} \quad (IV-39)$$

Le système (IV-39) peut être traduit sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} \quad (\text{IV-40})$$

Nous reconnaissons à travers (IV-40) la matrice de rotation d'angle $(-\varphi)$. Les axes du plan (X_{n+1}, Y_{n+1}) se déduisent donc des axes du plan (X_n, Y_n) par une opération de rotation d'angle $(-\varphi)$. Les courbes invariantes que l'on peut obtenir pour différentes valeurs de φ se déduisent toutes d'un cercle C_0 centré à l'origine. On constate, par simulation numérique, que les courbes invariantes obtenues sont fermées et peuvent être attractives ou répulsives pour les points (X_n, Y_n) situés dans leur voisinage.

XI-3 ORIGINE DU MODELE GALACTIQUE DE HENON

Le modèle de récurrence bidimensionnelle (IV-40) trouve son origine dans le modèle galactique hamiltonien qui, lui-même, remonte aux trajectoires stellaires galactiques dans la galaxie.

Le mouvement des étoiles et la distribution dans l'espace stellaire de la masse de ces dernières, sont soumis à un potentiel gravitationnel $V(X, Y, Z)$ et à la densité, réunis par l'équation de Poisson

$$\nabla^2 V = -4\pi G\mu(X, Y, Z) \quad (\text{IV-41})$$

L'enveloppe de la fonction $\mu(X, Y, Z)$ n'est en général pas connue mais, grossièrement elle correspond à un disque plat dont le rayon est fonction de la distribution des populations galactiques. Les sections de Poincaré de tout modèle Hamiltonien soulèvent un problème d'intégration numérique pour générer l'ensemble des trajectoires même par un procédé de récurrence qui nécessitera un nombre appréciable de points source. Pour contourner ce problème d'ordre numérique, une transformation T du plan (X, Y) vers le plan (X', Y') est considérée, sous l'hypothèse que chaque point de l'espace est invariant par T (le Jacobien de la transformation étant égal à l'unité). A l'instar des points d'équilibres stables dans l'application de Poincaré, une rotation autour de l'origine doublée d'un terme de non – linéarité est retenue. Ces considérations ont abouti au modèle de Hénon (IV-40) qui nous permettra d'observer nos premières structures fractales issues d'une dynamique de récurrence non linéaire de deuxième ordre.

XI-4 QUELQUES CAS DE SIMULATIONS DU MODELE GALACTIQUE DE HENON

Notre objectif, à travers les simulations des courbes invariantes effectuées sur un nombre N d'itérations ($N > 1000$) est d'étudier le comportement de ces dernières, de mettre en évidence si possible des structures fractales pour des valeurs choisies de l'angle φ :

- **cas 1:** $\varphi = 76^\circ$ (figure IV-28)

Il est mis en évidence trois régions dont les caractéristiques sont en apparence différentes

- une trajectoire périodique marquée autour de l'origine relayée par deux trajectoires centrales distinctes, de résolution graphique moindre à mesure que l'on s'éloigne de l'origine
- un ensemble de cinq îlots dont la configuration est plus ou moins identique à celle déjà observée mais avec un facteur d'échelle inférieur. En fait, ces îlots sont issus d'une même trajectoire périodique, mais de période plus élevée que celle de la trajectoire centrale (temps de tracé plus long).
- Un essaimage de points dans la zone la plus externe, avec une distribution d'apparence chaotique mais une observation à une échelle locale révélera la même architecture que dans les premières zones: nous sommes bien en présence d'un développement fractal représenté par une succession d'imbrications gérées chacun par un facteur d'échelle spécifique.

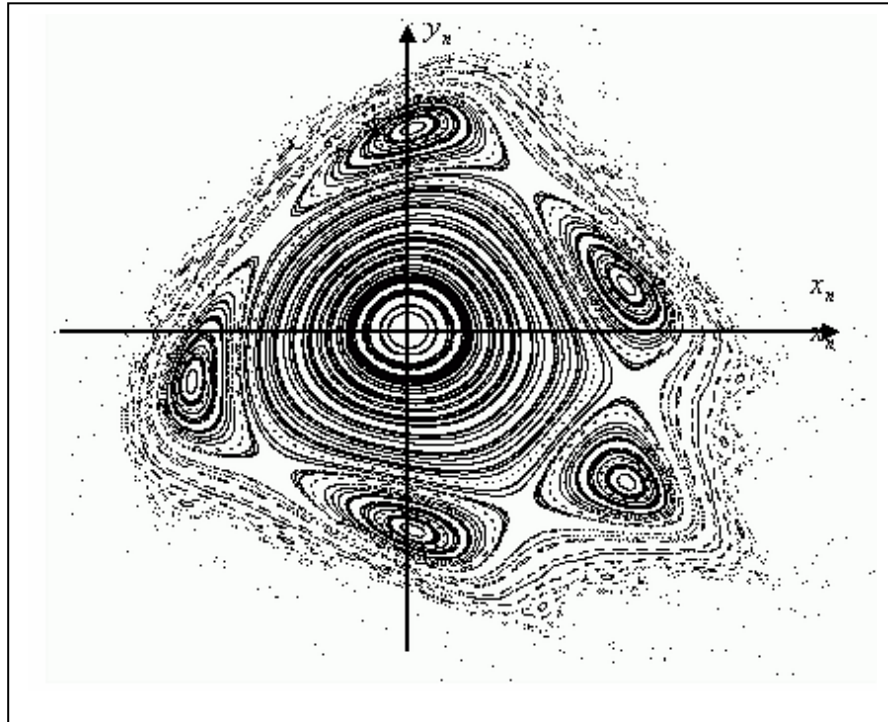


fig. IV-28 modèle galactique de Hénon pour $\varphi = 76^\circ$

Une variante du modèle précédent considérée pour $\varphi = 77^\circ$ est donnée par la figure IV-29 rejoignant les structures observées sur la figure IV-28 mais avec une meilleure résolution graphique

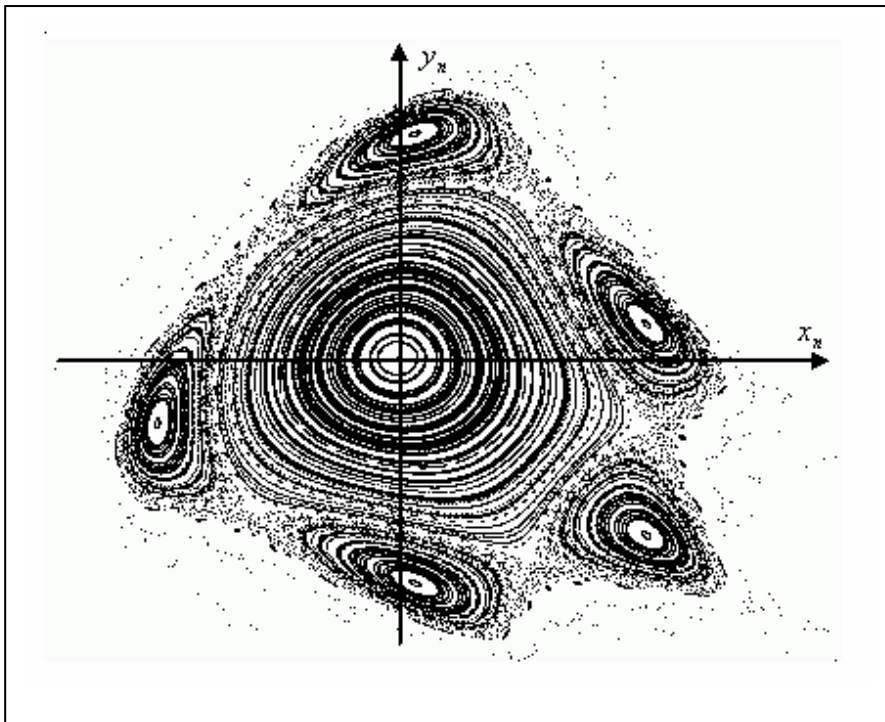


fig. IV-29 modèle galactique de Hénon pour $\varphi = 77^\circ$

- **cas 2:** $\varphi = 91^\circ$ (figure IV-30)

Seule une trajectoire subsiste au centre du modèle, avoisinant une structure en "pétales" imbriqués, issus d'une même trajectoire; l'ensemble baigne dans un halo d'apparence erratique mais suggérant d'autres structures organisées.

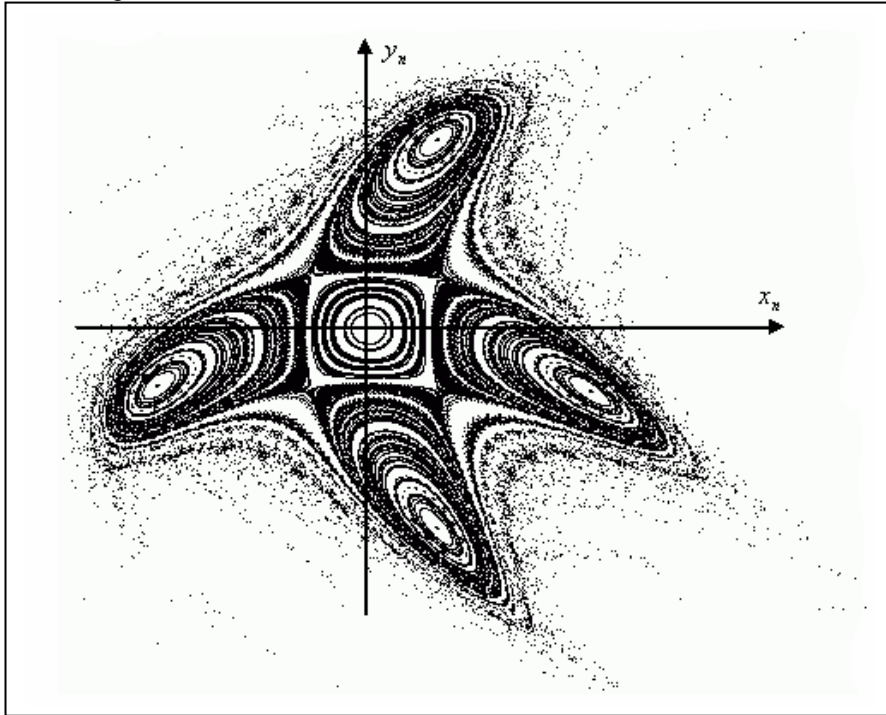


fig. IV-30 modèle galactique de Hénon pour $\varphi = 91^\circ$

- **cas 3:** $\varphi = 79^\circ$ (figure IV-31)

On observe une persistance des trajectoires centrales périodiques alors que les structures fractales occupent des positions satellitaires avec une dégradation de la résolution suggérant même un effet de migration par rapport au corps – mère.

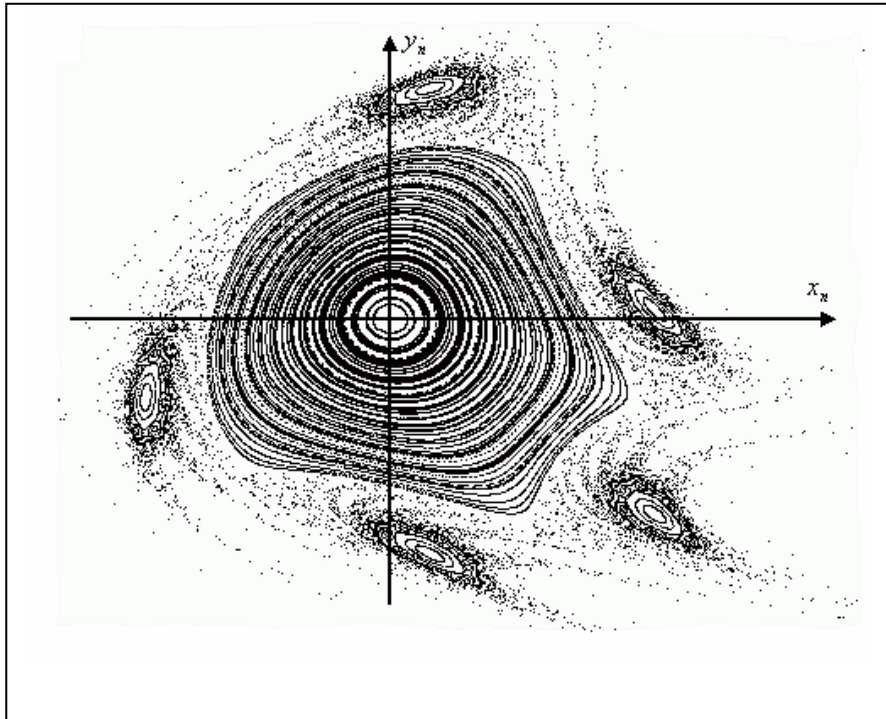


fig. IV-31 modèle galactique de Hénon pour $\varphi = 79^\circ$

Au cours de ces simulations, le choix des valeurs de l'angle φ répond uniquement à un critère de représentation "esthétique" et interprétable. Le concept "d'échelle d'observation" si fondamental en théorie fractale, s'impose de plus en plus comme une véritable dimension dans certains processus dynamiques. Les quelques exemples que nous avons simulés ont mis en évidence un concept qui tend à s'imposer en physique théorique, celui des imbrications qui tend à conférer à l'espace – temps un caractère fractal. Des formalismes mathématiques très proches de la théorie fractale (les Systèmes de Fonctions Itérées ou IFS, les groupes de renormalisation, les relateurs arithmétiques,...) mais tout de même nouveaux tendent à donner au phénomène d'imbrication une issue déterministe.

XI-5 LE MODELE GALACTIQUE SPIRAL

Un modèle simplifié mais non moins fécond du modèle galactique de Hénon (IV-40) et faisant encore l'objet de larges études; il s'agit du modèle galactique spiral qui, dans le plan (X, Y) est défini par les relations

$$\begin{cases} X_{n+1} = Y_n \\ Y_{n+1} = -\varepsilon X_n + \mu - Y_n^2 \end{cases} \tag{IV-42}$$

Le Jacobien $|J|$ de la transformation est tel que

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_{n+1}}{\partial X_n} & \frac{\partial X_{n+1}}{\partial Y_n} \\ \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial X_n} & \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial Y_n} \end{vmatrix} = \varepsilon \tag{IV-43}$$

Les surfaces sont préservées si $\varepsilon = 1$ et pour $\varepsilon < 1$, le modèle (IV-42) représente un système dissipatif et nos simulations de trajectoires reposeront sur cette hypothèse. Le paramètre μ et l'angle de rotation φ dans le modèle (IV-39) sont reliés par l'expression

$$\mu = 4 \sin^4(\varphi / 2) - 1 \tag{IV-44}$$

Dans les modèles de trajectoires que nous choisirons μ tel que $0 < \mu < 1$.

XI-6 UNE FORME DU MODELE GALACTIQUE DE HENON : LE MODELE GALACTIQUE SPIRAL

XI-6-1 QUELQUES REPERES SUR LES GALAXIES

En astrophysique, une galaxie est représentée comme une population de cent (100) milliards d'étoiles qui peuplent l'Univers en compagnie d'autres objets célestes. Pour la plupart d'entre –elles, leur forme est spirale. Cette géométrie particulière a donné lieu à de nombreuses hypothèses sur ce qu'il est appelé le mystère "de l'enroulement sur un tour" des structures spirales.

Les galaxies sont animées d'un mouvement de rotation autour de leur axe. Par suite, et en vertu de la théorie de la rotation différentielle, toute irrégularité soumise à un mouvement de rotation tend à acquérir une configuration en spirale. Le dilemme de l'enroulement, non encore élucidé, réside dans le nombre restreint (deux au maximum) d'enroulements effectués lors de la dynamique spirale.

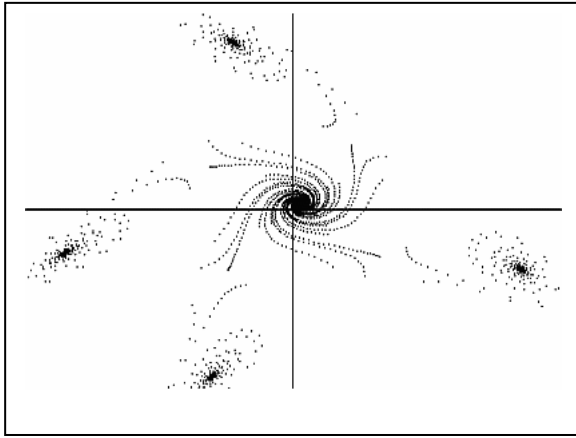
Un autre fait tout aussi important concerne la formation de bras spiraux, lieu de formation de jeunes étoiles dont la naissance résulterait d'une densité différentielle dans la distribution des gaz interstellaires donnant naissance à des cellules inhomogènes , irrégulières et instables.

L'intérêt qui motive l'étude du modèle galactique de Hénon puis du modèle galactique spiral est que le premier est une récurrence de deuxième ordre non linéaire d'obédience chaotique voire fractale, le second en représente en quelque sorte une "déviation" de comportement. Plus généralement, la question posée serait la suivante: un système chaotique pourrait-il être la source d'un autre comportement plus régulier et plus stable?

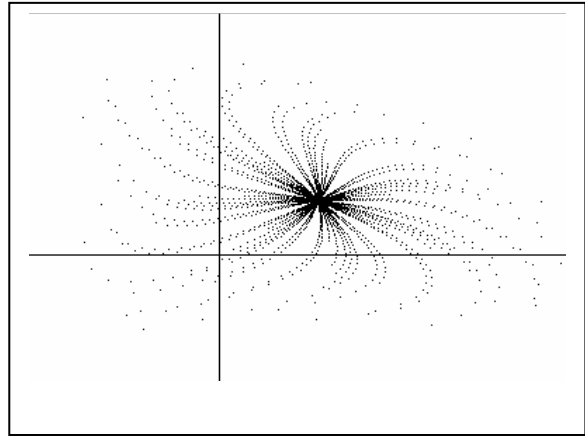
XI-6-2 SIMULATION DE QUELQUES GALAXIES SPIRALES

Partant du modèle dynamique non linéaire (IV-42) et de la relation (IV-44), l'élaboration de modèles galactiques spiraux est possible. Par souci d'une reproduction de modèles réels, nous avons testé

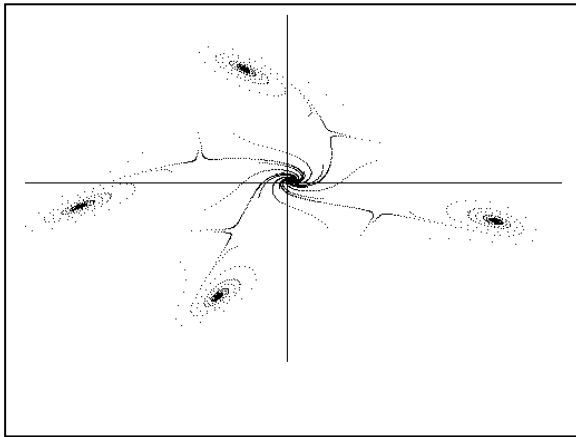
certaines valeurs du paramètre μ de la relation (IV-44) modifiée en posant $\mu = 4 \sin^4(\varphi/2) - \beta$. Des valeurs attribuées à l'angle φ et au paramètre β ont généré les modèles donnés par la figure IV-32.



$\alpha = 76^0$ $\varepsilon = 0.98$ $\mu = 0.0446$ $N = 1000$



$\alpha = 91^0$ $\varepsilon = 0.98$ $\mu = 0.4852$ $N = 1000$



$\alpha = 76.11^0$ $\varepsilon = 0.98$ $\mu = 0.0275$ $N = 1000$

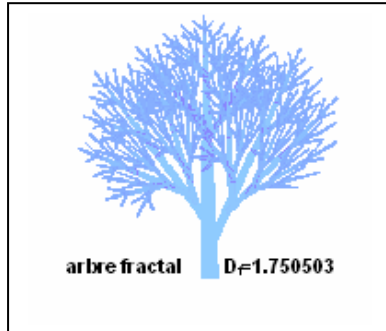
fig. IV-32 simulation de quelques modèles de galaxies en fonction des paramètres α, ε et μ

CHAPITRE V

*La récurrence est humaine
La récursivité est divine*

GEOMETRIE FRACTALE DUALITE DES ENSEMBLES DE MANDELBROT ET DE JULIA

GEOMETRIE FRACTALE DUALITE DES ENSEMBLES DE MANDELBROT ET DE JULIA



I- GEOMETRIE FRACTALE

Le concept de figure ou d'image fractale, depuis son introduction par le mathématicien français Benoît Mandelbrot (1975) présente la particularité d'une expansion remarquable sur le plan des applications intégrant pratiquement toutes les disciplines (mathématiques, physique, urbanisme, sciences de la terre, économie, chimie,...) au détriment d'une théorie cohérente et unanimement consacrée. Si sur le plan épistémologique, l'origine du *fractal* a été explicité par le concepteur ("*I coined fractal from Latin adjective Fractus. The corresponding Latin verb frangere means to break to create irregular fragments. It is therefore sensible and how appropriate for our needs. That in addition to fragmented fractus*"), il n'en reste pas moins que

should also mean irregular, both meanings being preserved in fragment"), il n'en reste pas moins que la théorie fractale dans toute sa structure est, à notre sens, encore à élaborer.

I-1 APPROCHE QUALITATIVE DES FRACTALS

L'essentiel du descriptif d'une image ou d'une courbe fractale peut être déduit de la définition telle que énoncée ci-dessus. La géométrie fractale se distingue de la géométrie euclidienne par deux aspects au moins:

- la géométrie euclidienne a pour objet la description d'objets réguliers tels que points, surfaces et volumes en utilisant les dimensions entières
- les figures de la géométrie euclidienne proviennent en général de relations algébriques

Cependant, nombre d'objets qu'ils soient d'origine naturelle ou créés par voie algorithmique, ne répondent pas à cette description euclidienne dès lors qu'il est associé à leur mesure intrinsèque (longueur, surface, volume) une échelle d'observation, d'analyse ou de mesure. (exemple : la longueur de la côte d'un pays maritime dépend de la taille de la jauge utilisée pour effectuer les mesures, principe que nous approfondirons dans le cadre de la dimension fractale).

Définir un fractal revient à prendre en considération cinq caractéristiques fondamentales:

1. la présence d'une structure "fine" c'est-à-dire de détails complexes vers les faibles échelles d'observation
2. une forte irrégularité que ne peut traduire la géométrie conventionnelle ni localement, ni globalement. Une caractérisation possible de certaines courbes irrégulières serait le concept de la dérivation d'ordre non entier auquel nous consacrons un développement dans la présente thèse.
3. l'existence d'une self similarité, à la limite de type statistique
4. la dimension fractale de l'objet peut être non entière et supérieure à sa dimension topologique
5. Dans certains cas, la modélisation d'un processus fractal relève de suites récurrentes, construites après raisonnement ou par tâtonnement.

Dans ce contexte, nous joignons un modèle (esthétique) de récurrence de deuxième ordre avec présence de non linéarité, dû aux physiciens I. Gumowski et C. Mira (figure V-1)

$$\begin{cases} X_{n+1} = bY_n + f(X_n) \\ Y_{n+1} = X_n + f(X_{n+1}) \end{cases} \quad \text{avec } f(X) = ax + \frac{2(1-a)X^2}{1+X^2} \quad (V-1)$$

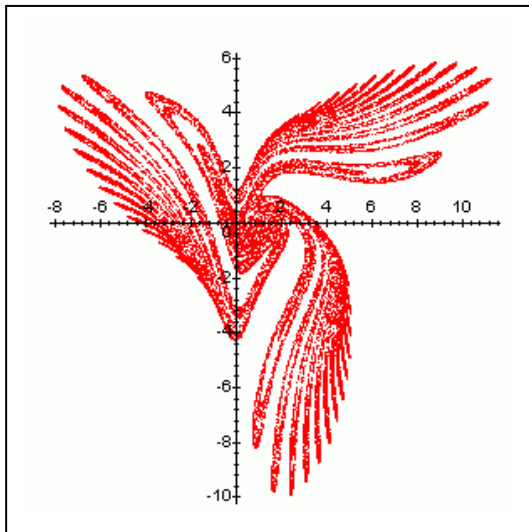


fig. V-1 modèle de Gumowski – Mira

$$a = -0.48 \quad b = 0.93$$

$$N = 30000 \text{ points}$$

$$X_0 = 4 \quad Y_0 = 0$$

I-2 APPROCHE QUANTITATIVE DES FRACTALS

Deux aspects estimés à juste titre comme les plus significatifs dans l'approche quantitative des images et des courbes fractales: le principe d'autosimilarité et la notion de dimension fractale.

I-2-1 TRANSFORMATION DE SIMILARITE ET CRITERE DE SELF SIMILARITE

Une transformation de similarité dans le plan est définie comme une application combinant une translation, un changement d'échelle et une rotation. Soit $M(x, y) \in \mathcal{R}$. Pour chacune de ces opérations, nous avons les définitions suivantes

- opérateur de translation T :

$$T(x, y) = (x + x_0, y + y_0) = (x, y) + (x_0, y_0) \quad (V-2)$$

$$\text{avec } (x_0, y_0) \in \mathcal{R}^2$$

- opérateur de changement d'échelle E de rapport $k > 0$

$$E(x, y) = (kx, ky) = k(x, y) \quad (V-3)$$

- opérateur de rotation R autour de l'origine d'angle θ :

$$R(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (V-4)$$

En notation vectorielle, si $V = (x, y)$, $[Rot_\theta]$ la matrice de rotation et $V_0 = (x_0, y_0)$, les expressions (V-2), (V-3) et (V-4) deviennent

$$\begin{cases} T(V) = V + V_0 \\ E(V) = kV \\ R(V) = [Rot_\theta]V \end{cases} \quad (V-5)$$

Comme une transformation de similarité ϕ est une combinaison des trois transformations ci-dessus présentées, appliquée sur le vecteur V elle s'écrit

$$\phi(V) = k[Rot_\theta]V + V_0 \quad (V-6)$$

L'ordre d'exécution des opérations se déroule comme suit: rotation \rightarrow changement d'échelle \rightarrow translation. En ayant ainsi défini la transformation de similarité activant sur des vecteurs et souvent qualifiée aussi de similitude ou de transformation affine, elle peut être prolongée à une

définition ensembliste; deux ensembles A et B sont similaires s'il existe une transformation de similarité $\phi_{t,s}$ telle que

$$\phi_{t,s}(A) = \phi(B) \tag{V-7}$$

I-2-2 LA SELF – SIMILARITE

Un ensemble A est dit self – similaire s'il existe une collection non triviale (exceptée l'identité) de similitudes $\{S_i(A)\}_{i=1,n}$ tel que

$$A = \bigcup_{i=1}^n S_i(A) \tag{V-8}$$

Dans l'expression (V-8), la self – similarité traduit la reconstitution d'une entité globale à partir de la réunion d'une collection d'atomes morphologiquement identiques à cette dernière.

I-2-3 LA SIMILARITE STATISTIQUE

La similarité statistique adhère beaucoup plus aux cas concrets et traduit une self – similarité quasi – certaine ou tout au moins relative à une échelle d'observation ou d'analyse assez fine. On n'hésitera donc pas à différencier la self – similarité stricte de la self – similarité au sens statistique et partant des statistiques fractales. Les ensembles de Mandelbrot, de Julia et de Cantor étudiés de manière approfondie dans la présente thèse, sont statistiquement selfs – similaires (figure V-2).

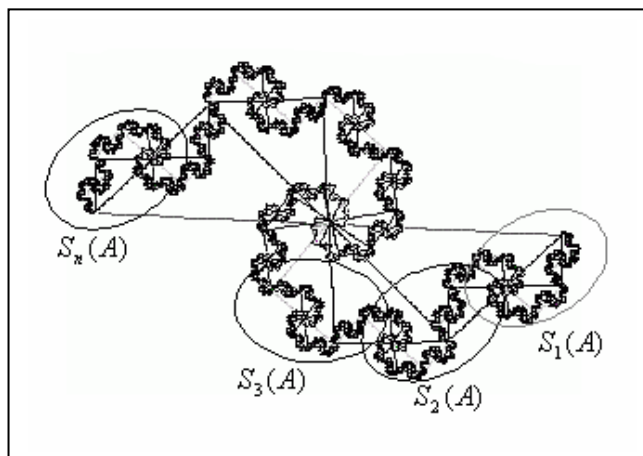


fig. V-2 la self - similarité dans un fractal "polymère"

Pour d'autres objets, naturels ou non, la mise en évidence de la self –similarité nécessite soit un effort d'extraction par dissection par exemple (figure V-3) ou par conception (figure V-4).



fig. V-3 extraction d'une self –similarité par dissection



fig. V- 4 une self - similarité par conception

II- L'ESPACE METRIQUE $\mathcal{F}(X)$ DES FRACTALS

La caractérisation quantitative des fractals et partant de leur modélisation passe inévitablement par la définition d'abord d'un espace de référence muni des éléments topologiques adéquats et y inclure des opérateurs de manipulation qui insuffleront une dynamique dite aussi fractale.

Le critère même d'image, c'est – à- dire à consistance bidimensionnelle ou tridimensionnelle, prédéfinit l'espace "biologique" des images fractales : \mathcal{R}^2 ou \mathcal{R}^3 . En nous limitant au domaine plan, posons $X = \mathcal{R}^2$, la topologie étant complétée par la définition d'une métrique d que nous nous supposons être par exemple la norme euclidienne. L'espace métrique (X, d) ainsi construit sera supposé complet. Conjointement, on définit l'espace $\mathcal{F}(X)$ comme l'ensemble des points appartenant à des sous-ensembles compacts (fermés, bornés) de X , ce dernier étant exclu. Dès lors, on appellera *fractal* tout élément de $\mathcal{F}(X)$.

II-1 DETERMINATION D'UNE METRIQUE DE $\mathcal{F}(X)$

On montre que la métrique euclidienne d disponible ne peut être accordée à l'ensemble $\mathcal{F}(X)$. Remarquons d'abord que l'opération d'intersection n'est pas interne dans $\mathcal{F}(X)$ en ce sens que

$\forall (F_1, F_2) \in \mathcal{F}^2(X)$, $F_1 \cap F_2$ n'est pas nécessairement un élément de $\mathcal{F}(X)$ en vertu des propriétés des ensembles compacts contrairement à leur réunion $F_1 \cup F_2$ qui reste un élément de $\mathcal{F}(X)$. Concrètement, l'intersection de deux fractals n'est pas toujours un fractal contrairement à leur "assemblage" (ou réunion).

- Soient $X_1 \in X$ et $F \in \mathcal{F}(X)$; on définit la distance $d(X_1, F)$ par

$$d(X_1, F) = \inf [d(X_1, y)] \text{ avec } y \in F$$

- La distance entre deux fractals F_1 et F_2 dans $\mathcal{F}(X)$ notée $d(F_1, F_2)$ est donnée par

$$d(F_1, F_2) = \sup [d(x_1, F_2)] \text{ avec } x_1 \in F_1$$

En général $d(F_1, F_2) \neq d(F_2, F_1)$ comme cela peut être le cas si $F_1 \subset F_2$ où nous avons $d(F_1, F_2) = 0$ mais $d(F_2, F_1) \neq 0$. Nous avons alors une contradiction par rapport à l'un des critères que vérifie la distance euclidienne. Il convient alors de définir une distance spécifique dans l'ensemble

des fractals $\mathcal{F}(X)$: la distance de Hausdorff d_H dont nous retrouvons une application dans le calcul de la dimension fractale du même nom.

II-2 DISTANCE DE HAUSDORFF

Soient $(F_1, F_2) \in \mathcal{F}(X)$ deux éléments fractals. On définit la distance de Hausdorff $d_H(F_1, F_2)$ entre ces deux éléments par

$$d_H(F_1, F_2) = \max[d(F_1, F_2), d(F_2, F_1)] \quad (V-9)$$

La dimension de Hausdorff définit bien une métrique dans l'ensemble fractal $\mathcal{F}(X)$ puisque les cinq critères requis en sont vérifiés:

$$\begin{cases} d_H(F_1, F_2) > 0 \\ d_H(F_1, F) = 0 \\ d_H(F_1, F_2) = d_H(F_2, F_1) \\ d_H(F_1, F_2) = 0 \Leftrightarrow F_1 \equiv F_2 \\ d_H(F_1, F_2) \leq d_H(F_1, F_3) + d_H(F_3, F_2) \end{cases} \quad (V-10)$$

III- APPROCHE MATHÉMATIQUE DE LA GÉNÉRATION D'IMAGES FRACTALES

Partant du caractère non déterministe du fractal dont le processus de génération varie dans le temps donc aléatoire, divers programmes de génération de ce type d'image reposent sur une formulation récursive, plus adaptée à une modélisation numérique de systèmes dynamiques conduisant à des objets fractals; le principe obéit au schéma suivant:

- soit E_0 un objet géométrique initial (graine) d'un espace E , f une application de E dans E telle que $f(E_0) \subset E_0$
- On construit la dynamique de récurrence suivante

$$\begin{cases} E_0 \\ E_{n+1} = f(E_n) \end{cases} \quad (V-11)$$

- la suite d'objets géométriques tend vers une limite qui est souvent une image fractale.
- si les objets $\{E_n\}$ sont des compacts (donc bornés, fermés) de l'ensemble E , on peut les inclure dans un segment si E est une droite, dans un disque si E est un plan et dans une boule si E est un espace de dimension trois.
- ainsi toute suite convergente de E_n admet une limite dans E_n .

Notons que les formes de récurrences données par (V-11) peuvent être réelles ou complexes et jouissent de par leurs expressions de propriétés intéressantes qui font toute la beauté et l'expressivité des images fractales.

IV- LES APPLICATIONS ITERATIVES SUR LE PLAN COMPLEXE

IV-1 LES METHODES ITERATIVES DANS LE PLAN REEL

Le principe des méthodes itératives a constitué depuis longtemps un outil orienté vers la résolution de différents problèmes mathématiques dont ceux relatifs à la définition de certaines fonctions, la méthode des approximations successives pour la résolution d'équations algébriques ou encore la définition de certaines suites. Ainsi sous l'action d'une transformation ponctuelle T relativement à une fonction uniforme f et à une variable réelle x , on définit la récurrence non linéaire: $x_{n+1} = f(x_n)$. Des situations complexes peuvent émerger de cette dernière en l'absence d'hypothèses particulières telles que f non de classe C^1 ou dénuée de toute continuité pour laquelle on observe alors une

dégénérescence de l'ordre induit par l'augmentation de l'ordre de récurrence effectif. Cette complexité croissante se traduit par l'impossibilité d'exprimer les solutions de la récurrence précitée sous la forme de fonctions transcendentes qui peuvent être par exemple des développements convergeant asymptotiquement. La difficulté peut être contournée en approchant les propriétés des solutions par l'étude de la nature des singularités, les singularités les plus simples étant constitués par les points fixes, racines de l'équation $x = f(x)$.

IV-2 LES METHODES ITERATIVES DANS LE PLAN COMPLEXE

Notre intérêt n'est pas tant la reprise de la méthodologie itérative perçue sous un angle formel ou de formulation mais de pénétrer au cœur du processus de convergence sous un aspect de dynamique itérative illustrée par le comportement des orbites ou des trajectoires

il est attendu de l'extrapolation des techniques itératives au plan complexe, l'émergence de comportements probablement particuliers et souhaités expressifs des orbites issues de la dynamique des transformations portant sur des fonctions analytiques considérées dans ce plan. Partant d'un point z_0 du plan complexe, on fera suivre ce dernier par l'ensemble des orbites $\{z_0, z_1, \dots, z_i, \dots\}$ construites sous l'action d'une fonction analytique $f(z)$. Il s'agit donc d'une dynamique discrète prise dans le plan complexe de la forme :

$$z_{n+1} = f(z_n) = f^n(z_0) \quad n \geq 0 \quad (V-12)$$

Un intérêt particulier est accordé au cas consistant à faire varier z_0 et de faire débiter l'itération au voisinage d'un point fixe α vérifiant $f(\alpha) = \alpha$. On effectue alors un développement en série de Taylor relativement au point fixe α de la fonction analytique f :

$$f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z - \alpha) + \sum_{n \geq 2} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n \quad (V-13)$$

Comme $f(\alpha) = \alpha$ et en posant $f'(\alpha) = \lambda$:

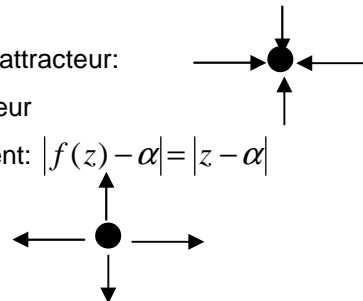
$$f(z) = \alpha + \lambda(z - \alpha) + \sum_{n \geq 2} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n \quad (V-14)$$

Une première approximation linéaire de la fonction f donnerait :

$$|f(z) - f(\alpha)| = |\lambda| |z - \alpha| \quad (V-15)$$

Le comportement de la fonction f par rapport au point fixe α devient ainsi conditionnée par l'état de la valeur propre λ , état pour lequel nous distinguons les cas suivants :

- Si $|\lambda| < 1$, le point fixe α est alors point fixe attracteur:
- Si $\lambda = 0$ le point fixe α est dit super attracteur
- Si $\lambda = 1$ nous sommes dans un cas indifférent: $|f(z) - \alpha| = |z - \alpha|$
- Si $|\lambda| > 1$ le point fixe α sera dit répulsif

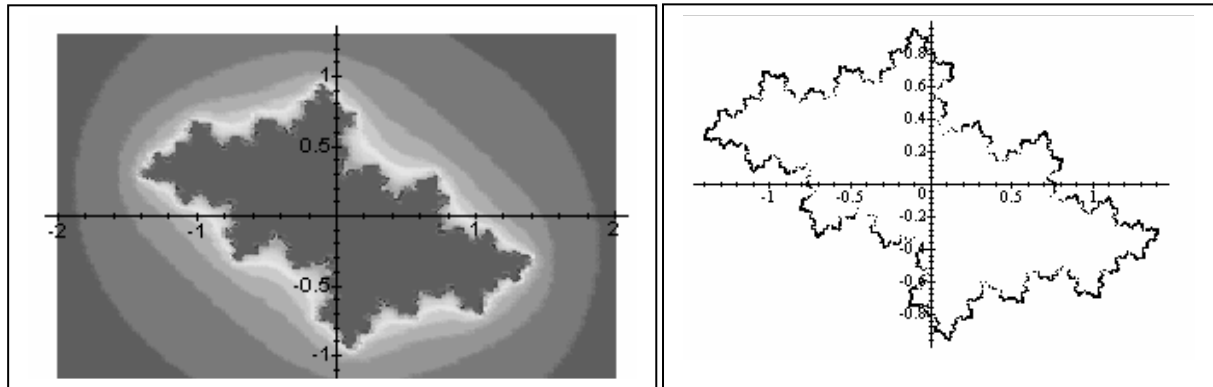


Considérons, à titre d'exemple, l'application f définie dans le plan complexe par

$$f : C \rightarrow C$$

$$z \mapsto f(z) = z^2 - 0.5 + 0.5j$$

Traduite sous la forme d'une série complexe récurrente sur le modèle d'un ensemble de Julia que nous définirons par la suite, la fonction complexe f est illustrée par la figure V-5 incluant une représentation du graphe dite pleine (figure V-5 (a)) et la frontière (de type fractal) correspondante (figure V-5 (b)).



(a) (b)
fig. V-5 Représentation en termes de suite récurrente complexe de la fonction
 $f(z) = z^2 + 0.5 - 0.5j$ (a) configuration pleine (b) frontière fractale associée

La fonction f admet deux points fixes z_1 et z_2 , racines de l'équation $f(z) = z$ et tels que $z_1 = -0.41 + 0.28j$; $z_2 = 1.41 - 0.28j$ et dont seul z_1 est un attracteur.

IV-3 BASSIN D'ATTRACTION

Pour un attracteur donné α pour la fonction analytique f , l'ensemble des points $A(\alpha)$ convergeant vers α définit le bassin d'attraction:

$$A(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{C} / \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = \alpha \right\} \quad (V-16)$$

Remarquons que si $A(\alpha)$ est un point fixe attracteur de la fonction f alors $A(\alpha)$ reste un bassin d'attraction pour toute composition f^k , k étant un entier quelconque.

Un bassin d'attraction est un ensemble ouvert. En effet, si le point fixe α est attractif, tous les autres points situés à une distance d suffisamment petite par rapport à α convergent vers ce point avec les itérés de f . Pour un disque D assez petit, nous avons $\alpha \in D \subseteq A(\alpha)$ (figure V-6). Supposons $z \in A(\alpha)$; nous devons montrer que z se situe dans un ensemble ouvert contenu dans $A(\alpha)$. Comme $f^n(z)$ appartient à D pour n donné, aussi z est-il dans la $n^{\text{ème}}$ image inverse $f^{-n}(D)$ qui est un ensemble ouvert par suite de la continuité de f et se situe dans $A(\alpha)$ par ce que D s'y trouve.

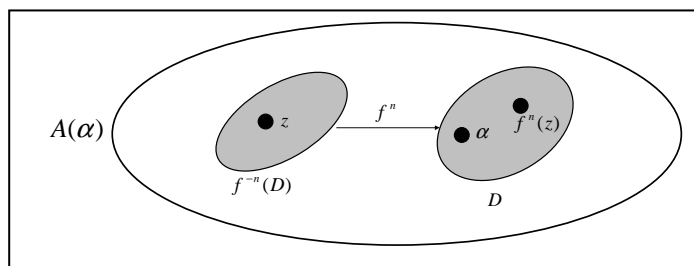


fig. V-6 un bassin d'attraction est un ensemble ouvert

Un exemple instructif de calcul de bassin d'attraction est celui relatif aux fonctions de type : $f(z) = z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$. Par le choix de ce paramètre, il émerge des géométries de bassin d'attraction souvent étonnantes. Ainsi pour :

- $c = 0$, les points fixes sont répulsifs si $z = 1$ puisque $f'(1) = 2 > 1$
- Le bassin d'attraction de $z = 0$, $A(0)$ est tel que :

$$A(0) = \left\{ z \in \mathbb{C} / \lim_{n \rightarrow \infty} z^{2n} = 0 \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} / |z| < 1 \right\} \quad (V-17)$$

le bassin d'attraction du point fixe attracteur $z = 0$ de la fonction $f(z) = z^2$ est donc l'intérieur du cercle unité centré à l'origine (figure V-7)

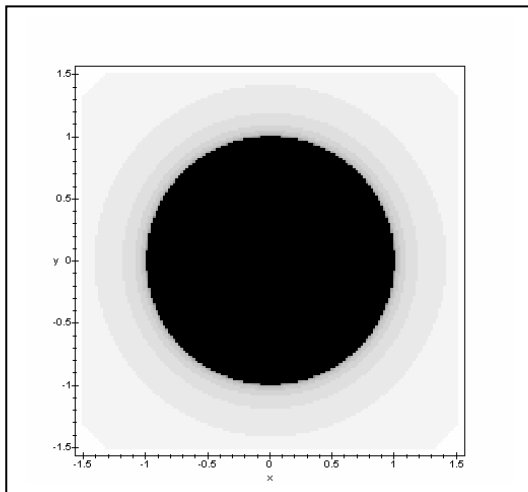


fig. V-7 bassin d'attraction du point fixe $z = 0$ de $f(z) = z^2$

Le bassin d'attraction $A(0)$ est donc le disque ouvert de rayon unité. Nous désignons par $C_A(0)$ le contour ; il consiste donc en le cercle unité et représente aussi la frontière de l'ensemble pour lequel $\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(z)| = \infty$ c'est-à-dire en fait l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} / |z| > 1\}$. Il faut toutefois préciser dans quelle mesure l'infini peut être considéré comme un attracteur. Dans le cas mentionné ci-dessus et en termes de frontière, il est évident que $C_A(0) = C_A(\infty)$.

IV-4 INTEGRATION DE L'INFINI COMME ATTRACTEUR DANS LE PLAN COMPLEXE:

Dans le plan complexe, la notion d'infini est à définir par l'extension \bar{C} de l'ensemble C tel que : $\bar{C} = C \cup \{\infty\}$. Cette extension de l'ensemble C permet donc de définir un bassin d'attraction avec l'infini comme attracteur :

$$A(\infty) = \left\{ z \in \bar{C} / \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = \infty \right\} \quad (V-18)$$

V- POINTS PERIODIQUES DANS UNE ITERATION A TERMES COMPLEXES

Le problème de la détermination des points fixes dans les itérations de formes complexe se pose en terme de généralisation de la notion de points périodiques établie dans le cas des itérations à facteurs réels (fonction logistique) aux récurrences à termes complexes. Un complexe $z_0 \in \mathbb{C}$ est dit "point périodique" de la fonction analytique f s'il vérifie la relation $f^p(z_0) = z_0$, p étant un entier. Un p -cycle consistera en une séquence $S = \{z_0, z_1, \dots, z_{p-1}\}$ générée par la récurrence (V-12)

Un point périodique z_0 de la fonction analytique $f(z)$ (ou le p -cycle correspondant) définira un attracteur si la valeur propre $\lambda = \left| \left(f^p \right)'(z_0) \right|$ est telle que $|\lambda| < 1$ ($|\lambda| > 1$ dans le cas d'une répulsion).

A titre d'exemple pour la fonction analytique $f(z) = z^2 - 1$, nous avons

$$f^2(z) = z \Leftrightarrow z^4 - 2z^2 - 2z = z(z+1)(z^2 - z - 1) = 0$$

Nous obtenons quatre points fixes mais seuls d'entre eux doivent être les points fixes de $f(z)$, précisément les solutions de $z^2 - z - 1 = 0$.

La valeur propre commune est $\lambda = \left[f^2(0) \right]' = 4z^3 - 4z \Big|_{z=0} = 0$. Donc le 2-cycle est super attractif.

Le bassin d'attraction est représenté sur la figure V-8

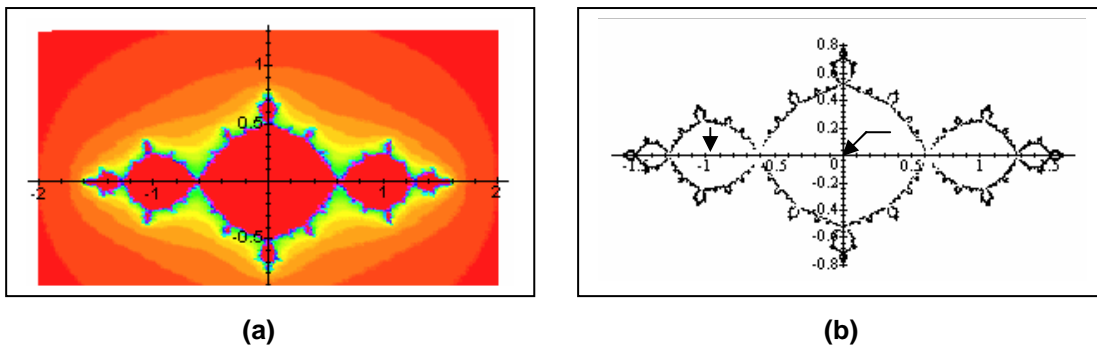


fig V-8 bassin d'attraction (plein) de la fonction analytique (a) $f(z) = z^2 - 1$ et 2-cycle super-attracteur $(-1, 0)$ de la composée $f^2(z)$

Le cycle d'ordre 2 obtenu par la composée $f^2(z)$ admet quatre points fixes mais seuls d'entre eux sont attractifs. En effet

$$f^2(z) = z \Leftrightarrow z(z+1)[f(z) - z] = 0$$

Le facteur figurant entre crochets conduit aux points fixes de la fonction analytique $f(z)$, alors que figure dans le même temps un 2-cycle fixe $S = (0, -1)$ déduit des deux premiers facteurs. En statuant sur la valeur de la dérivée première $\left(f^2(z) \right)'$ aux points fixes 0 -1, nous notons que $\left(f^2(0) \right)' = \left(f^2(-1) \right)' = 0$ ce qui signifie que le 2-cycle est super attractif. Par suite de la symétrie du bassin d'attraction (figure V-8 (b)), le cycle d'ordre 2 applique une zone connexe sur une autre zone connexe.

VI- BASSIN D'ATTRACTION EN PRESENCE D'UN p -cycle

Chaque élément de la séquence $S = \{z_0, z_1, \dots, z_i, \dots, z_{p-1}\}$ induit par le p -cycle de la fonction analytique $f(z)$ ($f^p(z)$) admet un bassin d'attraction spécifique $A(z_i)$. Le bassin d'attraction global $A(S)$ du cycle peut être défini comme la réunion des bassins d'attraction partiels :

$$A(S) = \bigcup_{i=0}^{p-1} A(z_i) \tag{V-19}$$

Soit $z \in A(z_i)$ un point du bassin d'attraction d'un élément quelconque z_i de la séquence du p -cycle et n le nombre d'itérations porté sur f^p . Il vient alors que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[f^p(z) \right]^n = z_i$. A l'ordre d'itération $(n+1)$ et compte tenu de la continuité de la fonction f , nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f \left\{ \left[f^p(z) \right]^n \right\} = f \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f^p(z) \right] \right\} = f(z_i) = z_{i+1}$$

On peut aussi écrire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[f^p(z) \right]^n (f(z)) \right\} = z_{i+1}$$

Cette dernière expression implique que $f(z) \in A(z_{i+1})$

VII-TOPOLOGIE DES ENSEMBLES DE JULIA

VII-1 SUR UN PROLONGEMENT DE LA FONCTION LOGISTIQUE- CONSTRUCTION DES ENSEMBLES DE JULIA

Les approches de définition des ensembles de Julia sous –tendues par leur caractère d'itérateurs quadratique à termes complexes, sont diverses tant sur le plan formalisme que de leur construction.

Il a été mentionné dans l'introduction de la fonction logistique (chapitre IV), des formes équivalentes à cette dernière par l'intermédiaire de transformations élémentaires. Ainsi si dans l'itérateur quadratique

à termes réels $[X_{n+1} = aX_n(1 - X_n)]$, nous posons $X_n = -\frac{Y_n}{a} + \frac{1}{2}$ on aboutit à la nouvelle forme

d'itérateur quadratique

$$Y_{n+1} = Y_n^2 + k \tag{V-20}$$

$$\text{avec } k = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{a}{2} \right)$$

Les deux formes itératives quadratiques à termes réels X_{n+1} et Y_{n+1} sont topologiquement équivalentes en ce sens qu'elles se correspondent à travers une transformation affine et de ce fait, elles traduisent une même dynamique. Il devient alors équivalent d'étudier l'un ou l'autre

des itérateurs $X_{n+1} = aX_n(1 - X_n)$ et $Y_{n+1} = Y_n^2 + k$.

L'un des raccourcis dans la formulation des ensembles de Julia serait d'effectuer un prolongement de l'itérateur quadratique à termes réels (V-20) vers une forme semblable dans le plan complexe et écrire

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad \text{avec } (z_n, c) \in \mathbb{C}^2 \tag{V-21}$$

Les formes polynomiales quadratiques (IV-21) seront indexées par le complexe c pour les récurrences initialisées à partir d'un complexe générateur z_0 . On définit ainsi une suite à termes complexes

$$\begin{cases} z_{n+1} = Q_c(z_n) \\ z_0 \in \mathbb{C} \end{cases} \tag{V-22}$$

VII-2 CARACTERISATION DES ORBITES DES ENSEMBLES DE JULIA

Les orbites (z_n) obtenues par l'application de la récurrence (V-22) et à travers les itérés

$Q_c^m(z_n)$ avec l'hypothèse que $z_n = Q_c^n(z_0)$ jouissent de propriétés spécifiques dues en particulier au statut de l'infini comme attracteur. Un point ω est dit appartenir au bassin d'attraction de l'infini si

$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_c^n(\omega) = \infty$. Il reste à préciser la structure topologique de ce bassin d'attraction. Soit $m \in \mathcal{N}$ tel

que $z_m > \max(|c|, 2)$. En vertu de cette hypothèse et par application de l'expression (V-21) nous

avons les majorations suivantes:

$$|z_{m+1}| = |z_m^2 + c| \geq |z_m|^2 - |c| \geq |z_m|^2 - |z_m| \quad (V-23)$$

De façon équivalente, (V-23) s'écrit

$$|z_{m+1}| \geq |z_m| [1 + (|z_m| - 2)] \quad (V-24)$$

La condition $|z_m| > \max(|c|, 2)$ est reprise sous la forme suivante

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } |z_m| = \max(|c|, 2) + \varepsilon \quad (V-25)$$

conduisant à remplacer la majoration (V-24) par

$$|z_{m+1}| \geq |z_m| (1 + \varepsilon) \quad (V-26)$$

Une nouvelle itération conduit à écrire

$$|z_{m+2}| \geq |z_{m+1}| (1 + \varepsilon) \geq |z_m| (1 + \varepsilon)^2 \quad (V-27)$$

Répété, ce processus d'itération aboutit à la majoration plus générale suivante

$$|z_{m+k}| \geq |z_m| (1 + \varepsilon)^k \quad (V-28)$$

Par un changement d'indice consistant à poser $p = m + k$, donc pour $p \geq m$, il vient

$$|z_p| \geq |z_m| (1 + \varepsilon)^{p-m} \quad (V-29)$$

En termes de limite et sous la condition ($|z_m| > \max(|c|, 2)$), l'expression (V-29) permet d'écrire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty \quad (V-30)$$

Cela signifie que

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} |Q_c(z_n)| = +\infty \\ \text{avec } |z_n| > \max(|c|, 2) \end{array} \right. \quad (V-31)$$

Le bassin d'attraction d'un point à l'infini dans le complexe contient donc l'extérieur d'un disque dont le rayon ne dépend que du paramètre complexe c . On distingue alors deux catégories de points (figure V-9) : ceux dont les orbites sont confinées dans le disque précité et ceux dont les orbites "s'échappent" vers l'infini

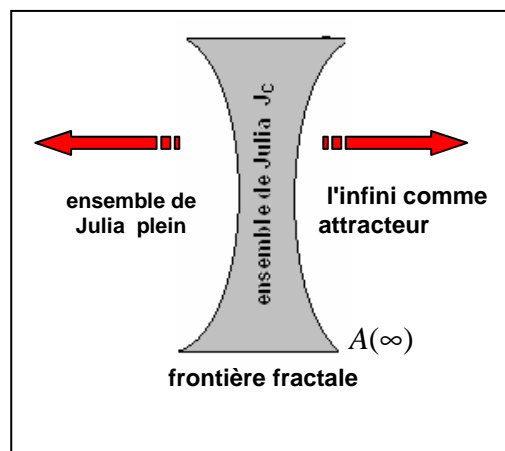


fig. V-9 Structuration d'un ensemble de Julia

Deux bassins d'attraction cohabitent: Le bassin d'attraction $A(0)$ constitué de l'ensemble des points dont les orbites est bornée et le bassin d'attraction $A(\infty)$ défini comme l'ensemble complémentaire dans C de $A(0)$

$$A(\infty) = C \setminus A(0) \quad (V-32)$$

et dont les orbites "s'échappent" vers l'infini. Les deux bassins d'attraction admettent une frontière commune (contour) notée J_c définie comme l'ensemble des points dont tout voisinage contient un point relevant des deux bassins d'attraction. Quelques exemples :

- pour $c = 0$ et par application de (V-22) nous déduisons l'orbite z_{n+1} telle que:

$$z_{n+1} = Q_0(z_n) = (z_n)^n$$

L'orbite z_{n+1} sera bornée si $|z_0| < 1$. L'ensemble de Julia plein sera donc l'intérieur du disque de centre l'origine et de rayon l'unité alors que l'ensemble de Julia J_0 proprement dit n'est autre que le cercle délimitant le disque (figure V-7).

Les points appartenant au disque caractériseront les orbites qui convergent vers l'origine, tandis que les orbites issues de points situés sur le cercle resteront sur cette frontière. Cela dénote toute la complexité de la configuration topologique de cette dernière puisque devant s'astreindre à un type d'organisation pour abriter l'ensemble de ses orbites. Une organisation à caractère fractale plus évidente sur les exemples qui suivent , répond à cette préoccupation.

- pour $c = -0.15652 + 1.03225 j$: $z_{n+1} = Q_c(z_n) = z_n^2 + c$: l'ensemble de Julia correspondant à une forme dendritique est manifestement de type fractale construit sur la base d'un processus de self – similarité évoluant par blocs (figure V-10). Etendu à un processus dynamique, ce modèle dendritique fractale n'est pas sans rappeler le mécanisme de fracturation des roches ou encore la genèse de failles secondaires à partir d'une faille majeure dans un contexte de géodynamique.

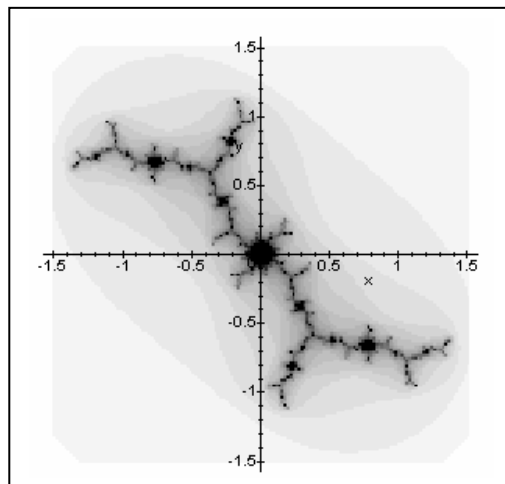


fig. V-10 modèle dendritique de l'ensemble de Julia

$$z_{n+1} = z_n^2 - 0.15652 + 1.03225 j$$

- pour $c = -0.194 + 0.56557 j$: le contour J_c exhibe une structure fractale (figure V-11 (b)) non évidente sur le modèle ensemble de Julia "rempli" (figure V-11 (a)).

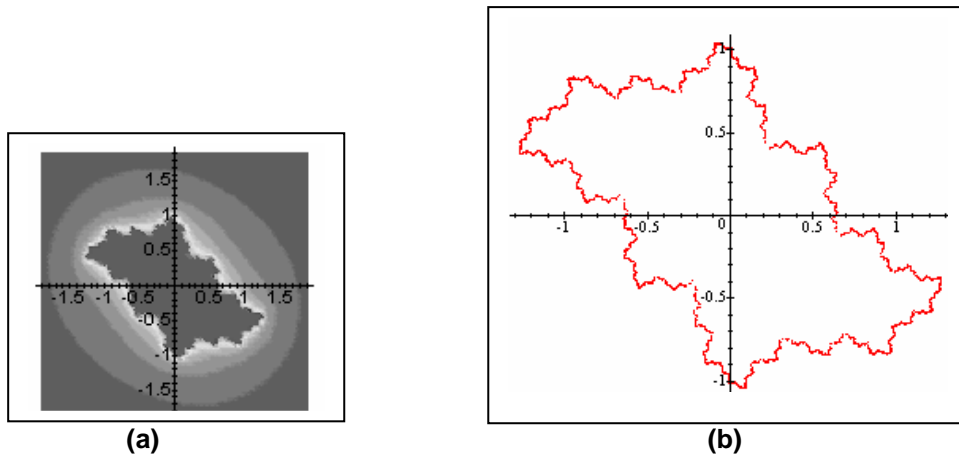


fig. V-11 modèles d'ensemble de Julia "rempli" (a) et de contour J_c (b)

$$c = -0.194 + 0.56557j$$

VII-3 PROPRIETES REMARQUABLES DES ENSEMBLES DE JULIA

- **propriété 1** : les ensembles de Julia J_c et $J_{\bar{c}}$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe réel (figure V-12)

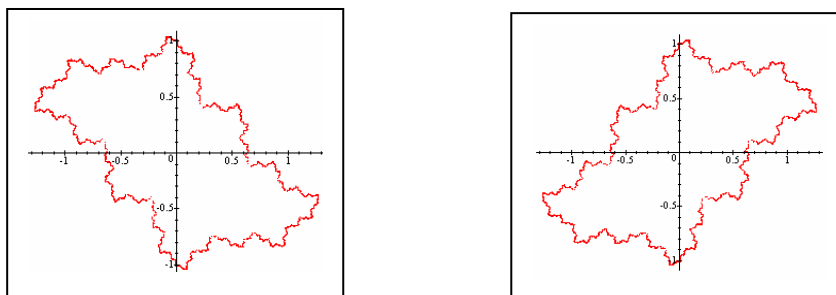


fig. V-12 symétrie des ensembles de Julia J_c et $J_{\bar{c}}$

- **propriété 2**: la suite $\{z_{n+1} = Q_c(z_n) = z_n^2 + c\}_{n \in \mathbb{N}}$ est soit bornée, soit dans le bassin d'attraction $A(\infty)$

preuve : soit $z \in Z$ un complexe tel que $|z| \geq |c| + 1$ avec $c \in Z^*$. Nous avons alors les majorations suivantes:

$$|z^2 + c| > |z|^2 - |c| \geq (|c| + 1)^2 - |c| \quad (V-32)$$

A ce stade de l'itération ($n = 1$), nous avons donc la majoration

$$|z^2 + c| \geq |c|^2 + |c| + 1 \quad (V-33)$$

A l'ordre d'itération $n = 2$, nous avons

$$|Q_c^2(z)| \geq |Q_c(z)|^2 - |c| \quad (V-34)$$

Comme $Q_c(z) = z^2 + c$ et en tenant compte de (V-33), l'inégalité (V-34) s'écrit

$$|Q_c^2(z)| \geq |c|^4 + 2|c|^3 + 3|c|^2 + |c| + 1 \geq 3|c|^2 + |c| + 1 \quad (V-34)$$

La majoration (V-34) peut être exprimée comme suit

$$|Q_c^2(z)| \geq (2n-1)|c|^2 + |c| + 1 \Big|_{n=2} \quad (V-35)$$

Une démarche analogue à celle développée pour $n = 1$ et $n = 2$ permet de généraliser les résultats (V-34) et (V-35) et écrire

$$|Q_c^n(z)| \geq (2n-1)|c|^2 + |c| + 1$$

Nous montrons par récurrence que

$$|Q_c^n(z)| \geq (2n-1)|c|^2 + |c| + 1 \quad (V-36)$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} [(2n-1)|c|^2 + |c| + 1] = +\infty$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [Q_c^n(z)] = +\infty \text{ avec } |z| \geq |c| + 1 \quad (V-37)$$

Le complexe z appartient donc au bassin d'attraction de l'infini pour peu que la condition posée soit vérifiée.

- **propriété 3** : l'ensemble de Julia est circonscrit dans le cercle de rayon $|c| + 1$ comme conséquence de la propriété 2
- **propriété 4** : l'ensemble de Julia est symétrique par rapport à l'origine des coordonnées O . En effet soit z_0 un complexe de l'ensemble C et dont nous désignons par z_0' le symétrique par rapport à l'origine i.e. $z_0' = -z_0$. Par récurrence et par application de l'itérateur quadratique Q_c^n , nous obtenons $Q_c^n(z_0) = Q_c^n(z_0')$ donc $\sup |Q_c^n(z_0)| = \sup |Q_c^n(z_0')|$. Ces résultats sont vrais pour tout complexe $\forall (z_0, c) \in Z^2$.
- **propriété 5** : le point $z = 0$ représente un point critique pour l'ensemble de Julia. Si ce point appartient à l'ensemble de Julia "rempli" K_c , alors ce dernier est connexe. Dans le cas contraire, K_c est non connexe et représente un ensemble (ou poussière) de Cantor c'est-à-dire une courbe bornée mais discontinue.

VIII- FAMILLES NORMALES

VIII-1 PRINCIPE DE CONSTRUCTION

Les itérés Q_c^n d'une fonction analytique définissant l'ensemble de Julia sont ramenés à un intervalle ouvert U de l'ensemble C . Cette restriction permet de construire une famille d'itérations

$\{\varphi_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ telles que

$$\varphi_n : U \subseteq C \rightarrow C \quad (V-38)$$

$$z \mapsto \varphi_n(z) = Q_c^n(z)$$

Les conditions de convergence de la suite $\{\varphi_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ seront définies comme suit : On dira que la suite $\{\varphi_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ converge uniformément sur un ensemble V si l'une ou l'autre des deux implications suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \varphi \text{ } (\varphi \text{ analytique}) \quad (1) \\ \text{ou} \\ \varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \varphi \text{ } (\text{convergence uniforme}) \quad (2) \end{array} \right. \quad (\text{IV-39})$$

la convergence uniforme étant rattachée à la métrique usuelle i.e.

$$\forall z \in V, d[\varphi_n, \varphi] = \sup(|\varphi_n(z) - \varphi(z)|) \quad (\text{V-40})$$

Il est aussi défini une convergence ponctuelle affirmant que

$$\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{ponctuellement}} \varphi \Leftrightarrow \forall z \in V, \varphi_n(z) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \varphi(z) \quad (\text{V-41})$$

La famille $\left\{ \varphi_n : U \rightarrow C \right\}$ est dite "normale" sur un sous – ensemble ouvert V de U si chaque sous séquence de cette famille possède une sous – séquence qui converge uniformément sur chaque sous – ensemble compact de V^2

VIII-2 RECONSTRUCTION D'UN ENSEMBLE DE JULIA

En introduisant les principes de convergence et la notion de famille normale, on conçoit une reconstruction topologique de l'ensemble de Julia dit classique lié au processus d'itération porté sur une certaine fonction f . On note $J(f)$ cet ensemble de Julia.

Définition : $J(f) = \{z \in C \text{ tel que } \{f^n\} \text{ n'est pas normale en } z\}$

De façon équivalente

$$J(f) = \{z \in C \text{ tel que } \{f^n\} \text{ normale sur tout ensemble fermé contenant } z\} \quad (\text{V-42})$$

L'ensemble $C - J(f)$ appelé ensemble de Fatou noté $F(f)$, est défini comme suit

$$F(f) = \{z \in C \text{ tel que } \{f^n\} \text{ normale sur tout ouvert contenant } z\} \quad (\text{V-43})$$

Ainsi $F(f)$ apparaît comme le complément de l'ensemble de Julia $J(f)$ dans C . Certaines propriétés topologiques de $J(f)$ ne sont pas démontrées directement dans ce dernier mais de façon contournée via l'ensemble de Fatou $F(f)$. Parmi ces propriétés citons entre autres

- $J(f)$ n'admet pas de points isolés.
Notons qu'un point ω est dit isolé dans $J(f)$ s'il existe un ouvert contenant ω sans contenir tout autre point de cet ensemble
- $\forall k \in \mathcal{N}^* J(f) = J(f^k)$ (V-44)

Pour $c = -0.77 + 0.177j$ et $k = 2$, les ensembles de Julia correspondant à $f(z)$ et à $f^2(z)$ sont donnés respectivement par les figures V-13 (a) et (b).

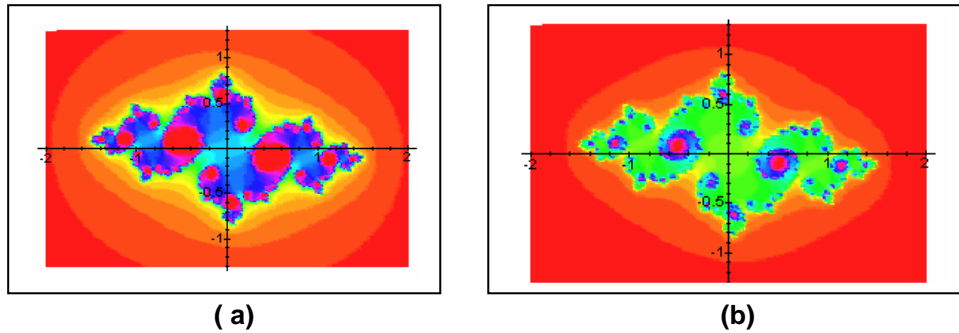


fig. V-13 ensembles de Julia correspondant à $f(z) = z^2 + c$ (a) et à $f^2(z)$ (b) avec $c = -0.77 + 0.177j$

- si α est un point fixe attracteur et γ un cycle attracteur définissant deux bassin d'attraction $A(\alpha)$ et $A(\gamma)$ de frontières respectives $Fr[A(\alpha)]$ et $Fr[A(\gamma)]$, alors $J(f) = Fr[A(\alpha)] = Fr[A(\gamma)]$
- si $z_0 \in J(f)$, alors l'orbite inverse $\bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-n}(z_0)$ est dense dans $J(f)$

A titre d'exemple, considérons la fonction analytique $f(z) = z^2 - jz + j$. Elle admet pour points fixes $z_1 = 1$ et $z_2 = j$. En ces points, la dérivée $f'(z)$ est elle que $|f'(1)| = 1$ et $|f'(j)| = \sqrt{5}$. Donc seul le point fixe $z_1 = 1$ appartient à l'ensemble de Julia $J(f)$. Par le calcul des images inverses, si $z \in f^{-1}(z) \Leftrightarrow f(z) = 1$. L'une des solutions doit être $z_1 = 1$ puisque cette valeur est un point fixe; l'autre racine est $(z_3 = -1 + j) \in J(f)$. Par le même procédé de calcul des images inverses, nous

obtenons l'équation $f(z) = -1 + j$ qui donne deux autres points $z_{4,5} = \frac{1 \pm j\sqrt{5}}{2}$. En résumant les

deux cas ainsi étudiés, nous obtenons: $f^{-1}(1) = \{1, -1 + j\}$ et $f^{-2}(1) = \left\{1, -1 + j, \frac{1 \pm j\sqrt{5}}{2}\right\}$.

- l'ensemble des points périodiques de répulsion est dense dans $J(f)$. Ceci suggère que chaque point de $J(f)$ est situé dans plusieurs régions en même temps, d'où une complexité de la structure de l'ensemble de Julia qui serait probablement de type fractal

IX- UNE VARIETE DE L'ENSEMBLE DE JULIA : L'ENSEMBLE DE MANDELBROT

Initialement, l'ensemble de Mandelbrot M a été défini comme l'ensemble des complexes $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels l'ensemble de Julia associé $J(f_c)$ (f_c étant la fonction analytique d'expression $f_c(z) = z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$) est connexe (Mandelbrot 1980),

$$M = \{c \in \mathbb{C} \text{ tel que } J(f_c) \text{ connexe}\} \quad (V-45)$$

Une autre caractéristique de cet ensemble a été mise en évidence un peu plutôt par Brolin (1965) en définissant l'ensemble de Mandelbrot M par

$$M = \left\{ c \in \mathbb{C} \text{ tel que } \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(0) \neq \infty \right\} \quad (\text{V-46})$$

CHOIX DU COMPLEXE c

Relativement à la définition (V-46), nous avons l'assertion suivante

$$\text{si } |c| > 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f_c^n(0) = +\infty \quad (\text{V-47})$$

En effet, la condition posée sur $|c|$ peut être traduite par : $\exists \varepsilon > 0$ tel que $|c| = 2 + \varepsilon$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geq |c|$. D'autre part, à travers l'expression analytique de la fonction $f_c(z)$ apparaît l'égalité

$$\left| \frac{f_c(z)}{z} \right| = \left| z + \frac{c}{z} \right| \quad (\text{V-48})$$

En introduisant l'inégalité $|u + v| \geq ||u| - |v||$, nous obtenons à partir de (V-48)

$$\left| \frac{f_c(z)}{z} \right| \geq \left| |z| - \left| \frac{c}{z} \right| \right| \quad \text{avec } |z| \geq 2 + \varepsilon \text{ et } \left| \frac{c}{z} \right| < 1 \quad (\text{V-49})$$

Il découle alors de (V-49), l'inégalité

$$|f_c(z)| \geq |z| (1 + \varepsilon) \quad (\text{V-50})$$

A un niveau d'itération à l'ordre n , l'expression (V-50) s'écrit

$$|f_c^n(z)| \geq |z| (1 + \varepsilon)^n \quad (\text{V-51})$$

pour enfin donner, sous la contrainte de la condition (V-47) $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_c^n(z) = +\infty$.

La figure V-14 est une illustration de l'ensemble de Mandelbrot tracé dans le plan complexe avec la condition $|z| < 2$. L'axe horizontal est relatif à la partie réelle du complexe c alors que l'axe des ordonnées contient la partie imaginaire de ce dernier

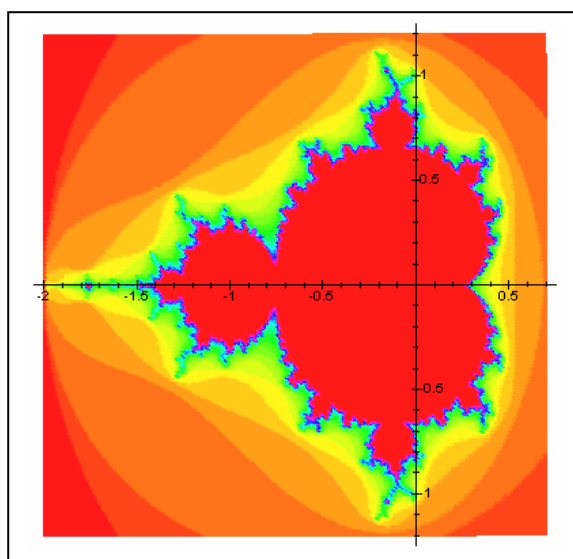


fig. V-14 ensemble de Mandelbrot M

- une propriété importante de l'ensemble de Mandelbrot à prendre en considération dans la simulation de ce dernier : "l'ensemble de Mandelbrot est contenu dans un disque centré à l'origine et de rayon 2" (figure V-15)

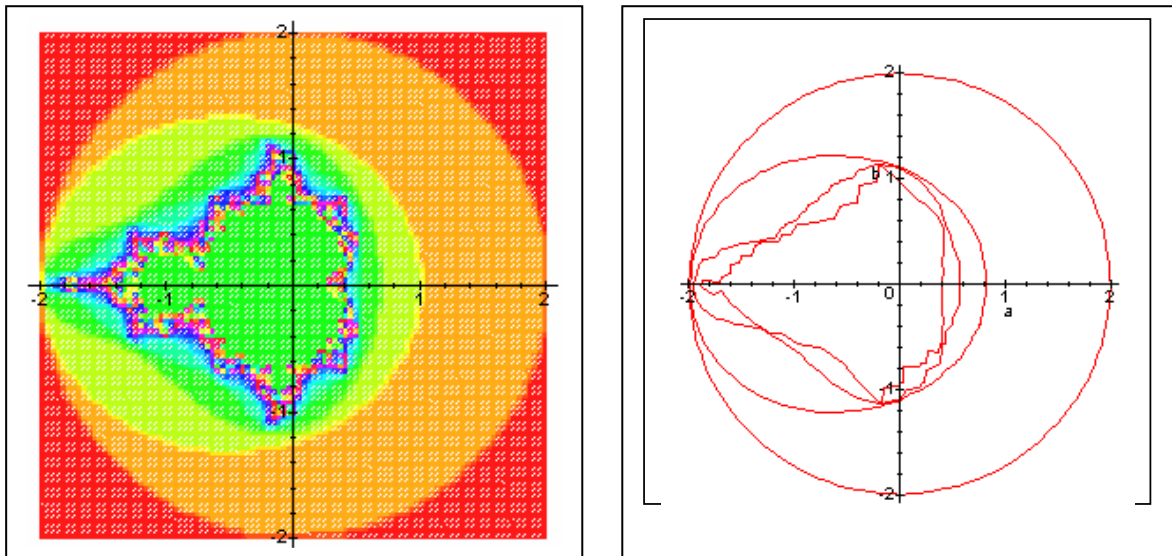


fig. V-15 l'ensemble de Mandelbrot M est contenu dans un disque de rayon 2 centré à l'origine

- La figure V-16 est une représentation spatiale du même ensemble

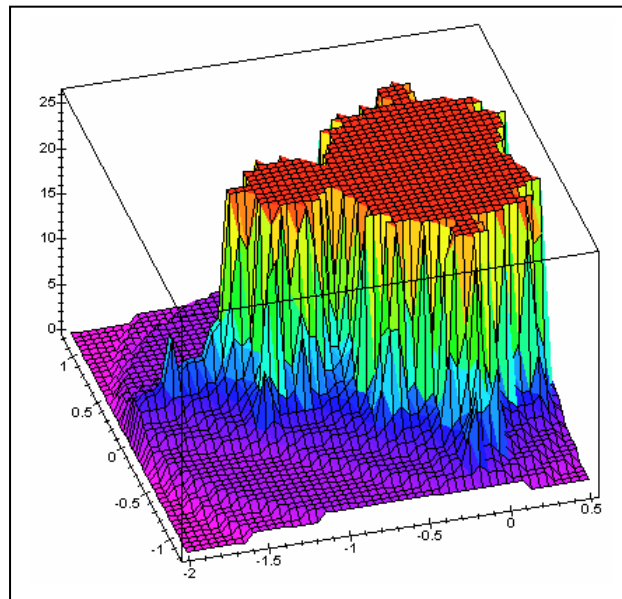


fig. V-16 Représentation spatiale de l'ensemble de Mandelbrot M

X- ANATOMIE DE L'ENSEMBLE M DE MANDELBROT

- sur plan morphologique, l'ensemble de Mandelbrot M est structuré en un corps principal de forme cardioïde délimité par les parties réel ($\text{Re}(c)$) et imaginaire ($\text{Im}(c)$) du complexe c telles que: $-0.8 \leq \text{Re}(c) \leq 0.45$ et $-1.3 \leq \text{Im}(c) \leq 1.5$ (figure V-17). Nous montrons dans ce qui suit que la fonction analytique $f_c(z) = z^2 + c$ possède un point fixe attracteur si et seulement si le complexe c appartient à une région du plan complexe délimitée par une courbe cardioïde dont l'équation sera établie. Un point fixe est solution de l'équation

$z^2 - z + c = 0$. Deux solutions donc de la forme $z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$. En posant

$\alpha = \sqrt{1-4c}$, le point fixe $\frac{1+\alpha}{2}$ est attractif si et seulement si $|1+\alpha| < 1$ soit $1+\alpha = r \exp(j\theta)$ avec $0 \leq r < 1$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$, c'est-à-dire $\alpha = r \exp(j\theta) - 1$. Nous obtenons alors l'expression du complexe c soit

$$c = \frac{r}{4} [\exp(j\theta) - r \exp(-2j\theta)] \quad \text{avec } 0 \leq r < 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (V-52)$$

L'expression (V-52) n'est autre que l'équation d'un cardioïde dont une représentation graphique est parfaitement illustrée par la figure V-17.

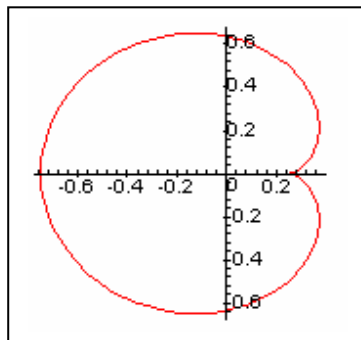
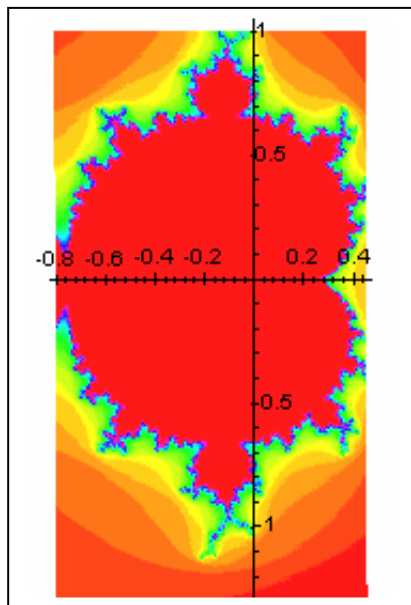
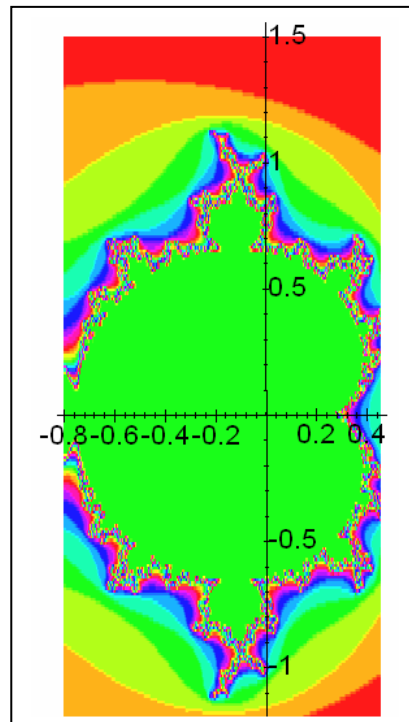


fig. V-17 cardioïde associé au corps principal de l'ensemble de Mandelbrot

- Le contour de ce corps cardioïde de forme très irrégulière et de morphologie fractale fibrée, est hérissé de protubérances de formes sensiblement identiques (cas de self-similarité) surmontées d'antennes dont un modèle est illustré par la figure V-18 et correspondant aux coordonnées $-0.18 \leq \text{Re}(c) \leq -0.1$ et $-0.9 \leq \text{Im}(c) \leq 1.062$



(a)



(b)

fig. V-18 cardioïde de l'ensemble de Mandelbrot M (a) et extraction de son contour (b)

Un exemple d'ensemble de Julia pour c appartenant au cardioïde ($c = -0.194 + j0.56557$) est donné par la figure V-11.

- Un corps secondaire sis entre les coordonnées $[-2 \leq \text{Re}(c) \leq -0.65, -0.4 \leq \text{Im}(c) \leq 0.4]$ prolonge le cardioïde (figure V-19 (a)). L'extraction de son contour révèle une structure identique à celle de ce cardioïde c'est-à-dire fractale (figure V-19 (b)). Nous montrons que ce corps représente l'ensemble des complexes c pour lesquels la fonction analytique f_c possède une orbite attractive de période 2. Les points fixes d'un 2-cycle satisfont à l'équation $f_c^2(z) - z = 0$. L'équation étant quadratique, les deux premiers points fixes sont les mêmes que pour $f_c(z)$, les deux restants sont solution de l'équation $z^2 + z + c + 1 = 0$

Affirmer qu'ils sont de type "attracteur" revient à étudier le comportement de la dérivée

$[f_c^2(z)]'$ en ces points

$$[f_c^2(z)]' = 4z(z^2 + c) = 4z(z - 1) = 4(c + 1) \quad (V-53)$$

Le 2-cycle pour le point fixe z_i est attracteur si et seulement si

$$|f_c^2(z_i)|' < 1 \Leftrightarrow |c + 1| < \frac{1}{4} \quad (V-54)$$

Les valeurs du complexe c pour lesquelles la fonction analytique $f_c(z)$ possède un

2-cycle attracteur sont contenues dans un disque de centre $(-1,0)$ et de rayon $1/4$ (figure V-19 (a)) et pour lequel le contour est extrait (figure V-19 (b)). Un exemple d'ensemble de Julia correspondant à $c = -1$, donc appartenant à ce disque, est donné par la figure V-8.

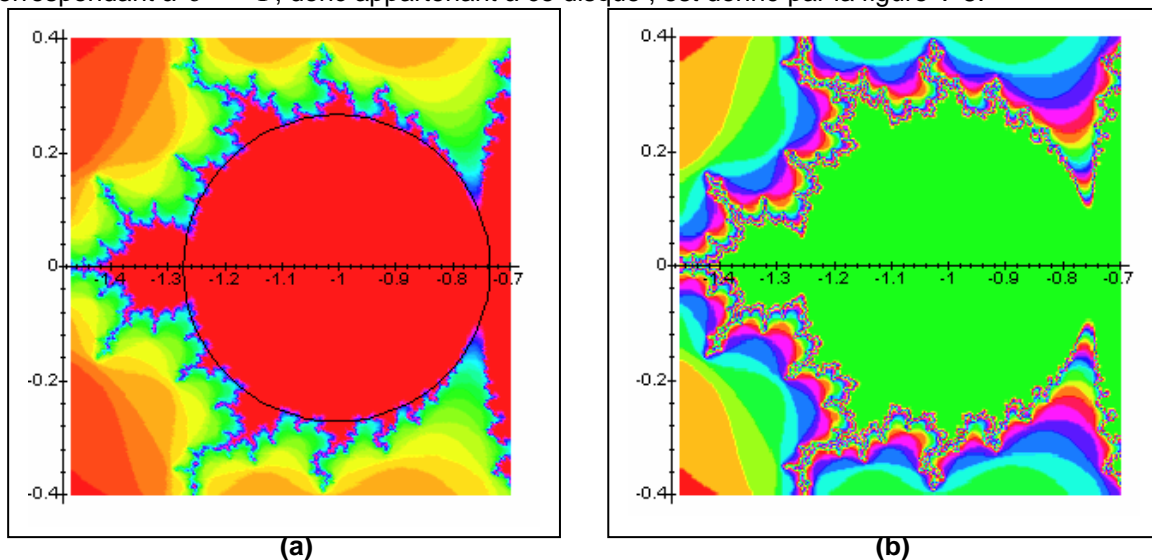


fig. V-19 bourgeon principal de l'ensemble de Mandelbrot
(a) contenu dans un disque $[(-1,0), 1/4]$ et extraction du contour (b)

- Les protubérances sous formes de bourgeons secondaires qui garnissent leur frontière tant le corps cardioïde (figure V-18) que le corps secondaire (figure V-19) répondent à des cycles de périodes diverses comme résumé sur la figure V-20. Leurs formes obéissent à un organigramme assez simple :
 - construction de l'itéré $f_c^p(z)$
 - calcul en fonction du complexe c des points fixes z_i des p -cycle $f_c^p(z)$

- poser la condition sur c relativement au caractère d'attraction souhaité de chaque point fixe z_i par la résolution de l'inéquation $|f_c^p(z_i)| < 1$
- le lieu géométrique des complexes c définira l'équation donc la forme des différentes protubérances (figure V-20)

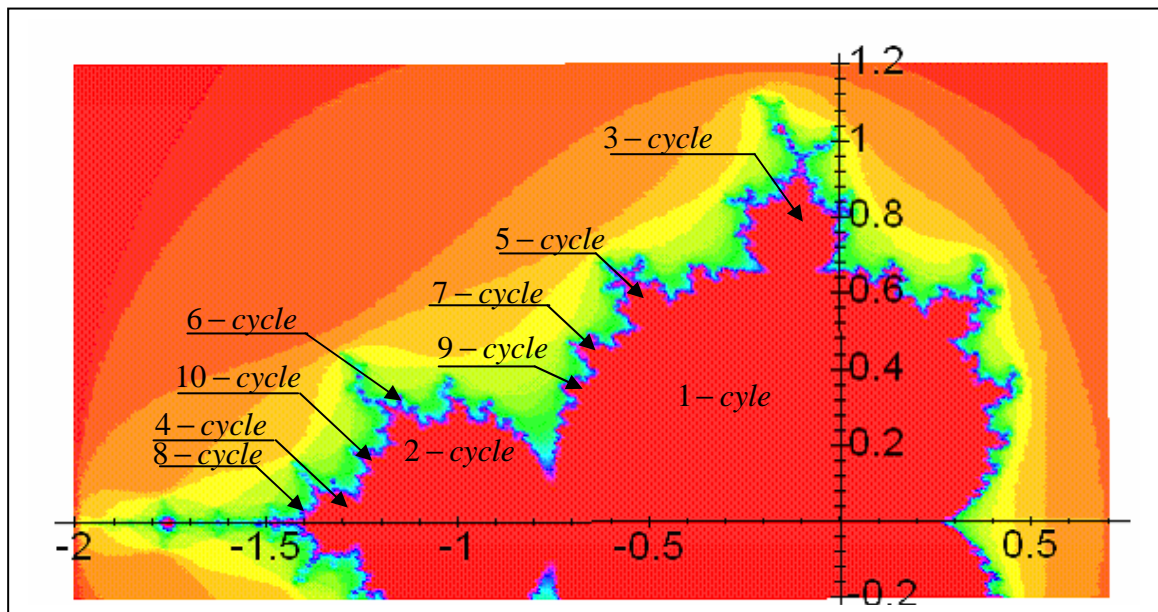


fig. V-20 distribution des p -cycles attracteurs de la fonction analytique $f_c(z)$ sur l'ensemble de Mandelbrot

Il est à remarquer aussi que le diamètre des protubérances varie avec la période du cycle p . Précisément ce diamètre varie en $1/p^2$. A titre de confirmation, le corps secondaire (figure V-20) que nous associons d'abord au cycle attracteur d'ordre $p = 2$, est que nous avons montré comme contenu dans un cercle de rayon $1/4$ soit $1/p^2$ (résultat établi par Gukenheimer et Mc Gehee en 1988).

Nous notons aussi que les protubérances périphériques associées aux cycles d'ordre pair (respectivement d'ordre pair) se développent à partir d'un cycle fondamental d'ordre pair (respectivement d'ordre impair :cas du cardioïde) comme il est illustré pour le corps secondaire associé au cycle d'ordre $p = 2$.

- Les différentes excroissances sont agrémentées sur leur pourtour de filaments ou antennes elles mêmes de structure complexes et ramifiées mais dont l'organisation obéit à une dynamique fractale (figure V-21 (a) et (b))

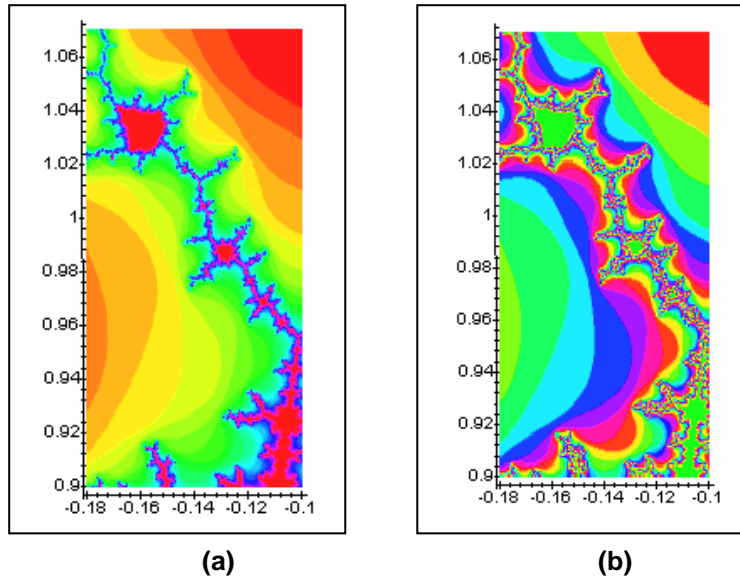


fig. V-21 structure d'une ramification (a) $-0.18 \leq \text{Re}(c) \leq -0.1$ et $0.9 \leq \text{Im}(c) \leq 1.07$ et extraction de son contour

Nous choisissons un complexe c sur une antenne et pour lequel nous déduisons l'ensemble de Julia correspondant. Ainsi pour $\text{Re}(c) = -0.16$ et $\text{Im}(c) = 1.03$ relativement à la figure V-21 (a), nous obtenons l'ensemble de Julia donné par la figure V-22 affichant une similarité avec le filament dendritique dont est issu le complexe c dans l'ensemble de Mandelbrot

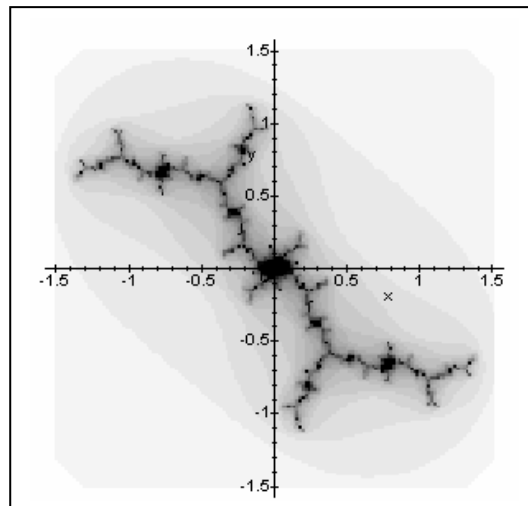


fig.V-22 ensemble de Julia pour c sur un filament dendritique

- Un "bourgeon" relativement massif (figure V-23(a)), de forme cardioïde et délimité par les coordonnées $-1.8 \leq \text{Re}(c) \leq -1.75$ et $-0.1 \leq \text{Im}(c) \leq 0.1$ termine le corps secondaire de la figure V-14. Il exhibe une structure interne similaire à celle montrée par la figure V-18 (figure V-23 (b)).

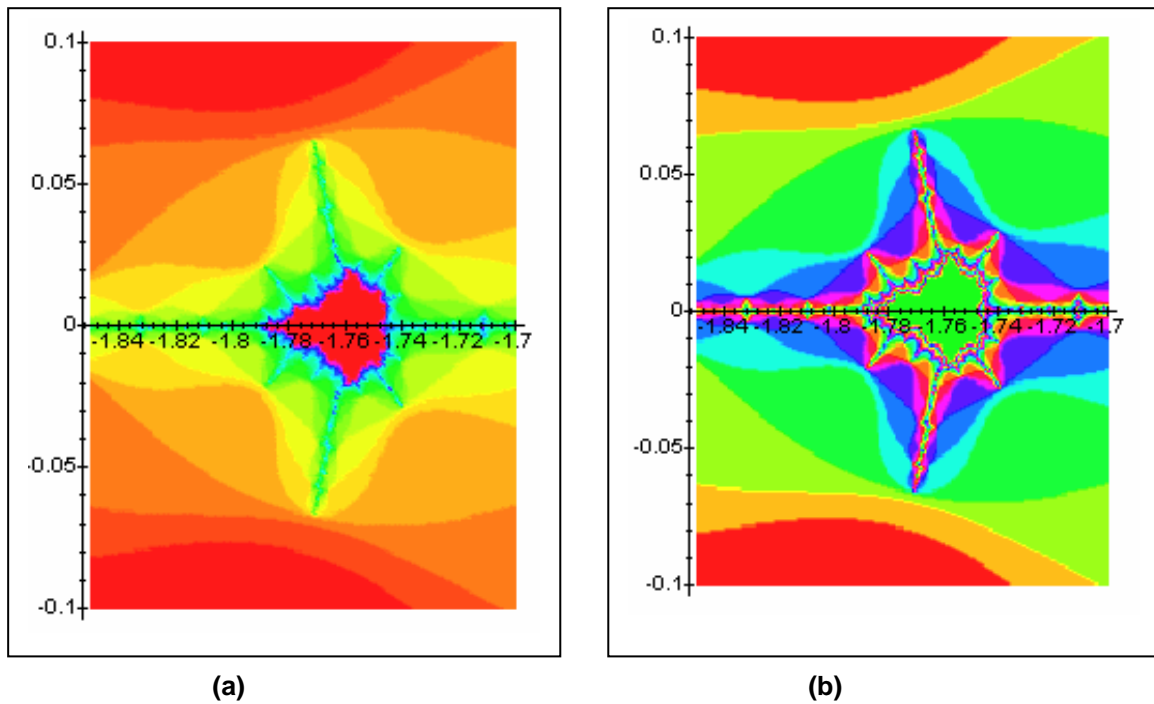


fig. V-23 bourgeon extrême de l'ensemble de Mandelbrot (a) et son contour (b)

- Pour un complexe c choisi hors de l'ensemble de Mandelbrot, l'ensemble de Julia J_c correspondant est non connexe, le degré de "non – connexité" est fonction de la position de ce complexe par rapport à la frontière de l'ensemble de Mandelbrot. La figure V-24 représente une collection d'ensembles de Julia pour différentes positions du complexe c situées à l'extérieur de l'ensemble de Mandelbrot. Notons que pour c proche de la frontière ($\text{Re}(c) = -0.3$, $\text{Im}(c) = 0.7$), il subsiste une certaine cohérence dans la connexité de l'ensemble de Julia correspondant, alors que pour c assez éloigné de la frontière ($\text{Re}(c) = -3$, $\text{Im}(c) = 3$), les orbites entament une "fuite" vers l'infini.

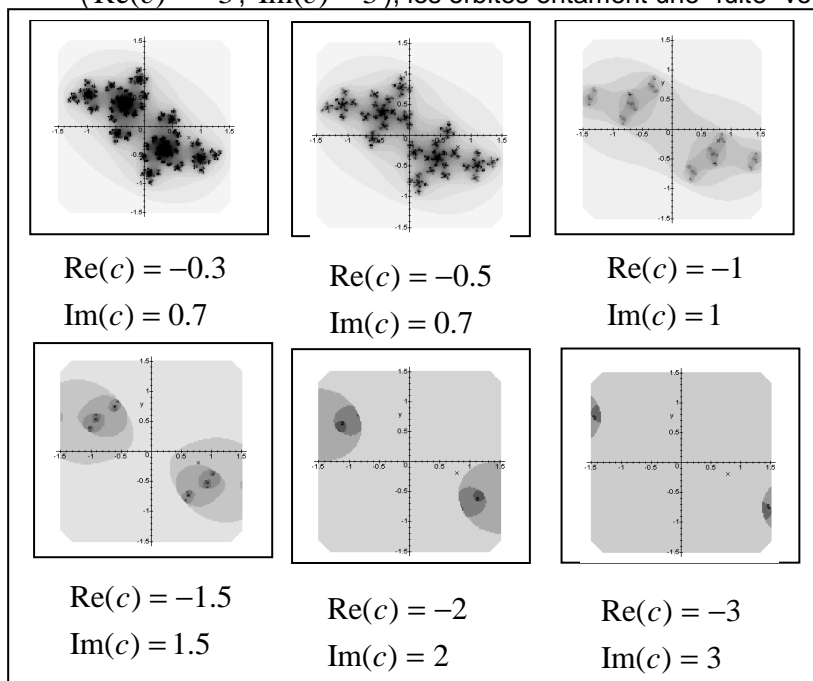
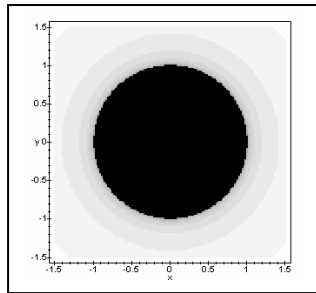
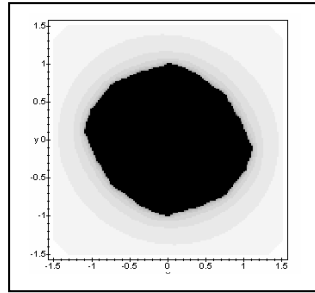


fig.V-24 ensembles de Julia pour c situé hors de l'ensemble de Mandelbrot

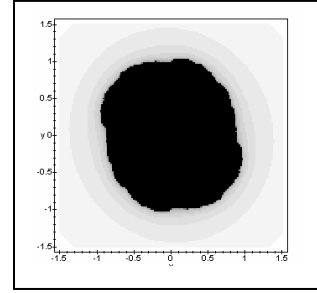
- Le choix du complexe c entièrement situé à l'intérieur de l'ensemble de Mandelbrot M conduit à des ensembles de Julia illustrés par une ligne fermée, dont la régularité des formes varie profondément au fur et à mesure que l'on se rapproche de la frontière de M dans le choix de c (figure V-25)



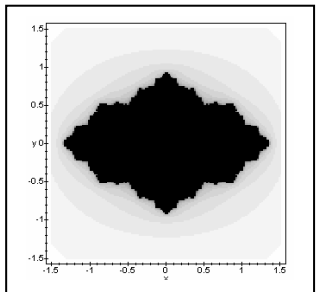
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(c) &= 0 \\ \operatorname{Im}(c) &= 0 \end{aligned}$$



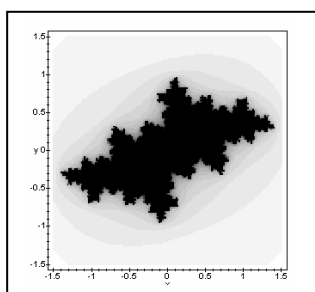
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(c) &= -0.1 \\ \operatorname{Im}(c) &= 0.1 \end{aligned}$$



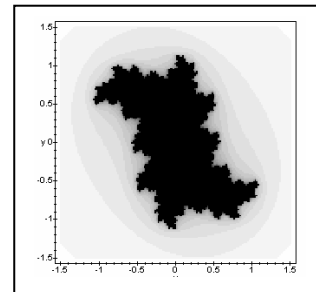
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(c) &= 0.1 \\ \operatorname{Im}(c) &= 0.1 \end{aligned}$$



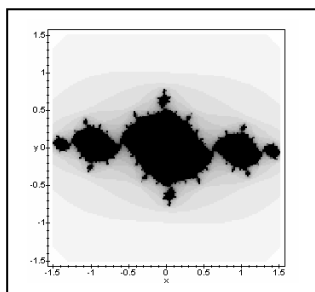
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(c) &= 0.5 \\ \operatorname{Im}(c) &= 0 \end{aligned}$$



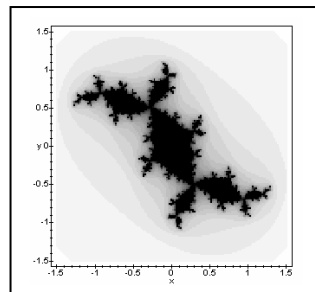
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(c) &= -0.5 \\ \operatorname{Im}(c) &= -0.5 \end{aligned}$$



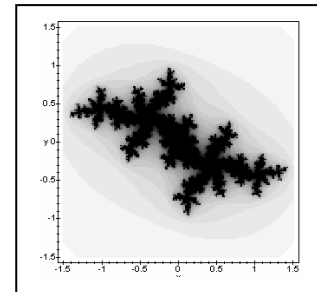
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(c) &= 0.2 \\ \operatorname{Im}(c) &= 0.5 \end{aligned}$$



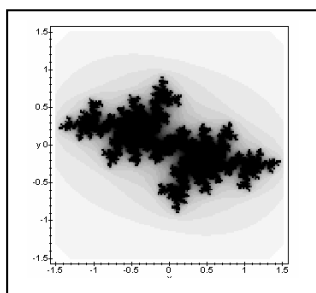
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(c) &= -1 \\ \operatorname{Im}(c) &= 0.1 \end{aligned}$$



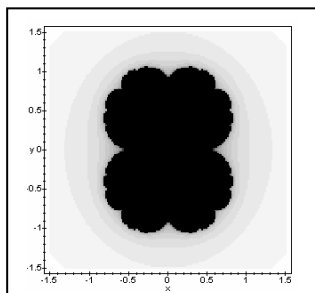
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(c) &= -0.1 \\ \operatorname{Im}(c) &= 0.8 \end{aligned}$$



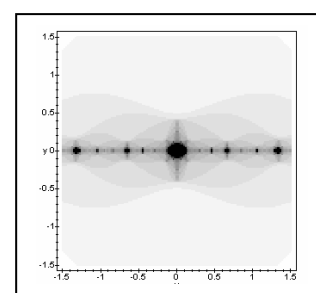
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(c) &= -0.5 \\ \operatorname{Im}(c) &= 0.6 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(c) &= -0.65 \\ \operatorname{Im}(c) &= 0.41 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(c) &= 0.25 \\ \operatorname{Im}(c) &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(c) &= -1.76 \\ \operatorname{Im}(c) &= 0 \end{aligned}$$

fig. V-25 ensembles de Julia pour c situé à l'intérieur de l'ensemble de Mandelbrot

XI- INDEXATION DES ENSEMBLES DE JULIA PAR L'ENSEMBLE DE MANDELBROT

L'ensemble de Mandelbrot M constitue une source pour les différents modes que revêtent les ensembles de Julia J_c . Il divise ces derniers en deux classes bien distinctes et dont dépend leur caractère connexe conformément à l'organigramme suivant :

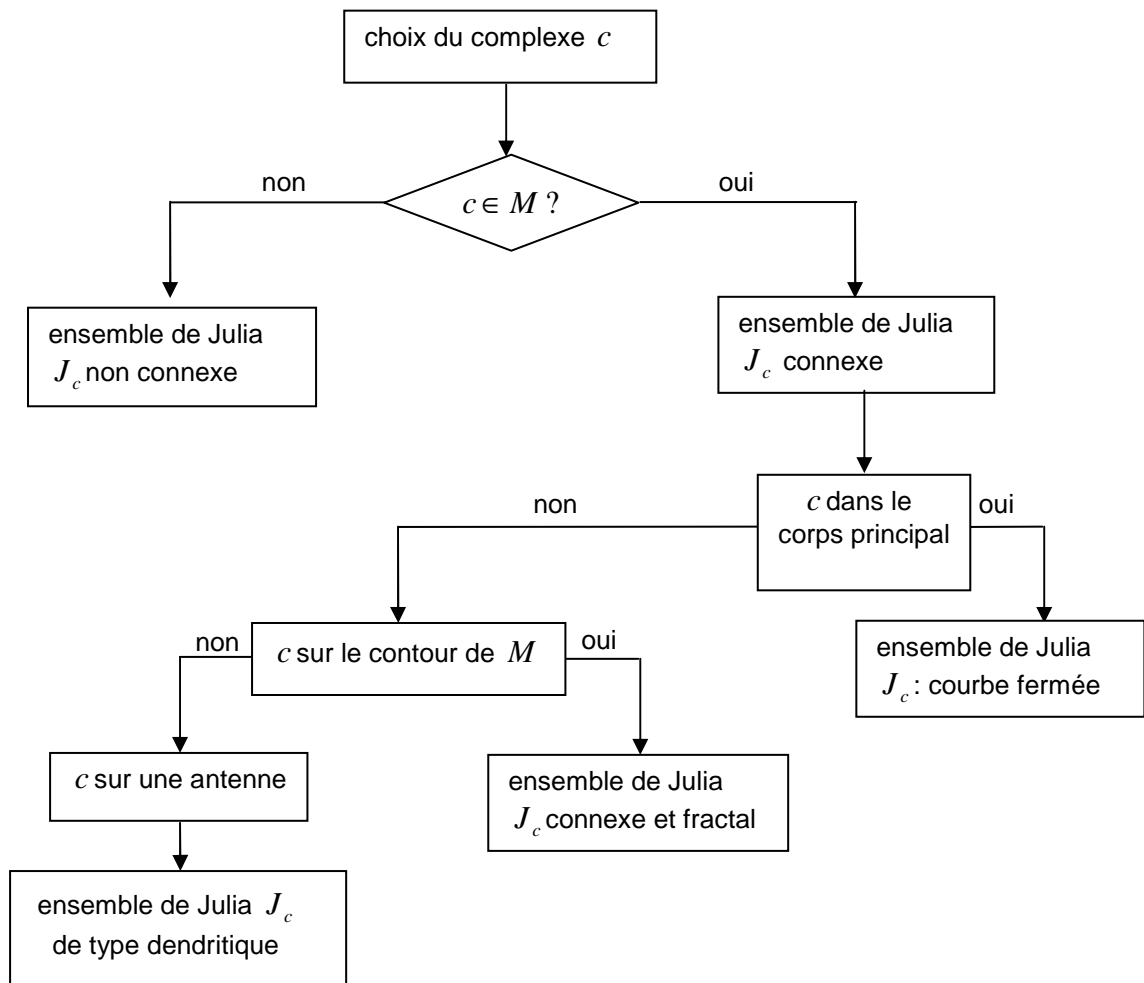
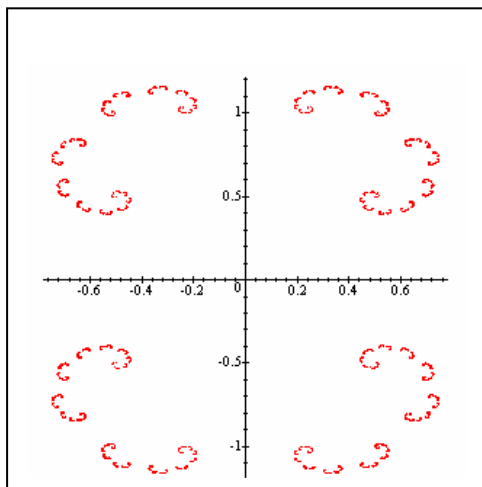
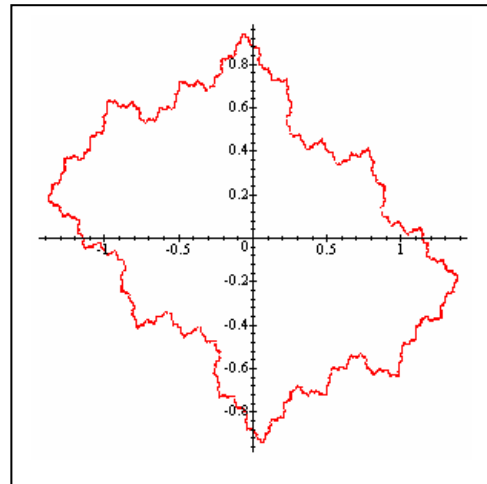


fig. V-26 les ensembles de Julia "indexés" par l'ensemble de Mandelbrot

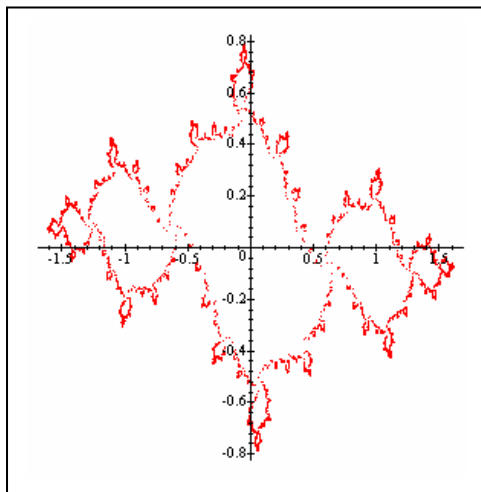
La figure V-27 illustre quelques ensembles de Julia par relativement à des choix du complexe c



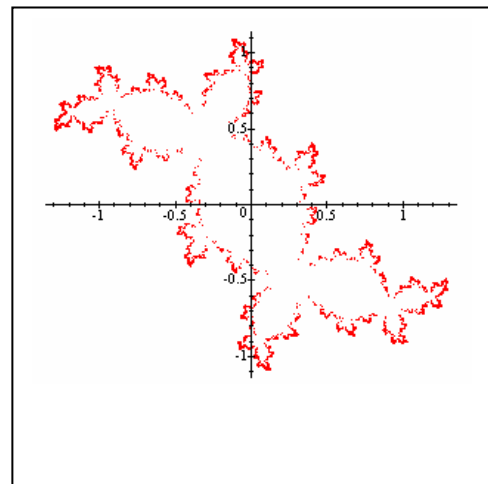
$$\text{Re}(c) = 0.5 \quad \text{Im}(c) = 0$$



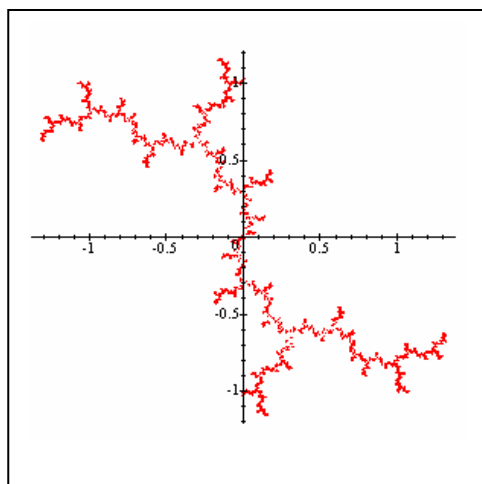
$$\text{Re}(c) = -0.5 \quad \text{Im}(c) = 0.3$$



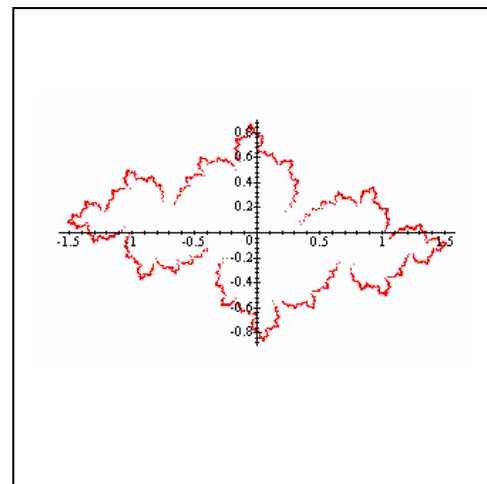
$$\text{Re}(c) = -1 \quad \text{Im}(c) = 0.16$$



$$\text{Re}(c) = -0.12 \quad \text{Im}(c) = 0.765$$



$$\text{Re}(c) = 0 \quad \text{Im}(c) = 1$$



$$\text{Re}(c) = -0.77 \quad \text{Im}(c) = 0.177$$

fig.V-27 Quelques ensembles de Julia relativement à des choix du complexe c

XII- VERSIONS DIVERSIFIEES DES ENSEMBLES DE MANDELBROT ET DE JULIA

Une fois acquise la procédure de construction des ensembles de Mandelbrot et de Julia, diverses formulations de la fonction source $f_c(z)$, autres que la forme quadratique requise par les développements précédents, peuvent être testées. Simulées, elles conduisent à des formes fractales que mettent en évidence la figure V-28 pour l'ensemble de Mandelbrot pour $f_c(z) = z^4 + c$ et la figure V-29 pour les ensembles de Julia dont les fonctions de bases sont choisies de type trigonométriques

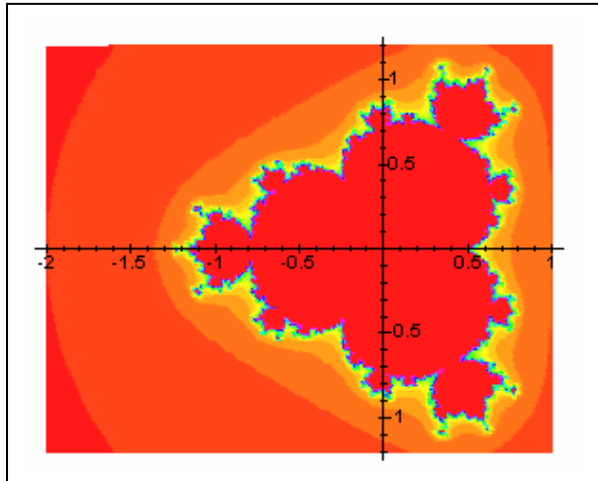
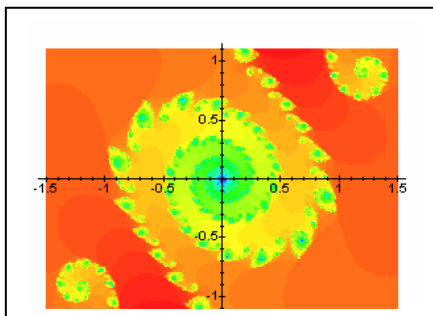
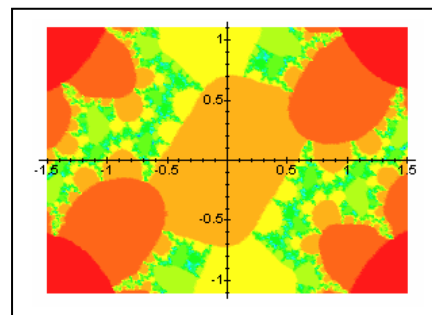


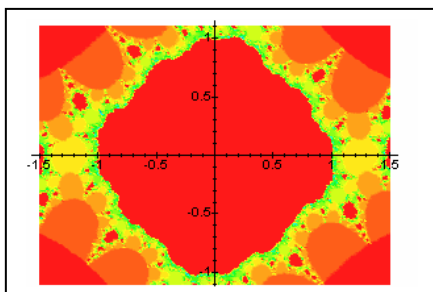
fig. V-28 ensemble de Mandelbrot correspondant à $f_c(z) = z^4 + c$



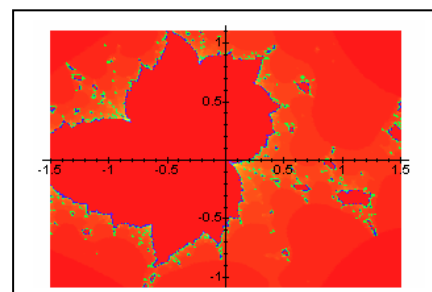
$f_c(z) = \sin(z) * c$
 $\text{Re}(c) = 1 \quad \text{Im}(c) = 0.4$



$f_c(z) = \sin(z^2) + c$
 $\text{Re}(c) = 1 \quad \text{Im}(c) = 0.4$



$f_c(z) = \sin(z^2) * c$
 $\text{Re}(c) = 1 \quad \text{Im}(c) = 0.4$



$f_c(z) = \sin(z) + \sin(z^2) * c$
 $\text{Re}(c) = 1 \quad \text{Im}(c) = 0.4$

fig. V-29 ensembles de Julia pour une forme quelconque de la fonction source $f_c(z)$

XIII- ENSEMBLES DE JULIA ISSUS D'UN BALAYAGE DE L'ENSEMBLE DE MANDELBROT

La construction des ensembles de Julia à partir de l'ensemble de Mandelbrot repose sur le choix du complexe c (en fait sa partie réelle $\text{Re}(c)$ et sa partie imaginaire $\text{Im}(c)$) que l'on peut opérer à partir de ce dernier. La figure V-30 concerne un balayage reposant sur vingt premiers points d'affixes $c_i [\text{Re}(c_i), \text{Im}(c_i)]_{i=1,20}$ dans le plan complexe. Les ensembles de Julia qui s'y rapportent suivent la figure V-30.

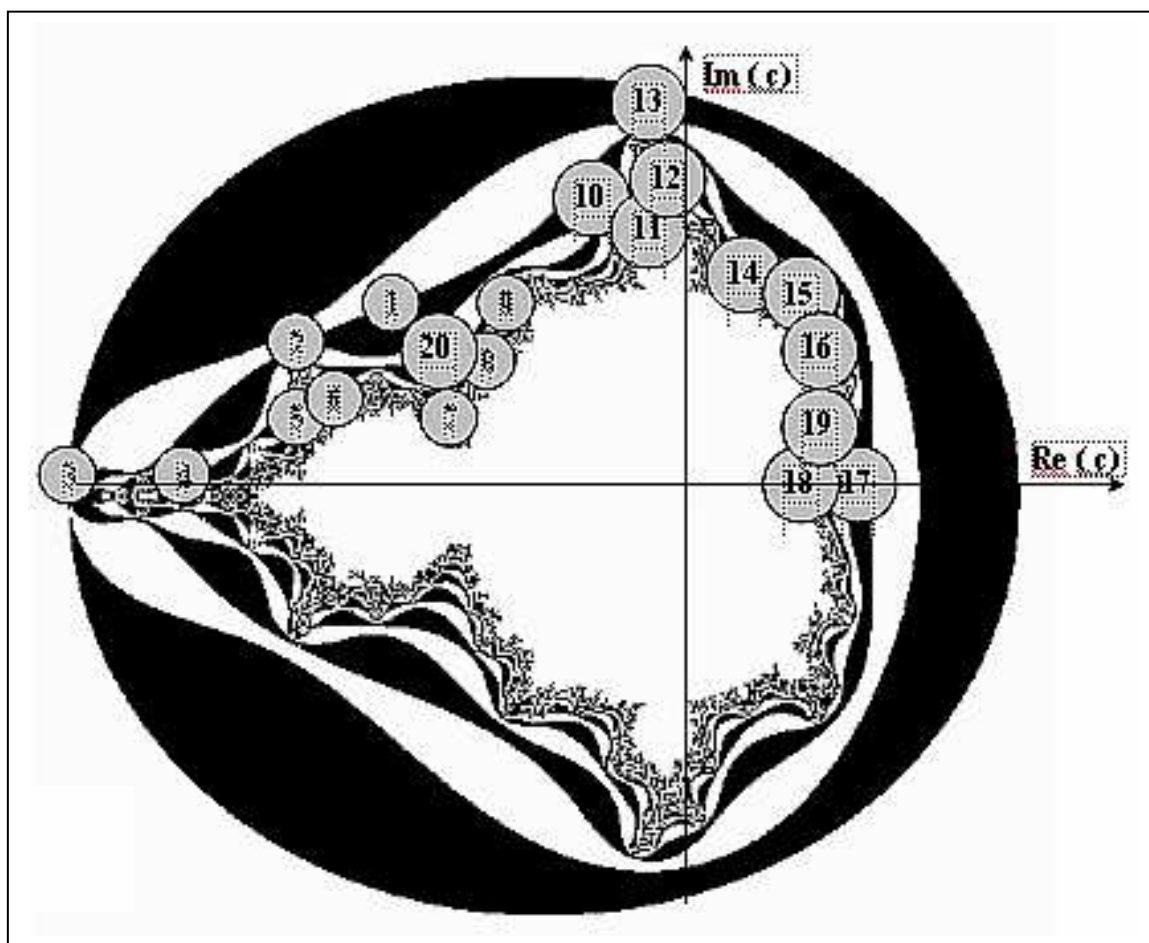
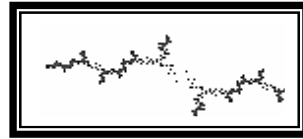


fig. V-30 vingt (20) premiers points de balayage" de l'ensemble de Mandelbrot



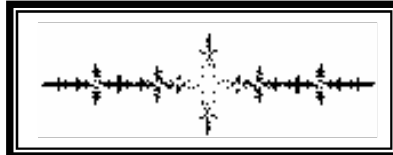
Cas 1



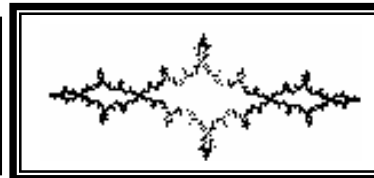
Cas 2



Cas 3



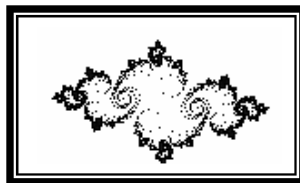
Cas 4



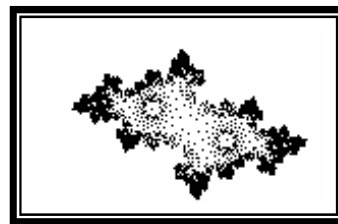
Cas 5



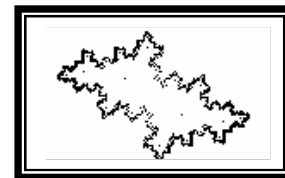
Cas 6



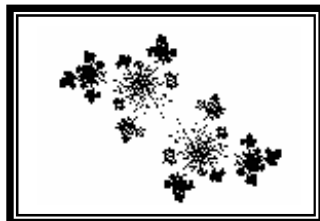
Cas 7



Cas 8



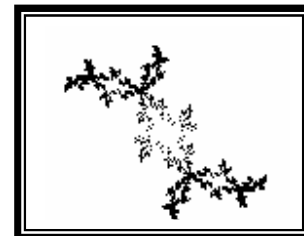
Cas 9



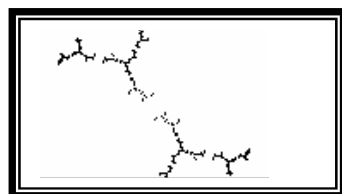
Cas 10



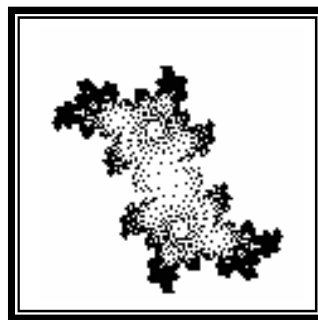
Cas 11



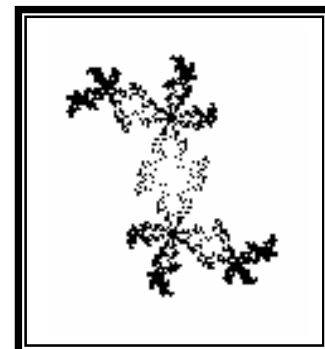
Cas 12



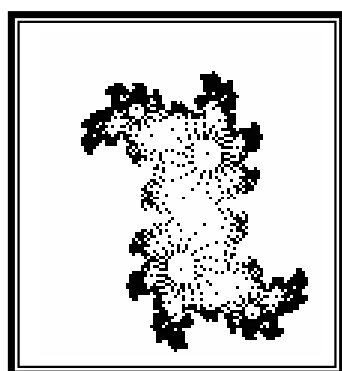
Cas 13



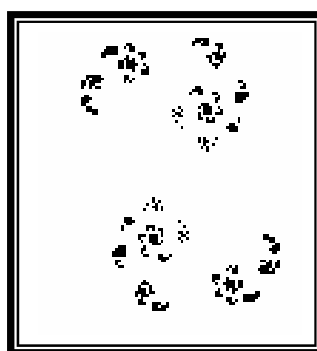
Cas 14



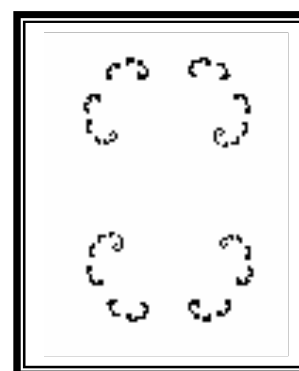
Cas 15



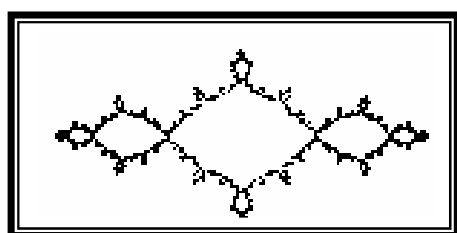
Cas 16



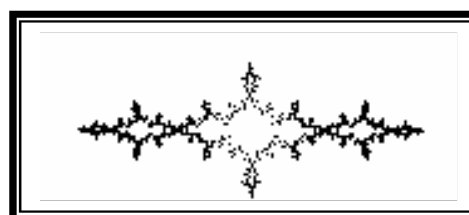
Cas 17



Cas 18



Cas 19



Cas 20

Douze (12) autres points parcourant l'ensemble ont été considérés (figure V-31). Les ensembles de Julia associés suivent cette figure.

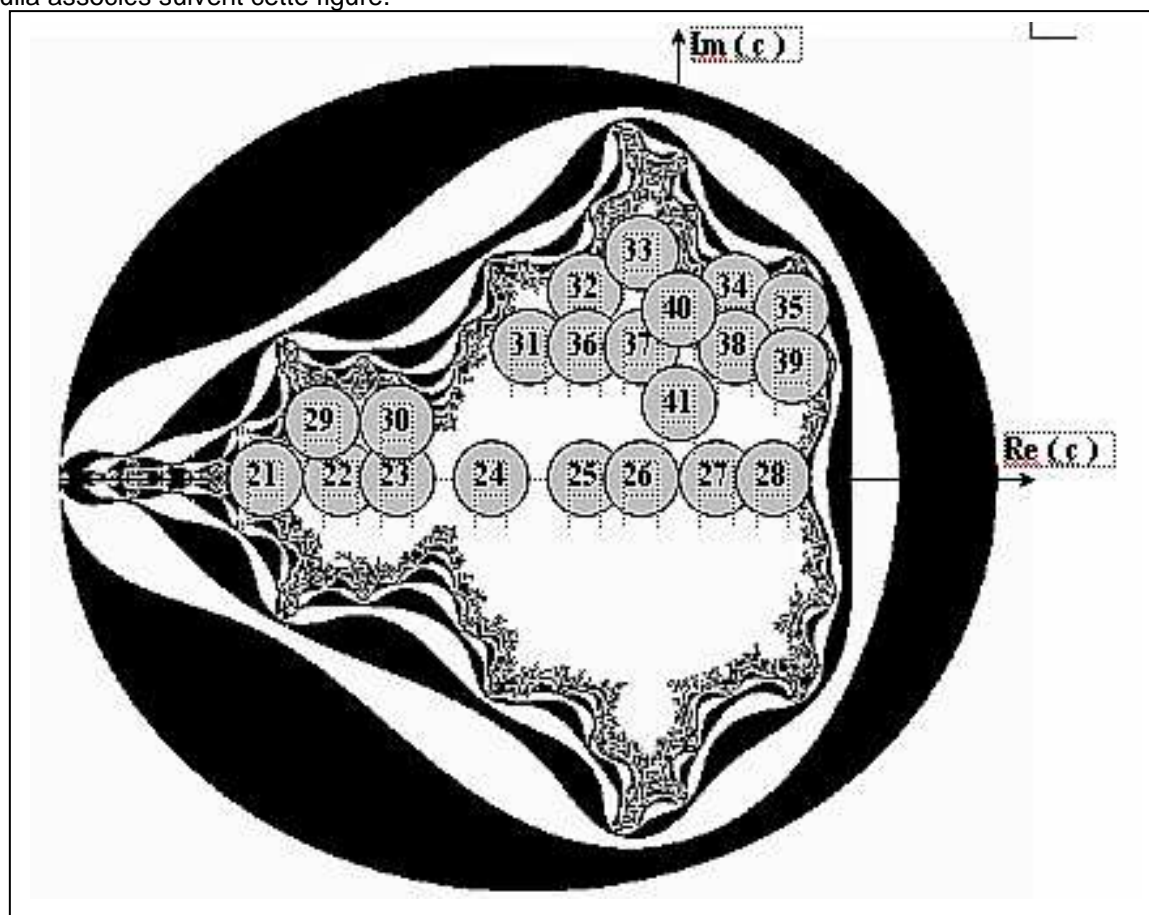
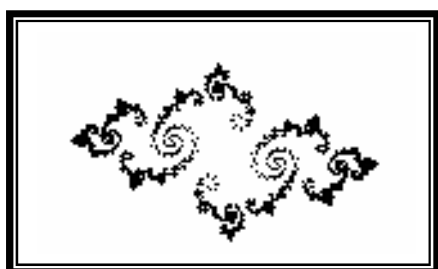
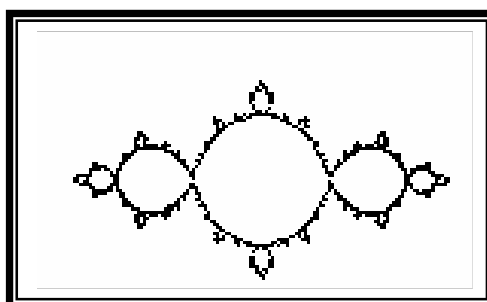


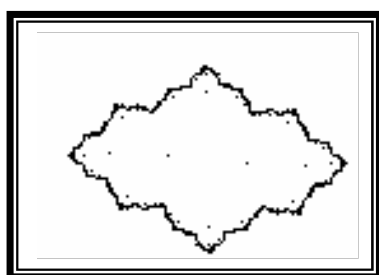
fig. V-31 douze (12) points de "balayage" de l'ensemble de Mandelbrot



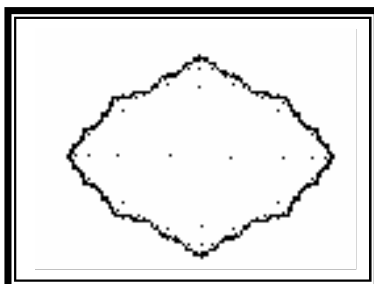
Cas 21



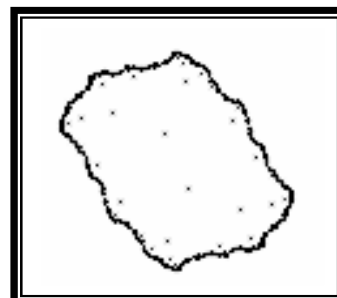
Cas 22



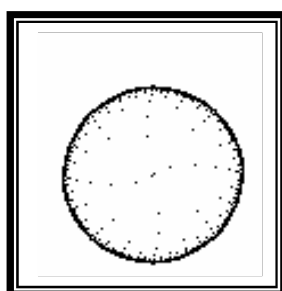
Cas 23



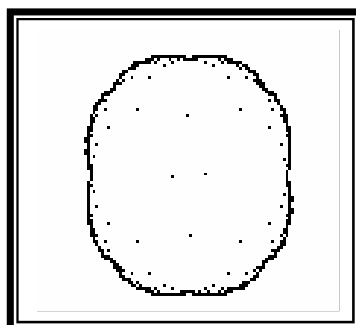
Cas 24



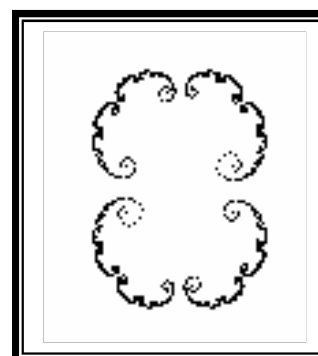
Cas 25



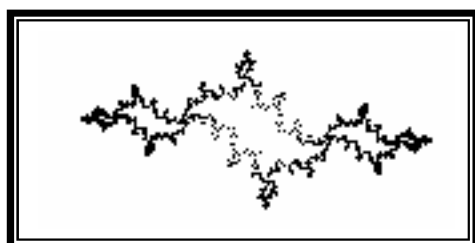
Cas 26



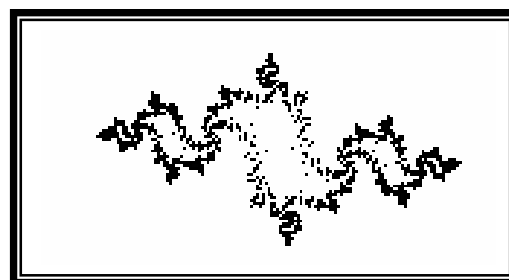
Cas 27



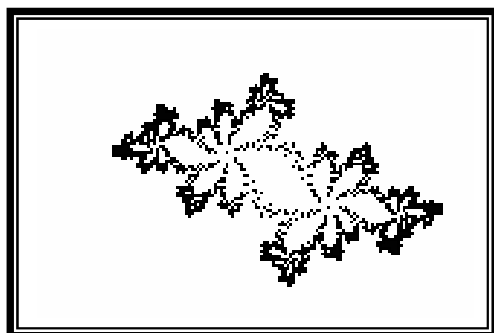
Cas 28



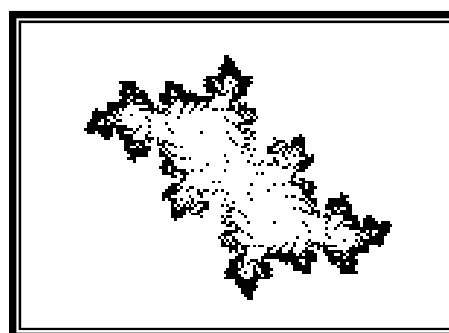
Cas 29



Cas 30

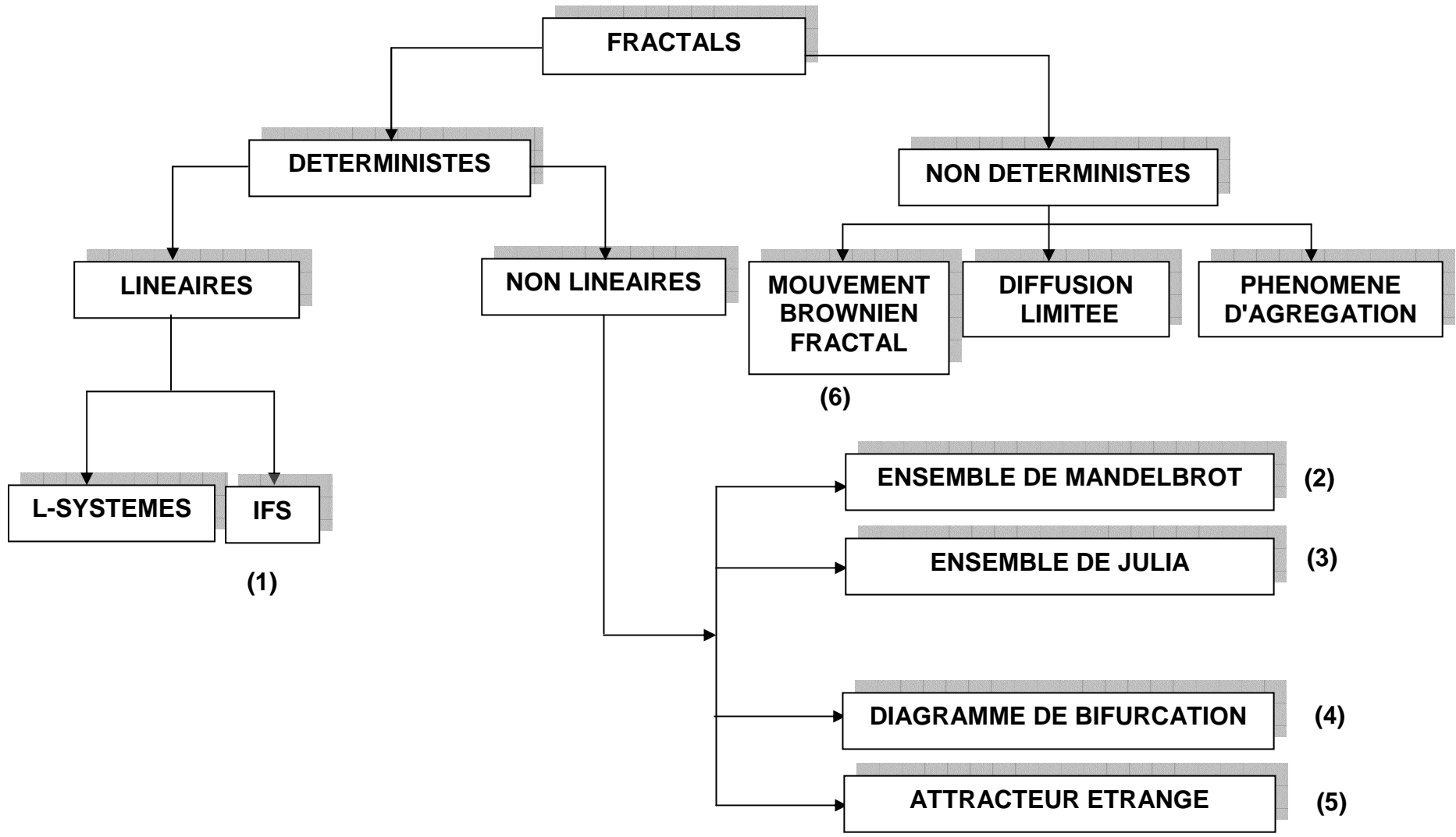


Cas 31



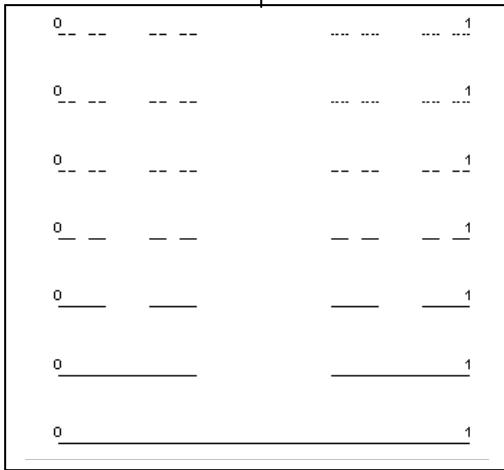
Cas 32

XIV- UNE CLASSIFICATION DES DIFFERENTS CORPS DE FRACTALS



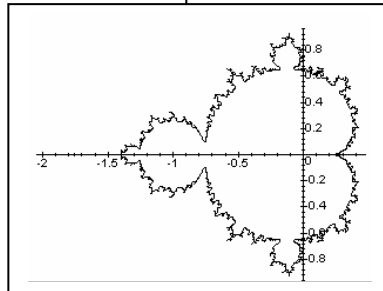
(1)

IFS



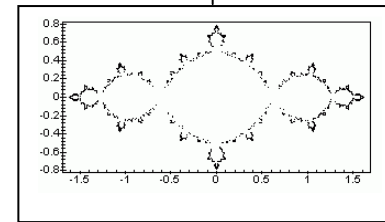
(2)

ENSEMBLE DE
MANDELBROT



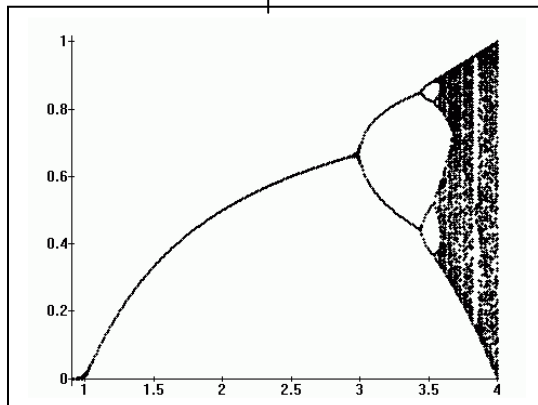
(3)

ENSEMBLE DE
JULIA



(4)

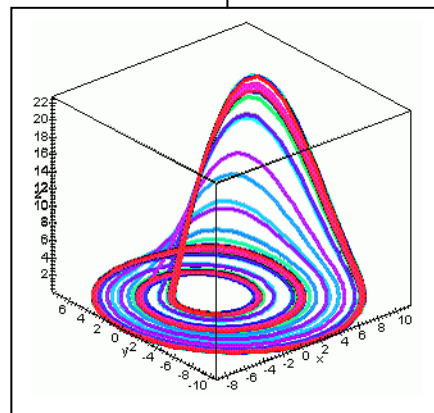
DIAGRAMME DE
BIFURCATIONS



(5)

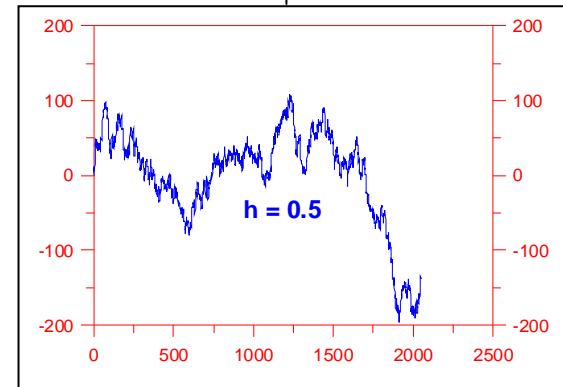
ATTRACTEURS
ETRANGES

ATTRACTEUR DE ROSSELER



(6)

MOUVEMENT BROWNIEN
FRACTAL



XV- LES SYSTEMES DE FONCTIONS ITEREES (IFS) APPLICATION A LA GENERATION D'IMAGES DE SYNTHESE

XV-1 INTRODUCTION :

Les images de synthèse envahissent de plus en plus notre environnement immédiat, télévisuel, scientifique ou technique fut-il. Ce type d'images, fruit de notre vision et de notre conception de l'Univers, intègrent, alternativement ou simultanément l'approche concrète ou abstraite de ce dernier. Par un effort de représentation, nous dirons de modélisation et d'abstraction presque métaphysique, nous pouvons renouveler notre conception routinière de notre biotope pour ériger un univers de projection façonné à l'image des modèles mathématiques que nous nous donnons. L'imperfection de nos sens à déceler les raffinements des irrégularités du monde qui nous entoure, la conception à la fois mathématique et informatique des images de synthèse constitue désormais un outil tout indiqué à l'avancée de la science : en physique, en chimie, en météorologie, en sciences de la Terre etc... , c'est dire l'impact profond de cette nouvelle technologie dans le monde de la recherche et dont il est impératif de prendre conscience.

XV-2 QU'EST-CE-QU'UNE IMAGE DE SYNTHESE ?

Qui de nous n'a pas manifesté son étonnement face à certaines prouesses des spots publicitaires recelant des créatures mi-humaines, mi-objets, dotées de formes et de mouvements dépassant nos capacités de compréhension pour nous plonger dans l'irréel et le fantasmagorique. Nous consommons ainsi des images dites de synthèse, c'est-à-dire numériques, entièrement conçues par ordinateur sur la base d'un modèle mathématique, donc d'une architecture conceptuelle mais non figée. Il s'agit donc de modèles mathématiques dynamiques dotés de paramètres d'initiation de l'image de synthèse, de sa manipulation et du contrôle de cette dernière.

La genèse des images de synthèse sans cesse complexes et sophistiquées est rendue possible par l'essor remarquable de l'outil informatique et à la conception de logiciels graphiques performants. Il convient cependant, d'énoncer une réflexion préalable essentielle dans la génération des images de synthèse : éviter de sombrer dans un esthétisme outrancier et séduisant au détriment d'un contenu informatif, fondamental en recherche scientifique, sous la forme d'impressions visuelles subjectives.

XV-3 QUE NOUS OFFRE UNE IMAGE DE SYNTHESE :

L'outil informatique a permis l'émergence de différents domaines scientifiques réputés inaccessibles et abstraits (certaines branches des mathématiques) au stade de disciplines à caractère exploratoire. Si le télescope a ouvert la voie dans l'observation du Cosmos, le microscope la diversité du monde de l'infiniment petit, l'ordinateur, à travers les images de synthèse permet de prospecter et de révéler la complexité et l'infinie richesse des équations mathématiques et le physicien allemand Heinrich Hertz d'écrire : « on ne peut échapper au sentiment que les formules mathématiques ont une existence qui leur est propre, qu'elles sont plus savantes que ceux qui les ont découvertes, que nous pouvons en extraire plus de science qu'il n'en a été mis à l'origine » ; du mathématicien français Benoît Mandelbrot : « l'image de synthèse a comblé un vide. Les mathématiciens avaient banni l'image de leur univers, et quand l'ordinateur est venu pour montrer ce que recouvraient les formules sèches des mathématiques, ce fut véritablement une surprise ».

XV-4 IMAGES DE SYNTHESE ET RECHERCHE SCIENTIFIQUE :

L'image de synthèse est d'un apport incontestable dans le champ expérimental sous la forme interprétative et argumentaire, de confirmation ou d'infirmité des résultats de laboratoire. La simulation numérique revêt l'aspect d'un outil de validation des modèles préalablement établis, dans l'attente d'une estimation qualitative des résultats. Un modèle mathématique vu sous son aspect conceptuel de formulation et de fidélité, renferme souvent une expression complexe avec l'émergence, par exemple, de discontinuités spatiales que seule l'image peut révéler. L'image de synthèse se présente aussi comme un outil d'aide à la compréhension des concepts et à la manipulation d'objets invisibles telles les structures cristallines, la conception moléculaire pour de nouveaux agents thérapeutiques ou inaccessibles telles les structures de galaxies en astrophysique.

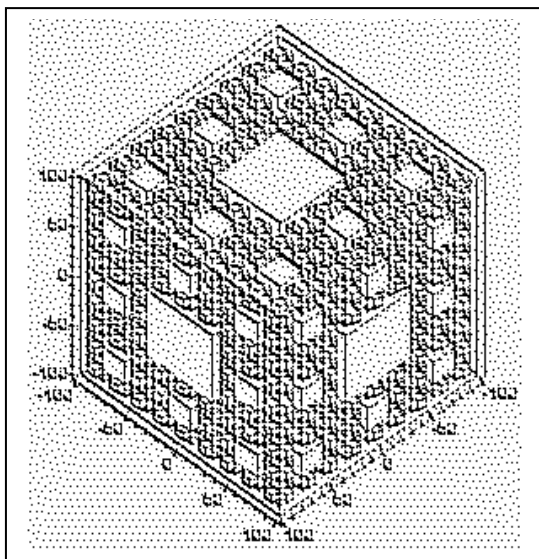


fig. V-32 Modélisation fractale d'un matériau poreux

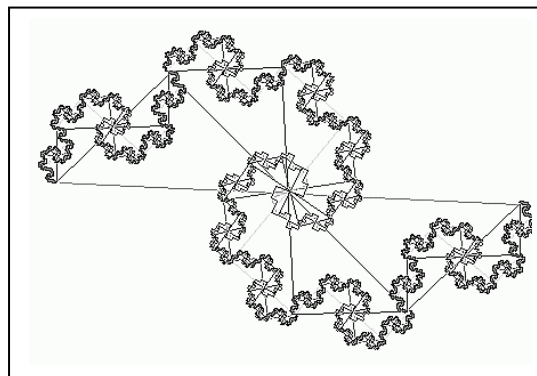


fig. V-33 Modélisation fractale d'une chaîne polymère

XV-5 LA CONCEPTION DES IMAGES DE SYNTHÈSE PAR LE MODÈLE FRACTAL :

L'image, autant que la parole, intègre les moyens de communication privilégiés par l'Homme, autant pour son esthétisme que par sa richesse et sa forme.

La conception des images de synthèse dans la quête d'une résolution graphique complexe mais non encombrante, nécessite la mise au point d'algorithmes générateurs et dont la concrétisation repose sur des principes holographiques ou des techniques CAC (Conception Assistée par Ordinateur). L'utilisation intensive des images de synthèse et la recherche d'un temps d'exécution moindre ont mené tout naturellement à la mise au point ont tout naturellement à la mise au point d'algorithmes récursifs dignement représentés par les images dites fractales.

L'adjectif «fractal» caractérise des objets et des phénomènes naturels ayant une apparente irrégularité spatio-temporelle et dont la genèse est induite par des opérations d'homothéties ou d'affinités internes, ayant la particularité de révéler une structure organisée quelle que soit l'échelle d'observation. Simplement énoncé, une image fractale est une figure géométrique induite par un processus répétitif dans la limite de résolution graphique de l'écran d'un ordinateur, sous l'action d'opérations de translation, de rotation et de changement d'échelle. Un mode fractal s'apparente donc à un procédé de clonage, l'embryon ou la cellule-mère étant généralement un motif géométrique élémentaire.

Une théorie globale des fractales est en attente d'élaboration ; les initiatives descriptives sont partagées entre divers domaines :

- en mathématiques sous l'approche d'une généralisation de la notion de dimension : dimension topologique, dimension de Hausdorff, dimension fractale, d'entropie, de packing, dimension spectrale, ponctuelle... .
- En physique avec l'émergence de la théorie du chaos déterministe appliqué aux systèmes dynamiques non linéaires, la définition des trajectoires de phase évolutives dans le temps et dans l'espace (ce dernier étant de dimension topologique finie) accompagnées d'une double opération d'étirement et de repliement pour générer un attracteur dit étrange de structure interne fractale.
- En compression de l'image en dehors des modes standards classiques (norme JPEG, JBIG...) par l'introduction de transformations affines contractiles ou IFS (Iterated Function System) et par un partitionnement « quadtree » destiné à compartimenter l'image et à inventorier les autosimilarités éventuelles des différents blocs.

Il serait prétentieux d'énumérer ici, l'ensemble des disciplines exploitant actuellement la technique « fractale » dans leur développement. Nous proposons pour notre part et à des fins pédagogiques, la simulation informatique de modèles géométriques « fractals » donc d'images de synthèse, mettant en évidence outre l'aspect esthétique de ces dernières, un accès au processus itératif et récursif de fractalisation.

Nous énoncerons pour chaque modèle tracé, le principe mathématique de sa conception ainsi que le choix des paramètres de génération et de contrôle.

XV-6 FONCTIONS ITERATIVES (IFS) :

XV-6-1 UN LANGAGE DE DESCRIPTION DES IMAGES FRACTALES

L'avènement de la théorie « fractale », au delà de l'exposé des principes dynamiques, ensemblistes géniteurs ou reproducteurs des images fractales, se caractérise à ce jour par une prolifération d'approches, mathématiques quand il s'agit d'édifier une théorie cohérente et homogène, algorithmiques pour une génération logicielle de ce type d'images. Dans ces deux éventualités, la recherche d'un langage descriptif unifié est vivement attendue. Ainsi, des tentatives d'énoncées de méthodes appropriées ont été formulées, mais seules quelques unes méritent, par leur efficacité d'être énoncées, telle que les **Systèmes de Fonctions Itératives (IFS ou Iterated Functions System)** dus à M.F. Barnsley. Les « IFS » sont assimilables à une fonction fractale d'interpolation, proche de la notion d'éléments structurés de déplacement sur laquelle repose le concept des relateurs arithmétiques.

Le principe des IFS consiste à remplacer chaque élément différentiel par des cellules, révélant chacune une image globale du système. Cependant, le voisinage d'une cellule découle, non pas d'une transformation unique, mais apparaît comme la résultante d'un certain nombre de transformations ω_i qui d'emblée, paraissent enclencher un processus chaotique mais étonnant de régularité, de réalisme et d'esthétique. C'est la simultanéité de ces deux situations qui sont à l'origine des transformations fractales et les applications qui en découlent comme la compression d'images et le codage.

XV-6-2 METHODOLOGIE :

A une image fractale, est souvent associée le critère mathématique de courbe irrégulière, de dynamique de complexité ou de « complexification ». La technique IFS appliquée au traitement et à la génération d'images fractales, malgré les infinités de détails de ces dernières, est basée sur un nombre limité de paramètres règles simples dont les plus importantes sont le principe d'affinité et les opérations de translation et de rotation. En effet, des parties constitutives d'une même image peuvent présenter des similarités moyennant l'application de transformations affines appropriées.

XV-6-2-1 PRINCIPE DE SIMILITUDE :

Dans un espace métrique X , on définit N similitudes $\{\psi_i\}, i = 1, N$ dont on désigne par $\{r_i\}, i = 1, N$ avec $0 < r_i < 1$, les rapports de similitude. Quel que soit l'ordre i , chaque similitude ψ_i est supposée composée :

- d'une dilatation : $x \mapsto r_i x$
- d'une isométrie : translation, rotation, réflexion

Pour chaque sous – ensemble E du plan, ces similitudes définissent un nouveau sous – ensemble noté ψE tel que :

$$\psi E = \bigcup_{i=1}^N \psi_i E \tag{V-55}$$

Dans le plan, ψE doit être considéré comme une application des parties de \mathcal{R}^2 c'est – à – dire $\mathcal{P}(\mathcal{R}^2)$ dans lui – même. La construction ψ est appelée – application de *collage* définie par la famille $\{\psi_i\}$. Par répétition ou itération de ψ , on transforme l'ensemble – source E en une séquence de sous – ensembles $\{E_i\}, i = 0, N$ avec $E_0 = E$

telle que :

$$E_{n+1} = \bigcup_{i=1}^N \psi_i E_n \quad (V-56)$$

Dans la succession des images E_n , la structure de E devient de moins en moins visible alors qu'émergent d'autres structures issues des ψ_i . Les descriptions précédentes, ayant pour point de départ les transformations de similitudes, peuvent être prolongées à tout type de transformation dont un cas intéressant est la *forme contractive* qui, dans \mathcal{R}^n , est définie par :

$$\forall X \in \mathcal{R}^n \quad \forall Y \in \mathcal{R}^n \quad d[\psi_i(X), \psi_i(Y)] \leq r_i d(X, Y) \quad (V-57)$$

$$0 \leq r_i < 1$$

Le terme r_i désigne le rapport de contraction associé à la transformation ψ_i .

XV-6-2-2 LES CONSTRUCTIONS ITERATIVES DANS LES IFS :

La génération d'images fractales à partir des IFS trouve son origine dans le théorème dit du « point fixe » affirmant l'existence et l'unicité des limites fractales.

Théorème du point fixe : Soient E_0 un sous ensemble non vide, borné fermé de l'espace métrique \mathcal{R}^n et $\{\psi_i\}_{i=1, N}$ une famille de N transformations contractantes de cet espace métrique, de rapports de contraction respectifs $\{r_i\}_{i=1, N}$. On désigne par $H(\mathcal{R}^n)$ l'ensemble des parties compacts non vides de \mathcal{R}^n et $\psi : H(\mathcal{R}^n) \rightarrow H(\mathcal{R}^n)$ tel que :

$$\psi(E) = \bigcup_{i=1}^N \psi_i E \quad (V-58)$$

alors ψ est contractante de rapport $r = \min(\{r_i\}_{i=1, N})$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \{\psi^k(E_0)\}$ existe et est unique dans $H(\mathcal{R}^n)$, ceci indépendamment du choix de E_0 .

Un système de fonctions itérées est donc une collection d'applications contractantes $\{\psi_i\}_{i=1, N}$ d'un espace métrique complet X de rapport de contraction $\{r_i\}_{i=1, N}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in X^2 : |\psi_i(x) - \psi_i(y)| \leq r_i |x - y| \quad (V-59)$$

Par rapport à un ensemble E de $H(X)$, il est préférable de définir une application ψ dite de *collage* telle que $\psi(E) = \bigcup_{i=1}^N \psi_i(E)$. L'application ψ est elle – même contractante, rapport de contraction $r = \max(\{r_i\}_{i=1, N})$. Pour $E_0 \in H(X)$, la limite finie : $\lim_{i \rightarrow \infty} \psi^i(E_0) = \alpha$ définit « l'attracteur » de l'IFS suggérant un mouvement de convergence de E_0 vers α .

XV-6-2-3 CARACTERISATION DES IFS

Outre un aspect qualitatif décrit à travers une dynamique pas uniquement de contractions mais aussi de translations, de rotations, d'homothéties, de variation de couleurs etc., les IFS s'apparentent beaucoup plus à la notion « d'Eléments Structurés de Déplacement (ESD) » consistant à remplacer les éléments différentiels d'une image par des cellules reflétant chacune l'image globale du système. La simulation d'images fractales par les IFS repose, non seulement sur le choix du modèle – source (espace E_0) par exemple géométrique comme dans nos exemples, mais surtout sur la simultanéité

d'un mouvement qui paraît chaotique dans l'espace physique mais étonnant de régularité dans l'espace informationnel.

XV-7 - MISE EN OEUVRE D'UN IFS

A partir de l'espace métrique X que nous considérons dans ce travail comme étant l'ensemble \mathcal{R}^2 ou un sous-ensemble de ce dernier. On abrège l'IFS à la donnée de la collection des applications contractantes ψ^i . On suppose par la suite que toutes ces applications sont affines, dans le sens où une application est affine si elle est représentée par une matrice A et une translation t tel que :

$$\psi(X) = AX + t$$

$$\psi \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \tag{V-60}$$

On définit alors le code de l'application ψ comme le 6-uple (a, b, c, d, e, f) et le code de l'IFS est une table dont les rangées sont les codes des applications ψ^i .

La figure V-34 est une illustration de la construction d'une image fractale (ici un élément de fougère) sur la base d'un type de procédé initié à partir d'un modèle source (figure V-34 (a)) sur lequel sera développé un nombre fixé d'itérations dont le "produit" sera une image fractale (figure V-34 (b)) dont un élément inséré en médaillon (figure V-34 (c)) atteste de la similarité du détail par rapport au global.

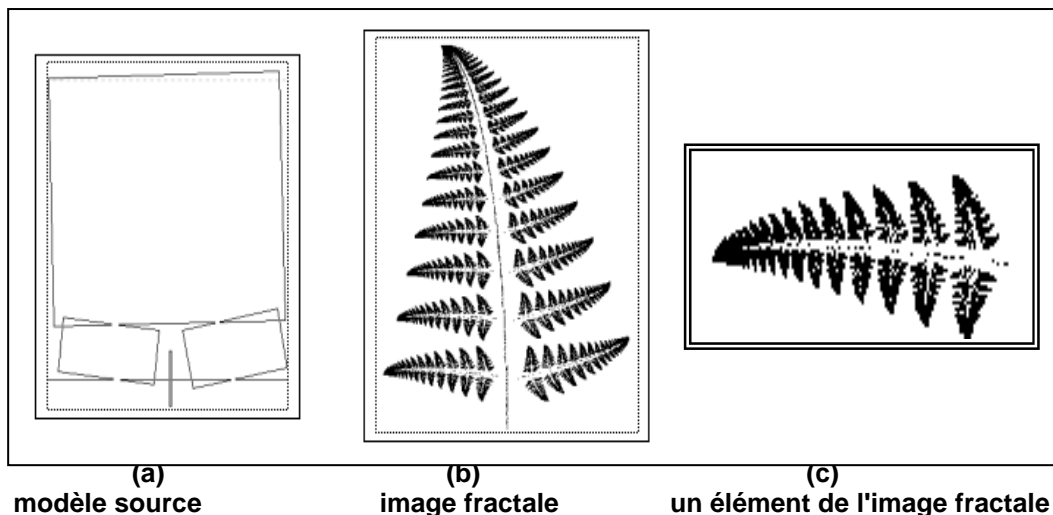
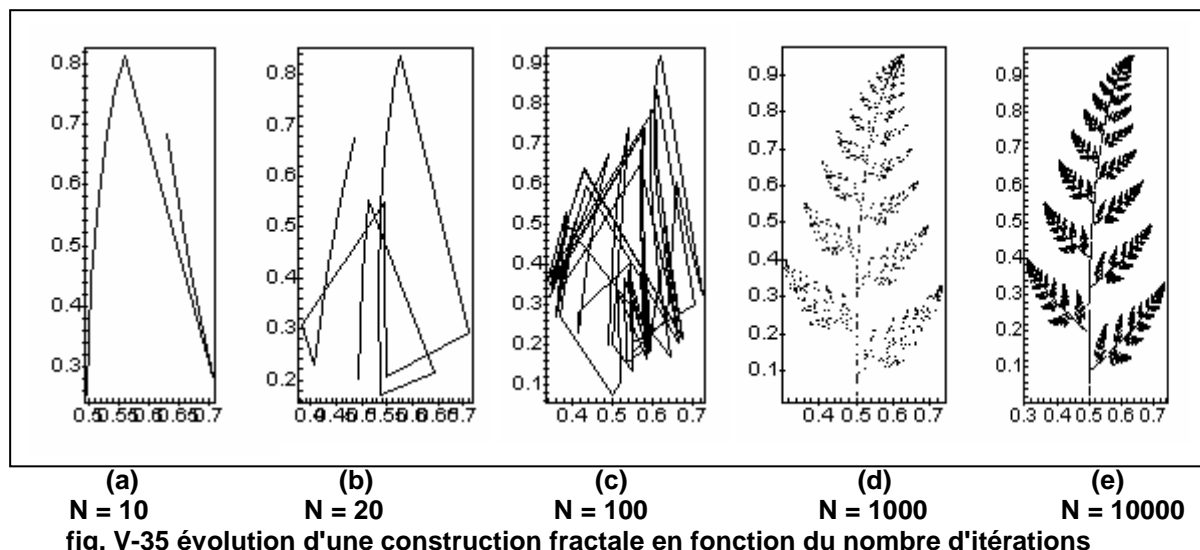


fig. V-34 génération d'une image fractale (un élément de fougère) par la méthode IFS

XV-8 MODELES FRACTALS GENERES A PARTIR DES IFS

A travers les modèles fractals que nous avons générés par les systèmes de fonctions itératives (IFS), les critères du choix de l'image – source (géométrique le plus souvent) obéissent à la recherche de l'obtention d'une scène naturelle (les végétaux) et d'une image la plus esthétique possible. Le nombre d'itérations ($N = 100\ 000$) peut paraître excessif mais il se situe dans la limite de résolution de l'écran graphique et d'une représentativité convaincante de l'objet souhaité (ici de type floral).

Un programme de génération d'un végétal de type fougère basé sur le principe des systèmes de fonctions itérés est testé avec un nombre d'itérations N croissant (respectivement $N = 10, 20, 100, 1000, 10000$). Remarquons qu'une forme expressive de l'image n'est apparente qu'au bout d'un nombre élevé d'itérations ce qui rend ardue la génération d'images fractales. Les démarches itératives aboutissent à des formes d'apparence complexes et chaotiques mais sous-tendue par une organisation interne parfaite synthétisant l'objet fractal (dans notre cas une feuille de fougère et ses ramifications).



XV-9 UN RELIEF FRACTAL :

A s'y méprendre, un relief montagneux s'apparente à un modèle fractal à condition toutefois de définir à la fois une source génératrice de préférence géométrique et un procédé itératif de construction. Dans notre cas, les façades sont assimilables à des figures triangulaires d'orientations différentes et issues du triangle - source par suite de translations. Aussi, notre élément de base serait-il un triangle équilatéral dont les points milieux des côtés délimiteront les sommets de quatre nouveaux triangles ; cette étape constituera le "MAILLAGE DE PREMIER DEGRE".

Les points milieux sont ensuite soumis à une opération de translation verticale vers le haut ou vers le bas sans que l'amplitude de celle-ci dépasse la longueur des côtés ; nous définissons ainsi un «MAILLAGE DE DEGRE DEUX » : (figure V-36).

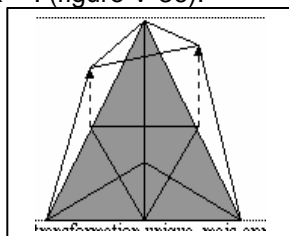


fig. V-36 un maillage de degré deux

Nous retenons de cette figure le nombre non négligeable de faces secondaires (en fait de triangles) que nous obtenons par le simple fait d'une première opération de translation ; si le procédé est réitéré pour chaque nouveau triangle obtenu après translation, nous amorçons ainsi un processus presque «itératif» mais en tout

cas de self - similarité. Il s'agit bien d'un processus de construction fractal.

L'augmentation du degré de maillage aboutit à une forme de relief complexe rappelant celle d'un massif montagneux. Sur le plan algorithmique, on construit une matrice dont les éléments correspondent aux coordonnées des points milieux translatifs et qui seront assimilés à des nœuds de maillage.

Pour rendre encore plus réaliste l'effet de relief, l'affichage des façades sera effectué des plus éloignées aux plus proches par rapport à un observateur ; ces dernières sont ensuite superposées. Un effet de contraste d'éclaircement peut être inclus par l'introduction d'un angle d'éclaircement formé par un vecteur normal à la surface d'une facette et un vecteur lumineux virtuel partant de l'observateur vers celle-ci.

LES PARAMETRES NECESSAIRES A LA SIMULATIO

- le degré de maillage définissant la taille des facettes et la résolution graphique du relief : plus ce degré est élevé, plus l'effet de relief est visible

- l'indice de profil pour gérer la tendance du profil à s'élaner vers le ou vers le bas ; un indice élevé produira une grande irrégularité du relief.
- la génération d'une séquence aléatoire sur laquelle reposera l'effet de translation des points milieux
- un angle de vision ou d'observation verticale ou horizontale
- une distance relative à l'emplacement de l'observateur
- un effet de paysage marin est intégré par la définition d'un paramètre d'élévation du niveau de la mer accompagnée d'une disparition des facettes du relief situées au-dessous de ce niveau.

XV-10 FORMES GEOMETRIQUES FRACTALES

A l'intérieur d'un cercle majeur, nous incrustons deux cercles concentriques qui eux-mêmes renfermeront deux autres cercles concentriques et ainsi de suite ; notons que les rayons des différents cercles appartiennent tous à une même droite horizontale. Le principe de construction géométrique décrit est donc de type fractal similarité dans la construction et une affinité dans les figures obtenues.

XV-10-1 UN COUVERT VEGETAL FRACTAL:

Les structures arborescentes (les branchages) constituent un modèle type de comportement fractal ; en effet l'image globale d'un arbre est obtenue à partir d'un certain nombre de bifurcations du tronc en branches ; selon la technique de ramification ces dernières donneront naissances aux branchiales et ainsi de suite jusqu'au feuillage. Ce comportement de divisions répétées peut être traduit en notation binaire en ce sens que toute bifurcation se développe dans deux sens : à gauche et on attribue le bit « 1 », à droite le bit « 0 » ; ainsi l'extrémité d'une branche quelconque est traduisible sous la forme d'une séquence binaire (figure V-37)

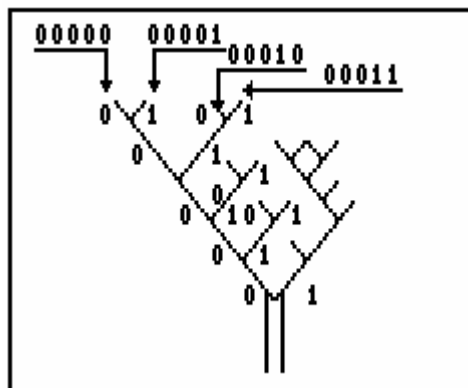


fig. V-37 une structure arborescente

PARAMETRES DE CONSTRUCTION :

- le nombre d'itérations indiquant le nombre de fois qu'une branche donnée se divise
- l'angle de déploiement autrement dit l'angle formé par deux branchiales ou bifurcations
- un facteur aléatoire pour introduire un effet aléatoire dans l'arborescence
- la longueur de la première branche à savoir le tronc
- un facteur d'arborescence indiquant le nombre de rameaux que produit une branche à chaque bifurcation.

XV-10-2 UNE COUVERTURE NUAGEUSE FRACTALE

Partant d'un point initial $A_0(x_0, y_0)$ appartenant au plan, on se propose de construire une suite de points $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ le procédé de construction devant assurer une « fractalité » ; pour cela, on génère une suite aléatoire de nombres compris entre 0 et 1 à partir de laquelle seront définis les points A_{n+1} (figure V-38).

Si l'élément aléatoire généré est 0, le point sera le milieu du segment.

Si l'élément aléatoire généré est 1, on détermine le point appartenant au segment joignant le centre de l'écran et le point ; le point est confondu avec le point lorsque celui-ci aura subi une rotation d'angle α .

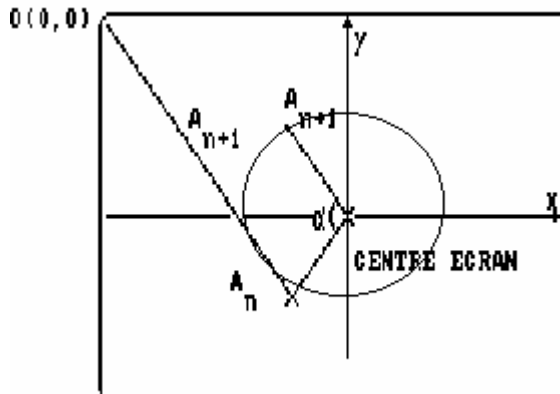


fig. V-38 principe géométrique assurant la fractalité (1^{er} cas)

Les deux conditions énumérées ci-dessus permettent de définir une suite récurrente décrite par les équations suivantes :

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } \vec{OA}_{n+1} = \vec{OA}_n / 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1} = x_n / 2 \\ y_{n+1} = y_n / 2 \end{cases}$$

2^{ème} cas

La figure V-39 conduit aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \cos \alpha_1 = \frac{x-x_0}{IM} & \cos \alpha_2 = \frac{x'-x_0}{IM'} \\ \sin \alpha_1 = \frac{y-y_0}{IM} & \sin \alpha_2 = \frac{y'-y_0}{IM'} \end{cases}$$

Des expressions ci-dessus, nous déduisons :

$$\cos \alpha_2 = \cos \alpha \cdot \cos \alpha_1 - \sin \alpha \cdot \sin \alpha_1$$

$$\sin \alpha_2 = \sin \alpha \cdot \cos \alpha_1 + \cos \alpha \cdot \sin \alpha_1$$

Comme :

$$x' = x_0 + IM' \cdot \cos \alpha_2 \quad y' = y_0 + IM' \cdot \sin \alpha_2$$

les relations qui serviront de base à l'algorithme de fractalisation sont les suivantes :

$$\begin{aligned} x' &= x_0 + (x-x_0) \cos \alpha - (y-y_0) \sin \alpha \\ y' &= y_0 + (x-x_0) \sin \alpha + (y-y_0) \cos \alpha \end{aligned} \quad (V-61)$$

Les relations de récurrence déduites et introduites à un facteur près, sont telles que :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{2}{3}(x_c - x_n)\cos\alpha - \frac{2}{3}(y_c - y_n)\sin\alpha \\ y_{n+1} = y_n + \frac{2}{3}(x_c - x_n)\sin\alpha + \frac{2}{3}(y_c - y_n)\cos\alpha \end{cases} \quad (V-62)$$

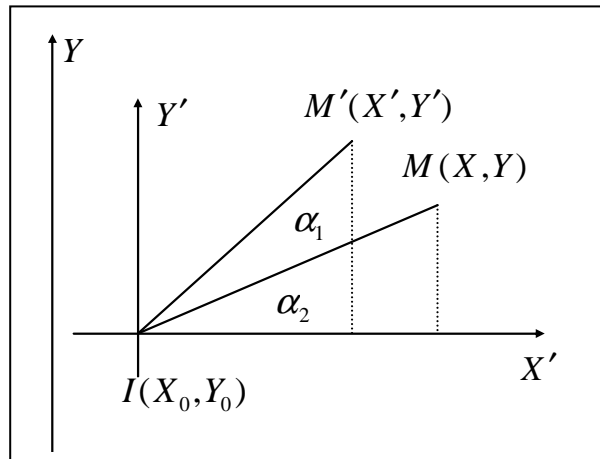


fig. V-39 principe géométrique assurant la fractalité
(2^{ème} cas)

PARAMETRES DE SIMULATION :

- * les coordonnées du point initial de génération du motif fractal
- * l'angle α
- * le point centre de l'écran (x_c, y_c) peut être modifié ; plutôt que de tracer les points de coordonnées (x_n, y_n) , nous avons considéré les cercles ayant pour centres ces points et un rayon à fixer.

XV-11 MOUVEMENTS CHAOTIQUES DETERMINISTES :

Nous avons intégré cette l'image de synthèse décrivant un mouvement d'animation dans l'image globale, pour montrer que dans un modèle en apparence chaotique, se cache un ordre dissimulé engendré par un processus mathématique : nous parlerons alors de CHAOS DETERMINISTE . Un mouvement chaotique est révélé par une trajectoire évoluant dans le temps de façon « quasi-aléatoire » ; de ce fait, la simulation proposée consistera en une trajectoire finement brisée, chaque portion évoluant aléatoirement, par des oscillations haut-bas, droite-gauche. Un paramètre de vitesse d'ascension d'un brin quelconque de la ligne brisée est aussi introduite. Le nombre d'itérations est donné par le nombre d'éléments constitutifs de la trajectoire.

XV-12 SIMULATION DE L'ASTRE SOLAIRE :

Nous avons tenu à intégrer dans notre image de synthèse l'astre solaire dont nous devons chercher une fonction mathématique de modélisation pour ne pas dire d'approximation graphique ; ceci a été rendu possible par l'introduction de la fonction définie en coordonnées polaires libellée comme suit :

$$f(\theta) = 1 + \cos(20 * \theta) + 0.5$$

PARAMETRES DE SIMULATION :

- le rayon polaire R_m
- les extrémités de l'intervalle de tracé : θ_I et θ_S .
- le pas de déplacement P
- les coordonnées écran de tracé

EXEMPLE DE SIMULATION :

Nous avons testé quelques paramètres qui ont donné une image de synthèse assez esthétique (figure V-40)

TRACE DU MASSIF MONTAGNEUX :

- Degré de maillage : **7**
- Indice de profil : **50**
- Type aléatoire : **800**
- Elévation du niveau de la mer : **800**
- Angle de vision horizontal : **35°**
- Angle de vision vertical : **320°**
- Distance de l'observateur à l'origine : **10 000**
- Choix d'un type de tracé : **3**
- Angle vertical d'éclairage : **50°**
- Angle horizontal d'éclairage : **90°**
- Distance de la source lumineuse à l'origine : **10 000**
- Choix du contour des facettes : **NON**

COUVERTURE NUAGEUSE FRACTALE:

- Abscisse x : **10**
- Ordonnée y : **10**
- angle de tracé : **45°**

CONSTRUCTION DES STRUCTURES

ARBORESCENTES :

- Nombre d'itérations : **6**
- Nombre d'arborescences : **4**
- Angle de déploiement : **45°**
- Facteur aléatoire certain : **0**
- Longueur de la première branche : **80**

IMAGE ANIMEE :

- Oscillations en x : **4**
- Oscillations en y : **2**
- Nombre d'itérations : **4**

CERCLES FRACTALS :

- Rayon maximal : **8**
- Angle initial : **0**
- Angle final : **6.28**
- Pas de balayage angulaire : **0.1**

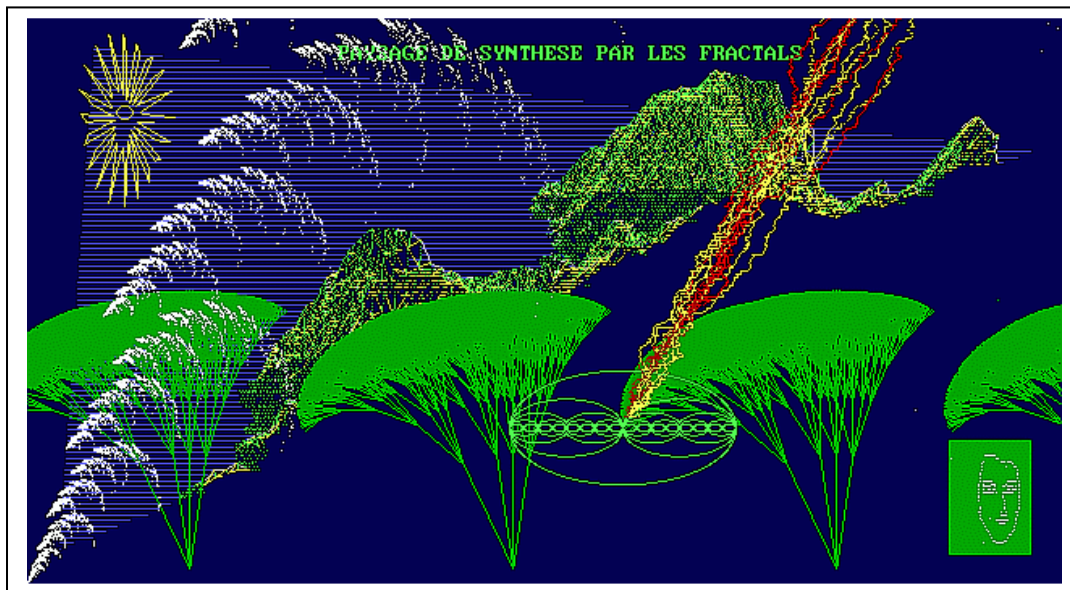


fig. V-40 esquisse d'un paysage issu de constructions fractales

XV-13 CONCLUSION :

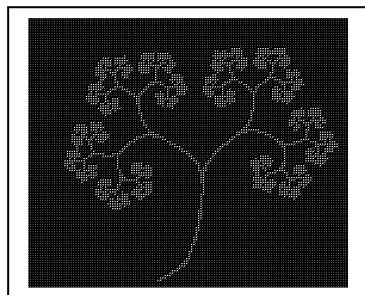
Les techniques de génération des images de synthèse, au - delà de la complexité dans leur représentation du réel ou de l'imaginaire, ne peuvent s'apparenter à des artefacts mais relèvent plutôt d'une logique algorithmique sous-tendue elle même par la conjonction de méthodes mathématiques appropriées telles les techniques fractales et les Systèmes de Fonctions Itératives (IFS). Sans l'outil informatique, les images de synthèse ne peuvent être conçues tant sur le plan itératif que sur le plan résolution graphique et par delà de la satisfaction d'un imaginaire enrobé dans la quête d'un surnaturel fait d'esthétique, de rêve ou de fantasmes.

CHAPITRE VI

L'Homme, cet éternel apprenti

LA DIMENSION FRACTIONNAIRE EN THEORIE FRACTALE

LA DIMENSION FRACTIONNAIRE EN THEORIE FRACTALE



I- CRITERES D'IDENTIFICATION DES FRACTALS

L'énoncé d'une définition cohérente et unique d'un fractal- même le concepteur de ce dernier, B. Mandelbrot, s'en est abstenu- reste à parfaire. Plutôt que d'en faire une fixation et à des fins d'application, il nous semble plus opportun de cerner plutôt les critères descriptifs et quantitatifs d'identification de structures fractales.

Le concept fractal, intimement relié au facteur échelle d'observation, caractérise les objets le plus souvent siège de fortes irrégularités, tel qu'un évènement pris à une échelle propre s'identifie au sens déterministe ou statistique à l'évènement fractal global originel.

Les fractals offrent ainsi un outil mathématique de traitement et de modélisation des formes irrégulières d'apparence complexes mais issus de la composition de transformations géométriques identifiables sous une gamme de changements d'échelles. Outre le facteur d'auto – similarité associé au concept fractal développé au chapitre V, il peut être retenu d'autres critères d'identification des fractals dont nous citons

- la présence de fortes irrégularités graphiques en apparence complexes et désordonnées voire chaotiques
- la détection de structures fines porteuses d'information malgré un environnement désordonné
- la possibilité d'une démarche de génération récursive
- la caractérisation par une dimension fractionnaire cohabitant avec la dimension classique euclidienne

II- LA NOTION DE DIMENSION DANS LE CONTEXTE DE LA GEOMETRIE FRACTALE

Prise sous l'angle de leur définition, la géométrie euclidienne et la géométrie fractale diffèrent par leur concept en ce sens que les figures de la première répondent en général à des formulations algébriques tandis que les courbes fractales découlent de la procédure d'une dynamique récursive. Cela est d'autant plus vrai que si les attracteurs simples peuvent être caractérisés encore par des dimensions topologiques bien définies, on note une inadéquation de ces dernières pour la description des attracteurs étranges lesquels peuvent se développer sur des variétés plus complexes comme les fractales. Les trajectoires qui génèrent un attracteur étrange se développent généralement sur des variétés instables et tendent à occuper un espace plus ce que n'en donne la dimension topologique. Ceci dénote au moins un fait: la notion de dimension n'est pas unique, non seulement entre les contextes euclidien et fractale mais aussi au sein même du contexte de géométrie fractale.

La notion de dimension fractale s'impose d'elle-même tant l'approche de maints objets naturels (courbes, surfaces, images....) échappe aux formes "lisses" ou uniformes qui sont l'apanage de la géométrie classique.

La notion de dimension d'une courbe par exemple est relative au mode d'approche, d'analyse, nous dirons même d'échelle d'observation de cette dernière. Les dimensions non entières dites aussi fractales telle que la dimension du mouvement Brownien fractionnaire répondent-elles à la conception géométrique dont sont dotés *a priori* les objets (les courbes irrégulières par exemple) ou proviennent-elles du mode d'investigation de ces dernières. Se pose alors le problème auquel référence Benoît Mandelbrot "il est légitime de se poser la question d'une fractalité de l'univers auquel l'objet appartient ou d'une fractalité induite par le mode d'observation lui-même".

Sur le plan épistémologique, est-il nécessaire d'accoler l'épithète de géométrie à tout objet ou courbe fractale? Qui de l'aspect physique ou géométrique est à même d'accéder le mieux aux irrégularités donc à leur complexité? L'expression de la dimension fractale est une démarche quantitative de révélation et d'estimation de la régularité ou de l'irrégularité d'une courbe et partant de sa complexité non plus apparente mais aussi plus profonde.

Sur le plan du formalisme de la notion de dimension fractale, plusieurs définitions sont régulièrement proposées mais certaines d'entre elles ne présentent qu'un intérêt mathématique théorique. Aussi ne retiendra-t-on que les plus significatives et les plus pratiques et que nous exposerons ci-dessous.

Le concept de dimension

Le concept de dimension prend son origine d'une approche d'ordre physique: la recherche d'une loi de densité d'une boule compacte autour d'un point par rapport à son rayon. Dans ce sens, considérons une ligne dont la mesure est une fonction linéaire continue et dérivable. Pour un point pris sur cette ligne, la densité de la boule autour de ce point est une fonction linéaire de son rayon, pour un carré, elle est quadratique. Le terme de densité peut être relié à la notion de volume ou de mesure et dépend de la définition retenue.

III- DETERMINATION DE LA DIMENSION FRACTALE PAR LA METHODE DES DIVISEURS

III-1 PRINCIPE

Dans leur esprit, les méthodes de calcul des dimensions fractales se rejoignent à des différences près dans leur procédure. Elles reposent pour l'essentiel sur deux opérateurs : un opérateur de jauge et une échelle de mesure ou de division. Ainsi la méthode des diviseurs consiste à estimer la longueur d'une trajectoire en l'approximant comme la somme des segments ou diviseurs d'une longueur fixée. Cette procédure nécessite la définition d'un pas de mesure dit de référence (jauge) que nous notons ϵ . La longueur L à approximer, fonction de ce pas de mesure, sera notée $L(\epsilon)$. Conjointement, nous prenons en considération le décompte $N(\epsilon)$ du nombre de fois que la jauge ϵ a été reportée dans la procédure de mesure. Quelques cas simples sont illustrés par la figure VI-1:

- cas d'une ligne L :
 - L la longueur de la droite divisée en segments élémentaires de longueur ϵ
 - $N(\epsilon)$ le nombre de fois que l'élément unitaire ϵ est reporté pour parcourir la longueur L

Nous avons donc la relation

$$L = N(\epsilon) \cdot \epsilon = N(\epsilon) \cdot \epsilon^1 \tag{VI-1}$$

Nous déduisons alors la quantité $N(\eta)$

$$N(\epsilon) = \frac{L}{\epsilon^1} = \frac{\text{constante}}{\epsilon^1} \tag{VI-2}$$

- cas d'une surface S

$$S = N(\epsilon) \cdot \epsilon^2 \tag{VI-3}$$

Dans ce la fonction $N(\epsilon)$ s'écrit

$$N(\epsilon) = \frac{\text{constante}}{\epsilon^2} \tag{VI-4}$$

- cas d'un volume V

$$N(\epsilon) = \frac{\text{constante}}{\epsilon^3} \tag{VI-5}$$

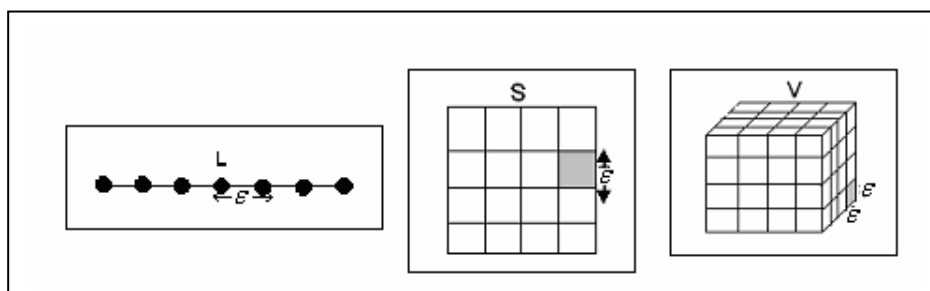


fig. VI-1 principe de la méthode des diviseurs dans le calcul de la dimension fractale

Il ressort que les différentes expressions de $N(\varepsilon)$ mettent en jeu, à une constante k près, les dimensions topologiques relatives à chaque modèles géométriques. Elargi au cas d'une figure quelconque de dimension D (pas nécessairement euclidienne), le nombre de fois $N(\varepsilon)$ que l'élément unitaire de mesure ε est porté sur cette figure est tel que

$$N(\varepsilon) = \frac{k}{\varepsilon^D} \tag{VI-6}$$

La caractéristique géométrique mesurée que nous généralisons par L obéit à l'expression

$$L = N(\varepsilon).\varepsilon \Leftrightarrow L = k\varepsilon^{1-D} \tag{VI-7}$$

Calcul de la constante k : par suite d'une homogénéisation en termes d'unités, les relations précédentes conduisent à spécifier que la constante k est soit une longueur, une surface c'est-à-dire une longueur élevée à la puissance deux (2) ou un volume c'est-à-dire une longueur à la puissance trois (3). Il semble naturel par analogie de poser dans l'expression (VI-7) $k = L_0^D$ (appelé "invariant géométrique" et L_0 "longueur" apparente) ce qui conduit à écrire en posant $L = L(\varepsilon)$

$$L(\varepsilon) = L_0^D .\varepsilon^{1-D} \tag{VI-8}$$

La relation (VI-8) permet de concrétiser deux opérations:

1. la détermination graphique de la dimension D : en effet, en introduisant une échelle log-log dans (VI-8), il vient,

$$\log[L(\varepsilon)] = D \log(L_0) + (1 - D) \log(\varepsilon) \tag{VI-9}$$

Il apparaît donc que $\log[L(\varepsilon)]$ est une fonction linéaire de $\log(\varepsilon)$ et dont la pente p de la droite représentative est $p = 1 - D$ (figure VI-2)

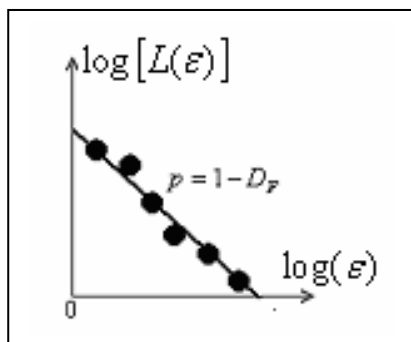


fig. VI-2 méthode graphique dans la détermination de la dimension fractale

2. expression analytique de la dimension fractale dans le méthode des diviseurs: partant de la relation (VI-8), il en découle que

$$D = \frac{\log \left[\frac{L(\varepsilon)}{\varepsilon} \right]}{\log \left[\frac{L_0}{\varepsilon} \right]} \tag{VI-10}$$

De façon équivalente

$$D = 1 - \frac{\log\left[\frac{L(\varepsilon)}{L_0}\right]}{\log\left[\frac{\varepsilon}{L_0}\right]} \tag{VI-11}$$

Dans le cas où la "longueur" apparente $L_0 = 1$, la dimension fractale D est simplement formulée comme suit

$$D = 1 - \frac{\log[L(\varepsilon)]}{\log(\varepsilon)} \tag{VI-12}$$

III- 2 APPLICATION DE LA METHODE DES DIVISEURS SUR L'ENSEMBLE FRACTAL DE CANTOR (FIG. VI-3)

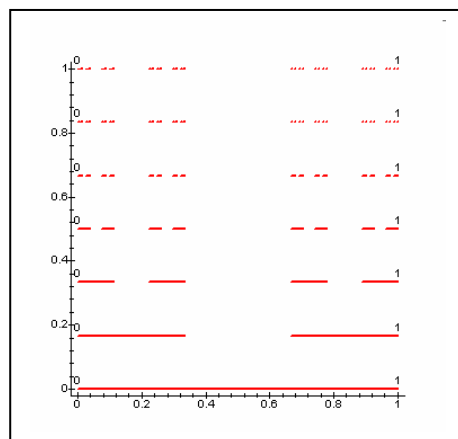


FIG. VI-3 étapes jumelées de la construction de l'ensemble de Cantor

La longueur apparente L_0 étant supposée unitaire ($L_0 = 1$), l'application de la méthode des diviseurs dans le calcul de la dimension fractale de l'ensemble de Cantor obéit au tableau VI-1 suivant:

Etape de construction	Pas élémentaire de mesure ε	$\log(\varepsilon)$	Longueur mesurée $L(\varepsilon)$	$\log[L(\varepsilon)]$
0	1	0	$L(1) = 1$	0
1	1/3	-0.477	$L(1/3) = 2/3$	-0.176
2	1/9	-0.954	$L(1/9) = 4/9$	-0.352
3	1/27	-1.431	$L(1/27) = 8/27$	-0.528

tableau VI-1 méthode des diviseurs appliquée à l'ensemble fractal de Cantor - estimation de $\log(\varepsilon)$ et de $\log[L(\varepsilon)]$

La droite de régression linéaire (figure VI-4) tracée dans l'échelle $(\log(\varepsilon), \log[L(\varepsilon)])$ admet pour équation : $\log[L(\varepsilon)] = 0.36897 \log(\varepsilon)$ mettant donc en évidence une pente $p = 0.36897$. Nous déduisons donc la dimension fractale en écrivant $D = 1 - p = 0.63103$.

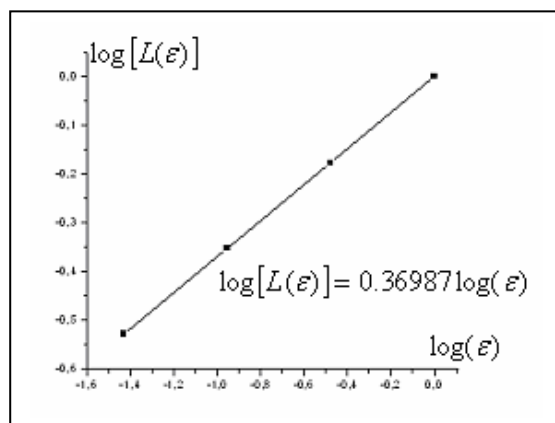


fig. VI-4 détermination graphique de la dimension fractale de l'ensemble de Cantor

IV- DIMENSION DE CAPACITE OU "DIMENSION DE BOITE" (box counting dimension)

IV-1 PRINCIPE

La "dimension de boîte" plus généralement dénommée dimension de capacité est certainement la plus simple et la plus immédiate des dimensions fractales. Il est souvent fait appel à ce type de dimension pour caractériser des ensembles (en fait fractales) ou en théorie des systèmes dynamiques, les attracteurs étranges soupçonnés de ne pas disposer d'une dimension entière. Dans la pratique, la dimension de capacité est associée dans sa mise en œuvre aux méthodes dites de diviseurs que nous exposerons ci-dessous accompagnée d'un exemple d'application.

Supposons que nous disposons d'un ensemble de dimension topologique d que l'on souhaiterait "recouvrir" par une grille dont la configuration est en rapport avec cette dimension topologique (figure VI-5): si $d = 2$, l'élément unité de la grille est un carré alors que $d = 1$ il a la configuration d'un intervalle de longueur ε . Le calcul de la dimension de capacité D_c revient à évaluer le nombre $N(\varepsilon)$ d'éléments de la grille nécessaires pour effectuer le recouvrement de l'ensemble considéré. Cette opération sera effectuée en rendant aussi petite que possible la "longueur" ε . La dimension de capacité D_c est alors obtenue comme la limite

$$D_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log[N(\varepsilon)]}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad (\text{VI-13})$$

IV-2 ETUDE DE QUELQUES CAS A TOPOLOGIE SIMPLE:

La validité de l'expression (VI-13) peut être confirmée dans le calcul des dimensions topologiques de corps simples :

- dimension de capacité d'un point (figure VI-5 (a)): il est évident que dans ce cas $N(\varepsilon) = 1$ ce qui conduit à $D_c = D_F = 0$
- dimension de capacité d'une courbe de longueur L (figure VI-5(b)): le nombre de "boîtes" de recouvrement de dimension ε étant $N(\varepsilon) = L/\varepsilon$ et pour $\varepsilon \rightarrow 0$: $D_c = D_F = 1$
- cas d'une courbe fermée (figure VI-5 (c)): nous sommes donc en présence d'une surface S nécessitant S/ε^2 boîtes de recouvrement, donc pour $\varepsilon \rightarrow 0$, $D_c = D_F = 2$.

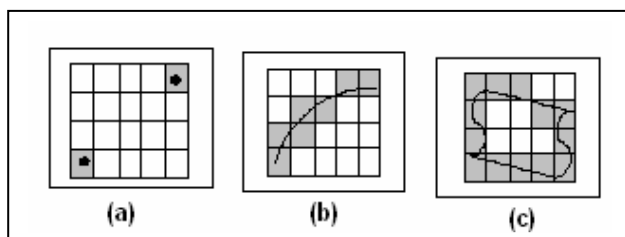


fig. VI-5 la dimension de capacité (box counting) de figures simples (a) un point (b) une courbe (c) une courbe fermée

IV-3 CALCUL PRATIQUE DE LA DIMENSION DE CAPACITE : CAS DE LA COURBE DE KOCH (fig. VI-7)

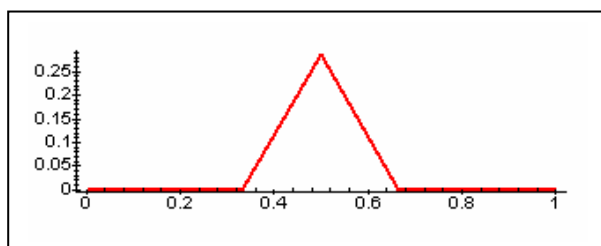


fig. VI-6 le modèle générateur de la courbe de Van-Koch

Nous avons déjà exprimé la dimension fractale D_F de la courbe de Koch en écrivant

$$D_F = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1.261859507$$

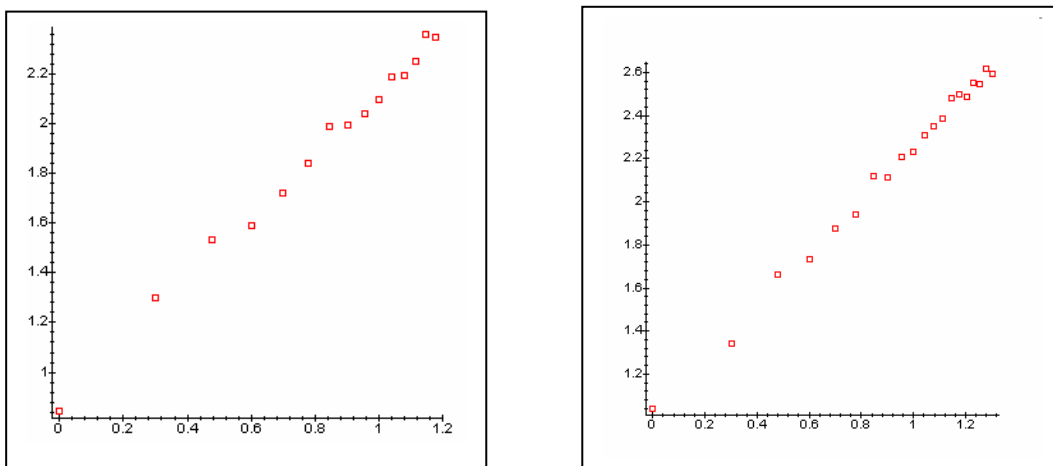
Deux niveaux de construction (nc) du fractale ont été retenus : $nc_1 = 15$ et $nc_2 = 20$. Le nombre de boîtes de recouvrement du fractale de Koch (tableau VI-2) sera estimé à chaque niveau de construction pour mettre en évidence son évolution relativement à la longueur de la courbe résultante.

Niveau de construction $nc_1 = 15$	Nombre de boîtes de recouvrement
1	50
2	200
3	450
4	800
5	1250
6	1800
7	2450
8	3200
9	4050
10	5000
11	6050
12	7200
13	8450
14	9800
15	11250

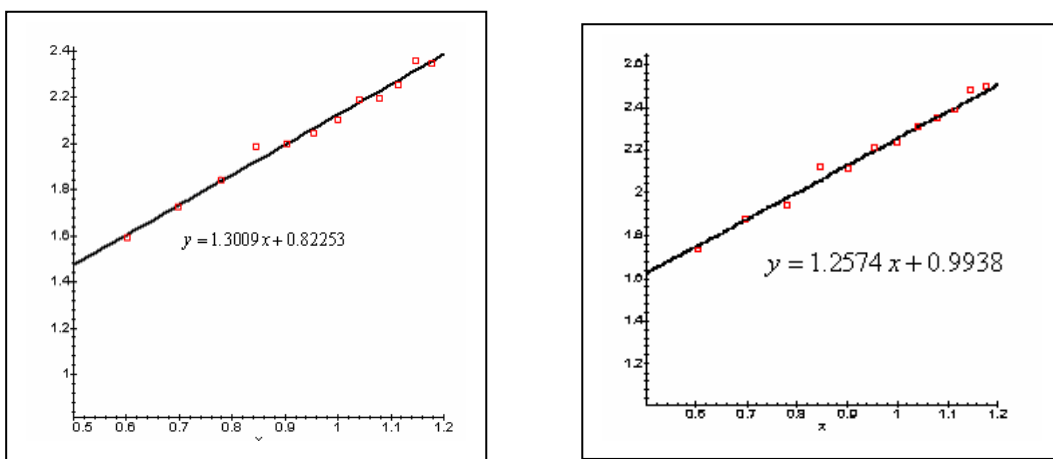
Niveau de construction $nc_2 = 20$	Nombre de boîtes de recouvrement
1	75
2	300
3	675
4	1200
5	1875
6	2700
7	3675
8	4800
9	6075
10	7500
11	9075
12	10800
13	12675
14	14700
15	16875
16	19200
17	21675
18	24300
19	27075
20	30000

tableau VI-2 tableaux comparatifs du nombre de boîtes de recouvrement en fonction du niveau de construction dans la courbe de Van Koch

Une première analyse des deux tableaux révèle que le nombre de "boites" de recouvrement dans le cas où le nombre de niveaux $nc_2 = 20$ n'est nullement le prolongement de celui du cas où $nc_1 = 15$. Ceci sous-entend que le niveau de construction fixé *a priori* influe sur le décompte final du nombre de "boites" de recouvrement et partant de la dimension fractale qui en découle. A cet effet, il est représenté sur les figures VI-7 (a) et (b) la distribution des points de coordonnées $(x = \log 1/\varepsilon, y = \log N(\varepsilon))$ respectivement pour $nc_1 = 15$ et $nc_2 = 20$. Pour chaque cas, une droite de régression est calculée (figures VI-8). Les pentes respectives définissent alors une approximation de la dimension fractale pour le niveau de construction nc préalablement fixé. Ainsi, pour $nc_1 = 15$, la droite de régression admet pour équation $y = 1.3009x + 0.8225$ (figure VI-9 (a)) conduisant donc à une dimension fractale $D_{F_1} \approx 1.2574$. Pour $nc_2 = 20$, l'équation est de la forme $y = 1.2574x + 0.9938$ (figure VI-9 (b)) donc pour une dimension fractale approchée $D_{F_2} \approx 1.2574$ voisine de la dimension fractale réelle calculée soit $D_F = 1.26185$.



(a) (b)
fig. VI-7 distribution des points $[x = \log(1/\varepsilon), y = \log N(\varepsilon)]$



(a) (b)
fig. VI-8 estimation de la dimension de capacité à partir des pentes des droites de régression (a) $D_c = 1.3009$ (b) $D_c = 1.2574$

Il apparaît donc que plus le nombre de niveaux de construction est élevé, plus le nombre de "boîtes" de recouvrement est élevé impliquant par le fait une diminution des dimensions de ces dernières. La dimension fractale bénéficie alors d'une meilleure approximation.

IV-4 CALCUL DE LA DIMENSION DE BOITE DANS UN PROCESSUS D'ITERATION

La figure VI-9 représente un processus de construction fractale s'étalant sur quatre niveaux en partant d'un modèle source relativement simple (niveau =1). Nous remarquons la vitesse de complexification du procédé et sa convergence vers une image réellement expressive (niveau =6). Il est possible de prolonger les niveaux d'itération au détriment d'une bonne lisibilité et d'une meilleure résolution graphiques.

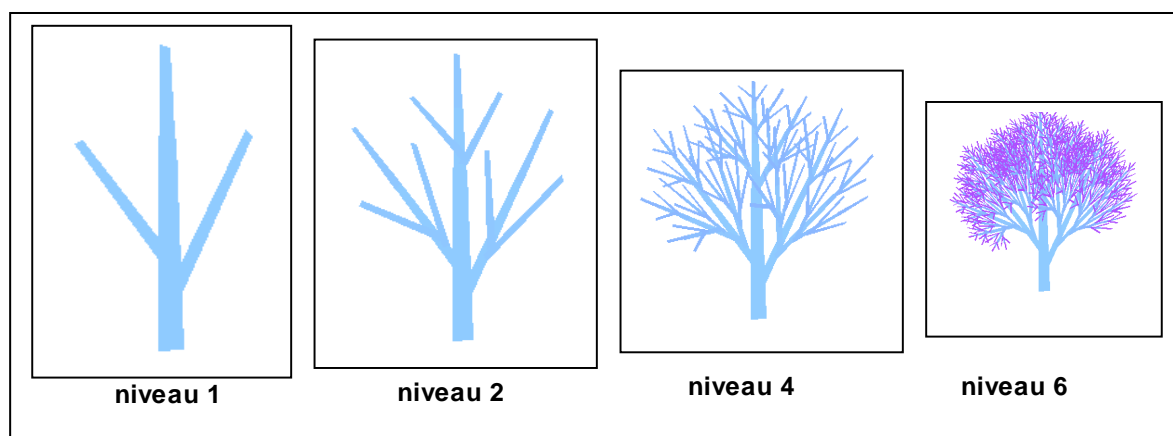


fig. VI-9 une image fractale par niveaux d'itérations

En ne retenant que l'objet obtenu au niveau 6, nous en estimons la dimension de capacité (ou de boîte) par des tests portant sur les dimensions des boîtes de recouvrement. Le procédé repose en fait sur le décompte de boîtes ayant une intersection avec le modèle fractal. Quatre tailles ont été testées, chacune rendant compte de la dimension fractale correspondante (figure VI-10). La moyenne des autres valeurs obtenues sera représentative de la dimension fractale de l'objet soit $D_c = 1.829509$.

Comme pour confirmer le développement théorique, la valeur approximant le mieux cette dimension est celle correspondant à une taille de boîtes relativement réduite pour laquelle $D_c = 1.811883$.

La dimension de boîte peut être interprétée comme un indice de complexité d'une figure: une figure fractale est d'autant plus complexe que cette dimension est élevée. Nous reprenons les figures obtenues pour chaque niveau d'itération (figure V-10). Les estimations des dimensions fractales sont :

- niveau 1: les boîtes de recouvrement de dimension géométrique "grossière" aboutissent à une dimension box counting $D_{f_1} = 1.79307$

- niveau 2: pour une dimension géométrique des boîtes de recouvrement plus affinée comparée au niveau 1 aboutit à une dimension de boîte $D_{f_2} = 1.874287$. Nous verrons au cours des deux niveaux de calculs restant, que D_{f_2} se rapproche de la dimension de boîte finale estimée

- niveau 3 : la dimension de boîte estimée est $D_{f_3} = 1.838796$

- niveau 4 : probablement le cas le plus favorable eu égard au recouvrement très fin de l'objet par des boîtes de dimension géométrique réduite. L'estimation de la dimension de boîte ne peut être que mieux approchée : $D_{f_4} = 1.811883$.

Sans être un mode de calcul impératif, l'estimation de la dimension de boîte correspondant à l'objet (figure VI-9 niveau 6) pourrait être obtenue comme la moyenne des quatre dimensions ci-dessus calculées :

$$D_f = \frac{D_{f_1} + D_{f_2} + D_{f_3} + D_{f_4}}{4} = 1.829509$$

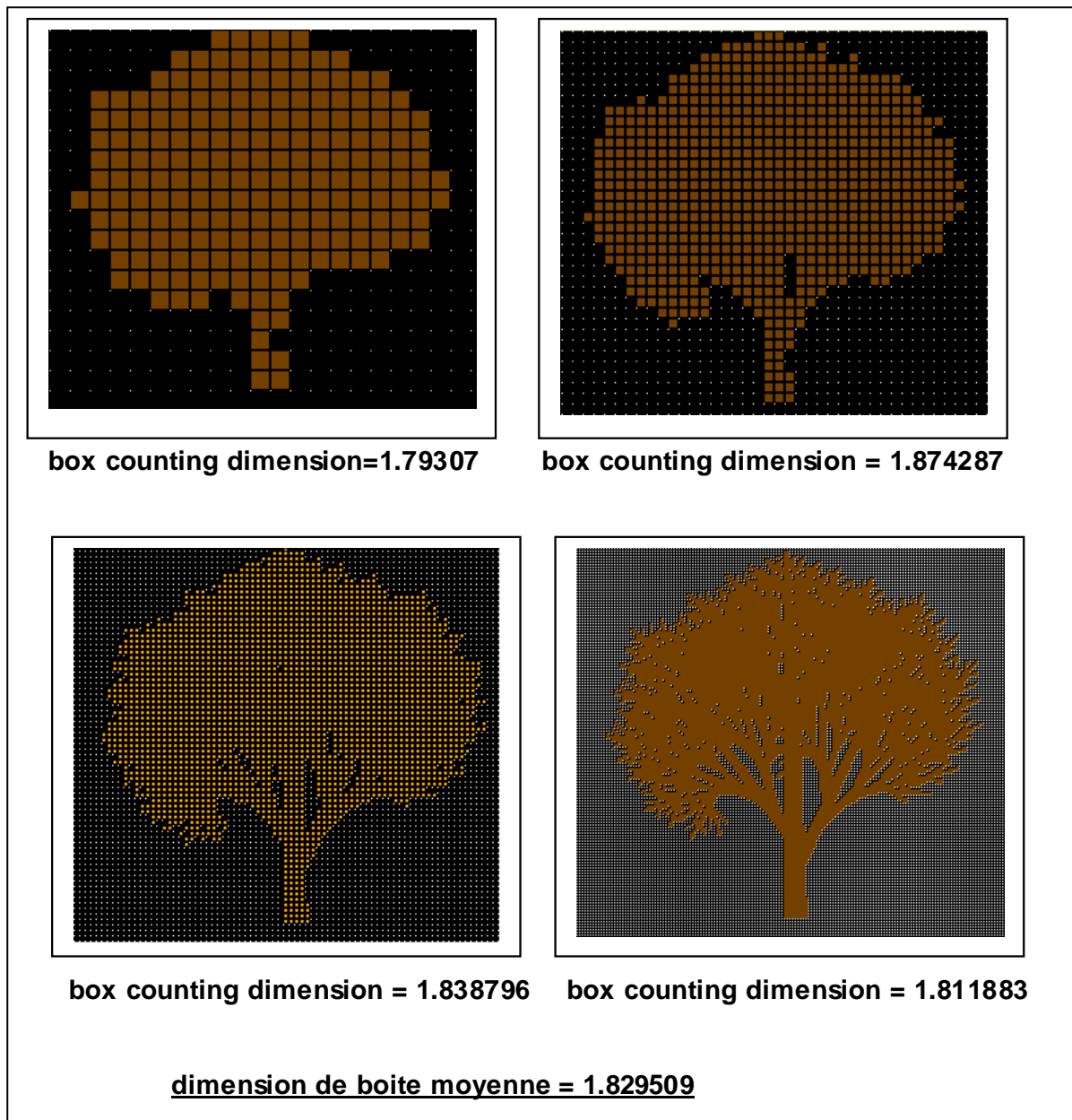


fig. VI-10 influence de la taille des boites de recouvrement sur le calcul de la dimension fractale

V- LA DIMENSION DE HAUSDORFF

V-1 MESURE DE HAUSDORFF

La pertinence et la représentativité de la dimension de Hausdorff en font de cette dernière le paramètre "fractal" le plus étudié mathématiquement mais dont l'évaluation explicite est moins évidente. La dimension de Hausdorff figure parmi la dimension fractale la plus répandue mais aussi la moins calculée. Sa définition repose sur des critères topologiques de l'espace d'analyse ou de référence dont la notion de métrique, de diamètre et de recouvrement.

Partant d'un espace métrique que l'on peut identifier à l'ensemble \mathcal{R}^{D_t} , D_t étant la dimension topologique, on définit le diamètre $|E|$ d'une partie E non vide de cet espace par

$$\forall (X, Y) \in E^2, |E| = \sup |X - Y| \quad (\text{VI-14})$$

Nous désignons par $\{S_i\}_{i \in I}$ une suite dénombrable de sous-ensembles appartenant à l'ensemble fondamental et de diamètre ε_i et vérifiant la condition $\forall i \in I \quad 0 < |S_i| \leq \varepsilon$. On suppose en outre que la suite assure $\{S_i\}_{i \in \mathcal{N}}$ assure un ε -recouvrement ou pavage de l'ensemble E i.e. $E \subset \bigcup_{i \in I} S_i$. On

définit la quantité $\mathcal{H}_\varepsilon^\alpha(E)$ par

$$\mathcal{H}_\varepsilon^\alpha(E) = \inf_{S_i} \left(\sum_{i \in I} |S_i|^\alpha \right) \quad (\text{VI-15})$$

avec ε et α deux paramètres positifs. La fonction $\mathcal{H}_\varepsilon^\alpha(E)$ est décroissante et admet donc une limite en 0.

Il est défini en outre la fonction $\mathcal{H}^\alpha(E)$ comme la limite

$$\mathcal{H}^\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon^\alpha(E) \quad (\text{VI-16})$$

soit

$$\mathcal{H}^\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\inf_{S_i} \left(\sum_{i \in I} |S_i|^\alpha \right) \right] \quad (\text{VI-17})$$

La limite (VI-16) peut être éventuellement nulle ou infinie; elle définit la mesure de Hausdorff α -dimensionnelle. Il découle alors de cette définition et de (VI-17) que

$$\mathcal{H}^\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon^\alpha(E) = \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_\varepsilon^\alpha(E) \quad (\text{VI-18})$$

Nous avons la propriété importante suivante de la mesure de Hausdorff: pour $\alpha_0 \geq 0$, avec $\mathcal{H}^{\alpha_0} < +\infty$, alors pour tout réel positif α tel $\alpha > \alpha_0$ nous avons $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0$ que et partant de l'expression (VI-15) et des conditions posées sur le ε -recouvrement, nous avons l'encadrement suivant

$$0 \leq \mathcal{H}_\varepsilon^\alpha(E) \leq \sum_{i \in I} |S_i|^\alpha \leq \varepsilon^{\alpha - \alpha_0} \sum_{i \in I} |S_i|^{\alpha_0} \quad (\text{VI-19})$$

Après passage à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$, l'expression (VI-19) permet donc de confirmer que $\mathcal{H}_\varepsilon^\alpha(E)$ admet bien une limite en 0.

V-2 DIMENSION DE HAUSDORFF

D'après la propriété précédente, illustrée par l'expression (VI-19), nous avons par la figure VI-11, il existe un paramètre positif unique α_0 permettant d'avoir

$$\mathcal{H}^\alpha(E) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \in [0, \alpha_0] \\ 0 & \text{si } \alpha > \alpha_0 \end{cases} \quad (\text{VI-20})$$

Cette valeur limite α_0 définit la dimension de Hausdorff D_H de l'ensemble E et que nous notons $D_H(E)$.

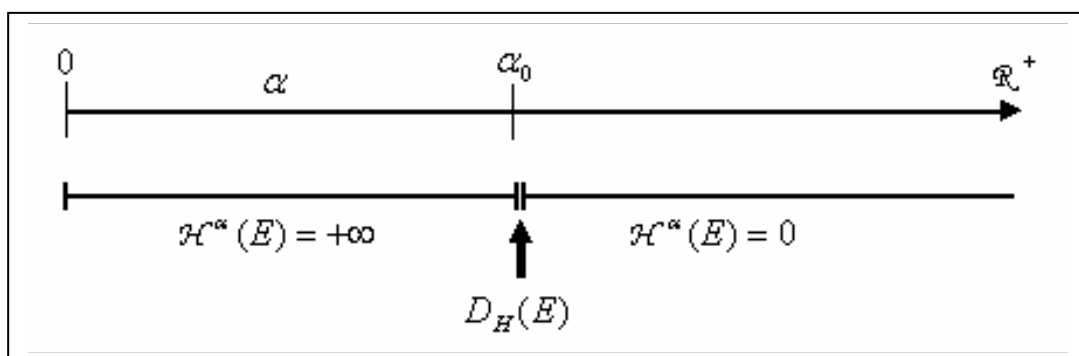


fig. VI-11 mesure et dimension de Hausdorff

Nous citons deux propriétés de la dimension de Hausdorff :

1. si $E = \bigcup_n E_n$ alors $D_H(E) = \sup_n [D_H(E_n)]$ (VI-21)

2. Comparaison dimension de boîte (box counting dimension) est dimension de Hausdorff
 Considérons un espace de dimension d sur lequel est réalisé un ε -recouvrement. La masse d'une boule compacte de rayon ε varie comme ε^d . Si $N(\varepsilon)$ représente le nombre de boules de rayon ε_i inférieur à ε pour effectuer un tel recouvrement, on définit la masse \mathcal{M}_d de ce dernier par l'approximation

$$\mathcal{M}_d \approx N(\varepsilon)\varepsilon^d \quad (\text{VI-22})$$

Nous pouvons introduire la dimension fractale D_F (ou D_c) et déduire de l'expression (VI-13) en considérant l'approximation suivante

$$N(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D_F} \quad (\text{VI-23})$$

Pour $\varepsilon \rightarrow 0$, la masse de recouvrement \mathcal{M}_d est approchée comme suit

$$\mathcal{M}_d \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\approx} \varepsilon^{d-D_F} \quad (\text{VI-24})$$

La mesure de Hausdorff est alors obtenue en optimisant la masse de recouvrement, c'est-à-dire en allégeant les conditions posées sur les rayons des boules de recouvrement en ne retenant que la condition que leur rayon est au plus égal à ε . La mesure de Hausdorff est alors définie par

$$\mathcal{M}_d(\varepsilon) = \inf \left(\sum_i \varepsilon_i^d \right) \text{ avec } \varepsilon_i < \varepsilon \quad (\text{VI-24})$$

L'expression (VI-24) ressemble dans sa forme à celle de la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}_\varepsilon^\alpha(E)$ donnée en (VI-15). Il y a donc une analogie entre masse de recouvrement et mesure de Hausdorff

$$\mathcal{H}_\varepsilon^\alpha(E) \approx \varepsilon^{\alpha-D_F} \quad (\text{VI-25})$$

En terme de limites

$$\mathcal{H}^\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\alpha-D_F} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < D_F \\ 0 & \text{si } \alpha > D_F \end{cases} \quad (\text{VI-26})$$

Nous nous retrouvons dans la situation de l'expression (VI-15) dans laquelle D_F serait assimilé à α_0 . La dimension de Hausdorff étant unique, la dimension fractale ne pourrait avoir se statut, donc nécessairement $D_H \neq D_F$. Le cas $D_F > D_H$ a toutes les faveurs en vertu de l'égalité (VI-18) et la dimension fractale D_F représente la limite supérieure de la dimension de la dimension de Hausdorff

V-3 UN EXEMPLE D'ILLUSTRATION DE LA DIMENSION DE HAUSDORFF

Nous disposons d'un objet de dimension de Hausdorff D_H inconnue que nous recouvrons par des "boîtes" de dimension D connue *a priori*. La nature de l'objet conditionne le choix de la nature de la "boîte" étalon. Dans le cas d'une sphère, il est naturel d'opter pour une "boîte" de dimension 3 par exemple (une boîte qui contiendrait une sphère). Deux cas sont à envisager

- posons $D = D_1$ avec $D_1 < D_H$ (taille de l'objet supérieure à la taille du contenant), le nombre de boîtes nécessaire au "couvrement" est alors infini
- posons $D = D_2$ avec $D_2 > D_H$, le nombre de boîtes utilisables pour une détermination exacte de D_H est nul (trop de vide entre l'objet et le contenant).

La dimension de Hausdorff D_H de l'objet est donc telle que $D_1 < D_H < D_2$.

L'exemple suivant reprend le principe de la dimension de Hausdorff telle que développé ci-dessus: supposons que nous ayons à déterminer la dimension de Hausdorff d'une feuille de papier.

Par test, nous engageons un recouvrement de cette feuille par des "boîtes" de dimension 3. La feuille étant dépourvue d'épaisseur, ce recouvrement met en évidence des espaces vides; le nombre de boîtes nécessaire pour "recouvrir" toute la feuille est donc égal à 0.

La seconde alternative serait de choisir un recouvrement par une "boîte" de dimension 1, en fait par des lignes. Ceci conduit à un alignement infini et serré de celles-ci et la feuille en sera ainsi entièrement "couverte". Nous déduisons donc que la dimension de Hausdorff D_H d'une feuille est comprise entre 1 et 3. En fait nous avons $D_H = 2$

Précisons que ces procédés d'estimation de la dimension de Hausdorff sont relatifs aux "objets" de type fractale. Dans le cas contraire, la dimension de Hausdorff coïncide avec la dimension topologique de l'objet.

VI -DIMENSION PONCTUELLE

Cet autre concept de dimension fractale, la dimension ponctuelle $D_p(X)$ est particulièrement adapté pour l'étude des attracteurs étranges développés dans un système dynamique. Sa définition repose sur l'introduction du critère de mesure de probabilité μ d'un point X pris sur l'attracteur. Soit $B(X, \varepsilon)$ une boule compacte de rayon ε , centrée en X , nous avons alors approximativement

$$\mu B(X, \varepsilon) \approx \varepsilon^{D_p} \quad (\text{VI-27})$$

La dimension ponctuelle D_p répond au calcul de la limite suivante

$$D_p(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu[B(X, \varepsilon)]}{\log(\varepsilon)} \tag{VI-28}$$

Propriété : si la mesure de probabilité μ est ergodique, alors la dimension ponctuelle prend une valeur commune \bar{D}_p indépendamment du point X considéré sur l'attracteur. Pour X fixé (centre d'une boule donnée $B(X, \varepsilon)$), définissons une application M telle que $M(X) = X'$. Nous disposons ainsi de deux dimensions ponctuelles $D_p(X)$ et $D_p(X')$ telle que

$$D_p(X') = D_p[M(x)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu[B(X', \varepsilon)]}{\log(\varepsilon)} \tag{VI-29}$$

Sous l'action de l'application M et à la première itération, les dimensions ponctuelles en X et à sa première itération sont identiques ce que nous traduisons en écrivant

$$\mu[B(X, \varepsilon)] = \mu\{M[B(X, \varepsilon)]\} \tag{VI-30}$$

Pour ε assez petit, la "région" coloriée en bleu (figure VI-12 (a)) de $B(X, \varepsilon)$ admet pour image par M la forme ellipsoïdale de même couleur (figure VI-12 (b)) de centre X' . Considérons en outre deux constantes positives r_1 et r_2 telles que $r_2 > r_1$. On construit deux nouvelles boules concentriques à la forme ellipsoïdale, la première de rayon $r_1\varepsilon$ contenue dans cette dernière, la seconde de rayon $r_2\varepsilon$ renfermant cette même forme ellipsoïdale.

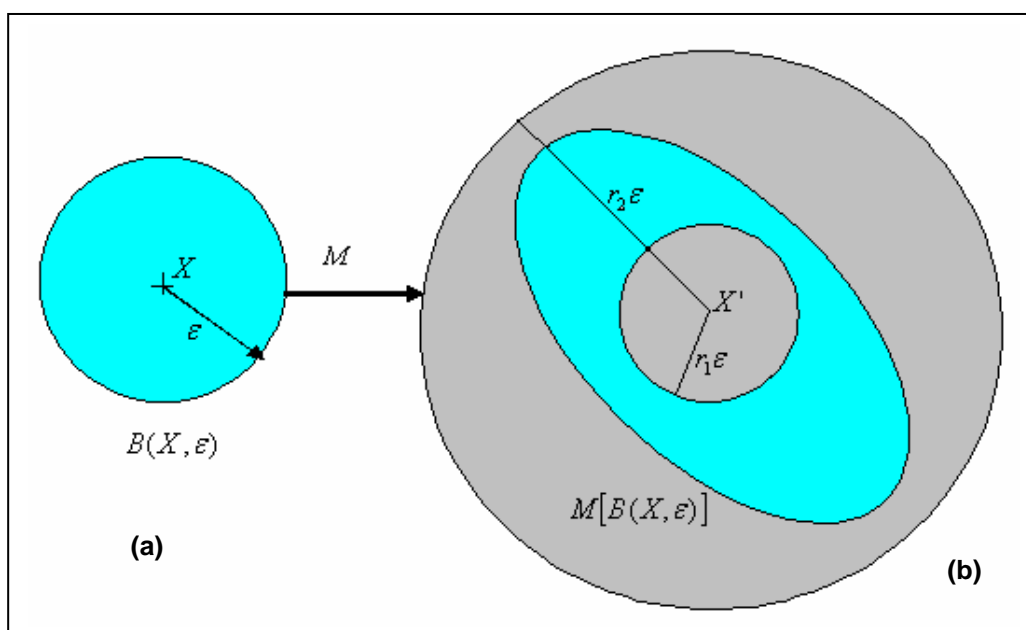


fig. VI-12 image de la boule $B(X, \varepsilon)$ par l'application M

Nous traduisons ces différents cas par l'expression

$$\mu[B(X', r_1\varepsilon)] \leq \mu\{M[B(X, \varepsilon)]\} = \mu[B(X, \varepsilon)] \leq \mu[B(X', r_2\varepsilon)] \tag{VI-31}$$

L'application de la définition de la dimension ponctuelle exprimée par (VI-28) aboutit à l'encadrement

$$D_p(X') \leq D_p(X) \leq D_p(X') \Rightarrow D_p(X') = D_p(X) = \bar{D}_p \quad (\text{VI-32})$$

VII- FONCTION TEMPS DE SEJOUR - CARACTERISATION D'UN ATTRACTEUR PAR UNE MESURE

Pour bien comprendre les propriétés d'un attracteur entre autres de type fractale personnalisé par la "migration" au moins temporaire des trajectoires issues de l'évolution dans le temps d'un système dynamique, il y a lieu de tenir compte non seulement de la géométrie de l'attracteur lui-même mais aussi de la "distribution" des points qui le garnissent. Cette dernière s'apparente donc à une forme de densité. Dans ce contexte on élabore une préférence probabiliste de visite de certaines régions de l'attracteur par les trajectoires de phase. On introduit en fait une mesure de probabilité sur l'attracteur. La plus connue est la mesure naturelle qui exprime la répartition du temps de séjour d'une trajectoire dans l'attracteur. Ceci signifie que la mesure naturelle dépend non seulement de la trajectoire de phase considérée mais aussi de la condition dont elle en est issue.

VII-1 DENSITE NATURELLE INVARIANTE ET TEMPS DE SEJOUR

Plusieurs définitions sont proposées pour représenter cette fonction de temps moyen de séjour d'une trajectoire dans un attracteur. Ainsi dans le cas de la fonction logistique pour laquelle on avait défini la densité naturelle invariante uniforme $\rho(X)$, pour un intervalle $[a, b] \subset [0, 1]$, la fraction de temps de séjour d'une orbite dans l'intervalle $[a, b]$ est donnée par l'intégrale définie $\int_a^b \rho(X) dX$. Ainsi dans le cas de la fonction logistique et pour $r = 4$, la densité naturelle invariante $\rho(X)$ était donnée sous la forme $\rho(X) = (1/\pi)(x(1-x))^{-1/2}$, la fonction de séjour d'une orbite dans l'intervalle $[a, b]$ est telle que

$$\int_a^b \rho(X) dX = \frac{1}{\pi} [\arcsin(2b-1) - \arcsin(2a-1)] \quad (\text{VI-33})$$

Pour $a = X_c - \varepsilon$ et $b = X_c + \varepsilon$, on note $I_\varepsilon(X_c) = [X_c - \varepsilon, X_c + \varepsilon]$, la fonction de séjour définit alors la mesure naturelle de l'intervalle $I_\varepsilon(X_c)$; notée $\mu[I_\varepsilon(X_c)]$, elle admet pour expression

$$\mu[I_\varepsilon(X_c)] = \frac{1}{\pi} [\arcsin(2X_c + 2\varepsilon - 1) - \arcsin(2X_c - 2\varepsilon - 1)] \quad (\text{VI-34})$$

Nous étudions le cas particulier pour un intervalle $[a, b]$ centrée sur la valeur critique $X_c = 1/2$ en ce sens que nous posons $a = 0.52 - \varepsilon$ et $b = 0.5 + \varepsilon$. La mesure naturelle de l'intervalle $I_\varepsilon(0.5)$ est alors

$$\mu[I_\varepsilon(0.5)] = \frac{2}{\pi} \arcsin(2\varepsilon) \quad (\text{VI-35})$$

Pour ε très petit, nous avons l'équivalence $\mu[I_\varepsilon(0.5)] \approx \varepsilon$, autrement dit la mesure naturelle varie dans le sens de ε .

VII- 2 ESTIMATION DE LA DENSITE AU COURS D'UN PROCESSUS ITERATIF

Supposons que le choix des conditions initiales porte sur un nombre infini de valeurs réparties le long de l'axe X avec une densité uniforme $\rho_0(X)$. Par rapport à un intervalle quelconque $[a, b]$ de cet axe, on définit la fraction de ces conditions initiales contenues dans cet intervalle comme la fraction de temps de séjour $\int_a^b \rho_0(X) dX$. On construit une application M qui, appliquée sur ces conditions

initiales va fournir par itération une famille de densités $\{\rho_i\}_{i \geq 1}$ construite selon le principe suivant: par M , il naît une densité $\rho_1(X)$, par M^2 une nouvelle densité $\rho_2(X)$ et ainsi de suite. En introduisant le temps d'évolution du processus qui, aux instants n et $n+1$ définit respectivement les densités ρ_n et ρ_{n+1} telles que

$$\rho_{n+1}(X) = \int \rho_n(Y) \delta[X - M(Y)] dY \quad (\text{VI-36})$$

Le facteur $\delta[X - M(Y)]$ représente la distribution singulière de Dirac nulle partout sauf dans la direction $M(Y) = X$. Si dans l'expression (VI-3-), nous posons $\rho_{n+1}(X) = \rho_n(X) = \rho(X)$, nous obtenons l'équation de Frobenius-Peron qui, dans le cadre des hypothèses posées permet d'exprimer la densité naturelle invariante $\rho(X)$ telle que

$$\rho(X) = \int \rho(Y) \delta[X - M(Y)] dY \quad (\text{VI-37})$$

Pour expliciter la fonction de Dirac $\delta[X - M(Y)]$, rappelons le résultat démontrable suivant

$$\delta[S(t)] = \sum_i \frac{\delta(t - t_i)}{|S'(t_i)|} \quad \text{avec } S'(t_i) \neq 0 \quad (\text{VI-38})$$

avec t_i racines de la fonction $S(t)$. Ceci conduit donc à écrire en désignant par Y_i les zéros de l'équation $M(Y) = X$

$$\delta[X - M(Y)] = \sum_i \frac{\delta(Y - Y_i)}{|M'(Y_i)|} \quad (\text{VI-39})$$

L'expression (VI-37) devient alors

$$\rho(X) = \int \rho(Y) \cdot \sum_i \frac{\delta(Y - Y_i)}{|M'(Y_i)|} dY \quad (\text{VI-40})$$

De façon équivalente

$$\rho(X) = \sum_i \frac{1}{|M'(Y_i)|} \int \rho(Y) \cdot \delta(Y - Y_i) dY \quad (\text{VI-41})$$

Rappelons les deux propriétés de la distribution singulière de Dirac suivantes

$$\begin{cases} \rho(Y) \delta(Y - Y_i) = \rho(Y_i) \delta(Y - Y_i) \\ \int \delta(Y - Y_i) dY = 1 \end{cases} \quad (\text{VI-42})$$

La densité naturelle invariante $\rho(X)$ admet donc pour expression

$$\rho(X) = \sum_i \frac{\rho(Y_i)}{|M'(Y_i)|} \tag{VI-43}$$

L'expression (VI-43) peut être interprétée comme suit : si X et $X + dX$ désignent deux états considérés dans le temps aux instants n et $n + 1$ respectivement, alors ces deux derniers proviennent de l'intervalle $[Y_i, Y_i + dY_i]$ avec Y_i solution de l'équation $M(Y) = X$. La densité $\rho_{n+1}(X)$ des points d'une orbite dans l'intervalle $[X, X + dX]$ à l'instant $n + 1$ est reliée à la densité $\rho_n(X)$ connue à l'instant n par

$$\rho_{n+1}(X) = \sum_i \frac{\rho_n(Y_i)}{|M'(Y_i)|} \tag{VI-44}$$

VIII- MESURE ET SPECTRE DE DIMENSION

Nous supposons vouloir "couvrir" un attracteur étrange issu d'une dynamique chaotique par un ensemble de cubes (jauges) comme dans le cas de la procédure de la détermination de la dimension de capacité. Les orbites naissantes seront caractérisées par les "fréquences" de visite des cubes de couverture de l'attracteur principalement dans le cas où la longueur de ces orbites tend vers l'infini. Si ces fréquences de visite sont les mêmes quelques soient les conditions initiales dont dépend la structure présente de l'attracteur, elles définiront alors la dimension (mesure) naturelle d'un cube quelconque C_i par

$$\mu_i = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\eta(C_i, T, X_0)}{T} \tag{VI-45}$$

avec

- T la durée d'observation
- $\eta(C_i, T, X_0)$ fonction indiquant le temps pour qu'une orbite issue du point X_0 fréquente le cube C_i pendant le temps $0 \leq t \leq T$.

La dimension de capacité donne l'échelle du nombre de cubes (boîtes) nécessaires pour couvrir l'attracteur. Dans le cas d'un attracteur étrange, la fréquence de "visite" varie d'un cube à un autre. Pour une petite dimension ε d'un cube, il est naturel que seul un faible pourcentage des cubes nécessaires pour le recouvrement de l'attracteur contient une large part de la mesure naturelle sur l'attracteur. La dimension de capacité ne définit que le nombre de cubes nécessaire pour couvrir l'attracteur sans tenir compte de l'importance d'un cube par rapport à un autre ou de la fréquence "de visite" d'un cube par une orbite. On peut alors donner une définition généralisée de la dimension de capacité ; c'est la dimension D_q introduite par Grassberger (1983), dépendant de l'indice q , elle est définie par

$$D_q = \frac{1}{1-q} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log I(q, \varepsilon)}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \tag{VI-46}$$

avec

$$I(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu_i^q \tag{VI-47}$$

$N(\varepsilon)$ désignant le nombre de cubes d'arête ε nécessaire pour couvrir la totalité de l'attracteur. Remarquons que si $q = 0$ alors $I(0, \varepsilon) = N(\varepsilon)$ et nous obtenons

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad (VI-48)$$

Cas particulier : si toutes les mesures naturelles μ_i sont égales, donc indépendantes de l'indice i , alors $\mu_i = \frac{1}{N(\varepsilon)}$. L'expression (VI-47) devient dans ce cas

$$I(q, \varepsilon) = \frac{1}{[N(\varepsilon)]^{q-1}} \quad (VI-49)$$

En considérant le logarithme des deux membres de (VI-49), il vient

$$\log I(q, \varepsilon) = (1 - q) \log N(\varepsilon) \quad (VI-50)$$

Par application de (VI-46), la dimension D_q correspondante s'écrit

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad (VI-51)$$

Nous retrouvons ainsi la dimension de capacité indépendante de q mais sous l'hypothèse que la mesure μ_i est indépendante de l'indice i .

Propriété : prise comme une fonction de q , la dimension D_q est décroissante i.e. si $q_1 < q_2$ alors $D_{q_1} \geq D_{q_2}$. Ainsi pour chaque valeur fixée de q , il est possible d'en déduire une limite inférieure de la dimension D_q correspondante.

IX- DETERMINATION PRATIQUE DE LA DIMENSION GENERALISEE D_q

La détermination de la dimension D_q ne peut être que numérique. Divers algorithmes ont été proposés :

- générer une orbite de longueur (temporelle) T sur l'attracteur
- relever le temps mis par cette orbite pour parcourir la structure de cubes dans la couverture de l'attracteur
- calculer ainsi $I_T(q, \varepsilon)$ qui sera une approximation de $I(q, \varepsilon)$
- représenter graphiquement $\log[I_T(q, \varepsilon)]$ en fonction de $\log(\varepsilon)$. Approximativement le graphe sera une droite (Δ)
- partant de la définition donnée en (VI-46), nous pouvons écrire : $D_q \approx \frac{\text{pentede}(\Delta)}{q-1}$

X-DIMENSION D'INFORMATION

Partant de (VI-46), posons

$$D_1 = \lim_{q \rightarrow 1} D_q = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{1-q} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log I(q, \varepsilon)}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \right] \quad (VI-52)$$

En intervertissant l'ordre de calcul des limites figurant dans (VI-52) et en introduisant l'expression (VI-47) donnant $I(q, \varepsilon)$, on est amenés à écrire

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log \varepsilon} \frac{\log \left[\lim_{q \rightarrow 1} \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu_i^q \right]}{\lim_{q \rightarrow 1} (q-1)} \quad (VI-53)$$

La limite la plus interne de (VI-53) présente une forme indéterminée si nous admettons que $\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu_i = 1$ autrement dit la somme des mesures naturelles pour l'ensemble du recouvrement est égale à l'unité. D'ailleurs, il est souvent considéré dans la pratique que la mesure μ_i n'est autre que la probabilité p_i d'occupation du cube (ou cellule) i . Pour lever la forme indéterminée mentionnée, on applique la règle de l'Hospital par rapport à la variable q , ce qui conduit à écrire

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu_i \log \mu_i}{\log \varepsilon} \quad (VI-54)$$

La quantité D_1 ainsi calculée par (VI-54) est appelée densité d'information.

Si la mesure naturelle μ_i est assimilée à la probabilité p_i d'occupation d'une cellule quelconque i , la densité d'information est dite dimension d'information notée toujours D_1 telle que

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \log p_i}{\log \varepsilon} \quad (VI-55)$$

Remarquons que puisque la dimension fractale généralisée est décroissante par rapport à q , nous avons alors $D_0 \geq D_1$, c'est-à-dire que la dimension de capacité est supérieure à la dimension d'information.

XI- LA DIMENSION DE CORRELATION

Avec la dimension de capacité, la dimension de corrélation est certainement la plus considérée tant elle est adaptée à l'analyse des agrégats ou des distributions de points et pour la simplicité de sa détermination. Néanmoins, les approches théoriques peuvent différer tout en restant équivalentes dans leur objectif.

XI-1 INTEGRALE DE CORRELATION ET DIMENSION DE CORRELATION

Considérons la série temporelle $\{x_i\}_{i=1, N}$ sur un attracteur. On définit la mesure μ d'une "boite" C de l'espace des phases comme

$$\mu(C) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\text{card}\{x_i \in C, i=1, N\}}{N} \quad (VI-56)$$

La mesure μ est astreinte à certaines conditions dont: $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(C) \geq 0$.

Soit X l'espace des phases munies d'une norme

d . On note $B_d(x, \varepsilon)$ la boule de centre x et de rayon ε prise par rapport à la norme d .

L'intégrale de corrélation $\mathfrak{S}_c(\varepsilon, \mu)$ relativement à la norme d est telle que

$$\mathfrak{S}(\varepsilon, \mu) = \int_X \mu[B_d(y, \varepsilon)] d\mu(y) \quad (VI-57)$$

La dimension de corrélation D_{cor}^μ estimée donc par rapport à la mesure μ est définie comme la limite

$$D_{cor}^\mu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mathfrak{S}_c(\varepsilon, \mu)}{\log \varepsilon} \quad (VI-58)$$

Ainsi exprimée, la dimension de corrélation D_{cor}^μ présente plus un intérêt théorique que pratique car à l'instar de la dimension de capacité de type ensembliste et calculable, le besoin est de disposer à travers la dimension de corrélation d'une dimension qui tienne compte de la dynamique du système mais tout aussi calculable. Le spectre de dimensions ou dimension généralisée D_q énoncé en (VI-46) répond au problème pour $q = 2$.

XI-2 DIMENSION DE CORRELATION D_2

Tout comme la dimension d'information, la dimension de corrélation découle de la dimension fractale généralisée D_q , exprimée pour $q = 2$ dans l'expression (VI-46)

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log I(2, \varepsilon)}{\log(\varepsilon)} \quad (VI-59)$$

avec

$$I(2, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu_i^2 \quad (VI-60)$$

Considérons un ensemble de points $\{y_k, k = 0, 1, \dots, K\}$ sur un attracteur. Formons la quantité $C(\varepsilon)$ qui, comme nous le montrerons, correspond à une intégrale de corrélation et telle que

$$C(\varepsilon) = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{K^2} \sum_{i,j}^K H(\varepsilon - \|y_i - y_j\|) \quad (VI-61)$$

où H désigne la fonction de Heaviside dont la définition explicitée sur (VI-61) donne

$$H(\varepsilon - \|y_i - y_j\|) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon \geq \|y_i - y_j\| \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (VI-62)$$

L'expression (VI-61) donne le nombre de couple de points dont la distance qui les sépare est inférieure à ε . On peut montrer que $C(\varepsilon)$ peut être identifié à $I(2, \varepsilon)$ par rapport au paramètre ε .

La relation (VI-61) peut être reprise sous la forme suivante

$$C(\varepsilon) = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{K} \sum_j^K \left[\frac{1}{K} \sum_{i, j \text{ fixé}}^K H(\varepsilon - \|y_i - y_j\|) \right] \quad (VI-63)$$

Pour K très grand, la somme la plus interne de (VI-63) représente la mesure de la boule $B(y_j, \varepsilon)$ soit $\mu[B(y_j, \varepsilon)]$. La quantité $C(\varepsilon)$ s'écrit alors

$$C(\varepsilon) = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{K} \sum_j^K \mu[B(y_j, \varepsilon)] \quad (VI-64)$$

L'expression (VI-64) est à considérer comme une moyenne sur une mesure $\mu[B(y, \varepsilon)]$ avec y un point de l'espace des phases X . Sur la base de la notation (VI-60) et en intégrant le calcul de la limite mentionnée, la quantité $C(\varepsilon)$ n'est autre qu'une intégrale de corrélation et de ce fait, elle peut être introduite dans le calcul de la dimension de corrélation D_{cor} . Nous pouvons donc écrire

$$C(\varepsilon) = \int_X \mu[B(y, \varepsilon)] d[\mu(y)] \quad (VI-65)$$

Ceci étant, nous établissons un lien entre la dimension D_2 donnée en (VI-59) et $C(\varepsilon)$ par comparaison entre $I(2, \varepsilon)$ et $C(\varepsilon)$. Si le point y appartient à un cube de recouvrement i de mesure μ_i , alors on peut admettre l'approximation $\mu[B(y, \varepsilon)] \approx \mu_i$ et considérer aussi $I(2, \varepsilon)$ comme un moyenne sur la mesure $\mu[B(y, \varepsilon)]$, donc $I(2, \varepsilon) \approx C(\varepsilon)$. L'expression (VI-59) représentant la dimension D_2 préfigurera aussi la dimension de corrélation D_{cor}

$$D_2 = D_{cor} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \varepsilon} \quad (VI-66)$$

XI-3 CALCUL DE LA DIMENSION DE CORRELATION SUR UN ATTRACTEUR: METHODE DE GRASBERGER- PROCACCIA

L'expression (VI-63) n'a que peu d'intérêt sur le plan numérique. Aussi des méthodes plus adaptées au calcul de la dimension de corrélation sur un attracteur donc relativement à des trajectoires, ont-elles été mises au point et dont la plus courante est celle dite de Grasberger-Proccacia.

Soit $X(t)$ une trajectoire prise sur un attracteur ou dans un voisinage de dernier. Un échantillonnage au pas Δt aboutit à l'acquisition de la suite discrète de points $\{X_i = X(i\Delta t), i \in \mathcal{N}\}$. Soit m un nombre entier que l'on suppose assez grand ($m \approx 10^3$ par exemple). Considérons le couple (i, j) tel que $1 \leq i, j \leq m$ identifiant respectivement le couple de points (X_i, X_j) séparés par une distance $d(X_i, X_j)$.

On note $N(r)$ le nombre de couples (i, j) , r un réel positif, pour lequel $d(X_i, X_j) \leq r$.

Le choix de r et la vérification de cette condition conduisent à la détermination des valeurs extrêmes r_{min} représentant la plus faible des distances $d(X_i, X_j)$ et r_{max} qui représente le diamètre de l'attracteur, en un mot, $r \in [r_{min}, r_{max}]$. L'estimation de la dimension de corrélation D_{cor} de l'attracteur est alors obtenue comme suit

$$D_{cor} \approx \frac{\log \left[\frac{N(r_2)}{N(r_1)} \right]}{\log \left[\frac{r_2}{r_1} \right]} \quad (VI-67)$$

Cette approximation devient plus significative si les valeurs r_1 et r_2 sont assez éloignées l'une de l'autre.

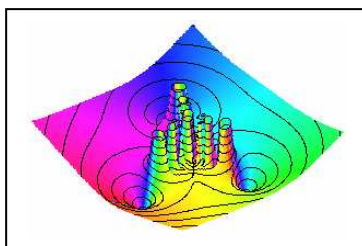
CHAPITRE VII

*L'art est l'antithèse même du chaos, qui n'est
autre chose qu'une avalanche d'accidents.*

Edward Gordon Craig

LA METHODE DE NEWTON ENTRE CHAOS ET FRACTALITE

LA METHODE DE NEWTON ENTRE CHAOS ET FRACTALITE



La méthode itérative de Newton-Raphson , qualifiée à juste titre de classique pour calculer, précisément pour approcher le zéro d'une fonction $f(x)$, peut être considérée comme un système dynamique discret.

I- UNE PREMIERE DEFINITION DE LA METHODE DE NEWTON- RAPHSON

L'intervalle Ω étant un ouvert de l'ensemble \mathcal{R} , on considère l'application différentiable

$$f : \Omega \subseteq \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R} \quad (VII-1)$$

$$x \mapsto f(x)$$

La méthode de Newton-Raphson est basée sur la construction et sur l'itération de la fonction dite de Newton $N(x)$ de la forme

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (VII-2)$$

à partir d'une valeur initiale $x_0 \in \Omega$. Relativement aux hypothèses consistant à supposer que $f'(x)$ et $f''(x)$ sont continues et gardent un signe constant sur Ω , la construction de l'expression (VII-2) passe par application de la formule de Taylor sur $f(x^{**})$, x^{**} représentant une racine de $f(x)$

$$f(x^{**}) = 0 = f(x^*) + (x^{**} - x^*)f'(x^*) + \sum_{n \geq 2} \frac{(x^{**} - x^*)^n}{n!} f^{(n)}(x^*) \quad (VII-3)$$

Pour $(x^{**} - x^*)$ suffisamment petit, nous pouvons écrire

$$f(x^*) + (x^{**} - x^*)f'(x^*) = 0 \quad (VII-4)$$

soit

$$x^{**} = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} \quad (VII-5)$$

Il convient donc de considérer la séquence itérative

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (VII-6)$$

L'expression VII-6) indique que x_{k+1} ne représente rien d'autre que l'intersection de la tangente à la courbe représentative de la fonction au point $[x_k, f(x_k)]$ et l'axe des abscisses (figure VII-1). Cette approche est répétée pour la nouvelle abscisse ainsi obtenue x_{k+1} .

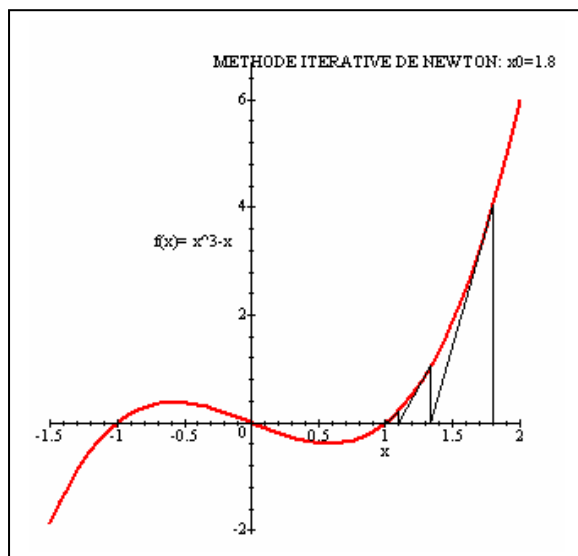


fig. VII-1 la méthode de Newton appliquée sur la fonction

$$f(x) = x^3 - x \text{ avec } x_0 = 1.8$$

L'intérêt que nous portons à cette méthode n'est pas tant le principe que le mode de convergence, la nature et la vitesse de cette dernière.

II- CONVERGENCE QUADRATIQUE DE LA METHODE DE NEWTON

Sous certaines conditions qui seront précisées, l'algorithme traduisant le mode de fonctionnement de la méthode de Newton conduit à une convergence quadratique. Soit $x_n > d$. Posons $d = x_n + (d - x_n)$ et appliquons la formule de Taylor en posant $f(d) = 0$

$$f(d) = 0 = f(x_n) + (d - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(d - x_n)^2 f''(c_n) \quad (\text{VII-7})$$

avec $d < c_n < x_n$. En supposant $f'(x_n) \neq 0$, l'expression (VII-7) conduit au résultat

$$d = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2} \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)} \quad (\text{VII-8})$$

En tenant compte du fait que $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, (VII-8) devient

$$d = x_{n+1} - \frac{1}{2} (d - x_n)^2 \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)} \quad (\text{VII-9})$$

En désignant par M la valeur maximale de $|f''(x)|$ et par m la valeur minimale de $|f'(x)|$, l'expression (VII-9) conduit à l'inégalité

$$|d - x_{n+1}| \leq \frac{M}{2m} (d - x_n)^2 \quad (\text{VII-10})$$

Il ressort donc que l'erreur $|d - x_{n+1}|$ est, dans un cas limite, proportionnelle, au facteur $\frac{M}{2m}$ près, au carré de l'erreur dans la récurrence qui la précède c'est – à dire $|d - x_n|^2$, conférant ainsi un

caractère quadratique à la convergence de la méthode de Newton. Ceci implique deux remarques:

- la méthode de Newton est à convergence rapide
- la vitesse de convergence dépendra de la condition initiale x_0 choisie, critère défini comme une sensibilité aux conditions initiales, fondamental dans la théorie du chaos. Les figures VII-2 et VII-3 montrent de façon marquée comment l'influence du choix du point initial x_0 sur la nature et la vitesse de convergence dans la méthode de Newton. Pour le polynôme considéré $f(x) = x^3 - x$ admettant pour racines $(-1,0,1)$, nous avons, pour des raisons de symétrie, supposé x_0 positif, précisément $x_0 \in [0,2]$. Si pour la condition $x_0 = 1.8$, la convergence vers la racine $x = 1$ se déroule sans ambiguïté (figure VII-1), il en est tout autrement pour $x_0 \in [0.4,0.6]$ qui conduit à un effet désordonné dans l'évolution du tracer des tangentes avec en prime une tendance à s'éloigner vers l'infini (figure VII-2 $f(x) = x^3 - x$, $x_0 = 0.53$). Cet effet de désordre, tout au moins de la non régularité dans la dynamique de convergence est mis en évidence par la figure VII-3 qui représente la racine obtenue par la méthode de Newton par initialisation par un point de l'intervalle $[0,2]$. Elle montre que la convergence vers la racine $x = 1$ n'est pas régulière pour $x_0 \in [0.4,0.6]$, ceci étant mis en évidence par un effet de "patinage" (courbe d'évolution resserrée).

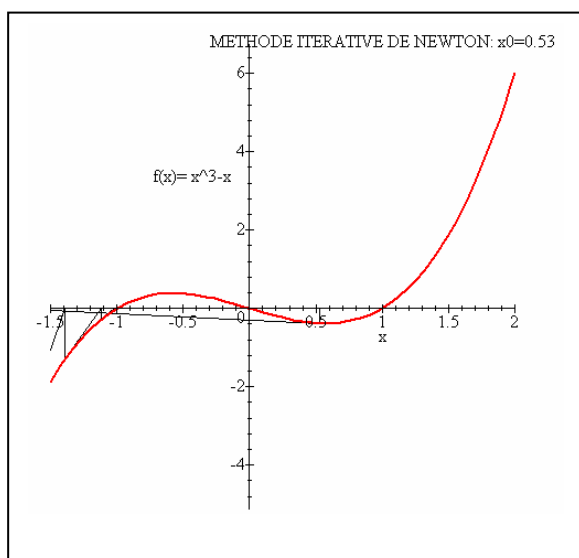


fig. VII-2 méthode de Newton appliquée sur la fonction $f(x) = x^3 - x$ avec $x_0 = 0.53$

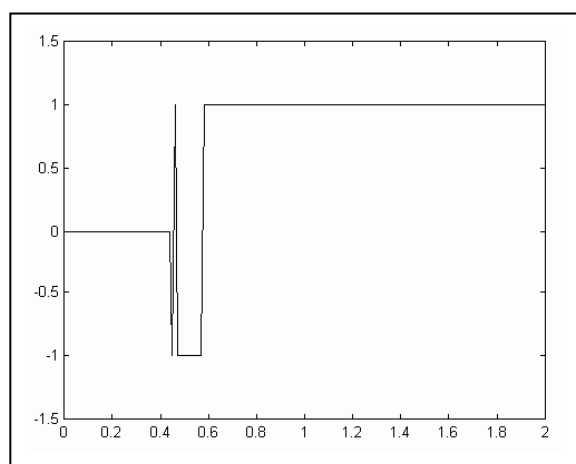


fig. VII-3 racine obtenue par la méthode de Newton appliquée sur la fonction $f(x) = x^3 - x$ pour $x_0 \in [0.4, 0.6]$

L'objectif de ce développement n'est nullement de remettre en cause la convergence acquise de la méthode de Newton – Raphson mais de comprendre les méandres suivis par cette dynamique car tout en constituant une finalité, elle n'en est pas moins un processus d'évolution. Les meilleures perspectives de compréhension et de représentations de ce dernier émergeront de l'extension de la méthode de Newton au plan complexe

III- EXTENSION DE LA METHODE DE NEWTON – RAPHSON AU PLAN COMPLEXE

L'objectif serait d'améliorer la précision des racines complexes d'une fonction $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$. On peut dans ce cas, développer une méthode analogue à celle préconisée dans le cas réel.

Soit $f(z)$ ($z = x + jy$) une fonction analytique dans un voisinage V convexe de sa racine simple qui

est généralement complexe donc de la forme $\gamma = \alpha + j\beta$ [$f(\gamma) = 0, f'(\gamma) \neq 0$]. Soit z_n une racine approchée qui appartient au voisinage V . Une racine exacte z_{n+1} est telle que

$$z_{n+1} = z_n + \Delta z_n \quad (\text{VII-11})$$

Par application du développement en série de Taylor en z_n et en considérant $f(z_{n+1}) \approx 0$ à $\Delta^2 z_n$ près, on a

$$f(z_{n+1}) \approx f(z_n) + \Delta z_n f'(z_n) = 0 \quad (\text{VII-12})$$

L'expression (VII-12) aboutit à la formulation de la méthode de Newton dans le plan complexe qui, en partant d'une valeur quelconque z_0 , permet d'obtenir de proche en proche, les approximations successives des racines

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \quad (\text{VII-13})$$

Le procédé itératif (VII-13) sera fondamental dans nos diverses simulations de bassins d'attraction, de régions à structure fractale, etc. Sa convergence est immédiate en sachant que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \gamma, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f'(z_n) = f'(\gamma) \text{ et } f(\gamma) = 0$$

En prolongeant la méthode de Newton dans le domaine des complexes, l'objectif n'est pas le calcul des racines de l'équation $f(z) = 0$ mais d'exprimer l'image du bassin d'attraction et d'affirmer qu'une racine se trouve dans le voisinage du bassin d'attraction de Newton.

IV- LES ENSEMBLES DE JULIA ELARGIS AUX FRACTIONS RATIONNELLES

La forme itérative (VII-13) peut être ramenée à une expression identique à celle donnée par (VII-1) dans le plan complexe

$$N(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (\text{VII-14})$$

Si γ est une solution, l'ensemble des points tendant vers γ est par définition le bassin d'attraction de Newton $A(\gamma)$ et tel que

$$A(\gamma) = \left\{ z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \lim_{n \rightarrow +\infty} N^n(z) = \gamma \right\} \quad (\text{VII-15})$$

On pourrait ainsi concevoir les ensembles de Julia et de Mandelbrot comme un équivalent des propriétés de convergence de la méthode de Newton pour une certaine fonction $f(z)$ où

$$N(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} = z^2 + c \quad \text{où } (z, c) \in \mathbb{C}^2 \quad (\text{VII-16})$$

Il ne reste plus qu'à préciser une procédure de passage de la fonction $N(z)$ à la forme quadratique en z^2 . En relation avec le présent chapitre, nous supposons $N(z)$ de forme polynomiale $q(z) = az^2 + 2bz + d$ ($a \neq 0$)

$$(\text{VII-17})$$

La procédure préconisée sera basée sur un changement de coordonnées que résume le schéma de la figure VII-4

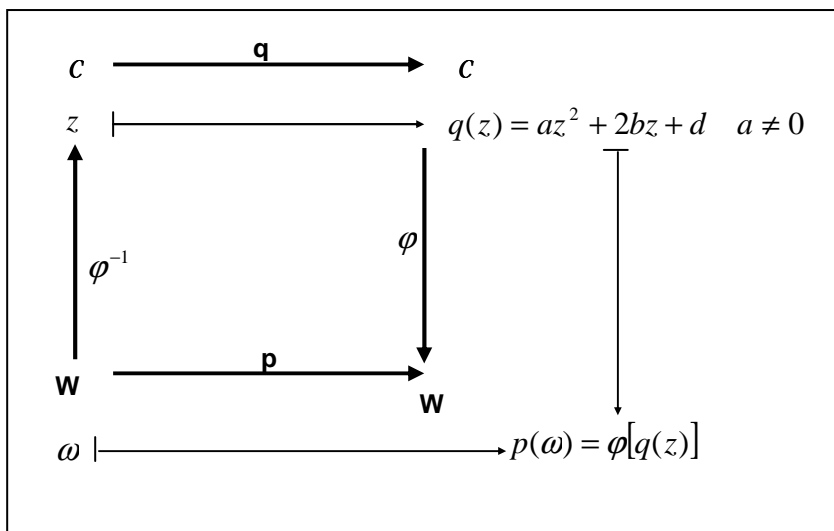


fig. VII-4 procédure de changement de coordonnées pour la simplification de la forme quadratique $q(z) = az^2 + 2bz + d$

En rapport avec le schéma VII-4, le changement de variable précinisé consiste à poser $\omega = \varphi(z) = az + b$. (VII-18)

Il vient alors que

$$p(\omega) = \varphi \left[q \left(\frac{\omega - b}{a} \right) \right] \tag{VII-19}$$

En teant compte de la forme quadratique de $q(z)$, l'expression (VII-18) aboutit au résultat

$$p(\omega) = \omega^2 + c \tag{VII-20}$$

avec $c = -b^2 + ad + b$

V- LA TRANSFORMATION BILINEAIRE DE MÖBIUS

On désire annuler le facteur c figurant dans l'expression (VII-20) en opérant par un changement de variable plus judicieux que celui retenu dans (VII-18). La transformation bilinéaire de Möbius consiste à poser

$$\omega = \varphi(z) = \frac{lz + m}{pz + s} \text{ avec } z \neq -s/p \text{ et } ls \neq mp \tag{VII-21}$$

La transformation inverse est telle que

$$z = \varphi^{-1}(\omega) = \frac{s\omega - m}{-\rho\omega + l} \tag{VII-22}$$

Deux propriétés importantes caractérisent la transformation de Möbius:

- l'image d'un cercle (resp. d'une droite) par une transformation de Möbius est un cercle (resp. une droite). L'image d'un cercle peut être une droite et inversement.

Nous exploitons la procédure "conformal plot" qui, appliquée sur une fonction $F(z)$ de $z = a + jb$ à $z = c + jd$ applique un grid bidimensionnel $a \leq x \leq c, b \leq y \leq d$ sur un second grid courbe défini par l'image des lignes du grid original. Le résultat est un ensemble de courbes qui ont la propriété d'intersection à angle droit là où la fonction F est analytique.

En rapport avec la méthode de Newton, nous déterminons à travers deux transformations bilinéaires différentes les images du disque $|z| < 1$:

1- On montre que la transformation $\omega = \varphi(z) = \frac{1+z}{1-z}$ applique le disque $|z| < 1$ sur le demi plan

$\text{Re}(\omega) \geq 0$ (figure VII-5). En effet,

$$\text{Re}(\omega) = \frac{1}{|1-z|^2} \text{Re}[(1+z)(1-\bar{z})] = \frac{1}{|1-z|^2} (1-|z|^2) \tag{VII-23}$$

Comme $\frac{1}{|1-z|^2} > 0$, les conditions $\text{Re}(\omega) \geq 0$ et $(1-|z|^2) \geq 0$ sont équivalentes. Notons que $z = 1$

correspond à $\omega = +\infty$ qui correspond à la fermeture de la frontière $\text{Re}(\omega) = 0$.

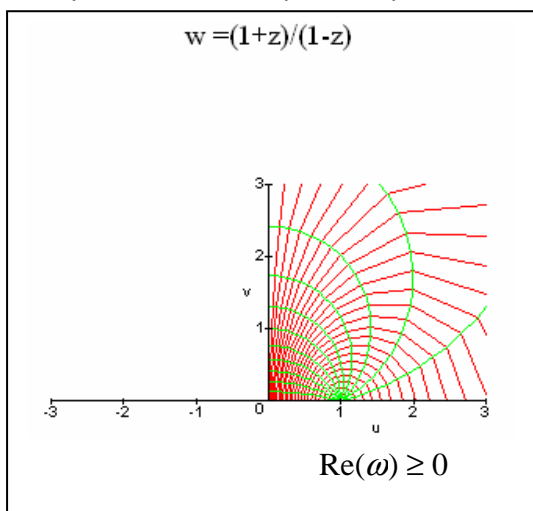
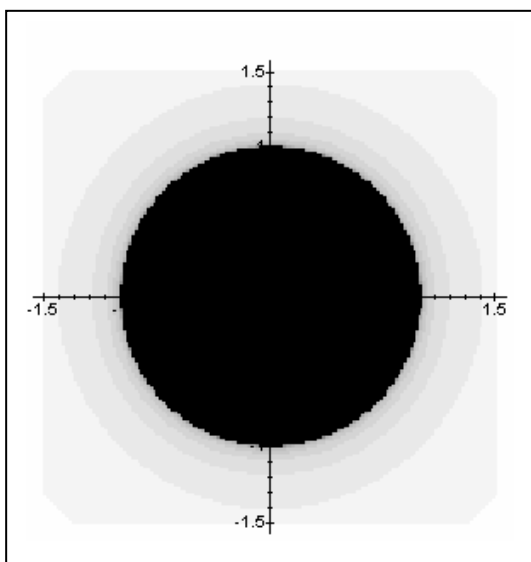


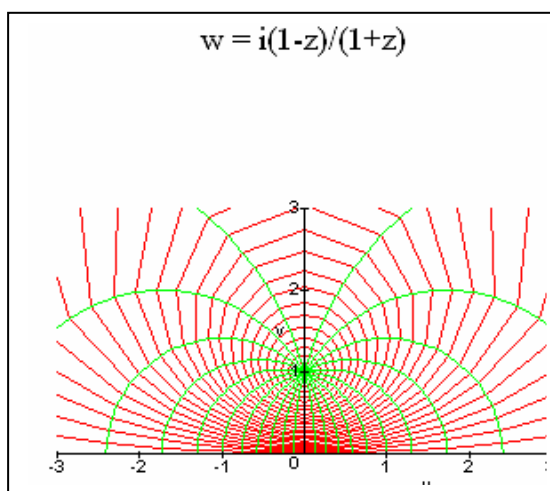
fig. VII-5 Image ($\text{Re}(\omega) > 0$) du disque $|z| < 1$ par la transformation bilinéaire

$$\omega = \varphi(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

2- Par contre la transformation $\omega = \varphi(z) = j \frac{1-z}{1+z}$ applique le disque $|z| < 1$ sur le demi plan supérieur $\text{Im}(\omega) \geq 0$ (figure VII-6)



(a)



(b)

fig. VII-6 Image ($\text{Im}(\omega) > 0$) (b) du disque $|z| < 1$ (a) par la transformation

bilinéaire $\omega = \varphi(z) = j \frac{1-z}{1+z}$

Réciproquement, la transformation bilinéaire inverse, transforme le disque unité pris dans le plan des ω c'est-à-dire pour $|\omega| < 1$ en le demi-plan supérieur $\text{Im}(z) > 0$ dans le plan des z . A cet effet, et ne relation avec la méthode de Newton, considérons la transformation particulière suivante

$$\omega = \varphi(z) = \frac{z+j}{z-j} \Leftrightarrow z = j \frac{(\omega+1)}{\omega-1} \tag{VII-24}$$

A travers cette transformation, nous avons les correspondances suivantes:

$$\begin{aligned} z_1 = 0 &\rightarrow \omega_1 = -1 \\ z_2 = 1 &\rightarrow \omega_2 = j \\ z_3 = \infty &\rightarrow \omega_3 = 1 \end{aligned} \tag{VII-25}$$

Les points z_1, z_2, z_3 définissent l'axe réel (ou axe des abscisses) dans le plan complexe des z .

Dans le plan des ω , nous avons $|\omega_1| = |\omega_2| = |\omega_3| = 1$. Comme la transformation de Möbius peut faire correspondre à une droite dans le plan des z un cercle dans le plan des ω , l'image de axe des abscisses est donc le disque $|\omega| = 1$. En nous résumant (figure VII-7) :

- l'axe $\text{Re}(z)$ (axe des abscisses) \longrightarrow disque $|\omega| < 1$
- Demi-plan supérieur ($\text{Im}(z) > 0$) \longrightarrow extérieur du disque $|\omega| > 1$

Le demi-plan supérieur $\text{Im}(z) > 0$ privé de l'axe $\text{Re}(z)$ est connexe. Son image c'est – à- dire le plan des ω privé du disque unité sera lui aussi connexe.

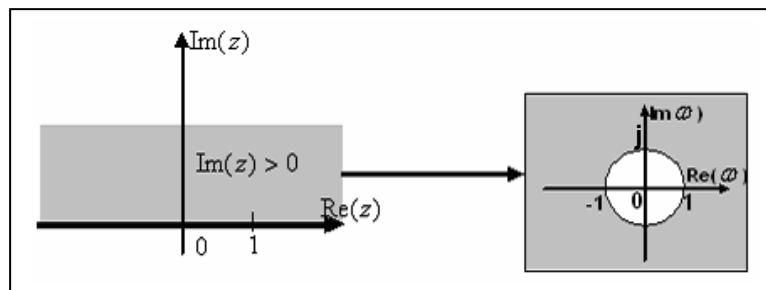


fig.VII-7 image de l'axe $\text{Re}(z)$ (axe des abscisses) par la transformation bilinéaire $\omega = \varphi(z) = (z + j)/(z - j)$

VI- METHODE DE NEWTON ET TRANSFORMATION BILINEAIRE

Il a été vu à travers le développement précédent, que tout polynôme quadratique $q(z)$ peut être ramené à la forme $p(z) = z^2 + c, c \in \mathbb{C}$. Pour des raisons de convenance dans la formulation des résultats, nous optons pour la forme $p(z) = z^2 - c$. On construit alors la fonction itérative de Newton $N(z)$ sur la fonction $p(z)$

$$N(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)} = \frac{z^2 + c}{2z} \tag{VII-26}$$

Les points fixes de la fonction $N(z)$, solutions de l'équation $N(z) = z$, sont $z = \pm\sqrt{c}$. On construit la transformation bilinéaire $\omega = \varphi(z)$ telle que

$$\omega = \frac{z + \sqrt{c}}{z - \sqrt{c}} \quad (\text{VII-27})$$

Donc les racines $\pm\sqrt{c}$ prises dans le plan des z admettent pour image 0 et l'infini dans le plan des ω . La transformation bilinéaire inverse $z = \varphi^{-1}(\omega)$ est telle que

$$z = \sqrt{c} \frac{\omega + 1}{\omega - 1} \quad (\text{VII-28})$$

Nous avons ainsi les correspondances suivantes

$$\begin{aligned} \omega = 1 &\rightarrow z = \infty \\ \omega = -1 &\rightarrow z = 0 \\ \omega = j &\rightarrow z = -j\sqrt{c} \end{aligned} \quad (\text{VII-29})$$

Par application de l'expression (VII-29), l'image de la fonction $N(z)$ sera

$$N(z) = \frac{z^2 + c}{2z} \rightarrow M(\omega) = \frac{\left(\sqrt{c} \frac{\omega + 1}{\omega - 1}\right)^2 + c}{2\left(\sqrt{c} \frac{\omega + 1}{\omega - 1}\right)} = \omega^2 \quad (\text{VII-30})$$

L'expression $M(\omega) = \omega^2$ est à rapprocher du modèle de fonction analytique $f(z) = z^2$ pour laquelle l'ensemble de Julia correspondant citée en exemple dans le cas des ensembles de Julia est le disque unité $|\omega| < 1$ dans le plan des ω (figure VII-8). L'intérieur de ce disque représente le bassin d'attraction $A(0)$ alors que l'extérieur désigne l'autre bassin d'attraction $A(\infty)$.

Le disque $|\omega| < 1$ passe par les points $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = j$, $\omega_3 = 1$ dont les antécédents sont donnés par l'expression (VII-29) que nous interprétons comme suit:

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_1 = -1 &\rightarrow z_1 = 0 \\ \omega_2 = j &\rightarrow z_2 = -j\sqrt{c} \\ \omega_3 = 1 &\rightarrow z_3 = \infty \\ \omega_4 = 0 &\rightarrow z_4 = -\sqrt{c} \end{aligned} \right. \quad (\text{VII-31})$$

L'expression (VII-31) conduit à l'interprétation suivante (figure VII-8):

- pour $\omega_3 = 1 \rightarrow z_3 = \infty$: la frontière du disque $|\omega| < 1$, donc en fait l'ensemble de Julia J correspondant à la fonction analytique $g(\omega) = \omega^2$, admet pour image par la transformation bilinéaire inverse (VII-28), une droite
- pour $\omega_1 = -1 \rightarrow z_1 = 0$: l'origine du plan complexe des z appartient à cette droite
- pour $\omega_2 = j \rightarrow z_2 = -j\sqrt{c}$: nombre complexe de module \sqrt{c} et d'argument $\pi/2$
- pour $\omega_4 = 0 \rightarrow z_4 = -\sqrt{c}$: le bassin d'attraction $A(0)$ dans le plan des ω admet pour image dans le plan des z , le bassin d'attraction $A(-\sqrt{c})$

- $z = \sqrt{c}$ n'est l'image réciproque d'aucun élément ω ce qui amène à affirmer que l'image réciproque du bassin d'attraction $A(\infty)$ dans le plan des ω est le bassin d'attraction $A(\sqrt{c})$ dans le plan des complexes z

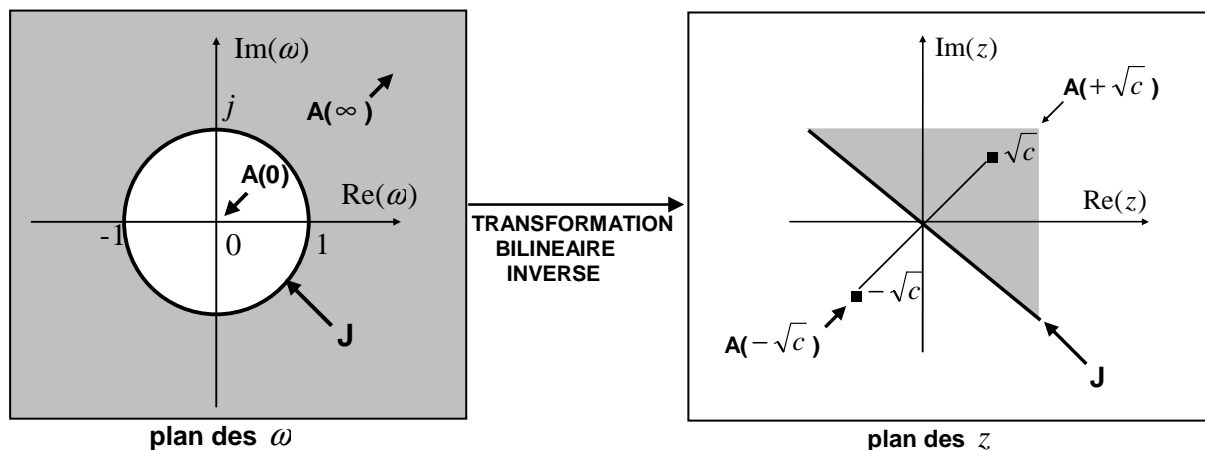


fig. VII-8 correspondances des bassins d'attraction des plans des complexes ω et z

Notons que le segment joignant le couple de points $z = -\sqrt{c}$ et $z = \sqrt{c}$ est orthogonale à la droite symbolisant l'ensemble de Julia J .

VII- BASSINS D'ATTRACTION ET ENSEMBLES DE JULIA POUR QUELQUES APPLICATIONS DE LA METHODE DE NEWTON

L'intérêt de ces applications est simplement d'apporter un support graphique ou d'image au développement théorique ci-dessus en explicitant la structure des ensembles de Julia de la méthode de Newton et mettant en évidence les bassins d'attraction des racines de l'équation considérée. Pour un type d'équation choisie et une condition initiale précisée, par quelle dynamique la méthode de Newton converge – t- elle ? Deux situations peuvent se poser :

- soit la condition initiale est proche d'une solution, alors la convergence est presque immédiate
- soit on se situe entre deux solutions et on se retrouve dans une situation d'ambiguïté (de chaos) que reflète une zone "d'hésitation" renfermant les itérés solutions potentielles (précisément l'ensemble de Julia) apparemment complexe mais à structure fractale. La dynamique itérative aidant, il se produit un basculement vers le bassin d'attraction correspondant à une racine précise. Graphiquement et pour une racine z_i , le procédé consiste à déterminer un cercle de rayon r_i autour de z_i tel qu'au cours du processus itératif, le cercle se referme de plus en plus sur cette racine.

VII-1 LA METHODE DE NEWTON POUR $z^2 - 1 = 0$

Les solutions $z = \pm 1$ ainsi que les bassins d'attraction de chaque racine sont mis en évidence dans deux zones bien distinctes séparées par une zone "tampon" supportée ici par l'axe des imaginaires (figure VII-9).

La fonction itérative de Newton $N(z)$ et sa dérivée $N'(z)$ sont telles que $N(z) = (z^2 + 1)/2z$ et $N'(z) = (z^2 - 1)/2z^2$. Les points fixes de la fonction $N(z)$ sont $z = \pm 1$. Ces points fixes sont super-attractifs car $|N'(z)|_{z=1} = |N'(z)|_{z=-1} = 0$.

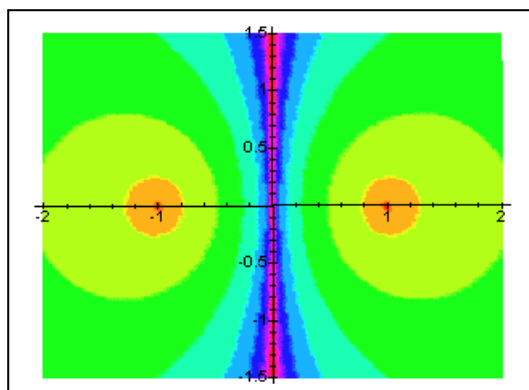


fig. VII-9 ensemble de Julia et bassins d'attraction de l'équation $z^2 - 1$

VII-2 LA METHODE DE NEWTON POUR $z^3 - 1 = 0$

Il s'agit en fait ici du calcul des racines cubiques de l'unité ($z_1 = 1, z_2 = \exp(2\pi j/3), z_3 = z_2^2$). La fonction itérative de Newton $N(z)$ et sa dérivée $N'(z)$ sont telles que $N(z) = (2z^3 + 1)/(3z^2)$ et $N'(z) = 2(z^3 - 1)/3z^2$. Les points fixes de la fonction $N(z)$ sont précisément z_1, z_2 et z_3 . Ces points sont super-attractifs puisque $|N'(z)|_{z=z_1} = |N'(z)|_{z=z_2} = |N'(z)|_{z=z_3} = 0$.

La figure VII-10 (a) est une représentation graphique des bassins d'attraction $A(z_1), A(z_2)$ et $A(z_3)$ alors que la figure VII-10 (b) en est une représentation spatiale dans le système (x,y,z) .

La figure VII-11 est une extraction des contours de ces bassins d'attraction. Les ensembles de Julia, frontières entre couples de racines, sont mis en évidence sur la figure VII-10 (b) dégagant un aspect de forte irrégularité mais en fait parfaitement ordonnés par leur structure fractale (figures VII-10 (a) et VII-11)

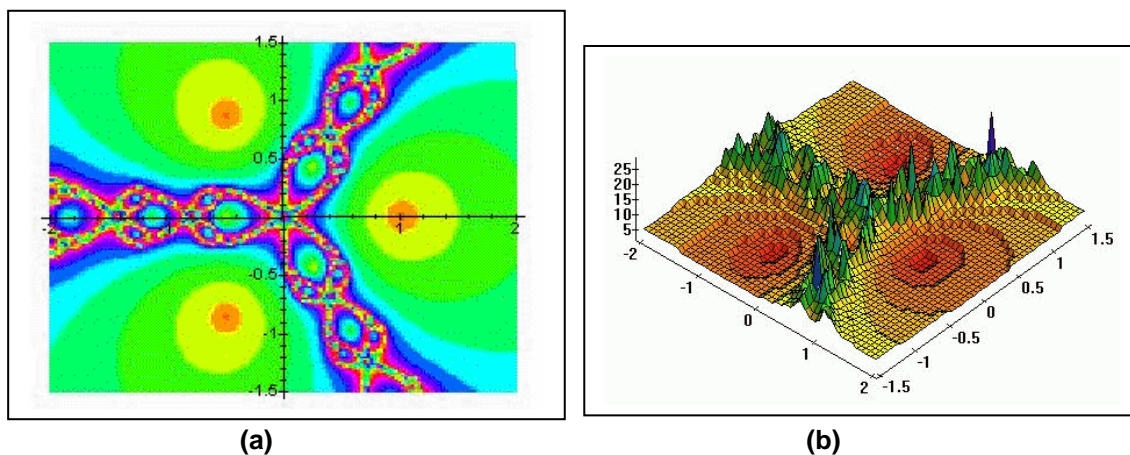


fig. VII-10 Méthode de Newton appliquée sur l'équation $z^3 - 1 = 0$: (a) bassins d'attraction et structure des ensembles de Julia- (b) leur représentation spatiale

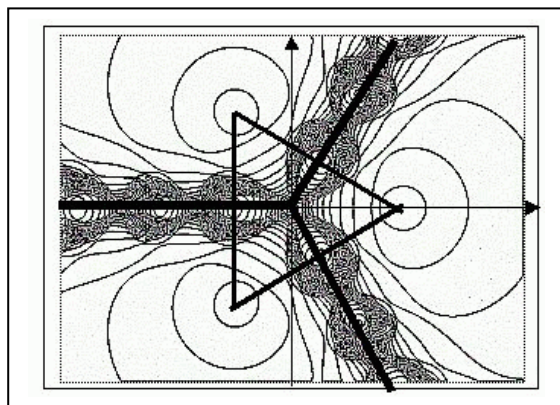


fig. VII-11 Méthode de Newton pour l'équation $z^3 - 1 = 0$ -
extraction des contours des bassins d'attraction et des ensembles de Julia

VII-3 LA METHODE DE NEWTON POUR L'EQUATION $z^4 - 1 = 0$

Les bassins d'attraction des racines $(\pm 1, \pm j)$ et les ensembles de Julia sont représentés sur la figure VII-12. Une structure plus intime de ces derniers révèle par l'extraction de contours, le caractère fractal de ces ensembles (figure VII-13). Une représentation spatiale (figure VII-14) illustre la distribution des bassins d'attraction ainsi que la structure des ensembles de Julia .

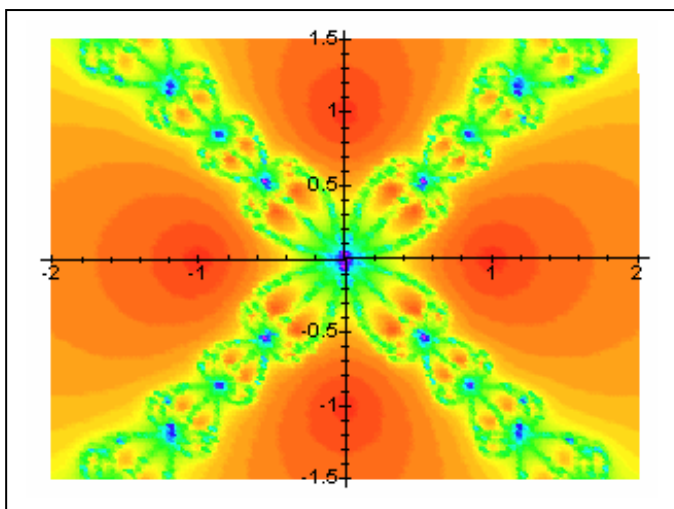


fig. VII-12 Méthode de Newton
appliquée sur l'équation $z^4 - 1 = 0$
bassins d'attraction des racines
et ensembles de Julia

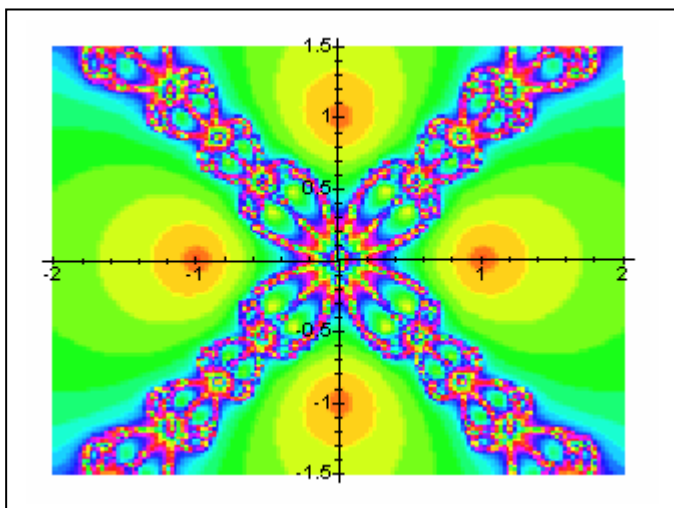


fig. VII-13 Méthode de Newton pour
l'équation $z^4 - 1 = 0$ structure
fractale des ensembles de Julia

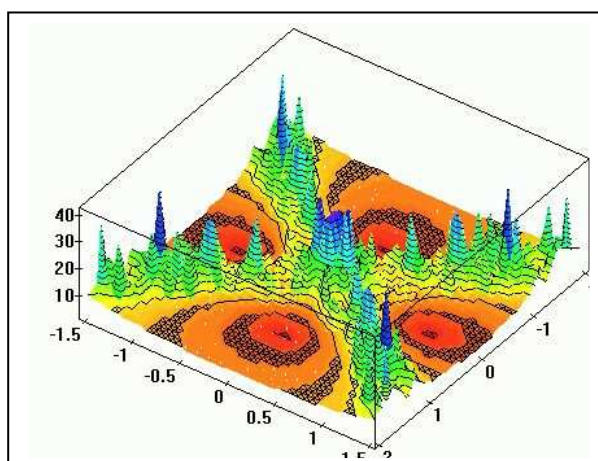


fig. VII-14 Méthode de Newton appliquée sur l'équation $z^4 - 1 = 0$ - distribution spatiale des bassins d'attraction des racines et des ensembles de Julia associés

VII-4 LA METHODE DE NEWTON POUR UNE FORME QUELCONQUE DE L'EQUATION $f(z) = 0$

Les modèles d'équations traités ci-dessus répondent à forme une simple : $z^n - 1 = 0$. Les bassins d'attraction des racines tout comme la géométrie (des droites) des ensembles de Julia correspondants ne diffèrent que très peu. L'intérêt suscité par cette méthode portera sur sa généralisation à toute forme d'équation linéaire $f(z) = 0$. Certes, les bassins d'attraction subsisteront sous les formes rencontrées plus haut mais la structure linéaire des ensembles de Julia sera modifiée puisque ne répondant pas à l'approche théorique développée pour les équations du type $z^n - 1 = 0$. De ce fait, nous avons appliqué le même procédé de représentation graphique de la méthode de Newton sur quelques formes d'équation $f(z) = 0$

VII-4-1 LA METHODE DE NEWTON POUR L'EQUATION $z^4 + z = 0$

Il ressort de la représentation graphique des bassins d'attraction des racines de cette équation et des ensembles de Julia correspondants (figure VII-15) que ces derniers n'obéissent pas à l'aspect "linéaire" rencontrée plus haut. De forme courbe, ils délimitent trois zones (et non plus quatre eu égard au nombre de racines) cernant les bassins d'attraction (figure VII-16)

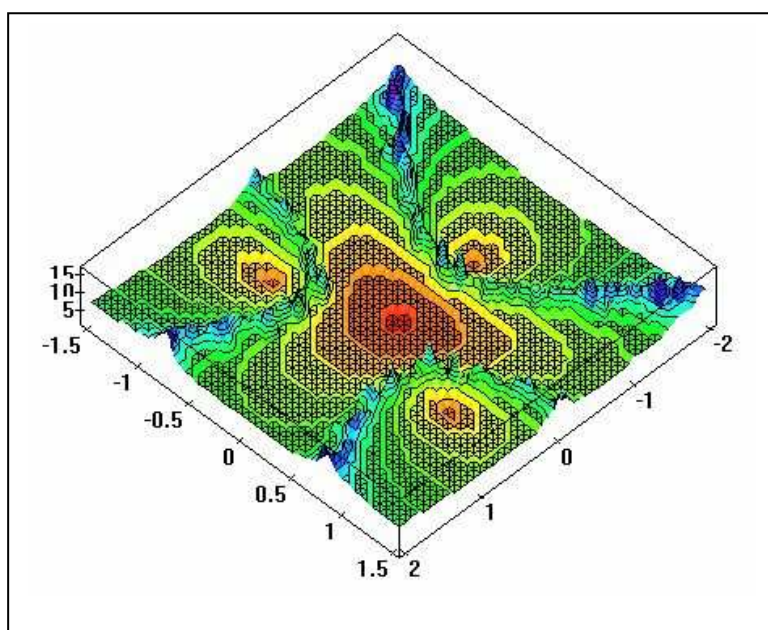


fig. VII-15 Méthode de Newton appliquée sur l'équation $z^4 + z = 0$ extraction des contours des bassins d'attraction et des ensembles de Julia

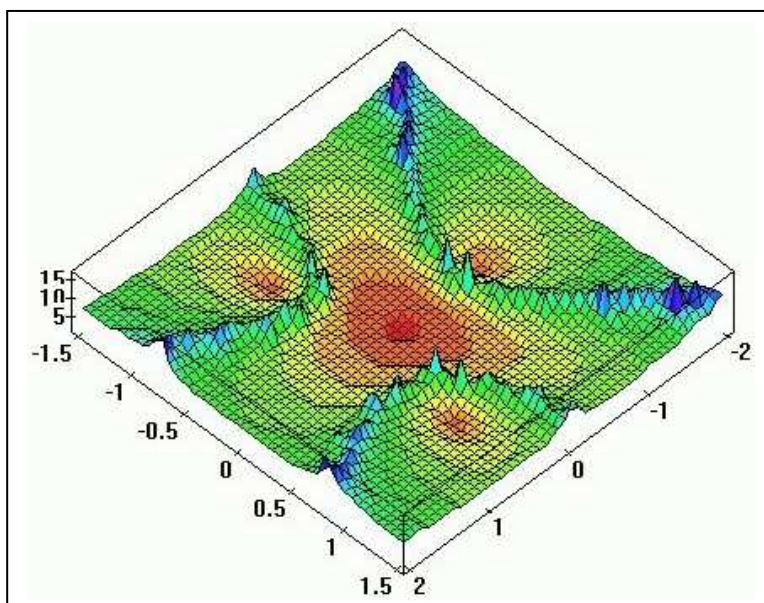


fig. VII-16 Méthode de Newton pour l'équation $z^4 + z = 0$
bassins d'attraction des racines et ensembles de Julia associés

VII-4-2 LA METHODE DE NEWTON POUR L'EQUATION $z^4 + z + 1 = 0$

L'intérêt que présente ce type d'équation réside dans la structure complexe et enchevêtrée des ensembles de Julia (figure VII-17) donnant l'impression de délimiter, outre les bassins d'attraction fondamentaux, des bassins d'attraction fictifs ne correspondant à aucune des racines de l'équation. Un regard au cœur des ensembles de Julia par extraction de contour, révèle toute la complexité apparente de ces derniers dont l'organisation interne ne peut être que fractale (figure VII-18).

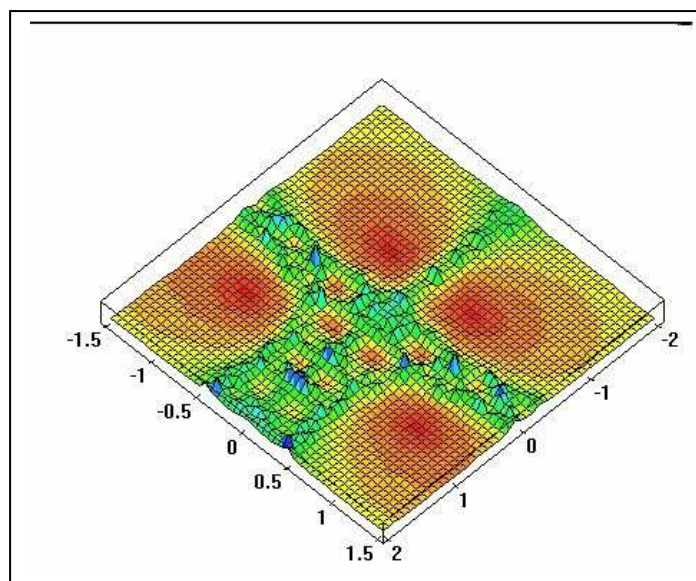


fig. VII-17 Méthode de Newton pour l'équation $z^4 + z + 1 = 0$
bassins d'attraction des racines et ensembles de Julia associés

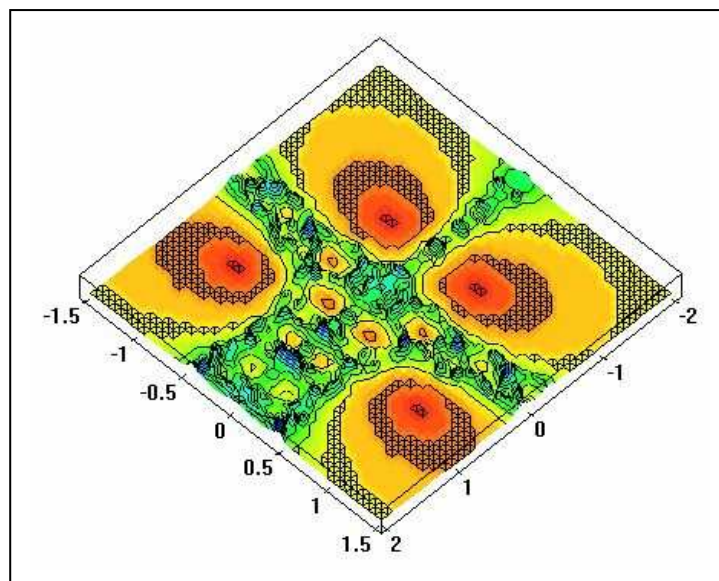


fig. VII-18 Méthode de Newton appliquée sur l'équation $z^4 + z + 1 = 0$
extraction des contours et structure des bassins d'attraction
des racines et des ensembles de Julia correspondants

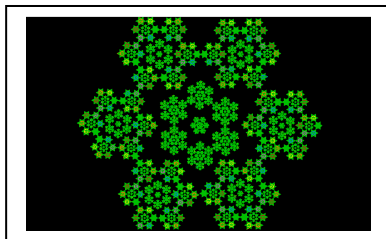
CHAPITRE VIII

*L'ordre, et l'ordre seul, fait en définitive
la liberté. Le désordre fait la servitude.*

Charles Péguy

UN PROCESSUS STOCHASTIQUE FRACTAL LE MOUVEMENT BROWNIEN

UN PROCESSUS STOCHASTIQUE FRACTAL LE MOUVEMENT BROWNIEN



Les processus stochastiques

Un processus initié par l'évolution dans le temps d'une variable est dit stochastique lorsque le diagnostic de ses états présents ou futurs demeure imprévisible si ce n'est sur un plan probabiliste ou statistique

Cette imprévisibilité n'est point synonyme d'aléatoire (c'est – à- dire que l'accroissement au cours d'un intervalle de temps donné est indépendant des accroissements antérieurs) ou même de complexité.

L'analyse des processus stochastiques par le biais de formalismes mathématiques spécifiques (loi d'invariance d'échelle, auto similarité, dimension non entière...) , tend à surpasser les apparences de chaos pour révéler au contraire des structures parfaitement organisées et dont l'étonnante régularité est déclinée par leur comportement fractal. En fait, on estime que dans un environnement aléatoire cohabitent deux composantes : un état déterministe altéré par une composante stochastique assimilée à un bruit.

I- LE MOUVEMENT BROWNIEN : UN PROCESSUS FRACTAL

Le mouvement Brownien a été mis en évidence par le botaniste Robert Brown en 1840 dans la description du caractère désordonné mais perpétuel de l'émigration des particules en suspension dans un liquide. Dès lors, ce mouvement qualifié d'erratique et d'irrégulier (figure VIII-1) a suscité un intérêt aujourd'hui accru dans le domaine de la physique et plus précisément dans la caractérisation de la dynamique de certains processus qui intègrent dans leur l'évolution une dynamique "Brownienne" simple ou fractionnaire. Au-delà du caractère en apparence chaotique, imprévisible donc aléatoire du mouvement Brownien, l'approche spectrale dans l'analyse de ce dernier atténue quelque peu sa complexité apparente pour révéler une organisation intrinsèque d'essence fractale et une évolution obéissant à une loi de puissance. Le mouvement Brownien, aujourd'hui largement admis, s'impose comme un modèle mathématique pratique comme générateur de séquences aléatoires dans la modélisation de phénomènes physiques orientés vers une dynamique fractale tels que la diffusion et les crises sismiques en sismologie.

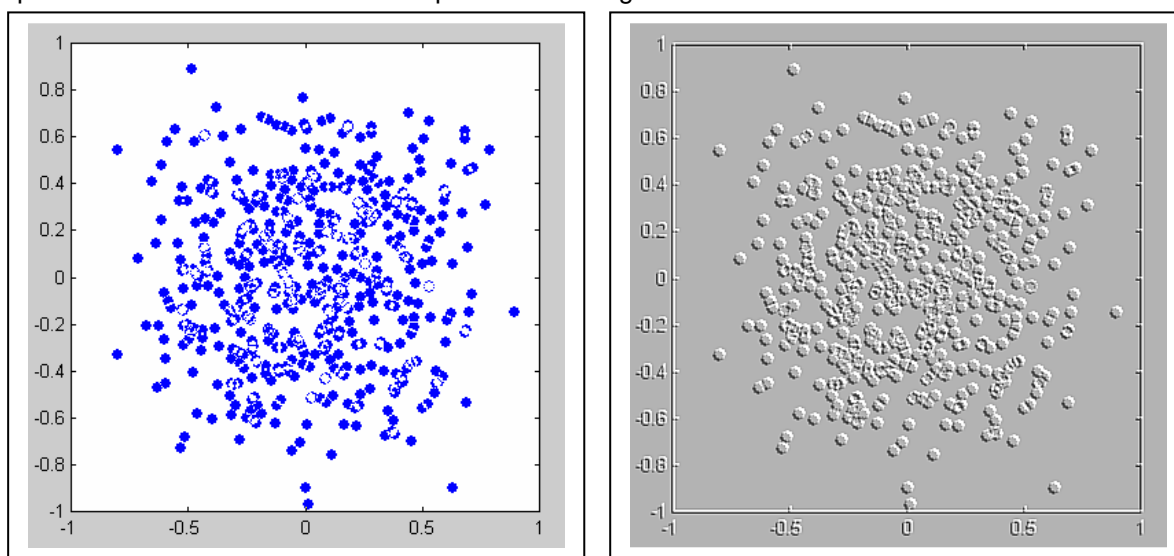


Fig.VIII-1 Simulation (animée) d'un mouvement Brownien de particules

I-1 PROCEDURE DE SIMULATION D'UN MOUVEMENT BROWNIEN MULTI – PARTICULAIRE (figure VIII-2 (a))

1. définir le nombre de particules ($n = 500$ dans notre cas)
2. fixer la vitesse de migration des particules ($v = 0.02$)
3. création de deux séquences aléatoires x et y (instruction *rand*) le long de chacun des axes x et y
4. simulation du mouvement aléatoire Brownien bidimensionnel par rapport à chacun des axes en incluant les vitesses de déplacement :

$$x = x + v \text{rand}(n,1)$$

$$y = y + v \text{rand}(n,1)$$

5. capture et "plotting" de chaque position de la particule mobile

Une courbe de distribution du nombre de "visites" de chaque accompagne le mouvement particulaire Brownien mettant ainsi en évidence le caractère erratique des trajectoires de chaque particule.

I-2 SIMULATION DU CHEMINEMENT ALEATOIRE (figure VIII-2 (b))

La procédure ne diffère pas grandement de celle développée dans le mouvement particulaire Brownien lequel est ramené dans ce cas à une trajectoire unique se mouvant dans l'espace suivant les trois directions x, y, z .

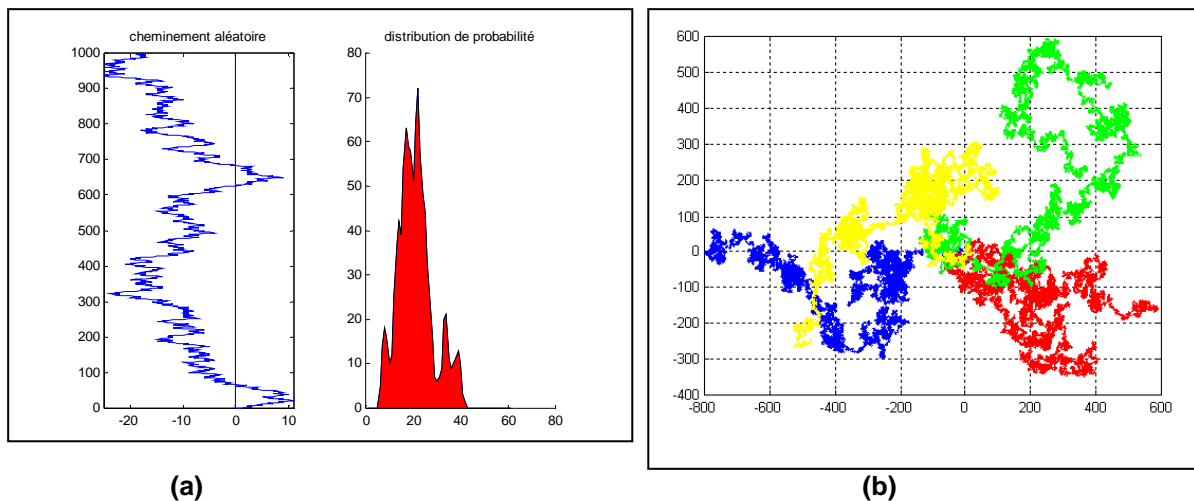


fig. VIII-2 un mouvement Brownien sommaire: le cheminement aléatoire (ou "marche d'ivrogne")

II- ANALYSE ET SIMULATION D'UN MOUVEMENT BROWNIEN STANDARD

II-1 PARAMETRES D'IDENTIFICATION D'UN MOUVEMENT BROWNIEN

Un processus à valeurs réelles $[(B_t, t \geq 0)]$ est dit Brownien s'il est à accroissements indépendants et stationnaires (i.e. la loi de $(B_t - B_s)$ est identique à celle de $(B_{s-t} - B_0)$ pour $s \leq t$) et caractérisé par des trajectoires presque sûrement continues. L'une des premières propriétés fondamentales issue de l'une des variantes du théorème de la limite centrale affirme que si $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien, alors la variable aléatoire $(B_t - B_0, t \geq 0)$ suit une loi gaussienne de moyenne (αt) et de variance (σt) , α et σ étant deux scalaires.

Le mouvement Brownien standard (ou classique) se rapporte aux conditions suivantes:

- $B_0 = 0$
- $\alpha = 0$ donc de moyenne nulle
- $\sigma = 1$ donc de variance 1

Un mouvement Brownien standard est donc perçu comme une trajectoire gaussienne, continue et à accroissements indépendants. Partant de ces hypothèses et principalement du caractère gaussien du mouvement Brownien standard, il est possible de simuler un tel type de processus avec cependant une restriction non moins importante : le caractère indépendant des accroissements élémentaires nécessaires à la construction du processus Brownien global.

II-2 UNE TECHNIQUE DE SIMULATION DU MOUVEMENT BROWNIEN

La procédure de simulation d'un mouvement Brownien $(B_t, t \geq 0)$ reposera sur la détermination de la loi de

$\left(B_{\frac{t+s}{2}}, t, s \geq 0 \right)$ dès lors que sont connues les lois de $(B_t, t \geq 0)$ et $(B_s, s \geq 0)$. Si nous supposons que si

$s \leq t$, nous définissons le vecteur des gaussiennes indépendantes suivantes: $\left(B_s, B_{\frac{t+s}{2}} - B_s, B_t - B_{\frac{t+s}{2}} \right)$.

Les trois composantes de ce vecteur sont indépendantes au vu de la définition du mouvement Brownien (indépendance des accroissements). On considère la combinaison linéaire du triplet de variables aléatoires

gaussiennes $\left(B_{\frac{s+t}{2}}, B_s, B_t \right)$:

$$C_{\alpha, \beta} = B_{\frac{t+s}{2}} - \alpha B_s - \beta B_t \quad (\text{VIII-1})$$

L'objectif serait de déterminer les constantes α et β de sorte que la variable aléatoire $C_{\alpha, \beta}$, elle-même gaussienne centrée puisque combinaison linéaire de gaussiennes centrées, soit indépendante du couple (B_s, B_t) . Cela sera justifié en terme de covariances soit

$$\text{cov}(C_{\alpha, \beta}, B_s) = \text{cov}(C_{\alpha, \beta}, B_t) = 0 \quad (\text{VIII-2})$$

Il vient alors que

$$\text{cov}\left(B_{\frac{t+s}{2}}, B_s \right) - \alpha E(B_s^2) - \beta E(B_t B_s) = 0 \quad (\text{VIII-3})$$

La construction du mouvement Brownien standard tourne donc autour du calcul de $E(B_u B_v)$ pour $u \leq v$. Remarquons que

$$E(B_u B_v) = E(B_u B_v - B_u^2 + B_u^2) = E(B_u^2) + E[B_u (B_v - B_u)] \quad (\dots)$$

Comme $E(B_u) = 0$ (caractère gaussien centré de B_t) et que B_u et $(B_v - B_u)$ sont indépendances (indépendance des incréments de B_t), il reste donc que $E[B_u (B_v - B_u)] = 0$. Ajoutons que puisque B_u suit une loi gaussienne centrée, de variance u , donc $E(B_u^2) = u$. Ainsi pour $u \leq v$ nous avons $E(B_u B_v) = u$. Plus généralement pour tout t et tout s

$$E(B_t B_s) = \inf(t, s) \quad (\text{VIII-4})$$

A la lumière de la relation (VIII-4) on exprime dans ce qui suit la covariance suivante

$$\text{cov}(C_{\alpha, \beta}, B_s) = E(C_{\alpha, \beta} B_s) = E\left(B_{\frac{t+s}{2}} B_s \right) - \alpha E(B_s^2) - \beta E(B_t B_s) \quad (\text{VIII-5})$$

ou bien

$$\text{cov}(C_{\alpha, \beta}, B_s) = \inf\left(\frac{t+s}{2}, s \right) - \alpha s - \beta \inf(t, s) \quad (\text{VIII-6})$$

soit

$$\text{cov}(C_{\alpha,\beta} B_s) = \frac{t+s}{2} - s(\alpha + \beta) \quad (\text{VIII-7})$$

Un calcul similaire permet d'exprimer $\text{cov}(C_{\alpha,\beta}, B_t)$ et d'obtenir

$$\text{cov}(C_{\alpha,\beta}, B_t) = \frac{t+s}{2} - \alpha s - \beta t \quad (\text{VIII-8})$$

La relation $\text{cov}(C_{\alpha,\beta}, B_s) = \text{cov}(C_{\alpha,\beta}, B_t) = 0$ est vérifiée pour $\alpha = \beta = 1/2$. L'expression (VIII-1) donnant $C_{\alpha,\beta}$ prend alors la forme

$$C_{1/2,1/2} = \frac{B_{s+t}}{2} - \frac{1}{2}(B_s + B_t) \quad (\text{VIII-9})$$

La variable aléatoire $C_{1/2,1/2}$ est donc de type gaussien puisque exprimée comme une combinaison linéaire de variables aléatoires gaussiennes. Centrée par construction, elle est caractérisable par sa variance en tenant compte du "centrage" des variables aléatoires constitutives

$$\text{var}(C_{1/2,1/2}) = E \left[\left(\frac{B_{s+t}}{2} - \frac{1}{2}(B_s + B_t) \right)^2 \right] \quad (\text{VIII-10})$$

Le résultat (VIII-4) appliqué sur (VIII-10) aboutit à écrire

$$\text{var}(C_{1/2,1/2}) = \frac{1}{4}(t-s) \quad (\text{VIII-11})$$

La variable aléatoire gaussienne centrée $C_{1/2,1/2}$ est ainsi caractérisée par son écart – type

$$e = \frac{1}{2} \sqrt{t-s} \quad (\text{VIII-12})$$

Une possibilité de construction de la gaussienne $C_{1/2,1/2}$ est de poser

$$C_{1/2,1/2} = \frac{1}{2} \sqrt{t-s} G_{s,t} \quad (\text{VIII-13})$$

$G_{s,t}$ étant une gaussienne fixée *a priori* dans la modélisation et indépendante de B_s et de B_t . L'algorithme de simulation du mouvement Brownien prend naissance à partir de la relation (VIII-9) permettant d'écrire

$$\frac{B_{s+t}}{2} = C_{1/2,1/2} + \frac{1}{2}(B_s + B_t) \quad \text{avec} \quad C_{1/2,1/2} = \frac{1}{2} \sqrt{t-s} G_{s,t} \quad (\text{VIII-14})$$

La figure VIII-3 est une illustration de la procédure de simulation du mouvement Brownien relativement à cette approche.

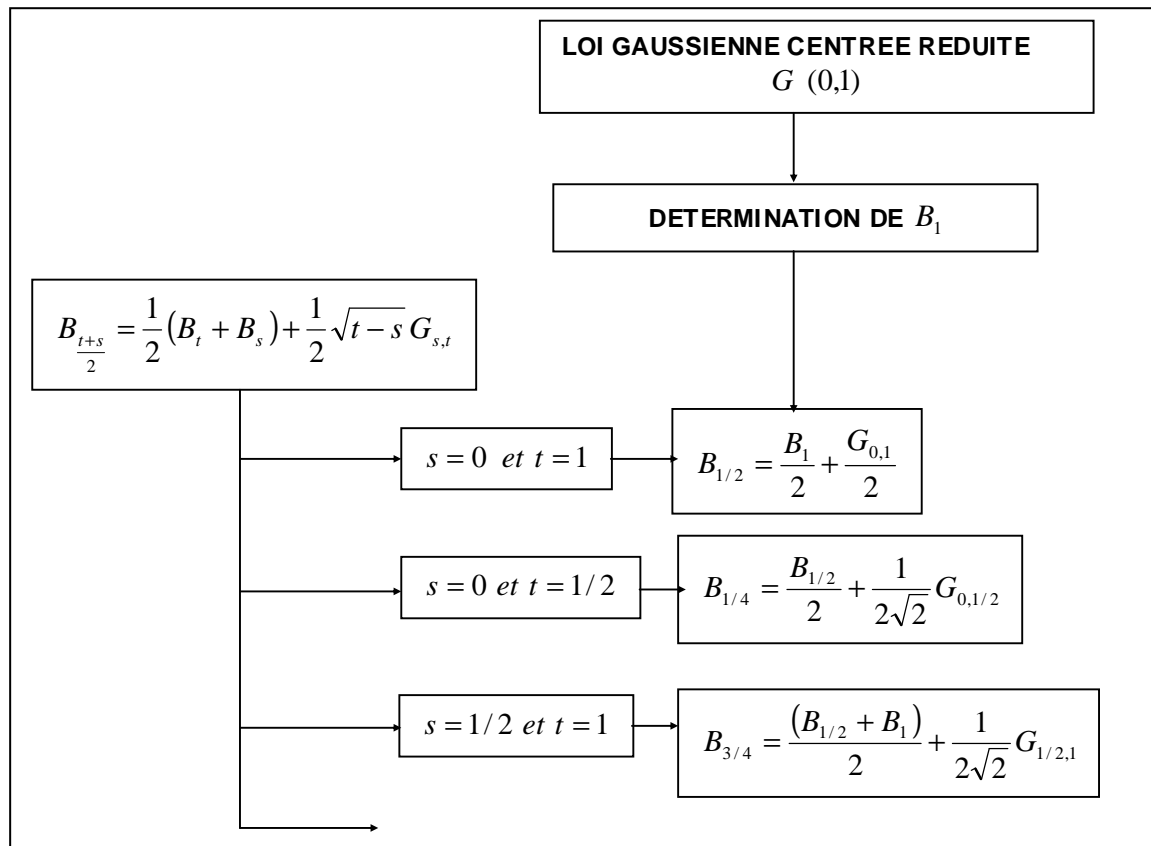


fig. VIII-3 procédure algorithmique de simulation du mouvement Brownien

III- LE MOUVEMENT BROWNIEN STANDARD : UN PROCESSUS FRACTAL

Le mouvement Brownien qu'il soit standard ou fractionnaire jouit d'une double signature: une évolution temporelle stochastique qui s'apparente aux systèmes auto – organisés critiques dont nous développerons certains aspects de leur morphologie dans le présent travail avec un prolongement dans l'analyse des signaux sismologiques et une signature fractale révélée par une irrégularité apparente mais sous- tendue par une invariance d'échelle donc de duplication des formes et des structures. Cette signature fractale peut être confirmée par diverses approches (loi de puissance, dimension fractale...) qui convergent dans leur ensemble vers un critère fondamental dans les processus fractals : le principe d'auto – similarité. Nous préconisons une analyse de la reconnaissance de la fractalité du mouvement Brownien issue d'une transformée en ondelettes continue.

III-1 ANALYSE PAR TRANSFORMATION EN ONDELETTES D'UN PROCESSUS BROWNIEN

L'analyse spectrale induite par la transformation de Fourier a montré certaines de ses limites dès lors que les signaux exhibent un comportement non stationnaire traduit par une variation de la fréquence par rapport au temps. La Transformation de Fourier dite à Court Terme (TFCT) ou par fenêtre (la stationnarité devenant alors locale) aurait pu en constituer un palliatif à travers une analyse temps – fréquence primaire délivrée par le spectrogramme; cependant, des contraintes inhérentes à la nature, à la géométrie de la fenêtre et à la dynamique de translation de cette dernière sont autant de facteurs de dissuasion dans l'application de la TFCT dans l'analyse fine et la détection des autosimilarités "fractales" dans le mouvement Brownien noyées en dépit d'un contexte d'irrégularités apparentes.

L'analyse par transformation en ondelettes continues (continue wavelet transform) permet d'effectuer une décomposition selon une base orthonormale du mouvement Brownien relativement à une base d'ondelettes jouissant de propriétés avantageuses comparées aux fenêtres de la TFCT et présentant une bonne localisation dans le domaine temps-fréquence. Apparentée à une analyse temps-échelle dite aussi de multi- résolution, les performances de la résolution ré d'une transformation en ondelettes

repose essentiellement sur le choix de la base d'ondelettes de décomposition générée à partir d'une ondelette "mère" préalablement fixée. Soit $\psi(t)$ une ondelette réelle mère affectée d'un facteur échelle $a, (a > 0)$ et d'une amplitude de translation temporelle b donnant ainsi naissance à une ondelette "filles" $\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$. Nous posons $\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \psi_{a,b}(t)$. Pour accomplir son rôle d'ondelette analysante, "l'ondelette mère" est astreinte à certaines conditions qui en font une fonction particulière, une ondelette précisément

- $\psi(t)$ doit être d'énergie unité soit $\int |\psi(t)|^2 = 1$
- $\psi(t)$ à support compact ou à décroissance rapide pour lui permettre une bonne localisation en temps
- $\psi(t)$ doit vérifier la condition d'admissibilité exprimée dans le domaine fréquentiel par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(f)|^2}{|f|} df < +\infty \tag{VIII-15}$$

la fonction $|\Psi(f)|$ désignant son spectre d'amplitude. Une conséquence immédiate est que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$$

c'est-à-dire que la fonction $\psi(t)$ est moyenne nulle

La décomposition d'un signal $s(t)$ dans la base d'ondelettes $\{\psi_{a,b}(t)\}$ sera matérialisée dans le plan temps- échelle (b,a) par la collection des coefficients d'ondelettes $C(b,a)$ tels que

$$C(b,a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \psi_{a,b}(t) dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \tag{VIII-16}$$

Le facteur de normalisation $1/\sqrt{a}$ assure un même niveau d'énergie à toutes les échelles a . A bien des égards, l'expression (VIII-16) n'est autre qu'une forme de cross – corrélation entre le signal à analyser $s(t)$ et les différentes versions de l'ondelette analysante $\psi(t)$. Ceci a pour conséquence l'obtention de coefficients $C(b,a)$ munis de valeurs différentes ce qui permet de les classer par le biais d'une barre de couleurs dégradées, allant de la valeur minimale à la valeur maximale de ces coefficients. La nature "temps -fréquence" de la transformation en ondelette est déduite du principe que "l'ondelette- fille soumise sur le plan échelle (facteur échelle a) à une double opération de contraction et de dilatation est caractérisée par un spectre d'amplitude en constante variation avec un facteur- échelle en $1/a$ dans le domaine fréquentiel (figure VIII-4)

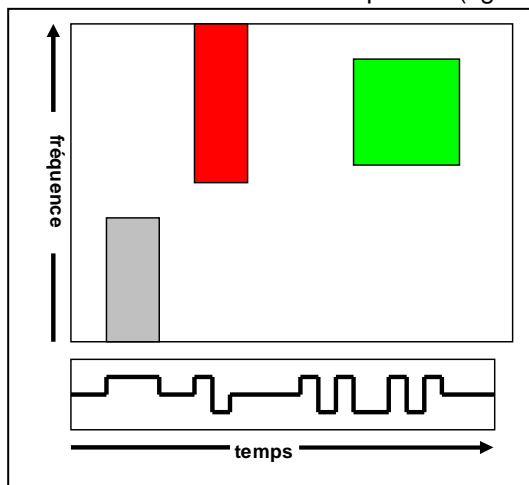


fig. VIII-4 principe de l'analyse par la transformée en ondelettes d'un processus Brownien

Après génération d'un signal de type Brownien (figure VIII-5 (a)) et sélection d'une ondelette mère analysante en l'occurrence l'ondelette dite "chapeau mexicain" $mexh(t)$ obtenue comme la dérivée seconde d'une ondelette plus courante, la gaussienne, elle admet pour expression

$$mexh(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} (1 - t^2) \exp(-t^2 / 2) \tag{VIII-17}$$

Le choix de ce type d'ondelette est dicté par un critère de résolution graphique de mise en évidence des structures imbriquées formant le signal Brownien..

Le "toolbox wavelet" implémenté dans le système Matlab permet à la fois la représentation temps du signal Brownien et sa transformée en ondelette (figure VIII-5 (b)). Cette dernière met en évidence dans le plan temps-échelle des structures imbriquées régulièrement réparties en temps mais répertoriées à des échelles différentes confirmant leur aspect d'auto- similarité qui leur confère un caractère fractal.

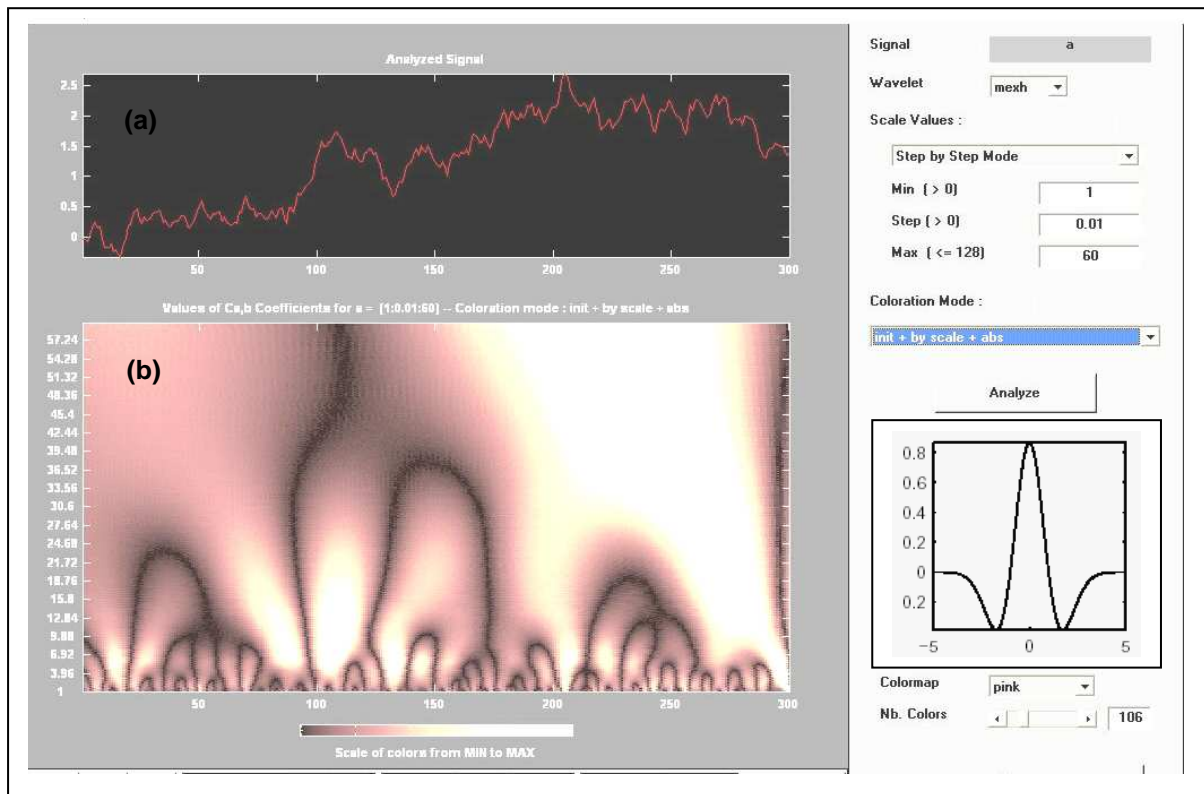


fig. VIII-5 Transformée en ondelette d'un mouvement Brownien standard (ondelette analysante: type "chapeau mexicain ")

III- 2 ANALYSE STATISTIQUE ET SPECTRALE DU MOUVEMENT BROWNIEN

A travers l'analyse spectrale du mouvement Brownien, il est attendu une mise en évidence du caractère de d'autosimilarité de ce processus, l'autosimilarité constituant l'un des vecteurs mathématiques dans les constructions fractales. Rappelons que l'autosimilarité tant au sens strict que statistique se réfère à l'invariance d'échelle par rapport à des compositions de translation ou de contraction capables de révéler des structures "lisibles" et ce à toutes les échelles d'observation. Une simulation simple du mouvement Brownien repose donc sur la construction d'une trajectoire de déplacement aléatoire issu du choix de deux paramètres: un paramètre lié au déplacement ou à la longueur noté ξ et un paramètre de temps τ définissant l'intervalle d'observation. Il est supposé e outre, que les axes de longueur ξ et de temps τ sont orthogonaux. Nous fixons l'hypothèse naturelle que la distribution p de la variable aléatoire ξ est de type gaussien centrée $[E(\xi) = 0]$ de la forme

$$p(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma\tau}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4\sigma\tau}\right] \quad (\text{VIII-18})$$

L'estimation de la variance σ_ξ^2 de la variable aléatoire ξ est obtenue par le calcul du moment d'ordre 2 de la distribution $p(\xi, \tau)$

$$\sigma_\xi^2 = E(\xi^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 p(\xi, \tau) d\xi = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \exp\left[-\frac{\xi^2}{4\sigma\tau}\right] d\xi \quad (\text{VIII-19})$$

Nous préconisons la méthode spectrale via la Transformation de Fourier (TF) pour exprimer l'intégrale figurant au second membre de (VIII-19) en précisant que

$$TF[\xi^2]_{\xi \leftrightarrow \alpha} = -\frac{1}{4\pi^2} \delta''(\alpha) \quad (\text{VIII-20})$$

$$TF\left[\exp\left(-\frac{\xi^2}{4\sigma\tau}\right)\right] = 2\sqrt{\sigma\tau}\sqrt{\pi} \exp\left[-\pi^2(2\alpha\sqrt{\sigma\tau})^2\right] \quad (\text{VIII-21})$$

A travers les propriétés de la distribution de Dirac δ , la variance σ_ξ^2 , il vient

$$\sigma_\xi^2 = E(\xi^2) = 2\sigma\tau \quad (\text{VIII-22})$$

Expression de la séquence de déplacements globale:

La séquence globale par rapport au déplacement ξ est constituée des différentes "étapes" $[\xi_k]_{k=1,n}$ du cheminement aléatoire. La position X du mobile sur la l'axe des distances perpendiculairement à l'axe des temps τ est donnée par

$$X(t = n\tau) = \sum_{k=1}^n \xi_k \quad (\text{VIII-23})$$

Lorsque $\tau \rightarrow 0$, la position du mobile devient une fonction aléatoire $B(t)$ dite fonction Brownienne.

En pratique, la position du mobile est observée en des instants ($b\tau$). Supposons que l'observation de l'évolution du processus est effectuée en des instants 2τ . L'incrément ξ relativement à la position du mobile est alors composé de deux incréments élémentaires ξ' et ξ'' indépendants assurant ainsi une indépendance statistique. De ce fait, la distribution conjointe $p(\xi', \xi'', \tau)$ est égale au produit des distributions marginales $p(\xi', \tau)$ et $p(\xi'', \tau)$

$$p(\xi', \xi'', \tau) = p(\xi', \tau).p(\xi'', \tau) \quad (\text{VIII-24})$$

La résultante du déplacement ou déplacement global ξ est tel que $\xi = \xi' + \xi''$ pour un temps équivalent à 2τ . L'expression analytique de la distribution statistique p admet alors pour expression

$$p(\xi, 2\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi - \xi', \tau).p(\xi', \tau) d\xi' \quad (\text{VIII-25})$$

Nous préconisons la méthode "convolutive" pour exprimer l'intégrale figurant au second membre de (VIII-25) en écrivant :

$$p(\xi, 2\tau) = [p(\xi, \tau)]^{*2} \quad (\text{VIII-26})$$

Le symbole $[]^{*2}$ désigne le carré de convolution de la fonction sise entre crochets. Comme dans l'expression (VIII-21), l'approche spectrale permet d'évaluer ce dernier et aboutir au résultat

$$p(\xi, 2\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma(2\tau)}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4\sigma(2\tau)}\right] \quad (\text{VIII-27})$$

La variance σ_ξ^2 calculée pour cet incrément de temps i.e. 2τ admet pour expression

$$\sigma_\xi^2 = E(\xi^2) = 2\sigma(2\tau) \quad (\text{VIII-28})$$

Il ressort donc que pour un incrément temporel de déplacement égal à 2τ , le processus Brownien conserve sa "gaussianité" mais avec une variance σ_ξ^2 double de celle observée pour un temps simple τ . Ce développement peut être généralisée à toute variation d'échelle des temps de la forme $b\tau$, ($b \in \mathcal{R}^+$ en ce sens que

$$p(\xi, b\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma(b\tau)}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4\sigma(b\tau)}\right] \quad (\text{VIII-29})$$

$$E(\xi^2) = 2\sigma(b\tau) \quad (\text{VIII-30})$$

Il ressort ainsi que le mouvement Brownien considéré, muni d'une distribution de type gaussien par rapport à la variable spatiale ξ conserve ce caractère gaussien, en distribution et en variance statistique. Il s'agit donc d'un processus à invariance d'échelle temporel, une propriété partielle du comportement fractal.

L'invariance d'échelle peut revêtir une forme bidimensionnelle et être prolongée au plan espace-temps; si nous posons par exemple $\xi^* = \sqrt{b}\xi$ et $\tau^* = b\tau$, la distribution statistique définie en (VIII-18) devient:

$$p(\xi^* = \sqrt{b}\xi, \tau^* = b\tau) = \frac{1}{\sqrt{b}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma\tau}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4\sigma\tau}\right] \right\} \quad (\text{VIII-31})$$

En d'autres termes

$$p(\xi^* = \sqrt{b}\xi, \tau^* = b\tau) = \frac{1}{\sqrt{b}} p(\xi, \tau) \quad (\text{VIII-32})$$

Le mouvement Brownien est donc conservé sur le plan statistique sous l'action de transformations d'échelles, en temps et en distance; il jouit donc de la propriété de self – affinité.

IV- LE MOUVEMENT BROWNIEN : UN PROCESSUS AUTO - SIMILAIRE STATISTIQUE

IV-1 L'AUTO- SIMILARITE STATISTIQUE

Un processus aléatoire $x(t), t \in \mathcal{R}$, est dit statistiquement self – similaire si ses caractéristiques statistiques sont invariantes sous l'effet de contractions ou de dilatations de l'échelle des temps t . Précisément, un tel processus aléatoire $X(t)$ statistiquement self – similaire, de paramètre H obéit à la relation d'échelle suivante

$$X(t) \equiv k^{-H} X(kt) \quad (\text{VIII-33})$$

l'égalité étant vérifiée au sens statistique. Au sens strict, la self – similarité est considérée au sens des distributions de probabilité conjointe de dimension finie. Dans un sens encore plus large, l'égalité peut être interprétée au sens des statistiques de second ordre c'est – à – dire en moyenne statistique M_x et en covariance R_{xx} :

$$M_x [X(t)] = E[X(t)] = k^{-H} E[X(kt)] \quad (\text{VIII-34})$$

$$R_{xx}(t, s) = E[X(t), X(s)] = k^{-2H} R_{xx}(kt, ks) \quad (\text{VIII-35})$$

On se restreint aux processus aléatoires gaussiens pour lesquels les propriétés (VIII-34) et (VIII-35) sont vérifiées. Notons que les processus présentant une autosimilarité statistique se distinguent par une grande variété de comportements. La figure VIII-6 est la représentation d'une trajectoire Brownienne dont il est aisé de remarquer, sans effet d'agrandissement, le phénomène d'auto – similarité intrinsèque à la courbe et que révèle des répétitions localisées de certaines formes.

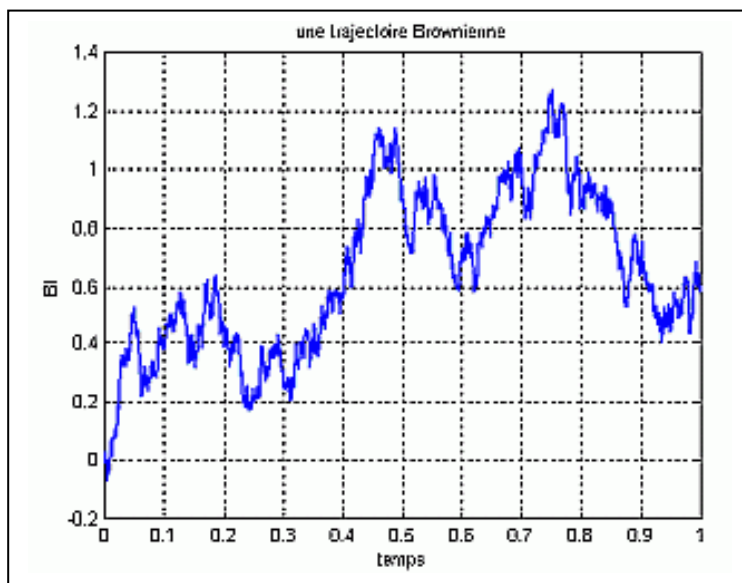


Fig.VIII-6 une trajectoire Brownienne

IV-2 CRITERE FONDAMENTAL DE L'AUTO- SIMILARITE

En analyse fonctionnelle, la fonction réelle f de la variable réelle y est dite auto -similaire, de coefficient H si la relation suivante est vérifiée:

$$\forall y_0, \forall \lambda > 0 : f(y_0 + \lambda y) \approx \lambda^H f(y + y_0) \tag{VIII-36}$$

Par extension, le processus aléatoire $X(t)$ est dit self – affine si l'égalité au sens statistique si on a

$$X(t + \lambda \Delta t) - X(t) = \lambda^H [X(t + \Delta t) - X(t)] \tag{VIII-37}$$

Il est ainsi mis en évidence un exposant H dit coefficient de Hurst dont le choix influe sur le comportement du processus Brownien , dans le domaine temps et sur le plan spectral, comme il sera étudié dans le développement relatif aux bruits dits en $1/f$.

V- LE MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE (MBF)

Le mathématicien Benoît Mandelbrot a introduit le concept de mouvement Brownien fractionnaire (MBF) comme la généralisation à la fonction $X(t)$ des incréments de moyenne nulle et de variance proportionnelle à $|t - t_0|^{2H}$ avec $0 < H < 1$. Le cas $H = 1/2$ correspond au mouvement Brownien classique. Notons que si $X(t_0)$ désigne un état défini en $[t = t_0]$ du processus aléatoire Brownien $X(t)$ tel que défini par (VIII-33), la distribution de la densité de probabilité de la différence $[X(t) - X(t_0)]$ est donnée par l'expression

$$p[X(t) - X(t_0)] = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma|t-t_0|}} \exp\left\{-\frac{[X(t) - X(t_0)]^2}{4\sigma|t-t_0|}\right\} \quad (\text{VIII-38})$$

devant vérifier la relation d'échelle

$$p[\sqrt{b}\{X(t) - X(t_0)\}] = \frac{1}{\sqrt{b}} p[X(t) - X(t_0)] \quad (\text{VIII-39})$$

La moyenne de cette même distribution est nulle en ce sens que

$$E[X(t) - X(t_0)] = 0 \quad (\text{VIII-40})$$

et sa variance obtenue par identification avec celle donnée en (VIII-22)

$$E\{[X(t) - X(t_0)]^2\} = 2\sigma|t-t_0| \quad (\text{VIII-41})$$

Partant de ces considérations, le mouvement Brownien fractionnaire noté $B_H(t)$ sera défini comme une généralisation de la fonction $X(t)$ tels que les incréments de cette dernière sont de moyenne nulle et de variance proportionnelle à $|t-t_0|^{2H}$ avec $0 < H < 1$ mais rarement à $|t-t_0|$. Les relations (VIII-40) et (VIII-41) étendues au MBF s'écrivent

$$E[B_H(t) - B_H(t_0)] = 0 \quad (\text{VIII-42})$$

$$E\{[B_H(t) - B_H(t_0)]^2\} = 2\sigma\tau \left[\left| \frac{t-t_0}{\tau} \right|^{2H} \right] \quad (\text{VIII-43})$$

De l'expression (VIII-43) se dégage la relation de proportionnalité suivante

$$E\{[B_H(t) - B_H(t_0)]^2\} \propto |t-t_0|^{2H} \quad (\text{VIII-44})$$

VI- MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE AUTO - SIMILAIRE

Le mouvement Brownien fractionnaire exhibe également un caractère fractal mis en évidence par des plages d'auto- similarité et par l'invariance d'échelle. Relativement à une figure, le critère d'auto – similarité renvoie à la présence de structures atomes qui intrinsèquement, présentent chacune les mêmes propriétés que la figure globale. Il est évalué par le biais d'un coefficient dit de similarité désigné par H dans l'expression (VIII-33). Affirmer que deux processus sont statistiquement similaires requiert de ces deux derniers d'avoir des lois de distribution identiques, ce qui n'est pas toujours le cas. Notre intérêt portera sur la détermination du coefficient de similarité H . Pour cela, on définit deux facteurs de ré- étalonnage ou d'amplification E_t et E_x relativement à chacun des axes abscisses et ordonnées en ce sens que $t \mapsto E_t.t$ et $X \mapsto E_x.X$. Partant de l'expression (VIII-33) légèrement modifiée, l'identité suivante est alors vérifiée

$$E_x.[X(E_x.t)] = E_t^{-H} X(E_t.t) \quad (\text{VIII-45})$$

En considérant le logarithme des deux membres de (VIII-45), le facteur d'auto – similarité H est tel que

$$H = \frac{\log E_t}{\log E_x} \quad (\text{VIII-46})$$

Pour la détermination des facteurs d'amplification E_t et E_X , il suffit d'impliquer les rapports, pour une même entités avant et après amplification relativement à l'axes des temps t et l'axe des variables X

$$E_t = \frac{t'_i}{t_i} ; E_X = \frac{X'_i}{X_i} \quad (\text{VIII-47})$$

En introduisant les expressions de (VIII-47) dans l'équation (VIII-46), le coefficient d'auto – similarité H prend la forme

$$H = \frac{\log t'_i - \log t_i}{\log E'_i - \log E_i} \quad (\text{VIII-48})$$

En fonction du mode d'amplification choisi (contraction ou dilatation), le coefficient d'auto – similarité H apparaît comme la pente de la droite joignant les points $M'_i(t'_i, X'_i)$ et $M_i(t_i, X_i)$ par rapport à un repère étalonné en échelle bilogarithmique. Ce procédé est réitéré dans l'analyse spectrale des processus stochastiques auto – similaires fractals permettant le calcul de la dimension fractale D connaissant le coefficient de Hurst H et inversement.

Des simulations de processus stochastiques auto – similaires sont données par la figure (VIII-7) qui met en évidence l'influence du coefficient de Hurst H non seulement sur leur morphologie mais surtout le caractère des irrégularités. Tout comme dans le cas du mouvement Brownien fractionnaire, les irrégularités les plus prononcées donc pour un lissage altéré, correspondent aux faibles valeurs du coefficient d'auto - similarité .

Le mouvement Brownien fractionnaire est self – affine en ce sens que

$$[B_H(t+t_0) - B_H(t_0)] = \frac{1}{b^H} [B_H(t_0 + bt) - B_H(t_0)] \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall b > 0 \quad (\text{VIII-49})$$

Pour $t_0 = 0$ et $B_H(t_0) = 0$, la relation de self similaire du MBF (VIII-49) devient

$$B_H(t) = b^{-H} B_H(bt) \quad (\text{VIII-50})$$

Nous retrouvons donc aussi le critère de self –similaire au sens statistique.

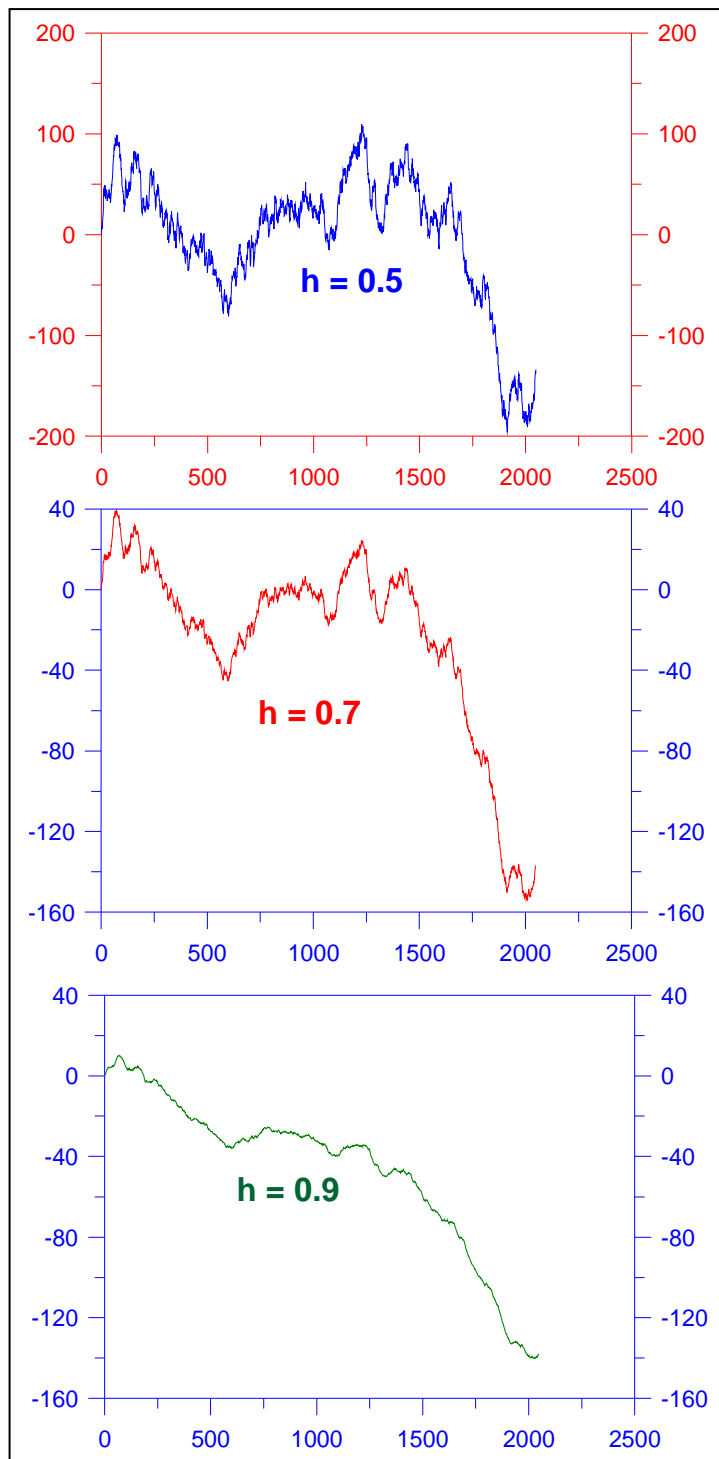


fig .VIII-7 Trajectoires Browniennes fractionnaires en fonction du coefficient de Hurst

VII- LE MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE GENERALISE

La généralisation du MBF au cas multidimensionnel est directe: si $B_H \left[\{t_i\}_{i=1,n} \right]$ définit un champ aléatoire vérifiant les conditions suivantes:

- 1) les incréments $(B_H[\{t_i\}_{i=1,n}] - B_H[\{s_i\}_{i=1,n}])$ sont de type gaussien de moyenne nulle
- 2) la variance des incréments $(B_H[\{t_i\}_{i=1,n}] - B_H[\{s_i\}_{i=1,n}])$ dépend uniquement de distance $\sqrt{\sum_{i=1}^n (t_i - s_i)^2}$. Cette variance est alors assujettie à la relation de proportionnalité

$$E\left\{ \left[B_H(\{t_i\}_{i=1,n}) - B_H(\{s_i\}_{i=1,n}) \right]^2 \right\} \propto \left[\sum_{i=1}^n (t_i - s_i)^2 \right]^H \quad (\text{VIII-51})$$

VIII- SPECTRE DE PUISSANCE ET STRUCTURE DE CORRELATION D'UN MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE

Les caractéristiques spectrales du mouvement Brownien ont inspiré la construction d'une catégorie de signaux qualifiés souvent de bruits "nobles" (les bruits en $1/f$ en particulier) dont les retombées d'application intègrent des domaines variés tel que le phénomène sismologique comme abordé dans le présent travail.

Le caractère de persistance ou les corrélations relativement longues forment les caractéristiques les plus importantes du mouvement Brownien fractionnaire. L'étude de la persistance est reliée à la corrélation et à la structure spectrale du MBF.

Soit $B_H(t)$ un mouvement Brownien fractionnaire self – affine, de coefficient H donc vérifiant la relation (VIII-50) i.e. $B_H(t) = b^{-H} B_H(bt)$. Sur un intervalle de largeur T posons

$$x_H(t, T) = b^{-H} B_H(t) \cdot \Pi\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right) \quad (\text{VIII-52})$$

avec

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1/2 \leq t \leq 1/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{VIII-53})$$

L'expression (VIII-52) ne représente rien d'autre que l'observation du mouvement Brownien $B_H(t)$ à travers une fenêtre naturelle de largeur T afin de lui conférer un état stationnaire

$$x_H(t, T) = b^{-H} B_H(bt) \cdot \Pi\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right) \quad (\text{VIII-54})$$

En exprimant la Transformation de Fourier de chacun des membres de (VIII-54) après avoir posé

$$TF[x_H(t, T)]_{t \leftrightarrow f} = X_H(f, T) \quad \text{et} \quad C_H(f, T) = TF[B_H(t)]_{t \leftrightarrow f} \quad (\text{VIII-55})$$

nous obtenons

$$X_H(f, T) = \frac{1}{b^{H+1}} C_H\left(\frac{f}{b}, bT\right) \quad (\text{VIII-56})$$

Si $S_H(f, T)$ désigne la densité spectrale calculable à partir de $X_H(f, T)$ en ce sens que

$$S_H(f, T) = \frac{1}{T} |X_H(f, T)|^2 \quad (\text{VIII-57})$$

nous obtenons la forme d'écriture suivante

$$S_H(f, T) = \frac{1}{bT} \left(\frac{1}{b^{2H+1}} \right) \left| C_H\left(\frac{f}{b}, bT\right) \right|^2 \quad (\text{VIII-58})$$

Le passage à la limite dans (VIII-58) lorsque la largeur de la fenêtre $\Pi_T(t)$ devient infinie, permet d'exprimer le spectre d'énergie dans sa totalité

$$S_H(f) = \frac{1}{b^{2H+1}} \cdot \left[\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{bT} \left| C_H \left(\frac{f}{b}, bT \right) \right|^2 \right] \quad (\text{VIII-59})$$

La limite insérée entre crochets dans le second membre de (VIII-59) n'est autre que le spectre d'énergie du mouvement Brownien fractionnaire $B_H(t)$ et que noterons $\mathcal{B}_H(f)$; donc

$$S_H(f) = \frac{1}{b^{2H+1}} \mathcal{B}_H \left(\frac{f}{b} \right) \quad (\text{VIII-60})$$

Comme $B_H(t, T)$ et $x_H(t, T)$ sont statistiquement identiques, on en déduit que

$$\mathcal{B}_H(f) = \frac{1}{b^{2H+1}} \mathcal{B}_H \left(\frac{f}{b} \right) \quad (\text{VIII-61})$$

Pour $b = f$ il vient que

$$\mathcal{B}_H(f) = \frac{1}{f^{2H+1}} \mathcal{B}_H(1) \quad (\text{VIII-62})$$

En posant $\alpha = 2H + 1$, il découle de (VIII-62) la relation de proportionnalité

$$\mathcal{B}_H(f) \propto \frac{1}{f^\alpha} \quad (\text{VIII-63})$$

L'expression (VIII-63) est l'une des caractéristiques fondamentales des processus self – affines sur le plan spectral et pour lesquels nous retenons les propriétés suivantes:

1. la densité spectrale est une loi de puissance qui implique que des fluctuations dans le processus apparaissent à toutes les échelles et que leur structure est statistiquement la même à toutes les fréquences

2. en conséquence $\mathcal{B}_H(f) \propto \frac{1}{f^\alpha}$ correspond au mouvement Brownien fractionnaire avec le

$$\text{coefficient de Hurst } H = \frac{\alpha - 1}{2}$$

3. la fonction de covariance $\text{cov}_{B_H}(\tau)$ du MBF est telle que

$$\text{cov}_{B_H}(\tau) = \tau^{\alpha-1} \quad \text{avec } 0 < \alpha < 1 \quad (\text{VIII-64})$$

4. pour $\alpha > 1$ l'expression (VIII-64) n'est pas valide et les fluctuations du mouvement Brownien fractionnaire sont non stationnaires

5. de nombreux champs d'ondes en géophysique sont caractérisés par $\alpha > 1$ et peuvent de ce fait être considérés comme des processus stationnaires

6. le mouvement Brownien classique correspond à un coefficient de Hurst $H = 1/2$ soit pour $\alpha = 2$; la densité spectrale $\mathcal{B}_{1/2}(f)$ correspondante est donc $\mathcal{B}_{1/2}(f) = 1/f^2$

IX- ANALYSE DES CARACTERISTIQUES DE PERSISTANCE DU MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE

Les caractéristiques de persistance d'un mouvement Brownien fractionnaire $B_H(t)$ peuvent être mieux appréhendée à la travers la corrélation de ses états antérieurs et futurs. Ceci peut être déterminé par l'expression de la covariance ente les états $[-t, 0]$ et $[0, t]$ des incréments $\Delta B_H(t)$

$$\text{cov}[\Delta B_H(t)] = E\{[B_H(0) - B_H(-t)][B_H(t) - B_H(0)]\} \quad (\text{VIII-65})$$

Sous la condition $B_H(0) = 0$, nous obtenons

$$\text{cov}[B_H(t)] = E[-B_H(-t).B_H(t)] \quad (\text{VIII-66})$$

Si dans les relations (VIII-42) et (VIII-44) précédemment définis, nous posons $t_0 = -t$ il vient que

$$E\{[B_H(t) - B_H(-t)]^2\} = 2\sigma\tau \left| \frac{2t}{\tau} \right|^{2H} \propto |2t|^{2H} \quad (\text{VIII-67})$$

Après développement, l'expression (VIII-67) conduit au résultat suivant

$$E[B_H^2(t)] - E[B_H(t).B_H(-t)] = \sigma\tau \left| \frac{2t}{\tau} \right|^{2H} \quad (\text{VIII-68})$$

Si nous fixons $\tau = 1$ et $2\sigma\tau = 1$ alors $\sigma = 1/2$; l'expression (VIII-67) devient

$$E[B_H^2(t)] - E[B_H(t).B_H(-t)] = 2^{2H-1} |t|^{2H} \quad (\text{VIII-69})$$

Comme précisé plus haut, l'objectif consiste à estimer la corrélation entre les états antérieurs et futurs du mouvement Brownien fractionnaire à travers l'expression du coefficient de corrélation $\rho_{\Delta B_H}(t)$ de l'incrément $\Delta B_H(t)$:

$$\rho_{\Delta B_H(t)} = \frac{\text{cov}[\Delta B_H(t)]}{E[B_H^2(t)]} = -\frac{E[B_H(-t).B_H(t)]}{E[B_H^2(t)]} \quad (\text{VIII-70})$$

La combinaison de (VIII-69) et de (VIII-70) sous l'hypothèse $E[B_H^2(t)] = 2\sigma\tau = 1$, le coefficient de corrélation $\rho_{\Delta B_H}(t)$ s'écrit

$$\rho_{\Delta B_H(t)} = 2^{2H-1} |t|^{2H-1} - 1 \quad (\text{VIII-71})$$

Il ressort donc de (VIII-71) les cas spécifiques suivants:

- pour $H = 1/2$ (mouvement Brownien classique), $\rho_{\Delta B_H(t)} = 0$: absence de corrélation entre les incréments passés et futurs du processus
- pour $H \neq 1/2$, $\rho_{\Delta B_H(t)} \neq 0$: la corrélation n'est pas nul indépendamment de la distance séparant les incréments. Deux cas fondamentaux se présentent alors:
 - si $H > 1/2$, une fluctuation positive entraînera une fluctuation de même type dans le futur :
 - si $H < 1/2$, une décroissance dans le passé implique une décroissance de même type dans le futur

Il est remarqué aussi que les valeurs affectées à ce coefficient, tout comme dans le cas de l'auto – similarité, influent sur la texture du mouvement Brownien fractionnaire en particulier sur le caractère des irrégularités observées donc sur le degré de lissage des courbes représentatives

(figure VIII-5). Les irrégularités sont plus prononcées pour des valeurs de H voisines du seuil 0.5 (mouvement Brownien standard) et s'estompe par un lissage presque parfait pour les valeurs voisines de $H = 1$ comme il est à remarqué pour $H = 0.9$.

X- DIMENSION FRACTALE D'UN MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE

Le mouvement Brownien fractionnaire est caractérisé soit par l'exposant spectral α ou par le coefficient de Hurst H unis par la relation $\alpha = 2H + 1$. Une autre possibilité de caractériser un MBF est la dimension fractale D dont une version est la dimension dite de "boite" (box counting dimension). Nous établirons ce qui suit la relation liant la dimension fractale D et le coefficient de Hurst H . Désignons par T la durée d'observation d'un processus Brownien; Nous recouvrons cet enregistrement par des "boites" de largeur $b\tau$. Compte tenu du caractère de self –affinité du MBF, les incréments $\Delta B_H(t)$ vérifient la relation

$$\Delta B_H(b\tau) = b^H \Delta B_H(\tau) \quad (\text{VIII-72})$$

Pour "couvrir" l'ensemble du processus au cours de la durée d'observation temporaire T , on doit disposer de $T/b\tau$ boites et T/ba boites relativement à sa position ; cela nécessitera en fin de compte un nombre de boites $N(b, a, \tau)$ pour couvrir l'ensemble de l'enregistrement avec

$$N(b, a, \tau) = \frac{b^H \Delta B_H(\tau) T}{ba b\tau} \approx \frac{1}{b^{2-H}} \quad (\text{VIII-73})$$

La relation (VIII-73) permet d'exprimer la dimension fractale "box counting" D du MBF self – affine en fonction du coefficient de Hurst H et tel que

$$D = 2 - H \quad (\text{VIII-74})$$

L'expression (VIII-74) ne reflète réellement la dimension de boite du mouvement Brownien que si la dimension a des boites de recouvrement est petite par rapport à la taille de l'enregistrement. Ainsi pour $a = 1$, une seule boite suffirait à recouvrir l'incrément $\Delta B_H(t)$ pour un segment de temps $b\tau$ pour la durée d'observation T du processus. Ainsi

$$N(b, 1, \tau) \approx \frac{T}{b\tau} \approx \frac{1}{b} \quad (\text{VIII-75})$$

La dimension "box counting" est alors confondue avec la dimension topologique puisque $D = 1$. La dimension fractale de boite est donc supérieure à la dimension topologique.

Pour a relativement grand, l'analyse du mouvement Brownien revêt un caractère global auquel échapperait la perception de la fractalité du mouvement Brownien, cette dernière dépendant donc d'une échelle d'observation.

XI- LA DIMENSION D'ECHELLE DU MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE FRACTAL

L'incrément $\Delta B_H(t)$ du mouvement Brownien fractionnaire global $B_H(t)$ est relié à un incrément temps Δt définissant ainsi une subdivision segmentaire dont la longueur l de chaque segment est telle que

$$l = \Delta t \sqrt{1 + \left(1 + \frac{\Delta B_H(t)}{\Delta t}\right)^2} \quad (\text{VIII-76})$$

Pour un incrément $\Delta B_H(t) = \Delta t^H$ nous avons le cas de proportionnalité

$$l \propto \Delta t \sqrt{1 + \frac{1}{\Delta t^{2-2H}}} \quad (\text{VIII-77})$$

Pour de faibles échelles $\Delta t \ll 1$, sous e radical, le second terme domine de telle sorte que

$$l \propto \Delta t \sqrt{\frac{1}{\Delta t^{2-2H}}} \quad (\text{VIII-78})$$

Il découle de (VIII-78) la relation de proportionnalité

$$l \propto \Delta t^H \quad (\text{VIII-79})$$

Si N désigne le nombre total de segments, fonction du choix de la jauge l , c'est – à – dire que $N = N(l)$, alors

$$N(l) \propto N \Delta t^H \propto \frac{1}{\Delta t} \Delta t^H \quad (\text{VIII-80})$$

$$N(l) \propto \Delta t^{H-1} \quad (\text{VIII-81})$$

A travers (VIII-78) , nous avons aussi

$$N(l) \propto l^{1-1/H} \quad (\text{VIII-82})$$

La dimension d'échelle D_e du mouvement Brownien fractionnaire $B_H(t)$ est déduite du coefficient de Hurst en écrivant

$$D_e = \frac{1}{H} \quad (\text{VIII-83})$$

L'analyse ci-dessus montre que la notion de dimension d'un processus fractal est relative et peut revêtir plusieurs forme dont celles citées : la dimension topologique, la dimension "box counting" et la dimension d'échelle soit 1 , $(2 - H)$, ou $\frac{1}{H}$. Il est à remarquer que la dimension topologique est unique, ne dépendant pas du coefficient de Hurst alors que les dimensions liées à la fractalité du processus en dépendent fortement et varient en fonction du choix de ce dernier c'est – à – dire en fait du processus considéré.

XII- MOUVEMENT BROWNIEN ET PROCESSUS STOCHASTIQUE EN 1/ f

XII- 1 LA PRIMAUTE DES LOIS DE PUISSANCE DANS LES PROCESSUS STOCHASTIQUES

Il est reconnu par observation ou par expérimentation que nombre d'évènement s'ordonnent et obéissent dans leur dynamique à des lois de puissance dont il convient de préciser la forme relativement à des représentations spécifiées et à des paramètres prédéfinis. Si les lois de puissance avec des exposants entiers (relatifs à une dimension entière) sont inhérentes aux modèles géométriques classiques, il en est autrement dans le cas d'exposants fractionnaires caractéristiques des dimensions non entières c'est – à- dire fractales. Ces dernières décrivent un objet ou une courbe irrégulière soumis à une invariance d'échelle à l'instar des trajectoires Browniennes.

De nombreuses lois de puissance ont un caractère probabiliste, impliquant une auto – similarité statistique de la variable à étudier. Une définition plus générale des fractals serait d'affirmer qu'un fractal est un ensemble (objet, construction géométrique,...) dont les différentes parties sont "congrues" à l'ensemble lui – même sous l'action de transformations affines. Ces dernières sont des opération géométriques par lesquelles l'ensemble est transformé en une copie de lui-même; elles regroupent des translations, des rotations ou encore des amplifications. L'image Y d'un vecteur quelconque X de l'ensemble "objet" au travers d'une transformation affine de matrice A regroupant les trois transformations élémentaires précédemment citées, peut être représenté par l'expression

$$Y = A(\lambda, a) + T \quad (\text{VIII-84})$$

La matrice A définit une amplification de facteur λ et une rotation d'angle a ; T est un opérateur de translation. En exploitant le caractère fractal d'un ensemble et en terme de propriétés, un ensemble fractal E peut être identifié par une propriété moyenne S décrivant tout sous-ensemble E' de E . Inversement, les propriétés moyennes de tout sous-ensemble E' sont à considérer par rapport à celles de l'ensemble global E . On identifie une propriété à une fonctionnelle S agissant sur E et telle que

$$S(E) = f(\lambda) S(\lambda E') \quad (\text{VIII-84})$$

où f est une fonction à préciser. Un cas significatif développé par Korvine (1992) consiste à considérer la fonctionnelle S comme ne dépendant que d'une seule variable q (exemple : la surface, le volume,) qui décrit l'ensemble fractal E . Alors $S(E) = S[q(E)]$ et l'expression (VIII-84) nécessite de poser $S(q)$ comme une loi de puissance

$$S(q) = c q^\alpha \quad (\text{VIII-85})$$

où c et α sont des coefficients à déterminer. Il a été établi ainsi, une corrélation entre fractalité et lois de puissance. Ces dernières sont source d'auto – similarité car elles représentent des phénomènes

qui ont les mêmes caractéristiques et des comportements voisins à la fois des échelles d'observation ou d'analyse de plus en plus fines et de plus larges . Un cas simple de loi de puissance est la forme polynomiale $f(x) = kx^\alpha$, α et k étant des constantes. Cette fonction peut être associée, en probabilité, à une fonction de répartition $G(x)$ d'une variable stochastique X telle que

$$G(x) = \Pr(X \geq x) \propto x^{-\alpha} \quad (\text{VIII-86})$$

On en déduit, par dérivation, une fonction densité de probabilité $g(x)$ d'expression $g(x) = G'(x)$, donc:

$$g(x) \propto x^{-(\alpha+1)} \quad (\text{VIII-87})$$

L'expression (VIII-87) décrit l'effet d'échelle ou d'auto – similarité du caractère des occurrences ou des fluctuations du processus à analyser. En sismologie, la loi de Richter – Gutenberg modélisant le nombre de tremblements de terre (par an) de magnitudes supérieures à une magnitude de référence m est, dans sa version primaire, une loi de puissance.

L'analyse du mouvement Brownien fractionnaire développée, a mis en évidence un ensemble lois caractéristiques évoluant en loi de puissance et dont les plus pertinentes sont illustrées à travers les expressions (VIII-63) et (VIII-64) respectivement pour la densité spectrale et la fonction de covariance.

XII-2 LES PROCESSUS STOCHASTIQUES DE LOI DE PUISSANCE EN $1/f$

Sur le plan spectral, certains processus tels que les signaux sismologiques tendent à présenter, entre deux fréquences de coupure localisées, un comportement en loi de puissance $1/f^\alpha$ et peuvent ainsi être approchés par des modèles de processus stochastiques caractérisés par de tels spectres comme le bruit blanc gaussien ($\alpha = 0$ donc de spectre plat), le bruit "rose" ($\alpha = 1$) et le bruit Brownien ($\alpha = 2$). La figure VIII-8 donne une représentation comparative en termes de signature spectrale de différent processus en $1/f^\alpha$

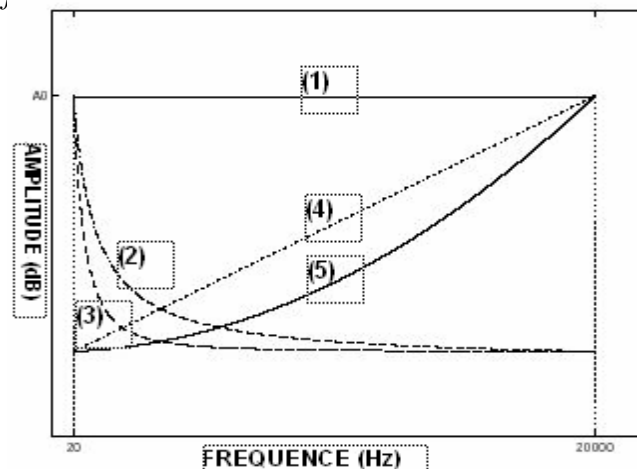


fig. VIII-8 représentation comparative des spectres d'amplitude (en $1/f^\alpha$)

(1) bruit blanc ($\alpha = 0$) (2) bruit rose ($\alpha = 1$) (3) bruit Brownien ($\alpha = 2$)

(4) bruit bleu ($\alpha = -1$) (5) bruit violet ($\alpha = -2$)

Certains processus que nous qualifierons d'hybrides développent, par rapport à des plages de fréquences déterminées, un comportement spectral englobant les trois cas ci-dessus (figure VIII-9)..

A cause de leur self – similarité, les processus en $1/f$ sont typiquement fractals. Abordées sous l'angle des irrégularités, les courbes en $1/f$ admettent une dimension "effective" supérieure à leur dimension topologique. Cette dimension n'est autre que la dimension fractale D telle que $1 \leq D \leq 2$. elle-même reliée au coefficient d'autosimilarité H .

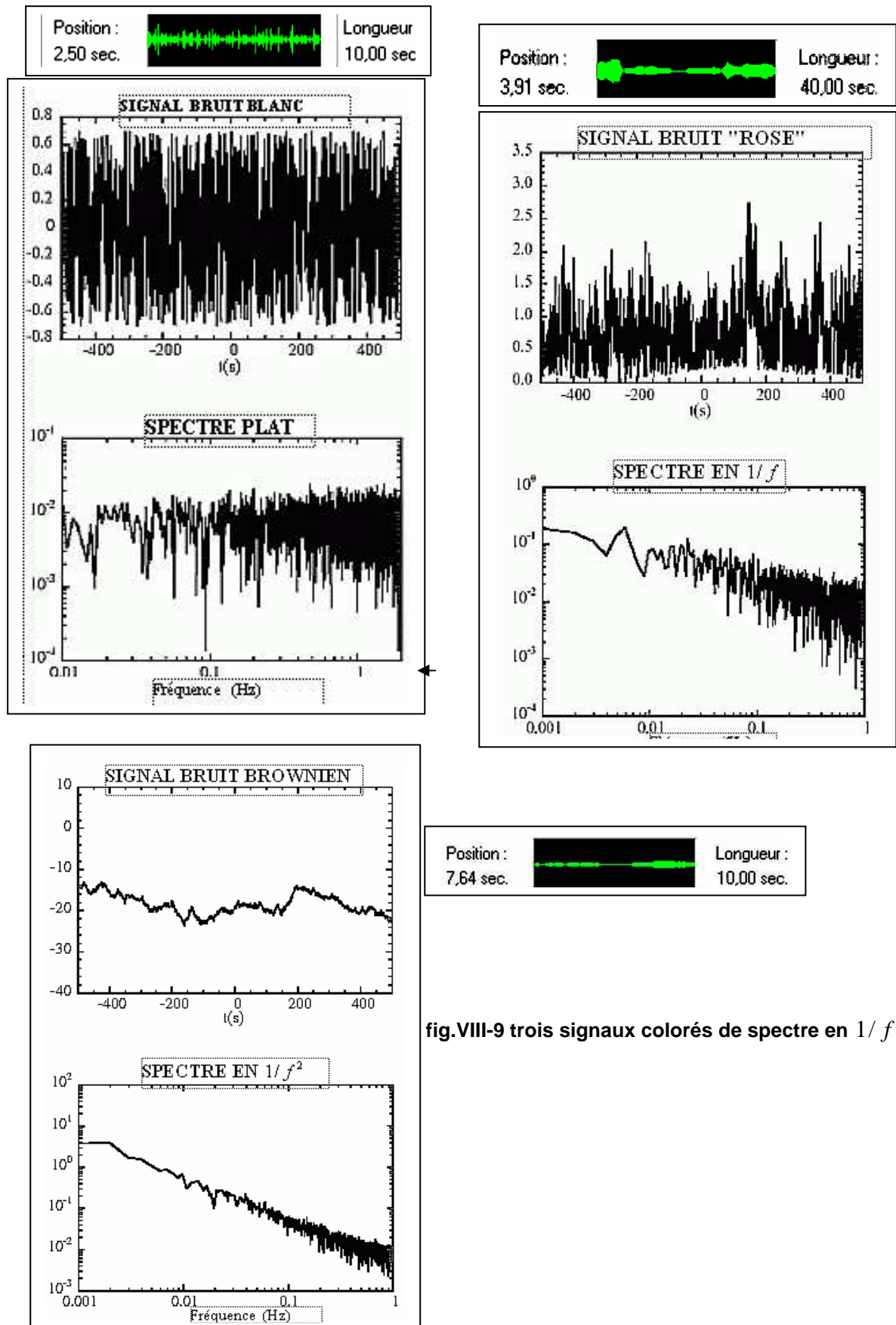


fig.VIII-9 trois signaux colorés de spectre en $1/f$

L'objectif est de développer les modèles en $1/f$ comme la réponse d'un système linéaire invariant par translation quand le signal d'entrée est un bruit gaussien stationnaire. Dans ce cas, nous choisissons un système de réponse impulsionnelle $r(t)$ du type

$$r(t) = u(t) \frac{1}{\Gamma(H + 1/2)} t^{H-1/2} \quad (\text{VIII-88})$$

$\Gamma(x)$ désignant la fonction Gamma et $u(t)$ désignant exceptionnellement ici la fonction de Heaviside. La fonction de transfert $R(p)$ obtenue par le biais de la transformation de Laplace (TL) de la fonction de transfert est telle que

$$R(p) = TL[r(t)]_{t \leftrightarrow p} = \frac{1}{p^{H+1/2}} \quad (\text{VIII-89})$$

Si $e(t)$ désigne le signal d'entrée du système et $s(t)$ sa réponse en ce sens que nous obtenons le produit de convolution des fonctions causales $e(t)$ et $r(t)$ suivant

$$s(t) = u(t) e(t) * u(t) r(t) = u(t) \int_0^t e(t - \tau) r(\tau) d\tau \quad (\text{VIII-90})$$

Par rapport à la relation (VIII-89), le signal de sortie $s(t)$ exprimé dans le domaine de Laplace prend la forme

$$S(p) = \frac{1}{p^{H+1/2}} E(p) \quad (\text{VIII-91})$$

et que nous reproduisons comme suit

$$S(p) = \frac{1}{p^{1/2(2H+1)}} E(p) \quad (\text{VIII-92})$$

Si nous posons dans (VIII-92) $\omega = p^{1/2}$, il découle la relation de proportionnalité reflétant le principe des processus en $1/f$ suivante

$$S(p) \propto \frac{1}{\omega^{2H+1}} \quad (\text{VIII-93})$$

L'expression (VIII-93) illustre à nouveau un comportement de type $1/f$ relativement à la réponse impulsionnelle (VIII-88) posée. En fait, une autre caractéristique se dégage de l'expression (VIII-90) qui, en remplaçant la réponse impulsionnelle $r(t)$ par son expression, donne

$$s(t) = u(t) \frac{1}{\Gamma(H + 1/2)} \int_0^t e(t - \tau) \tau^{H-1/2} d\tau \quad (\text{VIII-94})$$

Le second membre de (VIII-94) n'est autre qu'une forme de l'intégration fractionnaire que nous aurons à développer dans le présent travail avec son corollaire la dérivation d'ordre fractionnaire pour lesquelles un opérateur de convolution-différentiation est construit et un rapport avec le comportement fractal établi.

XIII- LE MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE : UN PROCESSUS FRACTAL EN $1/f$

Par rapport à un paramètre de Hurst fixé, $H = 0.2$, un modèle de processus Brownien est établi, accompagné de son spectre d'amplitude (figure VIII-10) dont on observe une évolution en une loi exponentielle décroissante (donc de loi de puissance) avec une redistribution de l'énergie des hautes vers les basses fréquences. Une représentation temps – échelle à travers une ondelette analysante de Morlet confirme le caractère fractal du mouvement Brownien ainsi simulé.

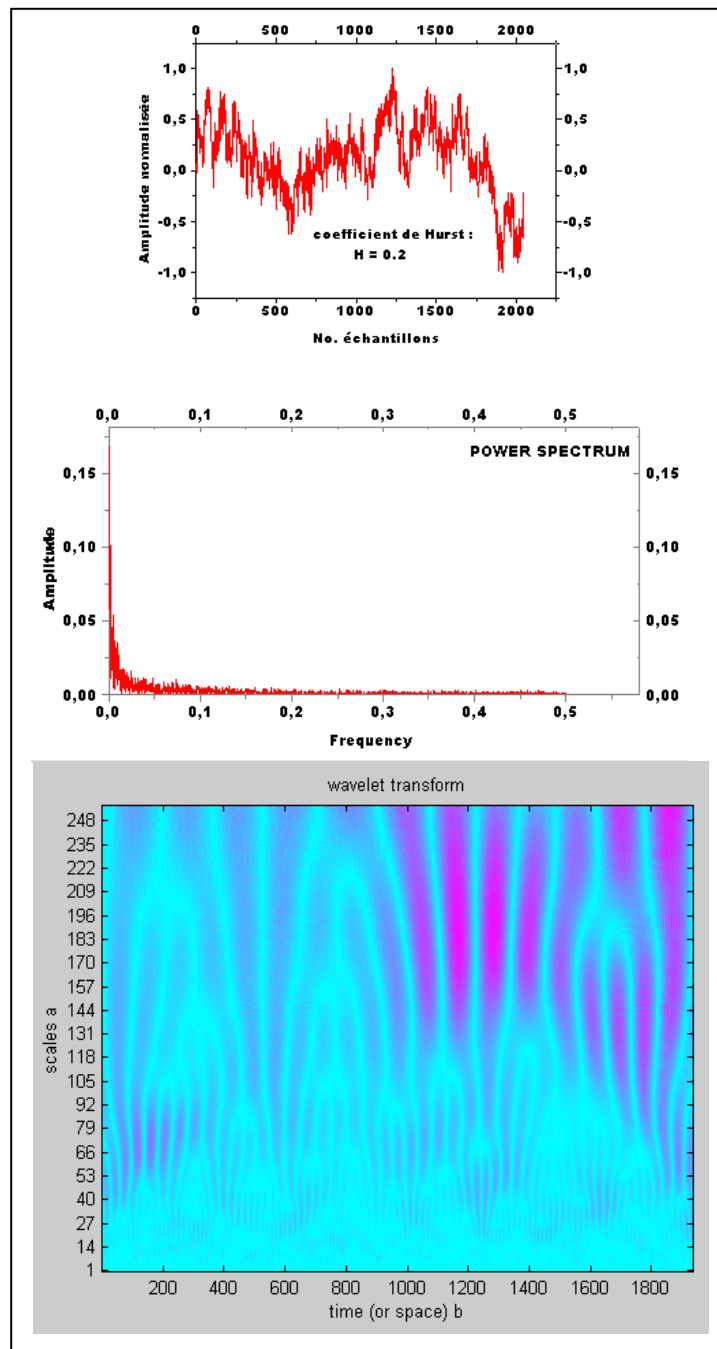


fig. VIII-10 spectre et transformée en ondelette d'un processus Brownien fractionnaire

La confirmation d'une loi de puissance effective dans le processus Brownien ainsi que la détermination de sa dimension fractale, obéit à des démarches spécifiques. La figure VIII-9 se rapporte à un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre $H = 0.7$, accompagné de son spectre d'amplitude. Nous reprenons la représentation de ce spectre d'amplitude par rapport à une échelle bilogarithmique. L'énergie obéit alors, non plus à une distribution de type exponentielle décroissante mais à une répartition "linéaire" dont une droite de régression est représentée. Ceci est une des caractéristiques fondamentales des processus fractals en $1/f$. La dimension fractale du processus Brownien ainsi simulé n'est autre que la pente de la droite de régression. Dans notre cas, $D = 0.46$

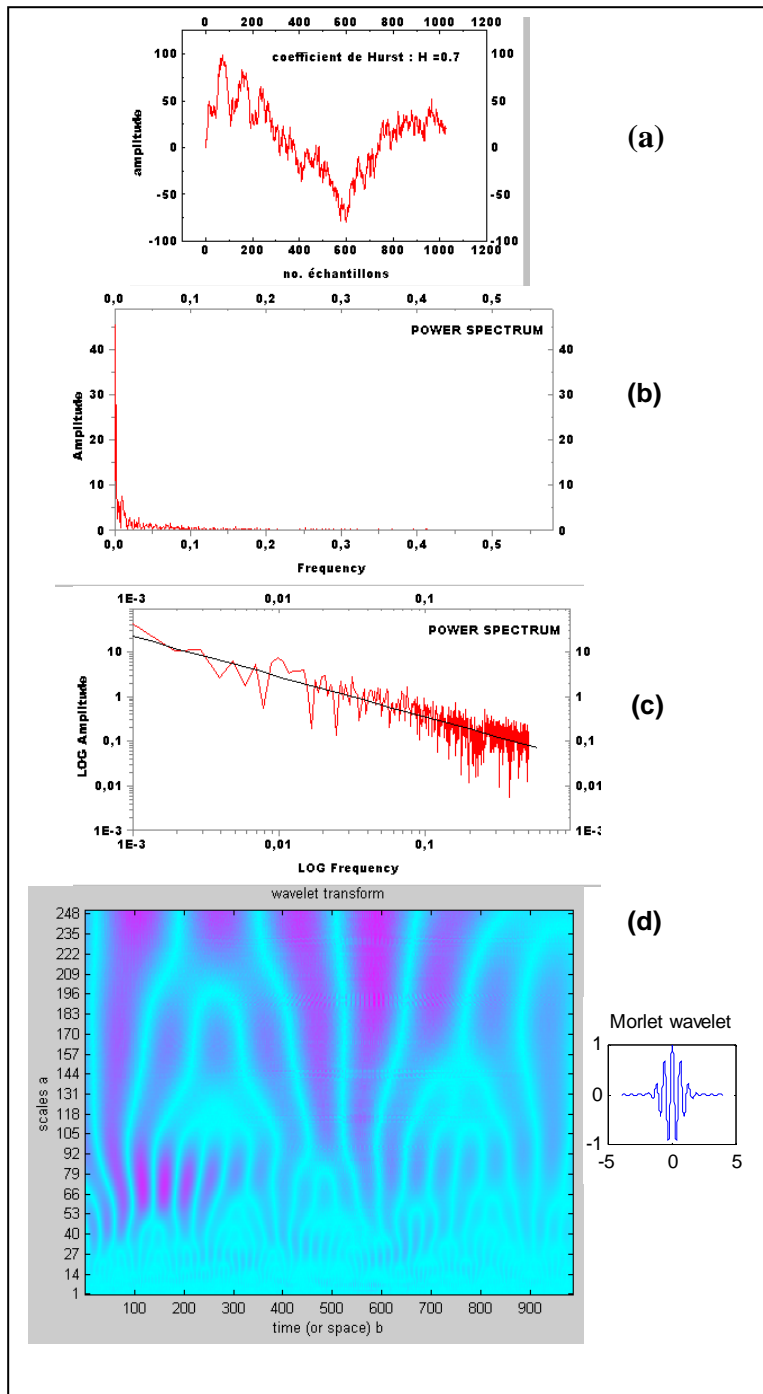


fig. VIII-11 génération d'un signal Brownien (a) – spectre d'amplitude (b) - évolution du spectre d'amplitude en $1/f$ et droite de régression linéaire (c) – transformée en ondelettes du processus Brownien (d)

XIV- LES SISMOGRAMMES : DES PROCESSUS EN $1/f$

Le phénomène de propagation des ondes élastiques dans un milieu considéré induit un déséquilibre local de ce dernier, matérialisé par une réaction de ses composantes particulières. Dans le cas d'un séisme, trois types d'ondes au moins cohabitent relativement à des temps d'arrivée précis : d'abord

les ondes primaires (ou ondes P) dites aussi de compression ou longitudinales, suivent ensuite les ondes secondaires (ou ondes S) qualifiées d'ondes de cisaillement ou transversales et enfin les ondes de surface ou ondes guidées principalement les ondes de Love et de Raleigh postérieures aux ondes S (figure VIII-12)

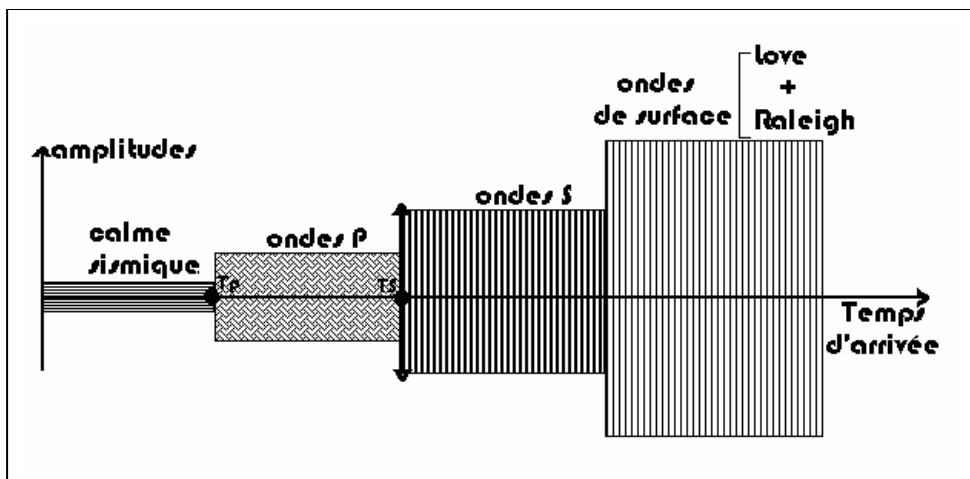


fig. VIII-12 les différents types d'ondes sismiques

Le sismogramme matérialisant l'enregistrement graphique d'un séisme est un document essentiel dans l'analyse d'un tremblement de terre et dont la fiabilité repose le traitement et l'interprétation qui en seront faits. L'écoute sismique étant en principe continue, l'occurrence subite d'un séisme avéré et ressenti par la population est précédé de ce qu'il est appelé "le calme sismique", notion toute relative puisque des activités tectoniques ont lieu pratiquement sans répit. La manifestation d'un séisme vient donc interrompre le "calme sismique" et donner naissance à des phénomènes dynamiques de propagation d'ondes, d'énergie libérée, de vitesses, d'activité tectonique sur les failles actives... . L'exactitude dans le pointé des temps d'arrivée des ondes P et S ainsi que la mesure de l'amplitude maximale sont essentiels pour effectuer un traitement efficace et crédible dans son interprétation (figure VIII-13). En général, un enregistrement seul ne peut en principe conduire à des résultats fiables. Aussi est-il d'usage d'adopter des méthodes corrélatives portant sur plus d'un sismogramme ou encore appliquer les procédés stochastiques des série temporelles.

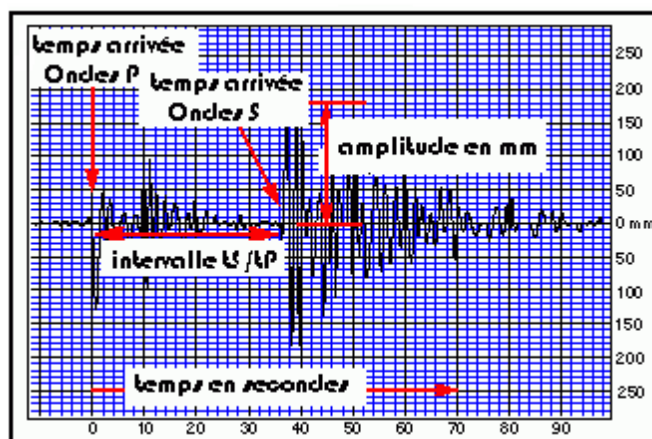
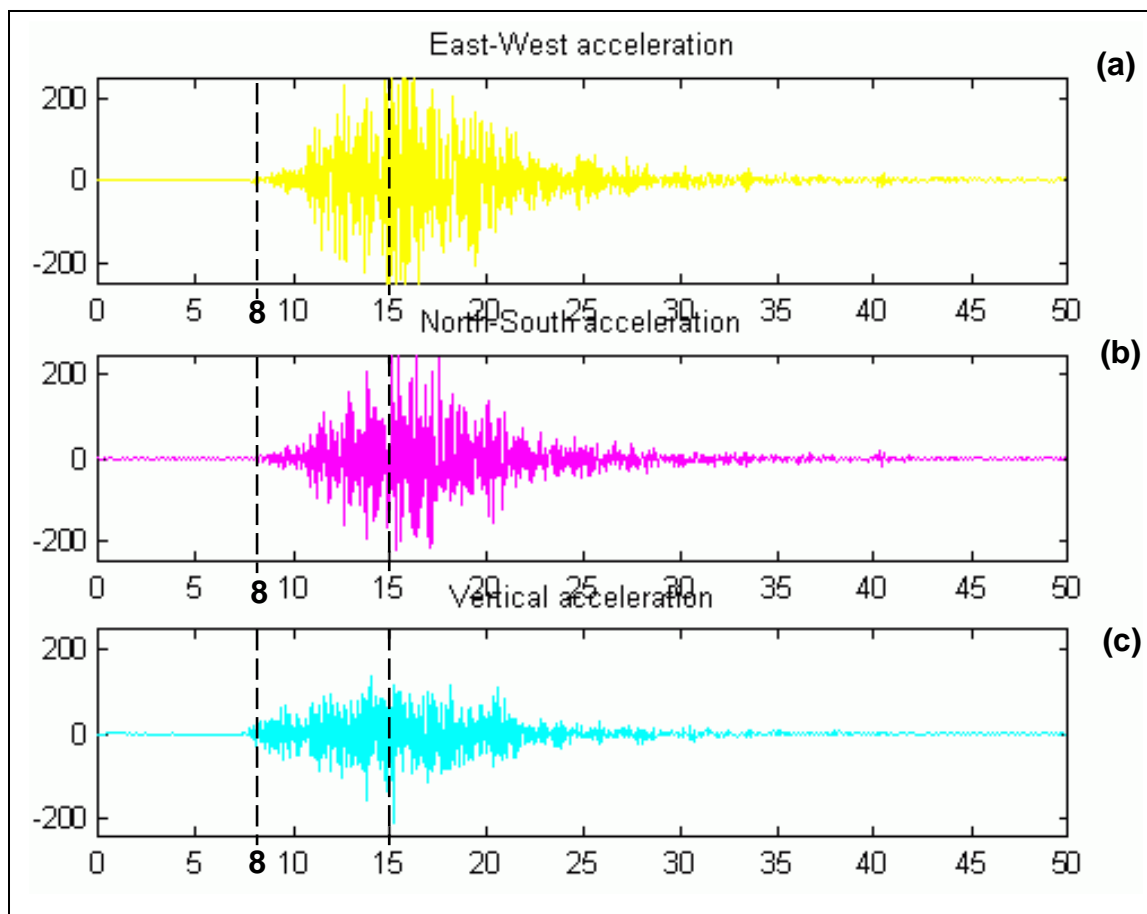


fig. VIII-13 structure d'un sismogramme

Nous nous proposons d'appliquer une approche stochastique dans l'analyse d'un sismogramme réel issu du séisme de Loma Prieta –Santa Cruz (USA) du 17 Octobre 1989. Les données "quake.mat" disponibles dans une des bibliothèques du logiciel Matlab, ont été obtenues par un échantillonnage à la

fréquence 200Hz . Les accélérations du choc principal du séisme a été enregistrées selon les trois directions Nord-Sud, Est-Ouest et en accélération verticale (figure VIII-14).



**fig. VIII-14 Séisme de Loma Prieta (17 Octobre 1989)
Accélérations (a) Est-Ouest , (b) Nord-Sud et (c) Verticale**

Afin de "percer" l'organisation intrinsèque de ces sismogrammes, nous nous positionnons sur l'intervalle de temps (axe horizontal) situé entre 8s et 15s. Le "zoom", en fait nous appliquons un facteur d'échelle d'observation, effectué sur les portions de sismogramme correspondantes (figure VIII-15) révèle un fait d'auto – similarité en ce sens que nous observons une reproduction quasi à l'identique du sismogramme global; Nous sommes donc, du moins par l'observation, dans le cas d'un comportement fractal. A des fins de confirmation, nous nous limitons à l'accélérogramme vertical (figure VIII-14 (c) sur lequel nous adoptons la même démarche "stochastique" que celle appliquée dans l'analyse du mouvement Brownien fractionnaire: spectre d'amplitude – représentation en échelle bilogarithmique – tracé de la droite de régression linéaire – estimation de la dimension fractale – analyse temps – échelle(par transformée en ondelettes) . A ces opérations, nous adjoignons une représentation temps – fréquence du sismogramme par application de la distribution de Wigner – Ville. Nous disposerons ainsi d'un complexe de méthodes de confirmer le caractère fractal donc auto – similaire de l'accélérogramme considéré.

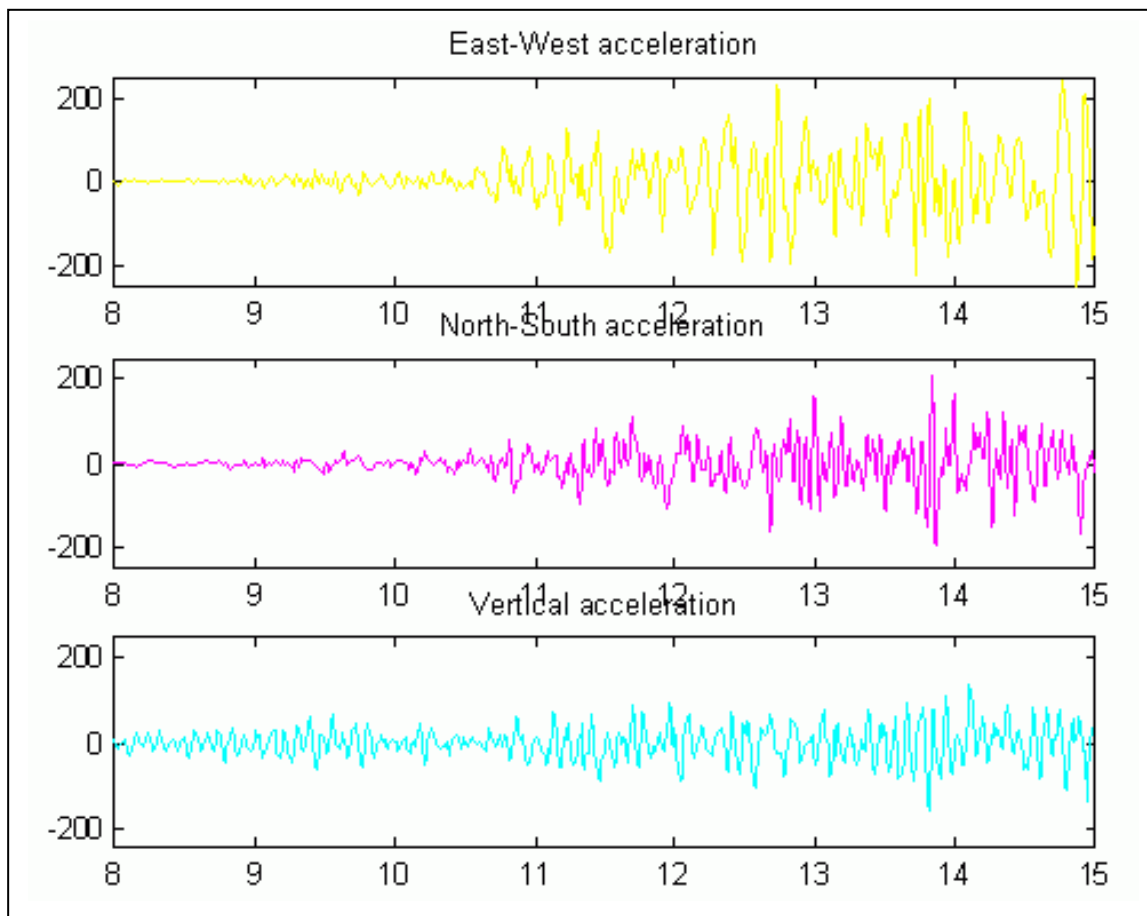


fig. VIII-15 structures de la zone de "zoom" réalisée sur les accélérogrammes-
intervalle de temps considéré [8s – 15s]

• analyse du sismogramme relatif à l'accélération verticale

Le traitement spectral de l'accélérogramme en accélération verticale (figure VIII-16 (a)) exhibe un spectre d'amplitude suivant une loi de puissance (figure VIII-16 (b)). La représentation de ce dernier dans une échelle bilogarithmique, met en évidence un graphe typique de celui relatif aux processus en $1/f$. Cependant, le tracé des droites de régression (ou droites moyennes) penche plutôt vers un processus hybride avec deux composantes: une droite pratiquement horizontale que nous estimons relative à une composante de type "bruit blanc" et une composante "oblique" que nous qualifions de classique (droite affine) caractéristique des processus en $1/f$ avec une pente $|D|=0.26$ correspondant en fait à la dimension fractale du processus symbolisé par l'accélérogramme (figure VIII-16)(c).

Une analyse par transformée en ondelette continue (figure VIII-1- (d)) accompagne l'étude de l'accélérogramme, l'ondelette analysante mère $\psi(t)$ est l'ondelette universelle de Gauss. Contrairement au processus Brownien fractionnaire, cette représentation ne met pas clairement en évidence le comportement fractal même à travers la représentation par contour (figure VIII-1- (e)). Il convient alors d'effectuer une analyse locale à travers une échelle plus petite alors que l'analyse globale nécessite une échelle plus large. Le procédé serait alors de considérer une ondelette analysante à support compact, donc nulle en dehors de ce support. L'ondelette devient localisée, caractère qu'elle devra conserver même après translation le long de l'axe des temps.

Parmi les possibilités offertes par le choix des ondelette – mères, nous avons retenu l'ondelette de Daubechies d'ordre 10 (db10) qui vérifie cette propriété de support compact. Le nombre d'étapes dans la décomposition ("step by step Mode") a été fixé à 1024 avec un pas d'une unité. La transformée en ondelette (figure VIII-17) révèle on ne peut mieux le comportement fractal fait de structures similaires imbriquées.

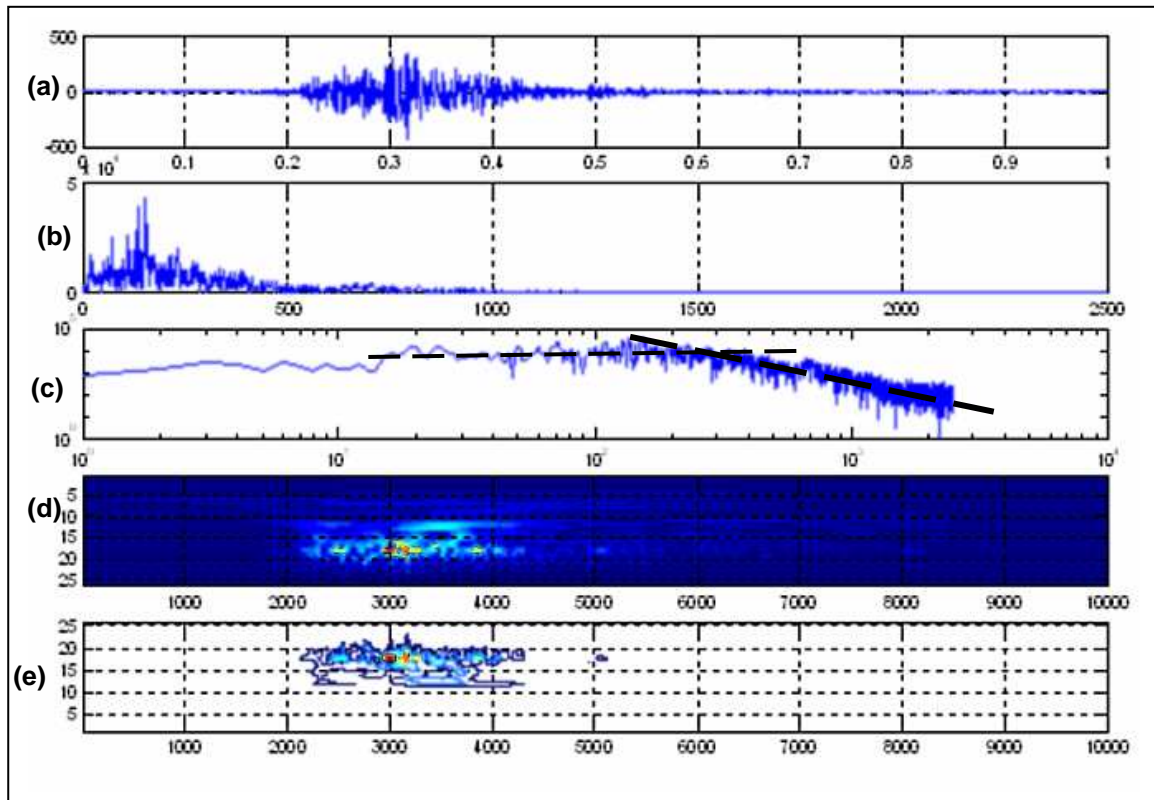
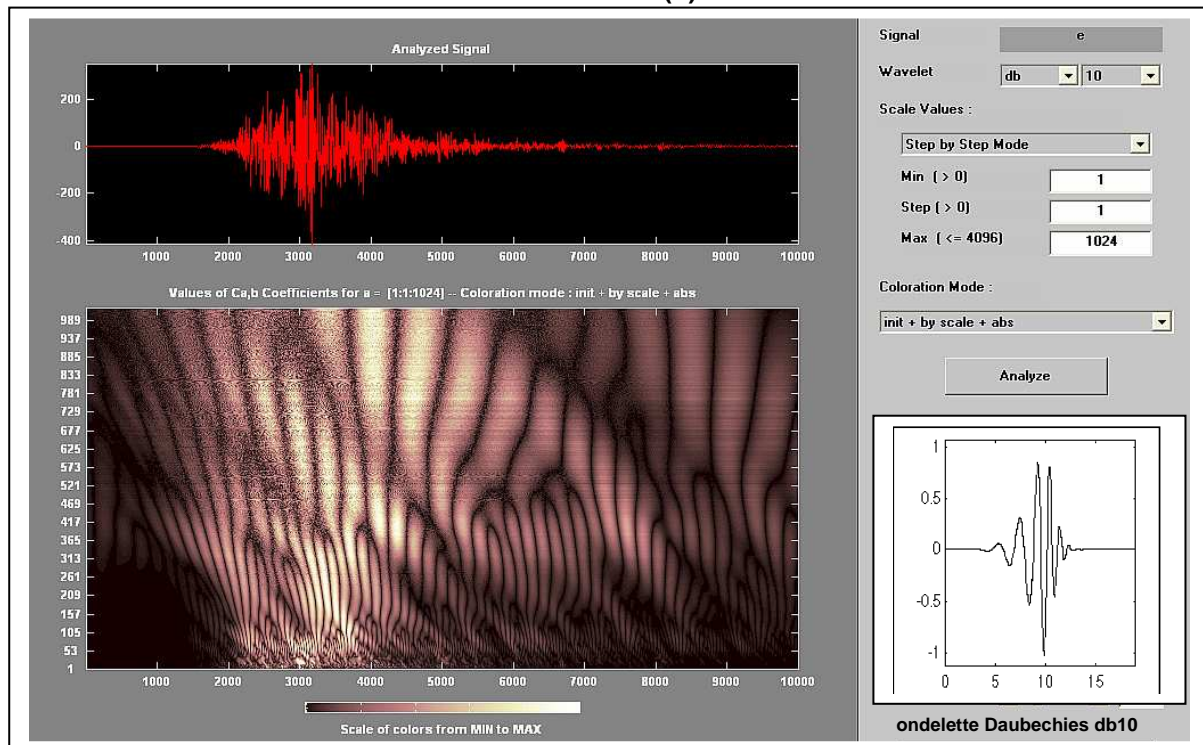


fig. VIII-16 analyse d'un accélérogramme en accélération verticale: (a) représentation temps-amplitude (b) spectre d'amplitude (c) représentation du spectre d'amplitude en échelle bilog (d) transformée en ondelette (ondelette analysante: ondelette gaussienne) (e) représentation du contour de (d)



ig. VIII-17 transformée en ondelette de l'accélérogramme vertical –analyse locale par une ondelette de Daubechies (db10)

Dans les développements précédents, aussi bien pour les processus Browniens que pour le sismogramme en accélération verticale, il a été privilégié la voie exclusivement spectrale pour attester de leur évolution comme processus en $1/f$. Ce type d'analyse présente l'inconvénient d'occulter la dimension "temps", isolant ainsi un paramètre non moins important de la représentation de ces processus. Cela constitue l'un des inconvénients de l'analyse spectrale de Fourier. Les représentations conjointes temps – fréquence présentent l'avantage d'un jumelage des descriptions en temps et des descriptions en fréquence des processus sans condition préalable sur ces derniers. La distribution de l'énergie d'un signal dans le plan temps – fréquence peut être définie de plusieurs manières, suivant les auteurs mais pratiquement toutes découlent d'une représentation dite généralisée empruntée à la mécanique quantique de la forme :

$$\rho_z(t, \nu, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(n, \tau) \exp[2\pi j n(u-t)] z\left(u + \frac{\tau}{2}\right) \bar{z}\left(u - \frac{\tau}{2}\right) \exp(-2\pi j \nu t) dn du d\tau \quad (\text{VIII-95})$$

dans laquelle $z(t)$ désigne le signal analytique associé au signal ou processus $s(t)$ ($\bar{z}(t)$ étant le conjugué de $z(t)$), $f(n, \tau)$ une fonction arbitraire définissant le mode d'observation choisi. Le cas particulier $f(n, \tau) = 1$, correspond à la représentation conjointe temps – fréquence ou distribution de Wigner – Ville (DWV)

$$DWV_z(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \bar{z}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \exp(-2\pi j \nu \tau) d\tau \quad (\text{VIII-96})$$

Notons que dans (VIII-95), il est possible de considérer la forme réelle du signal soit $s(t)$ mais pour des raisons de présence d'interférences ou de bruit dans la représentation, la forma analytique est toute recommandée. Notre choix de la distribution de Wigner – Ville dans l'analyse temps – fréquence de l'accélérogramme vertical est dû d'abord à la représentation de cette dernière et surtout qu'elle conduit à une représentation de la distribution de l'énergie dans le plan temps – fréquence (figure VIII-18)

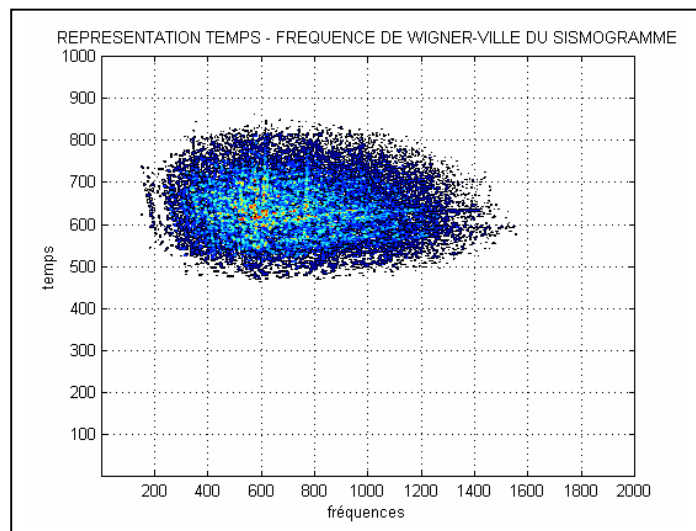


fig. VIII-18 représentation temps – fréquence de Wigner – Ville de l'accélérogramme vertical

L'analyse de cette représentation ne met pas en évidence une loi de distribution d'énergie particulière sauf qu'elle confirme une tendance vers une dégénérescence des hautes fréquences (processus en $1/f$). L'énergie labellisée en couleur bleu clair se trouve confinée à la fois en temps et en fréquence ; nous estimons que la tache tirant sur l'orange, limitée d'ailleurs correspond à l'énergie élevée de l'onde secondaire S .

CHAPITRE IX

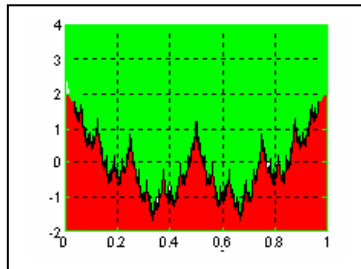
*On se lasse de tout, excepté d'apprendre
Virgile*

ELABORATION D'UN OPERATEUR CONVOLUTIF DE DERIVATION FRACTIONNAIRE

DERIVATION NON ENTIERE ET FRACTALITE

ELABORATION D'UN OPERATEUR CONVOLUTIF DE DERIVATION FRACTIONNAIRE

DERIVATION NON ENTIERE ET FRACTALITE



I –INTRODUCTION

L'approche de la modélisation de l'évolution entropique d'un système dynamique est sous – tendue par deux facteurs::

- un facteur géométrique caractérisé par l'émergence d'un comportement d'apparence complexe mais en fait ordonné et hiérarchisé : c'est le concept fractal

- une cohérence systémique intrinsèque à la dynamique d'évolution du système et peut être aux interactions avec un autre

système majeur ou avec son environnement le plus proche. L'analyse

de l'évolution temporelle des structures relativement à des niveaux hiérarchisés dans les échanges d'information, d'énergie ou de matière peut être abordée sous le concept de la dérivation fractionnaire.

L'objectif n'est pas tant d'exhiber un quelconque antagonisme entre la géométrie fractale et la la dérivation fractionnaire mais de percevoir une complémentarité entre ces deux critères dans la dynamique fractale. L'influence du critère de géométrie sur l'évolution dynamique d'un système résulte de l'émergence d'une fractalité (précisément d'une dimension non – euclidienne) laquelle peut être décrite par une équation différentielle d'ordre fractionnaire. Ainsi, une relation entre les concepts de fractalité et de dérivation non entière est établie.

Relativement à la théorie des systèmes dynamique, l'introduction de la dérivation d'ordre non entier consiste en la construction d'un système linéaire et invariant dans le temps (un filtre en fait) qui, pour une fonction d'entrée donnée, associe en sortie la dérivée non- entière. En traitement du signal et en théorie des systèmes, ce formalisme revient à déterminer la réponse impulsionnelle à travers la généralisation d'un opérateur de convolution D^α , α étant un ordre de dérivation quelconque

II - LE CALCUL FRACTIONNAIRE

Des études mathématiques récentes portant sur ce qu'il convient d'appeler "calcul fractionnaire" dont la dérivation d'ordre non entier en est une illustration ont investi plusieurs autres disciplines tels que les systèmes dynamiques et l'investigation des lois d'échelles dans les processus fractales.

Un grand nombre d'approches théoriques véhiculées par une littérature foisonnante sur le thème de la dérivation fractionnaire (DF) sont proposées pour, principalement, justifier la légitimité du calcul fractionnaire dans le contexte de l'analyse fonctionnelle classique et des transformations mathématiques classiques. Exempt de toute remise en cause du calcul différentiel, le calcul fractionnaire émerge comme une extension naturelle de la dérivation d'ordre entier et de la transformation de Fourier (TF), deux outils de large utilisation en traitement du signal ou de l'image par exemple. Cependant, la dérivation fractionnaire maintient le doute sur son adaptation à promouvoir les structures complexes telles que les formes irrégulières, dans la modélisation des phénomènes complexes (diffusion, percolation, l'évolution spatio – temporelle du mouvement Brownien...).

II- 1 UN APERCU PRAGMATIQUE DE LA DERIVATION FRACTIONNAIRE

Le calcul fractionnaire et son corollaire le principe de la dérivation d'ordre non entier, ont été déjà mentionnés dans les travaux des mathématiciens Bernoulli, Leibniz et Abel. Mais c'est sans conteste Liouville qui a jeté les premiers jalons de la théorie qui restent à nos jours des sources références. L'objectif initial du calcul fractionnaire était de fournir des méthodes adaptées, facile d'utilisation pour le calcul de la dérivation d'ordre fractionnaire par simple extension de la dérivation classique à tout ordre. Cette vision suppose indirectement que la dérivée fractionnaire d'une fonction élémentaire est elle- même une fonction élémentaire. Cette hypothèse reste en suspens car plusieurs cas en

mathématiques réfutent cet argument. Dans le développement exposé dans ce chapitre, nous exposerons quelques exemples simples justifiant quelque fois cette vision mais pouvant la contredire aussi. Ainsi, si nous exprimons les dérivées successives d'ordres entiers de la fonction trigonométrique classique cosinus, nous obtenons

$$\forall n \in \mathbb{N} : D^n [\cos(at)] = \cos^{(n)}(at) = a^n \cos\left(t + n\frac{\pi}{2}\right) \quad (IX-1)$$

Si nous procédons par simple prolongement de ce résultat à un ordre de dérivation réel quelconque, il vient que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^+ : D^\alpha [\cos(at)] = \cos^{(\alpha)}(at) = a^\alpha \cos\left(t + \alpha\frac{\pi}{2}\right) \quad (IX-2)$$

Il est à remarquer que la dérivée fractionnaire de la fonction cosinus donnée par (IX-2) est obtenue par une translation d'amplitude $\pi/2$ le long de l'axe des abscisses. La figure IX-1 illustre les six premières dérivées fractionnaires normalisées de la fonction $s(t) = \cos(2t)$

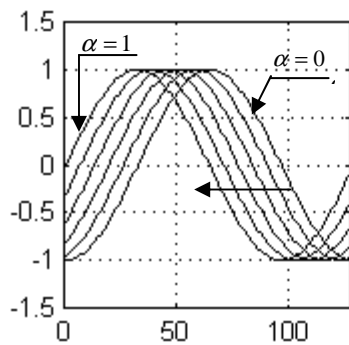


fig. IX-1 les six premières dérivées fractionnaires de la fonction $s(t) = \cos(2t)$

Nous avons relevé le caractère hasardeux d'un prolongement du principe de dérivation classique à un ordre de dérivation quelconque, entier ou non. Certains cas réfutent se raccourci. Ainsi si nous calculons les dérivées successives de la fonction puissance $s(t) = t^m$, m étant un entier positif. On peut remarquer que

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : D^n [t^m] = \frac{m!}{(m-n)!} \quad (IX-3)$$

En introduisant la fonction gamma (Γ) définie comme

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} z^{t-1} \exp(-z) dz \quad (IX-4)$$

avec $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, l'expression (IX-3) devient

$$D^n [t^m] = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} t^{m-n} \quad (IX-5)$$

Afin de généraliser le concept de dérivation étendu à tout ordre réel et positif, on pose

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^+ : D^\alpha [t^m] = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)} t^{m-\alpha} \quad (IX-6)$$

Considérons le développement en séries de Taylor de la fonction puissance et dont nous notons par a_l les coefficients soit

$$t^m = \sum_{l=0}^{+\infty} a_l t^l \quad (IX-7)$$

Nous procédons à une dérivation d'ordre α par rapport à la variable t simultanément dans les deux membres de l'expression (IX-7)

$$D^\alpha [t^m] = \sum_{l=0}^{+\infty} a_l D^\alpha [t^m] \tag{IX-8}$$

En nous inspirant la relation (IX-6), nous avons aussi

$$D^\alpha [t^m] = \sum_{l=0}^{+\infty} a_l \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)} t^{m-\alpha} \tag{IX-9}$$

Initialement, cette procédure basée sur le développement en série de Taylor fut considérée comme l'approche appropriée pour exprimer toute dérivée fractionnaire. Cependant, certains cas d'espèce de calcul de dérivation ne rejoignent pas cette procédure.

Nous reproduisons les différentes approches ci-dessus établies dans le cas de la fonction exponentielle $s(t) = \exp(at)$ pour écrire

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : D^n [\exp(at)] = a^n \exp(at) \tag{IX-10}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^+ : D^\alpha [\exp(at)] = a^\alpha \exp(at) \tag{IX-11}$$

En introduisant le développement en série de Taylor, les expressions (IX-10) et (IX-11) prennent respectivement les formes

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : D^n [\exp(at)] = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{l!} a^l D^n [t^l] \tag{IX-12}$$

$$D^n [\exp(at)] = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{l!} a^l \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l-n+1)} t^{l-n} \tag{IX-13}$$

De ce fait, pour tout réel positif α , nous posons

$$D^\alpha [\exp(at)] = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{l!} a^l \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l-\alpha+1)} t^{l-\alpha} \tag{IX-14}$$

Ainsi, nous pouvons estimer que les expressions (IX-11) et (IX-14) et déduire "l'égalité"

$$a^\alpha \exp(at) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{l!} a^l \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l-\alpha+1)} t^{l-\alpha} \tag{IX-15}$$

Cependant, l'expression (IX-15) n'a vraiment lieu que pour α contraint d'être un nombre entier. L'exemple ainsi traité a conduit donc à une contradiction à vouloir introduire la dérivation fractionnaire.

II-2 QUELQUES REPERES SUR L'HISTORIQUE DU CALCUL FRACTIONNAIRE

Le calcul fractionnaire présenté comme un outil mathématique qui englobe à la fois la dérivation

$$I^n [f(t)]_{a \leq t < b} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{1-n}} dx \tag{IX-16}$$

L'expression (IX-16) établie une intégration d'ordre n , peut être prise comme origine pour la définition de l'intégration fractionnaire. En effet, il suffirait de remplacer l'ordre entier n par tout autre nombre réel α . Nous écrivons alors

$$I^\alpha [f(t)]_{a \leq t < b} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{1-\alpha}} dx \tag{IX-17}$$

Dans une forme similaire, l'expression d'une intégrale fractionnaire "régressive" s'écrit

$$I^\alpha [f(t)]_{a < t \leq b} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \frac{f(x)}{(x-t)^{1-\alpha}} dx \tag{IX-18}$$

Pour $\alpha = 0$, on définit l'intégrale fractionnaire d'ordre zéro comme

$$I^0 [f(t)]_{a < t < b} = I^0 [f(t)]_{a < t \leq b} = f'(t) \tag{IX-19}$$

Notons que pour une fonction causale f i.e. $f(t) = 0$ si $t < 0$, l'intégrale fractionnaire devient

$$I^\alpha [f(t)]_{0 \leq t < b} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(x)}{(t-x)^{1-\alpha}} dx \tag{IX-20}$$

III- DE LA DERIVATION D'ORDRE ENTIER n A LA DERIVATION FRACTIONNAIRE

III-1 POSITION DU PROBLEME

La dérivation d'ordre n représentée par l'opérateur $D^n [f(t)]$ telle que

$$D^n [f(t)] = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \frac{d}{dt} \{ D^{n-1} [f(t)] \} \tag{IX-21}$$

On peut introduire le principe de l'intégration d'ordre n dans (IX-21) comme suit

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{d^{n-m} f(t)}{dt^{n-m}} \right] = \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{d^{-(m-n)} f(t)}{dt^{-(m-n)}} \right] \tag{IX-22}$$

m étant un nombre entier tel que $m < n$. L'expression (IX-22) peut être reprise en introduisant les opérateurs d'intégration I et de dérivation D sous la forme

$$D^n [f(t)] = D^m \{ I_{m-n} [f(t)] \} \tag{IX-23}$$

Nous prolongeons la relation (IX-23) à tout ordre réel de dérivation α avec la condition $m - 1 < \alpha \leq m$ ce qui conduit à exprimer la dérivation fractionnaire d'ordre α par

$$D^\alpha [f(t)] = D^m \{ I_{m-\alpha} [f(t)] \} \tag{IX-24}$$

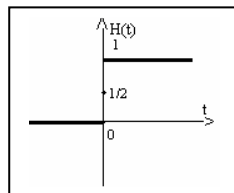
Pour définir l'opérateur de dérivation fractionnaire D^α , il sera nécessaire de poser certaines hypothèses de base:

- pour assurer la validité des développements mathématiques, en particulier l'existence des produits de convolution, l'espace requis sera le sous-espace vectoriel \mathcal{D}'_+ des fonctions généralisées causales (distributions) telles que

$$\forall f \in \mathcal{D}'_+ : f(t) = H(t) f(t)$$

où $H(t)$ représente la distribution régulière de Heaviside définie comme suit

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t > 0 \\ 1/2 & \text{if } t = 0 \\ 0 & \text{if } t < 0 \end{cases}$$



- le produit de convolution de toute fonction localement sommable $g(t)$ par une distribution régulière $f(t)$ prise dans \mathcal{D}'_+ est exprimé comme suit

$$H(t) f(t) * g(t) = \int_0^t f(x) g(t-x) dx \tag{IX-25}$$

- la fonction Gamma définie en (IX-4) vérifie la relation connue $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$
 Nous supposons que cette dernière peut être prolongée à toute variable $t \in]-n, -n+1[$, $n \in \mathcal{N}^*$ par

$$\Gamma(t+n) = t(t+1) \dots (t+n-1)\Gamma(t) \tag{IX-26}$$

III-2- CONSTRUCTION DE L'OPERATEUR DE DERIVATION FRACTIONNAIRE $D^\alpha(t)$

On considère dans \mathcal{D}'_+ la distribution suivante dite aussi Pseudo-fonction (Pf)

$$Pf[H(t)t^\alpha] = (\alpha+n)(\alpha+n-1)\dots(\alpha+1) \cdot [H(t)t^{\alpha+n}]^{(n)} \tag{IX-27}$$

en supposant α un nombre réel pris dans l'intervalle $]-n-1, -n[$. Nous définissons dans \mathcal{D}'_+ , l'opérateur $G_\alpha(t)$ défini de la manière suivante

$$G_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{H(t)t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{if } \alpha > 0 \\ Pf\left[\frac{H(t)t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right] & \text{if } \alpha \leq 0 \end{cases} \tag{IX-28}$$

L'opérateur de dérivation fractionnaire que nous souhaitons construire sera précisément $G_\alpha(t)$ comme défini dans (IX-28)

III-3 QUELQUES PROPRIETES VERIFIEES PAR L'OPERATEUR $G_\alpha(t)$

III-3-1 PRODUIT DE CONVOLUTION DE DEUX OPERATEURS

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{R}^2 : G_\alpha(t) * G_\beta(t) = G_{\alpha+\beta}(t) \tag{IX-29}$$

Ce produit de convolution intègre deux distributions régulières de \mathcal{D}'_+ ; de ce fait, nous distinguons deux cas:

- 1^{er} cas : $\alpha > 0$; $\beta > 0$

$$G_\alpha(t) * G_\beta(t) = H(t) \int_0^t G_\alpha(x)G_\beta(t-x)dx \tag{IX-30}$$

Par application de la relation (IX-28), nous obtenons

$$G_\alpha(t) * G_\beta(t) = \frac{H(t)t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} = G_{\alpha+\beta}(t) \tag{IX-31}$$

- 2^{ème} cas $\alpha \leq 0$; $\beta \leq 0$

Par rapport à ces deux conditions, nous pouvons trouver deux nombres entiers p et q qui satisfont aux conditions $\alpha + p > 0$ et $\beta + q > 0$. Ainsi

$$G_\alpha(t) * G_\beta(t) = G_{\alpha+p}^{(p)}(t) * G_{\beta+q}^{(q)}(t) \tag{IX-32}$$

Nous pouvons inclure le premier cas dans (IX-32) et écrire

$$G_\alpha(t) * G_\beta(t) = [G_{\alpha+\beta+p+q}(t)]^{(p+q)} = G_{\alpha+\beta}(t) \tag{IX-33}$$

III-3--2 L'OPERATEUR $G_\alpha(t)$ POUR QUELQUES VALEURS DU PARAMETRE α

- si $\alpha = 0$ et d'après l'expression (IX-28)

$$G_0(t) = G'_1(t) = H'(t) = \delta(t) \tag{IX-34}$$

avec $\delta(t)$ la distribution singulière de Dirac définie par

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (IX-35)$$

Nous avons les résultats triviaux suivants:

- si $\alpha = 1$ alors $G_1(t) = H(t)$ (IX-36)

- si $\alpha = -1$ alors $G_{-1}(t) = G'(0) = \delta'(t)$ (IX-37)

IV- FINALISATION DE LA CONSTRUCTION DE L'OPERATEUR DE DERIVATION FRACTIONNAIRE

L'expression (IX-37) peut être prolongée à la forme générale

$$G_{-n}(t) = \delta^{(n)}(t) \quad (IX-38)$$

Dans la théorie des fonctions généralisées, la dérivée de la distribution singulière de Dirac est elle-même un opérateur de dérivation via le produit de convolution. Ainsi pour toute fonction f de la variable t

$$f(t) * \delta^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) \quad (IX-39)$$

La dérivée $\delta^{(n)}(t)$ n'est considérée que dans le cas causal. Une possibilité pas nécessairement convaincante pour introduire l'opérateur de dérivation fractionnaire est de prolonger l'expression (IX-39) à tout réel positif α . Donc pour $\alpha \in \mathcal{R}^+$

$$f^{(\alpha)}(t) = f(t) * \delta^{(\alpha)}(t) \quad (IX-40)$$

Nous décomposons le nombre réel positif α en ses parties entière $[\alpha]$ et décimale (β) de façon à écrire

$$f^{(\alpha)}(t) = f(t) * \{\delta^{[\alpha]+(\beta)}(t)\} \quad (IX-41)$$

Comme le produit de convolution est toujours possible dans l'espace des distributions, (IX-41) devient

$$f^{(\alpha)}(t) = \delta^{[\alpha]}(t) * f^{(\beta)}(t) = [f^{(\beta)}(t)]^{[\alpha]} \quad (IX-42)$$

L'ordre de dérivation le plus externe $[\alpha]$ représente la forme classique de dérivation, il suffit donc de savoir calculer la dérivée fractionnaire $f^{(\beta)}(t)$ avec $0 < \beta < 1$.

L'implémentation de cette approche n'est pas évidente. Aussi est-il suffisant de recourir à la forme "convolutive" par l'opérateur $G_{-\alpha}(t)$ pour calculer une dérivée fractionnaire.

En appliquant l'opérateur de dérivation D^α sur la fonction considérée f , nous obtenons

$$\forall \alpha \in \mathcal{R} : D^\alpha [f(t)] = f^{(\alpha)}(t) = f(t) * G_{-\alpha}(t) \quad (IX-43)$$

avec

$$G_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{H(t)t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{si } \alpha > 0 \\ G'_{\alpha+1}(t) & \text{si } \alpha \leq 0 \end{cases} \quad (IX-44)$$

La figure IX-2 montre la distribution de l'opérateur de dérivation fractionnaire $G_\alpha(t)$ pour quelques valeurs de dérivation non –entière $\alpha > 0$

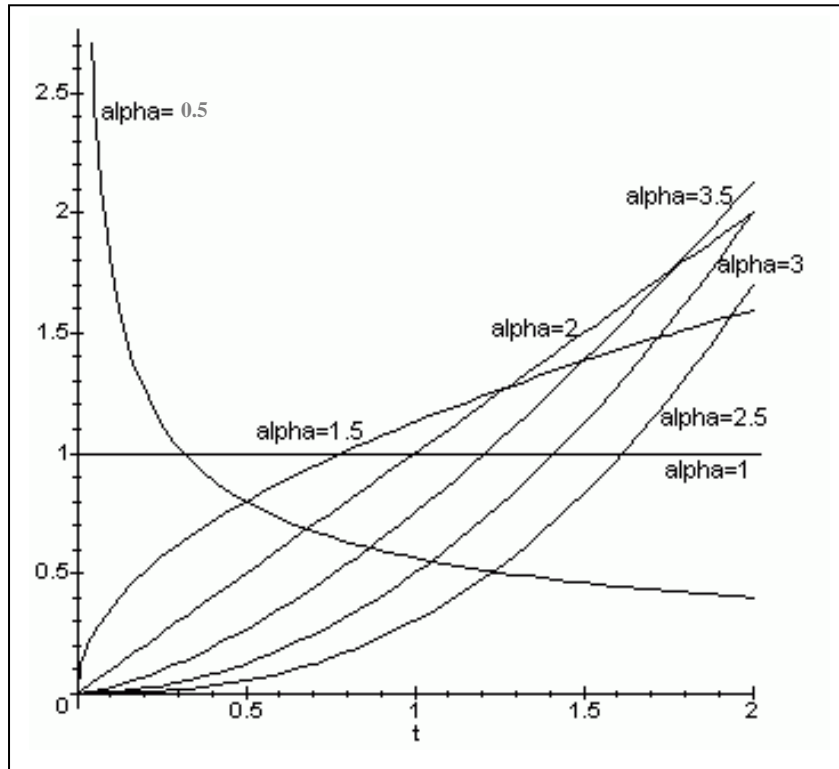


fig. IX-2 Distribution de l'opérateur de dérivation fraction $G_\alpha(t)$ pour $\alpha = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5$

●● QUELQUES EXEMPLES DE CALCUL DE DERIVEES FRACTIONNAIRES

Les exemples qui suivent illustrent le principe de l'application de l'opérateur $G_\alpha(t)$:

- exemple 1 : considérons la dérivée fractionnaire $\frac{d^{1/2} f}{dt^{1/2}}$ de la fonction $f(t) = \sqrt{t}$ donc pour $\alpha > 0$. Dans ce cas $G_{1/2}(t) = \frac{H(t)}{\sqrt{\pi} \sqrt{t}}$. En explicitant le produit de convolution définie en (IX-43), nous obtenons $D^{1/2}(\sqrt{t}) = f^{(1/2)}(t) = \sqrt{t} * G_{-1/2}(t)$

La première condition donnée par (IX-44) permet d'écrire

$$G_{-1/2}(t) = G'_{1/2}(t) = \frac{-H(t)}{2\sqrt{\pi} (t\sqrt{t})} \quad (IX-45)$$

Le produit de convolution tel que défini en (IX-43) conduit au calcul de $D^{1/2}(\sqrt{t})$; en effet

$$D^{1/2}(\sqrt{t}) = \frac{-H(t)}{2\sqrt{\pi}} * \sqrt{t}$$

$$D^{1/2}(\sqrt{t}) = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\sqrt{x}}{(t-x)\sqrt{t-x}} dx \quad (IX-46)$$

En ayant exprimé l'intégrale figurant dans le second membre de (IX-46),

$$D^{1/2}[f(t) = \sqrt{t}] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Une autre méthode de calcul de cette dérivée fractionnaire serait d'introduire l'intégration fractionnaire. Ainsi, il est équivalent d'écrire

$$\frac{d^{1/2}(\sqrt{t})}{dt^{1/2}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{-1/2}}{dt^{-1/2}} (\sqrt{t}) \right) \quad (IX-47)$$

L'expression comprise entre parenthèse du membre droit de (IX-47) représente précisément la dérivation fractionnaire d'ordre $1/2$ de la fonction $f(t) = \sqrt{t}$ soit

$$\frac{d^{-1/2}}{dt^{-1/2}} (\sqrt{t}) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t \frac{\sqrt{x}}{(t-x)^{-1/2+1}} dx \quad (IX-48)$$

L'intégrale figurant dans (IX-48) est aisément calculable et nous obtenons

$$\frac{d^{-1/2}}{dt^{-1/2}} (\sqrt{t}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} t \quad (IX-49)$$

La dérivée fractionnaire $D^{1/2}(f(t) = \sqrt{t})$ est donc

$$D^{1/2}(f(t) = \sqrt{t}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} t \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (IX-50)$$

- exemple 2: soit à calculer la dérivée fractionnaire $\frac{d^{3/2} f}{dt^{3/2}}$ de la fonction $f(t) = H(t)$

Comme dans l'exemple précédent, nous posons

$$D^{3/2}[H(t)] = H^{(3/2)}(t) = G_{-3/2}(t) * H(t) \quad (IX-51)$$

avec

$$\begin{cases} G_{-3/2}(t) = G'_{-1/2}(t) = G''_{1/2}(t) \\ H^{(3/2)}(t) = G''_{1/2}(t) * H(t) = G'_{1/2}(t) * H'(t) \end{cases} \quad (IX-52)$$

Comme $H'(t) = \delta(t)$ alors $H^{(3/2)}(t) = G'_{1/2}(t)$

V- QUELQUES PROPRIETES DE L'OPERATEUR DE DERIVATION FRACTIONNAIRE $D^\alpha[f(t)]$

V-1 DERIVEE FRACTIONNAIRE D'ORDRE ZERO

$$D^0[f(t)] = f(t) \quad (IX-53)$$

V-2 DERIVATION FRACTIONNAIRE SIMULTANEE

$$\forall (p, q) \in \mathcal{R}^2 : D^p \{ D^q [f(t)] \} = D^{p+q} [f(t)] \quad (IX-54)$$

Notons que dans certain cas, la propriété (IX-54), la propriété de "commutativité" dans la dérivation fractionnaire n'est pas satisfaite en ce sens que $D^p \{ D^q [f(t)] \} \neq D^q \{ D^p [f(t)] \}$

- exemple 1: nous recalculons la dérivée fractionnaire $H^{(3/2)}(t)$ en utilisant le résultat (IX-54). Ainsi

$$H^{(3/2)}(t) = D^1 \{ D^{1/2} [H(t)] \} = D^1 [G_{-1/2}(t) * H(t)] \quad (IX-55)$$

En introduisant la définit de la fonction G donnée en (IX-44), nous avons $G_{-1/2}(t) = G'_{1/2}(t)$ donc

$$H^{(3/2)}(t) = D^1 \{ G'_{1/2}(t) * H(t) \} = D^1 [G_{1/2}(t)] \quad (IX-56)$$

Finalement $H^{(3/2)}(t) = G'_{1/2}(t)$ et nous retrouvons ainsi le même résultat que précédemment. Dans ce qui suit, nous posons

$$H^{(3/2)}(t) = D^{1/2} \{ D^1 [H(t)] \} = \delta^{(1/2)}(t) \quad (IX-57)$$

Par application du résultat (IX-38) on a

$$\delta^{(1/2)}(t) = G_{-1/2}(t) = G'_{1/2}(t) \quad (IX-58)$$

Le cas de "commutativité" de la dérivation fraction simultanée est vérifiée pour cet exemple .

- exemple 2 : on exprime la dérivée première $f(t) = \sqrt{t}$ par application de la dérivation fractionnaire simultanée en écrivant

$$D^1(\sqrt{t}) = D^{1/2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) \quad (IX-59)$$

Deux possibilités pour le calcul de cette dérivée fractionnaire :

- soit considérer la fonction à dériver comme une constante alors $D^{1/2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) = 0$

- une seconde possibilité serait d'effectuer une application en se limitant au fait d'une dérivation fractionnaire comme conçue précédemment

$$D^1(\sqrt{t}) = \frac{H(t)t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} * \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{H(t)}{2\sqrt{t}} \quad (IX-60)$$

Nous retrouvons ainsi la dérivée première fort connue de la fonction $f(t) = \sqrt{t}$

VI- L'INTEGRATION D'ORDRE FRACTIONNAIRE

Par application de l'expression (IX-43), l'opérateur d'intégration fractionnaire de tout ordre réel α sera noté $D^{-\alpha}$. Appliqué sur une fonction f , cet opérateur prend la forme

$$D^{-\alpha}[f(t)] = f(t) * G_{\alpha}(t) \quad (\text{IX-61})$$

Ainsi, la primitive d'ordre $3/2$ de la fonction $f(t) = H(t)$, peut être obtenue à l'aide du produit de convolution

$$D^{-3/2}[H(t)] = G_{\frac{3}{2}}(t) * H(t) \quad (\text{IX-62})$$

L'opérateur $G_{\frac{3}{2}}(t)$ peut être calculé par application de l'expression (IX-43) et la primitive fractionnaire à trouver sera

$$D^{-3/2}[H(t)] = \frac{2}{3} \frac{H(t)}{\Gamma(3/2)} t \sqrt{t} \quad (\text{IX-63})$$

VII- IMPLEMENTATION DE LA PROCEDURE DE DERIVATION FRACTIONNAIRE

Plusieurs approches de l'implémentation de la dérivation d'ordre non entier sont régulièrement proposées mais elles présentent pratiquement toutes le même inconvénient de reposer sur des hypothèses simplificatrices ou sur des approximations discutables. Il y a lieu donc d'énoncer une méthode plus convaincante et surtout mieux adaptée au calcul de la dérivation fractionnaire.

VII-1 LA DERIVATION FRACTIONNAIRE COMME UNE GENERALISATION DES DIFFERENCES FINIES

VII-1-1 DIFFERENCES FINIES AU PREMIER ORDRE

Une approche simple l'approximation d'une fonction donnée $s(t)$ consisterait à appliquer la méthode des différences finies basée sur le choix d'un pas d'incrémentation fin de la variable. Soit h le pas d'incrément de la variable t . La différence finie $\Delta_h[s(t)]$ pour le premier ordre est exprimé comme suit

$$\Delta_h[s(t)] = s\left(t + \frac{h}{2}\right) - s\left(t - \frac{h}{2}\right) \quad (\text{IX-64})$$

Traduite sous la forme d'un produit de convolution, (IX-64) s'écrit

$$\Delta_h[s(t)] = s(t) * \left[\delta\left(t + \frac{h}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{h}{2}\right) \right] \quad (\text{IX-65})$$

Dans un premier temps, nous calculons la limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \Delta_h[s(t)]$ en termes de limite généralisée c'est-à-dire dans l'espace \mathcal{D}' des distributions. Soit φ une fonction d'essai considérée dans l'espace \mathcal{D} des fonctions test. Nous calculons la limite généralisée suivante tout en tenant compte de l'action de la distribution de Dirac $\delta(t)$ sur toute fonction d'essai

$$\lim_{h \rightarrow 0} \langle \delta(t + \frac{h}{2}) - \delta(t - \frac{h}{2}), \varphi(t) \rangle = - \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\varphi(\frac{h}{2}) - \varphi(-\frac{h}{2})}{h} \right] \quad (IX-66)$$

La fonction d'essai, de par ses propriétés, vérifie les conditions d'application du théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[-h/2, h/2]$. Il existe un réel ξ appartenant à cet intervalle tel que

$$\frac{\varphi(\frac{h}{2}) - \varphi(-\frac{h}{2})}{h} = \varphi'(\xi) \quad (IX-67)$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi'(\xi) = \varphi'(0)$ en vertu des propriétés des fonctions de \mathcal{D} , nous écrivons

$$\lim_{h \rightarrow 0} \langle \delta(t + \frac{h}{2}) - \delta(t - \frac{h}{2}), \varphi(t) \rangle = \langle \delta'(t), \varphi(t) \rangle \quad (IX-68)$$

Finalement

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\delta(t + \frac{h}{2}) - \delta(t - \frac{h}{2}) \right] = \delta'(t) \quad (IX-69)$$

On peut donc retrouver la dérivée $s'(t)$ à partir de la notion de différence finie de premier ordre munie d'un pas h très fin et écrire

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \Delta_h [s(t)] = s'(t) \quad (IX-70)$$

VII-1-2 DIFFERENCES FINIES AU SECOND ORDRE

Nous reproduisons la démarche développée dans le cas des différences finies au premier ordre $\Delta_h [s(t)]$ pour entrevoir les différences finies au second ordre que nous noterons $\Delta_{hh}^2 [s(t)]$ tel que

$$\Delta_{hh}^2 [s(t)] = \Delta_h \{ \Delta_h [s(t)] \} \quad (IX-71)$$

Il est possible de transformer l'expression (IX-71) en introduisant la forme convolutive et écrire

$$\Delta_{hh}^2 [s(t)] = s(t) * \left[\delta(t + \frac{h}{2}) - \delta(t - \frac{h}{2}) \right]^{*2} \quad (IX-72)$$

Le symbole $[]^{*2}$ désigne le carré au sens de la convolution admettant pour autre expression

$$\left[\delta(t + \frac{h}{2}) - \delta(t - \frac{h}{2}) \right]^{*2} = \delta(t + h) + \delta(t - h) - 2\delta(t)$$

On divise les deux membres de (IX-72) par le carré du pas d'incrément h^2 . Plutôt que d'utiliser la procédure "convolutive", nous conduirons nos calculs dans le domaine spectral de Fourier via la transformation de même nom (TF).

$$TF \left[\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h^2} \Delta_{hh}^2 [s(t)] \right\} \right] = (2\pi j \nu)^2 S(\nu) \quad (IX-73)$$

avec ν la variable fréquence. L'application de la Transformation de Fourier Inverse (TF^{-1}) sur l'expression (IX-73) permet de déterminer la dérivée seconde $s''(t)$ de la fonction $s(t)$. Ainsi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h^2} \Delta_{hh}^2 [s(t)] \right\} = s''(t) \quad (IX-74)$$

VII-2 DIFFERENCES FINIES GENERALISEES

En nous inspirant des deux cas simples précédents sur le calcul des différences finies, il est possible de généraliser la procédure aux différences finies à l'ordre positif quelconque n et noter

$$\Delta_{hh\dots h}^n [s(t)] = s(t) * \left[\delta\left(t + \frac{h}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{h}{2}\right) \right]^{*n} \quad (IX-75)$$

Pour estimer la puissance au sens de la convolution figurant dans le second membre de (IX-75), nous adaptons la forme du binôme de Newton à une puissance de convolution

$$\Delta_{hh\dots h}^n [s(t)] = s(t) * \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \delta^{*(n-k)}\left(t + \frac{h}{2}\right) * \delta^{*k}\left(t - \frac{h}{2}\right) \quad (IX-76)$$

La distribution de Dirac intervenant aussi comme un opérateur de translation en présence d'un produit de convolution

$$\Delta_{hh\dots h}^n [s(t)] = s(t) * \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \delta\left[t + (n-k)\frac{h}{2}\right] * \delta\left(t - k\frac{h}{2}\right) \quad (IX-77)$$

En réitérant à nouveau le rôle d'opérateur de translation de la distribution de Dirac,

$$\Delta_{hh\dots h}^n [s(t)] = s(t) * \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \delta\left[t - (k - \frac{n}{2})h\right] \quad (IX-78)$$

La transformée de Fourier appliquée sur (IX-78) donne

$$TF\left\{ \Delta_{hh\dots h}^n [s(t)] \right\} = S(\nu) \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \exp\left[-2\pi j(k - \frac{n}{2})h\nu\right] \quad (IX-79)$$

Le calcul de la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h^n} TF\left(\Delta_{hh\dots h}^n [s(t)]\right) \right\} = S(\nu) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \exp(-2\pi j(k - \frac{n}{2})h\nu)$$

aboutit au résultat

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h^n} TF\left(\Delta_{hh\dots h}^n [s(t)]\right) \right\} = (2\pi j\nu)^n S(\nu) \quad (IX-80)$$

La transformation de Fourier Inverse appliquée aux deux membres de (IX-80) permet d'exprimer la dérivée d'ordre n de la fonction $s(t)$ soit

$$s^{(n)}(t) = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \Delta_{hh\dots h}^n [s(t)] \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k s\left[t - (k - \frac{n}{2})h\right] \end{cases} \quad (IX-81)$$

La dérivée d'ordre entier n de la fonction $s(t)$ peut donc être obtenue directement à partir des différences associées à cette fonction pour un pas h suffisamment petit. Le second intérêt que présente l'expression (IX-81) est que cette dernière intègre la totalité de la fonction $s(t)$ par suite des translations opérées le long de l'axe des abscisses.

Un prolongement naturel de la procédure de dérivation par les différences finies peut être effectué pour le calcul de la dérivée d'ordre quelconque positif (entier ou non) α de la fonction $s(t)$

$$\forall \alpha \in \mathcal{R}^+ , \quad s^{(\alpha)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \Delta_{hh\dots h}^\alpha [s(t)]$$

(IX-82)

Un autre intérêt que pourrait présenter l'expression (IX-81) réside dans la possibilité de son adaptation au cas discret qu'induirait un échantillonnage de la fonction $s(t)$. Afin d'éviter l'usage de deux pas, l'un d'incrémentation h pour l'application des différences finies, l'autre d'échantillonnage Δt pour réaliser la discrétisation de la fonction $s(t)$, il est opportun de jumeler ces deux pas donc prendre $h \equiv \Delta t$ ce qui sous – entend la nécessité d'un échantillonnage très "fin".

VIII- PRINCIPE ALGORITHMIQUE DE CALCUL DE LA DERIVEE FRACTIONNAIRE ET REPRESENTATION GRAPHIQUE

Outre la méthode des différences finies, il existe d'autres possibilités de calcul de la dérivée fractionnaire d'une fonction $s(t)$ donnée. L'algorithme décrit par la figure IX-3 repose l'approche spectrale donc via la Transformation de Fourier (TF). Il est à remarquer que cette méthode ne requiert pas de condition spécifique sur l'ordre de dérivation d'où prédisposition quant à son application dans la dérivation fractionnaire par une simple substitution de l'ordre entier n par $\alpha \in \mathcal{R}^+$

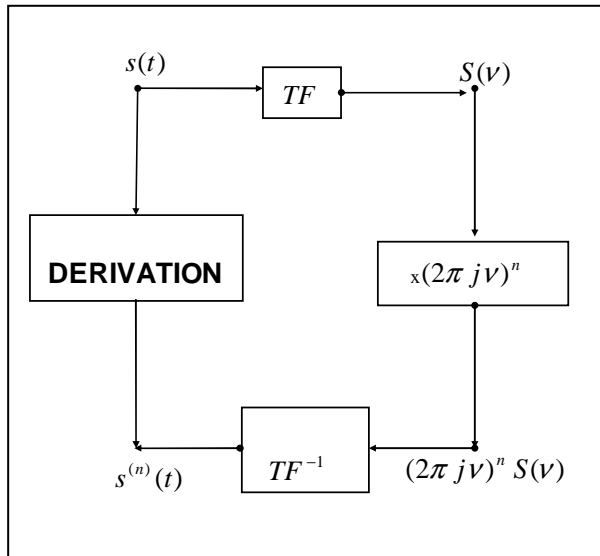


fig. IX-3 Algorithme de calcul de la dérivée d'une fonction par la méthode spectrale

Nous appliquons cette méthode spectrale au calcul et à la représentation graphique des dérivées entières ou fractionnaires d'une impulsion de Ricker $s(t)$ (figure IX-4(a)), signal d'un usage courant comme source dans la modélisation d'enregistrements sismiques (traces sismiques synthétiques)

$$s(t) = \left(\frac{a}{\sqrt{2\pi}} \right) \left[1 - 2 \left(\frac{t}{b} \right)^2 \right] \exp \left[- \left(\frac{t}{b} \right)^2 \right] \tag{IX-83}$$

Les paramètres a et b caractérisant cette impulsion en particulier sa largeur, sont fixés dans notre modèle comme suit $a = 2$ et $b = 0.75$. Le spectre d'amplitude de l'impulsion de Ricker (figure IX-4 (b)) est tel que

$$S(v) = a(\pi b)^2 v^2 \exp \left[- (\pi b)^2 v^2 \right] \tag{IX-84}$$

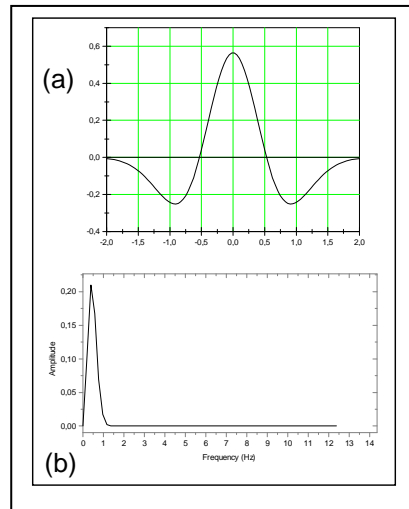


fig. IX-4 l'impulsion de Ricker (a) et son spectre d'amplitude (b)

La figure IX-5 illustre neuf cas de dérivées fractionnaires de l'impulsion de Ricker ($a = 2$ et $b = 0.75$), l'ordre de dérivation α variant de 0 à 2 avec un pas de 0.25

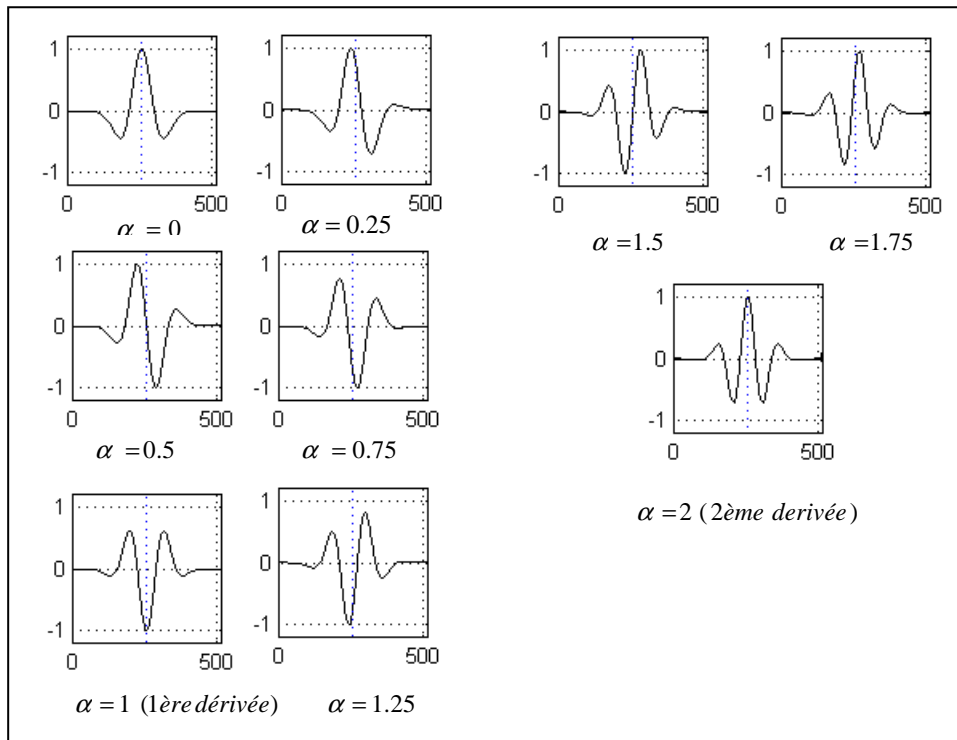


fig. IX-5 les neuf premières dérivées fractionnaires de l'impulsion de Ricker $\alpha = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2$

Un assemblage des graphes des neuf cas de dérivées fractionnaires de la figure IX-5 est synthétisé par la représentation IX-6.

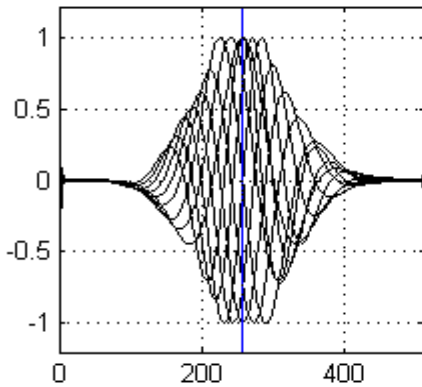


fig. IX-6 concaténation des graphes des neuf dérivées fractionnaires de l'impulsion de Ricker (fig.IX-5)

IX- CARACTERISATION DES PHENOMENES COMPLEXES PAR APPLICATION DE LA DERIVATION FRACTIONNAIRE: CAS D'UN PHENOMENE DE DIFFUSION

Dans certains cas, le diagnostic du principe de l'évolution d'un système complexe peut être abordé par le biais de la dérivation d'ordre non entier ou par le principe de l'intégration fractionnaire. L'objectif recherché est d'accéder à la nature des phénomènes en évolution dans le temps, relativement à leur nature fractale, déterministe ou aléatoire. Un intérêt est à mettre à l'actif des systèmes développant des interactions spatiales ou fonctionnant sur le principe de systèmes à mémoire. Généralement cette famille de systèmes repose sur des modèles d'équations différentielles de type fractionnaire. Les méthodes spectrales ou basées sur les fonctions de Green peuvent être prolongées au calcul fractionnaire

Une large panoplie de méthodes d'analyse mathématique pour une résolution analytique d'équations différentielles est disponible. L'objectif du développement de cette section consiste en une application du principe de la dérivation fractionnaire dans un modèle simple d'équation de propagation de la chaleur:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) - \gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) = 0 \tag{IX-85}$$

avec γ une constante et la fonction à deux dimensions $f(x,t)$ pourrait par exemple définir la température observée dans une barre semi infinie i.e. pour $0 < x < +\infty$, pour un temps t et une abscisse fixée x . On adjoint au modèle différentiel (IX-85) les conditions aux limites suivantes

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(x,t) = f(x,0^+) = \varphi(x) \tag{IX-86}$$

On suppose en outre que les fonctions $f(x,t)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ sont localement sommables.

Notre objectif est de construire et d'analyser la fonction de Green $f_G(x,t)$ associée à l'équation (IX-86) et ce par rapport au concept de la dérivation fractionnaire. Sans trahir la généralité de notre développement, posons $\gamma = 1$. La résolution de l'équation aux dérivées partielles (IX-86) sera entreprise dans le domaine spectral en posant:

$$TF[f(x,t)]_{x \leftrightarrow k} = F(k,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t) \exp(-2\pi j k x) dx \tag{IX-87}$$

En multipliant les deux membres de (IX-87) par $2\pi j k t$, on obtient

$$2\pi j k t F(k,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \exp(-2\pi j k x) dx \tag{IX-88}$$

La même procédure appliquée à (IX-88) donne la relation

$$-4\pi^2 k^2 F(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) dx \tag{IX-89}$$

La dérivée de l'expression (IX-87) par rapport à la variable temps t et tenant compte de (IX-86), est telle que

$$\frac{\partial F}{\partial t}(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \exp(-2\pi j k x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) dx \tag{IX-90}$$

Associées, les relations (IX-89) et (IX-90) conduisent à l'équation différentielle

$$\frac{\partial F}{\partial t}(k, t) + 4\pi^2 k^2 F(k, t) = 0 \tag{IX-91}$$

dont la solution générale est de la forme

$$F(k, t) = P(k) \exp(-4\pi^2 k^2 t) \tag{IX-92}$$

En introduisant la condition aux limites (IX-86) à la fois dans (IX-87) et dans (IX-92), la constante $P(k)$ est elle que

$$F(k, 0^+) = P(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, 0^+) \exp(-2\pi j k x) dx \tag{IX-93}$$

Le second membre de (IX-93) n'est autre que la transformée de Fourier $\phi(k)$ de la fonction $\phi(x)$ définie dans les conditions aux limites. Nous pouvons ainsi reprendre l'expression (IX-92) sous la forme

$$F(k, t) = \phi(k) \exp(-4\pi^2 k^2 t) \tag{IX-94}$$

La transformation de Fourier inverse (TF^{-1}) appliquée sur (IX-94) permet la détermination de la fonction inconnue $f(x, t)$ soit

$$f(x, t) = TF^{-1}[\phi(k)]_{k \leftrightarrow x} * TF^{-1}[\exp(-4\pi^2 k^2 t)] \tag{IX-95}$$

Sachant que

$$TF^{-1}[\exp(-4\pi^2 k^2 t)]_{k \leftrightarrow x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp(-\frac{1}{4t} x^2) \tag{IX-96}$$

Nous obtenons ainsi la fonction de Green $G(x, t)$ associée à l'équation de propagation de la chaleur (IX-85) où l'on a posé $\gamma = 1$

$$f_G(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{4t}) \tag{IX-97}$$

La figure IX-7 est une représentation de la fonction $f_G(x, t)$ pour $\gamma = 1$. Notons le "pic" étroit exhibé par le graphe au voisinage de l'origine des coordonnées.

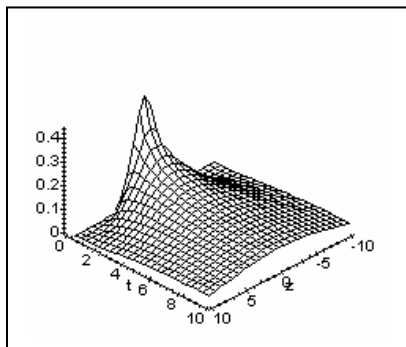


fig. IX-7 la fonction de Green associée à l'équation de propagation de la chaleur pour $\gamma = 1$

La fonction inconnue $f(x,t)$ est alors obtenue à l'aide du produit de convolution suivant

$$f(x,t) = f(x,0^+) * f_G(x,t) \tag{IX-98}$$

Il est équivalent de reprendre (IX-97) sous forme intégrale et tenir compte de $x \geq 0$

$$f(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} f(y,0^+) \exp\left[-\frac{1}{4t}(x-y)^2\right] dy \tag{IX-99}$$

Nous pouvons formuler l'expression (IX-99) au sens d'une dérivée fractionnaire par rapport à la variable x en écrivant

$$f(x,t) = \frac{H(x)}{\Gamma(1/2)} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{y}} \left\{ \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{1}{4t}(x-y)^2\right] \right\} \tag{IX-100}$$

On peut extraire de (IX-100) l'opérateur de dérivation d'ordre 1/2 soit $G_{1/2}(x,t)$ par rapport à la

variable x de la fonction $h(x,t) = f(x,0^+) \left\{ \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{t}} \exp\left[-\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2\right] \right\}$ soit

$$f(x,t) = \frac{\partial^{1/2} h(x,t)}{\partial x^{1/2}} \tag{IX-101}$$

En vue d'incorporer les conditions initiales, nous supposons que la fonction $T(x,t)$ est de type causal relativement à la variable t et/ou par rapport à la variable x . Dans le premier cas nous écrivons

$$T(x,t) = H(t)T(x,t) \tag{IX-102}$$

La dérivée de (dérivfrac92) par rapport à la variable t est

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = T(x,0)\delta(t) = \varphi(x) \tag{IX-103}$$

X- LA DERIVATION FRACTIONNAIRE DANS L'ANALYSE DES COURBES IRREGULIERES (COURBES PATHOLOGIQUES)

On désigne sous le nom de courbes "pathologiques", une classe de courbes particulières qui contredisent certaines lois ou propriétés mathématiques pourtant reconnues comme "universelles". Cependant, le qualificatif de courbes irrégulières semble à bien des égards le plus adéquat. Cette irrégularité, quand elle existe, sera relative soit un comportement contradictoire ou par rapport à une loi mathématique précise. Leur complexité apparente est plus s orientée vers une représentation fractale é que vers le chaos, ce qui facilite, en quelque sorte leur étude et surtout leur simulation.. Les exemples de courbes irrégulières .données par les figures IX-8 et IX-9 sont considérées comme classiques;

La courbe irrégulière de la figure IX-8 ou cardioïde "perturbée" obéit au couple d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(b^n t) \\ s_2(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \sin(b^n t) \end{array} \right. \quad |a| < 1 \tag{IX-104}$$

avec $a = 0.5$ et $b = 2$.

La courbe irrégulière de la figure IX-9 connue sous le nom de courbe de Cellerier est une autre forme de la courbe irrégulière cardioïde obtenue en posant $a = 1/3$ et $b = 3$ dans (IX-104)

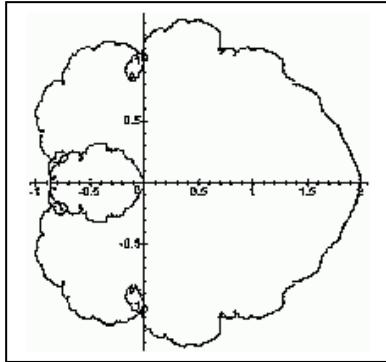


fig. IX-8 un type de courbe irrégulière (cardioïde) $a = 0.5$ et $b = 2$.

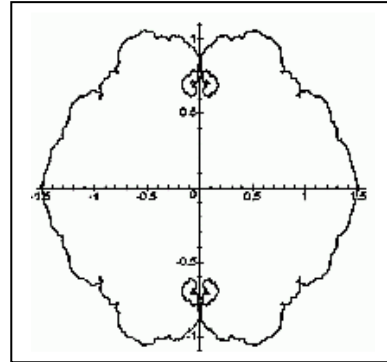


fig. IX-9 courbe irrégulière de Cellerier $a = 1/3$ et $b = 3$

Le concept de courbes irrégulières n'est nullement synonyme de désordre ou de chaos; leur complexité n'est qu'apparente. De ce fait, leur analyse doit être entreprise sur la base de méthodes adaptées en fonction des objectifs de l'étude. Des modèles mathématiques sont engendrés pour comprendre la morphologie "obscur" des courbes irrégulières. Les méthodes classiques sont plutôt orientées vers une analyse globale des variations. Dans ce contexte, la théorie fractale s'avère comme une approche pouvant conduire à une meilleure compréhension de ces formes complexes dans lesquelles les lois d'échelle révèlent une richesse de détails insoupçonnés dans les études classiques. Un comportement de self similarité peut être extrait. En effet, en exprimant dans un premier cas $S_1(bt)$, nous avons en ayant posé $\alpha = n + 1$

$$aS_1(bt) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} \cos(b^{n+1}t) = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} a^\alpha \cos(b^\alpha t) \tag{IX-105}$$

Il est aussi équivalent d'écrire

$$aS_1(bt) = \sum_{\alpha=0}^{+\infty} a^\alpha \cos(b^\alpha t) - \cos(t) \leftrightarrow aS_1(bt) + \cos(t) = S_1(t) \tag{IX-106}$$

De même

$$S_2(t) = aS_2(bt) + \sin(t) \tag{IX-107}$$

XI- DES COURBES IRREGULIERES AUX COURBES FRACTALES

En dépit de leur large utilisation, les développements en séries de Fourier et par conséquent les coefficients complexes qui en résultent sont encore l'objet de critiques et de contradictions. Sous l'hypothèse de la satisfaction des conditions de Dirichlet, une fonction $f(t)$ supposée T -périodique est globalement définie par la détermination des coefficients de Fourier complexes $(C_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ permettant d'écrire

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \exp\left(2\pi jk \frac{t}{T}\right) \tag{IX-108}$$

avec

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t) \exp\left(-2\pi jk \frac{t}{T}\right) dt \tag{IX-109}$$

Deux questions méritent cependant d'être posées: Quel sens donner à ces coefficients et la série de Fourier converge – t-elle précisément vers la fonction $f(t)$? Il ne s'agit nullement de remettre en cause le développement en séries de Fourier mais plutôt de saisir l'ambiguïté de la notion de convergence. Citons à cet effet l'exemple de fonction continue, 2π -périodique construite par Paul-Dubois Raymond en 1873 et dont la série de Fourier associée diverge. Trois arguments peuvent être avancés:

- redéfinir le concept de fonction exclusivement adapté au développement en séries de Fourier
- modifier le concept de convergence
- établir un nouveau système orthogonal en rapport avec les séries trigonométriques

Cette dernière proposition constitue idéalement le procédé de construction de courbes irrégulières à consistance fractale.

XII- SERIES LACUNAIRES

Partant des considérations précédentes, Riemann entreprit l'étude des propriétés des fonctions $\Omega(t)$ admettant le développement trigonométrique suivant

$$\Omega(t) = \sum_n a_n \cos(nt) + \sin(b_n t) \tag{IX-110}$$

Notons $f(t)$ la limite de $\Omega(t)$; Cantor prouva par la suite que si cette fonction $f(t)$ est partout définie et que si $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Ce dernier résultat a ouvert une voie quant au choix des coefficients a_n et b_n . En partant du concept du développement en séries lacunaires d'une fonction $f(t)$ de la forme

$$f(t) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \cos(n_k t + \varphi_k) \tag{IX-111}$$

et si f est partout différentiable, alors les coefficients α_k sont tels que $\alpha_k = o\left(\frac{1}{n_k}\right)$. Un cas intéressant de développement en séries lacunaires fut proposé par Riemann. Il est de la forme

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n \cos(n^2 t) \tag{IX-112}$$

ou bien

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n \sin(n^2 t) \tag{IX-113}$$

Les coefficients C_n doivent vérifier les conditions suivantes

$$\begin{cases} \forall n \in \mathcal{N}, C_n \geq 0 \\ C_n > C_{n+1} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0 \end{cases} \tag{IX-114}$$

Pour un choix judicieux des coefficients C_n , il a été prouvé qu'il existe une classe de fonctions partout continues mais nulle part différentiables telles que le couple de fonctions (figure (a) pour $N = 10$ et (b) pour $N = 100$).

$$\begin{cases} f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n^2 t) \\ g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin(n^2 t) \end{cases} \quad (IX-115)$$

La figure (IX-10) en donne deux représentations (a) pour $N = 10$ et (b) pour $N = 100$.

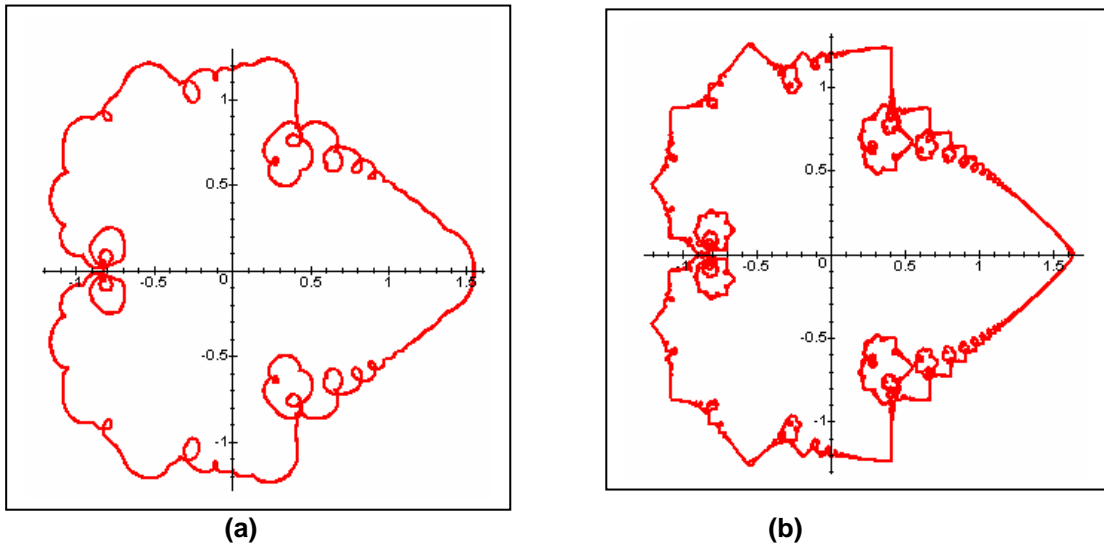


fig. IX-10 séries lacunaires pour $N = 10$ (a) et $N = 100$ (b)

- modèle trigonométrique

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(2\pi b^n t) \quad (IX-116)$$

Le choix des paramètres a et b varient selon les auteurs. Leurs valeurs n'influent guère sur les caractéristiques intrinsèques d'irrégularité, de continuité, de non différentiabilité ou encore de fractalité de la fonction de Weierstrass (Annexe2). La figure IX-11 en est un exemple, construite sous la condition $ab \geq 1$ pour $a = 0.7$ et $b = 2$

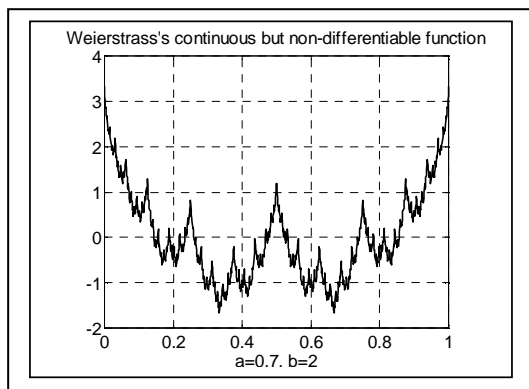


fig. IX-11 modèle de séries lacunaires par les fonctions trigonométriques $a = 0.7$ et $b = 2$

Le caractère de self similarité donc de fractalité de la courbe peut être mis en évidence par un effet de zoom par une réduction de l'intervalle de tracé de la courbe, ici $[0,1]$

- le modèle de Weierstrass (figure défini pour b entier impair, $b \geq 3$, $0 < a < 1$ et $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$)

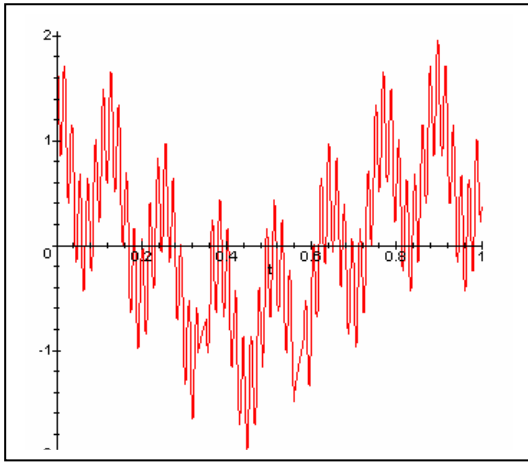


fig. IX-12 modèle de fonction de Weierstrass obtenue pour $a = 0.9$ et $b = 7$

XIII- LA DERIVATION FRACTIONNAIRE DANS LE CONTEXTE DES COURBES IRREGULIERES – APPLICATION SUR LA COURBE DE WEIERSTRASS

Le modèle de séries trigonométriques telles que définies par exemple en (IX-16) peut être étendu à différentes formes, ce qui pourrait conduire à la recherche d'un modèle de séries lacunaires généralisées représentant des fonctions partout continues mais nulle part différentiables. A cet effet, un modèle général particulièrement représentatif du comportement irrégulier des fonctions de Weierstrass serait de la forme

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a^{ks(t)}} \sin(b^k t) \tag{IX-117}$$

Les irrégularités de la fonction $f(t)$ et par conséquent ses singularités dépendront du choix de la fonction

$s(t)$ dite aussi "fonction génératrice" laquelle sera supposée définie dans l'intervalle $[0,1]$. La figure IX-13 est un exemple de fonction de Weierstrass généralisée définie par

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^{t^2} \cos(2^k t) \tag{IX-118}$$

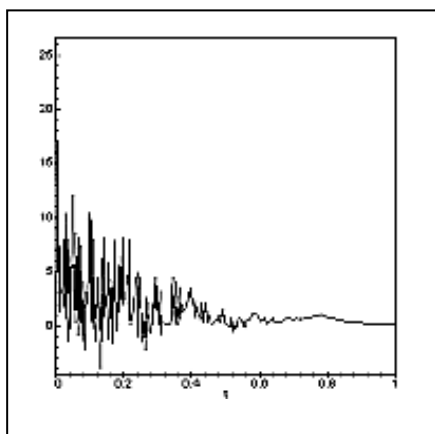


fig. IX-13 un exemple de fonction de Weierstrass généralisée

Remarquons les fortes irrégularités développées par cette fonction de Weierstrass au voisinage de l'origine des coordonnées. En fait, comme illustré sur les exemples précédents (figure IX-11) et (figure IX-13 (a) et (b)) les fonctions de Weierstrass sont les prototypes de représentations fonctionnelles fractales non seulement pour le caractère fractal de leur graphes mais aussi parce qu'elles intègrent les caractéristiques fondamentales des images fractales. Parmi les principaux critères d'identification de ces dernières nous pouvons citer

- le principe d'auto – similarité révélant des structures locales similaires à la structure globale
- la dimension fractale ou de géométrie fractale caractérisant des graphes ou des images fractales dont les dimensions sont comprises entre deux valeurs entières
- le facteur d'échelle d'analyse ou d'observation mettant en évidence des structures "lisibles" même à des échelles de plus en plus fines.

A titre d'exemple, deux effets de zoom réalisés relativement aux intervalles $[0.2,0.6]$ (figure IX-14 (a)) et $[0.4,0.65]$ (figure IX-14 (b)) sur le graphe de la fonction de Weierstrass (figure IX-11) révèlent parfaitement un effet d'auto - similarité et un facteur d'échelle dans la distribution des détails du graphe "mère".

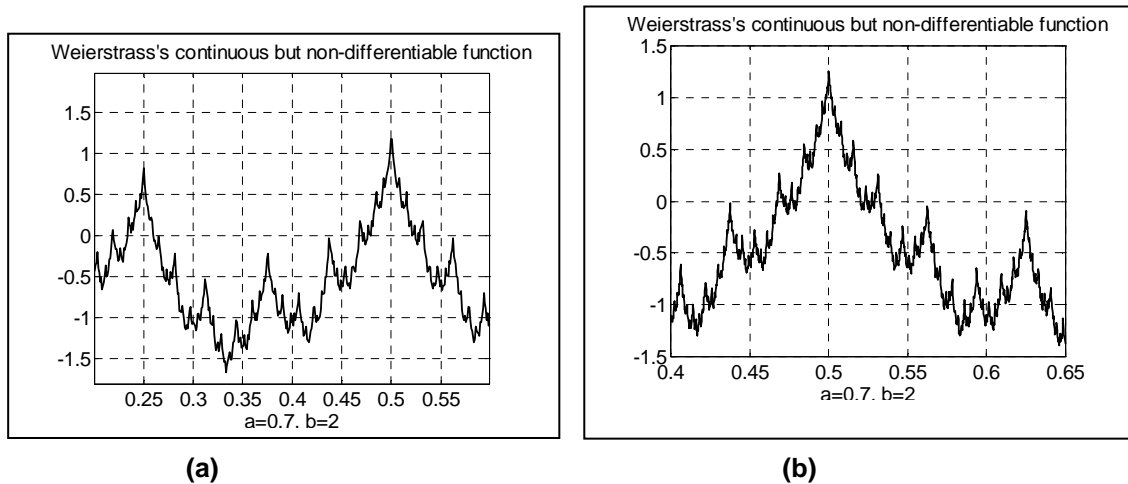


fig. IX-14 effet d'agrandissement sur la courbe de Weierstrass dans les intervalles $[0.2,0.6]$ (a) et $[0.4,0.65]$ (b)

Afin de rendre compte de ces effets d'irrégularités, de singularités et d'auto – similarité, il s'est avéré nécessaire de développer des paramètres de description adéquats dans l'analyse d'une fonction fractale donnée. Parmi ces paramètres et en relation avec la dérivation fractionnaire, nous retenons le coefficient de Hölder.

XIV- EXPOSANT DE HOLDER ET DERIVATION FRACTIONNAIRE

Simplement énoncé, l'exposant de Hölder α fournit un paramètre d'estimation du degré d'irrégularité d'une fonction et plus tard de sa fractalité. Il mesure les fluctuations de la courbe associée à la fonction localement par exemple en un point donné.

Une fonction "fortement" irrégulière voire chaotique présentera un exposant de Hölder assez faible alors qu'en présence d'une régularité de la courbe donc du degré de lissage, il est relativement élevé. Le caractère "local" des exposants de Hölder permet de suivre l'évolution de la fractalité de la courbe lorsque plusieurs points leur calcul est effectué sur une série de points.

- Définition de l'exposant de Hölder:

Une fonction $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ est dite α -Höldérienne si

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \tag{IX-119}$$

C étant une constante.

- si $\alpha = 1$, nous retrouvons la différentiabilité classique d'une fonction devenant ainsi 1-Höldérienne

- si l'exposant de Hölder α d'une fonction $f(t)$ en un point t_0 est tel que $\alpha \geq 1$, la fonction $f(t)$ est alors différentiable ou localement différentiable. Sur le plan graphique, ceci se traduit par une décroissance rapide des oscillations. Le graphe de la figure IX-15 est une représentation de la fonction $f(t) = t^{3/2} \sin \frac{1}{t}$ exhibant une régularité appréciable au voisinage de $t = 0$ donc pour un exposant de Hölder $\alpha > 1$ (en fait $\alpha|_{t=0} = 1.5$)

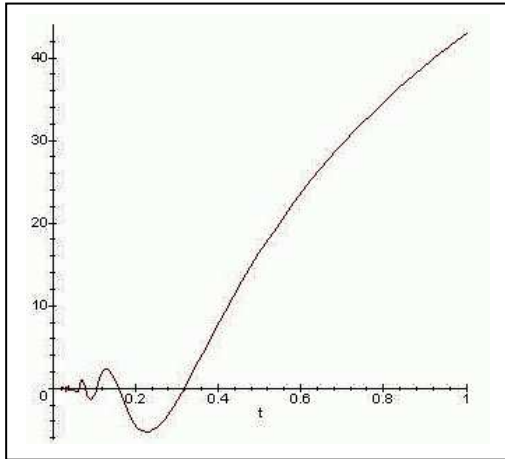


fig. IX-15 exemple de fonction

$$(f(t) = t^{3/2} \sin \frac{1}{t})$$

d'exposant de Hölder $\alpha > 1$

- Le cas extrême concerne l'exposant de Hölder d'une fonction constante pour laquelle $\alpha = +\infty$
- Dans le cas linéaire où $f(t) = at + b$, cet exposant est tel que $\alpha = 1$

Excluant le cas extrême, les variations de l'exposant de Hölder sont telles que $0 < \alpha < 1$ afin de caractériser une fonction non différentiable ou une fonction fractale.

- l'exposant de Hölder dans quelques cas :
 - exposant de Hölder la courbe de Cellerier (expression IX-104) : $\alpha = -\frac{\log a}{\log b}$

Ainsi pour la figure IX-8 (cardioïde) $a = 0.5$ et $b = 2$: $\alpha = -\frac{\log(0.5)}{\log(2)} = 1$

Pour la figure IX-9 : $a = 1/3$ et $b = 3$: $\alpha = -\frac{\log(1/3)}{\log(3)} = 1$
- exposant de Hölder dans le cas de la fonction de Weierstrass (expression (IX-116) figure IX-11 pour- $a = 0.7$ et $b = 0.2$) : $\alpha = \frac{\log(a)}{\log(b)} = 0.221$. La fonction de

Weierstrass étant nulle part différentiable, contient des singularités en chaque point. Les fonctions de Hölder peut contenir des singularités de caractères différents. Celles dont l'exposant de Hölder est proche de 1 affichent une plus ou moins bonne régularité. Les sections chaotiques admettent des exposants de Hölder proches de zéro.

XV- LA DERIVATION FRACTIONNAIRE LOCALE

L'estimation de la régularité locale d'une fonction peut être imposée par certains modes de traitement du signal, de l'image ou de données de géophysique. Certes on dispose du paramètre "exposant de Hölder" mais ce dernier est plus orienté vers un aspect descriptif auquel échappe le critère d'échelle d'analyse, de fractale et de dimension fractale. Excepté la dérivée classique, la dérivée fractionnaire est non locale et par conséquent ne peut répondre aux attentes citées. En outre, la dérivée fractionnaire étant pas nulle, pour toute fonction véhiculant dans son expression une constante conduira à une valeur erronée de sa dérivée fractionnaire.

XV-1 DEFINITION DE LA DERIVEE FRACTIONNAIRE LOCALE

La définition de la dérivée fractionnaire locale résulte d'une modification légère de la dérivée fractionnaire telle que définie ci-dessus.

- première définition : Si pour une fonction $f : [0,1] \rightarrow \mathcal{R}$, la limite suivante

$$D^q [f(y)] = \lim_{x \rightarrow y} \frac{d^q [f(x) - f(y)]}{d(x-y)^q} \quad \text{avec } 0 < q \leq 1 \quad (\text{IX-120})$$

existe et est finie, elle définit alors la dérivée fractionnaire locale au point y de la fonction $f(x)$.

- Deuxième définition : Elle généralise en quelque sorte la première définition relativement au choix de l'ordre de dérivation quelconque q . Dans ce cas

$$D^q [f(y)] = \lim_{x \rightarrow y} \frac{d^q \left[f(x) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(y) \cdot (x-y)^n}{\Gamma(n+1)} \right]}{d(x-y)^q} \quad (\text{IX-121})$$

avec N l'entier le plus proche donnant l'encadrement $N < q \leq N+1$. L'expression (IX-121) fait intervenir les dérivées d'ordres entiers $n = 0, N$ de la fonction $f(x)$.

XV-2 UNE INTERPRETATION DE LA DERIVEE FRACTIONNAIRE LOCALE

Sur le plan de l'analyse fonctionnelle, la dérivation fractionnaire tout comme la dérivation fractionnaire locale offrent une opportunité de généralisation de la théorie de l'analyse fonctionnelle ayant pour référence le calcul de dérivées. Aussi osera-t-on introduire par exemple, une formule de Leibniz, un développement en séries de Taylor orientée uniquement vers la dérivation fractionnaire.

Sur le plan de l'analyse de courbes, la dérivation fractionnaire et le calcul de dérivées fractionnaires locales rendent compte du caractère des irrégularités affichées locales entre autres, du comportement fractal ou multi fractal local de systèmes en évolution.

XVI- CALCUL DE LA DERIVEE FRACTIONNAIRE ET DE LA DERIVEE FRACTIONNAIRE LOCALE SUR UNE FORME DE LA FONCTION DE WEIERSTRASS

Considérons la forme élémentaire de la fonction de Weierstrass ci-après

$$W_\lambda(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{(2-p)n} \sin(\lambda^n t) \quad \text{avec } 1 < p < 2 \text{ et } \lambda > 1 \quad (\text{IX-122})$$

La figure IX-16 (λ fixé : $\lambda = 1.8$, $p = 1.01, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8$) montre révèle l'influence du paramètre p sur l'irrégularité de la fonction de Weierstrass, cette dernière variant dans le même sens que ce paramètre.

L'une des motivations du choix de la forme de l'expression de la fonction de Weierstrass donnée en (IX-122) est l'accès direct à la dimension fractale D de $W_\lambda(t)$. En effet, dans un cas général où la fonction de Weierstrass $W(t)$ admet pour expression

$$W(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \sin(b^n t) \quad (\text{IX-123})$$

la dimension fractale D est alors

$$D = 2 + \frac{\log a}{\log b} \quad (\text{IX-124})$$

En posant $a = \lambda^{2-p}$ et $b = \lambda$, nous obtenons simplement $D = p$, donc comme pour p , $0 < D < 1$. La dimension fractale, de type non entier, constitue un paramètre d'estimation du caractère irrégulier d'une courbe, ce dernier variant dans le même sens que cette dimension fractale.

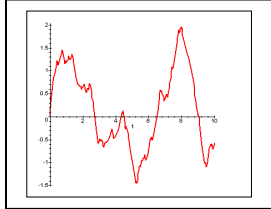
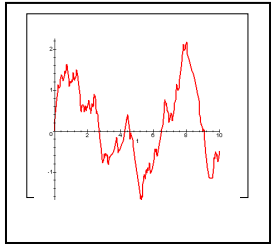
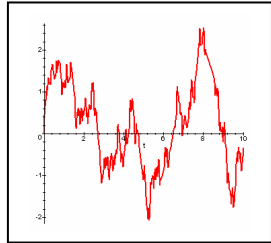
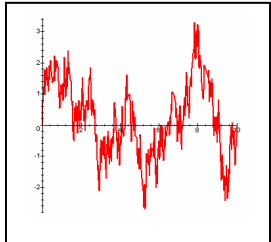
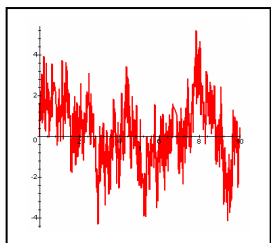
	λ fixé	$\lambda = 1.8$
Variations du paramètre p	Dimension fractale D	Graphe de la fonction de Weierstrass
$p = 1.01$	$D = 1.01$	
$p = 1.2$	$D = 1.2$	
$p = 1.4$	$D = 1.4$	
$p = 1.6$	$D = 1.6$	
$p = 1.8$	$D = 1.8$	

fig. IX-16 dimension fractale et irrégularités de la fonction de Weierstrass $W_\lambda(t)$

La figure IX-17 (p fixé: $p = 1.6$, $\lambda = 1.1, 1.2, 2, 2.5, 3$) concerne l'influence du paramètre λ sur la régularité de la fonction de Weierstrass $W_\lambda(t)$. Cette régularité varie dans le sens inverse des variations de λ .

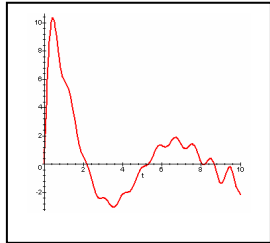
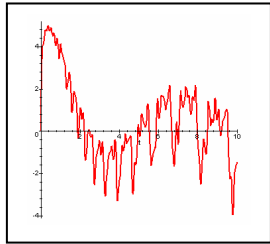
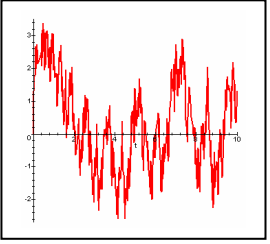
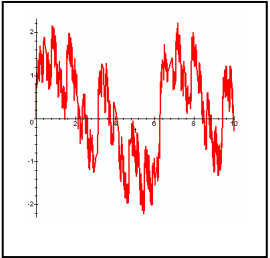
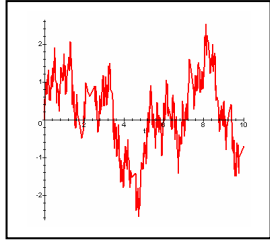
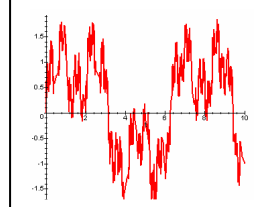
VALEUR DU PARAMETRE p FIXEE $p = 1.6$	
VALEURS DU PARAMETRE λ	Graphe de la fonction e Weierstrass
$\lambda = 1.1$	
$\lambda = 1.2$	
$\lambda = 1.4$	
$\lambda = 2$	
$\lambda = 2.5$	
$\lambda = 3$	

fig. IX-17 influence du paramètre λ sur la régularité de la fonction de Weierstrass

La fonction de Weierstrass (IX-122) vérifie la propriété de similarité aisément justifiable suivante

$$W_\lambda(\lambda t) = \lambda^p \cdot W_\lambda(t) \quad (\text{IX-125})$$

Exprimons la dérivée fractionnaire d'ordre q de la fonction de Weierstrass $W_\lambda(t)$ en écrivant

$$\frac{d^q [W_\lambda(t)]}{dt^q} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{(2-p)n} \frac{d^q [\sin(\lambda^n t)]}{dt^q} \quad (\text{IX-126})$$

La dérivation de fonctions composées appliquée dans (IX-126) donne

$$\frac{d^q [W_\lambda(t)]}{dt^q} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{(2-p)n} \lambda^{nq} \frac{d^{q-1} [\cos(\lambda^n t)]}{dt^{q-1}} \quad (\text{IX-127})$$

ou bien

$$\frac{d^q [W_\lambda(t)]}{dt^q} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{(2-p+q)n} \frac{d^{q-1} [\cos(\lambda^n t)]}{dt^{q-1}} \quad (\text{IX-128})$$

Partant du fait que la fonction $g(t) = \cos(\lambda^n t)$ est uniformément bornée, la convergence de la série (IX-127) est assurée dans le cas où la condition suivante est vérifiée

$$2 - p + q < 0 \Leftrightarrow q < p - 2 \quad (\text{IX-129})$$

La dérivée fractionnaire locale en $t = 0$ est obtenue en posant

$$\frac{d^q [W_\lambda(0)]}{dt^q} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{(2-p+q)n} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^{q-1} [\cos(\lambda^n t)]}{dt^{q-1}} \quad (\text{IX-130})$$

La limite à calculer dans le second membre de (IX-130) est nulle puisque la dérivée d'ordre $(q-1)$ fera intervenir nécessairement un sinus et la dérivée fractionnaire locale en $t = 0$ de la

fonction de Weierstrass $W_\lambda(t)$ est nulle soit $\frac{d^q [W_\lambda(0)]}{dt^q} = 0$.

CHAPITRE X

*Si ton goût est subtil
apprends à goûter l'eau
et à reconnaître la ressource*

PARTIE I

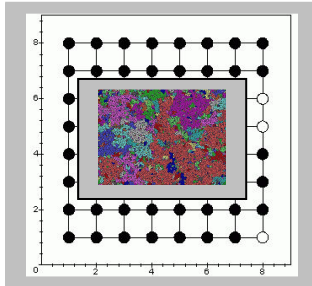
UN PROCESSUS STOCHASTIQUE FRACTAL : LA PERCOLATION

PARTIE II

MODELISATION FRACTALE DE LA POROSITE

PARTIE I

UN PROCESSUS STOCHASTIQUE FRACTAL : LA PERCOLATION



I- LE FORMALISME PROBABILISTE DE LA PERCOLATION

Il convient de réaliser qu'un système donné soumis à des modifications intrinsèques, peut, par rétroaction positive ou négative, influencer sur d'autres systèmes à travers des échanges d'énergie ou plus généralement d'information et avec lesquels il peut être en cohabitation ou en compétition. La percolation participe à ces échanges et permet de modéliser des phénomènes physiques dont le comportement à des échelles réduites est déterminé par un comportement macroscopique aléatoire.

La théorie de la percolation, d'essence probabiliste, décrit le processus par lequel un site, élément d'un environnement est progressivement envahi au cours d'une dynamique d'occupation ou de peuplement d'un milieu donné.

Dans les études de géophysique, la percolation intègre les phénomènes de porosité interconnectée dite aussi en réseau et surtout les processus de fracturation atteignant progressivement les éléments structuraux d'une faille. Cette progression s'apparente à un cheminement aléatoire dont un développement sera donné dans le présent chapitre. Initialement d'apparence erratique, les contraintes aidant, le système de fracturation converge vers un état d'auto – similarité révélant à la limite un ensemble fractal.

Quoique intervenant dans de nombreux phénomènes physiques, la percolation reste historiquement rattachée au problème concret et simple suivant: peut-on estimer la probabilité faisant qu'une roche immergée dans un fluide soit "mouillée" en son centre?

II- CONCEPTION DU MODELE MATHEMATIQUE DE LA PERCOLATION

Le modèle mathématique pouvant constituer une forme de représentation d'un milieu envahi par un fluide repose sur la conception d'une grille parcourue par des arêtes (en fait des canaux) reliant aux intersections des îlots essaimés à travers le modèle géométrique :sites reliés par des liaisons e , chaque liaison pouvant être ouverte avec une probabilité p ou fermée (état de probabilité($q = 1 - p$)) indépendamment des autres connexions (figure IX-1-1).

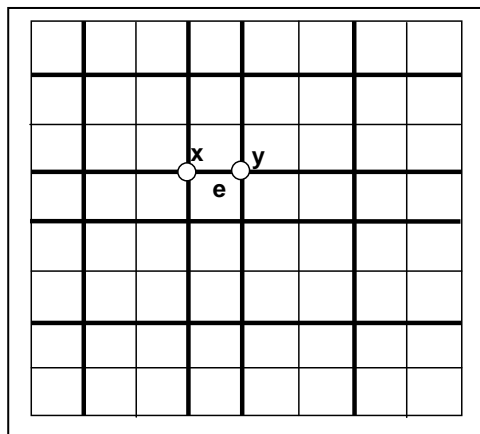


fig. X-I-1 une grille de percolation bidimensionnelle

La distance entre deux sites x et y , est supposée infiniment petite comparée à la dimension de la roche. A ce modèle géométrique est adjoint un modèle probabiliste par rapport à un ensemble mathématique d'appartenance Z^d de ces sites en ce sens que : $x = \{x_i\}_{i=1,p}$ avec $x_i \in Z$. Deux sites $[x = \{x_i\}_{i=1,d}]$ et $[y = \{y_i\}_{i=1,d}]$ sont adjacents si la distance D les séparant est telle que

$$D(x, y) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1 \quad (\text{X-I-1})$$

Un passage de percolation comprendra un ensemble de sites et un réseau de liaisons dans ce cas ouvertes. On définit ainsi la suite hétéroclite faite de sites et de liaisons $\{x_i, e_i\}_{i=0,n}$, e_i représentant l'arête entre les sites x_i et x_{i+1} . Pour un modèle de représentation donné, on élimine les liaisons fermées pour ne retenir que les composantes "ouvertes" lesquelles formeront ainsi des amas dits ouverts. Pour un site $x \in Z^d$, on désigne par $C(x)$ l'ensemble de tous les sites reliés à des canaux ouverts.

Un fluide externe devant atteindre le cœur de la roche supposerait l'existence d'un passage ouvert séparant l'extérieur et un site qui serait localisé au centre du corps. Le phénomène de percolation prendra naissance à l'amas origine $(0,0,\dots,0)$ caractérisé par une infinité de canaux ouverts. La percolation possible sera décrite par une fonction $\theta(p)$ dépendant de la probabilité p informant qu'il y a effectivement percolation.

III- VARIATIONS DE LA FONCTION DE PERCOLATION – CAS CRITIQUE

Manifestement la fonction de percolation $\theta(p)$ est une fonction croissante de la variable p car plus le nombre de canaux ouverts augmente, plus la possibilité d'avoir un amas de taille infini à l'origine augmente aussi. Bien plus que relié au paramètre de probabilité p , le phénomène de percolation est conditionné par le franchissement d'un seuil critique p_c de cette probabilité en deçà duquel $\theta(p)$ est nulle et au delà duquel cette fonction tend asymptotiquement vers 1 (figure X-I-2).

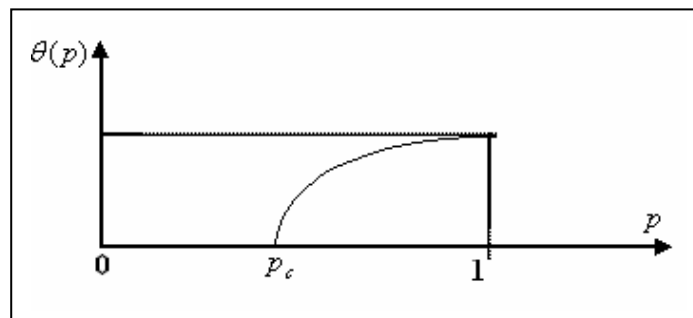


fig. X-I-2 fonction de percolation et probabilité critique

Plus précisément deux situations cohabitent:

- pour $p < p_c$, il n'existe pas d'amas infini donc pas ou faible percolation (matériau peu poreux)
- pour $p > p_c$, il peut exister un amas infini à l'origine, le phénomène de percolation se développe (le matériau étant suffisamment en cavités poreuses)

La valeur de la probabilité critique p_c peut être estimée dès lors que le modèle mathématique de la fonction de percolation est établi

IV- UN MODELE DE LOI DE PUISSANCE DANS LE PHENOMENE DE PERCOLATION

Le phénomène de percolation étant relié à la présence des amas, la densité de la distribution d_a que ces derniers occupent à la probabilité p sur la grille, est une fonction de leur taille m_a ; nous posons:

$$d_a = f\left(\frac{m_a}{\langle m_a \rangle}\right)g(m_a) \tag{X-I-2}$$

Si l'ensemble de la grille est soumis à un facteur d'échelle k , ceci n'affectera en rien la densité de distribution ni en terme de taille m_a , ni en terme de taille moyenne $\langle m_a \rangle$. Seule la fonction $g(m_a)$ reflètera le changement d'échelle en vérifiant la relation

$$g(kx) = h(k)g(x) \tag{X-I-3}$$

Remarquons que la fonction h ne dépend que du facteur échelle k mais pas de la variable x . L'objectif serait de trouver une expression de la fonction $g(x)$ qui caractérisera la densité de distribution des amas d_a . Pour $x = 1$, la relation (X-I-3) devient $g(k) = h(k)g(1)$ et nous obtenons l'égalité $g(k) = h(k)$ en ayant posé $g(1) = 1$. L'expression (X-I-3) prend alors la forme

$$\forall k, \forall x, g(kx) = g(k)g(x) \tag{X-I-4}$$

et que nous généralisons comme une équation de la forme (X-I-5) et dont la fonction g constitue l'inconnue

$$g(xy) = g(x)g(y) \tag{X-I-5}$$

La résolution de l'équation différentielle obtenue à partir de la dérivation des deux membres de (X-I-5) par rapport à la variable y aboutit à écrire (pour $y = 1$) $g(x) = x^{g'(1)}$. En posant $q = -g'(1)$, la fonction $g(x)$ suit alors une loi de puissance, caractéristique des processus de type fractal, de la forme

$$g(x) = x^{-q} \tag{X-I-6}$$

Ainsi la densité d_a de la distribution des amas obéit elle aussi à une loi de puissance au point critique représenté par l'exposant q . Ceci est le fait des phénomènes de transition de phase qui sont à soubassement fractal.

V- MODELE MATHEMATIQUE D'APPROXIMATION DE LA FONCTION DE PERCOLATION

La fonction de percolation $\theta(p)$ est fonction de la dimension géométrique du modèle de grille considéré. Pour le modèle huit lignes – huit colonnes (figure X-I-1) ramené il est vrai à une représentation- blocs quatre lignes - quatre colonnes par la technique des groupes de renormalisation (thème sortant du cadre du présent travail), la fonction $\theta(p)$ peut être approchée par l'expression polynomiale

$$\theta(p) = 2p^2 - p^4 \tag{X-I-7}$$

L'existence d'un point critique p_c étant établie précédemment, en ce point précisément, la densité de la distribution des amas est insensible au changement d'échelle. Le point critique p_c devient alors un point fixe pour la fonction de percolation $\theta(p_c)$ en ce sens que $\theta(p_c) = p_c$ (figure X-I-3) soit

$$p_c^4 - 2p_c^2 + p_c = 0 \tag{X-I-8}$$

Entre autres solutions positives de l'équation (X-I-8):

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_c = 0 & \text{absence totale de percolation} \\ p_c = 0.618 & \text{existence d'une probabilité critique en deçà de laquelle figurent} \\ & \text{des phénomènes de percolation médiocres} \\ p_c = 1 & \text{phénomène de percolation optimum (roche creuse)} \end{array} \right.$$

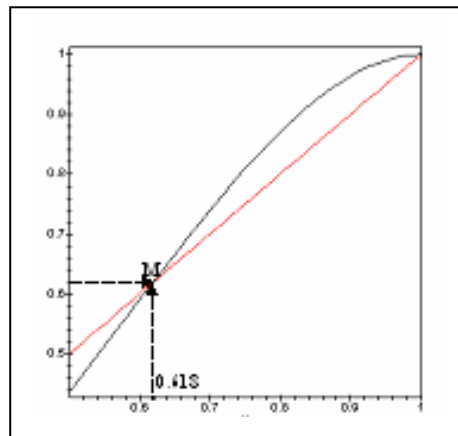
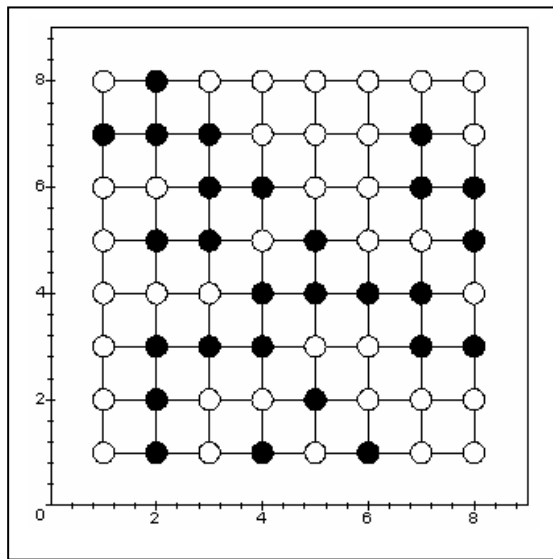


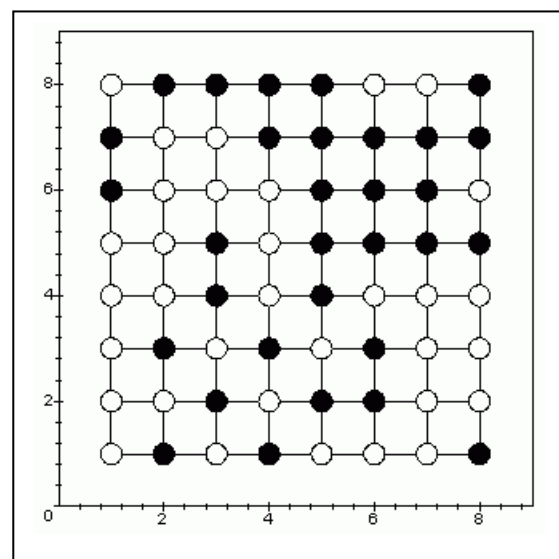
fig. X-I-3 seuil critique de percolation

VI- SIMULATION DE PHENOMENES DE PERCOLATION PAR SITE EN FONCTION DE LA PROBABILITE CRITIQUE

Le modèle géométrique de grille retenu est de type huit lignes - huit colonnes. Les sites "secs" sont représentés par des cercles vides, les sites "saturés" par des cercles noirs. Nous avons testé différentes valeurs de la probabilité critique p_c pour juger de l'influence de cette dernière sur la qualité de la percolation induite. Notons qu'une percolation est réalisée lorsque partant d'un site "saturé" (cercle noir) situé sur une frontière de la grille, il convient de rallier la frontière opposée en "navigant" uniquement sur des sites saturés", tout site "sec" forme alors un obstacle à la transition du fluide



probabilité de percolation $p = 0.4$



probabilité de percolation $p = 0.5$

fig. X-I- 4 Deux cas d'absence de percolation- probabilités de percolation strictement inférieures à la probabilité critique

La figure X-I-5 (a) illustre parfaitement le rôle de la probabilité critique p_c qui, pour $p_c = 0.617$ ne révèle aucun phénomène de percolation (figure X-I-5 (b)), alors que pour $p_c = 0.618$ un cheminement de percolation balisé par des flèches est repéré dans le sens descendant à la frontière droite de la grille.

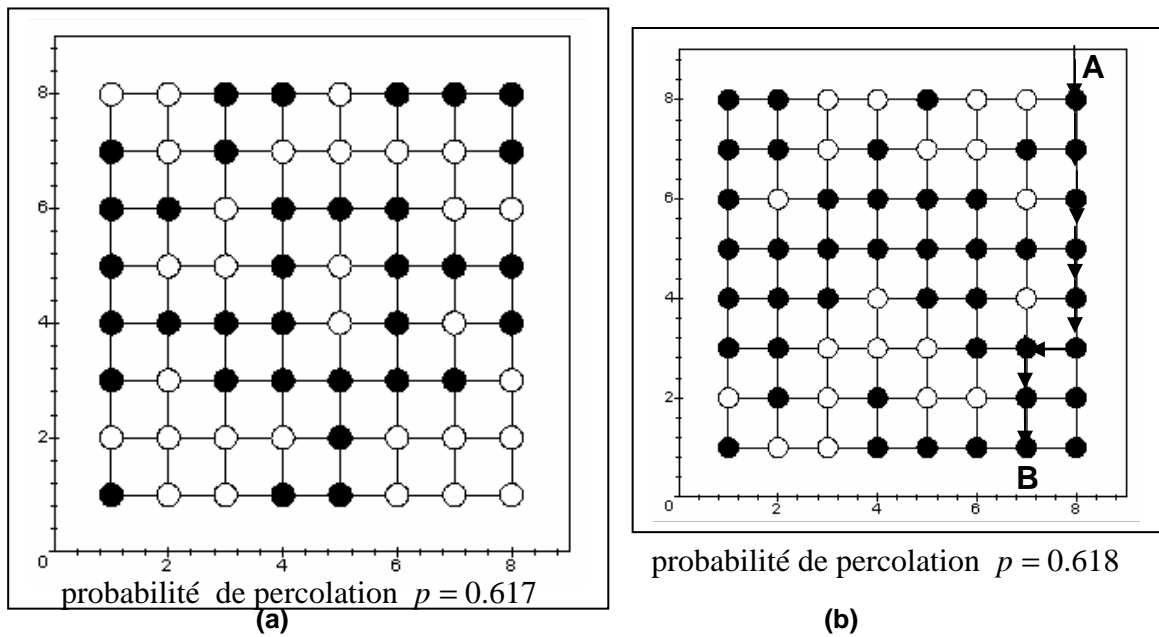
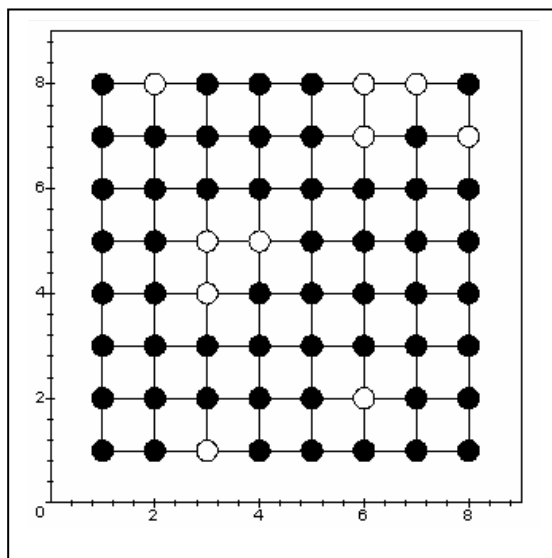


fig. X-I-5 le phénomène de percolation au voisinage de la probabilité critique
 (a) :absence de percolation (b) percolation effective



probabilité de percolation $p = 0.8$

Fig. X-I-6 un exemple de percolation en phase de généralisation

VII- SIMULATION DU PHENOMENE DE PERCOLATION PAR LES AMAS

Au-delà de la percolation par sites quelque peu restrictive, la percolation par amas de sites diffère du premier cas cité puisque mettant en jeu de manière aléatoire un agrégat de cellules "remplies" avec la particularité que celui-ci doit avoir deux côtés opposés de la grille . Relativement à une grille carrée de dimension L et à une probabilité p , on génère aléatoirement pour chaque cellule , un nombre appartenant à l'intervalle $[0,1]$; une cellule serait déclarée vide si le nombre aléatoire généré est inférieur à p . Diverses simulations (animées lors de l'exécution du programme informatique de conception) pour différentes valeurs de la probabilité p sont représentées sur les figures X-I-7 . Il est remarqué que la percolation est médiocre pour des valeurs p inférieures à 0.5 (figure X-I-7 (a) et (b)) alors que débute une percolation effective pour $p \approx 0.5$ (figure X-I-7 (c)). Nous situons la probabilité

critique autour de cette valeur, bien que les diverses analyses statistiques menées dans ce domaine penchent vers $p_c \approx 0.592$.

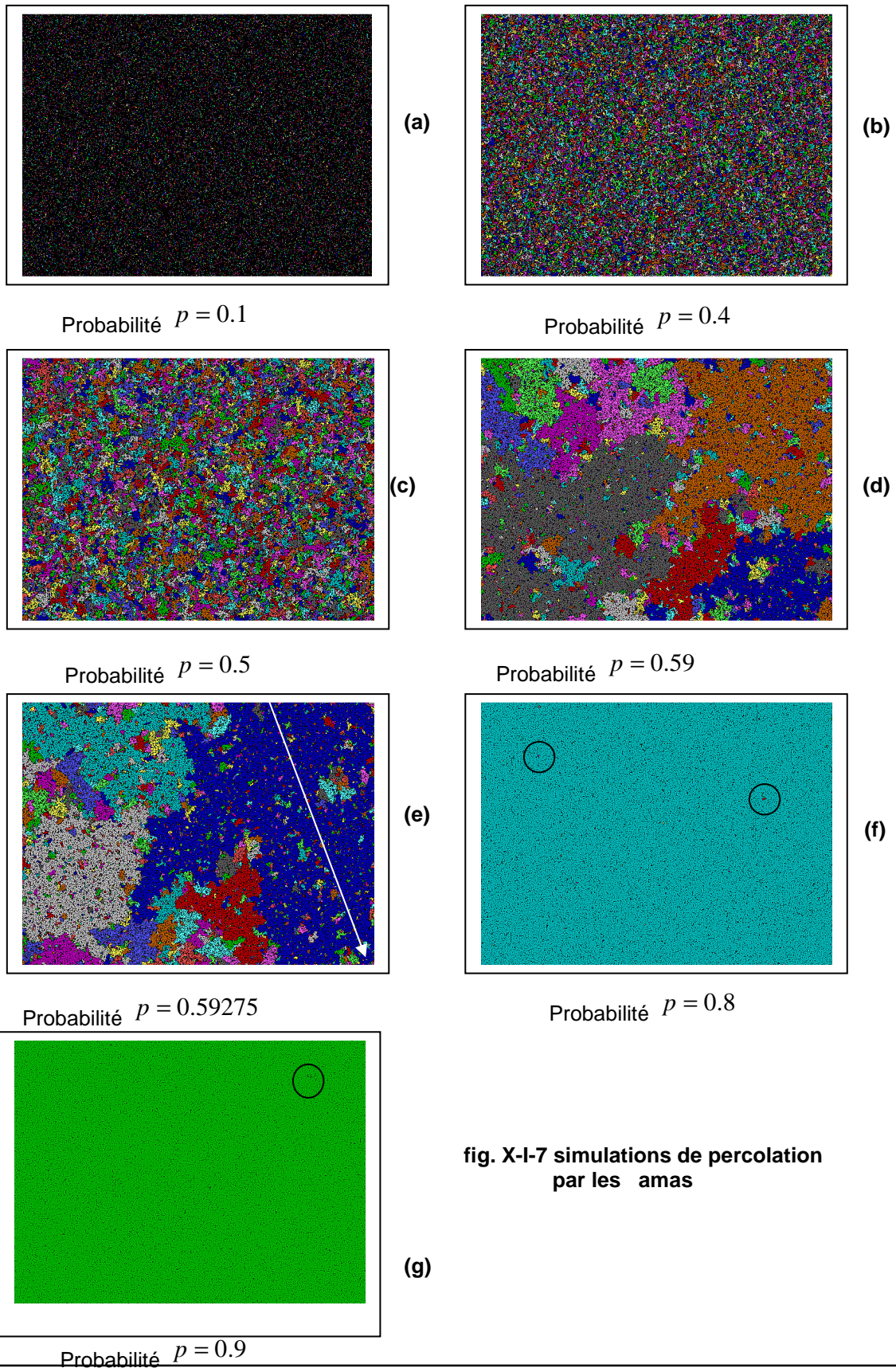


fig. X-I-7 simulations de percolation par les amas

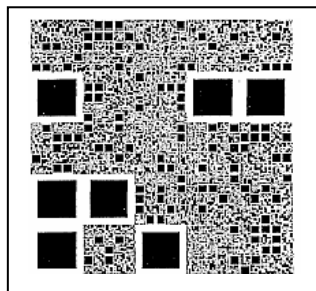
Pour la gamme de valeurs de la probabilité $p = 0.1$, $p = 0.4$, $p = 0.5$ (figure X-I-7 (a),(b),(c)) le processus de percolation est quasi – inexistant. Pour $p = 0.59$ (figure X-I-7 (d)), commencent à apparaître des embryons d'amas de percolation sans en avoir cependant les caractéristiques. Le premier amas de percolation est affiché pour p égal à la probabilité critique soit $p = 0.59275$ (figure (X-I-7 (e)) De couleur bleue sur la figure, il relie deux côtés opposés de la grille (flèche blanche). L'attribution au paramètre p de valeurs plus élevées induit une tendance à l'uniformisation et à une unicité de la couleur traduisant ainsi une tendance vers une percolation totale. Ainsi, pour $p = 0.8$ (figure X-I-7 (f)) cette tendance est respectée sauf qu'il subsiste encore des îlots non occupés que nous avons cernés par des cercles. Même remarque pour $p = 0.9$ (figure X-I-7 (g)) avec cependant une diminution de sites non occupés avec à terme (pour $p = 1$) l'obtention de couleur unie, synonyme de percolation totale, donc d'un matériau d'une saturation maximale (100%).

L'exhibition d'un comportement fractal au sein des amas de percolation n'est pas évidente quoique prévisible car les mécanismes physiques du phénomène de percolation sont proches de ceux de la diffusion, un exemple type de processus fractal. Il est fort probable qu'au sein même des amas de percolation, des phénomènes de transition de phase induits par les états du fluide de percolation, conduisent à des cas de self – similarité fractale. Il est cependant un cas prouvé de l'existence d'une fractalité dans la percolation : la mise en évidence d'une dimension fractale. Pour ne grille de dimension L sur laquelle s'est développé le phénomène de percolation par les amas, on isole l'amas le plus large et dont on estime le nombre M de cellules qui le composent. Ce dernier dépend de la probabilité p à la suite de laquelle il est apparu, cette probabilité étant elle – même à comparer à la probabilité critique p_c . Ainsi pour $p = p_c$, des simulations ont conduit à la relation de proportionnalité

$M \propto L^{1.9}$, l'exposant non entier dans cette loi de puissance définit la dimension fractale de l'amas de percolation considéré.

PARTIE II

MODELISATION FRACTALE DE LA POROSITE



I- LE PARAMETRE PETROPHYSIQUE DE POROSITE

Le paramètre pétrophysique de porosité est un concept indépendant de la forme et de la connexion entre les pores dont seuls les volumes sont considérés. Pores et milieux poreux définissent le principe de porosité laquelle est accompagnée de termes qualitatifs telle que la porosité matricielle, macroscopique, inter- granulaire. Au sens quantitatif, différents paramètres synonymes sont utilisés: porosité réelle, porosité vraie, porosité totale, porosité absolue, coefficient de porosité,...

Prise sous l'angle des connexions interstitielles par rapport aux fissures, on distingue:

- la porosité ouverte formée par les vides inter- communicants
- la porosité résiduelle ou porosité close ou encore porosité vacuolaire: porosité formée par les vides non inter- connectés. Ce type de porosité ne permet aucune perméabilité
- la porosité efficace : c'est le rapport d'eau cavitaire qu'un milieu poreux peut contenir en état de saturation puis libérée sous l'effet d'un drainage complet à son volume total (autres appellations suivant les auteurs:porosité effective, porosité de drainage, porosité utile, porosité dynamique)
- la porosité cinématique: c'est le rapport de la vitesse moyenne de déplacement de l'eau dans un milieu perméable à la vitesse de filtration (de Darcy). Ce rapport est équivalent au rapport du volume des interstices réellement parcourus par l'eau en mouvement au volume total du milieu(saturé ou non): c'est la teneur en eau mobile. Ce concept est aussi dénommé porosité de surface.

II- ANALYSE FRACTALE ET STRUCTURES GEOLOGIQUES

Les fractals peuvent constituer un puissant outil de description de certains aspects des structures géologiques et de leurs propriétés physiques telles que

- la description de la morphologie des structures et de leurs caractéristiques pétrophysiques
- l'établissement d'une relation magnitude – fréquence des tremblements de terre
- la mise en évidence des limites d'instabilité critiques dans une dynamique de fracturation que l'on pourrait quantifier à travers les données d'une série temporelle dont l'analyse relèverait des processus aléatoires

III- CARACTERISATION FRACTALE D'UN MILIEU PHYSIQUE

Toute opération de modélisation d'un milieu physique en général et d'un sol en particulier doit être entreprise d'abord en amont, sur la base d'observations d'une représentation naturelle suivie de l'extraction de caractéristiques pertinentes qui formeront en aval des paramètres de modélisation.

A cet effet, on peut imaginer un sol comme un melting-pot d'agrégats dont les sections à différentes échelles donc à des niveaux de résolution précis, révéleront de nouveaux détails de la structure telle que la tendance à exhiber des réseaux organisés de pores de plus en plus fins. Si ce procédé s'apparente volontairement à la détection d'indices de fractalité dans le sol, il n'en demeure pas moins qu'il se limite à une description qualitative qu'il faudrait convertir en indices numériques aptes à être intégrés dans une modélisation.

En modélisation fractale d'un sol, la mesure des dimensions fractales est une pratique commune pour décrire les propriétés d'un milieu poreux. En effet, un certain nombre de grandeurs physiques (la porosité par exemple) mesurées sur le sol obéissent à des lois de puissance construites sur l'échelle d'observation et dont l'exposant est relié à la dimension fractale. Il a été précisé dans les développements précédents que la dimension fractale d'un objet n'est pas unique et peut prendre différentes formes. Aussi est-il nécessaire d'opter pour un type de dimension fractale supposé suffisamment représentatif tout en offrant une facilité de calcul. A cet effet, nous avons opté pour la

dimension dite de capacité assez voisine d'ailleurs de la dimension de "boite" ou "box counting dimension". La démarche dans la modélisation ne se réduit pas au seul calcul de la dimension fractale mais elle doit permettre d'exprimer d'autres grandeurs physiques mesurées sur le sol en fonction de cette dimension.

IV- LE CHOIX DES MODELES FRACTALS DU SOL

Il se pose effectivement la problématique du choix du modèle géométrique d'initiation de la modélisation d'un milieu poreux. Les modèles ne seront que purement illustratifs, parfois complexes mais devant montrer que cette complexité n'est qu'apparente.

IV- 1 UN MODELE FRACTAL BIDIMENSIONNEL SIMPLE D'UN MILIEU POREUX : LE TAPIS DE SIERPINSKI

Ce modèle sommaire d'un milieu poreux repose sur le dépeçage ordonné d'une figure géométrique en l'occurrence un carré de dimension linéaire L ($L = 1$ dans notre simulation) immergé dans un espace euclidien de dimension $d = 2$. Un rapport d'autosimilarité de décomposition n que nous avons fixé à $r_1 = 1/3$ (figure X-II-1). Le carré central occulté fera office de premier pore. Aux motifs carrés restant c'est – à – dire $N_1 = 8$ le même processus de construction est reconduit par rapport à des échelles ($r_i = 1/3^i$) de plus en plus réduites. Nous pouvons ainsi définir une relation entre le facteur échelle r et le nombre N d'éléments conservés à chaque étape:

- 1^{ère} itération : $r_1 = 1/3$ $N_1 = 8 = 2^3$
- 2^{ème} itération : $r_2 = (1/3)^2$ $N_2 = 64 = 2^6$
- -----
- n^{ème} itération : $r_n = (1/3)^n$ $N_n = 2^{3n}$

Pour le calcul de la dimension fractale D deux possibilités:

- à partir du modèle générateur: $r = 1/3$ et $N_1 = 8$

$$D = \frac{\log N_1}{\log 1/r} = \frac{\log 8}{\log 3} = 1.892789260$$

- au cours de deux itérations consécutives i et $i + 1$

$$D = \frac{\log \frac{N_{i+1}}{N_i}}{\log \frac{r_i}{r_{i+1}}} = \frac{\log \frac{2^{3(i+1)}}{2^{3i}}}{\log \frac{(1/3)^i}{(1/3)^{i+1}}} = 1.892789260$$

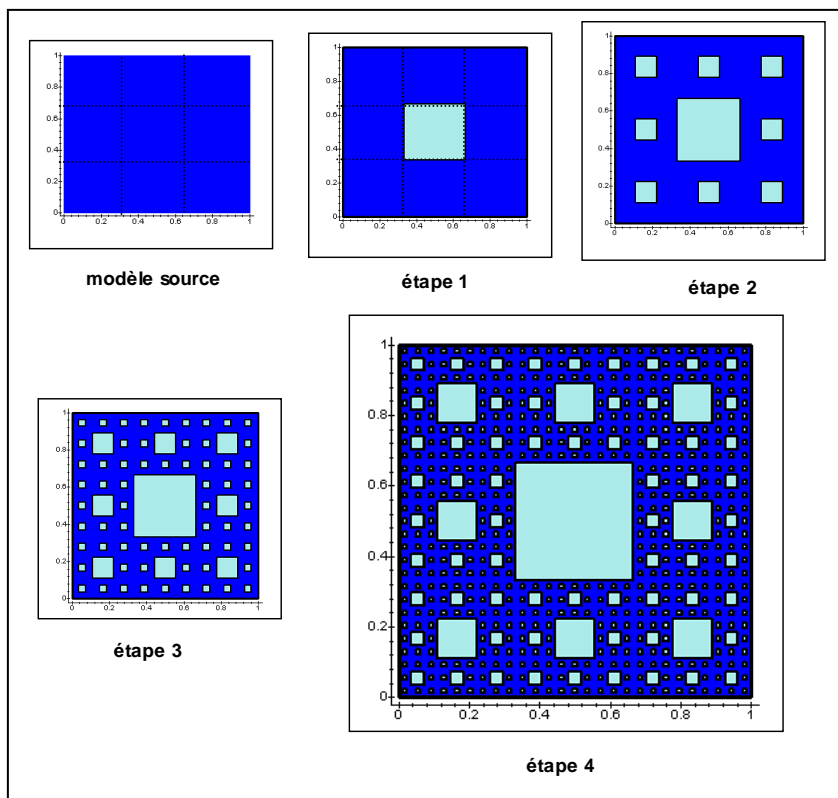


fig. X-II-1 un modèle de milieu poreux bidimensionnel: le tapis de Sierpinski

Le modèle du tapis de Sierpinski de la figure X-II-1 est dit standard car non aléatoire. Le rapport d'autosimilarité de décomposition r tout comme le modèle générateur c'est – à – dire figurant à la première étape d'itération peuvent être modifié entraînant évidemment une modification de la dimension fractale. Ces deux cas de variation peuvent être réunis par la donnée d'un code binaire dont le zéro correspondrait à un "pore" et le un à un "élément" solide . Ainsi le modèle générateur associé à l'étape 1 de la figure X-II-1, est associé au code binaire $[0\ 0\ 0, 0\ 1\ 0, 0\ 0\ 0]$. Pour un rapport d'autosimilarité fixé, diverses combinaisons dans la forme de ce code peuvent être envisagées telles que celles associées à la figure X-II-2 donnant la forme du générateur et le modèle obtenu près quatre itérations de construction.

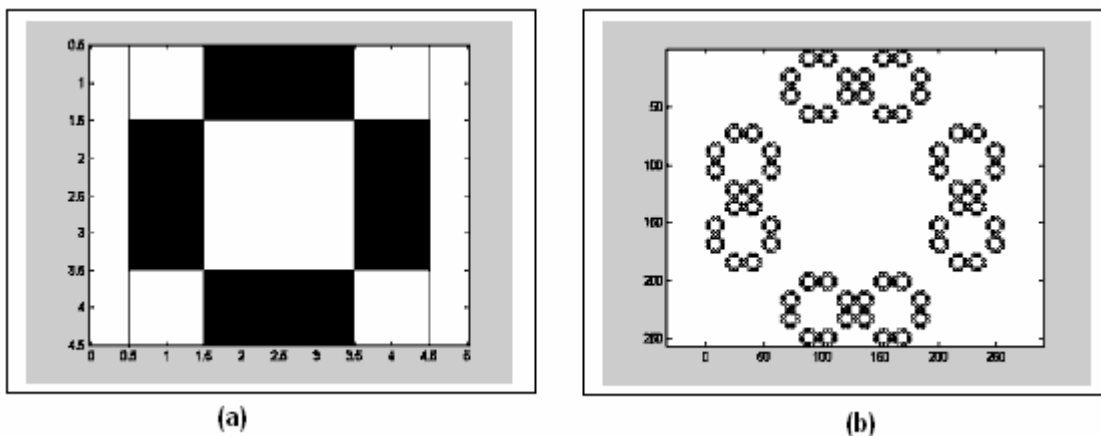


fig. X-II-2 modèle de tapis de Sierpinski: (a) générateur $[1\ 0\ 0\ 1, 0\ 1\ 1\ 0, 0\ 1\ 1\ 0, 1\ 0\ 0\ 1]$ (b) après quatre itérations de construction

IV-2 UNE PREMIERE APPROCHE D'UN MILIEU POREUX REEL : LE MODELE ALEATOIRE

Le modèle de milieu poreux tel que représenté par le tapis de Sierpinski est trop simpliste eu égard à la répartition régulière des phases poreuse et solide fixée *a priori* et pour l'ensemble du processus itératif dans le modèle générateur (première étape du processus). Dans un milieu poreux naturel cette forme de distribution ne saurait se produire par suite des facteurs endogènes spécifiques souvent aléatoires, qui conduisent à un état poreux (phénomènes chimiques, érosion, température, fragmentation,...). Aussi, un modèle de tapis de Sierpinski en mode aléatoire sous-tendu par une approche probabiliste, homogène ou non, nous rapprocherait le plus d'un milieu poreux naturel.

La simulation nécessite la connaissance des paramètres suivants : le facteur échelle b (assimilable à un degré de fragmentation) que nous fixons pour des raisons de temps de calcul à $b = 3$, une probabilité de pore p ($0 \leq p \leq 1$) indiquant simplement pour un niveau d'itération donné, le rapport du nombre de parties à occulter (en fait le nombre de pores à fixer) au nombre total de parties obtenues pour un niveau de porosité assez faible $p = 1/9$. L'influence de la variation de ces deux paramètres sur la dimension fractale D est relevée pour chacun des cas simulés.

IV-3 MODELE ALEATOIRE HOMOGENE DU TAPIS DE SIERPINSKI

La figure X-II-3 est une représentation du tapis de Sierpinski en mode aléatoire dont le motif (a) ($b = 4, p = 1/9, D = 1.8928$) en sera une référence. Différentes variations alternativement du facteur échelle b et du paramètre probabilité de pore p sont effectuées; les dimensions fractales associées peuvent alors être comparées. Il ressort particulièrement que la dimension fractale augmente avec le facteur échelle b (figure X-II-3(b)). Dans le cadre de l'étude de la régularité d'un milieu, la dimension fractale est un indicateur du degré de fragmentation ou de régularité de ce milieu: plus la dimension fractale est élevée, plus le milieu est irrégulier ou fortement fragmenté.

Inversement, pour un facteur échelle b fixé ($b = 3$), et une probabilité de pore élevée $p = 1/5$ (figure X-II-3 (d)), on observe une nette diminution de la dimension fractale ($D = 1.7712$). Ainsi la dimension fractale diminue avec l'augmentation de la porosité. Un milieu orienté vers une plus grande porosité verra sa dimension fractale diminuer. En extrapolant, il vient que la porosité est inversement proportionnelle à la dimension fractale. Ceci pourrait constituer une méthode de caractérisation des réservoirs car la teneur des fluides dans les pores est évidemment liée à la porosité donc aussi à la dimension fractale.

Pour une probabilité de pore très faible ($p = 1/15$ pour la figure X-II-3 (c)), le cas est sans intérêt et la dimension fractale D ne varie pas, comparée au cas (a) : $D = 1.8928$.

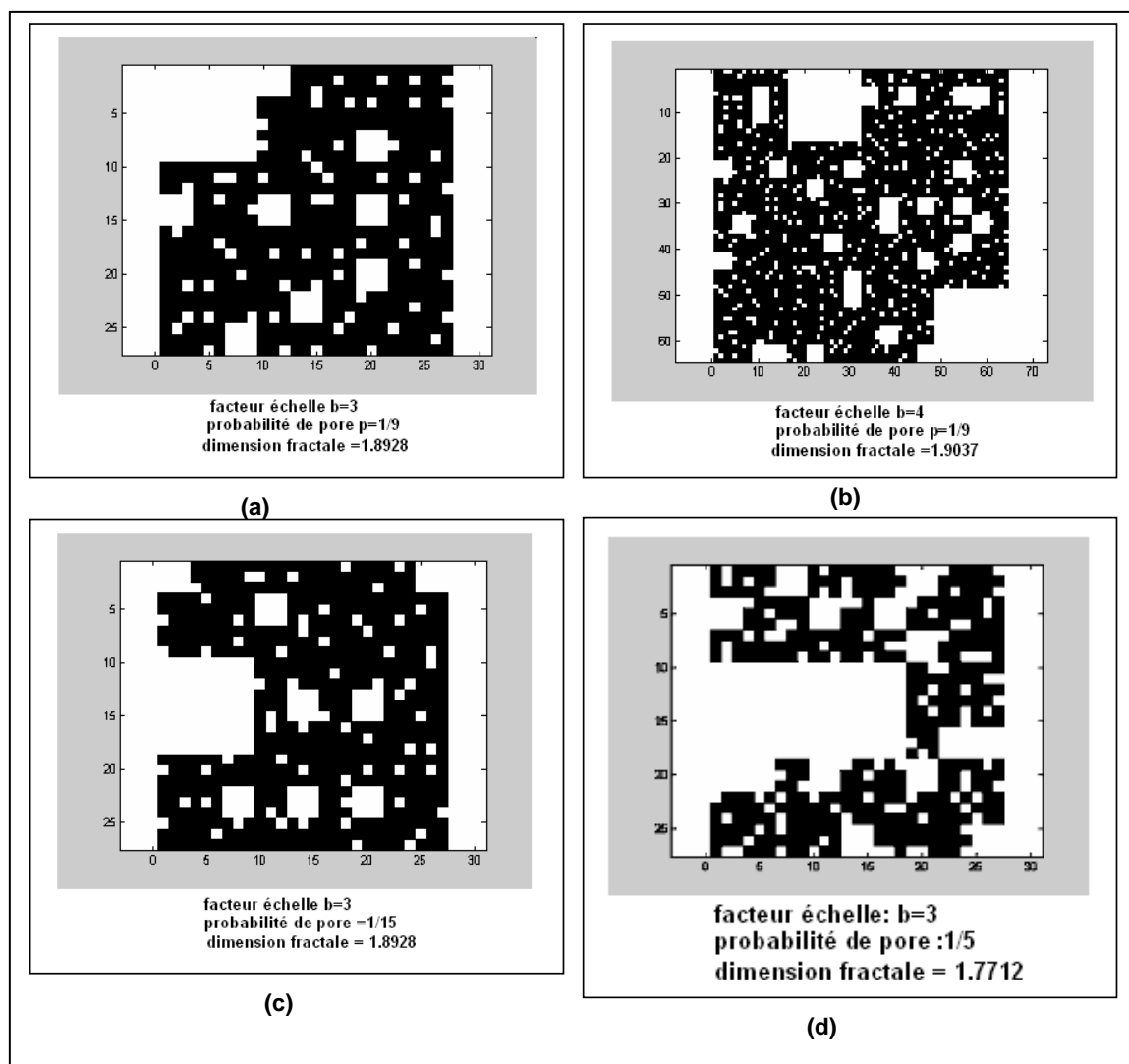


fig. X-II-3 influence du facteur échelle et de la probabilité de pore sur la dimension fractale dans un modèle de milieu de poreux bidimensionnel homogène

IV-4 MODELE ALEATOIRE NON HOMOGENE DU TAPIS DE SIERPINSKI

Le principe et les paramètres de simulation du modèle aléatoire non homogène du tapis de Sierpinski rejoignent ceux déjà fixés dans le cas homogène (figure X-II-4). On aboutit pratiquement aux mêmes conclusion que dans le cas homogène à savoir que la dimension fractale diminue lorsque la porosité augmente (figure X-II-4 (a) et (c)). La dimension fractale, issue d'une dynamique itérative d'autosimilarité, est donc un paramètre quantitatif intrinsèque au milieu destinée à ne rendre compte que d'une caractéristique géométrique de ce dernier (porosité, fragmentation, perméabilité,...) indépendamment de qualité des agrégats de ce milieu en terme d'homogénéité ou d'hétérogénéité.

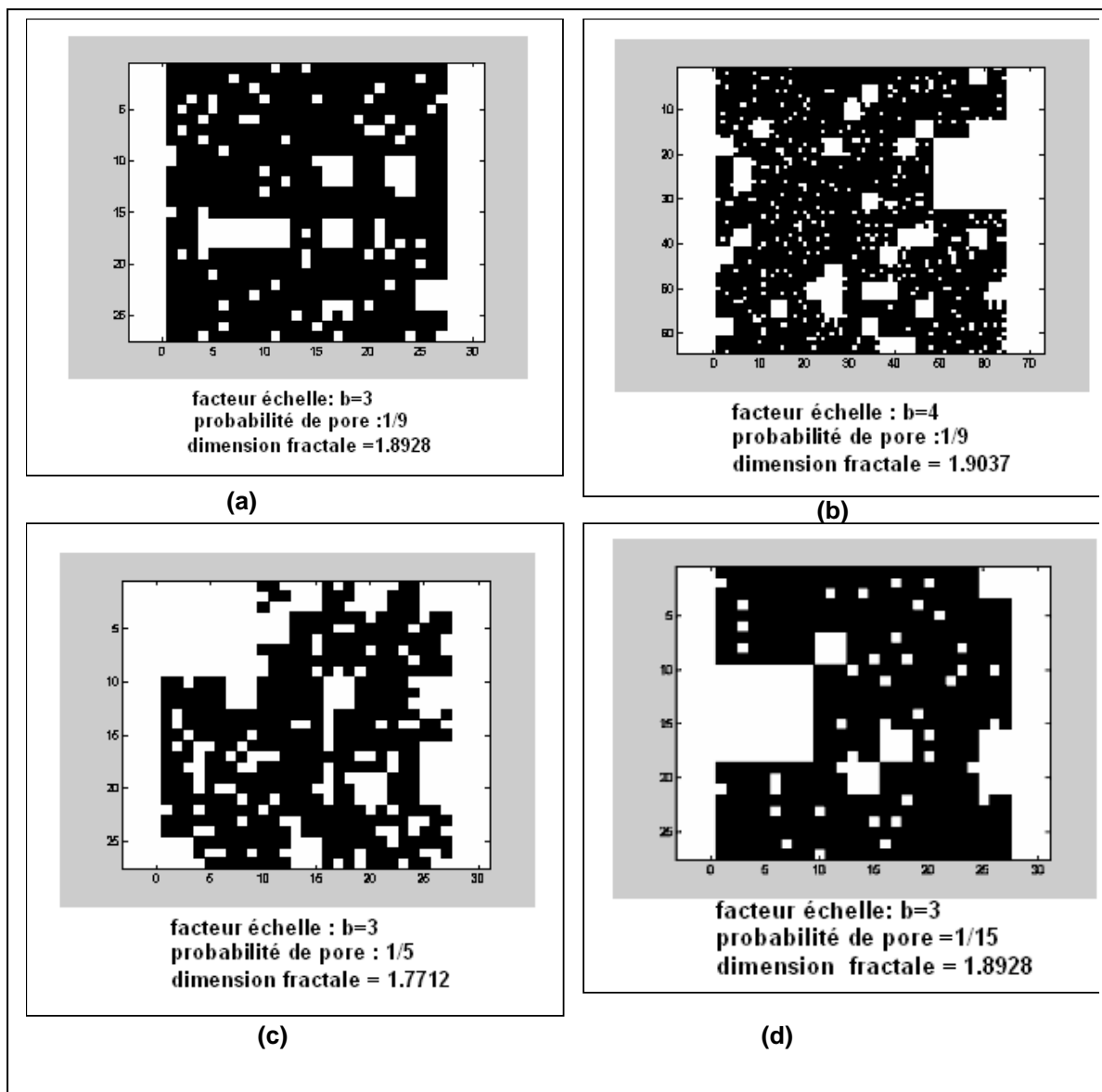


fig. X-II-4 influence du facteur échelle et de la probabilité de pore sur la dimension fractale dans un modèle de milieu de poreux bidimensionnel non homogène

V- UN MODELE FRACTAL TRIDIMENSIONNEL SIMPLE D'UN MILIEU POREUX : L'EPONGE DE MENGER

Le modèle planaire d'un milieu fractal poreux, fictif par ailleurs, nous a permis de saisir le principe de la modélisation fractale de la porosité. Un modèle de matériau poreux plus réaliste, inspiré du tapis de Sierpinski est représenté dans l'espace par "l'éponge" dite de Menger. Son principe de construction est le suivant (figure X-II-5):

- le modèle "source": un cube de dimension unitaire sur lequel est opérée une subdivision dans le rapport $r = 1/3$
- 1^{ère} itération : un ensemble de 27 cubes élémentaires résulte de la subdivision. En occultant "le cœur" du corps cubique, 7 éléments cubiques seront supprimés (il suffit de ne considérer que trois faces et ne prendre en considération qu'une seule fois l'élément situé au centre du

cube). Nous désignons par N_1 le nombre d'éléments restants, d'où :

$$r_1 = 1/3 \rightarrow N_1 = 20$$

- 2^{ème} itération : le même raisonnement que ci-dessus permet d'écrire :
 $r_2 = (1/3)^2 \rightarrow N_2 = 729 - 329 = 400 = 20^2$
- $n^{\text{ème}}$ itération : $r_n = (1/3)^n \rightarrow N_n = 20^n$

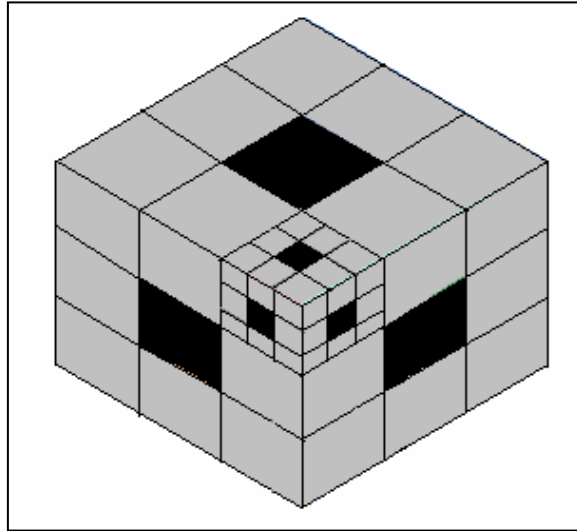


fig. X-II-5 principe de construction d'un modèle poreux tridimensionnel type éponge de Menger

Remarquons la vitesse de croissance exceptionnelle à la fois du nombre N d'éléments cubiques retenus et du nombre d'éléments cubiques occultés et qui ne sont en fait que des pores. La figure X-II-3 est une représentation pour deux niveaux d'itération confirmant le niveau de la second itération un début de complexité du modèle mais aussi toute sa représentativité en terme de milieu poreux .

La dimension fractale D du modèle poreux du type "éponge" de Menger peut être exprimée à partir de deux niveaux d'itération consécutifs en écrivant

$$D = \frac{\log \frac{N_{i+1}}{N_i}}{\log \frac{r_i}{r_{i+1}}} = \frac{\log 20}{\log 3} = 2.726833027$$

La dimension fractale D étant inférieure à la dimension topologique, l'éponge de Menger est donc un fractal tridimensionnel lacunaire assez bien indiqué pour une modélisation sommaire d'un milieu poreux (figure X-II-6)

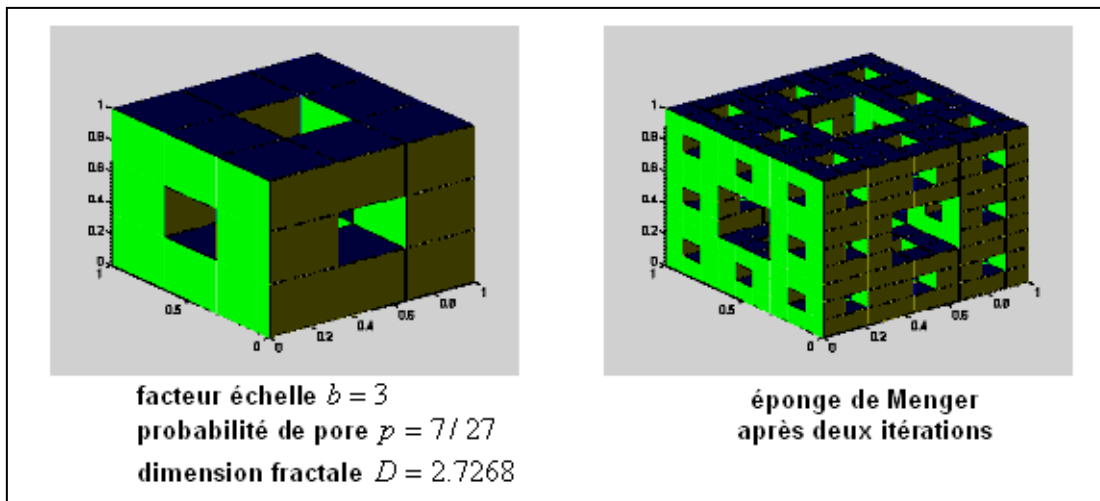


fig. X-II-6 modèle standard de l'éponge de Menger après deux itérations

VI- SIMULATION D'UN MILIEU POREUX TYPE "EPONGE" DE MENGER

Comme dans le cas du tapis de Sierpinski, il est possible de générer toute forme d'éponge de Menger par le biais de code à introduire dans le programme de simulation. Le modèle standard répond au code binaire suivant : **[1 1 1, 1 0 1, 1 1 1, 1 0 1, 0 0 0, 1 0 1, 1 1 1, 1 0 1, 1 1 1]** (figure X-II-6) représentant $9 \times 3 = 27$ entités cubiques issues de la décomposition à laquelle sont soustraits sept (7x0) cubes faisant office de pores . Dans ce code préfigure le rapport d'autosimilarité b (ici $b = 3$) ; il reste à introduire la probabilité de pore p à chaque itération (ici $p = 7/27$). La différence de D'autres modèles peuvent être générés en fonction de la position des digits dans le code d'entrée.

La figure X-II-7 représente une autre forme de l'éponge de Menger par simple modification du code binaire de la forme standard soit **[1 0 1, 1 0 1, 1 0 1, 1 0 1, 0 0 0, 1 0 1, 1 0 1, 1 0 1, 1 0 1]**

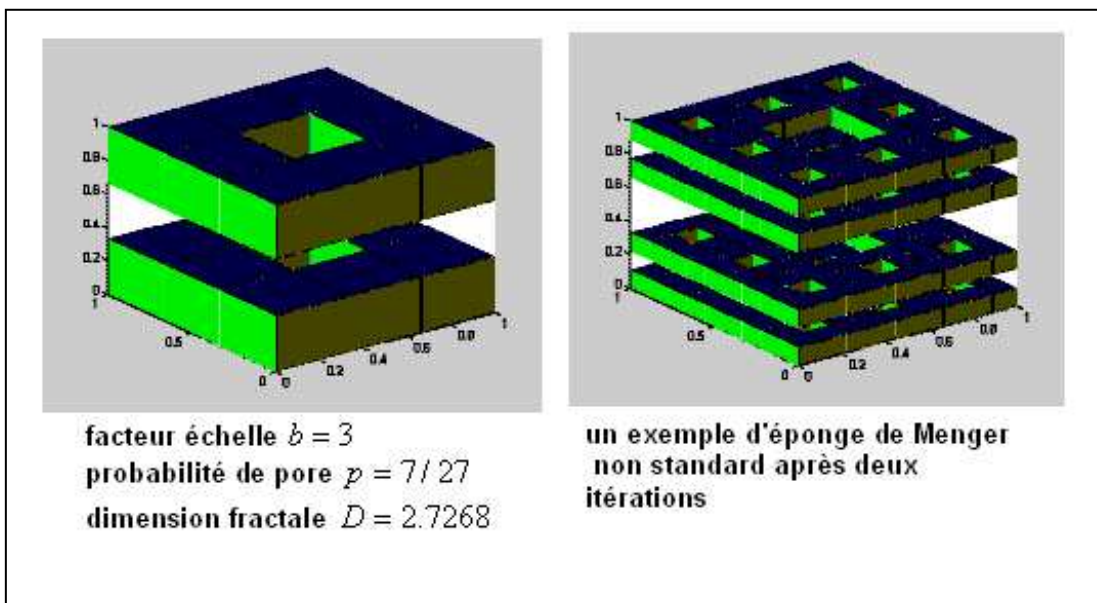
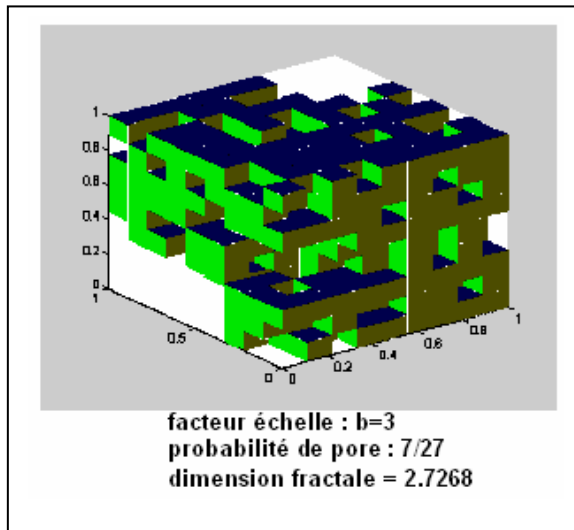


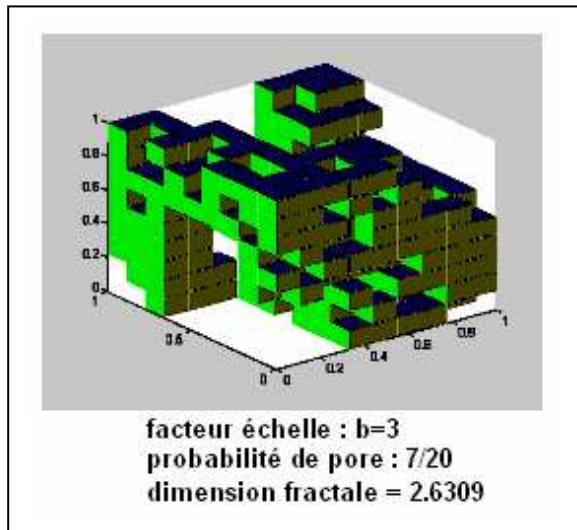
fig. X-II-7 un modèle non standard de l'éponge de Menger répondant au code binaire **[1 0 1, 1 0 1, 1 0 1, 1 0 1, 0 0 0, 1 0 1, 1 0 1, 1 0 1, 1 0 1]** pour deux itérations

VII- MODELE ALEATOIRE HOMOGENE DE L'EPONGE DE Menger

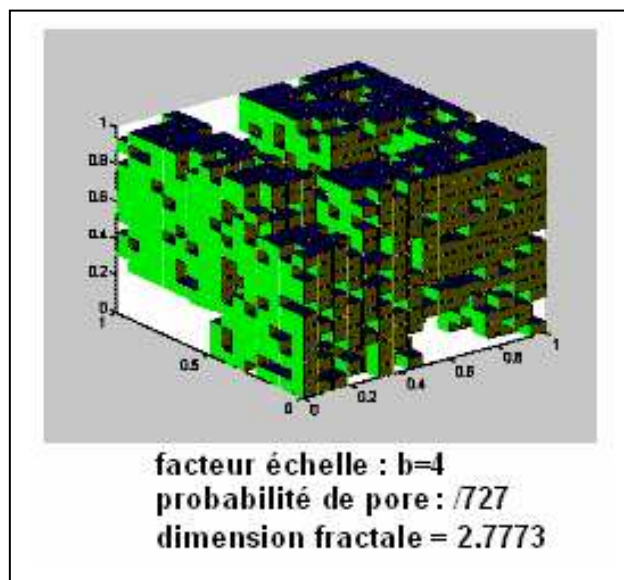
La distribution aléatoire des pores dans un milieu est une amélioration de la modélisation de ce dernier car nettement plus proche d'un cas naturel de porosité. A travers la figure X-II-8 illustrant un modèle aléatoire de l'éponge de Menger, nous retrouvons la confirmation que même dans le cas tridimensionnelle, la dimension fractale varie en raison inverse de la porosité (figure X-II-8 (a) et (b)). Les cas (c) et (d) de cette même figure expriment alternativement l'influence du facteur échelle b et de la probabilité de pore p sur la dimension fractale.



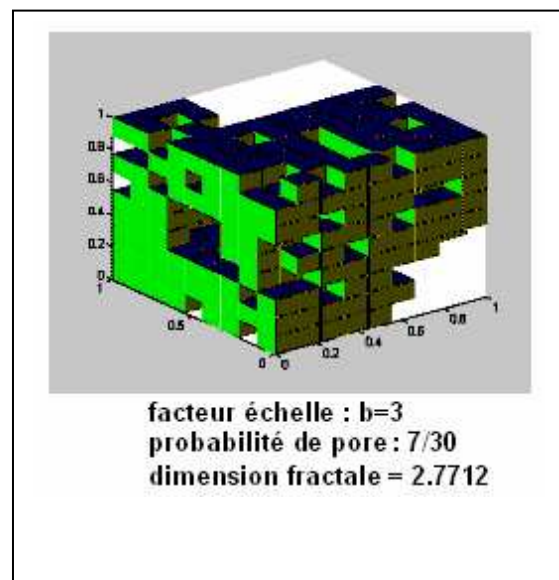
(a)



(b)



(c)



(d)

fig. X-II-8 influence du facteur échelle et de la probabilité de pore sur la dimension fractale dans un modèle de milieu poreux tridimensionnel aléatoire homogène

VIII- MODELE ALEATOIRE NON HOMOGENE DE L'EPONGE DE MENGERS

A travers la figure X-II-9 (cas (a) et (b)) qui illustre un modèle poreux non homogène, il ressort aussi que la dimension fractale D diminue lorsque la porosité représentée par la probabilité de pore p augmente. Notons que l'ensemble de nos simulations a été effectué sur la base d'un niveau d'itération égale à deux.

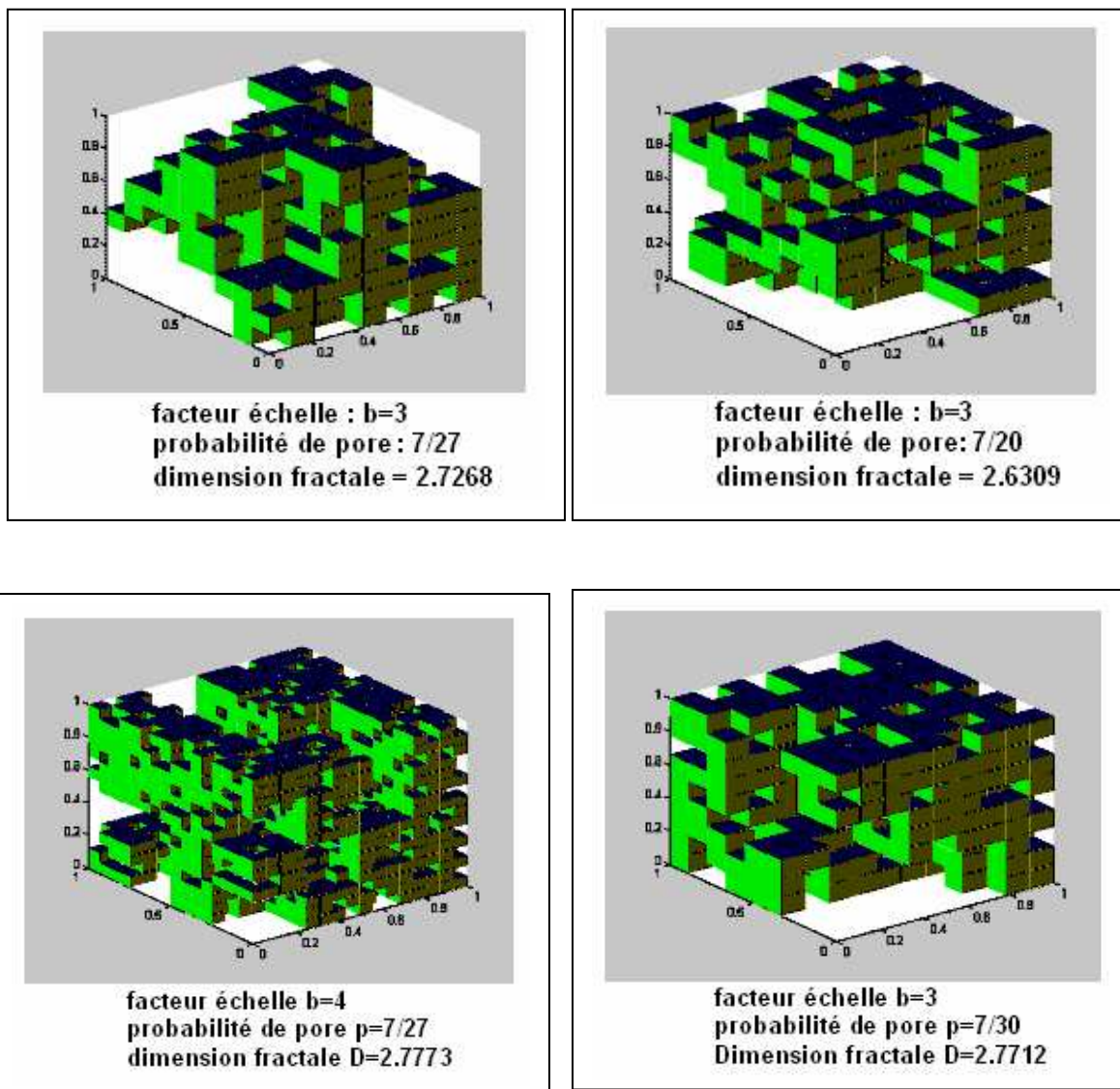


fig. X-II-9 influence du facteur échelle et de la probabilité de pore sur la dimension fractale dans un modèle de milieu de poreux tridimensionnel aléatoire non homogène

IX- A LA RECHERCHE D'UN MODELE MATHEMATIQUE UNIFIE D'UN MILIEU POREUX

Diverses orientations dans la modélisation d'un sol fractal existent dans la littérature, issues dans leur majorité de critères ou de formulations posées *a priori* et sur lesquels prospéreront *a posteriori* les développements mathématiques conduisant à la caractérisation de ce milieu. Ainsi peuvent être mis en compétition dans le contexte de la porosité, le volume des pores, leur taille, la distribution taille-volume mais le paramètre fédérateur de ces approches reste la dimension fractale associée de préférence à une loi de puissance.

IX-1 APPROCHE DE PEIFER (1983) ET DE FRIESEN & MAKULA (1987)

En nous plaçant dans le contexte naturel d'un milieu poreux volumique, nous adoptons l'hypothèse suivante: "un ensemble de pores admet une structure fractale si le nombre N de pores de taille supérieure à r noté $[N(\geq r)]$ suit une loi de puissance avec les variations de r et d'exposant la dimension fractale D soit

$$[N(\geq r)] \propto r^{-D} \quad (\text{X-II-1})$$

Le volume V d'un pore étant fonction de sa taille r , sera noté $V(r)$. Moyennant un facteur de géométrie, nous avons la forme de proportionnalité suivante

$$V(r) \propto r^3 \quad (\text{X-II-2})$$

Un accroissement dr de la variable r est accompagné d'un accroissement relatif de volume entre r et $r + dr$ et qui n'est autre que la dérivée $\frac{d[V(\geq r)]}{dr}$. Par suite du lien de proportionnalité entre

$[V(\geq r)]$ et $[N(\geq r)]$, nous avons alors l'égalité entre les dérivées $\frac{d[V(\geq r)]}{dr}$ et $\frac{d[N(\geq r)]}{dr}$ au

volume $V(r)$ près

$$\frac{\frac{d[V(\geq r)]}{dr}}{V(r)} = \frac{d[N(\geq r)]}{dr} \quad (\text{X-II-3})$$

En introduisant expression (X-II-2), la dérivée $\frac{d[V(\geq r)]}{dr}$ s'écrit

$$\frac{d[V(\geq r)]}{dr} = \frac{d[N(\geq r)]}{dr} r^3 \quad (\text{X-II-4})$$

Par application de l'approximation (X-II-1), nous avons

$$\frac{d[V(\geq r)]}{dr} = (-Dr^{-D-1})r^3 \quad (\text{X-II-5})$$

soit

$$\frac{d[V(\geq r)]}{dr} \propto -r^{2-D} \quad (\text{X-II-6})$$

L'expression (X-II-6) établie par Peifer (1983) et Friesen & Makula (1987) indique que la dérivée $\frac{d[V(\geq r)]}{dr}$ suit une loi de puissance en r d'exposant la dimension fractale D . Elle est admise comme définition pour un milieu poreux d'autant plus qu'elle vérifiée par des modèles fractals tels que le tapis de Sierpinski ou l'éponge de Menger.

IX-2 APPROCHE DE RIEU ET ESPOSITO (1991)

Cette approche repose un calcul de la porosité φ que nous évaluerons dans le cas particulier de l'éponge de Menger.

Soit a_0 la dimension la dimension du plus petit cube dans la modélisation de l'éponge de Menger dont nous désignerons par φ_0 la porosité. Cette dernière est nulle car le processus itératif de construction n'a pas encore pris forme.

Soit a_1 la dimension de l'éponge de Menger telle que $a_1 = \frac{a_0}{3}$ (première itération). Le nombre total N_{T_1} d'éléments cubiques générés par l'opération de subdivision dans le rapport $r = 1/3$ est $N_{T_1} = 27$ alors que le nombre d'éléments restants après suppression des cubes centraux est $N_1 = 20$.

La porosité ϕ_1 est reliée au nombre N_{c_1} d'éléments cubiques retirés dans cette phase de construction, soit $N_{c_1} = 7$. Elle est alors calculée en posant

$$\phi_1 = \frac{N_{c_1}}{N_{T_1}} = \frac{7}{27} \Leftrightarrow \phi_1 = 25.92 \% \quad (\text{X-II-7})$$

A la seconde étape du processus d'itération, nous avons

$$\begin{cases} N_{T_2} = 729 \\ N_{c_2} = 329 \\ N_2 = 400 \end{cases}$$

La porosité ϕ_2 est telle que

$$\phi_2 = \frac{N_{c_2}}{N_{T_2}} = \frac{329}{729} \Leftrightarrow \phi_2 = 45,13 \% \quad (\text{X-II-8})$$

En nous plaçant dans le contexte du processus itératif dans l'éponge de Menger, pour une étape d'itération i désignons par $[V(> r_i)]$ le volume des pores dont la taille est supérieure à r_i avec r_i la taille des pores générés à cette $i^{\text{ème}}$ itération. La taille linéaire est notée L donc pour un volume total $V_t = L^3$. Si ϕ_i désigne la porosité acquise à cette étape, nous écrivons

$$\phi_i = \frac{[V(> r_i)]}{L^3} \quad (\text{X-II-9})$$

La porosité ϕ_1 calculée sur le modèle générateur donc pour $i = 1$ est telle que $\phi_1 = 7/27$. Les porosités obtenues pour $i \geq 2$ apparaissent comme une "pondération" de ϕ_1 par le rapport

$$\frac{N_1}{N_{T_1}} = \frac{20}{27}. \text{ L'expression de la porosité } \phi_i \text{ à un niveau quelconque d'itération } i \text{ est donnée par}$$

l'expression

$$\phi_i = \frac{7}{27} \sum_{k=1}^i \left(\frac{20}{27} \right)^{k-1} \quad (\text{X-II-10})$$

Pour quelques valeurs de l'itération, nous obtenons:

- pour $i = 1 \Rightarrow \phi_1 = 7/27$ comme calculé
- pour $i = 2 \Rightarrow \phi_2 = \frac{7}{27} \left(1 + \frac{20}{27} \right) = \frac{329}{729}$ comme calculé

Dans le cas général, la somme figurant dans l'expression (X-II-10) est une progression géométrique de premier terme 1 et de raison $q = \frac{20}{27}$. En calculant la somme de cette progression géométrique, nous obtenons

$$\varphi_i = \frac{7}{27} \frac{1 - \left(\frac{20}{27}\right)^i}{1 - \left(\frac{20}{27}\right)} \quad (\text{X-II-11})$$

ou bien

$$\varphi_i = 1 - \left(\frac{20}{27}\right)^i \quad (\text{X-II-12})$$

Nous pouvons introduire dans (X-II-13) la dimension fractale D sachant que

$$D = \frac{\log 20}{\log 3} \Leftrightarrow 3^D = 20 \quad (\text{X-II-13})$$

L'expression (X-II-12) admet alors la forme suivante

$$\varphi_i = 1 - \left(\frac{3^D}{3^3}\right)^i = 1 - \left[\left(\frac{1}{3}\right)^i\right]^{3-D} \quad (\text{X-II-14})$$

Le terme $\left(\frac{1}{3}\right)^i$ n'est autre que le rapport d'autosimilarité entre la taille r_i à l'étape i et la taille initiale

r_0 en ce sens que $r_i = r_0 \left(\frac{1}{3}\right)^i$. Après introduction de (X-II-9), l'expression (X-II-14) s'écrit

$$[V(> r_i)] = L^3 \left[1 - \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^{3-D} \right] \quad (\text{X-II-15})$$

Pour un cas continu consistant à poser $r_0 \rightarrow r_{\max}$ et $r_i \rightarrow r$, l'équation (X-II-15) devient

$$[V(> r)] = L^3 \left[1 - \left(\frac{r}{r_{\max}}\right)^{3-D} \right] \quad (\text{X-II-16})$$

L'expression (X-II-16) n'étant pas une loi de puissance, nous considérons la dérivée des deux membres par rapport à la variable r

$$\frac{d[V(> r)]}{dr} = -\frac{L^3(3-D)}{r_{\max}} \left(\frac{r}{r_{\max}}\right)^{2-D} \quad (\text{X-II-17})$$

En posant $k = \frac{L^3(3-D)}{r_{\max}}$, il vient

$$\frac{d[V(> r)]}{dr} = -k \left(\frac{r}{r_{\max}}\right)^{2-D} \quad (\text{X-II-18})$$

L'expression (X-II-18) renvoie à une loi de puissance par rapport à la variable r avec la présence en exposant de la dimension fractale D . Nous avons ainsi la forme de proportionnalité suivante

$$\frac{d[V(> r)]}{dr} \propto -r^{2-D} \quad (\text{X-II-19})$$

Nous reprenons ainsi la même expression que dans (X-II-6) mais en empruntant une autre démarche. Une définition possible d'un milieu poreux fractal, de dimension fractale D ($0 < D < 3$) est que la dérivée du volume $[V(> r)]$ des pores de taille supérieure à r suit la relation (X-II-9).

X- LE MODELE DE MILIEU POREUX A TROIS PHASES: PORES -SOLIDES – FRACTALS (PSF)

Les modèles de milieu poreux exposés ci-dessus présentent la particularité de la construction de la porosité à partir uniquement d'une utilisation répétée de la matrice solide. Un nombre d'itérations poussé aboutirait à une porosité quasi-totale c'est - à- dire à une disparition de la phase solide. Ce modèle de milieu poreux ne peut refléter le cas d'un corps poreux réel pour lequel une phase solide survit même à une porosité accentuée.

Un modèle générateur à trois phases Pores –Solides- Fractals (modèle PSF) permettrait la rétention d'une phase solide au cours des différentes itérations. Le processus itératif ne porterait plus que sur la partie fractale La figure X-II-10 est une illustration d'un modèle générateur de type PSF dans lequel nous distinguons trois ensembles : l'ensemble \mathcal{P} formé de sept (7) pores, l'ensemble \mathcal{S} comprenant trois (3) éléments solides et l'ensemble fractal \mathcal{F} comprenant six (6) éléments destinés à recevoir chacun le processus d'itération. Si on désigne par \mathcal{G} le générateur du modèle PSF, nous pouvons écrire

$$\begin{cases} \mathcal{G} = \mathcal{P} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{F} \\ \text{card}(\mathcal{G}) = \text{card}(\mathcal{P}) + \text{card}(\mathcal{S}) + \text{card}(\mathcal{F}) \end{cases} \tag{X-II-20}$$

Partant de (X-II-20), on définit trois paramètres d'un grand intérêt pour la suite de notre développement :

► la proportion p de la phase poreuse (en fait un équivalent de probabilité)

$$p = \frac{\text{card}(\mathcal{P})}{\text{card}(\mathcal{G})} \tag{X-II-21}$$

► la proportion s de la phase solide

$$s = \frac{\text{card}(\mathcal{S})}{\text{card}(\mathcal{G})} \tag{X-II-22}$$

► la proportion f du générateur \mathcal{G} destinée sur laquelle sera exercée la dynamique du processus itératif

$$f = \frac{\text{card}(\mathcal{F})}{\text{card}(\mathcal{G})} \tag{X-II-23}$$

Des expressions (X-II-21), (X-II-22) et (X-II-23), nous déduisons la relation $p + f + s = 1$. On définit la proportion $(1 - f)$ du générateur \mathcal{G} prise comme une mixture de pores et de solides et telle que $1 - f = p + s$. A chaque étape d'itération, les pores et les solides sont conservés alors que l'ensemble fractale accueillera les transformations.

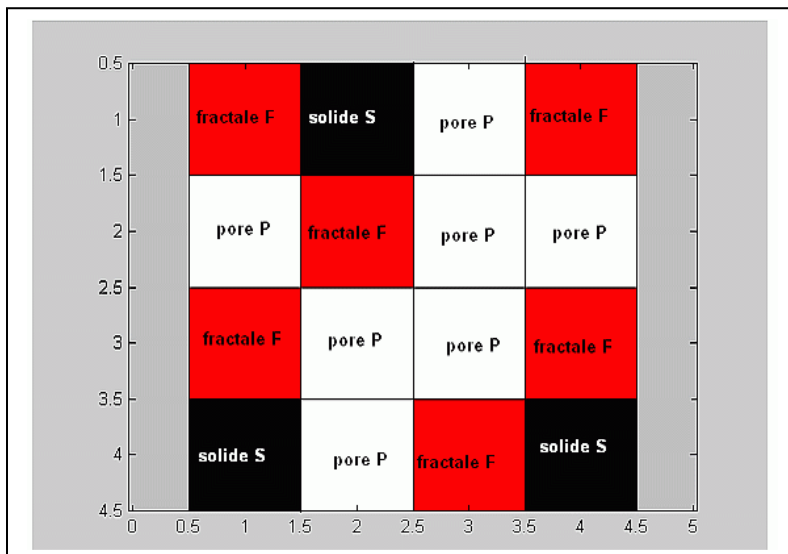


fig. X-II-10 un exemple de milieu poreux de type PSF

$\text{card}(\mathcal{G}) = 16$
 $\text{card}(\mathcal{P}) = 7$
 $\text{card}(\mathcal{S}) = 3$
 $\text{card}(\mathcal{F}) = 6$

Donc :

$$\begin{aligned} p &= 7/16 \\ s &= 3/16 \\ f &= 6/16 \end{aligned}$$

Les développements qui suivent ne porteront évidemment que l'ensemble \mathcal{F} . Posons $N = \text{card}(\mathcal{G})$ et désignons par d la dimension euclidienne et par n le facteur échelle ($n = 4$ sur la figure X-II-9). On montre que

$$N = n^d \quad (\text{X-II-24})$$

Le produit Nf n'est autre que le nombre d'éléments de l'ensemble fractal \mathcal{F} , donc $Nf = \text{card}(\mathcal{F})$ ($Nf = 6$ sur la figure X-II-9).

Le calcul de la dimension fractale D obéit à la loi de la détermination de la dimension de boîte ("box counting" dimension) que nous assimilons à une dimension de capacité

$$D = \frac{\log Nf}{\log n} \quad (\text{X-II-25})$$

Relativement à la figure X-II-9, $D = \frac{\log 6}{\log 4} = 1.292481250$. La dimension fractale D est donc plus

petite que la dimension euclidienne $d = 2$, le modèle représenté par cette figure est donc lacunaire.

Une première conséquence de l'expression (X-II-25) est d'écrire

$$Nf = n^D \quad (\text{X-II-26})$$

En introduisant la relation (X-II-24), nous pouvons écrire

$$f = n^{D-d} \quad (\text{X-II-27})$$

En considérant le logarithme des deux membres de (X-II-27), il vient

$$D = d + \frac{\log f}{\log n} \quad (\text{X-II-28})$$

Comme $f = 1 - (p + s)$, donc

$$D = d + \frac{\log(1 - p - s)}{\log n} \quad (\text{X-II-29})$$

L'expression (X-II-29) montre que pour une dimension euclidienne d , la dimension fractale du modèle PSF ne dépend que des paramètres p et s .

XI- DETECTION DE LOIS DE PUISSANCE DANS LE MODELE PSF

Pour asseoir la fractalité du modèle PSF, il convient de mettre en évidence sur ce modèle des lois de puissance reposant sur le facteur échelle que nous notons r avec la présence en exposant de la dimension fractal D .

Soit L la dimension linéaire du modèle source (L est le côté du carré sur la figure X-II-9). Le facteur échelle r est tel que $r = L/n$. A un niveau i du processus d'itération correspondant à un facteur échelle r_i , nous avons

$$r_i = \frac{L}{n^i} \Leftrightarrow n^i = \frac{L}{r_i} \quad (\text{X-II-30})$$

Ainsi à la troisième étape d'itération sur la figure X-II-9, $r_4 = 1/(4)^3 = .015625$.

Si le produit Nf désigne le nombre d'éléments de l'ensemble fractal à la première itération, compte tenu de la relation (X-II-26), le nombre d'éléments, $\mathcal{N}_f(r_i)$ de même type à l'étape d'itération i est

$$\mathcal{N}_f(r_i) = (Nf)^i = (n^i)^D \quad (\text{X-II-31})$$

Comme $n^i = \frac{L}{r_i}$ (équation X-II-30), nous obtenons

$$\mathcal{N}_f(r_i) = L^D r_i^{-D} \tag{X-II-32}$$

Le nombre d'éléments figurant dans les ensembles fractals à une étape d'itération quelconque i donc pour échelle r_i suit donc une loi de puissance en r_i avec la dimension fractale D en exposant.

D'autres relations incluant D peuvent être mises en exergue par combinaison des expressions précédentes. Ainsi, partant des équations (X-II-24) et (X-II-30), on obtient la loi de puissance

$$N^i = L^d r_i^{-d} \tag{X-II-33}$$

donc fonction du paramètre échelle r_i mais où l'exposant n'est plus la dimension fractale mais la dimension euclidienne d . On ne peut dire dans ce cas que le terme N^i a une tendance fractale.

Par combinaison des expressions (X-II-27) et (X-II-30), la proportion f du générateur \mathcal{G} à un niveau d'itération i quelconque est telle que

$$f^i = L^{D-d} r_i^{d-D} \tag{X-II-34}$$

Le terme f^i ne suit pas une loi de puissance et de ce fait ne peut prétendre au qualificatif de fractal.

XII- LE COMPTAGE D'ELEMENTS DANS UN MODELE PSF

Pour un modèle PSF donné tel que décrit par les relations figurant dans (X-II-20), posons:

$$\begin{cases} N_p = \text{card}(\mathcal{P}) \\ N_s = \text{card}(\mathcal{S}) \\ N_f = \text{card}(\mathcal{F}) \end{cases} \tag{X-II-35}$$

L'objectif serait d'établir les relations liant N_p, N_s et N_f .

► 1^{ère} étape d'itération : nous sommes au niveau du générateur \mathcal{G} dans lequel nous distinguons N_p pores, N_s solides et $N_f = Nf$ sous - régions destinées à recevoir les duplications induites par le processus itératif.

► 2^{ème} étape d'itération: des éléments de taille L/n sont conservés entre autres les N_p pores et les N_s solides alors que sur l'ensemble \mathcal{F} de nouveaux éléments apparaissent mais avec une taille (L/n^2) (figure X-II-11)

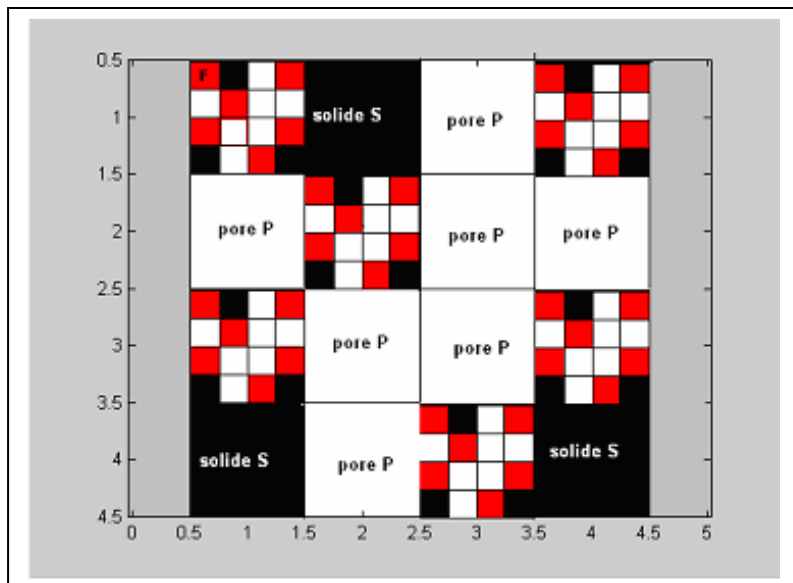


fig. X-II-11 seconde itération dans la construction du modèle PSF issu du générateur de la figure X-II-10

Le nombre de pores et de solides qui apparaît à cette étape est $Np.(Nf)$ pores et $Ns.(Nf)$ solides alors que nous comptons $Nf.(Nf)$ nouvelles autres sous régions dans lesquelles se poursuivra le principe d'itération.

Ainsi, relativement à la figure X-II-10, nous avons:

- 1^{ère} itération : $Np = 7$ pores, $Ns = 3$ solides et $Nf = 6$ sous régions destinées à prochaine itération
- 2^{ème} itération : il est obtenu $Np.(Nf) = 42$ pores , $Ns.(Nf) = 18$ solides et $Nf.(Nf) = 36$ sous régions fractales

► pour une i ^{ème} étape d'itération, nous désignons par $\mathcal{N}_p(r_i)$ et $\mathcal{N}_s(r_i)$ respectivement le nombre de pores et de solides de taille r_i . Si $\mathcal{N}_f(r_i)$ représente le nombre de régions fractales, nous pouvons écrire

$$\begin{cases} \mathcal{N}_p(r_i) = (Np).\mathcal{N}_f(r_{i-1}) \\ \mathcal{N}_s(r_i) = (Ns).\mathcal{N}_f(r_{i-1}) \end{cases} \quad (\text{X-II-36})$$

Comme $\mathcal{N}_f(r_i) = (Nf)^i$ (d'après l'expression X-II-31), il vient que

$$\begin{cases} \mathcal{N}_p(r_i) = (Np).(Nf)^{i-1} \\ \mathcal{N}_s(r_i) = (Ns).(Nf)^{i-1} \end{cases} \quad (\text{X-II-37})$$

Nous introduisons la dimension fractale D dans l'expression (X-II-37) par le biais de la relation $(Nf)^i = L^D r_i^{-D}$ (d'après (X-II-32); donc

$$\begin{cases} \mathcal{N}_p(r_i) = \frac{P}{f} L^D r_i^{-D} \\ \mathcal{N}_s(r_i) = \frac{S}{f} L^D r_i^{-D} \\ \mathcal{N}_f(r_i) = L^D r_i^{-D} \end{cases} \quad (\text{X-II-38})$$

Nous avons les formes de proportionnalité suivantes

$$\begin{cases} \mathcal{N}_p(r_i) \propto r_i^{-D} \\ \mathcal{N}_s(r_i) \propto r_i^{-D} \\ \mathcal{N}_f(r_i) \propto r_i^{-D} \end{cases} \quad (\text{X-II-39})$$

Le nombres d'éléments (pores, solides ou ensembles "fractals") générés au cours du processus d'itération suivent donc une loi de puissance par rapport à l'échelle, la dimension fractale figurant en exposant; de ce fait, les fonctions $\mathcal{N}_p(r)$, $\mathcal{N}_s(r)$ et $\mathcal{N}_f(r)$ sont à consistance fractale.

XIII- ESTIMATION DE LA POROSITE DANS UN MODELE PSF

► A l'étape 1 du processus d'itération (précisément au niveau du générateur G (7 pores sur la figue X-II-9), Le paramètre p représente la proportion de pores conservés. Nous avons alors une porosité $\varphi_1 = p$

► A l'étape 2, il y naissance d'autres pores dont la proportion est pf (7x6 pores sur la figure X-II-10). En terme de porosité, ces nouveaux pores sont ajoutés à ceux de l'étape 1. Nous avons alors une porosité $\varphi_2 = p + pf$.

► A l'étape 3, il apparaît une proportion pf^2 nouveaux pores (7×6^2 pores sur la figure X-II-10. Nous avons alors une porosité $\varphi_3 = p + pf + pf^2$.

► A une étape d'itération quelconque i , nous avons une porosité φ_i telle que

$$\varphi_i = p + pf^2 + pf^3 + \dots + pf^{i-1} = p \sum_{k=0}^{i-1} f^k \quad (\text{X-II-40})$$

Nous reconnaissons la présence d'une progression géométrique de i termes, de premier terme 1 et de raison f ; ceci nous amène à écrire

$$\varphi_i = p \frac{1-f^i}{1-f} \quad (\text{X-II-41})$$

Comme $p + s + f = 1$, l'expression (X-II-41) peut être reprise sous la forme

$$\varphi_i = \frac{p}{p+s} (1-f^i) \quad (\text{X-II-42})$$

Pour un nombre d'itération infini et sachant que $0 < f < 1$, nous pouvons déduire la porosité finale φ du modèle PSF en posant

$$\varphi = \lim_{i \rightarrow +\infty} \varphi_i = \frac{p}{p+s} \quad (\text{X-II-43})$$

La limite calculée est donc finie et par conséquent la porosité finale φ du modèle PSF. Curieusement, cette porosité ne dépend que des proportions de phase poreuse et de phase solides contenues dans le modèle générateur. Ainsi, concernant la figure X-II-9, la porosité finale du modèle PSF induit est

$$\varphi = \frac{7}{10} = 0.7 \text{ soit une porosité de } 70\% .$$

CONCLUSION GENERALE

*Le chaos n'est qu'un principe méconnu
de l'ordre.*

Anonyme

CONCLUSION

Frustrée et contrariée de ne pouvoir disposer de théorie scientifique aussi prolifique que celle vécue au siècle dernier à travers la relativité générale et la mécanique quantique, la communauté des physiciens toutes disciplines confondues (géophysique, économie, médecine....) découvrira dans le sillage des théories récente du chaos déterministe et de l'avènement des structures fractales, des objectifs de recherche assez prometteurs tant sur la plan mathématique que dans le domaine des applications à la lumière des supports numériques et de la technologie d'expérimentation actuels.

Dans une large mesure, nous avons privilégié la démarche de simulations numériques adaptées des modèles de systèmes définis par les équations d'évolution (aux dérivées partielles ou issues de récurrences) par rapport à des conditions initiales préalablement fixées. Cette approche présente surtout l'intérêt d'introduire des modèles mathématiques flexibles répondant à des situations presque réalistes sur lesquelles il est possible d'exercer des opérations de contrôle relativement au choix des conditions initiales et des paramètres de modélisation. Les méthodes graphiques qui en découlent conduisent à l'obtention puis à l'interprétation de trajectoires particulières révélatrices d'un comportement d'évolution dynamique chaotique ou d'un développement de structures fractales.

Malgré des percées remarquables dans l'analyse des principes conduisant à une transition vers le chaos, il n'en demeure pas moins que cette dernière reste énigmatique dans certaines situations. A notre sens, le problème résiderait d'abord dans la définition de la nature même du chaos et dans sa structure bien plus dans sa structuration avec la cascade de bifurcations maintenant bien établies. Des hypothèses sont régulièrement avancées mais infirmées par des modèles synthétiques. Ainsi il est erroné d'incriminer le nombre élevé de variables ou de dimensions de l'espace des phases dans le basculement d'un système non linéaire vers le chaos, la fonction logistique étant un exemple évident. Il est donc hasardeux de fixer l'instant de bifurcation vers un comportement chaotique. Il nous a semblé alors justifié de situer le seuil de la bifurcation d'un régime périodique vers une situation de chaos à travers l'étape de quasi-périodicité. Des signaux quasi-périodiques caractérisés par une incommensurabilité de leur fréquence ont été modélisés dans les domaines temporel et fréquentiel. Au niveau spectral, leur spectre met en évidence, outre les fréquences "fondamentales", une série de répliques de ces dernières sous la forme de combinaisons linéaires avec une représentation graphique complexe et bruitée. On peut avancer donc que le chaos peut survenir non pas par "une alimentation" du spectre en nouvelles fréquences mais par une recombinaison sous la forme de combinaisons linéaires des fréquences déjà contenues dans le spectre.

Le scénario de l'émergence du développement du chaos et de sa dynamique est parfaitement identifiable dans la fonction logistique où le caractère prédominant est la cascade de bifurcations observées, elle-même générée par un dédoublement de cycles limites. Nous retenons aussi que le chaos se manifeste sous forme de "crises" en ce sens que, bien qu'imprévisible et perdurant dans le temps, çà et là des fenêtres de stabilité de longueur variable au sein desquelles réapparaissent des bifurcations moins longues pour qu'à nouveau se réinstalle le chaos. Pourrait-on affirmer que le chaos absolu n'existe pas?

L'avènement des structures fractales non seulement comme processus auto – similaires ou de self – affinité mais aussi comme de véritables interfaces d'échange d'information dans la dynamique des systèmes, a favorisé l'émergence à la fois de concepts mathématiques spécifiques entre autres le concept dimension fractionnaire et la résurgence de notions particulières adaptées à la compréhension de leur genèse, de leur morphologie et de leur évolution. Deux modèles en synergie issus de récurrences dans le plan des complexes prédominent: les ensembles de Julia et l'ensemble de Mandelbrot pourvoyeur de paramètres des premiers cités. Le choix de ces paramètres, à l'intérieur, sur ou hors de la frontière de l'ensemble de Mandelbrot conditionne non seulement l'aspect image des ensembles de Julia mais aussi leurs caractéristiques de cycles, de bassin d'attraction, etc. Nous avons porté un intérêt particulier à la morphologie de l'ensemble de Mandelbrot, au cardioïde central de forme circulaire, sur lequel repose la frontière fractale, sertie de bourgeons et de filaments qui exhibent une parfaite similarité avec le corps principal. Le corps secondaire de cet ensemble a fait

l'objet d'une analyse ; les agrandissements effectués sur certaines zones ont révélé des structures éminemment fractales.

Une classification des fractals a été proposée tout comme un balayage de l'ensemble de Mandelbrot accompagné d'une rétrospective des ensembles de Julia correspondants.

L'introduction des fractals fait référence alternativement à un foisonnement de concepts dont les plus marqués sont la géométrie fractale induite par les principes de similarité ou d'homothétie et au facteur "échelle" révélateur des fluctuations émergentes ou entretenues, développées au sein des structures. La caractéristique dominante à prendre en considération dans la démarche fractale reste sans conteste la notion de dimensions fractales fractionnaires. Passées en revue, ces dernières sont disparates dans leur définition et leur calcul en dépit bien que caractérisant un même objet. La dimension de similarité est sans doute la plus simple à déterminer mais aussi la moins significative du fait fractal car elle n'inclut que le nombre de fois que le motif est répété au cours de la "fractalité" et sa taille. En l'absence d'une règle de construction clairement définie, ces deux paramètres ne peuvent être déterminés que d'une manière empirique. En fait, la dimension la plus significative est la dimension de capacité ou simplement dimension fractale. Elle est reliée à un processus de calcul objectif, ignorant, tout au moins dans sa définition, la référence à la propriété d'homothétie puisqu'elle ne prend en considération que le mode de recouvrement de l'objet fractal.

La dimension de Hausdorff représente une autre forme de dimension fractale, consistante dans son approche mathématique, basée sur une optimisation de la masse de recouvrement sans réelle portée pratique sinon qu'elle est inférieure à la dimension fractale.

Ramenées au niveau de la caractérisation d'un attracteur étrange dont l'aspect fractal est maintenant largement admis, se pose alors le problème de l'effet de représentativité de la dimension fractale quant aux trajectoires de peuplement de cette attracteur. Il est alors remarqué que les dimensions ci-dessus citées ne répondent qu'à un aspect de l'attracteur étrange - sa géométrie fractale - et qu'une description objective doit comporter une "dose" de stochasticité c'est-à-dire une approche probabiliste ou statistique prenant en considération la fréquence de visite par les trajectoires de certaines de l'attracteur. Dans ce contexte, la dimension ponctuelle (pointwise dimension) accordée, ne serait ce que d'une manière indirecte, des poids statistiques aux régions de l'attracteur visitées par les trajectoires.

Deux autres types de dimensions – la dimension d'information et la dimension de corrélation – sont issues de la définition d'une dimension fractale généralisée. Cette dernière conserve la démarche probabiliste mais se rattache beaucoup plus à la probabilité d'occupation de cellules appartenant à un recouvrement de l'attracteur. Notons que la dimension d'information ne peut excéder la dimension fractale.

Dans le sillage des insuffisances de la dimension fractale, cette dernière ne rend pas compte de la dynamique des trajectoires, de leur migration vers l'attracteur et principalement de leur divergence dans un régime chaotique. Cette dernière est décrite par l'ensemble des exposants de Lyapunov (ou spectre de Lyapunov) dont le prolongement graphique aboutit au fractal du même nom.

Les processus dits en $1/f$ et les lois de puissances constituent des références dans les constructions fractales. Deux processus stochastiques répondent à ces deux critères: le mouvement Brownien standard et son corollaire, le mouvement Brownien fractionnaire et la percolation. Dans le premier cas cité, une analyse statistique et spectrale ont révélé que le mouvement Brownien jouit d'une double signature: une loi d'évolution temporelle stochastique qui teinte des systèmes auto-organisés et une signature fractale révélée par une irrégularité apparente sous – tendue par un invariance d'échelle donc d'une duplication des formes et des structures. Cette signature est confirmée par diverses approches (loi de puissance transformée en ondelette, dimension fractale...) et qui convergent dans leur ensemble vers un critère fondamental dans les processus fractals: l'auto – similarité.

L'approche de toute modélisation de l'évolution entropique d'un système repose sur deux singularités :

- une singularité géométrique à l'origine d'un comportement d'apparence complexe mais souvent ordonné: la fractalité
- une singularité d'essence systémique relevant plus d'une dynamique de comportement interne et d'interaction entre un système majeur et son environnement; l'étude de l'évolution temporelle des structures à des niveaux hiérarchisés d'échange d'information , d'énergie ou

de matière relève beaucoup plus de la dérivation d'ordre non entier. L'influence de la géométrie sur le comportement d'un système dynamique se traduit qualitativement par l'émergence d'une fractalité (donc de dimension non entière) entretenue et décrite mathématiquement par une équation différentielle d'ordre non entier. Relativement à la théorie des systèmes, cela revient à construire un système linéaire et invariant dans le temps et dont l'action sur la fonction d'entrée consiste à calculer la dérivée fractionnaire de cette dernière. Il s'agit en fait de déterminer la réponse impulsionnelle d'un tel système, plus précisément de construire un opérateur convolutif de dérivation généralisée.

Contrairement au cas Brownien, la percolation est un processus stochastique donc en particulier probabiliste, qui se développe sur un réseau. Deux formes de percolation sont à retenir: la percolation par les amas et la percolation par sites, cette dernière ayant été privilégiée dans nos simulations car liée directement à la fonction de percolation et à la probabilité critique. Un modèle mathématique de percolation a été développé tout comme la fonction de percolation dont la probabilité critique est un paramètre essentiel dans les différentes simulations entreprises. Une forme de loi de puissance incluant une dimension fractale a été établie

Sur la base de l'hypothèse d'une distribution fractale de la structure porale d'un milieu, différents schémas de modélisation d'un corps poreux ont été présentés, du plus simple car unidimensionnel (tapis de Sierpinski) au plus réaliste car plus représentatif comme l'éponge de Menger. Relativement à ce dernier cas, outre le cas standard, la représentation de modèles homogènes et non homogènes, variés dans leur structure, est soumise à la définition de deux paramètres : un paramètre d'échelle et un paramètre de probabilité de pore (ou de porosité). Différents modèles de milieux poreux ont été obtenus sur la base d'une combinaison de ces paramètres. Le calcul de la dimension fractale correspondant à chaque cas permet de relier le fait fractal et la caractéristique de porosité. Deux modèles mathématiques permettent de mettre en évidence une loi de puissance dans la distribution des pores pour une confirmation du caractère fractal de cette dernière ont été développés.

Un autre modèle, récent par ailleurs et fortement relié à la notion d'échelle, a été introduit: il s'agit du modèle à trois phases Pore Solide Fractal (ou modèle PSF). L'objectif était de faire apparaître là aussi une loi de puissance qui intégrerait la dimension fractale. Une méthode de comptage du nombre d'éléments poreux dans un modèle PSF et une estimation de la porosité ont été synthétisés.

ANNEXES

ANNEXE 1

APPLICATION CONTRACTANTE ET DETERMINATION GEOMETRIQUE D'UN POINT FIXE

Le mode géométrique de détermination d'un point fixe dans la récurrence logistique (n°) issu d'une condition initiale x_0 , repose sur la notion de fonction contractante f_c relativement à un espace métrique M complet muni d'une norme ρ

$$f_c : M \rightarrow M$$

$$(x, y) \rightarrow [f_c(x), f_c(y)]$$

et telle que

$$\rho[f_c(x), f_c(y)] \leq \lambda \rho(x, y) \quad \text{avec} \quad 0 < \lambda < 1 \quad (\text{A1-1})$$

Si x' désigne un point fixe de l'application contractante continue f_c i.e. $f_c(x') = x'$, pour tout $x \in M$ la suite des composées $x, f_c(x), f_c^2(x), \dots, f_c^i(x), \dots$ converge vers le point fixe de f_c . En effet comme

$$\rho[f_c^n(x), f_c^{n+1}(x)] = \rho\{f_c^n(x), f_c^n[f_c(x)]\}$$

on déduit l'inégalité suivante

$$\rho[f_c^n(x), f_c^{n+1}(x)] \leq \lambda^n \rho[x, f_c(x)] \quad n \in \mathcal{N} \quad (\text{A1-2})$$

La série de puissance $\sum_{n \in \mathcal{N}} \lambda^n$ étant convergente par delà la condition $0 < \lambda < 1$, la suite de terme général

$$f_c^n(x) \Big|_{n \in \mathcal{N}} \text{ est une suite de Cauchy. L'espace métrique } M \text{ étant complet, la limite } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_c^n(x) \text{ existe ;}$$

posons alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_c^n(x) = x' \quad (\text{A1-3})$$

et montrons alors que x' n'est autre que le point fixe de l'application f_c . Considérons pour cela l'image par f_c des deux membres de (A3)

$$f_c \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} f_c^n(x) \right] = f_c(x') \quad (\text{A1-4})$$

L'application contractante f_c étant continue, il est équivalent d'exprimer (A4) comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [f_c^{n+1}(x)] = f_c(x') = x' \quad (\text{A1-5})$$

Le point x' représente donc un point fixe pour l'application f_c et qu'il est unique. En effet, en supposant l'existence d'un second point fixe x'' de l'application contractante f_c , nous avons l'égalité

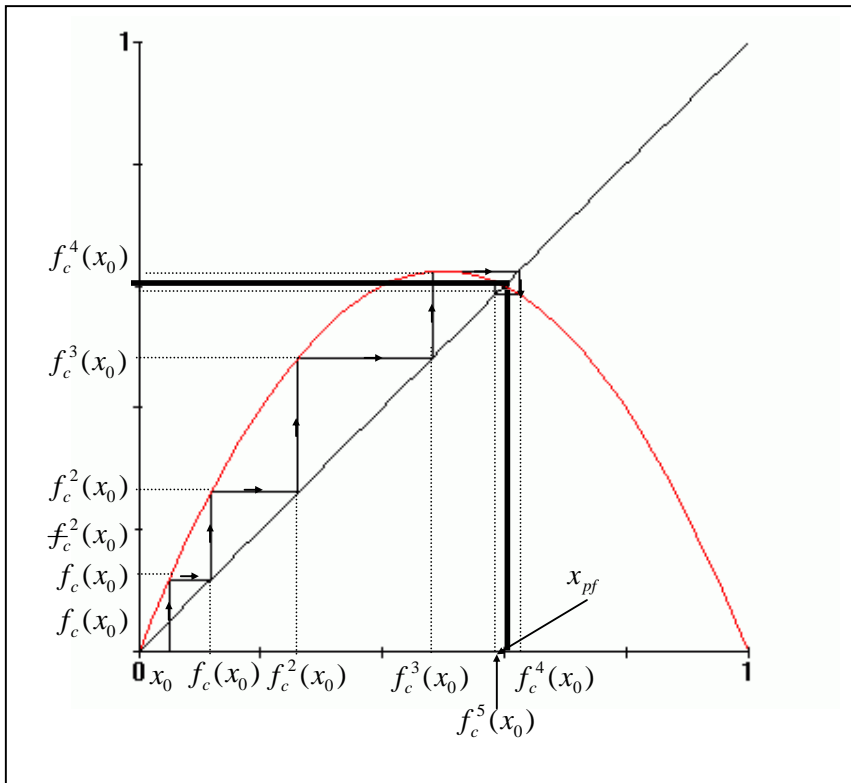
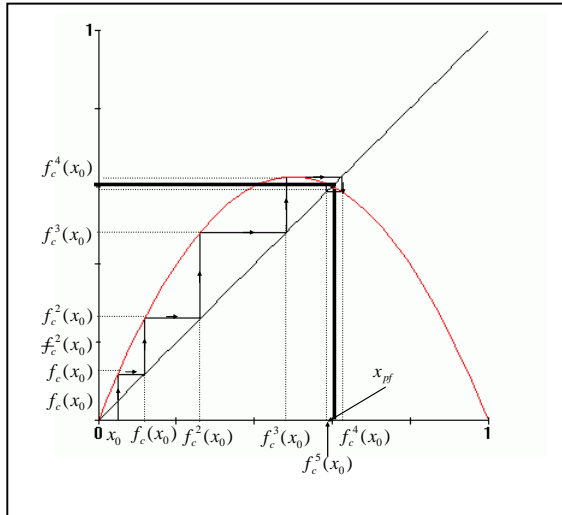
ANNEXES

$$\rho(x', x'') = \rho[f_c(x'), f_c(x'')] \quad (\text{A1-6})$$

La définition de f_c à travers (A6) donne l'inégalité

$$\rho(x', x'') \leq \lambda \rho(x', x'') \quad (\text{A1-7})$$

. Comme $0 < \lambda < 1$ il vient alors que $x' = x''$ i.e. les points fixes x' et x'' sont confondus .Le principe de la détermination géométrique (fig. A1) du point fixe x' issu de la fixation d'un point source x_0 repose sur les résultats ci-dessus montrés et sur la considération des composées $[x, f_c(x), f_c^2(x), \dots, f_c^i(x), \dots$



ANNEXE 2

LA FONCTION DE WEIERSTRASS EST PARTOUT CONTINUE MAIS NULLE PART DIFFERENTIABLE

Bien que pouvant être formulée sous diverses formes, la fonction de Weierstrass présente cette particularité d'être partout continue mais nulle part différentiable mettant ainsi en défaut l'un des concepts clé de l'analyse fonctionnelle liant continuité et dérivabilité.

Considérons l'application s suivante à travers laquelle nous définissons un modèle de la fonction de Weierstrass :

$$s : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$$

$$t \mapsto s(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{\sin(2\pi a^n t)}{b^n} \quad (\text{A2-1})$$

dans laquelle nous supposons réunies les conditions suivantes

$$\begin{cases} a \text{ paire} \\ 1 < b < \frac{a}{1 + 6\pi} \end{cases} \quad (\text{A2-2})$$

La fonction s ainsi définie est partout continue sur \mathcal{R} mais nulle part dérivable sur ce même ensemble. La démonstration de cette assertion repose sur le lemme suivant

- lemme : Soit $\{\alpha_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ et $\{\beta_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ deux suites convergentes vers une même limite l ; on suppose de plus que la fonction s est dérivable en l qui vérifie les conditions

$$\begin{cases} \beta_n \leq l \leq \alpha_n \\ \beta_n \leq \alpha_n \end{cases} \quad (\text{A2-3})$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s(\alpha_n) - s(\beta_n)}{\alpha_n - \beta_n} = s'(l) \quad (\text{A2-4})$$

En effet si s est dérivable en l , on peut écrire l'approximation suivante

$$s(l + \varepsilon) - s(l) \approx \varepsilon \cdot s'(l) + \varepsilon h(\varepsilon) \quad (\text{A2-6})$$

avec $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\varepsilon) = 0$. Posons :

$$\begin{cases} \alpha_n = l + \gamma_n & \gamma_n > 0 \\ \beta_n = l - \delta_n & \delta_n > 0 \end{cases} \quad (\text{A2-7})$$

Exprimons alors le rapport $\frac{s(\alpha_n) - s(\beta_n)}{\alpha_n - \beta_n}$ en tenant compte de l'hypothèse (A2-7) et de la formulation (A2-6) en remarquons que nous avons:

ANNEXES

$$\begin{cases} s(\alpha_n) = s(l + \gamma_n) = s(l) + \gamma_n s'(l) + \gamma_n h(\gamma_n) \\ s(\beta_n) = s(l - \delta_n) = s(l) - \delta_n s'(l) - \delta_n h(-\delta_n) \end{cases} \quad (\text{A2-8})$$

Le rapport à exprimer s'écrit donc

$$\frac{s(\alpha_n) - s(\beta_n)}{\alpha_n - \beta_n} = \frac{s'(l)(\gamma_n + \delta_n) + [\gamma_n h(\gamma_n) + \delta_n h(-\delta_n)]}{\gamma_n + \delta_n} \quad (\text{A2-9})$$

Nous reprenons l'expression (A2-9) sous la forme suivante

$$\frac{s(\alpha_n) - s(\beta_n)}{\alpha_n - \beta_n} = s'(l) + r_n \quad (\text{A2-10})$$

avec

$$r_n = \frac{\gamma_n h(\gamma_n) + \delta_n h(-\delta_n)}{\gamma_n + \delta_n} \quad (\text{A2-11})$$

Expression du reste r_n :

$$|r_n| = \frac{|\gamma_n h(\gamma_n) + \delta_n h(-\delta_n)|}{|\gamma_n + \delta_n|} \leq \frac{|\gamma_n h(\gamma_n)|}{|\gamma_n + \delta_n|} + \frac{|\delta_n h(-\delta_n)|}{|\gamma_n + \delta_n|} \quad (\text{A2-12})$$

Nous déduisons de (A2-12) la majoration forte suivante

$$0 \leq |r_n| \leq |h(\gamma_n)| + |h(-\delta_n)| \quad (\text{A2-13})$$

Par suite de la condition posée sur h , nous avons donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |r_n| = 0$, d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s(\alpha_n) - s(\beta_n)}{\alpha_n - \beta_n} = s'(l) \quad (\text{A2-14})$$

Le lemme se trouve ainsi démontré.

Retour à la démonstration du théorème:

La fonction s définie en (A2-1) à travers la série trigonométrique est partout continue en tant que série trigonométrique d'ailleurs absolument convergente; en effet

$$0 \leq s(t) \leq \sum_{n \geq 0} \frac{|\sin 2\pi a^n|}{|b^n|} \leq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{|b^n|} \quad (\text{A2-15})$$

La série figurant en fin d'expression dans (A2-15) est une série géométrique convergente. On montre dans ce qui suit que s n'est pas dérivable en l en nous inspirant du lemme énoncé ci-dessus.

Nous redéfinissons à nouveau les suites $\{\alpha_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ et $\{\beta_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ telle que la condition suivante soit vérifiée

$$\frac{s(\alpha_n) - s(\beta_n)}{\alpha_n - \beta_n} > A^n \text{ avec } (A > 1) \quad (\text{A2-16})$$

ANNEXES

Soit, en outre, k_n le plus grand entier vérifiant la condition : $k_n \leq l.a^n + \frac{1}{4\pi}$. Posons :

$$\alpha_n = \frac{4k_n + 5}{4a^n} \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{4k_n - 1}{4a^n} \quad (\text{A2-17})$$

On montre à partir de (A2-17) que $\alpha_n - \beta_n = \frac{3}{2} \frac{1}{a^n}$ et par suite des conditions posées en (A2-2)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n - \beta_n) = 0 \quad (\text{A2-18})$$

En outre, on peut montrer à partir de la condition sur k_n et des relations (A2-17) que

$$\begin{cases} \alpha_n \leq l + \frac{1+5\pi}{4\pi a^n} \\ \beta_n \leq l - \frac{\pi-1}{4\pi a^n} \end{cases} \quad (\text{A2-19})$$

Des inégalités (A2-19) nous tirons : $\beta_n \leq l \leq \alpha_n$. A l'aide des notations introduites, nous évaluons le rapport $x_n = \frac{s(\alpha_n) - s(\beta_n)}{\alpha_n - \beta_n}$. Pour cela on introduit la fonction partielle $s_k(t) = \frac{\sin 2\pi a^k t}{b^k}$. On a alors

$$x_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s_k(\alpha_n) - s_k(\beta_n)}{\alpha_n - \beta_n} \quad (\text{A2-20})$$

Evaluons $s_k(\alpha_n)$:

$$s_k(\alpha_n) = \frac{\sin 2\pi a^k \alpha_n}{b^k} = \frac{\sin a^{k-n} (2\pi k_n + 5\pi/2)}{b^k} \quad (\text{A2-21})$$

Comme a est paire (hypothèses (A2-2)), il vient que $s_k(\alpha_n) = 0$ pour $k > n$ et pour les mêmes raisons $s_k(\beta_n) = 0$. Pour $k = n$, nous avons

$$s_n(\alpha_n) = 1/b^n \quad \text{et} \quad s_n(\beta_n) = -1/b^n \quad (\text{A2-22})$$

Nous pouvons reprendre (A2-20) sous la forme suivante

$$x_n = \sum_{k=0}^n \frac{s_k(\alpha_n) - s_k(\beta_n)}{\alpha_n - \beta_n} = \frac{s_n(\alpha_n) - s_n(\beta_n)}{\alpha_n - \beta_n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s_k(\alpha_n) - s_k(\beta_n)}{\alpha_n - \beta_n} \quad (\text{A2-23})$$

soit

$$x_n = \frac{2}{b^n (\alpha_n - \beta_n)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s_k(\alpha_n) - s_k(\beta_n)}{\alpha_n - \beta_n} \quad (\text{A2-24})$$

Comme $\alpha_n - \beta_n = \frac{3}{2} \frac{1}{a^n}$, l'expression (A2-24) devient

ANNEXES

$$x_n = \frac{4}{3} \left(\frac{a}{b} \right)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s_k(\alpha_n) - s_k(\beta_n)}{\alpha_n - \beta_n} \quad (\text{A2-25})$$

Partant de (A2-25) nous avons aussi l'inégalité suivante

$$x_n \geq \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b} \right)^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|s_k(\alpha_n) - s_k(\beta_n)|}{\alpha_n - \beta_n} \quad (\text{A2-26})$$

On applique le théorème des accroissements finis dans le second membre de (A2-26) en affirmant:

$\exists \xi_n \in]\beta_n, \alpha_n[$ tel que

$$\frac{|s_k(\alpha_n) - s_k(\beta_n)|}{\alpha_n - \beta_n} = |s'_k(\xi_n)| \quad (\text{A2-27})$$

En introduisant la définition même de la fonction de Weierstrass figurant en (A2-1), l'expression (A2-26) devient

$$x_n \geq \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b} \right)^n - 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a}{b} \right)^k |\cos 2\pi a^k \xi_n| \quad (\text{A2-28})$$

En utilisant la majoration du cosinus, nous avons

$$x_n \geq \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b} \right)^n - 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a}{b} \right)^k \quad (\text{A2-29})$$

La somme figurant dans le second membre de (A2-29) n'étant autre qu'une progression géométrique de premier terme 1 et de raison a/b , nous avons donc

$$x_n \geq \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b} \right)^n - 2\pi \frac{1 - \left(\frac{a}{b} \right)^n}{1 - \frac{a}{b}} \quad (\text{A2-30})$$

Posons $Y = \frac{a}{b}$; l'expression (A2-30) devient

$$x_n \geq \frac{1}{3} Y^n - 2\pi \frac{1 - Y^n}{1 - Y}$$

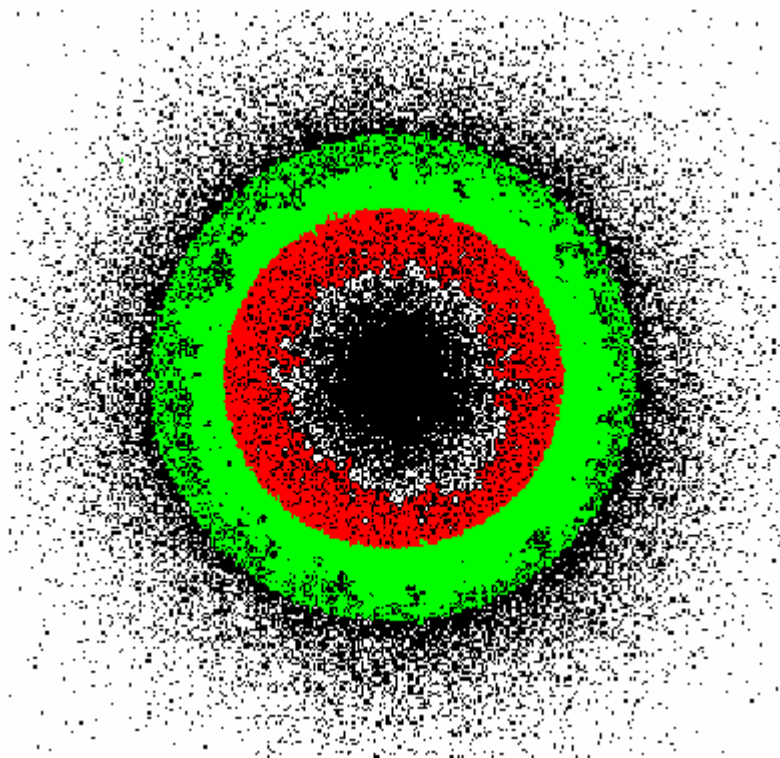
soit

$$x_n \geq \frac{Y^n [Y - (1 + 6\pi)] + 6\pi}{3(Y - 1)} \quad (\text{A2-33})$$

nous avons posé en début d'annexe la condition $1 < b < \frac{a}{1 + 6\pi}$ implique que $\frac{a}{b} > (1 + 6\pi) > 1$

Donc la suite $\{x_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ est donc divergente et la fonction de Weierstrass représentée par la série trigonométrique (A2-1) n'est pas dérivable en l .

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES



- [1] ABARDANEL HDI, ALBANO AM, PASSAMENTE A. and RAPP PE 1989
"Measures of complexity and chaos" New-York Plenum
- [2] ABARDANEL HDI, BROWN R. and KENNEL MB 1991
"Lyapunov exponents in chaotic systems: their importance and their evaluation using observed data" Int. J. Mod Phys B5
- [3] ABRAHAM R. and SHAW C. 1988
Dynamics- the geometry of behaviour- Part two : chaotic behaviour"
 Santa Cruz – Aerial Press Inc
- [4] AHL C and NIEMEYER J 1989
"The fractal dimension of the pore volume inside soils"
 Z. Pflanzenernähr Bodenk 152
- [5] AITOUCHE M. A. 1998
"Dérivation d'ordre non entier – Fractalité"
 Proceeding du séminaire "les fractales dans la compression d'images"
 "fractales 98" 11-12 Mai 1998 Sidi-Fredj –Alger
- [6] AITOUCHE M. A. & DJEDDI M. 2000
"Génération d'images de synthèse par les fractales et les systèmes de fonctions itérées (IFS)"
 Proceeding "Fractales'2000 " Conférence Méditerranéenne
 11-12 Novembre 2000 Constantine Algérie
- [7] ALLAIN C and CLOITRE M 1991
"Characterizing the lacunarity of random and deterministic fractal sets"
 Phy Rev A 44
- [8] AREF H (editors) 1995
"Chaos applied to fluid mixing" Oxford- Elsevier Science
- [9] ARRECHI FT and LISI F 1982
"Hopping mechanism generating $1/f$ noise in nonlinear systems" Phy Rev Lett 49
- [10] ARNOLD V. 1974
"Equations différentielles ordinaires" Editions de Moscou
- [11] **B**ABLOYANTZ A. 1989
"some remarks on nonlinear data analysis, Measures of complexity and chaos"
 Edited by Abraham NB, Albano AM, Passamante A and Rapp PE
 New-York Plenum
- [12] BADI R and POLITI A 1985
"Statistical description of chaotic attractors: the dimension of function"
 J Stat Phy 40
- [13] BAILLY Christophe & COMTE BELLOT Geneviève 1997
"Contrôle des systèmes chaotiques"
 Laboratoire de mécanique ds fluides et d'acoustique – Ecole Centrale de Lyon

- [14] BARABASI A-I and STANLEY HE 1995
"Fractal concepts in surface growth" Cambridge – Cambridge University Press
- [15] BARCELLOS A 1984
"The fractal geometry of Mandelbrot" College Math J15
- [16] BARNESLEY MF 1988
"Fractals everywhere" Boston Academic Press
- [17] BARNESLEY MF and DEMKO SG (editors) 1986
"Chaotic dynamics and fractals" San Diego Academic Press Inc.
- [18] BASSINGTHWAIGHTE JB, RAYMOND GM and PERCIVAL DP
"Analysis of fractal time series – evaluation of methods" Ann Biomed Eng.
- [19] BASSINGTHWAIGHTE JB and RAYMOND GM 1995
"Evaluation of the dispersional analysis method for fractal time series"
Ann Biomed Eng. 23
- [20] BECK C. 1990
"Brownian motion for deterministic dynamics" Physica A 169
- [21] BELTRAMI E. 1987
"Mathematics for dynamic modelling " Orlando – Academic Press Inc.
- [22] BERGE P., POMEAU Y. and VIDAL C. 1984
"Order within chaos- towards a deterministic approach turbulence"
New-York John Wiley & sons
- [23] BERGE P, POMEAU Y. & VIDAL C. 1988
"L'ordre dans le chaos" Hermann Paris
- [24] BERGE Pierre , POMEAU Yves & DUBOIS Gance 1994
"Des rythmes au chaos" ed. Odile Jacob
- [25] BERGE Pierre 1988
"Le chaos" Collection du CEA
- [26] BLOCK A. , VON BLOH W and SCHELMHUBER JL 1990
"Efficient box counting determination of generalized fractal dimensions"
Phy Rev A 42
- [27] BROWN R. 1993
"Calculating Lyapunov exponent for short and/or noisy data sets" Phy Rev E
- [28] BUNDE A and HAVLIN S. 1991
"Fractals and disordered systems" Berlin – New-York Springer Verlag
- [29] BUNDE A and HAVLIN S. (editors) 1994
"Fractal in Science" Berlin : Springer Verlag

- [30] **C**AHN RW 1989
"Fractal dimension and fracture" Nature 338
- [31] CASDAGLI M, DESJARDINS D, EUBANK S, FARMER JD, GIBSON J, THEILER J and HUNTER N 1992
"Nonlinear Modelling of chaotic times series: theory and applications"
 Edited by Kim JH and Stinger J New-York John Willey & sons
- [32] CARPINTERI A. and MAINARDI F., 1997
"Fractals and fractional calculus", Continuum mechanics, Springer Verlag, Wien
- [33] CHEN GUARONG and DONG XIANONING 1998
"From chaos to order: methodologies, perspectives and applications"
- [34] CHENG Q. 1995
"The perimeter-area fractal model and its application to geology" Math Geol 27
- [35] CHUI CK 1992
"An introduction to wavelets" New-York Academic Press
- [36] COLLER P and ECKMAN JP 1980
"Iterated maps on the interval as dynamical systems" Birkhäuser - Basel
- [37] CONRAD M 1986
"What is the use of chaos"
 Edited by Holden AV? Princeton N.J. – Princeton University Press
- [38] CRILLY AJ, EARNSHAW RA and JOHNS H 1993
"Application of fractals and chaos" New-York Berlin Springer
- [39] **D**AHAN R 1989
"Chaos et déterminisme" Editions du Seuil
- [40] DANG-VU HÛYEN, DELACARTE CLAUDINE 2000
"Bifurcations et chaos" collection ellipses
- [41] DELANNEY R, THOVERT JF and adler PM 1989
"Fractals et milieux poreux" Rev Int Syst 3,4
- [42] DEMKO RL, HODGES L and NAYLOR B 1985
"Construction of fractal objects with Iterated Function Systems"
 Computer Graphics 1985
- [43] DEVANCE R 1989
"An introduction to dynamical system" Addison Wesley New-York
- [44] DEVANEY RL 1990
"Chaos , fractals and dynamics" Reading MA :Addison Wesley
- [45] DEVANEY RL and KEEN L (ditors) 1989
"Chaos and fractals" Providence, RI, American Mathematical Society

- [46] DEVANEY RL 1992
"A first course on chaotic dynamical systems: theory and experiment"
 Reading MA Addison Wesley
- [47] DEWDNAY AK 1986
"Computer recreations of fractal mountains, graftal plants and othe computer graphics at Pixacr" Sc. Am. 255
- [48] DITTO L, RAUSEO SN and SPANO ML 1990
"Experimental control of chaos" Phys. Rev. Lett. 65
- [49] DOUGAS G 1992
"Seeking order in chaos" EPRI J 17
- [50] **E**CKMAN J-P, KAMPHORST SO and RUELLE D 1987
"Recurrence plots of dynamical systems" Europhys Lett 4
- [51] EDGAR GA 1990
"Measure, topology and fractal geometry" New-York: Springer Verlag
- [52] EKLAN IVAR 1984
"Le calcul, l'imprévu" Editions du seuil
- [53] ENTIN –WOHLMAN O, SIVAN U, BLUMFELD R and MEIR Y 1989
"Dynamic structure factor of fractals"
 Fractal in Physics Edited by Aharony A. and Fejer J Amsterdam Elsevier Science Publisher B.V.
- [54] **F**ALCONER KJ 1985
"Geometry of fractal sets" Cambridge: Cambridge University Press
- [55] FALCONER KJ 1990
"Fractal geometry: Mathematical foundation and applications"
 Chichester New-York: Willey
- [56] FALCONERT KJ 1990
"fractal geometry" John Wiley New-York
- [57] FARMER JD 1986
"Scaling in fat fractal"
 Dimension and entropy in chaotic systems Edited by Mayer-Kress G. Berlin – Heidelberg : Springer Verlag
- [58] FISHER P and SMITH WR (editors) 1985
"chaos fractals and dynamics" New- York: Marcel Dekker Inc.
- [59] FLANDRIN P 1989
"On the spectrum of fractional Brownian" IEEE Trans Info Theory 35
- [60] FREDERICKSON PEA 1983

"The Lyapunov dimension of strange attractor" J Diff Equations 49

[61] FROY LAND J 1992

"Introduction to chaos and coherence" IOP Publishing Bristol

[62] FUNTOWICZ SILVIO and RAVETZ R. JEROME 1994

"La science post-normale et les systèmes complexes émergents"
Revue internationale de systémique Vol 8 N°4-5

[63] GENTIL CHRISTIAN , TOSAN E et VANDORP ED 1991

"Les fractals : un objet pour la synthèse d'images" MICAD 91 Hermes

[64] GENTIL CHRISTIAN , TOSAN E et VANDORP ED 1991

"Description de fractals par IFS"

In Laboratoire d'Informatique Fondamentale, editor, Journées Graphiques GROS plan 91 Lille

[65] GENTIL E, TOSAN E et NEVEU M 2006

"Formes fractales mixtes"

GTMG 2006 – Journées de Travail en Modélisation – Cachan – Organisation LURPAEA 138, AFIG GDR ALP

[66] GIBBS VW 1993

"Practical fractal" Sci. Am. 269

[67] GLEIK J 1987

"The dynamical systems collective"

Chaos: making a new science New-York;: Viking Penguin Inc.

[68] GLEIK J 1990

"Nature's chaos" New-York Viking

[69] GLEIK JAMES 1991

"La théorie du chaos" Ed. Champ Flammarion

[70] GOLDENFELD P and KADANOFF LP 1999

"Simple lessons from complexity" Science 284

[71] GOUATI GILLES 2004

"Visualisation rapide de formes fractales"

Rapport de DEA DISC Université Claude Bernard Lyon I

[72] GOUYET JEAN FRANCOIS 1992

"Physique et structures fractales" ed. Masson

[73] GRASSBERGER P 1981

"On the Hausdorff dimension of fractal attractors" J. Stat Physics 26

[74] GRASSBERGER P and PROCACCIA I 1983

"Measuring the strangeness of strange attractors" Physica 9D

[75] GRASSBERGER P 1986

"Estimating the fractal dimensions and entropies of strange attractors"

Chaos, edited by Holden AV, Princeton , NJ Princeton University Press

- [76] GREBOGI C , OTT E and YORKE JA 1987
"Strange attractors and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics" Science 238
- [77] GREENSIDE HS, WOLF A, SWIFT J and PIGNARRO T 1982
"Impracticality of a box counting algorithm for calculating the dimensionality of strange attractors" Phys Rev A 25
- [78] GUERINE E, TOSANE E and BASKURT A 1999
"Description et représentation de courbes par une approche fractale"
 In Journées AFIG'99 Reims LERI – Université de Reims Champagne Ardenne
- [79] GUERIN ERIC, TOSAN ERIC et BASKURT ATTIK 2003
"Fractal compression of images with projected IFS"
 PCS'2003- Picture coding Symposium Saint Malo France
- [80] GUERIN ERIC, TOSAN ERIC et BASKURT ATTIK 2004
"Interdisciplinary applications of fractal and chaos theory"
 Fractal Approximation and Compression using projected IFS- Romanian Academy Publishing House – Radu Dobrescu and Catalin Vasilescu editors
- [81] GUMOWSKI I and MIRA C 1980
"Dynamique chaotique : transformations ponctuelles – transition ordre-désordre"
 CEPAD UES Editions
- [82] GUTZWILLER MC 1992
"Quantum chaos" Sci. Am. 266
- [83] GUYON E and STANLEY HE (editors) 1991
"Fractals forms"
 Haarlem, the Netherlands: Elsevier & sol; North Holland
- [84] HAGGAR S-G 1982
"Mathematics for computer "
- [85] HAMPEL F, RONCHETTI EM, ROUSSEAU W and STAHEL WA 1987
"Data analysis and self – similar processes" ISI BULL 52
- [86] HAO B-L (editors) 1988
"Direction in chaos, vol II" New-Jersey: World Scientific
- [87] HASTING HM and SUGIHARA G 1993
"Fractal: a user's guide for the natural sciences" New-York; Oxford University Press
- [88] HAVELIN S and NOSSAL R 1984
"Topological properties of percolation clusters" J Phys A Math Gen 17
- [89] HAYES S, GREBOGI C and OTT E 1993
"Communicating with chaos" Phy Rev Lett 70
- [90] HENTSCHEL HE and PROCACCIA I 1983
"The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors"
 Physica D8

- [91] HEINZ OTTO PEITGEN, HARTMUT JÜRGEN and DIETMAR SAUPE 1993
"Chaos and fractal: new frontiers of science" ed. Springer Verlag
- [92] HEWETT TA and BAHRENS RA 1988
"Conditional Simulation of reservoir heterogeneity with fractals" SPE 18326
- [93] HEWETT TA 1986
"Fractal distribution of reservoir heterogeneity and their influence on fluid transport"
 SPE 15386
- [94] HIGUCHI T 1990
*"Relationship between the fractal dimension and the power law index for a time series:
 a numerical investigation"* Physica D46
- [95] HOLDEN AV (editor) 1986
"chaos" Princeton: Princeton University Press
- [96] HOLSCHNEIDER M 1988
"On the wavelet transformation of fractal objects" J. Stat Phys 50
- [97] HOMLGREN R 1994
"A first course in discrete dynamical systems" Springer Verlag - New-York
- [98] HOUGH SE 1995
*"Earthquakes in the Los Angeles metropolitan region: a possible fractal dimension of
 rupture size"* Science 267
- [99] HÛBNER U, KLISCHE W, ABRAHAM B and WEISS CO 1989
"On problems encountered with dimensions calculations"
 Measures of complexity and chaos Edited by Abraham NB, Albano AM,
 PASSAMENTE A and Rapp PE New-York Plenum
- [100] HUTCHINSON J 1981
"Fractal and self-similarity" Indiana Univ J Math 30
- [101] IGNACIO RODRIGUEZ ITURBE and ANDREA RINALDO
"Fractal river basins Chance and Self-organization"
- [102] JENSEN R 1987
"Classical chaos" Am Scientist 75
- [103] KOLWANKAR K.M. and GANGAL A.D, 1996
"fractional differentiability of nowhere differentiable functions and dimension"
 in Chaos 6,
- [104] JULLIEN R and BOTET R 1986
"Aggregation and fractal aggregates" World Scientif , Singapore
- [105] LEWIN R 1993
"La complexité" Paris Inter Edition
- [106] LIEBOVITCH LS 1991
"Chaotic signals and dynamical systems and applications" edited by Thakor

- [107] LIEBOVITCH LS 1998
"Fractals and chaos simplified for the life sciences" New-York : Oxford Univ. Press
- [108] LI WK and MC LEOD AI 1986
"fractional time series modelling" Biometrika 73
- [109] LOVEJOY S and MANDELBROT BB 1985
"Fractal properties of rain and a fractal model" Tellus 37A
- [110] LOWEN SB and TEICH MC 1995
"Estimation and simulation of fractal stochastic point processes" Fractal 3
- [111] LUNDAHL T, OHLEYW J, KAY SM and SIFFERT R 1986
"Fractional Brownian motion: a maximum likelihood estimator and its application to image texture" IEEE Trans Med Imag MI-5
- [112] LURCAT FRANCOIS 1999
"Le chaos" Presses Universitaires de France collection (que sais-je?)
- [113] MANDELBROT B 1967
"Some noises $1/f$ spectrum, a bridge between current and white noise"
 IEEE, Trans Information Theory IT 13
- [114] MANDELBROT B 1977
"Fractals: form chance and dimension" San Francisco: Freeman and Co
- [115] MANDELBROT B 1967
"How long is the coast of Britain? Statistical Self-similarity and fractional dimension"
 Science 156
- [116] MANDELBROT BB 1985
"The fractal geometry of nature" San Francisco: WH Freeman and Co
- [117] MANDELBROT BB 1985
"Self – affine fractals and fractal dimension" Physica Scripta 32
- [118] MANDELBROT BB and VAN NESS JW 1968
"Fractional Brownian motions, fractional noises and applications" SAM Rev 10
- [119] MANDELBROT BB and GIVEN JA 1984
"Physical properties of a new fractal model of percolation clusters" Phy Rev Lett 52
- [120] MANDELBROT BENOIT 1997
"Fractals, hazard et finance" Ed. Champs Flammarion
- [121] MANDELBROT BENOIT 1997
"Les objets fractals" Ed. Champs Flammarion
- [122] MANNEVILLE PAUL 1991
"Structures dissipatives chaos et turbulence" Alea Saclay CEA
- [123] MA SK 1976

"Modern theory of critical phenomena" Mass: W. A; Benjamin

[124] MAYER-KESS G and HÜBLER A 1989

"A time evolution of local complexity and aperiodic perturbations of nonlinear dynamical systems"

Measure of Complexity and Chaos edited by Abraham NB, Albano AM, Passamente A and Rap E New-York Plenum

[125] MAYER-KESS G 1986

"Dimensions and entropies in chaotic systems" New-York Springer Verlag

[126] MEAKIN P 1991

"Fractal Aggregates in Geophysics" Rev Geophys 29

[127] MONTROLL EW and SHLESINGER MF 1984

"On the wonderful world of random walks"

Nonequilibrium phenomena II From Stochastic hydrodynamics

Edited by Montroll EW – Amsterdam North Holland

[128] MOON FC 1992

"Chaotic and fractal dynamics: an introduction for applied Scientists and Engineers"

New-York John Willey & sons

[129] MUGRAV F and MANDELBROT B 1991

"The art of fractal landscapes" IBM Res Develop 35

[130] NICOLIS G and PRIGOGINE I 1989

"Exploring complexity- an introduction" new-York WH Freeman and Company

[131] NORTON A 1982

"Generation and display of geometric fractal in 3-D" in Computer Graphics 16:3

[132] NOTTALE LAURENT 1989

"Fractals and the Quantum theory of space time"

Int. Journal of Modern Physics A Vol 4 N°19

[133] OPPENHEIMER PE 1986

"Real time design and animation of fractal plants and trees" Computer Graphics 20

[134] OSBORN AR and PROVENZAL A 1989

"Finite correlation dimension for stochastic systems with power law spectra"

Physica D 35

[135] OTT E, GREBOGI C and YORKE JA 1990

"Controlling chaos" PHY Rev Lett –'

[136] OTT EDWARD

"Chaos in dynamical systems" Cambridge University Press

[137] A. Oustaloup 1995

"La Dérivation Non Entière", Hermès Paris

- [138] **P**ARKER TS and CHUA LO 1989
"Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems" New-York Springer Verlag
- [139] PEITGEN HO and RICHTER PH 1986
"The beauty of fractals: Images of complex dynamical systems" Springer Verlag
- [140] PEITGEN HEINZ and DIETMAR SAUPE 1988
"The science of fractal images" Springer Verlag
- [141] PERFECT E 1997
"Fractal models for the fragmentation of rocks and soil: a review" Eng Geol 48
- [142] PERFECT E 1991
"Fractal theory applied to soil aggregation" Soil Sci Soc Am. J 55
- [143] PERRIER EMA and BIRD NRA 2002
"Modelling soil fragmentation: the Pore Solid approach"
 Soil & Tillage Research 64 (Elsevier)
- [144] PERRIER E, BIRD N and RIEU M 1999
"Generalized the fractal model of soil structure the PSF approach" Geodema 88
- [145] PIETRONERO I and TOSSATI E (editors) 1986
"Fractals in physics"
 Proceedings of the sixth Triest International Symposium on Fractals in physics
 Newy-York- North Holland
- [146] PRIGOGINE I 1994
"Les lois du chaos" Paris Flammarion
- [147] POOL R 1989
"It is chaos or it is just noise" Science 243
- [148] **Q**IAN H 1999
"An introduction to chaos in nonequilibrium statistical mechanics"
 By J.R. Dorfman, Cambridge University Press Cambridge ISBN: 0521655897
- [149] **R**AND D and YOUNG LS (editors) 1980
"Dynamical systems and turbulence" Berlin : Springer Verlag
- [150] RIEU M and SPOSITO G 1991
"Fractal fragmentation , soil porosity and soil water properties I Theory "
 Soil Sci Soc Am Am. J 55
- [151] RIEU M and SPOSITO G 1991
"Fractal fragmentation soil porosity and soil water properties II , Applications"
 Soil Sci Soc Am Am. J 55
- [152] ROMEIRAS FJ, GREBOGI C, OTT E and DAYWANSA WP 1992
"Controlling chaos dynamical systems" Physica D 58

- [153] ROUSSEL G., 1985
"Intégration et dérivation d'ordre non entie"r, Librairie Blanchal, Paris
- [154] RUDNICK J and GAPSARI G 1987
"The shapes of random walks" Science 237
- [155] RUELLE D 1989
"Elements of differentiable dynamics and bifurcation theory" Boston Academic Press
- [156] RUELLE DAVID 2000
"Hasard et chaos" Odile Jacob
- [157] RUELLE D 1991
"Où le chaos intervient – il?" Pour la Science Hors-Série le Chaos
- [158] SAMKO S.G. , KILBAS A.A. and MARICHEV O.I., 1993
"Fractional Integrals and derivatives, theory and applications"
 Gordon and Breach Sciences , Publisher
- [159] SANDER LM 1987
"Fractal growth" Sci. Am; 256
- [160] SAPOVAL BERNARD 1997
"Universalité des fractals" Ed; Champs Flammarion
- [161] SAUPE D 1988
"Algorithms for random fractals"
 The Science of Fractal images, edited by Peitgen HO and Saupe D. New-york: Springer Verlag
- [162] SCHROEDER M 1991
"Fractals, Chaos, and power laws" New-York: WH Freeman
- [163] SCHUSTER HG 1988
"Deterministic chaos, second edition" New-york VCH Publishers, Inc.
- [164] SHAW R 1981
"Strange attractors, chaotic behaviour, and information flow" Z Naturf 36 A
- [165] SHINBROTT I, GREBOGI C, OTT E and YORKE JA 1993
"Using small perturbations to control chaos" Nature 363
- [166] STEEB WH and VAN WYK MA 1992
"Chaos and fractals: Algorithms and computations"
 Mannheim Wissenschaftsverlag
- [167] STEWART IAN 1982
"Les fractals" Edition BELIN (LPS) 1982

- [168] STROGATZ SH 1994
"Nonlinear Dynamics and chaos, with applications to Physics, Biology Chemistry and Engineering" Reading Massachusetts: Adison Wesley
- [169] THEILER J 1990
"estimating fractal dimension" *J Opt Soc Am A7*
- [170] THOLOT JOELLE 1996
"Extension du module IFS pour une géométrie fractale constructive"
 Thèse de Doctorat Université Claude Bernard Lyon I
- [171] THOLOT JOELLE , ZAIR CHEMS EDDINE , TOSAN ERIC et VANDORPE DENIS
 1997
"Du modeleur classique au modeleur fractal"
 In Lienhardt B. Lacolle, N Szafran Editor
 Journées "Modeleurs géométriques" Grenoble PRCGDM
- [172] THOLOT JOELLE , ZAIR CHEMS EDDINE , TOSAN ERIC et VANDORPE DENIS
 1997
"Modellig fractal shapes using generalization of IFS techniques"
 In Jacques Levy Vechel, Evelyne Lutton et Claude Tricot editors,
 Fractal in engineering
- [173] THORIN ARC and STEWART HB 1986
"Nonlinear dynamics and chaos" John Willey & sons Inc.
- [174] TOSAN ERIC 1996
"Une algèbre de formes fractales utilisant les IFS"
 Thèse de Doctorat Université Claude Bernard Lyon I
- [175] TOSAN ERIC et RONDET MIGNOTTE MARTIE 1999
"Géométrie fractale, Informatique et art plastique"
 In Colloquec "Créativité & Informatique" Rencontres musicales Pluridisciplinaires
 Yan Orlarey editor
- [176] TOSAN ERIC 2004
"Représentation topologique des formes fractales" GTMG 2004 Lyon France
- [177] TOSAN ERIC 2005
"Modélisation géométrique: de l'approche classique à l'approche fractale"
 Université Claude Bernard Lyon I
- [178] TOSAN E, THOLLOT J et ZAIR C 1996
"Modélisation géométrique fractale" in Journées de l'AFIG Dijon France
- [179] TURCOTTE DL 1997
"Fractal and chaos in geology and geophysics" Cambridge University Press
- [180] TYLER B, WEGNER T, PETERSON M and BRANDDERHORST P 1991
"Fractint" Software
- [181] VCSEK T, SHLESINGER SV HAVLIN S and MATSUSHITA M (editors) 1994
"Fractals in natural sciences" Singapore: World Scientific

- [182] VOSS RF 1988
"Fractals in nature :From characterisation to simulation "
 edited by Peitgen HO and Saupe D. New-York: Springer Verlag
- [183] VOSS RF 1989
"Random fractals: Self-affinity in noise, music, mountains, and clouds"
 edited by Aharony A and Feder j. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V.
- [184] WEST BJ and SALK J 1987
"Complexity, organization and uncertainty" Eur J Op Res 30
- [185] WONG P 1987
"Fractal surfaces in porous media"
 Physics and Chemistry of Porous Media, AIP Conference Proceedings New-York
- [186] WORNELL GW 1996
"Signal processing with fractals: a wavelet –based approach"
 New Jersey: Prentice Hall
- [187] YAMAMOTO Y and HUGHSON RL 1993
"Extracting fractal components from time series" Physica D 68
- [188] YOUNG IM and CRAWFORD JW 1991
"The fractal structure of soil aggregates: its measurement and interpretation"
 J. Soil Sci. 52
- [189] ZAIR CHEMS EDDINE et TOSAN E 1994
"Définition de courbes et surfaces lisses ou fractales à l'aide d'IFS"
 In AFIG 94 Toulouse
- [190] ZAIR CHEMS EDDINE et TOSAN ERIC 1996
"Fractal modelling using free form techniques"
 Computer Graphics Forum
 EuroGraphics'96 Conference Issue
- [191] ZAIR CHEMS EDDINE et TOSAN ERIC 1997
"Computer Aided Geometric Design with IFS Techniques"
 In TG Dewey Novak editor
 Fractals Frontiers'97 Denver USA - World Scientific Publishing

WEBOGRAPHIE

SUR LE CHAOS

<http://enls.lanl.gov>

<http://yz.lanl.gov>

<http://xyz.lanl.gov>

SUR LES FRACTALS

<http://classes.yale.edu/fractals/>

<http://www.fractals.issi.cerfim.ch/>

<http://www.fractals.issi.cerfim.ch/>

<http://www.primenet.com/~blitzuw/fractal/>

<http://www.cnam/fr/fractals..htm>

SUR LE CHAOS ET LES FRACTALS

http://dmoz.org/sciences/maths/chaos_and_fractals