

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA- BOUMERDES
FACULTE DES HYDROCARBURES ET DE LA CHIMIE



Département : DEPARTEMENT GEOPHYSIQUE GENIE PARRASISMIQUE
ET PHENOMENES ALEATOIRES

LABORATOIRE DE RECHERCHE SUR PHYSIQUE DE LA TERRE

MEMOIRE

Présenté par :

Mr. BOUTERAI AHMED.

EN VUE DE L'OBTENTION DU TITRE DE

MAGISTER EN GEOPHYSIQUE.

Option : Géophysique

THEME

**Application de la transformée en ondelettes continue pour le
traitement des données sismiques**

Soutenu devant le jury :

Dr .Baddari kamel

Professeur (UMBB)

Président

Dr .Bouguern Abderrahmane

Maître de Conférences A(UMBB)

Rapporteur

Dr.M.Benaissa zahia

Maître de Conférences A(USTHB)

Examineur

Dr .Boudella Ammar

Professeur (USTHB)

Examineur

Dr .Sichaib Mohamed

Maitre de conférences A(UMBB)

Examineur

Boumerdès 2010

Abstract

Seismic prospecting is used to obtain structural and geological information. The seismic reflection is the method the more used in the setting of the prospecting of the hydrocarbons. This method, like all geophysical prospecting method, includes three main phases: acquisition data, processing data and the interpretation. The elimination of noise such as the multiple and the surface waves in the pre-stack data is generally done separately, which decreases the fidelity of the signal and the data processing efficiency.

Ground roll is an old problem in land-based seismic field records. It is a low frequency and high amplitude noise. Several processing techniques are used to filter it. The main one is F-K filtering. F-K filtering uses Fourier transform a technique that assumes that the basic seismic signal is stationary and the events are plane waves.

A new alternative to the Fourier transform is the wavelet transform, which decomposes a function using basis functions that, unlike the Fourier transform, have finite extent in both frequency and time.

Continuous wavelet transform allows more effective time-frequency analysis and filtering. The main interest of this method is to apply the filter in a well-chosen time band without affecting the other part of the seismic signal, which leads to the automatic detection and separation of the different waves present in the trace. Considering the non-stationary nature of seismic signals, the potential of wavelet transform as a multi-resolution tool in attenuating seismic coherent noise such as ground-roll. Using synthetic and field data sets, we compare the performance of wavelet filtering and f-k filtering to attenuate ground roll. It will be shown that the wavelet filtering method is superior to f-k filtering in the sense that little filtering noise (such as the Gibbs phenomena) is introduced and primaries are better preserved.

Multiple reflections constitute one of the most troublesome forms of coherent noise in seismic exploration, especially in marine surveys. There are many approaches to attenuating or suppressing multiples, but none can remove all multiple reflections under all conditions. We have developed a new method to attenuate multiple reflections using continuous wavelet transform. Multiples attenuation techniques have to be based on some difference between the multiples and the primary reflections. The two major differences that are exploited are firstly velocity, and secondly the fact that multiples are periodic sequences of events, and hence is predictable, while the primaries are non-periodic. For short period multiples, velocity differences may be insufficient for much attenuation, and the process has to be based on the multiple's periodicity. We tested this method to both synthetic and real data and successfully removed this noise.

The essential part of the interpretation of vertical seismic profiles (VSP) is the separation of the upgoing and downgoing waves. The wavelet transform method is used to isolate downgoing (by first aligning them, applying a wavelet transform, isolate the wavefield, applying wavelet transform reverse and shifting back). The effectiveness of the process has been clearly demonstrated through the VSP synthetic and VSP field data sets also show separation of the up-going and down-going wave field. Its success with the upgoing waves depends on the degree of coherency of events in the VSP record and when the motives corresponding to the waves to eliminate are distinct and don't ride in the time - scale domain.

Keywords: Ground-roll, Multiples, VSP, Wavelet transform, Fourier transform, Frequency-time domain.

ملخص

الاستكشاف الزلزالي يساعدنا للحصول على معلومات بنيوية جيولوجية. الاستكشاف الزلزالي الانعكاسي هي الطريقة الأكثر استعمالاً في التنقيب عن المحروقات. كسائر الطرائق الجيوفيزيائية فهي تشمل ثلاث أطوار: جمع المعطيات معالجتها ثم ترجمتها.

إن معالجة المعطيات يعتمد أساساً على نزع الضجيج مثل الانعكاسات المضاعفة والأمواج السطحية فمثلاً الأمواج السطحية تعمل على حجب الانعكاسات الأولية مما يصعب مهمة ترجمة الصور الزلزالية النهائية.

في الجزء الأول من هذا العمل نقوم بطرح طريقة جديدة لنزع وتصفية المعطيات من الأمواج السطحية. خلافاً عن الطرق الأخرى المستعملة كمرشح FK والذي يعمل بواسطة محول فورييه تحت فرضية أن تكون الإشارة مستقرة وعبرة عن موجة مسطحة.

المحول بالموجات المستمرة يعد أكثر دقة في تحليله الزمني و التواتري هذه المصفة تعمل على فصل الضجيج في مجال زمني معني دون التأثير عن الأجزاء الأخرى. النتائج التطبيقية بينت أن هذه التقنية هي الوسيلة الفعالة لتصفية الإشارة الزلزالية من الضجيج السطحي (الأمواج السطحية) على غرار محول فورييه الذي يعمل فقط على الإشارات المستقرة.

الانعكاسات المتعددة من بين أهم الأمواج التي تعمل على تشويش المعطيات فهناك طرق عدة بواسطتها يمكن تخميد هذا التشويش. هذه التقنية تركز على بعض الفروق الموجودة بين الانعكاس الأولي والانعكاسات المتعددة من بين هذه الفروق فرقين أساسيين هما: الأول السرعة والثاني هو إن الانعكاس المتعدد دوري وتوقعي في حين أن الانعكاس الأولي ليس دوري لهذا السبب قمنا بطرح طريقة جديدة هي محول بالموجات المستمرة وقمنا بتطبيقها على المعطيات لإثبات نجاح الطريقة في نزع التشويش.

إن ترجمة المقطع الزلزالي العمودي PSV يعتمد أساساً على تفريق حقل الأمواج النازلة والصاعدة. فطريقة المحول بالموجة لفصل هذين الحقلين يكون: أولاً بجعل حقل الأمواج النازلة أفقياً لأنه أكثر طاقة من حقل الأمواج الصاعدة، تطبيق المحول بالموجات على الأجزاء المراد فصلها ثم بعدها تصحيح وضعية الأمواج الصاعدة. إن نجاح هذه الطريقة مبني أساساً على جودة وتجانس المعطيات إضافة إلى التمايز بين الأجزاء المراد فصلها عن غيرها. هذه الطريقة طبقت على معطيات تجريبية وحقيقة وأعطت نتائج مقبولة.

الكلمة المفتاح:

الأمواج السطحية، الانعكاسات المتعددة، المقطع الزلزالي العمودي PSV، المحول بالموجات المستمرة، محول فورييه، تحليل الزمني و التواتري

Résumé

L'onde de surface est un vieux problème présent dans les enregistrements sismiques. C'est un bruit de basse fréquence et de forte amplitude. Plusieurs techniques sont utilisées pour le filtrer. La principale est la transformée FK. Elle utilise la transformée de Fourier, une technique qui impose que le signal sismique soit stationnaire et que les événements soient des ondes planes.

La transformée en ondelettes continue propose une nouvelle approche. Le signal sismique est alors décomposé sur des fonctions de bases qui contrairement à la transformée de Fourier, ont une extension finie en temps et en fréquence. Le signal ne doit pas forcément être stationnaire.

Cette transformée permet d'effectuer une analyse et un filtrage plus rigoureux en temps-fréquence. L'intérêt principal de cette méthode est de pouvoir filtrer dans une zone temporelle bien choisie du signal sismique et sans modifier le reste.

Les multiples sont considérés comme un bruit gênant et difficile à éliminer. Les techniques couramment utilisées pour le filtrer sont : la déconvolution prédictive et le filtre (F-K) qui s'avèrent quelquefois inefficaces. Dans le but de surmonter les insuffisances rencontrées, on a introduit un nouveau outil mathématique performant et puissant qui est la Transformée en Ondelette Continue « TOC » (Morlet 1982).

La séparation des ondes montantes et descendantes est basée dans les différentes méthodes de séparation, sur le fait que les deux champs d'ondes ont des vitesses apparentes de signe opposé, mais il existe d'autres méthodes de séparation non basées sur le critère de vitesse apparente notamment les filtres de polarisation pour l'extraction (des ondes P et des ondes S), et la SVD (singular values decomposition). Dans ce travail, nous proposons une nouvelle technique de séparation par la transformée en ondelettes continue.

Les résultats ont montré que cette technique est un bon moyen de filtrer le ground roll, les multiples et la séparation du champ d'onde d'un profil sismique vertical. Elle peut être implémentée en utilisant un algorithme dont la compilation est aussi efficace que la transformée de Fourier rapide.

Mots clés : Onde de surface, Multiples, PSV, Transformée en ondelettes continue, Transformée de Fourier, Domaine temps-fréquence.

Remerciements



Au terme de ce travail, j'exprime ma gratitude au bon DIEU de m'avoir-donner la force et la patience aux quelles sans ces fabuleuses valeurs on n'aura puisé de nouvelles forces.

Mes sincères remerciements s'adressent à mon promoteur M^r A.BOUGUERN pour sa disponibilité et son orientation.

Je remercie les membres du jury qui mon fait l'honneur de juger ce modeste travail, ainsi qu'aux enseignants du département de géophysique (FHC).

Je tiens à remercier M^r M.MEZAHDIA, ingénieur géophysicien à SONATRACH EXPLO HASSI MESSAOUD.

J'exprime également ma vive gratitude à l'ensemble des ingénieurs de l'ENAGEO et surtout à Mr. Z .BENSAID.et

M^r. F. BABAIA pour leurs aides et leurs précieux conseils.

Mes remerciements s'adressent à ceux et celles qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.



Table des matières

Introduction générale.....	1
PARTIE THEORIQUE	3
Chapitre I : Transformée de Fourier	3
I.1 Définition de la transformée de Fourier :.....	3
I.2 Les limites de la transformée de Fourier :.....	4
I.3.1 Transformée de Fourier à Court Terme	7
a) Définitions	7
b) Quelques Exemples Simples.....	8
Exemple : <i>TFCT</i> de signaux mono et multi composantes.....	11
Exemple : Utilisation de la phase pour la réallocation	16
I.3.2 Principe d'incertitude.....	16
Choix de la Fenêtre	18
2.3.4 Limites de la TF à fenêtre glissante.....	20
Chapitre II : Transformation en Ondelettes Continue (TOC)	21
II.1. Historique de la transformée en ondelettes continue:	21
II.1.1. Aperçu sur les ondelettes	21
II.1.2 Propriétés des ondelettes	22
II.2 Transformée en ondelettes continue.....	23
II.2.1 Définition.....	23
II.2.2 Quelques propriétés de la transformée en ondelettes	23
a-Conservation de l'énergie et formule d'inversion	23
b-Linéarité, translation et dilatation	24
c-Noyau reproduisant	25
II.3 Transformée inverse	25
II.4. Exemples d'ondelettes.....	27
II.4.1 ondelettes continues	28
a-Ondelette de Morlet	28
b-Chapeau mexicain.....	29
II.4.2 Ondelettes orthogonales.....	30
a-Ondelette de Haar	30
II.5. Premiers exemples de transformées en ondelettes.....	30
II.5.1 Analyse temps-fréquence et temps-échelle :	31
a-Analyse Temps_ Fréquence :	31
b-Aspects Temps_ Echelle :	31
II.5.2. Exemple d'un chirp.....	31
II.5.3. Distribution de Dirac	32
II.5.4 Succession de deux sinusoïdes	33
II.5.5. Exemples de représentations temps -fréquence d'un signal sismique réel	34
Comparaison :	35
II.6 Algorithmes de calcul numérique de la transformation en ondelettes.....	35
II.6.1 Calcul par intégrale directe.....	35
II.6.2 Calcul par produit de convolution.....	35
II.6.3 Calcul par l'algorithme FFT	36

II.6.4 Discussion sur les algorithmes.....	36
II.7. Effet de bords.....	37
II.7.1. Illustration de l'effet de bords.....	38
II.8. Facteur d'échelle minimal	40
II.9 Choix des ondelettes.....	40
II.10. La discrétisation de la transformée en ondelettes continue	41
II.11 Le scalogramme et comparaison entre la TFCT et la TOC.....	42
 PARTIE APPLICATION :	 44
 Chapitre III : Filtrage par de la transformée en ondelettes continue	 44
 III.1. Application sur des modèles synthétiques.....	 44
Introduction	44
III.1.1 Principe théorique du filtrage dans le plan temps- fréquence.....	44
a-Etude du noyau reproduisant :	47
III.1.2 Les tests sur des signaux synthétiques	49
III.1.2.1. Utilisation de la transformée en ondelettes continue inverse	49
III.1.2.2.L'effet de la forme du masque vis- à vis de la reconstruction	52
III.1.3. Atténuation de l'onde de surface (ground roll) par la TOC.....	54
III.1.3.1 Données synthétiques.	54
III.1.3.2. Application de la méthode	55
Conclusion.....	58
 III.1.4.Atténuation des multiples par la transformée en ondelette continue	 59
Introduction	59
III .1.4.1.Cas d'un modèle synthétique.....	60
III.1.4.2 Etapes principales de la méthode à parcourir	61
Conclusion.....	66
 III.1.5. Application de la TOC pour la séparation du champ d ondes d'un profil sismique vertical (PSV).....	 66
Introduction	66
III.1.5.1.Modèle synthétique.....	66
III.1.5.2.Application de la méthode	67
Conclusion.....	72
 III.2 : Filtrage dans le plan temps- échelle des données sismiques réelles.	 73
III.2.1 Filtrage de l'onde de surface (ground roll)	73
Introduction	73
Préparation des données réelles.....	73
III.2.1 .1.Filtrage de l'onde de surface par la transformation FK.....	74
1Rappels théoriques sur la transformation de Fourier à deux dimensions (F-K)	74
2Filtrage dans le domaine FK	74
•Résultats du filtrage FK.....	76
Conclusion.....	76
 III.2.2.Filtrage de l'onde de surface par la transformée en ondelettes continue	 80

Conclusion.....	88
III.3.1 Application de la transformée en ondelettes continue pour l'atténuation des multiples	91
Introduction	91
III.3.1.1.Application de la méthode	91
Conclusion.....	96
III.2.5 Séparation du champ d'ondes d'un Profil Sismique Vertical (PSV) par de la transformée en Ondelette Continue.....	97
Introduction	97
III.2.5.1.Application de la Transformée en ondelette continue.....	98
Conclusion.....	102
Conclusion générale	104
Bibliographie.....	106
Annex.....	a

Liste des figures

Fig.I.1 Deux sinusoïdes différentes ayant le même spectre d'amplitude	6
Fig.I.2 Principe de transformée de la Fourier à court terme.....	7
Fig.I.3 Le module et la phase de la transformée de Fourier à court terme d'une sinusoïde.....	9
Fig.I.4 Module de la transformée de Fourier à court terme d'un chirps.....	10
Fig.I.5 Transformée de Fourier à court terme d'un chirp à enveloppe.....	13
Fig.I.6 Transformée de Fourier à court terme d'un spectre d'amplitude du signal mono composante.....	14
Fig.I.7 Transformée de Fourier à court terme de la somme deux chirps à modulation croissante.....	14
Fig.I.8 Transformée de Fourier à court terme de la somme deux chirps l'un à modulation croissante et l'autre décroissante.....	15
Fig.I.9 TFCT de la somme de deux chirps (cas de deux motifs non séparables).....	15
Fig.I.10 Utilisation de la phase pour réallocation.....	16
Fig.I.11 L'effet de la résolution temporelle sur l'étirement des motifs.....	17
Fig.I.12 Différentes pavages du plan temps- fréquences.....	17
Fig.I.13 L'effet de la taille de la fenêtre sur l'interférence entre les composantes du signal.....	18
Fig.I.14 L'effet de la taille de la fenêtre sur la localisation temps fréquence.....	18
Fig.I.15 Limites de la TF à fenêtre glissante.....	18
Fig.II.1 Ondelette de Morlet et sa transformée de Fourier.....	28
Fig.II.2 Partie réelle d'ondelette de Morlet avec une version délatée.....	28
Fig.II.3 Partie réelle du chapeau mexicain et son spectre d'amplitude.....	29
Fig.II.4 L'ondelette de Haar et sa spectre d'amplitude.....	30
Fig.II.5 Module de la transformée en ondelettes d'un chirp.....	32
Fig.II.6 Le module et la phase de la transformée en ondelettes d'un Dirac.....	32
Fig.II.7 Comparaison entre la transformée en ondelettes et TFCT	33
Fig.II.8 Représentations temps -fréquence d'un signal sismique réel.....	34
Fig.II.9 Extrapolation d'une fonction afin d'éviter les problèmes de bords.....	37
Fig.II.10 Zones où les coefficients d'ondelette ne seront pas calculés de façon exacte...	38
Fig.II.11 Illustration de l'effet de bords (cas TO d'un signal fini).....	39
Fig.II.12 Illustration de l'effet de bords (cas TO d'un signal infini).....	39
Fig.II.13 Ondelettes discrétisées pour différentes échelles.....	40
Fig.II.14 Réseau d'échantillonnage dyadique dans le plan temps- échelle.....	42
Fig.II.15 Comparaison entre TFCT et TO.....	43
Fig.III.1 Filtrage dans le plan temps- échelle	46
Fig.III.2 Noyau reproduisant de l'ondelette de Morlet.....	48
Fig.III.3 Représentation temporelle du signal $s(t)$ et ces composantes x_1, x_2 et x_3	49
Fig.III.4 Représentation fréquentielle du signal $s(t)$ et ces composantes x_1, x_2 et x_3	50
Fig.III.5 Filtrage temps- fréquence d'un signal $s(t)$ et les différents motifs obtenus.....	51
Fig.III.6 Reconstruction du signal $s(t)$ et ces composantes x_1, x_2 et x_3 après le filtrage dans le plan temps -échelle.....	52
Fig.III.7 L'effet de la forme du masque sur les résultats de filtrage.....	53
Fig.III.8 Modèle géologique pour générer l'onde de surface.....	54
Fig.III.9 Section sismique synthétique avec l'onde de surface.....	55

Fig. III.10 Organigramme pour filtrer l'onde de surface.....	56
Fig. III.11 Application de TOC pour filtrer l'onde de surface.....	57
Fig. III.12 Section sismique synthétique après filtrage de l'onde de surface.....	58
Fig. III.13 Model géologique tabulaire.....	60
Fig. III.14 Section sismique synthétique avec multiples.....	61
Fig. III.15 Section sismique après correction dynamique avec loi des multiples.....	62
Fig. III.16 L'application de la TOC pour atténuer les multiples sur la trace n°1.....	63
Fig. III.17 Section sismique sans multiples avant correction dynamique inverse.....	64
Fig. III.18 Section sismique sans multiples après correction NMO.....	64
Fig. III.19 Organigramme pour filtrer les multiples par la TOC.....	65
Fig. III.20 Modèle géologique pour générer un PSV synthétique.....	67
Fig. III.21 Profil sismique vertical synthétique.....	67
Fig. III.22 Algorithme pour séparer les champs d'un PSV.....	68
Fig. III.23 Section PSV avec champ d'onde descendant aligné.....	69
Fig. III.24 Séparation du champ d'onde d'un PSV par TOC sur trace n°6.....	70
Fig. III.25 Champ d'onde descendant filtré par la transformée en ondelettes.....	71
Fig. III.26 Champ d'onde montant d'un PSV.....	72
Fig. III.27 Les données réelles avec l'onde de surface.....	73
Fig. III.28 Filtre fréquence- nombre d'onde.....	75
Fig. III.29 Application d'un mute sur le module de la transformée de Fourier 2D.....	77
Fig. III.30 Collection des données réelles avant et après filtrage de l'onde de surface.....	78
Fig. III.31 Suppression du ground roll après le filtrage FK (application sur les données réelles).....	79
Fig. III.32 Délimitation de la zone de l'onde de surface.....	81
Fig. III.33 L'amplitude maximale et moyenne du module de la TOC d'une trace.....	81
Fig. III.34 Trace 16 et son module de TOC avant et après filtrage.....	83
Fig. III.35 Trace 40 et son module de TOC avant et après filtrage.....	84
Fig. III.36 Résultat du filtrage de l'onde de surface à l'aide du TOC.....	85
Fig. III.37 Résultat du filtrage de l'onde de surface à l'aide du TOC.....	86
Fig. III.38 Procédure du filtrage dans plan temps – échelle.....	87
Fig. III.39 Le signal enlevé à l'aide des deux filtres FK et TOC.....	89
Fig. III.40 Résultat du filtrage de l'onde de surface à l'aide du TOC.....	90
Fig. III.41.a La loi de vitesse des multiples déterminée par logiciel ProMax.....	92
Fig. III.41 Les étapes de filtrage des multiples par la transformée en ondelettes.....	93
Fig. III.42 Collection CDP avant et après correction dynamique avec la loi vitesse des multiples et la trace somme.....	94
Fig. III.43 Exemple de filtrage des multiples par TOC pour la trace n°25.....	95
Fig. III.44 Collection CDP après atténuation des multiples avant correction NMO.....	96
Fig. III.45 Données réelles brutes d'un PSV.....	97
Fig. III.46 Données réelles brutes d'un PSV après horizontalisation.....	98
Fig. III.47 Représentation en 3D de la TOC d'une trace VSP.....	99
Fig. III.48 Exemple de séparation du champ montant et descendant d'onde par la TOC.....	100
Fig. III.49 Un PSV avec ondes descendantes alignées et un champ d'ondes montantes après séparation par TOC.....	101
Fig. III.50 VSP brut et un champ d'ondes montantes.....	102
Fig. III.51 Les étapes de séparation des champs d'onde d'un PSV par la transformée en ondelettes continue.....	103

Introduction générale

La sismique réflexion est la méthode la plus utilisée dans le cadre de la prospection des hydrocarbures. Cette méthode, comme toute méthode de prospection géophysique, comporte trois phases principales: l'acquisition des données, le traitement de l'information et l'interprétation.

L'enregistrement sismique comporte différents événements : le signal utile, les bruits organisés et les bruits aléatoires. Les événements qui intéressent les spécialistes sont essentiellement les réflexions obtenues à partir des interfaces séparant différents milieux géologiques, qui se manifestent sur l'enregistrement sismique sous la forme d'indicatrices hyperboliques.

La séquence de traitement a pour but de filtrer les enregistrements sismiques entachés de bruits afin d'obtenir des documents faciles à interpréter. Les documents traités servent à établir des cartes structurales qui mettent en évidence une pseudo-image du sous-sol. La phase de traitement est elle-même constituée de plusieurs niveaux. Celui dans lequel nous nous situons est le niveau de pré traitement. Ce niveau vise à extraire à partir des tirs élémentaires les ondes réfléchies en filtrant les événements parasites. L'interprétation des données sismiques est parfois difficile car les informations réellement intéressantes ne sont pas évidentes mais masquées par le bruit, telle que l'onde de surface et les réflexions multiples.

L'objectif principal de ce travail est de montrer que la transformée en ondelettes peut contribuer à l'analyse et au traitement des signaux sismiques. En effet, au cours de ce travail nous nous intéressons, particulièrement :

- au filtrage de l'onde de surface (ground roll).
- à l'atténuation des multiples.
- à la séparation du Champs d'ondes d'un profil sismique vertical (PSV).

Pour arriver à ces objectifs, nous avons dû concevoir des algorithmes et des programmes informatiques.

Les principaux outils de filtrage de données sismiques couramment utilisés par les géophysiciens sont les filtres en fréquence et les filtres en vitesse apparente, ils permettent de sélectionner ou de rejeter les événements en fonction d'un critère simple (fréquence ou vitesse apparente) facilement accessibles, ces outils sont très performants et dans un bon nombre de cas fournissent des résultats très satisfaisants. Il existe cependant un certain nombre de cas où ils sont nettement moins performants. Cette analyse montre vite des limites justifiées dès lors que l'on sort du cadre rigoureux de sa définition : le domaine des signaux stationnaires d'énergie finie. Ces outils ne s'adaptent pas pour les signaux non stationnaires.

Dans le but de pallier à cette insuffisance, on a introduit un nouvel outil mathématique performant et puissant qui est la Transformée en Ondelette Continue « TOC » (Morlet 1982). Cet outil convient bien pour le traitement des signaux non stationnaires et permet la localisation du signal en temps-fréquence ou temps-échelle (scalogramme) ce qui n'est pas le cas des méthodes classiques.

Avant la transformée en ondelette, une solution était mise en place intuitivement au milieu du siècle, correspondant aux analyses de Fourier à fenêtre glissante (TFFG) ou Fourier à court terme introduites dès 1945 par D. Gabor avec l'idée d'un plan temps- fréquence, où le temps deviendrait un paramètre complémentaire de la fréquence. Ces méthodes montrent qu'une localisation exacte conjointe en temps et en fréquence est impossible, et introduisent l'idée d'une base discrète, minimale, traduisant en quelques coefficients la répartition d'énergie du signal dans le plan temps- fréquence ainsi mis en évidence. À ces approches s'est ajoutée la transformée en ondelettes, existant à l'état latent aussi bien en mathématiques qu'en traitement du signal, mais dont le véritable essor a commencé au début des années 1980. Cette théorie est née de l'analyse des signaux sismiques haute résolution. En 1984, P. Goupillaud, A. Grossmann et J. Morlet poussés par les exigences croissantes de la recherche d'hydrocarbures proposent une méthode de reconstruction des signaux sismiques permettant une restauration des hautes fréquences à l'aide de la représentation temps- fréquence des signaux. Cet outil puissant a ensuite été très étudié et développé, tant du point de vue pratique que du point de vue théorique, par des personnes telles Y. Meyer, I. Daubechies, S. Mallat, P.G. Lemarié, JP. Antoine ou R. Murenzi etc....., pour aboutir à la théorie de l'analyse par ondelettes, telle qu'elle existe aujourd'hui.

Dans ce travail, la transformée en ondelettes continue (TOC) sera utilisée comme un instrument de traitement et d'analyse. L'ossature de ce mémoire est constituée de trois chapitres :

Le chapitre 1, s'attache à présenter une courte introduction sur l'analyse par transformée de Fourier et par celle de Fourier à fenêtre glissante ainsi que leurs limites. L'analyse de Fourier, outil indéniable en traitement du signal y est étudiée. Rappelant les principales propriétés de cette transformation et quelques exemples classiques en exposant leurs avantages et inconvénients.

Le chapitre 2, expose dans un premier temps quelques notions théoriques sur la transformation en ondelettes continue et ses principales propriétés. Les éléments de base sont illustrés par des exemples Ce formalisme permet l'analyse fonctionnelle, plus précisément, la caractérisation de la régularité locale des fonctions. Une telle régularité ne peut être caractérisée par la transformée de Fourier. Puis nous abordons le choix des ondelettes mères et on passe aux algorithmes de calcul numérique de la TOC. On s'intéresse aussi à l'effet de bords pour les calculs des signaux discrets, de longueur finie et on propose une solution. On achève ce chapitre sur la transformation en ondelettes avec le choix des paramètres de définition pour l'ondelette mère de Morlet.

Dans le **Chapitre3**, nous nous intéressons à l'utilisation de la (TOC) en traitement des données sismiques Nous allons montrer pourquoi la (TOC) peut être considérée comme un outil performant et puissant dans le domaine de l'analyse et du traitement des données sismiques ? Cette nouvelle représentation du signal dans le domaine (temps- fréquence ou temps- échelle) permet un filtrage et une analyse plus rigoureuse, chose que les techniques classiques ne peuvent pas réaliser.

Dans la première partie nous avons étudié l'apport de cette nouvelle approche du filtrage et de la séparation du champ d'ondes par la TOC en l'appliquant sur des modèles synthétiques. Dans la deuxième partie nous appliquons ces techniques sur les données réelles. Dans le but de justifier l'intérêt de l'analyse par ondelettes.

PARTIE THEORIQUE

Chapitre I : Transformée de Fourier

I.1 Définition de la transformée de Fourier :

Le mathématicien Joseph Fourier a introduit en 1982, l'idée que toute fonction périodique peut être décomposée en une somme de sinus et de cosinus. Cet énoncé qui semble simple au premier abord a bouleversé les mathématiques.

La transformée de Fourier est un outil mathématique qui permet de projeter un signal sur une base de fonctions sinus et cosinus de différentes fréquences. Le signal transformé est la représentation fréquentielle du signal de départ. La notation exponentielle complexe permet grâce à la formule de Moivre $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ d'exprimer plus simplement la transformée de Fourier. Par définition, la transformée de Fourier d'une fonction continue $s(t) \in L^1(\mathbb{R})$ est :

$$\hat{s}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-iwt} dt \quad (I.1)$$

Où $w = 2\pi\nu$ est la pulsation et ν la fréquence.

La transformée de Fourier n'est pas inversible dans $L^1(\mathbb{R})$ car cet espace n'est pas invariant par transformée de Fourier. L'espace pour définir et inverser la transformée de Fourier est l'espace $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions de carré intégrable.

En effet, à l'usage de la théorie des distributions, la transformée de Fourier peut s'étendre aux distributions tempérées, en particulier aux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$.

La caractéristique primordiale de cette transformée est sa réversibilité (sous certaines conditions), ainsi on a :

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}(w) e^{+iwt} dw \quad (I.2)$$

Une autre propriété très intéressante est l'équivalence entre convolution dans l'espace de départ (temporel ou fréquentiel) et multiplication dans l'espace d'arrivée (théorème de Plancherel). Ainsi, on a :

$$s(t) * g(t) = \hat{s}(w) \cdot \hat{g}(w) \text{ et } s(t) \cdot g(t) = \frac{1}{2\pi} \hat{s}(w) * \hat{g}(w) \quad (I.3)$$

Le passage à une transformée bidimensionnelle est donné par l'équation ci-dessous :

$$\hat{s}(w_1, w_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t_1, t_2) e^{-i(w_1 t_1 + w_2 t_2)} dt_1 dt_2 \quad (I.4)$$

La transformée de Fourier discrète permet d'appliquer la transformée de Fourier aux signaux numériques selon l'équation (I.5). Pour toute série numérique $s(n)$ à N éléments, sa transformée de Fourier discrète $s(k)$ est définie par :

$$\hat{s}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-2i\pi k \frac{n}{N}} \quad (I.5)$$

En deux dimensions, cette équation devient :

$$\hat{s}(k, l) = \frac{1}{N} \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} s(n, m) e^{-2i\pi k \frac{n}{N}} e^{-2i\pi l \frac{m}{M}} \quad (I.6)$$

La transformée de Fourier permet de décrire le comportement fréquentiel d'un signal : le complexe $\hat{s}(\nu)$ s'interprète comme la corrélation entre le signal $s(t)$ et la fréquence pure ν . le module de $\hat{s}(\nu)$ peut s'interpréter comme le poids que représente la fréquence ν dans le signal $s(t)$.

I.2 Les limites de la transformée de Fourier :

La transformée de Fourier peut être vue comme une représentation à base des sinusoïdes qui sont bien localisées en fréquences, mais pas en temps (ou espace) car leur support est infini (c'est une conséquence de leur périodicité). Donc les inconvénients de l'analyse par la transformée de Fourier proviennent du fait que les fonctions analysantes sont à support de longueur infinie, ce qui ne correspond pas à un signal physique qui est à support temporel fini.

On peut en particulier résumer les limites de la transformée de Fourier dans les points suivants :

✚ Pour calculer $\hat{s}(\nu)$, il faut connaître l'ensemble des valeurs de $s(t)$ sur $\mathcal{R}$, de même que, la reconstitution de $s(t)$ à partir de $\hat{s}(\nu)$ dépend de l'ensemble des valeurs de $\hat{s}(\nu)$ sur $\mathcal{R}$. Or, dans la pratique, on ne peut connaître une fonction sur un temps de longueur infinie.

✚ Le principal problème de la transformée de Fourier est son manque de résolution temporelle. Cela signifie simplement que si on est effectivement capable de détecter toutes les fréquences qui apparaissent dans un signal, on est en revanche incapable de déterminer à quel moment elles se produisent dans le signal. Car si on est en mesure d'interpréter le module de la transformée, il en est tout autrement de la phase qui est difficile à analyser. Pour expliquer la perte de localisation temporelle : Considérons un signal $s_1(t)$ composé d'une succession de deux sinusoïdes de fréquences différentes, la première étant sinusoïde d'une fréquence de 8Hz et la deuxième de 35Hz et un autre signal $s_2(t)$ qui est la somme des deux sinusoïdes.

$$s_1(t) = \begin{cases} \cos(2\pi\nu_1 t) & 0 \leq t < 128 \\ \cos(2\pi\nu_2 t) & 128 < t \leq 256 \end{cases} \quad (I.7)$$

$$s_2(t) = \cos(2\pi\nu_1 t) + \cos(2\pi\nu_2 t) \quad (I.8)$$

La transformée de Fourier indique le spectre d'amplitude pour les deux cas, mais ne donne aucune information concernant le moment d'apparition de certaines fréquences, (voir Fig. (I.1)). L'analyse en fréquence ne nous informe pas sur la localisation temporelle du changement du régime dans le signal.

✚ La transformation de Fourier ne nous permet pas de décrire des phénomènes locaux. Par exemple elle donne des résultats de régularité globale (appartenance à un espace de Sobolev); en revanche une fonction peut être très régulière localement et peut n'avoir aucune régularité globale: c'est le cas de la fonction de Heaviside qui est constante sur $\mathcal{R}_*^+$, sur $\mathcal{R}_*^-$ et qui n'est dans aucun espace de Sobolev d'ordre positif.

Il est également beaucoup plus difficile de détecter des irrégularités locales. Une fois que l'on sait qu'une fonction n'est pas régulière, on ne peut pas en dire plus: (où se trouve la singularité, à quel type de singularité a-t-on affaire y a-t-il d'autres singularités?) Sont autant de questions auxquelles la transformation de Fourier ne peut pas répondre. De même l'appartenance d'une fonction à la classe des fonctions m fois continûment dérivable est plus difficile à caractériser: on obtient assez facilement des conditions suffisantes mais il est plus difficile de trouver des conditions nécessaires. Savoir si une fonction est localement de classe C_m est quasiment impossible également.

Quoique parfaite du point de vue mathématique, la transformée de Fourier conduit bien souvent à des difficultés d'interprétation physique. En effet, pour obtenir la valeur $s(n)$ associée à une fréquence donnée, il faut connaître le signal sur une durée infinie. Il en est de même pour la transformation inverse qui nécessite la connaissance du spectre complet du signal. Si ces contraintes semblent normales au mathématicien, il n'en est pas de même pour le physicien. En effet, dans la pratique, il est *impossible de connaître toute l'histoire d'un signal*.

- Un signal d'énergie finie se trouve ainsi décomposé en une combinaison linéaire d'éléments constitutifs d'énergie infinie.
- En fait, la transformation de Fourier ne permet pas de concilier la description fréquentielle et la localisation dans le temps. Dans le cas général, on peut se référer à l'inégalité d'Heisenberg-Gabor qui stipule que le produit bande passante support temporel du signal est minoré par l'énergie du signal au facteur $\frac{1}{4\pi}$ près.

$$\Delta t \Delta \nu \geq \frac{E_x}{2\pi} \quad (I.9)$$

Ce qui signifie dans le cas pratique, qu'il est impossible d'obtenir un signal dont les supports temporel et fréquentiel soient simultanément arbitrairement petits. En effet, la dimension du support temporel est inversement proportionnelle à la dimension du support fréquentiel et inversement.

Dû à l'absence de l'information temporelle, dans les applications pratiques, la transformée de Fourier peut induire des confusions, dans le cadre d'un processus d'identification des signaux non stationnaires.

La définition de la transformation de Fourier est à l'origine d'un inconvénient majeur. En effet, le résultat obtenu par cette transformation est soit une fonction du temps soit une fonction de la fréquence ce qui interdit tout accès à une notion telle que la fréquence instantanée.

Si on souhaite étudier un signal non stationnaire et détecter les variations de fréquence en les associant à un instant donné, la transformation de Fourier est sans intérêt. Pour répondre à cette nouvelle exigence, il est fait appel à des outils d'analyse temps fréquence.

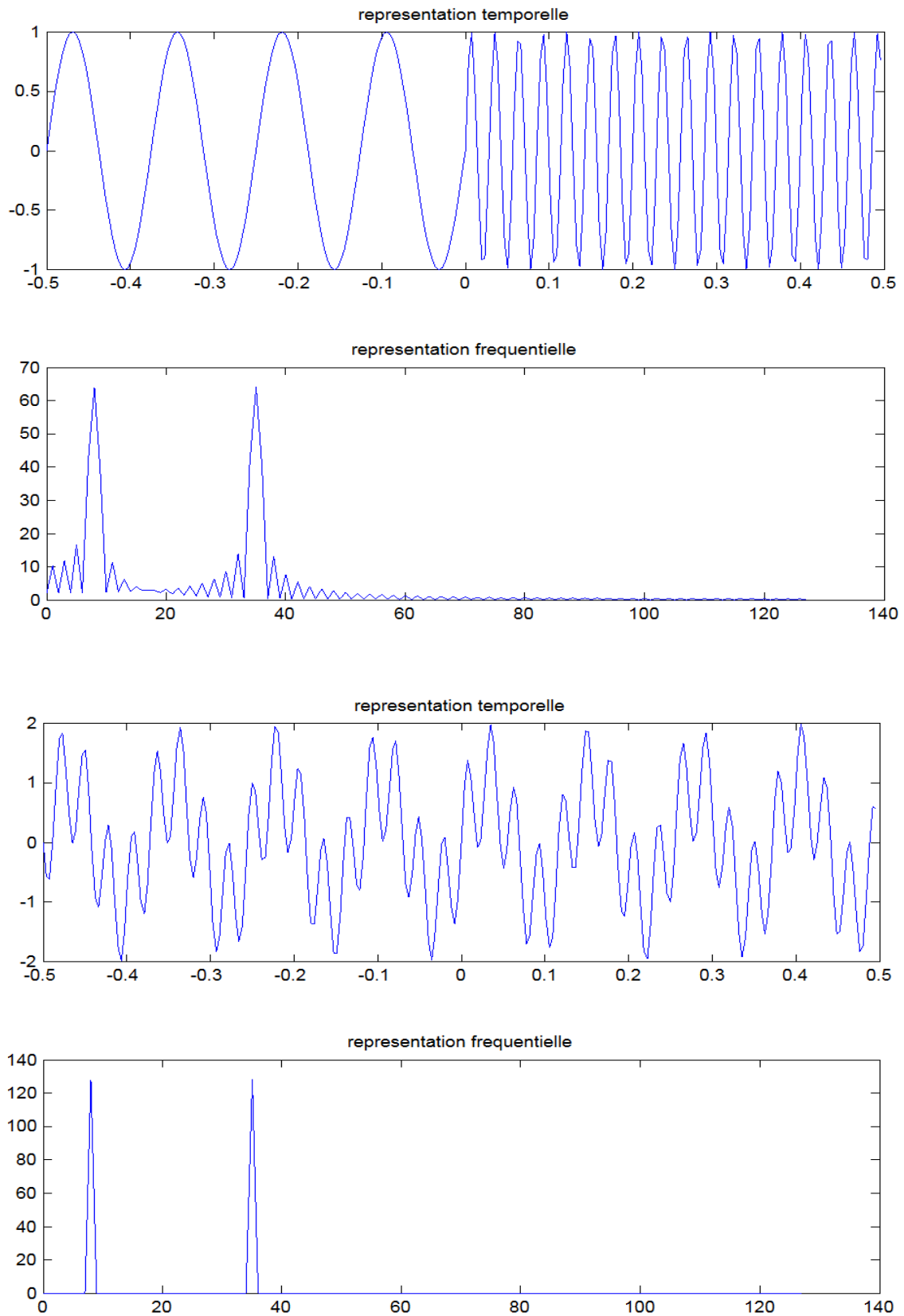


Fig. (I.1) Deux sinusôides différentes ayant le même spectre d'amplitude

Nous allons maintenant décrire un certain nombre de représentations temps_ fréquence des signaux par représentation temps_ fréquence on entend la mise en correspondance du signal avec une fonction de deux variables : le temps (ou la position) et la fréquence (ou la fréquence spatiale). Il existe en fait une infinité de façons différentes de construire de telles correspondances ; aussi on se limitera à une sous_ classe, à savoir celle des correspondances

I.3.1 Transformée de Fourier à Court Terme

a) Définitions

La transformée de Fourier à court terme (TFCT) et ses dérivées (notamment le spectrogramme) sont les méthodes temps- fréquence les plus utilisées dans les applications pratiques. Ainsi, cette classe de méthodes représente la solution la plus répandue pour éliminer les limitations de la transformée de Fourier. L'idée de base est très simple et efficace : on décompose le signal en petits segments et on applique, sur chacune des sections, la transformée de Fourier en obtenant ainsi le spectre « local ». La totalité des spectres « locaux » indique alors comment le spectre varie au cours de temps. Ce concept est présenté sur la figure suivante.

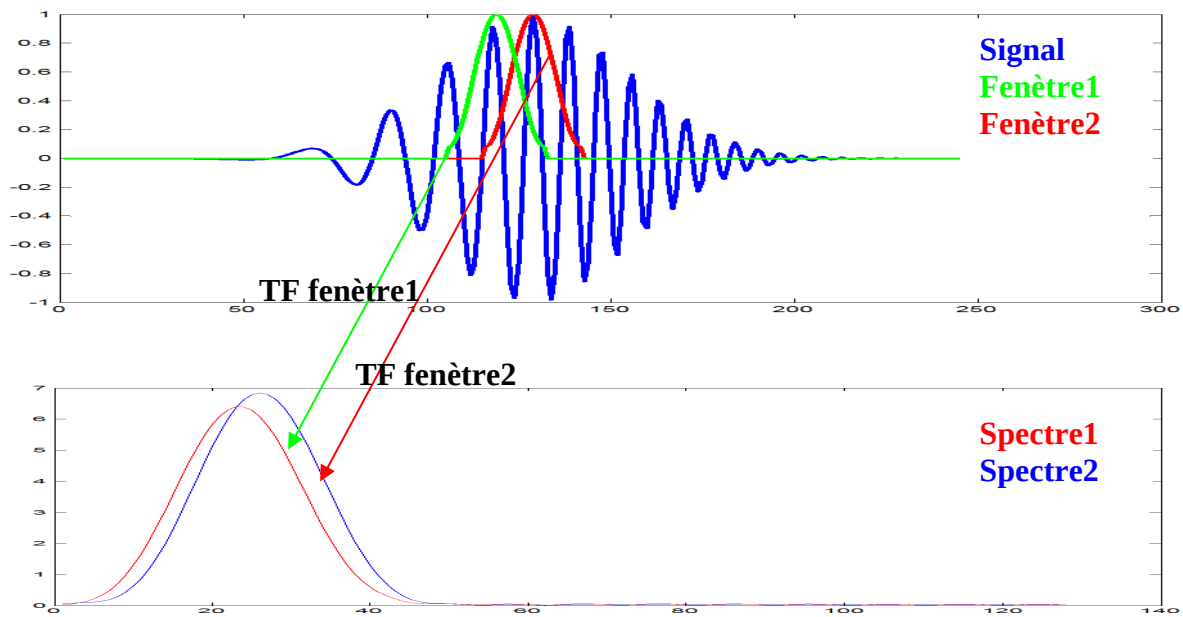


Fig.I.2 Principe de transformée de la Fourier à court terme

La *TFCT* effectue cette analyse à chaque instant t et propose ainsi une représentation à deux dimensions (2D) dépendant du temps et de la fréquence [Gabor46] :

$$TFCTs(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}} s(\tau) g^*(\tau - t) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau \quad (I.10)$$

Où la fonction qui à τ associe $g^*(\tau - t)$ (notée $\tau \rightarrow g^*(\tau - t)$) est la fenêtre qui sélectionne la durée T_g autour de l'instant t .

Du point de vue mathématique, la TFCT peut être interprétée comme l'analyse de Fourier de tranches successives pondérées par une fenêtre temporelle (Hamming, par exemple). Ce principe est équivalent à l'approximation du signal par un ensemble des fonctions élémentaires semi- localisées simultanément en temps et en fréquence (relation (I.10)).

Cette relation représente le produit scalaire entre le signal $s(t)$ et les fonctions de base $g^*(\tau - t)e^{-i2\pi v\tau}$ (reflet de la similarité qui existe entre $s(t)$ et les fonctions $g(t)$).

Ainsi le module du coefficient complexe $TFCT\ s(t, v)$ mesure l'amplitude de $s(t)$ dans la fenêtre d'analyse temps- fréquence centrée sur la coordonnée (t, v) de dimension (Tg, Bg) . Il est intéressant de noter que les dimensions de la fenêtre d'analyse sont constantes dans tout le plan temps fréquence. L'image du module carré des coefficients de la $TFCT$ est appelée le spectrogramme.

En pratique, on utilise le **Spectrogramme** qui est le module au carré de la TFCT. Lorsque les valeurs de TFCT sont, en général, complexes, le module carré nous assure que la valeur du spectrogramme sera toujours une valeur réelle. Le spectrogramme (expression numérique) est alors défini comme une densité d'énergie soit :

$$\hat{s}(t, v) = \left| \int s(\tau) g^*(\tau - t) e^{-i2\pi v\tau} d\tau \right|^2 \quad (I.11)$$

La TFCT ou le spectrogramme considère implicitement un signal non stationnaire comme une succession de situations quasi-stationnaires, à l'échelle de la fenêtre à court terme $g(t)$. La résolution temporelle d'une telle analyse est fixée par la largeur de la fenêtre, la résolution fréquentielle étant fixée par la largeur de sa transformée de Fourier. Ces deux largeurs étant antagonistes, on se trouve alors en présence d'un compromis entre les résolutions temporelles et fréquentielles. En effet :

- pour un signal fortement non- stationnaire, une bonne résolution temporelle est requise, ce qui impose de travailler avec une fenêtre $g(t)$ courte, limitant par voie de fait la résolution fréquentielle ;
- réciproquement, si une analyse fréquentielle fine est nécessaire, une fenêtre $g(t)$ longue doit être utilisée, ce qui a le double effet de moyenner les contributions fréquentielles sur la durée de la fenêtre et de dégrader la résolution temporelle.

b) Quelques Exemples Simples

Pour illustrer le comportement de la transformation de Fourier à courte terme considérons tout d'abord quelques exemples académiques, dont la TFCT peut soit être calculée explicitement, soit facilement approximée.

• Sinusoïdes

On vérifie facilement que la TFCT d'une sinusoïde $s(t) = \sin(\lambda t)$ est donnée par :

$$TFCT_s(b, w) = \frac{1}{2i} \left[e^{i\lambda b} \overline{\hat{g}(\lambda - w)} - e^{-i\lambda b} \overline{\hat{g}(\lambda + w)} \right] \quad (I.12)$$

Si on suppose que la fenêtre $g(t)$ est telle que sa TF est bien localisée au voisinage de l'origine des fréquences. La TFCT est elle même localisée près des lignes $w = \pm\lambda$, comme on peut le voir sur la figure (I.3) où seules les valeurs positives de la fréquence w sont représentées). La phase de la TFCT a elle aussi un comportement intéressant. Pour des valeurs de w proches de la fréquence de la sinusoïde, la phase de la TFCT se comporte

comme celle de la sinusoïde (même fréquence...). Cette information permet de construire des algorithmes permettant d'estimer les fréquences locales de signaux. Il est important de noter que dans ce cas, la localisation n'est pas parfaite : en introduisant une fenêtre, on diminue la résolution.

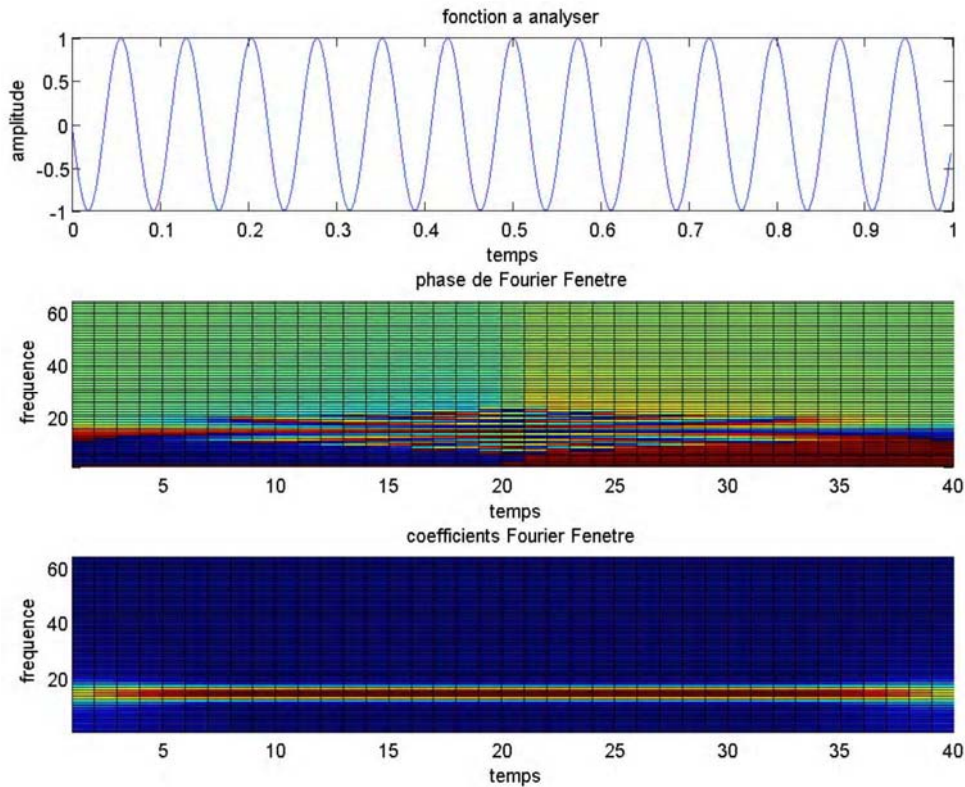


Fig.I.3 Le module et la phase de la transformée de Fourier à court terme d'un sinusoïde

- **Chips**

Le premier exemple était stationnaire et l'outil le mieux adapté dans ce cas est la transformation de Fourier. On considère maintenant un exemple non stationnaire, i.e "un chirp". Un chirp est essentiellement une sinusoïde, avec une fréquence dépendant du temps, ce que l'on décrit sous la forme :

$$s(t) = A(t) \cos \phi(t)$$

Si l'on suppose que l'amplitude $A(t)$ et la fréquence $\phi(t)$ sont des fonctions différentiables et lentement variables du temps, il est facile de voir en utilisant la formule de Taylor que l'on peut approximer la TFCT d'un tel signal sous la forme

$$TFCT_s(b, w) = \frac{1}{2} A(b) \left(e^{i\phi(b)} \hat{g}(\phi'(b) - w) + e^{-i\phi(b)} \hat{g}(-\phi'(b) - w) \right) + r(b, w) \quad (I.13)$$

Où $r(b, w)$ est un reste, que l'on néglige grâce aux hypothèses faites sur le signal. Si on suppose de nouveau que la fenêtre $g(t)$ est bien localisée à l'origine dans l'espace de Fourier, on voit facilement à partir de cette expression approchée que la TFCT est localisée

au voisinage de courbes, d'équation $w = \pm \phi'(b)$. Ces courbes sont appelées les arêtes de la TFCT, et caractérisent le signal. Ce comportement est illustré en figure (I.4)

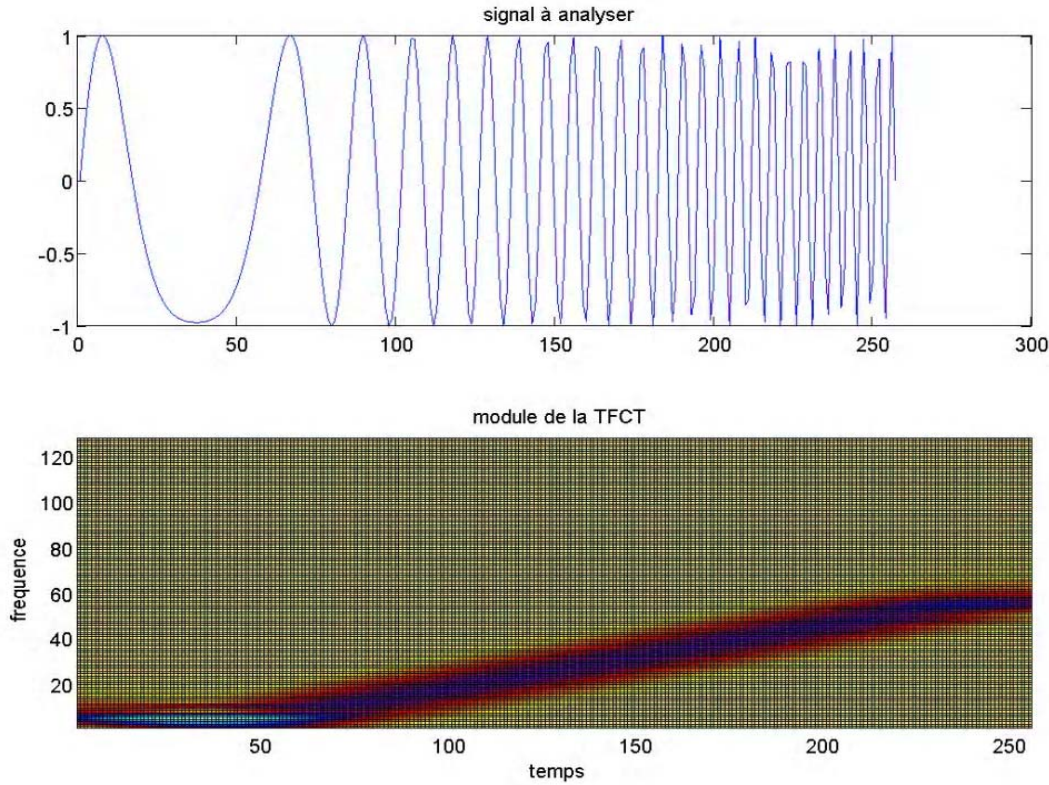


Fig.I.4 Module de la transformée de Fourier à court terme d'un chirps

- **Signaux Modulés en Fréquence**

Passons maintenant à des signaux moins élémentaires que les chirps que nous venons de voir. Par exemple le modèle simple suivant

$$s(t) = \sum_{l=1}^L A_l(t) \cos \phi_l(t) \quad (\text{I.14})$$

Où les $A_l(t) \geq 0$ et $\phi_l(t)$ sont des fonctions régulières. En dépit de sa forme simple, ce modèle est d'une importance cruciale dans de nombreuses applications, comme par exemple le traitement de la parole. En effet, de très nombreux signaux peuvent être représentés ainsi. On parle de signaux modulés en fréquence. Dans le même esprit que plus haut, et en utilisant les mêmes arguments on vérifie aisément que tant que l'on se limite à des valeurs de w assez grandes, la TFCT d'un signal de la formule (I.14) est donnée par :

$$TFCT_s(b, w) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L A_l(b) \left(e^{i\phi_l(b)} \hat{g}(\phi_l'(b) - w) + e^{-i\phi_l(b)} \hat{g}(-\phi_l'(b) - w) \right) + r(b, w) \quad (\text{I.15})$$

Où le reste $r(b, w)$, dont la taille dépend des dérivées et dérivées secondes des amplitudes et phases est négligeable pour des amplitudes et fréquences lentement variables. Si nous supposons que les phases $\phi_l(t)$ ont été choisies de sorte que leur dérivées soient positives,

et si on se limite à des valeurs positives de w la TFCT de (I.14) est essentiellement somme de composantes de la forme :

$$A_l(b)e^{i\phi_l(b)}\hat{g}(\phi_l'(b)-w) \quad (I.16)$$

Supposons comme d'habitude que la fenêtre $g(t)$ est bien localisée à l'origine des fréquences, chacune de ces composantes se localise au voisinage d'une courbe :

$$w = \phi_l(b) = \phi_l'(b)$$

La caractérisation des signaux modulés en amplitude et en fréquence peut être effectuée au moyen de ces courbes.

Exemple : TFCT de signaux mono et multi composantes

Sur les figures (I.5) et (I.6) sont présentées les TFCT des signaux mono-composantes définis comme suit : un chirp à enveloppe gaussienne et s_2 le spectre d'amplitude de s_1 .

$$s_1(t) = \exp(-15\pi t^2) \cos(2\pi(35t + 25)t) \quad (I.17)$$

Par contre sur figures (I.7) et (I.8) sont présentés les signaux multi composantes suivants : une somme de deux chirps à modulation de fréquence croissante $v_1 = 35t + 25$ et $v_2 = 35t + 75$ et une somme de deux chirps dont l'un avec une modulation de fréquence croissante $v_1 = 35t + 25$ et l'autre décroissante $v_1 = -35t + 25$.

Pour l'image (I.7) il est intéressant de noter que les motifs des deux ondes sont séparés dans le plan temps- fréquence, alors que ce n'est le cas ni en temps ni en fréquence. De plus en (I.8), même si cette séparation n'a pas lieu, les deux motifs restent identifiables. Par la suite quand les motifs se recouvrent dans le plan temps- fréquence comme pour l'exemple en (I.8) (croisement entre les deux motifs), on parlera d'interférences entre les motifs des différentes ondes.

La visualisation de l'image du module permet une interprétation sur le nombre de composantes et sur leur contenu temps -fréquence à la limitation de la résolution près. Sur une représentation idéale, à un instant t fixé, en présence de deux composantes, les deux motifs sont séparés si l'étalement des motifs est plus petit que l'écart entre les deux crêtes [Cohen92].

$$\frac{1}{2} \left(\left| \frac{dA_1(t)/dt}{A_1(t)} \right| + \left| \frac{dA_2(t)/dt}{A_2(t)} \right| \right) < \left| \frac{d\phi_1(t)}{dt} - \frac{d\phi_2(t)}{dt} \right| \quad (I.18)$$

Exemple de la figure (I.9) représente la transformée de Fourier à court terme de deux chirps à modulation de fréquence croissante $v_1 = 35t + 25$ et $v_2 = 35t + 40$ où la séparation entre les deux motifs est pratiquement impossible (dans ce cas de figure l'étalement des deux motifs presque égale l'écart entre les deux crêtes).

Il est intéressant de faire le lien avec le cas stationnaire pour lequel les composantes sont parfois définies comme les pics du module de la TF. En adoptant une lecture *temps - fréquence* des images, l'œil effectue le suivi de ces pics au cours du temps, ce qui définit ainsi les différents motifs de l'image du module. En comparaison avec le module du

spectre ou l'enveloppe du signal analytique, l'information du module des coefficients de la *TFCT* est plus complète. En fait, cette image d'amplitude suffit à caractériser le signal à un déphasage près.

L'information du module étant complète et simple à visualiser, les arguments des coefficients complexes de la *TFCT* sont peu utilisés directement car ils sont difficiles à interpréter.

Finalement, la phase a-t-elle un rôle à jouer dans l'étude temps- fréquence ? La réponse est oui. D'une part, ces coefficients sont nécessaires quand la synthèse est effectuée en utilisant la *TFCT* inverse :

$$s(t) = \frac{1}{2\pi\|g\|^2} \int_{\Re} \int_{\Re} TFCTs(\tau, f) g^*(t - \tau) e^{+i2\pi f\tau} d\tau df \quad (I.19)$$

D'autre part, l'information de phase de la *TFCT* peut être utilisée pour définir la fréquence instantanée locale et le retard de groupe local dans le plan temps- fréquence. En utilisant la définition suivante de la *TFCT* :

$$TFCTs(t, \nu) = \int_{\Re} s(\tau) g^*(\tau - t) e^{-i2\pi\nu(\tau - t)} d\tau \quad (I.20)$$

La fréquence instantanée locale est alors définie par :

$$\nu_i(t, \nu) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t, \nu)}{dt} \quad (I.21)$$

et le retard de groupe local par :

$$\tau_g(t, \nu) = t - \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t, \nu)}{d\nu} \quad (I.22)$$

Où $\phi(t, \nu)$ est la phase des coefficients complexes de la *TFCT*.

Récemment , à travers plusieurs études a montré que suivant que le signal est asymptotique en temps ou en fréquence, il est possible de définir pour chaque composante une crête comme l'endroit privilégié où la fréquence instantanée locale (resp. le retard de groupe local) est égale à la fréquence de la ligne correspondante (à l'instant de la colonne correspondante) :

$$\nu_i(t, \nu) = \nu \text{ et } \tau_g(t, \nu) = t$$

Quand g (respectivement G) est maximum en 0, ces crêtes correspondent aux maxima locaux de chaque colonne (resp. de chaque ligne). L'intérêt de définir ces crêtes à partir de la phase plutôt qu'à partir du module est une meilleure stabilité en présence de bruit. Ces crêtes permettent de caractériser chaque composante séparément. Par exemple, quand $(t, \nu(t))$ suit la crête d'une composante w , cette composante peut être estimée en temps par l'approximation :

$$TFCTs(t, \nu(t)) \approx \frac{1}{2} w_a(t) \quad (I.23)$$

où $w_a(t)$ est le signal analytique de $w(t)$.

Cette estimation n'est pas très robuste mais elle est intéressante d'un point de vue pratique. Elle permet de minimiser la quantité d'information pour le retour à la dimension temporelle. Cette minimisation est possible du fait de la redondance d'information dans la TFCT.

Une autre utilité du retard de groupe local et de la fréquence instantanée locale est qu'ils permettent d'expliquer le procédé de réallocation [Chaussandre-Mottin98]. La réallocation a pour principe de déplacer les valeurs du module des points (t, ν) vers les nouvelles coordonnées (t_r, ν_r) de façon à regrouper les points du plan temps- fréquence qui ont le même retard de groupe local et la même fréquence instantanée locale :

$$\begin{cases} t_r = \tau_g(t, \nu) \\ \nu_r = \nu_i(t, \nu) \end{cases}$$

Cette opération permet d'obtenir une représentation temps- fréquence bien localisée avec des motifs très concentrés. En présence de signaux asymptotiques sans interférence entre les motifs des différentes ondes, la réallocation est capable de réduire le motif de chaque onde à une crête dont chaque coordonnée indique à chaque instant le contenu fréquentiel de l'onde (ou à chaque fréquence le retard de groupe de l'onde).

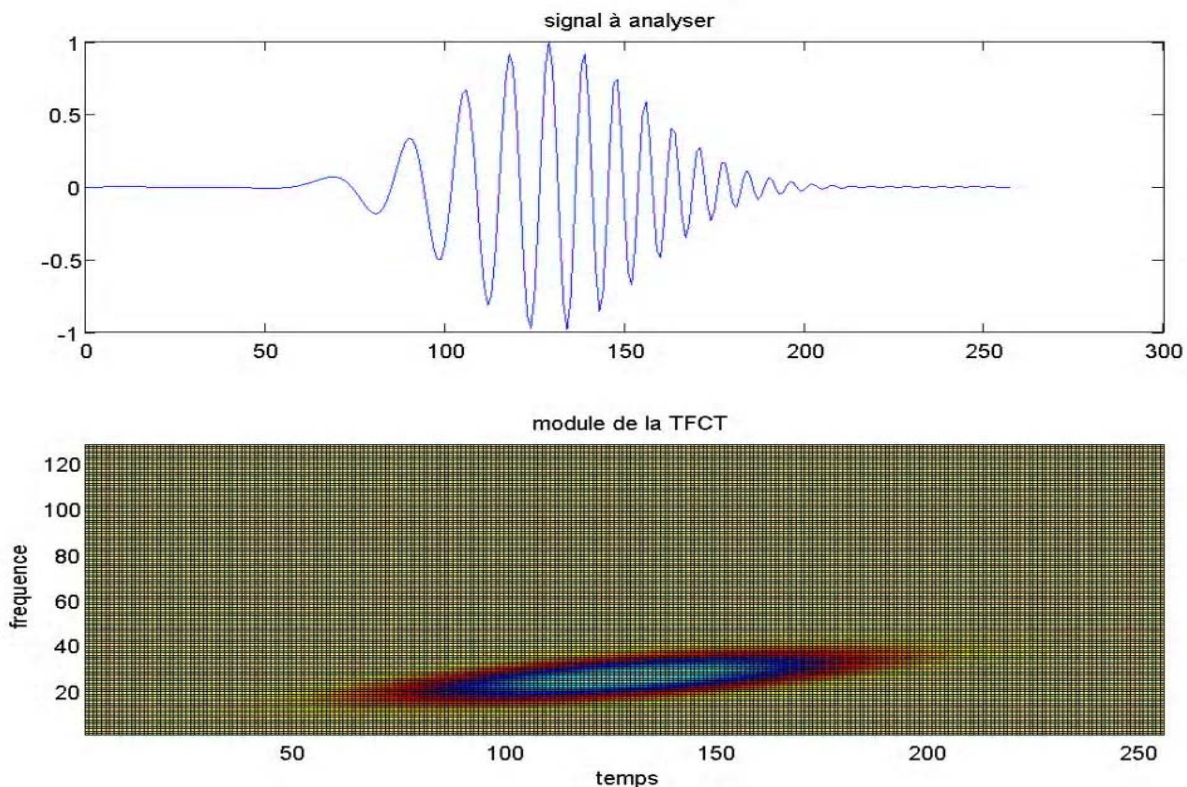


Fig.I.5 Transformée de Fourier à court terme d'un chirp à enveloppe

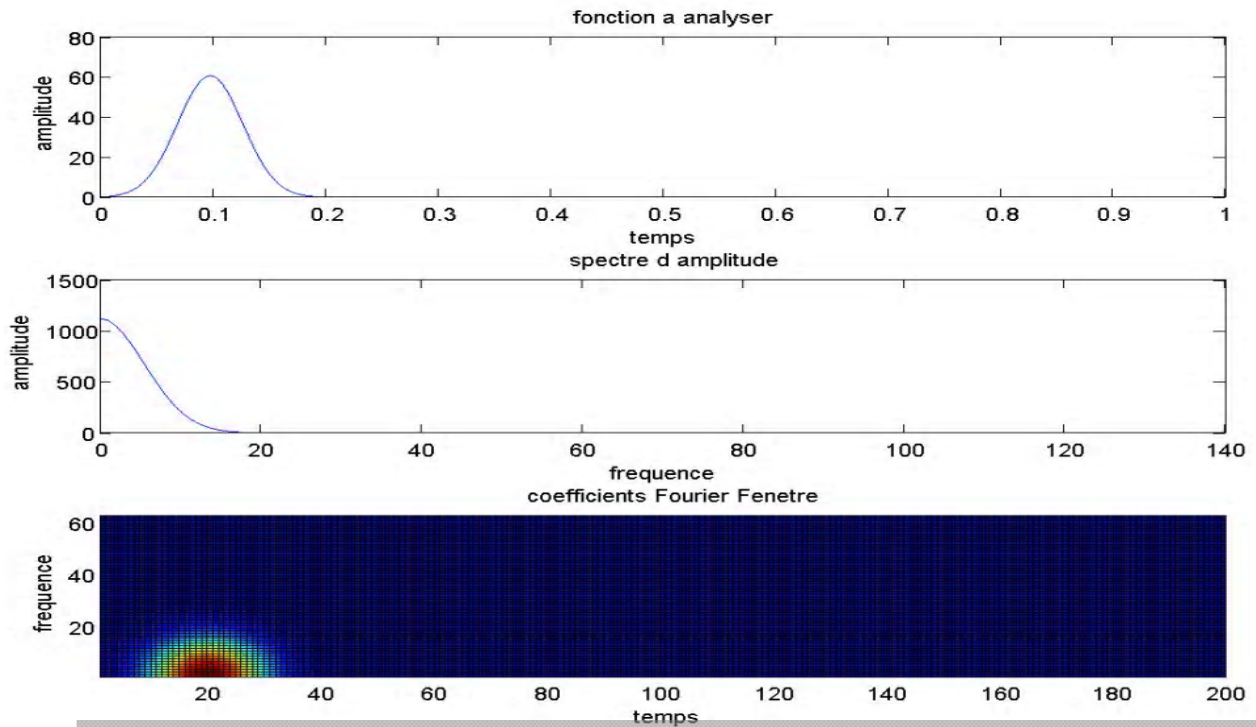


Fig.I.6 Transformée de Fourier à court terme d'un spectre d'amplitude du signal mono composante

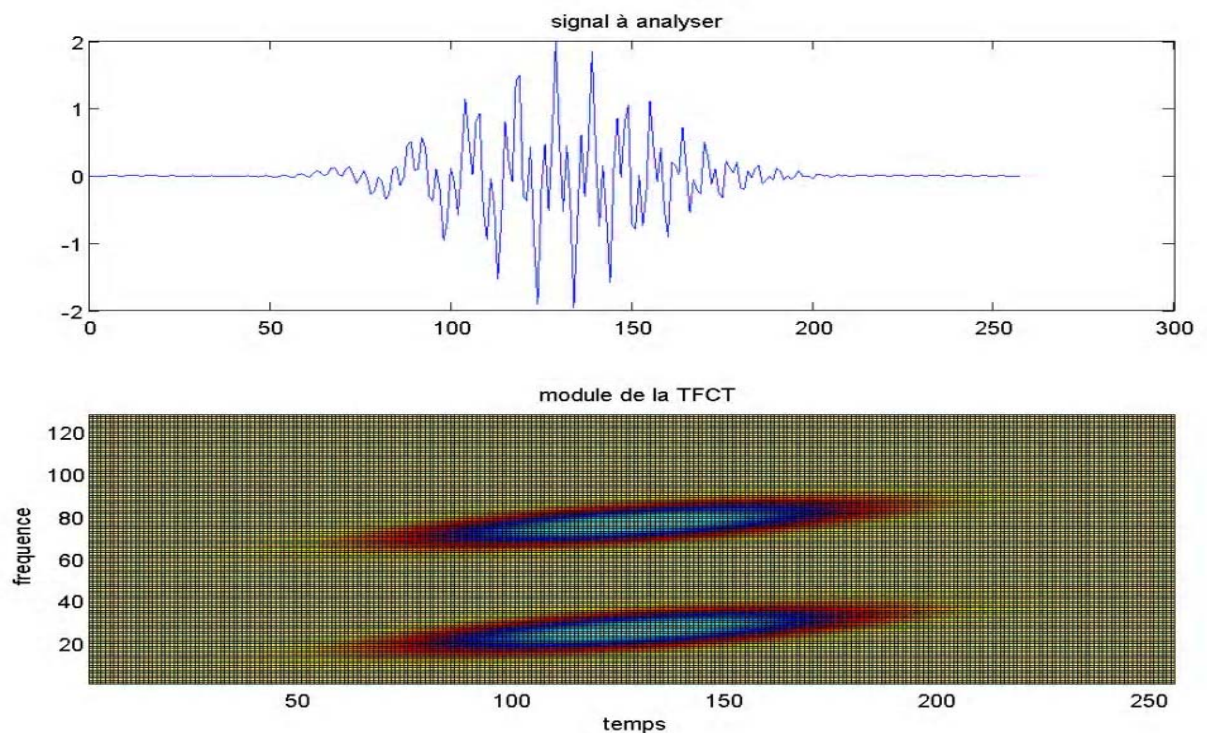


Fig.I.7 Transformée de Fourier à court terme de la somme deux chirps à modulation croissante

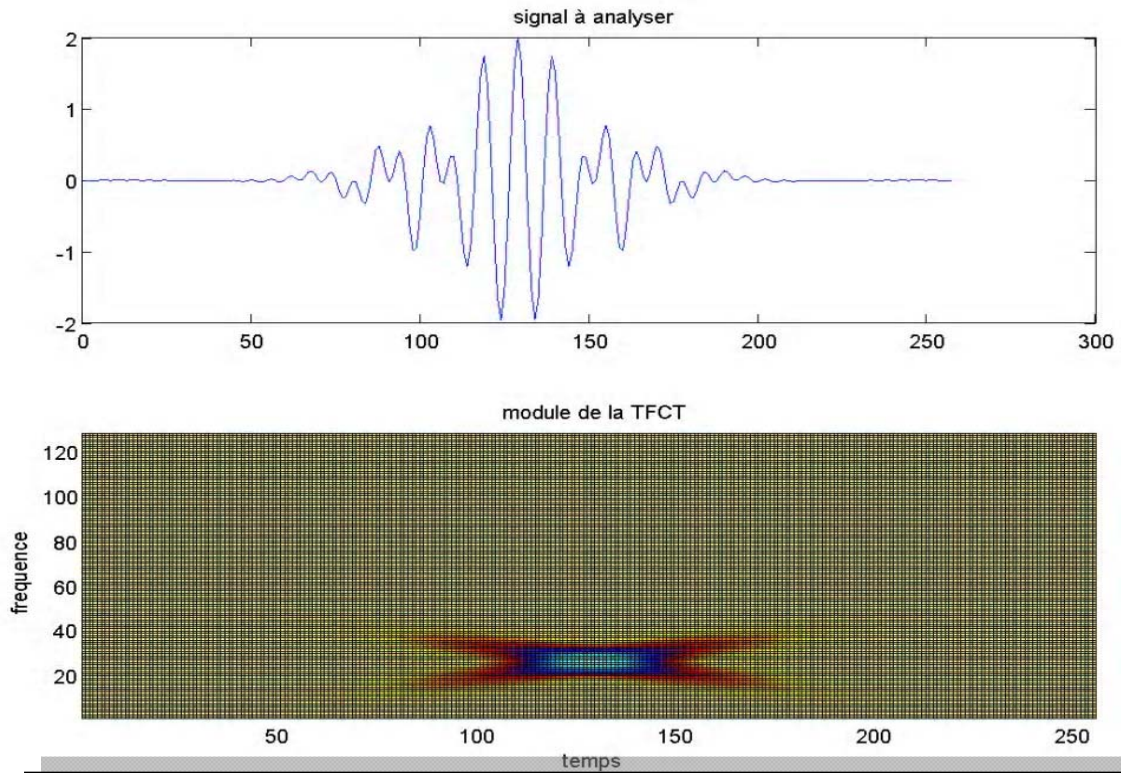


Fig.I.8 Transformée de Fourier à court terme de la somme deux chirps l'un à modulation croissante et l'autre décroissante

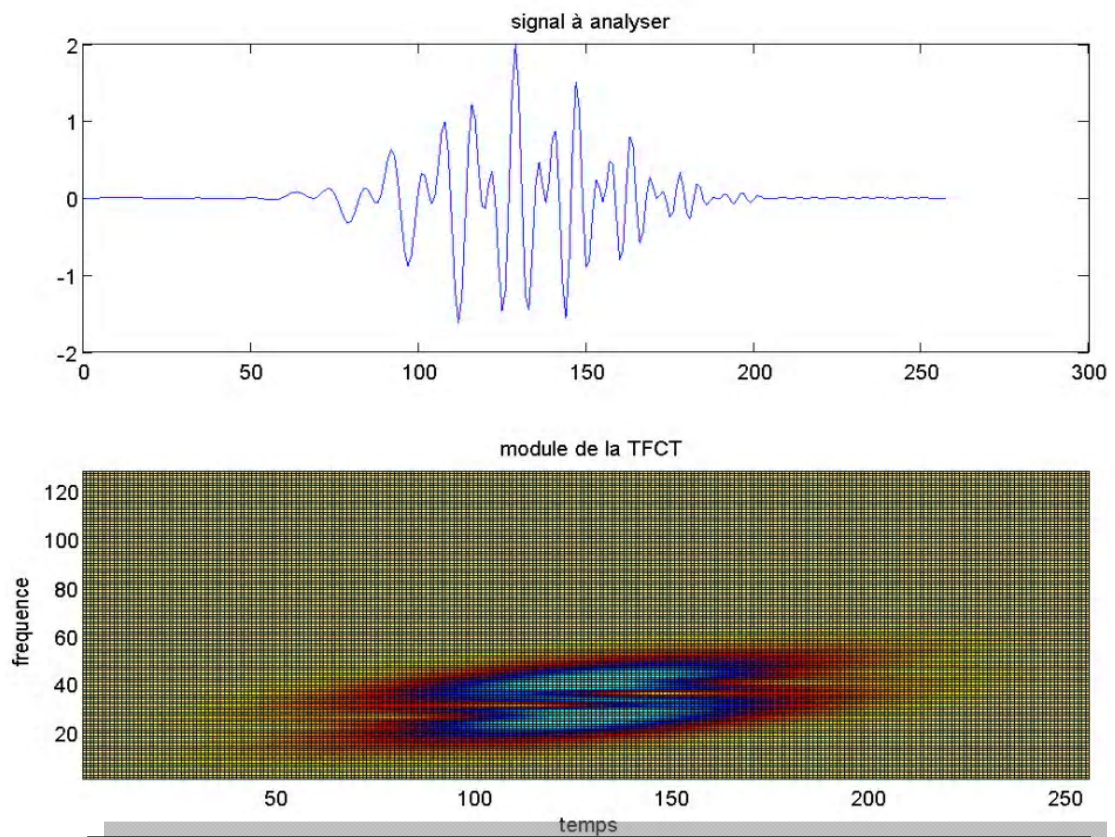


Fig.I.9 TFCT de la somme de deux chirps (cas de deux motifs non séparables)

Exemple : Utilisation de la phase pour la réallocation

Considérons le signal qui est la somme de deux chirps présentés figure (I.7). Sur la figure (I.10 (a)) sont présentés les coefficients de phase de la *TFCT*. Parmi tous les coefficients, seulement ceux dont le module est non négligeable sont présentés (seuil à 1% du maximum). A partir de cette image seule, l'interprétation n'est pas simple et directe. Nous avons présenté respectivement sur les images 2.5 (b) et (c) les fréquences et les amplitudes instantanées.

L'avantage de la réallocation sur la représentation des crêtes citée plus tôt [Guillemain et al.96] est qu'elle est plus précise [CM98]. Son désavantage est qu'il n'existe pas de formule (même approchée) de reconstruction du signal temporel. Ce paragraphe soulève un point crucial des représentations temps- fréquence, la difficulté dans le choix et l'utilisation d'une représentation temps- fréquence est de trouver une transformation qui présente des motifs concentrés (ou localisés) et qui vérifie les propriétés nécessaire à l'étude : par exemple l'inversibilité. Dans le paragraphe suivant, nous allons aborder le problème de la concentration des motifs lors de l'utilisation de la *TFCT*.

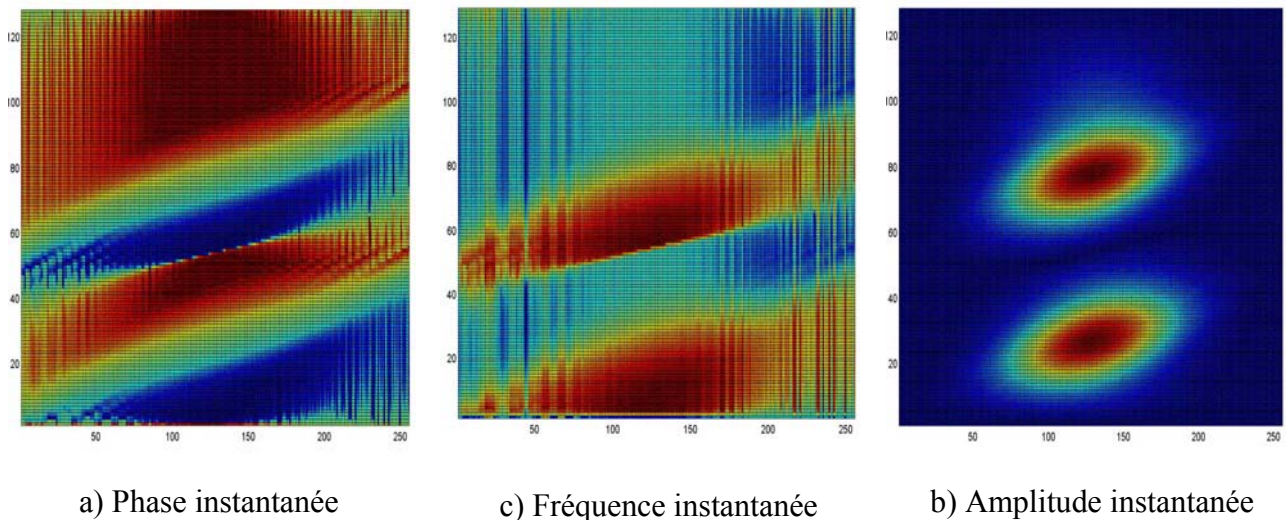


Fig.I.10 Utilisation de la phase pour réallocation

2.3.2 Principe d'incertitude

Le principe d'incertitude exprime le fait qu'un signal ne puisse pas être parfaitement localisé à la fois en temps et en fréquence. Cette propriété est décrite par la formule d'Heisenberg-Gabor :

$$T.B \geq \frac{1}{4\pi} \quad (I.24)$$

Où T et B représentent respectivement la durée et la largeur de bande d'un signal. La conséquence de cette limitation pour la *TFCT* est importante, l'aire de la fenêtre d'analyse (égale à $T_g.B_g$) ne peut être plus petite que $1/4\pi$. Cela signifie qu'en utilisant la *TFCT*, si on choisit d'avoir une bonne résolution temporelle (T_g petit) alors la résolution fréquentielle sera mauvaise (B_g grand). La conséquence d'une mauvaise résolution

temporelle (resp. fréquentielle) est l'étirement du motif dans la dimension temporelle (resp. fréquentielle). Cette propriété est illustrée par la figure (I.11) un exemple d'une sinusoïde modulé "chirp" avec deux résolutions temporelles différentes et un pavage du plan par des rectangles représentant la fenêtre d'analyse de dimension $(T_g * B_g)$. Ainsi sur les figures (I.12 (a), (b), et (c)) sont présentés les pavages du plan temps- fréquence par la *TFCT* avec en (a) une fenêtre infiniment courte (ce pavage correspond à la résolution de la représentation temporelle), en (b) une fenêtre infiniment longue (ce pavage correspond à la résolution de la représentation fréquentielle), et en (c) une fenêtre de taille quelconque.

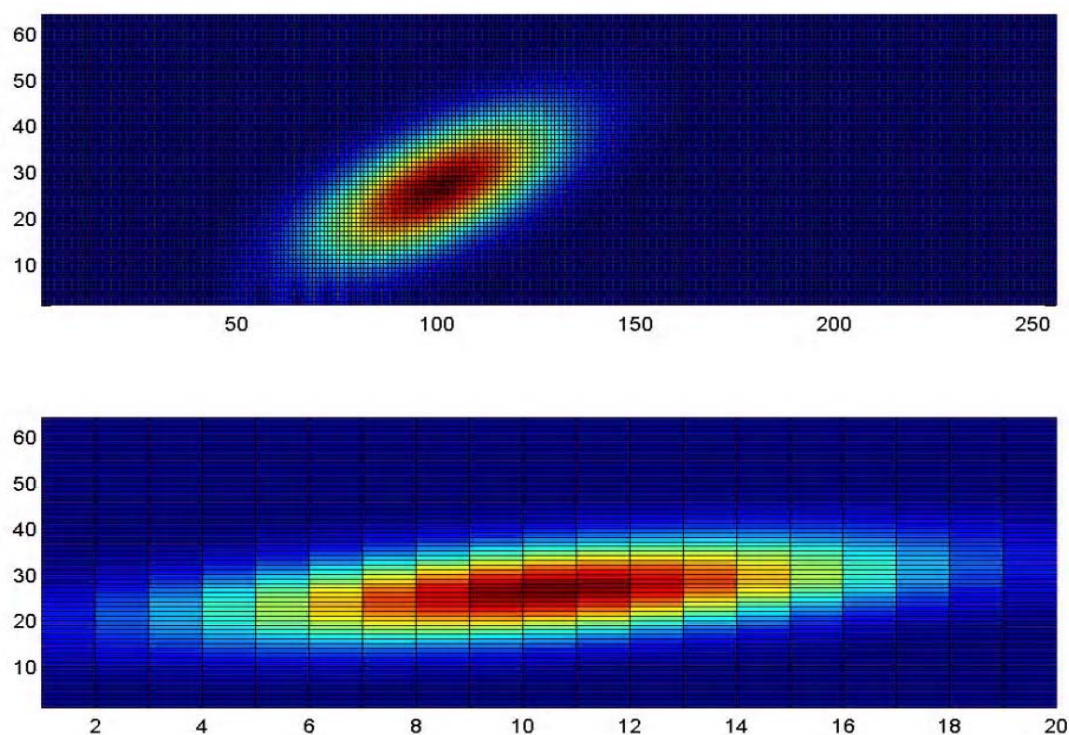


Fig.I.11 L'effet de la résolution temporelle sur l'étirement des motifs

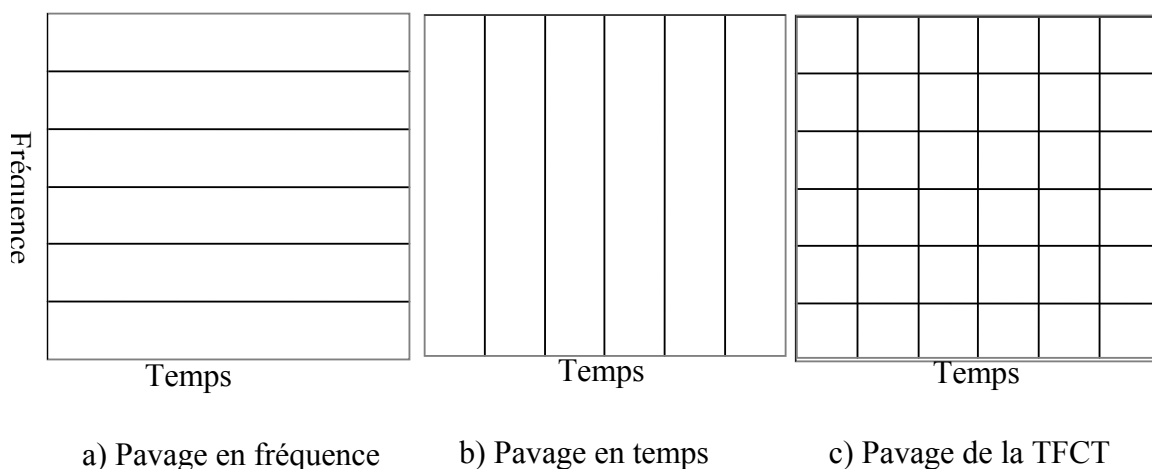


Fig.I.12 Différents pavages du plan temps- fréquences

Comme Cohen l'explique dans [Cohen95], la longueur de fenêtre optimale (basée sur la minimisation de la variance et donc de la concentration) est directement liée à l'inverse de la dérivée de la fréquence instantanée. Ainsi, quand cette dérivée n'est pas constante, la longueur de fenêtre optimale d'une même composante n'est pas la même au cours du temps. Ce problème s'aggrave quand $s(t)$ est la somme de plusieurs composantes dont les dérivées de fréquence instantanée sont très différentes (comme par exemple une sinusoïde et une impulsion). Dans ces cas, il sera impossible de visualiser de façon concentrée toutes les composantes avec la *TFCT*. Il serait pour cela nécessaire que la taille de la fenêtre soit variable suivant la position dans le plan temps- fréquence. Nous allons à présent présenter la transformée en Ondelette dont la caractéristique est que la résolution temps- fréquence, contrairement à la *TFCT*, est adaptée à la fréquence étudiée.

Choix de la Fenêtre

Il nous semble important de signaler ici que le choix de la fenêtre d'analyse n'est pas innocent, et conditionne grandement la représentation temps- fréquence et le type d'information que l'on peut en retirer.

La forme fonctionnelle de la fenêtre n'est pas en elle même d'une grande importance. La plupart des applications utilisent soit la fenêtre initialement utilisée par Gabor, c'est-à-dire une fenêtre Gaussienne $g(t) = e^{-t^2/2\sigma^2}$ qui présente la caractéristique importante d'être à décroissance exponentielle tout comme sa transformée de Fourier, et en outre de saturer l'inégalité d'Heisenberg, c'est à dire de vérifier $\Delta t \Delta \nu = 1/2$. Comme autres exemples couramment utilisés, citons par exemple la fenêtre de Hamming

$$g(t) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi t) & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sin on} \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

Par contre, la résolution fréquentielle de la fenêtre, qui est directement liée à sa taille, joue un rôle prépondérant. Prenons l'exemple de la fenêtre Gaussienne ci-dessus. Quant le paramètre σ (qui caractérise la largeur de $g(t)$) est suffisamment grand, la fenêtre est faiblement localisée en temps. Par contre, elle l'est beaucoup plus dans le domaine fréquentiel, car la largeur de $\hat{g}(\nu)$ est quant à elle donnée par $1/\sigma$. Prenons par exemple la somme de deux sinusoïdes de fréquences respectives $\nu_1 = 8\text{hz}$ et $\nu_2 = 45\text{hz}$. Si σ est assez petit, alors la largeur de bande de la fenêtre est inférieure à $\nu_2 - \nu_1$ et la mesure de ν_2 n'est pas perturbée par la présence de ν_1 et vice-versa. Dans le cas contraire, la fenêtre ne peut pas voir ν_2 sans voir ν_1 et ceci se traduit par la présence d'interférences entre les deux composantes (sur cet exemple de la figure (I.13) en prend la taille de la fenêtre égale 0.015 et 0.1).

Un deuxième exemple concret est montré en figure (I.14) qui représente une sinusoïde analysée avec trois fenêtres de tailles différentes 0.2, 0.1 et 0.015. Il faut savoir que le signal (tout au moins dans sa composante "voisée") peut être d'écrit simplement par des modèles du type (I.14). Une fenêtre assez large (donc assez étroite en fréquence) permet de bien séparer les différentes harmoniques du signal. Au contraire, une fenêtre étroite ne sépare plus les harmoniques du signal, mais met l'accent sur ses caractéristiques temporelles.

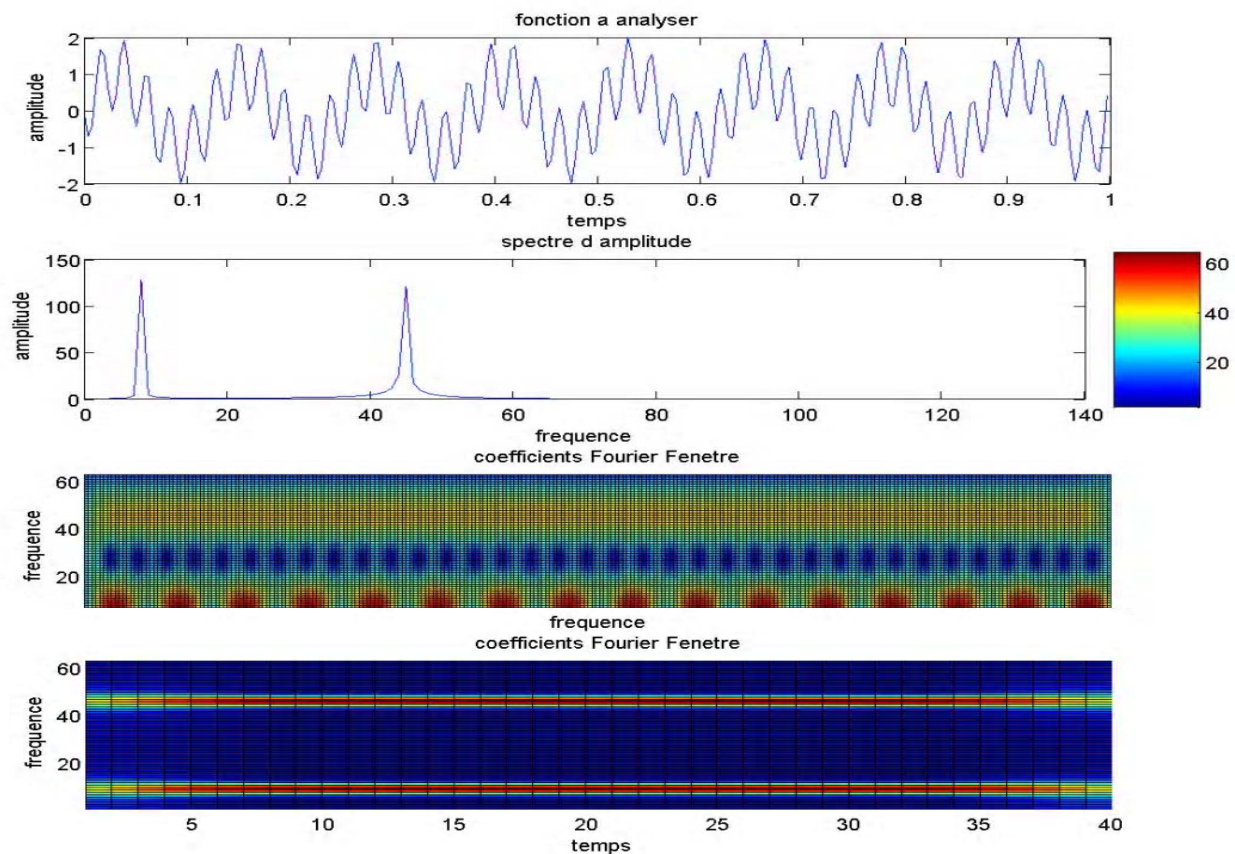


Fig.I.13 L'effet de la taille de la fenêtre sur l'interférence entre les composantes du signal

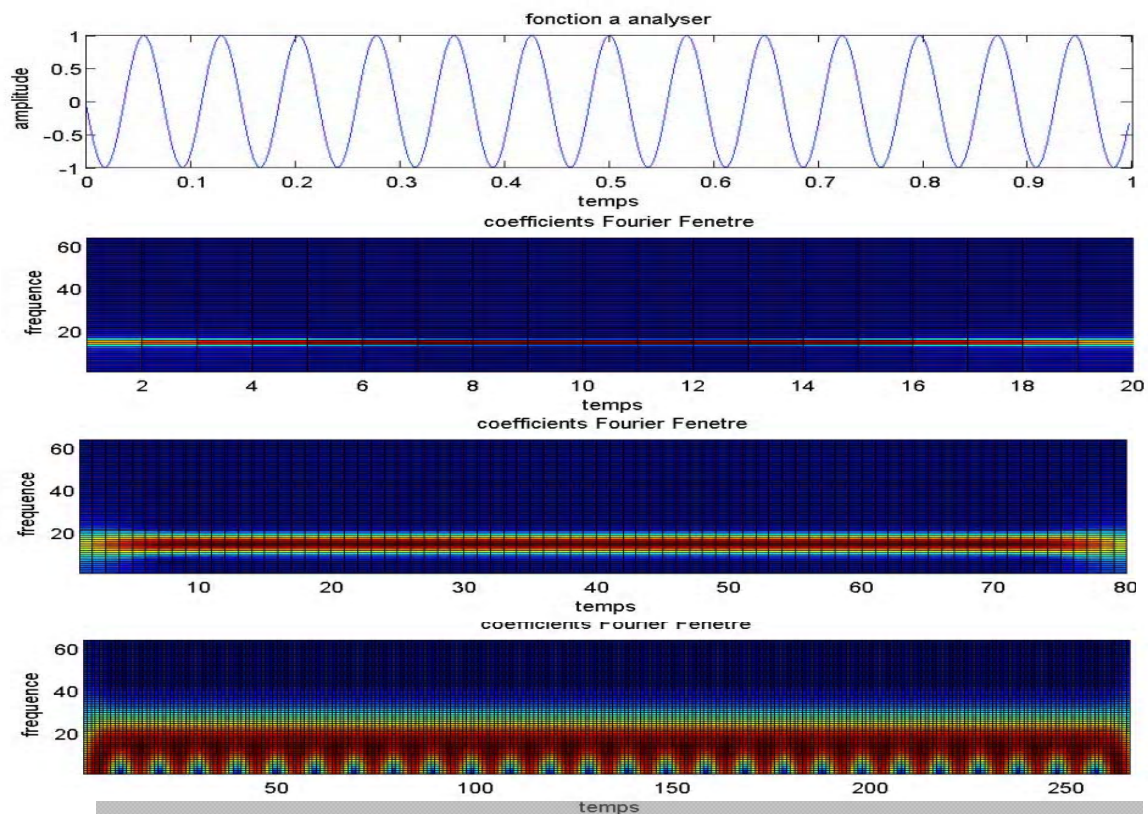


Fig.I.14 L'effet de la taille de la fenêtre sur la localisation temps fréquence

2.3.4 Limites de la TF à fenêtre glissante

Considérons par exemple le signal $s_2 = s_1 + \delta(t_1) + \delta(t_2)$ où s_1 est le signal composé de deux sinusoïdes de fréquence différentes défini précédemment. Ce signal est défini par deux phénomènes différents : Deux sinusoïdes successives et deux masses de Dirac qui présentent des défauts locaux d'enregistrement (perturbations). L'analyse par transformée de Fourier à fenêtre glissante ne permet pas de mettre en évidence simultanément les deux phénomènes et ceci est dû à la taille de la fenêtre qui est fixe. En effet, pour le choix de la taille de la fenêtre égale à la fréquence des sinusoïdes, la transformée de Gabor permet de localiser l'ordre d'apparition des sinusoïdes (voir figure.I.15b), alors que pour le choix de la taille égale à la fréquence des pics de Dirac, cette transformée renseigne sur la localisation temporelle des pics mais cette fois les informations concernant les fréquences des sinusoïdes sont perdues (voir figure.I.15c).

En particulier il est impossible de trouver une échelle donnée qui permet en même temps de trouver les fréquences des sinusoïdes et de localiser dans le temps les pics de Dirac. Ce phénomène trouve une explication du fait qu'il est impossible de trouver en pratique une fenêtre g qui soit bien localisée à la fois en temps et en fréquence, autrement dit il n'existe aucune fonction d'énergie finie qui soit à support compact à la fois en temps en fréquence et ceci est justifié par le principe d'incertitude d'Heisenberg qui interdit un signal donné d'avoir une localisation arbitraire précise en temps et en fréquence.

Autrement dit, si une fonction f non nulle est à support compact, alors sa transformée de Fourier ne peut s'annuler sur tout un intervalle et de même, si sa transformée de Fourier est à support compact, f ne peut pas s'annuler sur tout un intervalle. Cette limite de la transformée de Gabor est à la base de l'introduction du concept de la transformée en ondelettes.

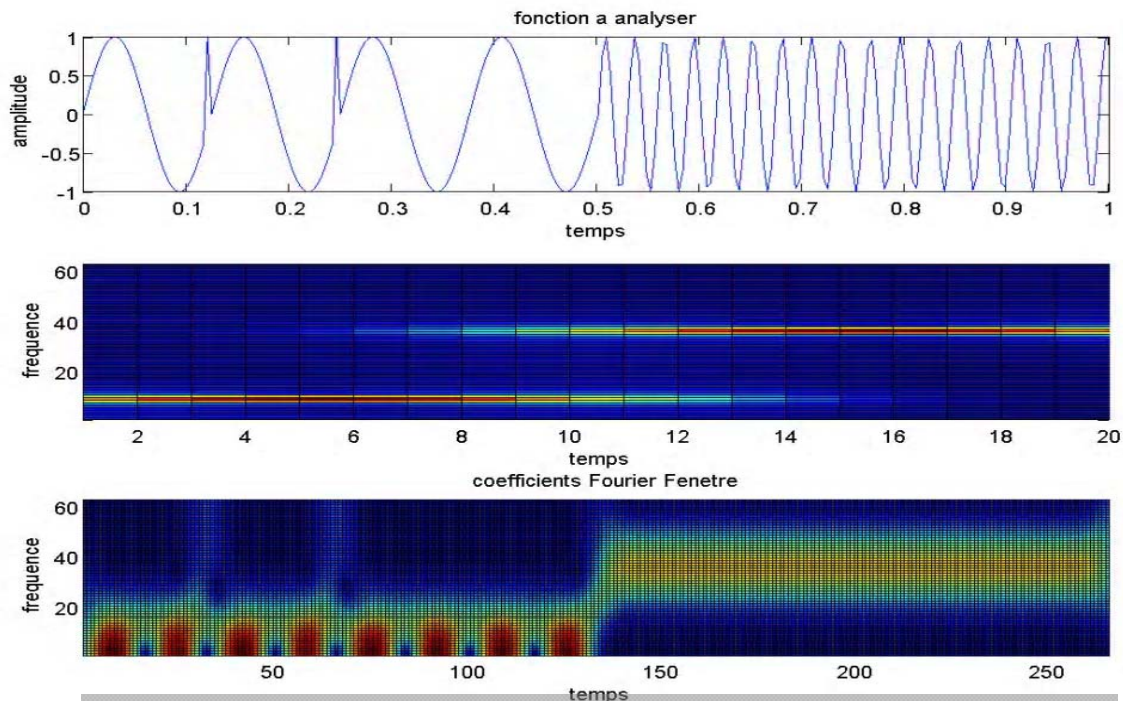


Fig .I.15 Limites de la TF à fenêtre glissante

Chapitre II : Transformation en Ondelettes Continue (TOC)

II.1. Historique de la transformée en ondelettes continue:

L'analyse par ondelettes, qui apparue et s'est développée en analyse mathématique depuis 1983, constitue un nouvel outil d'analyse des signaux non stationnaires. Cette analyse est faite en passant par des décompositions en séries de fonctions, orthogonales ou non orthogonales de support compact. Ces fonctions, que l'on appelle les ondelettes, sont obtenues à partir d'une ondelette de départ à laquelle on applique des dilatations et des translations. Les premières ondelettes ont été publiées par Haar au début de siècle, mais la formalisation de cette technique a été faite plus tard par Jean Morlet vers les années 1983, en proposant des ondelettes non orthogonales et leurs transformées en ondelettes est continue.

II.1.1. Aperçu sur les ondelettes

Tournons-nous maintenant vers une autre procédure permettant de décrire le plan temps- fréquence $\mathcal{R}^2$. En guise de justification, mettons tout d'abord en évidence l'un des limites de l'analyse de Fourier à court terme, qui est la conséquence immédiate du processus utilisé pour la construction des gaborites. Les gaborites sont des fonctions de taille constante, et ne permettent donc pas d'obtenir une résolution temporelle aussi haute que nécessaire.

Supposons en particulier que la fonction analysée $s(t)$ soit singulière en un point $t = t_0$ (voir l'exemple chapitre précédent Figure (I.15)). Les coefficients $TFCT_s(b, w)$ ne permettent alors pas de localiser la singularité, c'est à dire de déterminer t_0 avec une précision supérieure à la taille de la fenêtre $g(t)$. Les gaborites étant aussi de taille constante dans l'espace de Fourier, un argument similaire peut y être développé.

Ce raisonnement très simple démontre la nécessité de pouvoir disposer d'une méthode d'analyse agissant en quelque sorte comme un microscope mathématique, c'est-à-dire adaptant sa résolution (ici la taille des fenêtres d'analyse) à la taille de l'objet (ou du détail) analysé. C'est précisément ce que fait l'analyse par ondelettes. Partant d'une fonction

$\psi(t) \in L^1(\mathcal{R}) \cap L^2(\mathcal{R})$ bien localisée (dans le plan temps- fréquence), on lui associe la famille d'ondelettes $\psi_{a,b}(t)$, engendrées par des translations et des dilatations de $\psi(t)$ qui forment un système orthonormal complet pour $L^2(\mathcal{R})$. Elles sont communément notées :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (\text{II.1})$$

Où " a " correspond à la translation de la fonction sur $\mathcal{R}$ et " b " représente un facteur de dilatation.

En fait, l'ondelette de base correspond à la version dilatée de la fonction ψ (une fonction ondelette mère), centrée à $a/2^b$. La dilatation de l'ondelette permet la localisation en fréquence alors que les translations permettent la localisation temporelle de la fonction.

La description du plan temps- fréquence donnée par les ondelettes $\psi_{a,b}(t)$ est assez différente de la description donnée par les gaborites. On note tout d'abord que l'on peut toujours sans perte de généralité supposer $\psi(t)$ bien localisée autour de l'origine $t = 0$. Par

contre, $\hat{\psi}(w)$ n'a quant à elle aucune raison d'être localisée autour de l'origine des fréquences $w = 0$ (nous verrons plus loin que cette hypothèse doit être exclue). Supposons donc $\hat{\psi}(w)$ bien localisée autour du point $w = w_0 > 0$. Dans ces conditions, $\psi_{a,b}(t)$ est bien localisée dans une région du plan temps- fréquence centrée sur le point de coordonnées $(b, w_0/a)$. De plus, ce domaine est une version dilatée (dans la variable x) et contractée (dans la variable w) du domaine dans lequel est localisée $\psi(t)$ (on a supposé ici $a > 1$; si $a < 1$ il y a dilatation en t et contraction en w).

Avant de présenter les concepts mathématiques derrière l'analyse par ondelette, il sera question, dans la présente section, des concepts généraux ayant trait à celle-ci. Les caractéristiques globales des ondelettes seront énoncées. Puis quelques exemples seront présentés.

II.1.2 Propriétés des ondelettes

Voici les propriétés souhaitées pour les ondelettes. Bien entendu, il est pratiquement impossible de fusionner toutes ces propriétés dans une même ondelette. C'est pourquoi il en existe plusieurs types, répondant chacune à un besoin particulier, à une application particulière.

- **Orthogonalité** : si les ondelettes sont orthogonales, alors la transformée ondelette rapide est parfaite et la décomposition numérique, stable.
- **Support compact** : la présence de la fonction ondelette dans un intervalle fini est requise lors de l'implantation. Par contre, faute de mieux, il est aussi possible d'utiliser des fonctions à décroissance rapide qui ne seraient pas à support compact.
- **Coefficients rationnels** : dans les implantations, si les coefficients sont des puissances de deux la machine pourra les traiter beaucoup plus efficacement.
- **Symétrie** : si la fonction de dilatation et l'ondelette sont symétriques, alors les filtres sont à phase linéaire. Sans cette propriété, on risque d'introduire une distorsion de phase lors de la reconstruction de l'ondelette.
- **Régularité** : l'irrégularité d'une ondelette pourrait nuire à son taux de compression. En effet, afin de compresser un signal, certains coefficients sont **fixés** à zéro et, si l'ondelette est peu régulière, la qualité de la reconstruction pourrait être faible. De cet argument découle que la régularité des fonctions est plus importante à la décomposition que lors de leur reconstruction. De plus, davantage de régularité implique une meilleure localisation temporelle des filtres.
- **Nombre de moments nuls** : il détermine le taux de convergence des approximations ondelettes et caractérise aussi la régularité de celles-ci.
- **Expression analytique** : s'il est possible d'obtenir les expressions analytiques de ϕ et de ψ_i , l'analyse harmonique est grandement facilitée. Par contre, de telles expressions ne sont pas toujours disponibles et leur absence ne nuit en aucune façon au travail des ondelettes.

- **Interpolation** : si la fonction d'échelle est discrète, alors il est aisé de la reconstruire à partir d'échantillons puisque c'est précisément ceux-ci qui forment la fonction.

II.2 Transformée en ondelettes continue

La transformée en ondelettes d'une fonction est une représentation de cette fonction sur la base d'ondelettes définie précédemment. Ainsi, de même que la TF continue est une décomposition atomique d'atomes $e^{i\omega t}$, la TO continue (ou TOC) est une décomposition d'atomes $\psi_{a,b}$ comme l'exprime la définition suivante.

II.2.1 Définition

Soit ψ une ondelette analysante et $s(t)$ un signal ou une fonction de $L^2(\mathbb{R})$. On définit la transformée en ondelettes continue (TOC)

$$W_\psi[s](b, a) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \overline{\psi}_{a,b}(t) dt = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \overline{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (\text{II.2})$$

$W_\psi[s](b, a)$: est appelé coefficient d'ondelette.

Le facteur $\frac{1}{\sqrt{C_\psi}}$ est un facteur de normalisation. On peut voir cette transformée comme un

microscope mathématique polarisé positionné en b , d'agrandissement $\frac{1}{a}$. On a remarqué que plus le facteur d'échelle " a " est important, plus l'ondelette est étalée. Pour un facteur d'échelle assez grand, la représentation des coefficients d'ondelettes en fonction de b , la position, donne une représentation de "la forme générale de la fonction" (comme si on regardait la fonction de loin). Par contre un facteur d'échelle faible correspond à une représentation des singularités (comme si on regardait la fonction de près). Cette propriété de "microscope" est très utile pour l'étude de la régularité d'une fonction ou pour l'analyse de structures fractales où une même structure se retrouve à des échelles différentes.

Cette transformation est dite continue car c'est une fonction continue des paramètres de dilatation, translation. On verra que ces paramètres peuvent être discrétisés, on obtient alors la transformée en ondelettes discrète (ou TOD) de même qu'il existe une transformée de Fourier discrète.

II.2.2 Quelques propriétés de la transformée en ondelettes

a- Conservation de l'énergie et formule d'inversion

Comme la transformée de Fourier, la transformée en ondelette possède la propriété de conservation de l'énergie, ce qui signifie qu'il n'y a pas de perte d'information entre la fonction et sa transformée. Cette propriété est importante car elle garantit que la transformation en ondelettes possède des propriétés de stabilité; en partant d'un signal qui a une caractéristique physique donnée (énergie finie), on obtient une fonction qui a les mêmes propriétés. Le seul point délicat est que cette énergie n'est pas définie pour la mesure de Lebesgue $dbda$ mais la mesure $db \frac{da}{a^2}$ (Daubechies, 1992; Flandrin, 1993).

- **Propriété de conservation de l'énergie**

Soit ψ une ondelette analysante et $s(t)$ un signal (fonction) de $L^2(\mathbb{R})$, alors

$$\int |s(t)|^2 dt = \iint |W_\psi[s](b, a)|^2 \frac{da}{a^2} db \quad (\text{II.3})$$

La famille d'ondelettes $\psi_{a,b}$ étant une base de L^2 , toute fonction de carré intégrable peut s'écrire sur cette base. La base étant "sur complète", l'écriture n'est pas unique. La propriété de conservation d'énergie (II.1) conduit à la propriété (II.2) qui propose une de ces écritures.

Démonstration : Grace à l'égalité de Parseval on peut réécrire le terme de droite comme

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |W_\psi[s](b, a)|^2 db \frac{da}{a^2} &= \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |\hat{W}_\psi[s](v, a)|^2 dv \frac{da}{a^2} \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_{b \in \mathbb{R}} \int_{a>0} |\hat{s}(v)|^2 a |\hat{\psi}(av)|^2 dv \frac{da}{a^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}} |s(v)|^2 a dv \quad \text{En intégrant d'abord par rapport à } a. \\ &= \int |s(t)|^2 dt \quad \text{En utilisant de nouveau Parseval.} \end{aligned}$$

- **Propriété d'inversion**

Soit ψ une ondelette analysante et $s(t)$ un signal (fonction) de $L^2(\mathbb{R})$, alors

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \iint W_\psi[s](b, a) \overline{\psi}_{a,b}(t) \frac{da}{a^2} db \quad (\text{II.4})$$

b- Linéarité, translation et dilatation

✚ Linéarité

La transformée en ondelettes est linéaire, c'est-à-dire

$$W(\alpha s_1 + \beta s_2) = \alpha W s_1 + \beta W s_2 \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, (s_1, s_2) \in L^2(\mathbb{R})^2 \quad (\text{II.5})$$

✚ Translation

Une des propriétés importante de la transformée en ondelettes continue est l'invariance en translation. En effet

$$W_\psi[s(t - \tau)] = W_\psi[s](b - \tau, a) \quad (\text{II.6})$$

Cette propriété est très importante dans le cadre de l'analyse de certains signaux tels que fractale, turbulence, signaux sismiques. En effet, une interprétation des coefficients d'ondelettes devient extrêmement difficile, si la transformée n'est pas comparable pour un signal donné et le même signal décalé dans le temps (ou l'espace).

Dilatation

La transformée en ondelettes a également une propriété de dilatation. En effet, si la famille d'ondelettes est déterminée par l'équation (II.1) (avec une normalisation L^2), on a la relation

$$W_\psi[s(kt)] = k^{-1/2} W_\psi[s](kb, ka) \quad (\text{II.7})$$

Cette propriété liée à l'échelle est très utile pour l'analyse des fractales.

Afin de s'affranchir du facteur de dilatation $k^{-1/2}$, la normalisation L^1 de la famille d'ondelettes peut s'avérer extrêmement importante. En effet, ceci conduit à une propriété d'invariance en dilatation.

$$W_\psi[s(kt)] = W_\psi[s](kb, ka) \quad (\text{II.8})$$

c- Noyau reproduisant

La transformée en ondelettes continue étant une fonction de L^2 , on peut se demander si toute fonction de carré intégrable peut être considérée comme la transformée en ondelettes d'une ondelette particulière. Nous allons voir que ceci n'est pas vrai. En effet, si on désigne par H_ψ l'ensemble des transformées en ondelettes sur L^2 ,

$H_\psi = W(L^2(\mathfrak{R}))$ alors $H_\psi \subset L^2(\mathfrak{R}, a^{-2} da db)$ et l'inclusion est stricte. Pour qu'une fonction puisse être considérée comme une transformée en ondelettes, il faut qu'elle vérifie une équation de reproduction (II.4) comme nous l'indique la propriété suivante.

- **Propriété du noyau reproduisant :**

On pose :

$$P_\psi((a', b'), (a, b)) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int \overline{\psi}_{a,b}(t) \psi_{a',b'}(t) dt \quad (\text{II.9})$$

Une fonction S appartient à l'espace H_ψ si et seulement si elle vérifie l'équation de reproduction suivante

$$s(a, b) = \iint P_\psi((a', b'), (a, b)) S(a', b') \frac{da'}{a^2} db' \quad (\text{II.10})$$

P_ψ est appelé noyau reproduisant et H_ψ est un espace de Hilbert à noyau reproduisant.

Cette propriété signifie qu'une fonction de L^2 peut être considérée comme une transformée en ondelettes s'il existe une fonction $s(a', b') = (S, P_{a', b'})$

II.3 Transformée inverse

Nous sommes partis d'une fonction à une variable et nous avons défini la transformée en ondelettes qui est une fonction à deux variables. Il semble logique que cette transformation soit redondante, et qu'il soit donc possible de reconstruire une fonction à partir de ses coefficients d'ondelettes (en des termes plus simples, l'espace des fonctions qui sont des transformées en ondelettes est plus gros que l'espace des fonctions de carré sommable). Et en effet, cette transformation possède bien des propriétés d'injectivité comme le montre le théorème de reconstruction suivant.

Théorème

Soit une ondelette qui, en plus des propriétés oscillantes et de normalisation, vérifie la condition d'admissibilité suivante:

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(v)|^2}{v} dv < +\infty \quad (\text{II.11})$$

Alors pour toute fonction (signal) s de carré sommable, on a la formule de reconstruction:

$$s(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{a>0} \int_{b \in \mathbb{R}} W_\psi[s](b, a) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db \frac{da}{a^2} \quad (\text{II.12})$$

Démonstration

On prend la définition de la transformée en ondelette de $s(t)$:

$$W_\psi[s](b, a) = \langle s, \psi_{a,b} \rangle = \int_{\mathbb{R}} s(t) \psi_{a,b}^*(t) dt$$

Notons :

$$g_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} g\left(\frac{t}{s}\right) \quad \text{et} \quad \tilde{g}(t) = g(-t)$$

Avec cette notation, on a alors :

$$W_\psi[s](b, a) = \int s(t) \tilde{\psi}_a^*(b-t) dt = s * \tilde{\psi}_a^*(b)$$

En prenant la transformée de Fourier par rapport à b et en utilisant les propriétés d'échange entre la convolution et la multiplication de la transformée de Fourier, on obtient donc:

$$TF[W_\psi[s](b, a)] = \hat{s}(v) \sqrt{a} \hat{\psi}^*(av)$$

Notons maintenant $d(t)$ le terme de droite dans la formule de reconstruction (II.12); on doit montrer que $d \equiv s$. Dans $d(t)$, l'intégrale par rapport à b peut se voir comme la convolution de $W_\psi[s](\cdot, a)$ avec ψ_a . En effet, on note que ce terme peut se mettre sous la forme suivante:

$$d(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{a>0} W_\psi[s](\cdot, a) * \psi_s(t) \frac{da}{a^2}$$

Donc

$$\hat{d}(v) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \hat{s}(v) \sqrt{a} \hat{\psi}^*(av) \frac{da}{a^2}$$

$$\hat{d}(v) = \frac{1}{C_\psi} \hat{s}(v) \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(av)|^2}{a} da = \hat{s}(v)$$

En faisant le changement de variable $a' = av$.

On a donc $\hat{s} = \hat{d}$ et donc $s = d$, ce qui achève la démonstration. Par contre la transformée en ondelettes n'est pas surjective (Daubechies, 1992): pour qu'une fonction soit la transformée en ondelettes d'une fonction de carré sommable, il faut qu'elle satisfasse une équation au noyau reproduisant que nous explicitons rapidement. Cela confirme ce que nous disons plus haut; en passant à la transformée en ondelettes, on arrive dans un espace

qui est beaucoup plus gros que l'espace de départ (l'espace des fonctions de carrée sommable).

On remarque tout d'abord en réinjectant la formule de reconstruction (II.12) dans le calcul de la transformée en ondelettes de s que pour tout $b_0 \in \mathbb{R}$ et $a_0 > 0$:

$$W_\psi[s](b_0, a_0) = \frac{1}{C_\psi} \iiint W_\psi[s](b, a) \psi_{a,b}(t) \psi_{a_0, b_0}^*(t) dt db \frac{da}{a^2} \quad (\text{II.13})$$

Si on note alors $K(a_0, b_0, a, b)$ le noyau reproduisant suivant:

$$K(a_0, b_0, a, b) = \frac{1}{C_\psi} \int \psi_{a,b}(t) \psi_{a_0, b_0}^*(t) dt$$

L'équation (II.13) devient:

$$W_\psi[s](b_0, a_0) = \frac{1}{C_\psi} \iint K(a_0, b_0, a, b) W_\psi[s](b, a) db \frac{da}{a^2}$$

Il est alors possible de montrer qu'une fonction $W_\psi(b, a)$ est la transformée en ondelettes d'une fonction s si et seulement si W satisfait l'équation au noyau reproduisant (Daubechies, 1992; Gosman et al.1998):

$$W_\psi(b_0, a_0) = \frac{1}{C_\psi} \iint K(a_0, b_0, a, b) W_\psi(b, a) db \frac{da}{a^2} \quad (\text{II.14})$$

Remarque :

Dans la pratique, il est parfois intéressant de faire une décomposition du signal par une ondelette analysante g et de reconstruire le même signal à partir d'une autre ondelette h différente de g , dans ce cas nous avons :

La décomposition d'un signal $s(t)$ avec l'ondelette g :

$$W_\psi[s](b, a) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \bar{g}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

et la synthèse avec une autre ondelette de reconstruction h :

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \iint W_\psi[s](b, a) \bar{h}_{a,b}(t) \frac{da}{a^2} db$$

La condition d'admissibilité dans ce cas sur les fonctions g et h ($g, h \in L^2(\mathbb{R})$) est donnée par :

$$C_{g,h} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{\hat{g}}(\xi) \hat{h}(\xi)}{|\xi|} d\xi < +\infty$$

Il suffit dans ce cas que l'une ou l'autre des fonctions h et g soit une ondelette analysante.

II.4. Exemples d'ondelettes

De nombreuses fonctions peuvent vérifier la condition d'admissibilité (II.11) , en effet on cherche une ondelette qui offre un bon compromis entre la résolution temporelle et fréquentielle, un tel choix dépend beaucoup de l'objectif posé. Des critères supplémentaires tels que régularité, symétrie, décroissance rapide à l'infini peuvent être nécessaires.

Nous allons rappeler quelques exemples historiques d'ondelettes analysantes ainsi que quelques unes de leurs propriétés.

II.4.1 ondelettes continues

a- Ondelette de Morlet

L'ondelette de Morlet a un grand intérêt dans l'étude des signaux sismiques, comme nous allons le voir plus tard, puisque sa forme "ressemble" beaucoup à celle de l'ondelette sismique (l'impulsion). Cette ondelette est inspirée du signal élémentaire de Gabor elle est obtenue par modulation d'une gaussienne :

$$\psi(t) = (\pi_0)^{-\frac{1}{4}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 + 2i\pi\nu_0 t \right] \quad (\text{II.15})$$

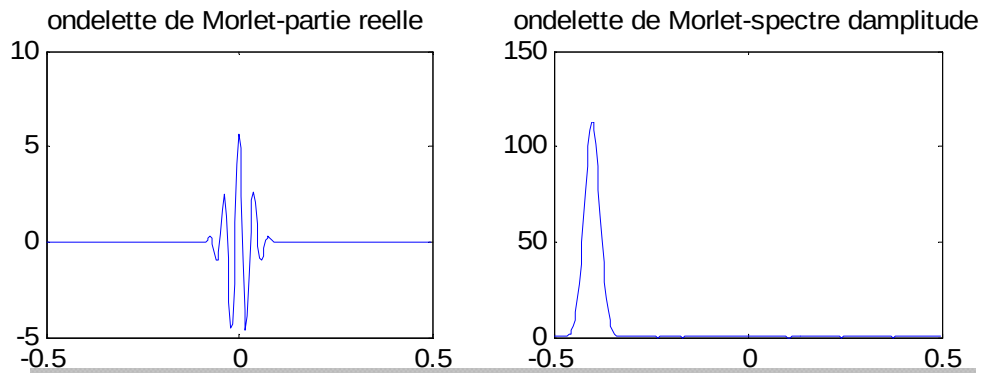


Fig. II.1 Ondelette de Morlet et sa transformée de Fourier

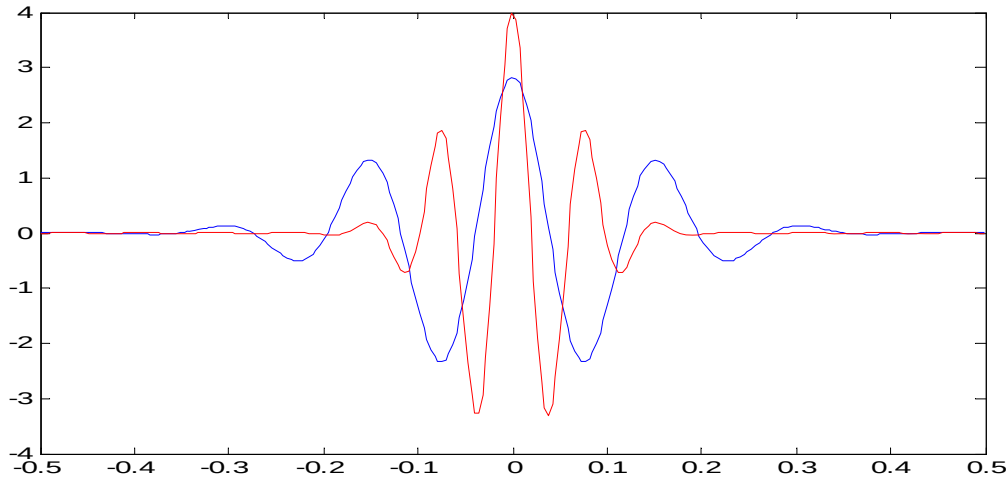


Fig. II.2 Partie réelle d'ondelette de Morlet avec une version délatée

Une telle ondelette a l'avantage d'être explicite, cependant, elle n'est pas admissible (inégalité d'Heisenberg) car sa transformée de Fourier ne s'annule pas à l'origine (théorème II.1) :

$$\hat{\psi}(0) = \sqrt{2}(\pi_0^2) \exp \left[-\frac{1}{2} (2\pi\nu_0)^2 \right] \neq 0 \quad (\text{II.16})$$

Or en supposant des conditions sur t_0 et v_0 , on peut imposer une valeur faible en module pour $\hat{\psi}(0)$ tout en ne tolérant qu'un petit nombre d'oscillations pour $\psi(t)$, généralement on choisit $5 < 2\pi v_0 < 6$

L'ondelette de Morlet et sa transformée de Fourier (Fig.II.1) ont la propriété d'appartenir à l'espace de Schwartz S (espace des fonctions infiniment dérivable et à décroissance rapide), donc elle est bien localisée en espace et en fréquence et numériquement on peut la considérer à support compact, de plus elle est complexe ce qui permet une analyse en module et argument (deux représentations en module et en phase) et sa régularité permet de l'utiliser pour l'étude des régularités des fonctions. De plus, son caractère directionnel est très utile pour des fonctions possédant des directions privilégiées comme le sont les images sismiques.

b- Chapeau mexicain

Le chapeau mexicain (Fig.II.3), ondelette réelle qui doit son nom à sa forme, est construite à partir de la dérivée seconde de la gaussienne :

$$\psi(t) = (1 - t^2) \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \quad (\text{II.17})$$

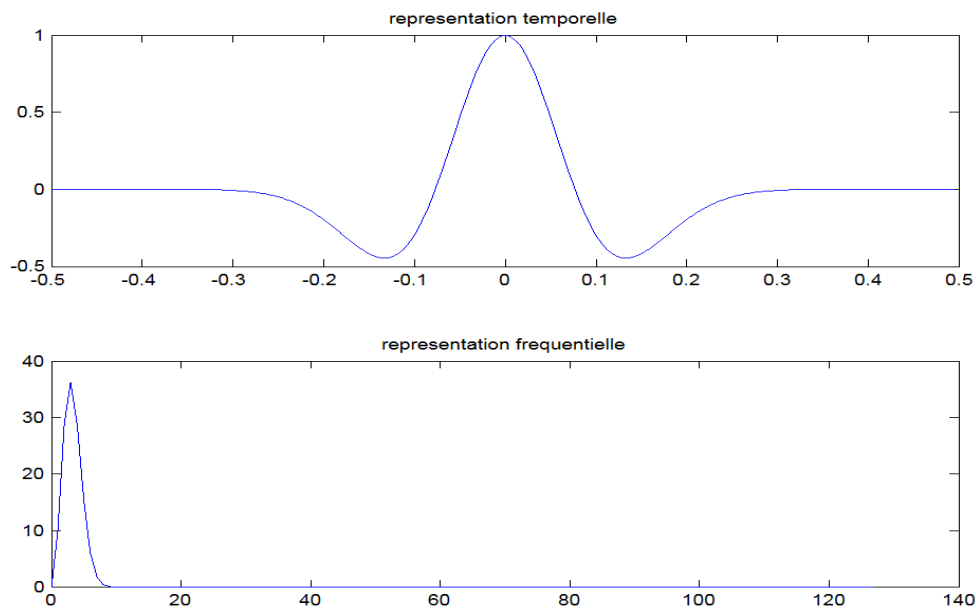


Fig.II.3 Partie réelle du chapeau mexicain et son spectre d'amplitude

Cette ondelette appartient à l'espace de Schwartz S, elle est symétrique, ce qui permet de ne pas introduire des décalages (déphasages) dans la transformée en ondelettes contrairement à des ondelettes non symétriques (comme le sont les ondelettes orthogonales à support compact de Daubechies), elle est particulièrement adaptée à la détection des discontinuités.

II.4.2 Ondelettes orthogonales

a- Ondelette de Haar

Cette ondelette est connue depuis le début du 20 siècle, à l'époque on cherchait des bases orthonormées simples de $L^2(\mathbb{R})$ et l'ondelette de Haar en donne une assez simplement :

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

Nous ne parlerons pas plus de cette ondelette car elle ne convient guère aux applications sismiques et présente l'inconvénient d'être non continue et sa transformée de Fourier décroît seulement en $|t|^{-1}$ ce qui est une mauvaise localisation en fréquence.

Ce manque de régularité empêche d'étudier les fonctions régulières et de caractériser certains espaces comme l'espace de Sobolev ou de Holder.

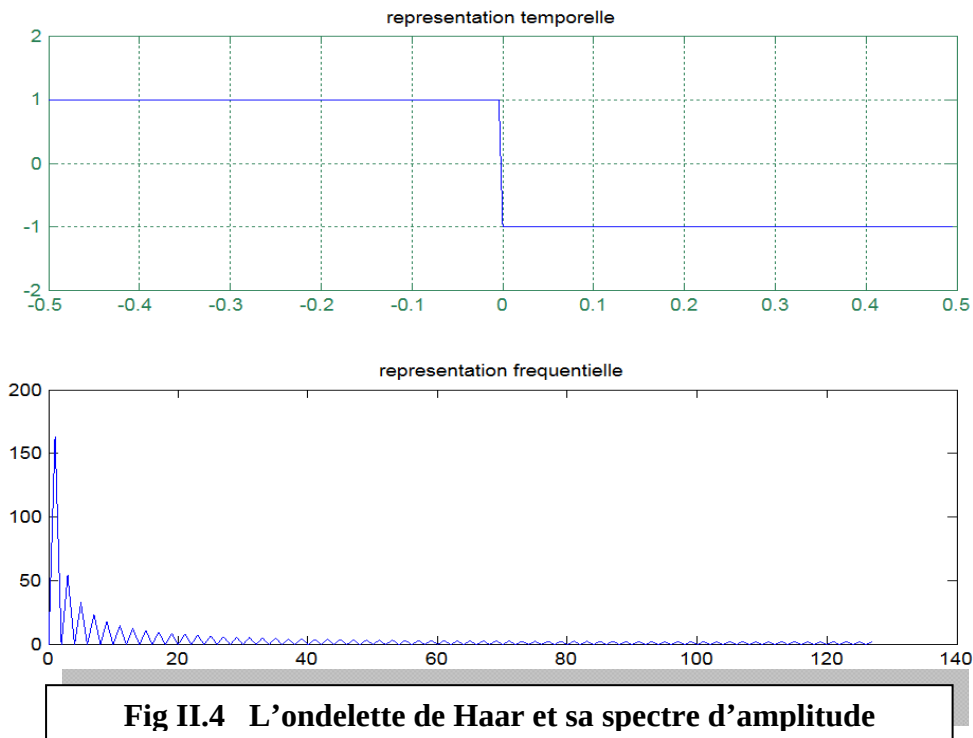


Fig II.4 L'ondelette de Haar et sa spectre d'amplitude

II.5. Premiers exemples de transformées en ondelettes

Afin de mieux comprendre la transformée en ondelettes, nous allons l'appliquer sur des signaux simples. L'ondelette mère utilisée est l'ondelette de Morlet. En traitement sismique, le choix de cette ondelette mère n'est pas aussi crucial que pour la compression d'image ou la détection de singularité. On recherche surtout une ondelette qui offre un bon compromis entre la résolution temporelle et fréquentielle.

L'ondelette de Morlet a la qualité d'être explicite, elle est de plus complexe, ce qui permet d'accéder à la phase de $W_\psi[S](b, a)$.

II.5.1 Analyse temps-fréquence et temps-échelle :

a- Analyse Temps_ Fréquence :

L'analyse par ondelettes se comporte essentiellement comme la transformée de Gabor en ce qui concerne l'analyse temps_ fréquence. C'est à dire qu'elle permet de caractériser assez facilement des signaux modulés en amplitude et en fréquence.

Nous pouvons ici expliciter brièvement la façon dont notre programme a calculé cette transformée en ondelettes. Les paramètres importants à retenir sont n_a et $a_{\min}$. Le programme transforme un vecteur de n_t points en une matrice de taille $n_t \times n_a$. Le paramètre n_a est donc le nombre de voies sur lesquelles on décompose le signal. Le paramètre $a_{\min}$ est la valeur minimale du paramètre échelle a à partir de laquelle on commence à calculer $W_\psi[s](b, a)$. On peut aussi imposer au programme la valeur de l'incrément de a qui permet d'échantillonner l'axe des échelles. Ces différents paramètres permettent d'explorer la plage d'échelle qui nous intéresse, à la résolution voulue.

b- Aspects Temps_ Echelle :

Nous avons vu que les ondelettes sont extrêmement précises à petite échelle, car elles sont construites par dilatations d'une unique fonction (elles sont de forme constante et de taille variable). Pour employer un poncif du genre, on dit que les ondelettes fonctionnent comme un "microscope mathématique", dont la résolution serait fixée par la variable de dilatation, et l'optique serait déterminée par le choix de l'ondelette.

Nous nous limitons ici à des fonctions à valeurs réelles, qui sont donc entièrement déterminées par leur projection sur $H^2(\mathcal{R})$. Par conséquent, l'utilisation d'ondelettes progressives est pertinente, et nous utiliserons dans tous les exemples une ondelette de Morlet $\psi(t) = e^{-t^2/2} e^{iw_0 t}$ en prenant $w_0 = 2\pi$.

II.5.2. Exemple d'un chirp

Reprenons sur l'exemple simple que nous avons vu précédemment (chapitre1). Il est facile de voir (en utilisant la formule de Taylor) que sous les mêmes hypothèses que plus haut, la TO d'un tel signal se comporte comme

$$W[s](b, a) = \sum_{l=1}^L A_l(b) \cos \phi_l(b) \bar{\psi}(a \phi'_l(b)) + r(b, a) \quad (\text{II.19})$$

Où la taille du reste $r(b, a)$ dépend des dérivées premières et secondes dérivatives des fonctions d'amplitude et phase. C'est-à-dire

$$r(b, a) \sim o\left(\frac{|A'_l|}{A_l}, \frac{|\phi_l''| |\phi_l|}{|\phi'_l|^2}\right) \quad (\text{II.20})$$

Supposons maintenant que l'ondelette $\psi(t)$ soit bien localisée dans l'espace de Fourier au voisinage d'une valeur w_0 de la fréquence. Si on considère un des termes de la somme dans (II.19), on peut voir facilement que le l ème terme est quant à lui localiser au voisinage d'une courbe, appelée arête de la TO, d'équation $a = w_0 / \phi'_l(b)$. La mesure de cette courbe fournit donc une estimation de la fréquence instantanée de cette composante

du signal. Un exemple de chirp linéaire est présenté sur la figure (II.5). On observe bien que le module de la TO est localisé au voisinage d'une courbe représentant la fréquence instantanée du signal.

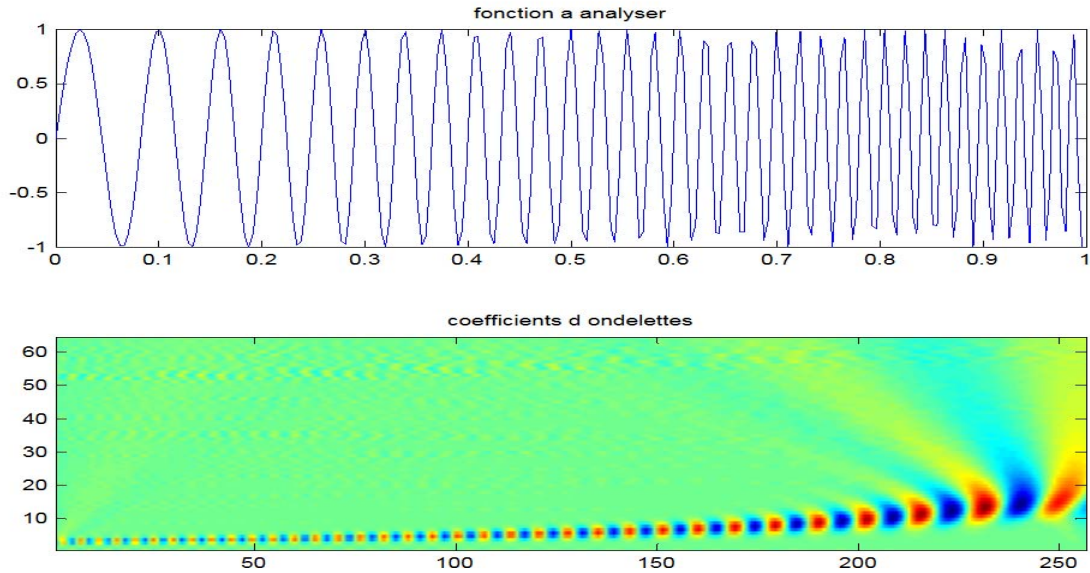


Fig. II.5 Module de la transformée en ondelettes d'un chirp

II.5.3. Distribution de Dirac

Figure (II.6) permet de visualiser le module et la phase de la transformée en ondelettes continue du signal correspondant au pic de Dirac.

Dans l'exemple du Dirac, on peut remarquer en observant le module de la transformée en ondelettes que la résolution temporelle du signal devient meilleure pour des faibles valeurs de l'échelle (hautes fréquences). On note aussi que la phase de cette transformée varie de façon régulière entre $-\pi$ et π et est organisée là où le signal possède de l'énergie. Cela veut dire qu'on peut déterminer

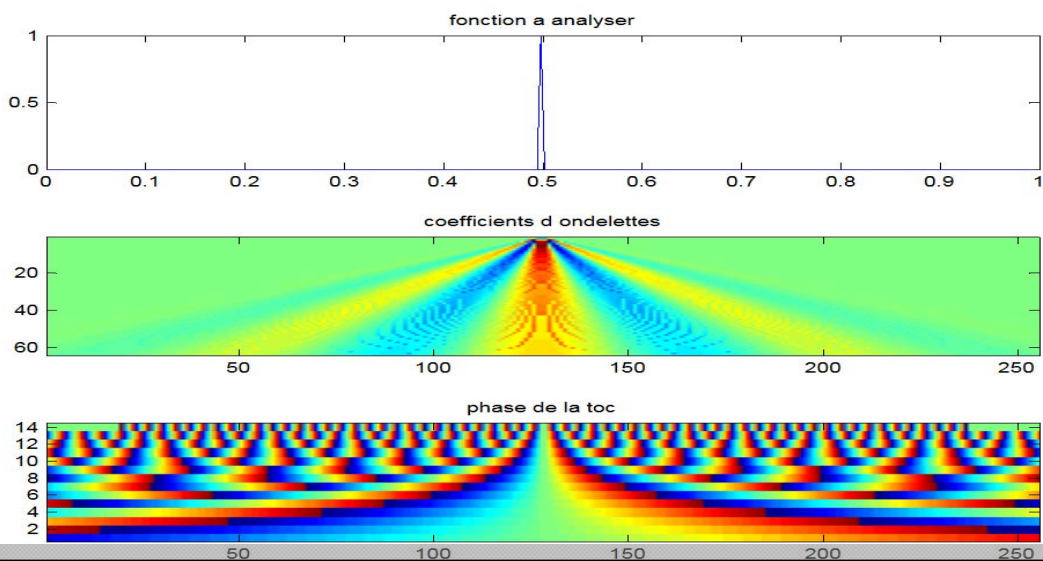


Fig II.6 Le module et la phase de la transformée en ondelettes d'un Dirac

II.5.4 Succession de deux sinusoïdes

On peut montrer dans l'exemple ci-dessous comment la transformée de Fourier est incapable de donner une localisation temporelle du signal. On considère pour ce la un signal s composé de deux fréquences pures différentes ayant leurs supports temporels disjoints (figure I.1) .Le spectre de Fourier de ce signal permet de localiser très précisément les deux raies fréquentielles contenues dans le signal Mais le principe d'incertitude d'Heisenberg interdit d'avoir simultanément la localisation temporelle.

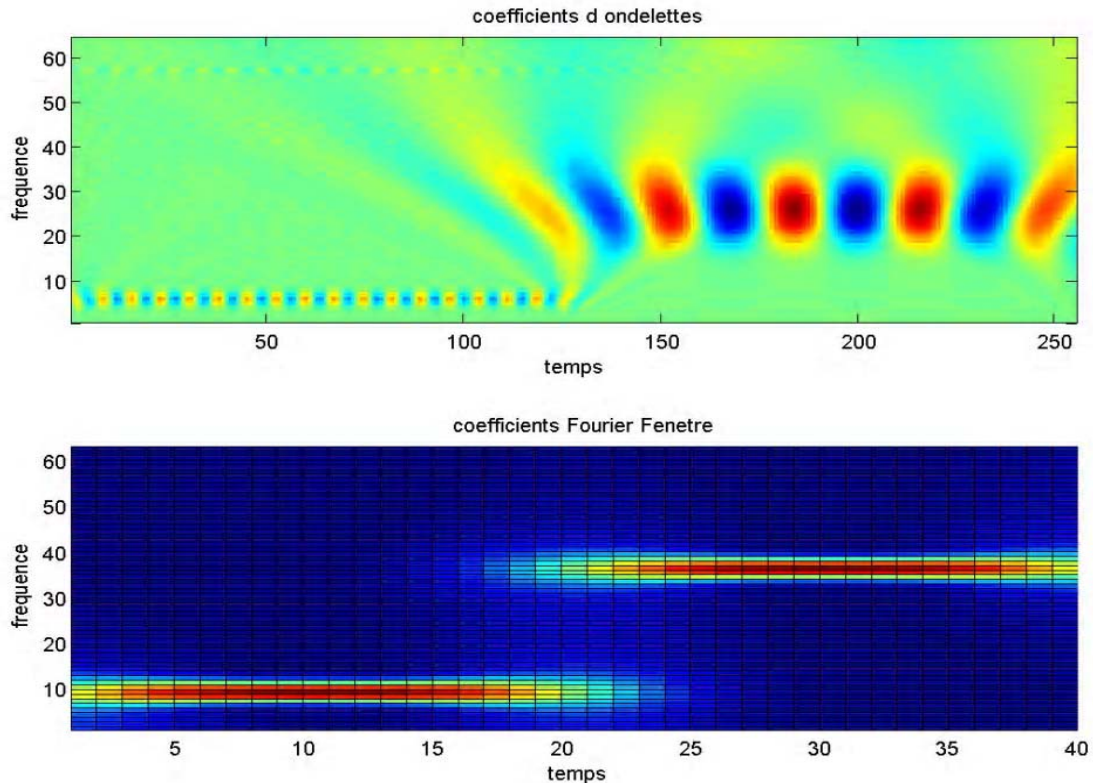


Fig II.7 Comparaison entre la transformée en ondelettes et TFCT

On peut demander pourquoi dans le diagramme temps- échelle (figure(II.7), les deux composantes du signal n'ont pas la même amplitude alors que dans la représentation temporelle, les deux sinusoïdes ont la même amplitude. Cela s'explique par le fait que le scalogramme (module de la transformée en ondelettes au carré) représente une densité d'énergie associée à la mesure $db \frac{da}{a^2}$. Ce que veut dire que les composantes du signal qui sont à une fréquence plus faible (a plus grande) ont des valeurs plus grandes pour leur module. Si l'on venait à diviser les valeurs du module de la TO par la valeur de l'échelle a qui leur correspond, les deux composantes sinusoïdales du signal seraient représentées de la même façon. Nous avons aussi représenté le module de la TFCT à la même figure (II.7): on voit que l'analyse temps- fréquence et l'analyse temps- échelle sont efficaces pour déterminer les différentes caractéristiques du signal.

II.5.5. Exemples de représentations temps -fréquence d'un signal sismique réel

Les figures II.10 (a), (b), (c) présentent différentes représentations d'un signal sismique réel. Les représentations avec la *TO* et la *TFCT* en (b) et (c) semblent à première vue équivalentes, elles présentent quatre motifs aux coordonnées (75, 135); (87, 65); (175,50); (250, 60). Ces quatre motifs correspondent respectivement à une onde directe, une onde réfléchie, une onde de Rayleigh rapide, et une onde de Rayleigh lente.

L'observation des deux images (b) et (c) des coefficients de la *TFCT* et *TOC* précédentes, les quatre motifs principaux sont nettement visibles et très bien définis. On voit alors que les deux ondes hautes fréquences (onde directe et réfléchie) nécessitent une meilleure résolution temporelle que les deux autres ondes basses fréquence. Ceci montre que pour cet exemple, la représentation avec la *TO* est plus adaptée qu'avec la *TFCT*. En effet, en regardant avec attention, il est possible d'observer qu'avec la *TFCT*, les motifs des ondes hautes fréquences sont dilatés horizontalement, et les motifs des ondes basses fréquences sont dilatés verticalement. C'est moins pour la *TOC*.

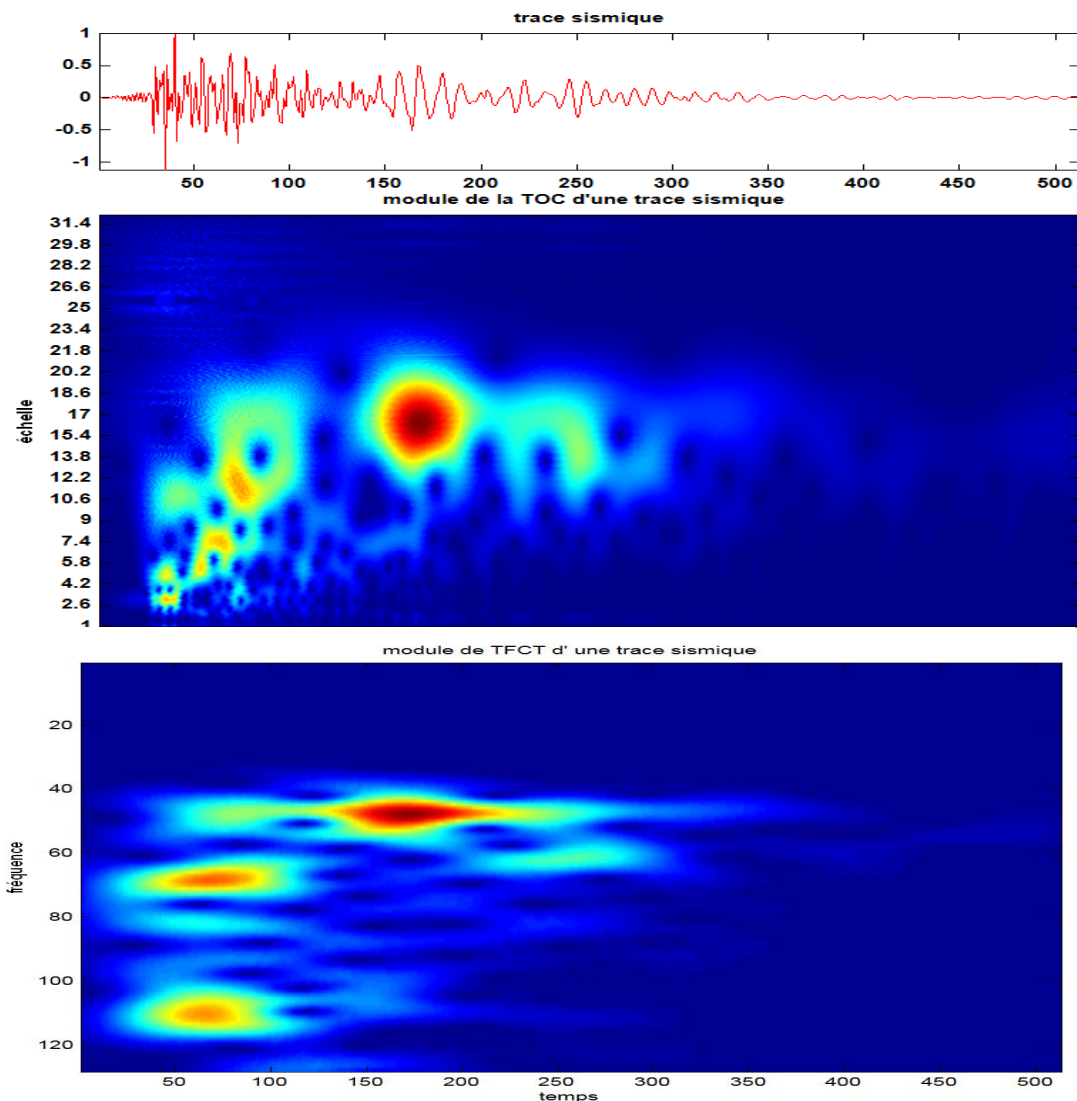


Fig II.8 Représentations temps -fréquence d'un signal sismique réel

Comparaison :

On peut comparer les différents effets de la transformée de Fourier à fenêtre glissante et de la transformée en ondelettes sur les boîtes d'Heisenberg. La transformée de Fourier à fenêtre glissante choisit le centre de la boîte, mais par contre, la forme et la surface sont imposées : Pour la transformée en ondelettes, on choisit la localisation temporelle et la forme de la boîte tandis que la surface de la boîte et la fréquence moyenne sont imposées, la surface de la boîte est de toute façon minorée par le principe d'incertitude d'Heisenberg ; par contre la fréquence moyenne est liée à l'ondelette mère choisie. Considérons le signal défini précédemment (deux sinusoides et deux masses de Dirac), sa transformée en ondelettes permet, grâce à la fenêtre dont la taille varie avec la fréquence, une caractérisation suffisante des deux phénomènes (Fig. I.15).

II.6 Algorithmes de calcul numérique de la transformation en ondelettes

Dans ce chapitre, divers algorithmes permettant de calculer les différentes transformées en ondelettes présentées au chapitre précédent vont être exposés. Nous avons vu que le type de transformée est très lié au type d'ondelette que l'on veut utiliser. Il en est de même pour le choix d'un algorithme.

II.6.1 Calcul par intégrale directe

La définition de la transformation en ondelettes se présente sous forme d'une intégrale. Le calcul direct est intuitif et correspond à la discrétisation de l'intégrale :

$$W_{\psi}[s](b, a) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \overline{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

L'algorithme du calcul direct est présenté sur le diagramme (voir annex.1.1). Cette méthode directe est en $O(n)$ si n est le nombre de données dont on dispose. A une échelle donnée, le coût de la transformée pour le calcul des n coefficients est donc en $O(n^2)$, ce qui est assez coûteux.

II.6.2 Calcul par produit de convolution

On peut voir la définition de la transformation en ondelettes comme le produit de convolution entre le signal et l'ondelette dilatée. La définition du produit de convolution est écrite sous la forme :

$$f(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t - \tau) h(\tau) d\tau \quad (\text{II.21})$$

L'expression de la TO peut être re-écrite :

$$W_{\psi}[s](b, a) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \overline{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \overline{\psi}\left(-\frac{b-t}{a}\right) dt \quad (\text{II.22})$$

Si l'on pose l'opérateur de parité : $P : p \rightarrow P_s$ tel que $P_s(t) = s(-t)$, la restriction de

$W_{\psi}[s](., a)$ est le produit de convolution de $s(t)$ avec P_{ψ_a} .

$$W_\psi[s](b, a) = \frac{1}{a} [s * P_{\psi_a}(b)] \quad (\text{II.23})$$

Cette remarque nous conduit à l'utilisation de l'algorithme de convolution **''conv''** disponible dans MATLAB. Le schéma de calcul est présenté sur l'annexe II.2. Pour le même test, cette procédure a besoin de 4.34 secondes de calcul.

II.6.3 Calcul par l'algorithme FFT

En transposant le calcul de la TO dans le domaine fréquentiel grâce à la formule de Parseval, on obtient :

$$W_\psi[s](b, a) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \overline{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}(w) \overline{\hat{\psi}}(aw) e^{iwb} dw \quad (\text{II.24})$$

La transformée en ondelettes continues en fonction de la position b peut être vue comme la transformée de Fourier inverse du produit des transformées de Fourier des deux fonctions initiales $\hat{s}(w) \overline{\hat{\psi}}(aw)$.

Ce résultat peut être obtenu à partir de la formule de convolution. Dans le plan fréquentiel, le produit de la convolution devient le produit direct: $W_\psi[s](w, a) = \hat{s}(w) \overline{\hat{\psi}}_a(aw)$. En utilisant l'algorithme FFT et IFFT de MATLAB, on a l'algorithme adapté comme le montre l'annexe II.3.L' exécution du test proposé dure 0.3 seconde.

Le calcul peut alors se faire à l'aide de la transformée de Fourier rapide (FFT). En effet $W_\psi[s](b, a)$ est la FFT inverse du produit de deux FFT directes et le calcul se fait en

$O(n \log_2 n)$ et est donc plus rapide que la méthode directe.

Le calcul dans le domaine de Fourier présente tout de même un inconvénient dans certains cas. En effet la TO permet le calcul de tous les coefficients en même temps pour une échelle. Si on veut calculer uniquement un coefficient ou quelques coefficients, alors le calcul direct est plus rapide (en $O(n)$ au lieu de $O(n \log_2 n)$).

II.6.4 Discussion sur les algorithmes

On a présenté ci-dessus différentes méthodes pour le calcul numérique de la transformation en ondelettes. Chaque méthode a ses avantages et ses inconvénients. L'analyse de ces algorithmes nous permet de bien choisir, pour chaque type du signal, l'algorithme approprié. Le calcul direct est toujours valable et très général, même dans le cas où le signal enregistré n'est pas échantillonné avec des instants régulièrement espacés égaux (c'est très rare !). Cette méthode a un gros défaut de temps de calcul donc, elle n'est pas utilisée en réalité.

Le calcul de la TO à l'aide de FFT et IFFT améliore beaucoup le temps de calcul ; de plus, il périodise le signal à partir de son enregistrement, et ce type de calcul est parfaitement adapté aux signaux périodiques. Toutefois, il ne convient pas aux signaux non-périodiques, particulièrement aux signaux amortis. Il est possible d'ajouter pour ce type de signaux des zéros (zero padding) afin d'améliorer le résultat mais le temps de calcul est multiplié.

Le calcul par la convolution consomme un temps de calcul un peu plus élevé que celui avec la FFT et IFFT. Il convient bien au cas du signal amorti, mais il devient peu intéressant si le signal est périodique puisque l'algorithme considère que le signal est nul hors de l'intervalle d'enregistrement.

II.7. Effet de bords

Le calcul de la TOC par FFT pose un problème aux bords. En effet, la transformée de Fourier rapide suppose que la fonction soit périodique. Il se trouve donc que si les valeurs de la fonction sur les bords du support ne sont pas égales, la transformée en ondelettes agira en ce point comme s'il y avait une discontinuité. En effet, la fonction alors périodisée ne sera pas continue et le calcul de la TO en ce point ne sera pas exact.

En imagerie, ce phénomène peut avoir des répercussions sur les autres coefficients. En effet, le résultat de la transformée étant une image, il faut coder ces coefficients d'ondelettes en niveaux de gris (valeurs entières entre 0 et 255 le plus souvent). Une méthode usuelle de visualisation est la normalisation des coefficients comme suit :

$$W_{\psi}[s]_{im}(b, a) = 225 \frac{W_{\psi}[s](b, a) - \min}{\max - \min} \quad (\text{II.25})$$

Où max et min sont les valeurs maximale et minimale des coefficients calculés au préalable et $W_{\psi}[s]_{im}$ le coefficient d'ondelette codé en niveau de gris entre 0 et 255.

Si la discontinuité occasionnée par la périodisation est la plus brutale dans l'image, on risque d'avoir une très forte réponse sur les bords et très peu d'information dans les zones d'intérêt. Plusieurs méthodes peuvent être alors envisagées pour pallier cet inconvénient. Une première méthode consiste à prolonger la fonction de sorte qu'elle devienne périodique le tout en restant régulière (Fig. II.9).

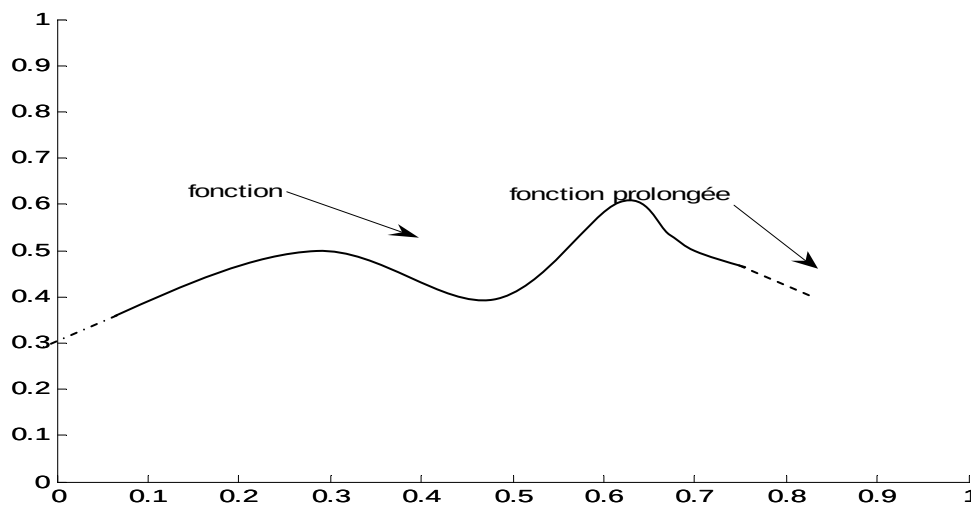


Fig II.9 Extrapolation d'une fonction afin d'éviter les problèmes de bords.

L'inconvénient de ce type de méthode est qu'elle augmente le nombre de données parfois de façon considérable. En effet la transformée de Fourier rapide fonctionnant avec des dimensions égales aux puissances de 2, cela peut contraindre à passer à la puissance de 2 supérieure. Elle reste cependant une méthode très fiable.

Une méthode moins fine, mais plus rapide consiste à ne pas tenir compte des bords. Ceci peut être fait dans la mesure où ce qui nous intéresse est au "milieu" de la fonction. Ne pas tenir compte des bords consiste à considérer comme nul les coefficients pour lesquels une ondelette n'a pu être prise en entier (Fig. II.10).

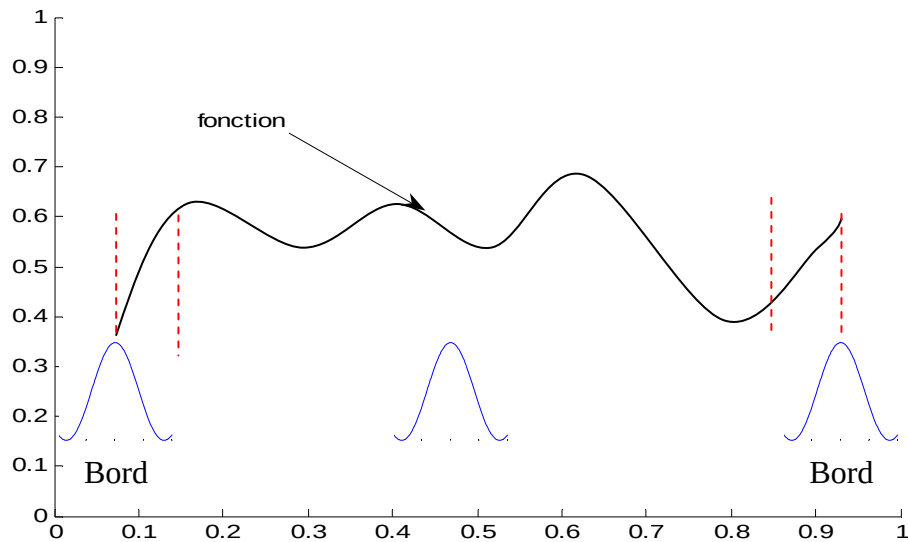


Fig II.10 Zones où les coefficients d'ondelette ne seront pas calculés de façon exacte.

II.7.1. Illustration de l'effet de bords

L'effet de bords est illustré par un exemple d'un signal cosinus $s(t) = \cos(8\pi t)$, avec les paramètres d'échantillonnage du signal sont : longueur d'enregistrement $L = 1s$ (nombre des échantillons égale à 256) avec le pas $T = 0.004s$. La transformation en ondelettes est calculée pour deux cas : signal infini et signal fini. Le module de la transformée en ondelettes est représenté sur le plan temps- fréquence aux figures II.11 et II.12. La transformation en ondelettes du signal infini est obtenue par l'algorithme de calcul de type FFT et celle du signal fini est obtenue soit par l'algorithme de calcul convolution ou par FFT avec l'ajout des zéros. Pour le signal infini, la transformée en ondelettes est régulière sur tout l'intervalle de temps or celle du signal fini a des effets irréguliers sur les bords.

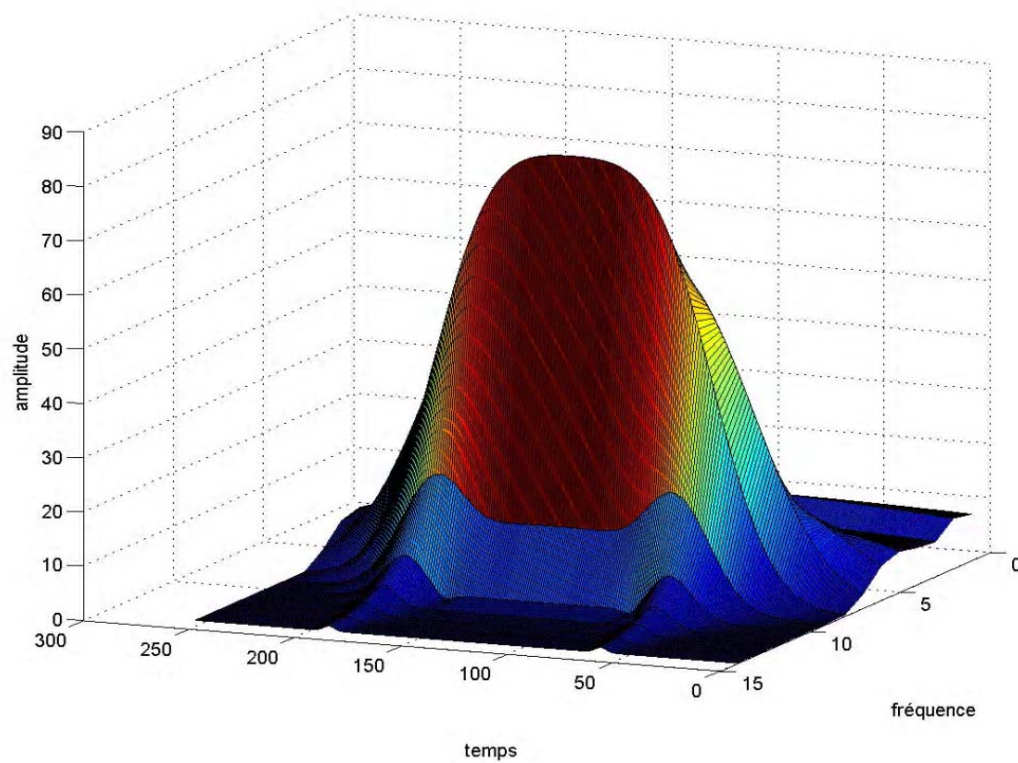


Fig II.11 Illustration de l'effet de bords (cas TO d'un signal fini)

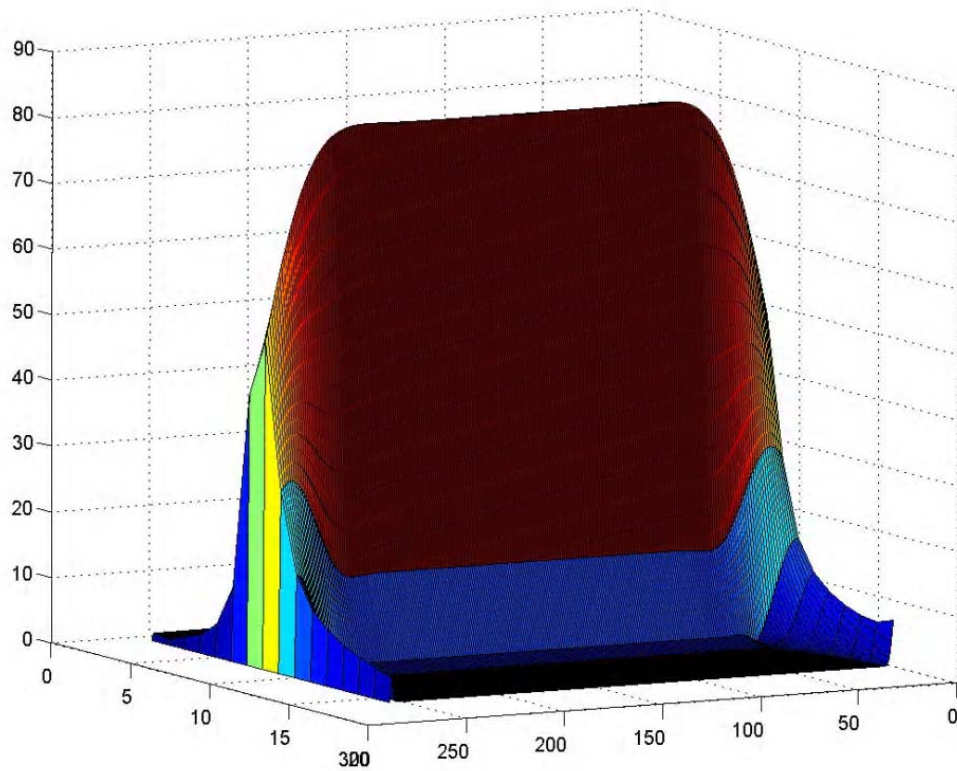


Fig. II.12 Illustration de l'effet de bords (cas TO d'un signal infini)

II.8. Facteur d'échelle minimal

Théoriquement le facteur d'échelle, a , peut varier de 0 à $+\infty$. Quand il tend vers 0 , l'ondelette tend vers la fonction de Dirac et la transformée en ondelette tend alors vers la fonction elle-même (convolution d'un Dirac avec une fonction).

En pratique, on stocke les valeurs de l'ondelette mère discrétisée, autrement dit, l'ondelette pour le facteur d'échelle 1 , ces valeurs étant au nombre de N_1 . On appelle N_a le nombre de points de discrétisation de $\psi_{a,b}$.

Pour $a < 1$, on a $N_a = a * N_1$ voir (Fig. II.13).

On remarque que N_a tend vers 0 lorsque a tend vers 0 . Il arrive donc un moment où l'ondelette n'en est plus une. Il convient donc de se fixer un nombre de points de discrétisation minimum, $N_{\min}$, de telle sorte que les valeurs discrètes de l'ondelette soient représentatives de sa forme continue. Soit $a_{\min}$ le facteur d'échelle minimum, alors

$$a_{\min} = \frac{N_{\min}}{N_1}$$

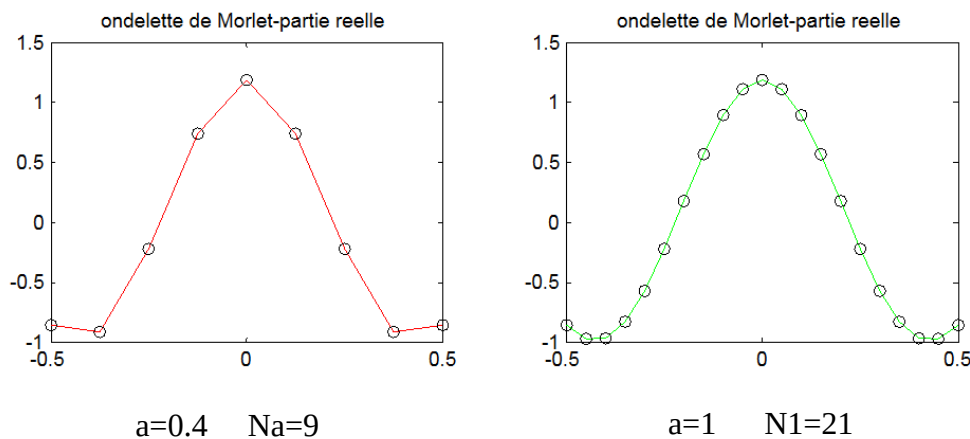


Fig II.13 Ondelettes discrétisées pour différentes échelles.

II.9 Choix des ondelettes

Le choix des ondelettes mères est un problème très important mais très peu d'auteurs ont abordé ce problème. Nous proposons ici un choix d'ondelette mère dans le contexte de traitement des signaux réels modulés en amplitude et en fréquence.

Proposition 2.1 (Choix d'ondelette mère)

L'ondelette mère optimale pour le traitement des signaux réels modulés en temps et en fréquence doit satisfaire les conditions suivantes :

- ✚ être admissible
- ✚ être progressive
- ✚ avoir une bonne localisation en temps et en fréquence
- ✚ faciliter le calcul de la relation (II.26)

$$W_{\psi}[s''](a, b) = -\frac{1}{a} T_{\psi'}[s'](a, b) = \frac{1}{a^2} T_{\psi''}[s](a, b) \quad (\text{II.26})$$

Nous insistons sur le fait que les conditions données par la proposition précédente sont des conditions suffisantes. Ainsi, nous allons maintenant vérifier ces trois ondelettes mères à la lumière de ces critères. La première et la deuxième condition sont bien vérifiées par l'ondelette de Cauchy et l'ondelette harmonique. L'ondelette de Morlet n'est strictement ni admissible, ni progressive, mais elle est numériquement admissible et progressive si le produit $2\pi_0 v_0$ est assez grand ($5 < 2\pi_0 v_0 < 6$) en pratique). Suivant la troisième condition, l'ondelette mère de Morlet a la meilleure localisation temps- fréquence avec l'incertitude plus petite égal 1/2.

L'incertitude de l'ondelette de Cauchy tend asymptotiquement vers cette limite quand n tend vers $+\infty$. L'ondelette harmonique a une incertitude infinie, mais son support dans le domaine fréquentiel est compact. Cette propriété est intéressante à propos de la séparation des composantes de fréquences très voisines. Newland [83] propose de fenêtrer le spectre de l'ondelette afin d'améliorer la localisation temporelle, toutefois, ce procédé est plus compliqué que la transformation en ondelettes proprement dite. La dernière condition est facilement vérifiée par l'ondelette de Cauchy. Les dérivées au premier et au deuxième ordre de l'ondelette de Cauchy sont aussi des ondelettes de Cauchy.

II.10. La discrétisation de la transformée en ondelettes continue

La transformée en ondelettes discrète (TOD) est générée par l'échantillonnage, dans le plan temps- échelle, de la TOC correspondante. Ainsi, la TOD est caractérisée par les deux éléments :

- **Une fonction ondelette d'analyse**

Les aspects sur le choix de la fonction d'ondelette d'analyse ont été discutés dans les sections précédentes. Le critère de base est donné par la condition d'admissibilité. De plus, pour des applications où la reconstruction est indispensable, on introduit la condition supplémentaire d'orthogonalité ou de bi- orthogonalité.

- **Le réseau d'échantillonnage temps –échelle**

L'existence de ce réseau est imposée par des nécessités pratiques : la relation qui donne l'expression de la TOC, ne peut être évaluée que avec une précision finie, associée au calculateur. Par conséquent, il faudra restreindre le domaine continu de variation de a et b à un ensemble discret qui va générer un ensemble "fini" d'ondelettes. Théoriquement, on peut choisir n'importe quel réseau d'échantillonnage, mais en pratique, pour assurer la reconstruction parfaite, on utilise un réseau d'échantillonnage dyadique.

$$\psi_{a,b} = \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \psi\left(\frac{t-2^n}{m \cdot 2^n}\right) \quad (\text{II.27})$$

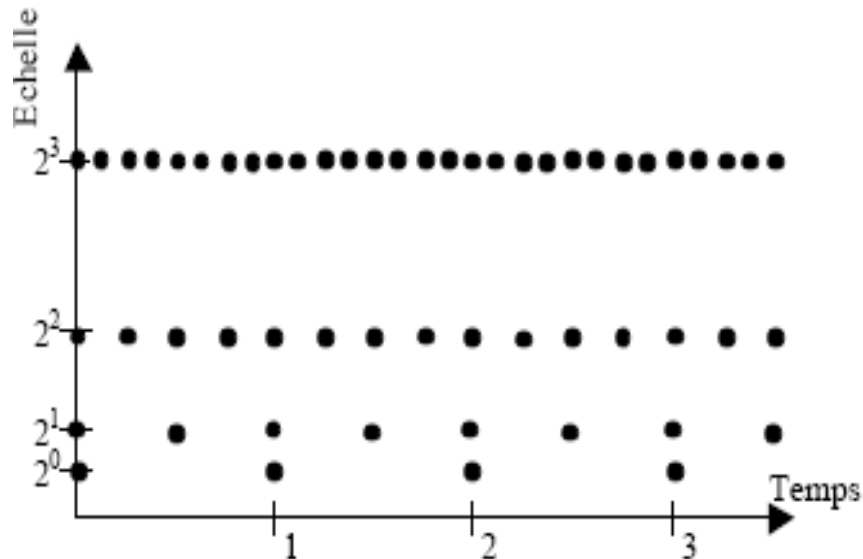


Fig. II.14 Réseau d'échantillonnage dyadique dans le plan temps- échelle

En conclusion, le terme *transformation en ondelettes discrète* est utilisé pour indiquer un type particulier d'échantillonnage de la TOC, qui satisfait les conditions suivantes :

- Le réseau d'échantillonnage temps- échelle doit être dyadique;
- La famille des ondelettes doit former une base orthonormale pour l'espace d'intérêt;
- L'ondelette d'analyse doit avoir un support compact (ainsi, toute la famille générée aura un support compact).

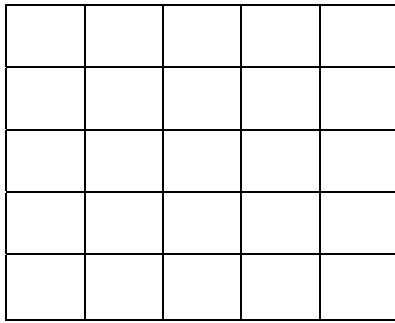
Le fort intérêt pour la TOD est dû à deux facteurs majeurs. Premièrement, les coefficients issus de la TOD expriment la ressemblance entre le signal traité et les ondelettes associées, exactement comme dans le cas de la TOC. De plus, le nombre des coefficients sera fini ce qui nous permet d'appliquer cette approche sur des systèmes numériques (ordinateurs, processeurs numériques du signal etc.).

Deuxièmement, les conditions imposées ci-dessus nous assurent la reconstruction parfaite du signal initial, à partir des coefficients de la TOD. Par conséquent, cette approche est bien adaptée pour des applications comme le débruitage ou la compression des données.

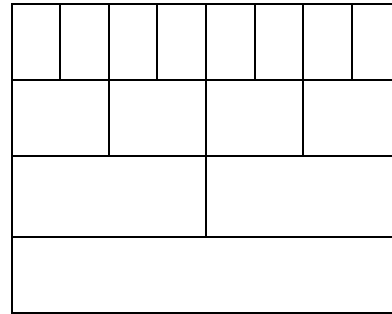
II.11 Le scalogramme et comparaison entre la TFCT et la TOC

On a vu qu'à partir de la TFCT (qui peut être interprétée comme la projection d'un signal sur un ensemble de fonctions de base) on peut générer une distribution énergétique du signal qu'on appelle *le spectrogramme*. Précédemment on a montré que la TOC représente aussi une projection du signal sur un ensemble des fonctions ondelettes. Ainsi, la TOC peut se rattacher à l'analyse temps- fréquence en posant $\nu = \frac{\nu_0}{a}$, ce qui permet de construire le scalogramme.

Pour comparaison avec la TFCT, on présente sur la figure suivante les bancs de filtres correspondants à la TFCT et à la TO et, également, les pavages temps- fréquence correspondants.



Pavage temps fréquence
généré par la TFCT



Pavage temps fréquence
généré par la TO

Fig. II.15 Comparaison entre TFCT et TO

La différence principale avec la transformée de Fourier à court terme est que les résolutions ne sont pas identiques en tous les points du plan temps- fréquence :

- dans le cas de changements brusques ou de structures très localisées, la transformée en ondelettes existera essentiellement dans le domaine des petites échelles, aptes à voir des détails fins du signal; cependant, puisque ces petites échelles sont traduites par une ondelette analysante de support temporel réduit, il s'en suit que son support fréquentiel est étendu, ce qui limite la résolution fréquentielle absolue;
- réciproquement, une résolution fréquentielle importante n'est possible qu'avec une ondelette analysante longue, soit à de grandes échelles d'observation. Dans la zone du plan temps- fréquence où le gain en résolution fréquentielle est possible, celui-ci se fait donc encore au détriment de la résolution temporelle. L'analyse en ondelettes présente cependant l'avantage de ne pas correspondre à une résolution fixée a priori par le choix du signal élémentaire : c'est fondamentalement une analyse multi- échelles.

La propriété de base du scalogramme et la conservation de l'énergie du signal relation (II.3) justifie l'attribut de "distribution énergétique du signal" dans le plan temps échelle. Comme dans le cas du spectrogramme, le scalogramme est aussi affecté par le principe d'incertitude. En fait, la résolution temporelle est proportionnelle à a et la résolution fréquentielle est inversement proportionnelle à a .

D'autres propriétés temps -fréquence de la TOC seront discutées dans le chapitre suivant. Parmi celles-ci, on peut citer la capacité d'analyser la régularité locale d'un signal, par rapport à la TF qui permet d'analyser globalement un signal donné. Cette propriété est induite par la plus importante caractéristique d'une ondelette : le nombre de ses moments nuls.

PARTIE APPLICATION :

Chapitre III : Filtrage par la transformée en ondelettes continue

III.1. Application sur des modèles synthétiques

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons utiliser la transformée en ondelettes continue (TOC) pour réaliser certaines applications de traitement des données sismiques obtenues à partir de modèles synthétiques. Nous montrons également que cette transformée (TOC) est un outil mathématique performant, puissant et il permet d'arriver à une nouvelle approche d'analyse et une visualisation des événements sismiques en temps- fréquence ou temps- échelle. Les résultats obtenus en utilisant la TOC sont généralement fiables en matière du filtrage ce qui facilite dans plusieurs cas l'interprétation des données sismiques. Son intérêt réside dans la simplicité avec laquelle elle peut être mise en œuvre. Ce filtrage par la TOC est basé sur la définition d'un masque sur le motif à filtrer pour l'isoler, où la forme du masque à appliquer n'a pas beaucoup d'importance, ce qui est un grand avantage par rapport aux méthodes classiques de filtrage où la forme et la taille de la fenêtre jouent un rôle important. Pour revenir du plan temps-fréquence ou temps-échelle dans le vers le domaine temporel il suffit d'appliquer la transformée en ondelettes inverse (TOCI).

III.1.1 Principe théorique du filtrage dans le plan temps- fréquence

On considère un signal $s(t)$ réel dont la représentation dans le plan temps- échelle possède plusieurs composantes w_p , ces composantes sont visibles et distinctes, donc on peut facilement identifier et séparées les unes des autres. Si nous désirons alors extraire du signal $s(t)$ une onde notée $w(t)$. Pour extraire cette onde dans le plan temps -échelle, similairement au fenêtrage en temps ou au filtrage en fréquence, il faut définir un masque $M(t, \nu)$ puis délimiter la région de la représentation temps- fréquence dans laquelle se trouve l'onde $w(t)$.

Afin de clarifier les idées, supposons que $s(t) = w_1(t) + w_2(t) + w_3(t)$ avec w_1 , w_2 et w_3 ayant des caractéristiques fréquentielles différentes. Alors grâce à la linéarité de la transformée en ondelettes, on a $W[s](a, b) = W[w_1](a, b) + W[w_2](a, b) + W[w_3](a, b)$. Il faut souligner ici que les trois motifs d'énergie notés M_1 , M_2 et M_3 , supposés visibles, distincts et pas d'interférence des motifs dans la plan temps- échelle, n'ont aucune raison d'être égaux à $W[w_1](a, b)$, à $W[w_2](a, b)$ et à $W[w_3](a, b)$ respectivement. La question de filtrage intervient lorsque l'on veut retrouver par exemple $w_1(t)$ à partir du motif $M_1(a, b)$. On découpe alors le motif correspondant à $w_1(t)$ au moyen d'un masque $H_1(a, b)$ qui est identiquement nulle en dehors du support de $M_1(a, b)$ et qui prend la valeur 1 sinon. Donc: $M_1(a, b) = H_1(a, b).W[s](a, b)$

Nous considérons pour l'instant que ce masque est défini manuellement par l'utilisateur, et traitons le problème du retour à la dimension temporelle. Un schéma classique de filtrage est le calcul de la transformée inverse du produit de la représentation par le masque $M(a, b)$ (**Figure III. 1**). Ce procédé se résume en trois étapes :

- ✚ Calcul de la transformée en ondelettes continue TOC du signal $s(t)$ permet d'obtenir sa projection dans le plan temps- fréquence: $RTF_s(a, b)$.
- ✚ Définition du masque $M(a, b)$ englobant la totalité de l'énergie et délimitant la zone dans laquelle se trouve $w(t)$.
- ✚ Estimation de l'onde $w(t)$ par la (synthèse) transformée inverse TOCI du produit $RTF_s(t, \nu)M(a, b)$.

[Kozek et al.92] décrivent ce filtrage en utilisant la $TFCT$. L'onde estimée $\hat{w}$ est alors définie par :

$$\hat{w}(t) = \frac{1}{2\pi\|g\|^2} \int \int M(\tau, f) TFCT_s(\tau, f) e^{2i\pi ft} g(t - \tau) df d\tau \quad (III.1)$$

Kozek explique que ce filtrage efficace est équivalent à considérer comme fonction de transfert (variant dans le temps) le masque M lissé par le noyau reproduisant de la fenêtre utilisée. Pour ce type de filtrage, le masque doit être construit de sorte que le produit des coefficients de la représentation temps- fréquence par le masque soit le plus proche possible de la représentation temps- fréquence de l'onde $w(t)$.

Nguyen [Nguyen] applique cette même approche avec la TO . Il utilise la formule de synthèse de la TOC .

$$s(t) = WI[W_s](t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{b \in \mathbb{R}} \int_{a>0} W[s](a, b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{1}{\sqrt{a}} db \frac{da}{a^2} \quad (III.2)$$

Avec
$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{\|\psi(w)\|^2}{w} dw$$

L'onde estimée est alors définie par :

$$\hat{w}(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{b \in \mathbb{R}} \int_{a>0} M(a, b) W[s](a, b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{1}{\sqrt{a}} db \frac{da}{a^2} \quad (III.3)$$

Notre objectif est de retrouver $w_1(t)$ en appliquant la transformée en ondelettes continue inverse à $M_1(a, b)$. Or d'après (II.13), même si $M_1(a, b)$ est une fonction arbitraire dans le demi-plan (a, b) vérifiant:

$$\iint |M_1(a, b)|^2 db \frac{da}{a^2} < \infty \quad (\text{énergie finie})$$

$M_1(a, b)$ ne peut pas être considéré comme la transformée en ondelettes d'un signal quelconque d'énergie finie, car l'équation du noyau reproduisant n'est pas vérifiée pour n'importe quel $M_1(a, b)$ arbitraire. Par contre, d'après l'équation (II.14):

$\iint M_1(a', b') K(a, b, a', b') \frac{da' db'}{a'^2}$ est la transformée d'un certain signal d'énergie finie. Cette dernière équation équivaut à une projection de $M_1(a, b)$ sur l'espace des fonctions $F(a, b)$ qui sont des transformées en ondelettes.

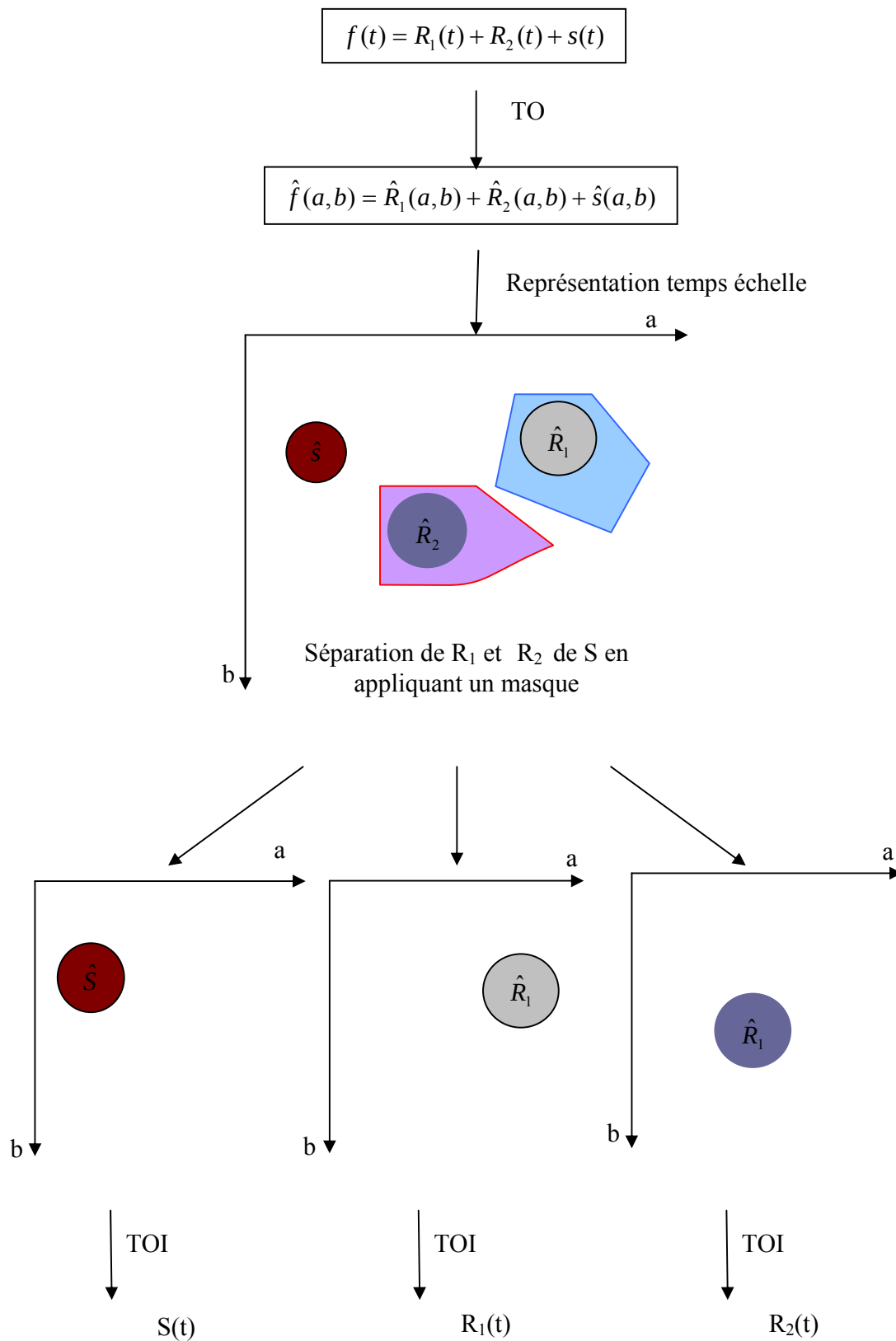


Fig. III.1 Filtrage dans le plan temps- échelle

a- Etude du noyau reproduisant :

Dans le cas général, le noyau K n'a pas une formulation facile, cependant on peut détailler le calcul pour le noyau reproduisant associé à des ondelettes de Morlet. L'équation (II.13) s'écrit:

$$K(a_0, b_0, a, b) = \frac{1}{C_\psi} \sqrt{\frac{a}{a_0}} \int_{\mathbb{R}} \psi^* \left(\frac{at - b_0 + b}{a_0} \right) \psi(t) dt \quad (\text{III.4})$$

On écrit l'ondelette de Morlet sans le coefficient de normalisation pour simplifier l'écriture:

$$\psi(t) = \exp(ict) \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \quad (\text{III.5})$$

Où C est le paramètre qui fixe la période d'oscillation de l'ondelette et en pratique on choisit $5 < c < 6$.

$$\text{Calcul de } N = \int_{\mathbb{R}} \psi \left(\frac{at - b_0 + b}{a_0} \right) \psi(t) dt$$

$$\begin{aligned} N &= \int_{\mathbb{R}} \exp \left[-ic \left(\frac{at - b_0 + b}{a_0} \right) \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{at - b_0 + b}{a_0} \right)^2 \right] \exp(ict) \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt \\ &= \exp(ic \frac{b_0 - b}{a_0}) \int_{\mathbb{R}} \exp(ict \frac{a_0 - a}{a_0}) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{a^2 t^2 + 2a(b - b_0)t + (b + b_0)^2 + a_0^2 t^2}{a_0^2} \right) \right] dt \end{aligned}$$

$$\text{En notant : } \lambda = \exp\left(\frac{ic(b_0 - b)}{a_0}\right), \quad \alpha = \frac{\sqrt{a^2 + a_0^2}}{\sqrt{2}a_0} \text{ et } \beta = \frac{a(b - b_0)}{\sqrt{2}a_0 \sqrt{a^2 + a_0^2}} \text{ alors, on a :}$$

$$N = \lambda \exp\left(-\frac{(b + b_0)^2}{2(a^2 + a_0^2)}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp(ict \frac{a_0 - a}{a_0}) \exp[-(\alpha t + \beta)^2] dt \quad (\text{III.6})$$

On reconnaît dans le second membre de cette équation la transformée de Fourier de la gaussienne pour la valeur $\nu = \frac{c}{2\pi} \left(\frac{a - a_0}{a_0} \right)$

On obtient alors

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(ict \frac{a_0 - a}{a_0}) \exp[-(\alpha t + \beta)^2] dt = \frac{\sqrt{2\pi} a_0}{\sqrt{a_0^2 + a^2}} \exp \left[-\frac{c^2 (a - a_0)^2}{2(a^2 + a_0^2)} \right] \exp \left[ic \frac{a(a - a_0)(b - b_0)}{a_0(a^2 + a_0^2)} \right]$$

En définitive, en notant $a_0 = a + \Delta a$ et $b_0 = b + \Delta b$ et après simplification, on obtient:

$$K(a + \Delta a, b + \Delta b, a, b) = \frac{\sqrt{2\pi a} \sqrt{a + \Delta a}}{C_\psi \sqrt{(a + \Delta a)^2 + a^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{c^2 \Delta a^2 + \Delta b^2}{(a^2 + (a + \Delta a)^2)} \right] \exp \left[-ic \frac{\Delta b(2a + \Delta a)}{(a^2 + (a + \Delta a)^2)} \right]$$

Et, on trouve:

$$K(a_0, b_0, a, b) = \frac{\sqrt{2\pi} \sqrt{aa_0}}{C_\psi \sqrt{a_0^2 + a^2}} \exp \left[ic \frac{(a + a_0)(b_0 - b)}{(a^2 + a_0^2)} \right] \exp \left[-\frac{c^2 (a - a_0)^2 + (b - b_0)^2}{2(a^2 + a_0^2)} \right] \quad (\text{III.7})$$

A partir de l'expression du noyau, on peut voir que $|K(a_0, b_0, a, b)|$ atteint son maximum lorsque $\Delta a = \Delta b = 0$, soit lorsque $\{a_0, b_0\} = \{a, b\}$. Avec les ondelettes de type Morlet que nous utilisons, le module $|K(a_0, b_0, a, b)|$ décroît lorsque $\{a_0, b_0\}$ s'éloigne de $\{a, b\}$. En effet, $|K(a_0, b_0, a, b)|$ est une fonction décroissante par rapport à Δa . Par contre, à a constant cette même fonction décroît de façon exponentielle lorsque b s'éloigne de b_0 .

La figures (III.2) permettant d'avoir une idée sur le comportement de $K(a_0, b_0, a, b)$ au voisinage de $\{a_0, b_0\}$, pour les trois différentes valeurs de $\{a_0, b_0\}$ on observe bien la différence entre les noyaux. Un noyau est plus localisé au tour de $\{a_0, b_0\}$ lorsque a_0 est petit (haute fréquence). Ce qui est en concordance avec le principe d'Heisenberg. Ainsi, en première approximation, $K(a_0, b_0, a, b)$ peut être vu comme un pic de Dirac en $\{a_0, b_0\}$ et par conséquent:

$$\iint M_1(a', b') K(a, b, a', b') \frac{da' db'}{a'^2} \approx \iint M_1(a', b') \delta(a, b, a', b') \frac{da' db'}{a'^2} \approx M_1(a, b)$$

Ce résultat montre qu'en utilisant les ondelettes de Morlet, la forme du masque $H(a, b)$ appliqué n'a pas beaucoup d'importance : il faut seulement que ce masque englobe la totalité de l'énergie du signal correspondant au motif à filtrer, malgré on change la forme du masque, plus ces changements sont lieu dans une zone éloignée de l'énergie du signal, la contribution de ces mêmes changements, projetés sur le noyau reproduisant, est quasiment nulle. On obtient $f_1(t)$ par transformée inverse de $M_1(a, b)$:

$$f_1(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{b \in \mathbb{R}} \int_{a > 0} M_1(a, b) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db \frac{da}{a^2} \quad (\text{III.8})$$

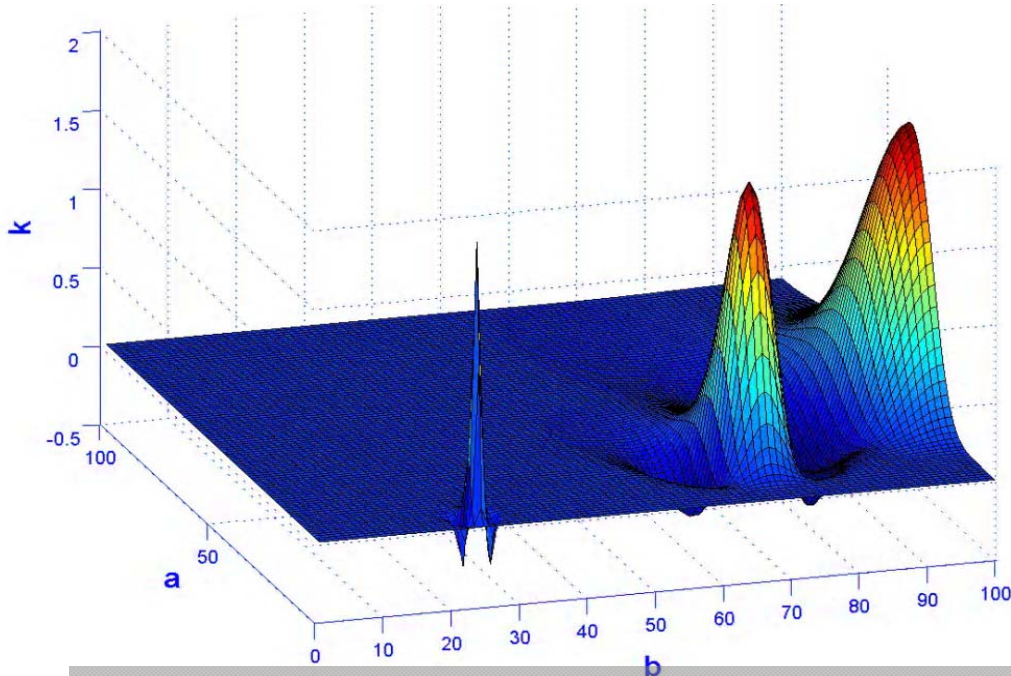


Fig. III.2 Noyau reproduisant de l'ondelette de Morlet

III.1.2 Les tests sur des signaux synthétiques

III.1.2.1. Utilisation de la transformée en ondelettes continue inverse

Nous allons valider l'étude de la reconstruction sur des signaux synthétiques. Le signal $s(t)$ fabriqué pour cette partie est défini ainsi.

$$s(t) = x_1 + x_2 + x_3$$

- x_1 Un signal non- stationnaire obtenu par une modulation d'amplitude par une gaussienne et une modulation linéaire de fréquence de 20 à 50 de fréquence réduite.
- x_2 Un signal non -stationnaire obtenu par une modulation d'amplitude par une gaussienne et une modulation linéaire de fréquence de 80 à 110 de fréquence réduite.
- x_3 Un signal non- stationnaire dont la fréquence est modulée linéairement de 30 à 100 de fréquence réduite.

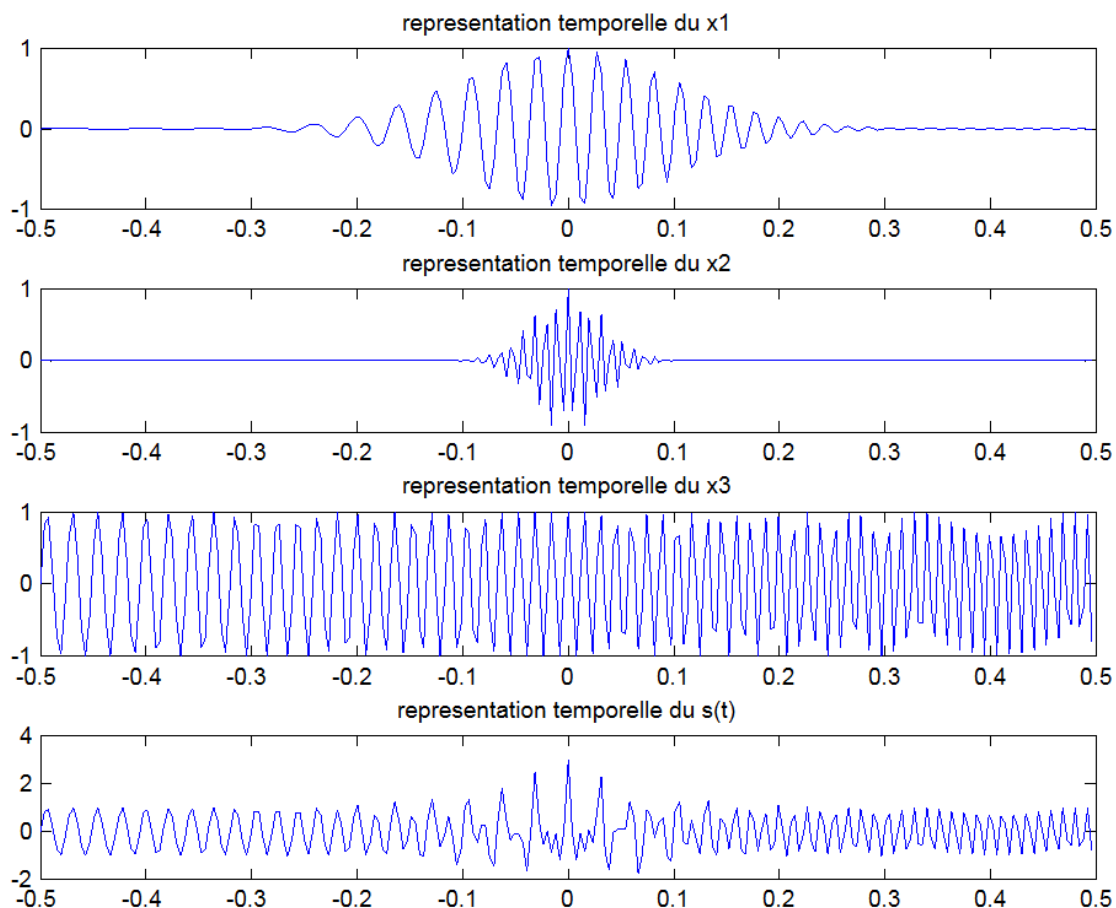


Fig. III.3 Représentation temporelle du signal $s(t)$ et ces composantes x_1 , x_2 et x_3

La figure (III.3) donne la représentation temporelle de ces signaux sur les quels nous allons effectuer des tests de filtrage. Nous donnons également une représentation fréquentielle de ces signaux à la figure (III.4). Leur densité spectrale a été calculée en considérant le module carré de la transformée de Fourier. On remarque que leurs supports fréquentiels ne sont pas complètement disjoints.

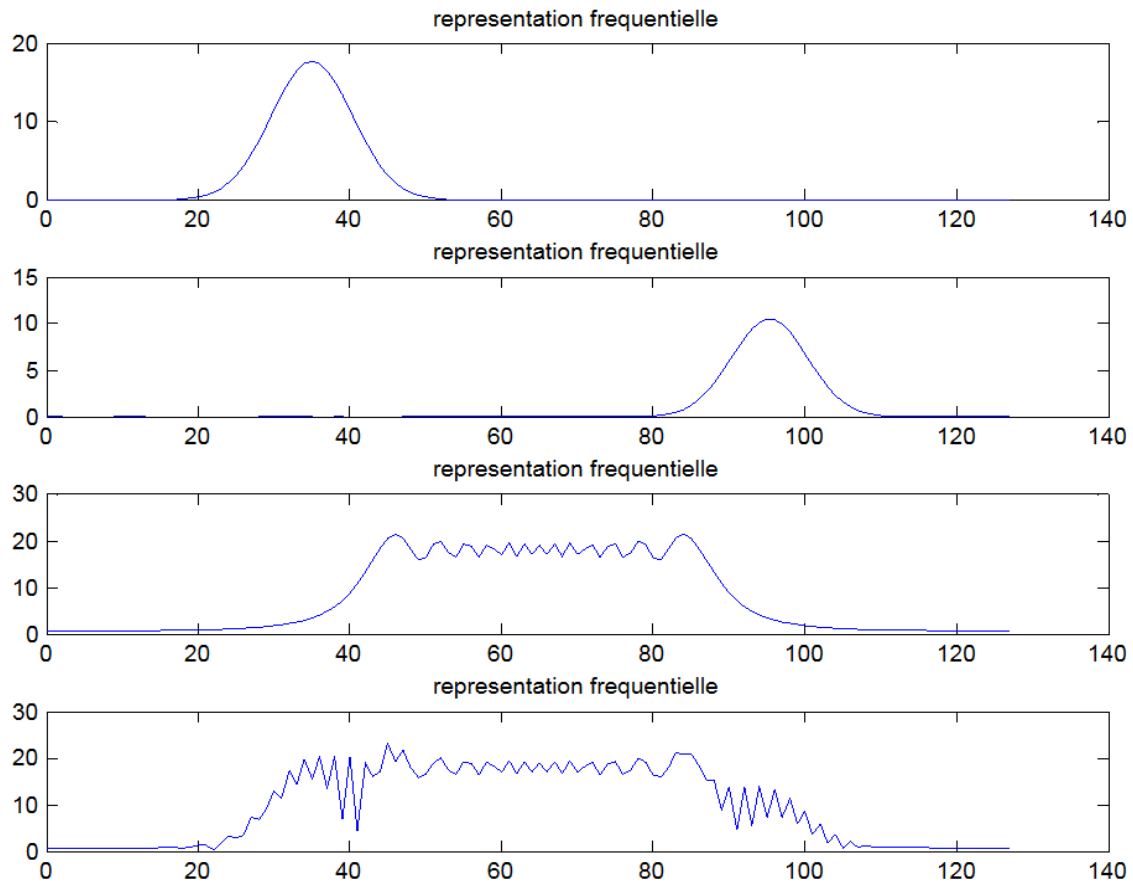
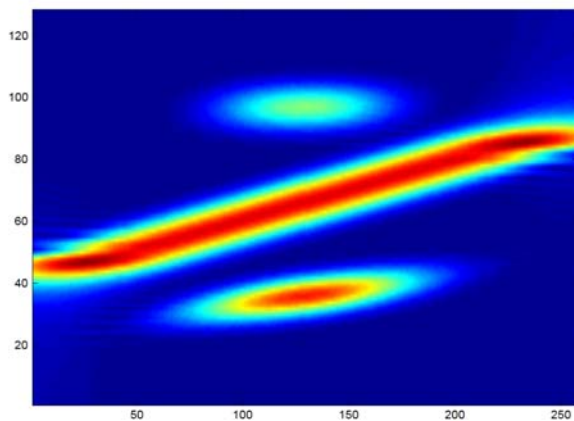


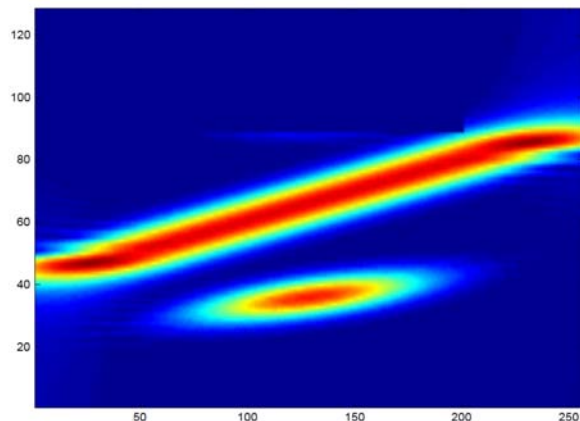
Fig. III.4 Représentation fréquentielle du signal $s(t)$ et ces composantes x_1, x_2 et x_3

La première étape est l'interprétation des données dans le plan temps- fréquence. La figure (III.5.a) présente le module des coefficients de la TO de ce signal. Trois motifs sont reconnaissables. Un motif en haut, un motif oblique au milieu, et un motif plutôt en bas. Considérons l'extraction par filtrage temps- fréquence de la composante x_1 (le chirp). Pour le filtrage des coefficients de la TO, le masque $H_1(t, \nu)$, définissant la zone dans laquelle le chirp se trouve, est défini sur l'image de la figure (III.5 .a). Le produit $H_1(t, \tau).W[s](t, \tau)$ présenté en figure (III.5 .d) est alors une approximation de la TO du chirp. Le résultat de l'estimation est présenté en temps figure (III.6). Ce filtrage est efficace car le motif du chirp est bien séparé des autres motifs. Contrairement à l'analyse de Fourier classique, les méthodes de filtrage dans le plan temps- échelles sont particulièrement adaptées pour ce type de signal non- stationnaire. Ces

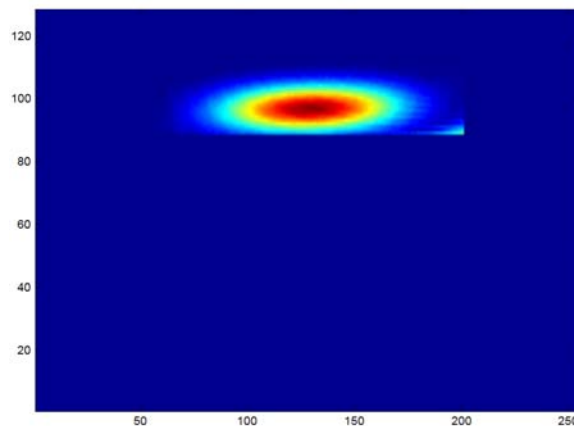
différentes composantes du signal $s(t)$ sont séparables dans le domaine temps- échelle, ce qui permet de les séparer en appliquant un masque sur le motif à filtrer. Les figures (III.5.d) (III.5 .c) et (III.5.b) montrent le découpage des motifs correspondant aux signaux, x_1 , x_2 et $x_1 + x_3$. Les signaux reconstruits s'obtiennent par l'application de la transformée en ondelettes inverse sur ces matrices.



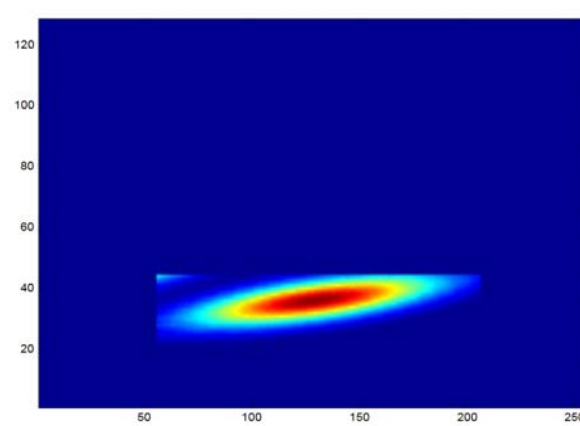
a) Module de la TO du signal $s(t)$



b) Motif $M1$ après extraction $x_2(t)$



c) Motif de $x_2(t)$ après extraction



d) Motif de $x_1(t)$ après extraction

Fig. III.5 Filtrage temps- fréquence d'un signal $s(t)$ et les différents motifs obtenus

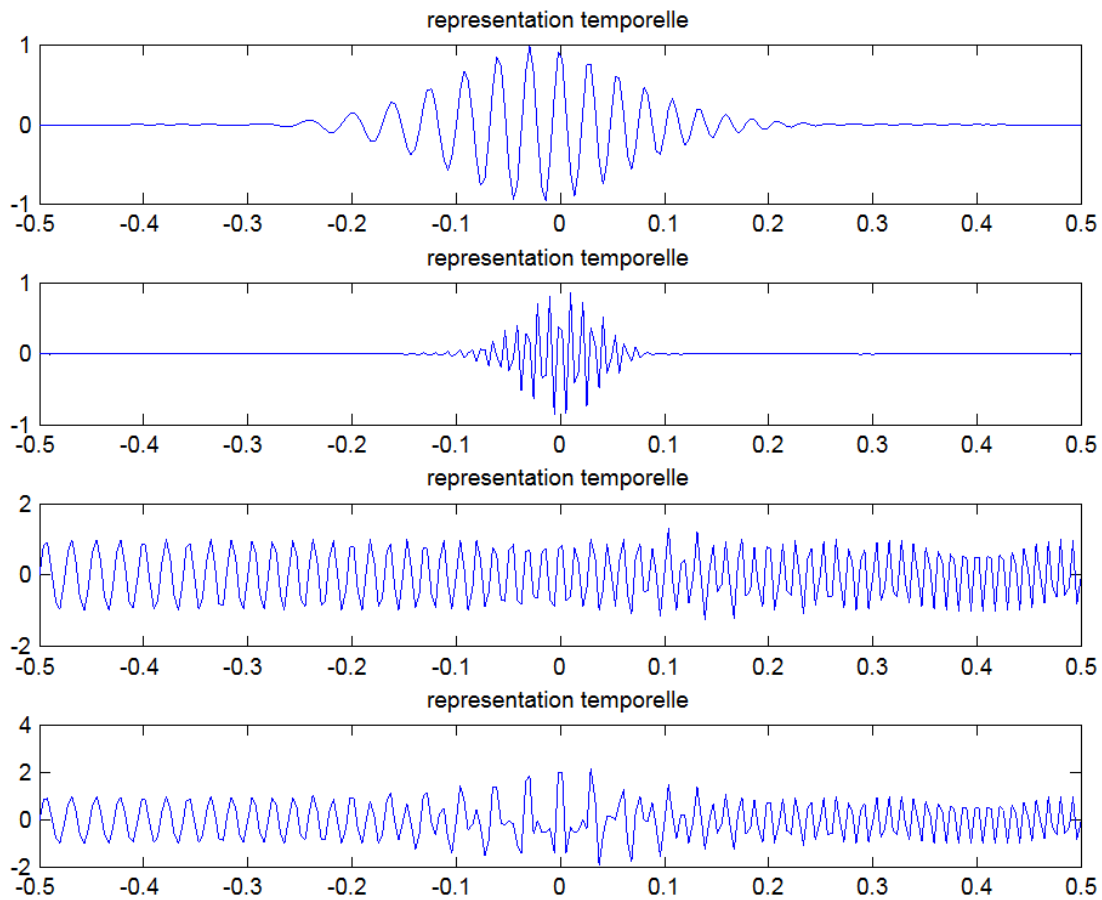


Fig. III.6 Reconstruction du signal $s(t)$ et ces composantes x_1 , x_2 et x_3 après le filtrage dans le plan temps-échelle

III.1.2.2.L'effet de la forme du masque vis- à vis de la reconstruction

Nous allons montrer, comme la partie théorique le suggère, que la forme du masque à appliquer sur le motif à filtrer ne perturbe pas la reconstruction pourvu qu'elle englobe correctement toute l'énergie du signal. Nous allons à nouveau considérer le signal $s(t)$ pour réaliser les tests. L'attention se porte sur la composante x_2 . Les masques utilisés pour extraire le motif correspondant à x_2 seront de différentes formes. La figure (III.7) permet de visualiser les signaux reconstruits à partir des différents masques. On remarque que les résultats sont sensiblement identiques pour H_1 et H_2 car le masque englobe bien l'énergie de x_2 . Par contre, il y a une dégradation de la qualité de la reconstruction avec le masque H_3 car celui-ci ne prend pas en compte tout le motif correspondant à x_2 . Il faut souligner la robustesse de cette méthode de filtrage car la forme du masque, c'est à dire la régularité du contour, n'a que très peu d'influence sur le signal reconstruit. Cette indépendance vis- à vis du masque marque la différence avec les

méthodes de filtrage classiques de Fourier (passe-bas, passe-haut) où la forme de la fenêtre d'apodisation joue un rôle important dans l'analyse spectrale et le filtrage.

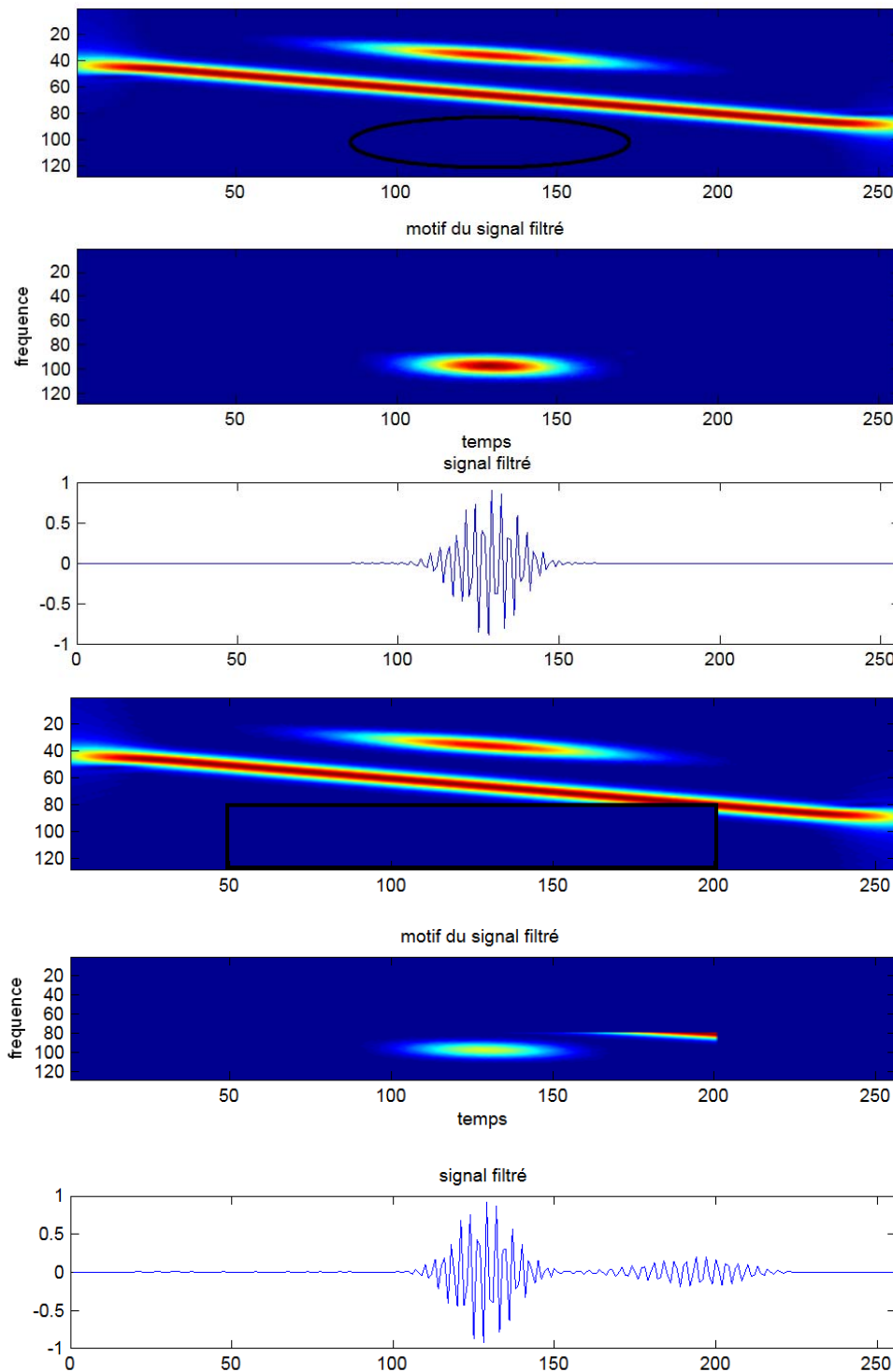


Fig. III.7 L'effet de la forme du masque sur les résultats de filtrage

III.1.3. Atténuation de l'onde de surface (ground roll) par la TOC

Cette nouvelle approche de filtrage nous allons la tester sur des données synthétiques.

III.1.3.1 Données synthétiques.

Un sismogramme synthétique généré à partir d'un modèle géologique constitué de trois couches surmontant un substratum rocheux (FigIII.8). Les diverses interfaces sont lentement variables en profondeur en fonction de la distance. Le calcul de sismogramme synthétique a été réalisé par la méthode de tracé de rayon en utilisant les paramètres :

- + pas échantillonnage : 2ms
- + nombre d'échantillons temporels par trace : 2048
- + inter- trace : 50m
- + nombre de trace : 200 trace
- + l'offset : 50m
- + vitesse du milieu : 1850 m/s, 1900m/s, 1950m/s, 2000m/s

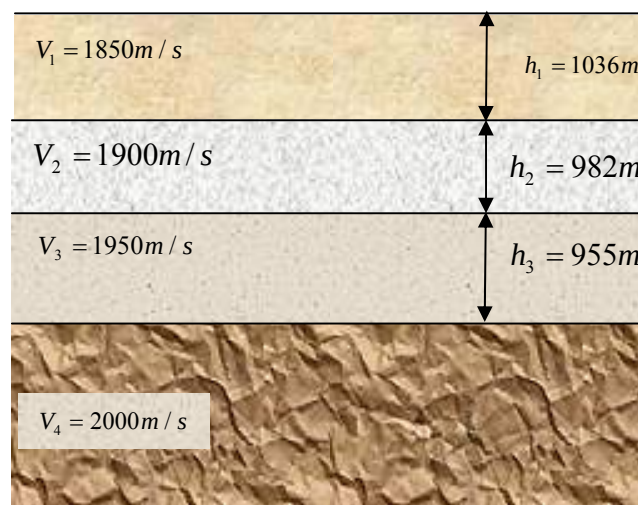


Fig. III.8. Modèle géologique pour générer l'onde de surface

La section synthétique représentée par (la figure III.9) montre trois types ondes : l'onde réfléchie, l'onde directe et l'onde de surface.

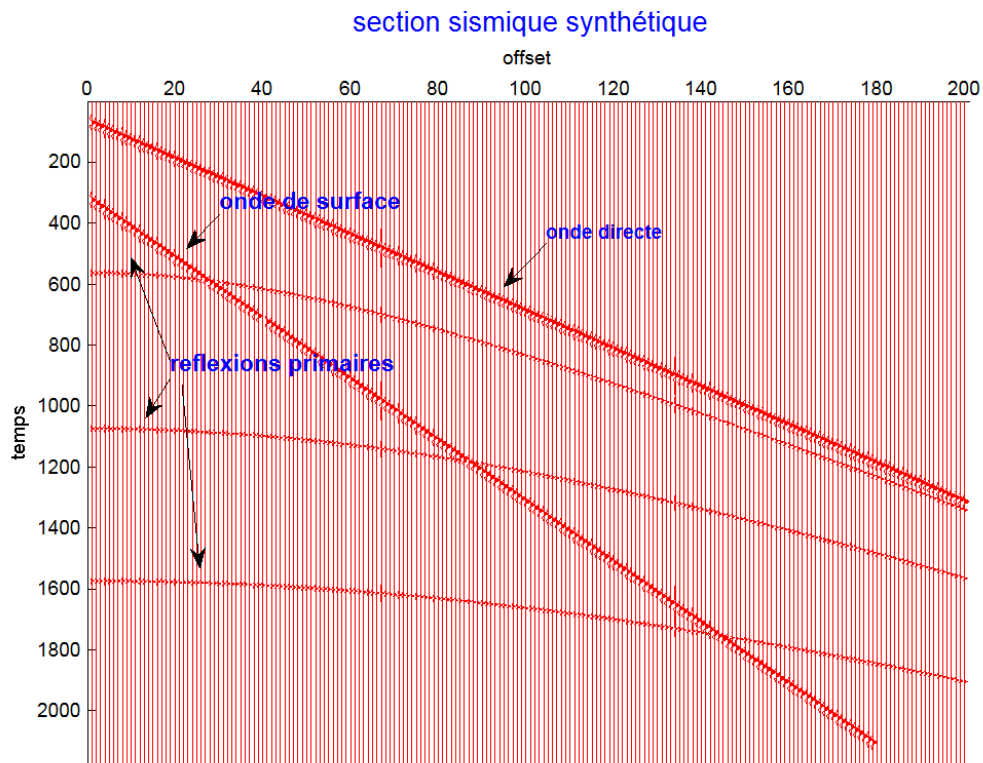


Fig.III.9. Section sismique synthétique avec l'onde de surface

III.1.3.2. Application de la méthode

Les ondes de surface (ground roll) sont très énergétiques et de basses fréquences, elles sont directionnelles et leurs temps d'arrivées augmentent linéairement avec l'augmentation de l'offset, c'est à dire qu'elles sont continues dans un faisceau du centre de point de tir. A partir de ce point l'utilisateur définit un faisceau qui permet de fixer l'étendue temporelle du masque à l'intérieur du quel on va filtrer l'onde de surface.

Une fois l'étendue temporelle du masque est connue pour chaque trace et la bande fréquentielle de l'onde de surfaces est choisie entre 0-16 Hz. On introduit un autre critère « critère d'énergie » mettre à zéro tous les coefficients supérieurs à une amplitude de référence compris à l'intérieur du masque. L'amplitude de référence est la valeur moyenne des amplitudes maximales du module de TOC de la trace :

$$A_{ref} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max_{-} \text{ ampl }_i$$

L'objectif est d'utiliser la TOC pour éliminer l'onde de surface qui est très énergétique. Elle est considérée comme un bruit de surface. Ce bruit peut masquer les ondes primaires de plus faible amplitudes qui peuvent contenir de l'information sismique utile. La projection de la trace sismique dans le plan temps-fréquence est mise en évidence par la figure (III.11) où on voit cinq (05) motifs distincts, dont deux sont énergétiques correspondant à l'onde directe et l'onde de surface (ground roll) quant aux trois autres notamment représentent les réflexions primaires.

Le motif du ground roll se localise dans l'intervalle temporel (385-415) ms.

En suite on définit un masque qui permet d'éliminer le motif correspondant à l'onde de surface. Pour projeter la trace filtrée (sans Ground roll) dans le plan temporel, on calcule sa transformée en ondelettes inverse (TOCI). La même procédure est répétée pour les autres traces. A la fin, on aboutit à une section sismique filtrée, elle est illustrée par la figure (III.12).

Ces étapes sont résumées sur l'organigramme ci-dessous :

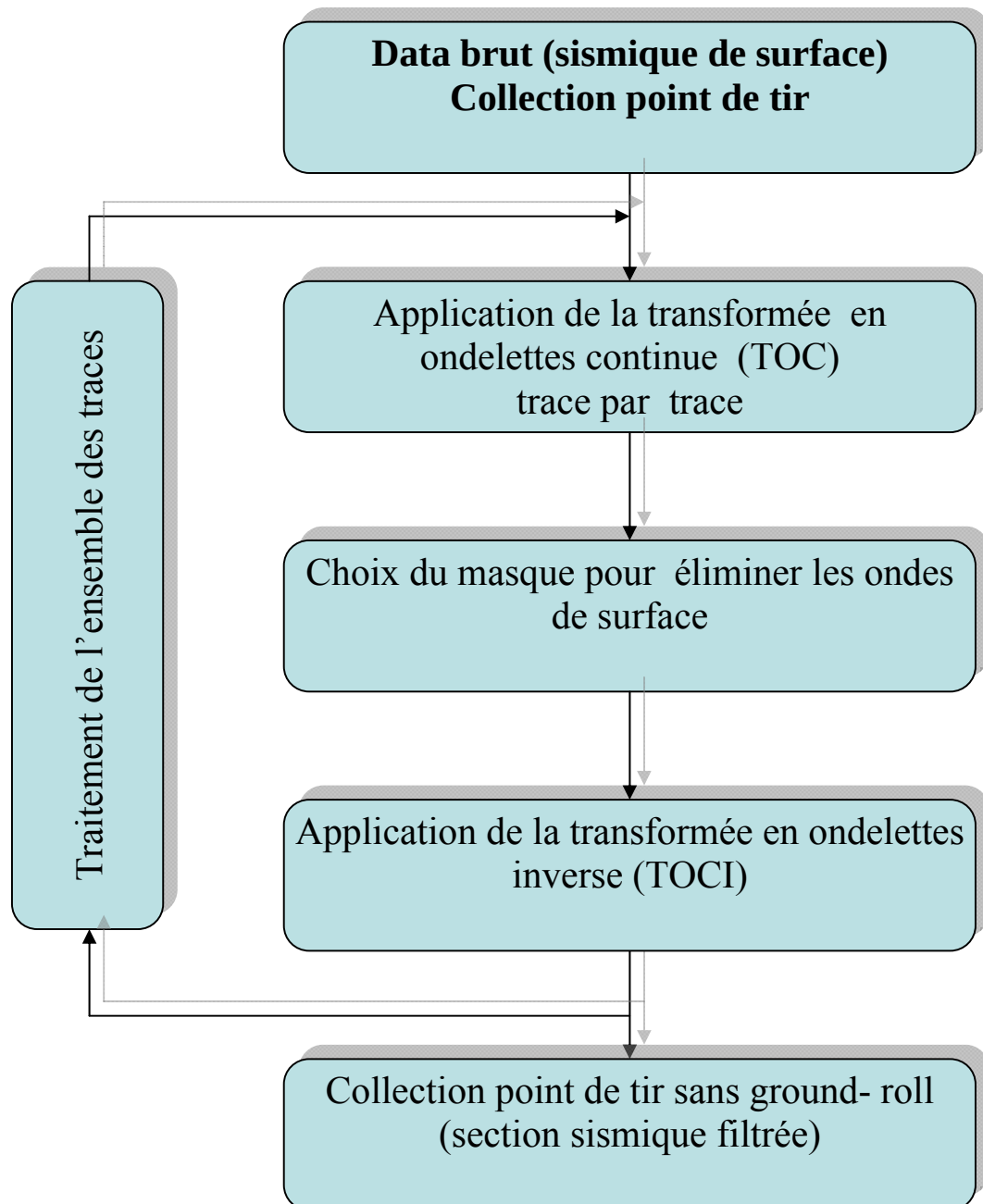
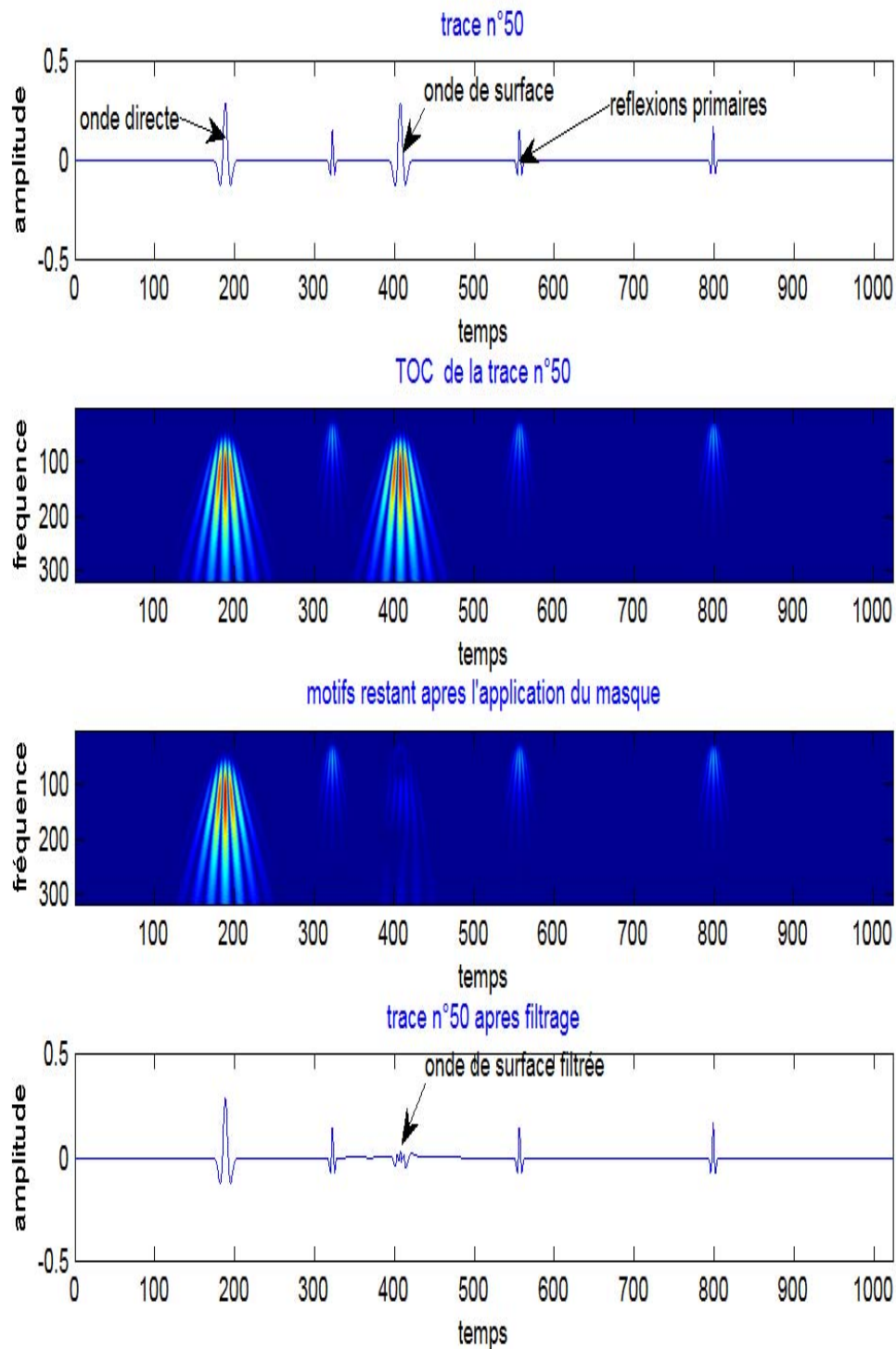


Fig. III.10 Organigramme pour filtrer l'onde de surface

**Fig. III.11 Application de TOC pour filtrer l'onde de surface**

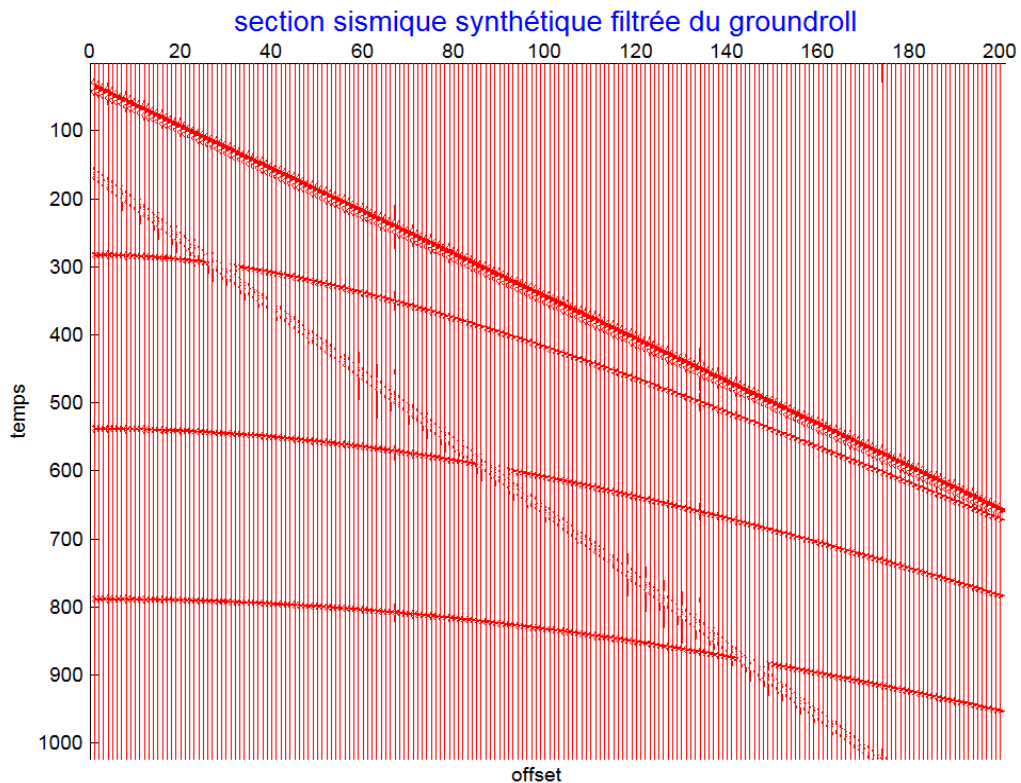


Fig.III.12 Section sismique synthétique après filtrage de l'onde de surface

Conclusion

Le filtrage des données par la TOC pour nettoyer les traces de l'onde de surface à bien fonctionné, la preuve l'onde de surface est éliminée. Dans la mesure où les motifs des événements sismiques mis en évidence dans le plan temps-fréquence à l'aide de la TOC sont distincts ne se chevauchent pas, leur filtrage est facile. Le masque utilisé est automatique sa forme n'a pas d'influence sur la qualité du filtrage ce n'est pas le cas des méthodes classiques où la forme et la taille de la fenêtre jouent un rôle important. Le masque est défini à partir de trois paramètres : le temps, la fréquence et l'énergie, d'ailleurs il suit la forme du bruit à enlever. Cependant son application pour traiter des données réelles est plus complexe.

III.1.4. Atténuation des multiples par la transformée en ondelette continue**Introduction**

Les réflexions multiples au cours de leurs trajets, subissent plusieurs réflexions avant d'être enregistrées. Selon que les arrivées du multiple et de la réflexion simple sont nettement distinctes interfèrent on aura affaire à deux types de multiple de longue durée et de courte durée.

- Les multiples de longue durée, après la mise en CDP (Common point depth) des traces souvent, les multiples de longue durée se présentent en horizons fictifs et peuvent être interprétés comme des structures effectives.
- Les multiples de courte durée, ajoutent des oscillations supplémentaires à la queue de la réflexion primaire ce qui diminue le pouvoir de résolution et le signal sismique devient de basse fréquence.

Une onde lors de sa traversée d'une couche donnée génère une infinité de multiples qui ne sont discernables que si le contraste impédance acoustique de la couche avec les couches voisines est assez important.

Les multiples sont considérés comme un bruit gênant. Leur filtrage est un problème délicat, auquel se heurtent souvent les géophysiciens. Les techniques couramment utilisées pour l'éliminer sont : la déconvolution prédictive et le filtre (f-k) qui s'avèrent quelquefois inefficaces. La déconvolution prédictive dans le domaine (x, t) est efficace si le multiple est périodique mais lorsqu'il perd sa périodicité, la déconvolution n'a plus d'effet sur les traces de grande offset. Dans le domaine (τ, p) , elle exige un pas d'échantillonnage régulier en temps et en espace plus un temps machine important. Quant aux filtres en fréquence et en vitesse apparente, ils permettent de sélectionner ou de rejeter les événements en fonction d'un critère simple (fréquence ou vitesse apparente) facilement accessibles. Ces outils sont très performants et dans un bon nombre de cas fournissent des résultats très satisfaisants. Il existe cependant un certain nombre de cas où ils sont nettement moins performants. Cette analyse montre vite des limites justifiées dès lors que l'on sort du cadre rigoureux de sa définition : le domaine des signaux stationnaires d'énergie finie. Ces outils ne s'adaptent pas pour les signaux non stationnaires.

Dans le but de pallier à cette insuffisance, on a introduit une nouvelle approche basée sur un outil mathématique performant et puissant qui est la Transformée en Ondelette Continue « TOC » (Morlet 1982). Cet outil convient bien pour le traitement des signaux non stationnaires et permet la localisation du signal en temps-fréquence ou temps-échelle (scalogramme) ce qui n'est pas le cas des méthodes classiques.

Le but de ce travail est d'élaborer une nouvelle approche pour filtrer les multiples. Pour arriver à cet objectif, on a dû concevoir un algorithme avec un programme informatiques, qu'on a testé sur des modèles synthétiques et sur des données réelles. Le filtrage par la TOC est basé sur la définition d'un masque sur le motif à filtrer pour l'isoler, où la forme du masque à appliquer n'a pas beaucoup d'importance, ce qui est un grand avantage par rapport aux méthodes classiques de filtrage où la forme et la taille de la fenêtre jouent un rôle important. Pour revenir du plan temps-fréquence ou temps-échelle dans le domaine temporel il suffit de calculer la transformée en ondelettes inverse (TOCI) de la trace filtrée.

III .1.4.1.Cas d'un modèle synthétique

La nouvelle approche de filtrage par la (TOC) va être testée sur des données synthétiques .On génère une section sismique synthétique par la méthode de tracé de rayon, à partir du modèle géologique tabulaire qui est illustré par la figure (III.13)

Il se compose de trois couches horizontales qui reposent sur un substratum rocheux. Les paramètres utilisés pour générer la section synthétique sont:

- ✚ pas échantillonnage : 2ms
- ✚ nombre d'échantillons temporels par trace : 1024
- ✚ inter trace : 10 m
- ✚ nombre de trace : 200
- ✚ l'offset : 10 m
- ✚ vitesses du terrain : 1800m/s, 1900m/s, 2000m/s, 2050m/s

La section sismique synthétique obtenue est mise en évidence par la figure (III.14), où cinq ondes sont visibles dont trois ondes réfléchies : R_1 , R_2 et R_3 , deux ondes multiples M_1 et M_2 le premier multiple est dû à la double réflexion dans la première couche et l'autre est dû aux trois réflexions générées dans la même couche.

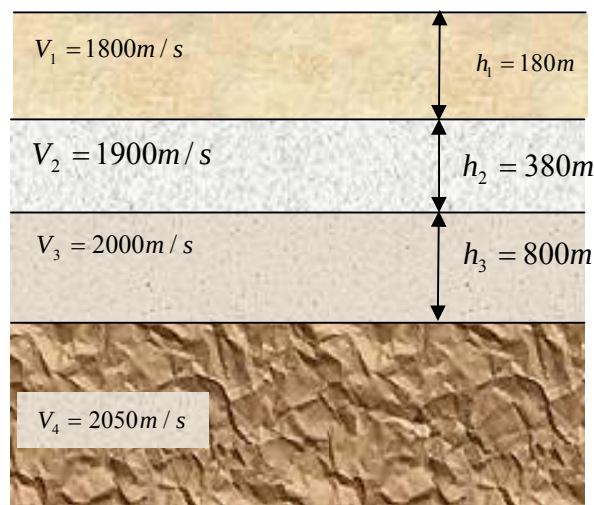


Fig. III.13 **Model géologique tabulaire**

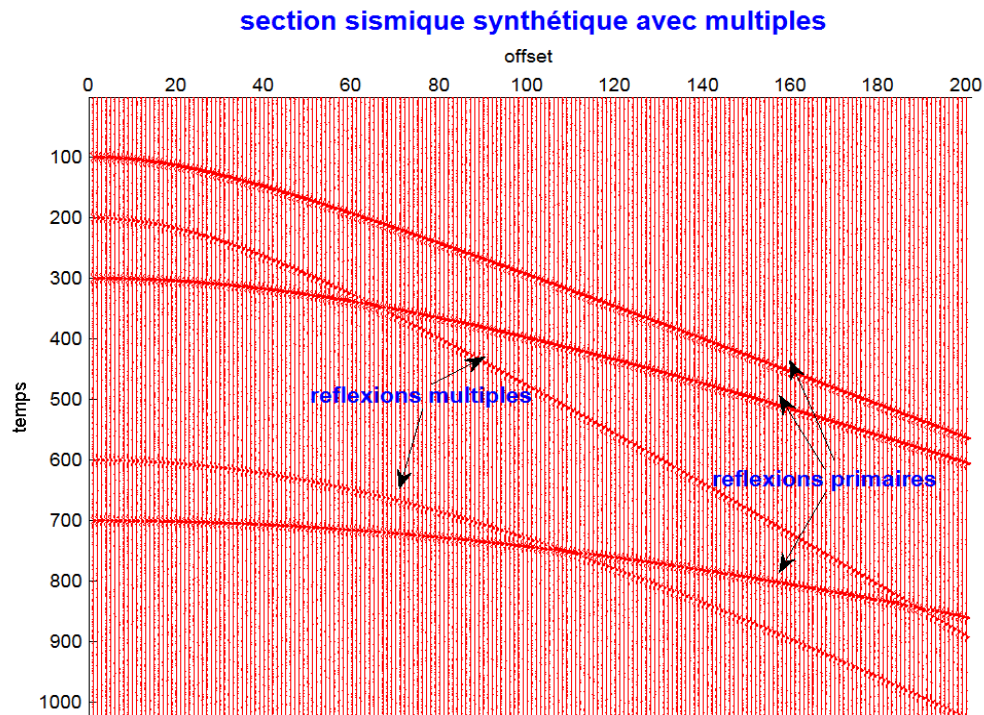


Fig. III.14. Section sismique synthétique avec multiples

Les multiples sont des événements sismiques parasites et gênants. Elles sont généralement de haute fréquence avec des amplitudes relativement faibles par rapport à celles des réflexions primaires.

III.1.4.2 Etapes principales de la méthode à parcourir

L'application de la TOC pour l'atténuation des multiples consiste en premier lieu :

- à appliquer une correction dynamique NMO avec la loi de vitesse des multiples, après cette correction les multiples seront alignés et les réflexions primaires seront sur-corrigées (figure III. 15). L'alignement des événements multiples nous aide à mieux détecter et localiser en temps ces événements.
- Dans le but de confirmer l'alignement des multiples, on effectue une sommation de toutes les traces de la collection, on obtient alors une trace somme "une trace somme (gather)" où les temps en face des amplitudes énergétiques correspondent aux temps d'arrivée des réflexions multiples.
- Une fois les limites temporelles des multiples sont définies, on calcule la TOC de la trace, il revient à la projeter dans le plan temps-fréquence (figure III.16).

- Puis, on applique un masque avec les limites temporelles déterminées précédemment, qui sont constantes pour toutes les traces dans une plage d'échelle entre 4 et 6 ms.
- À l'intérieur de ce masque toutes les amplitudes inférieures à un certain seuil sont remises à zéro, ce seuil est déterminé suivant la valeur moyenne locale des amplitudes.

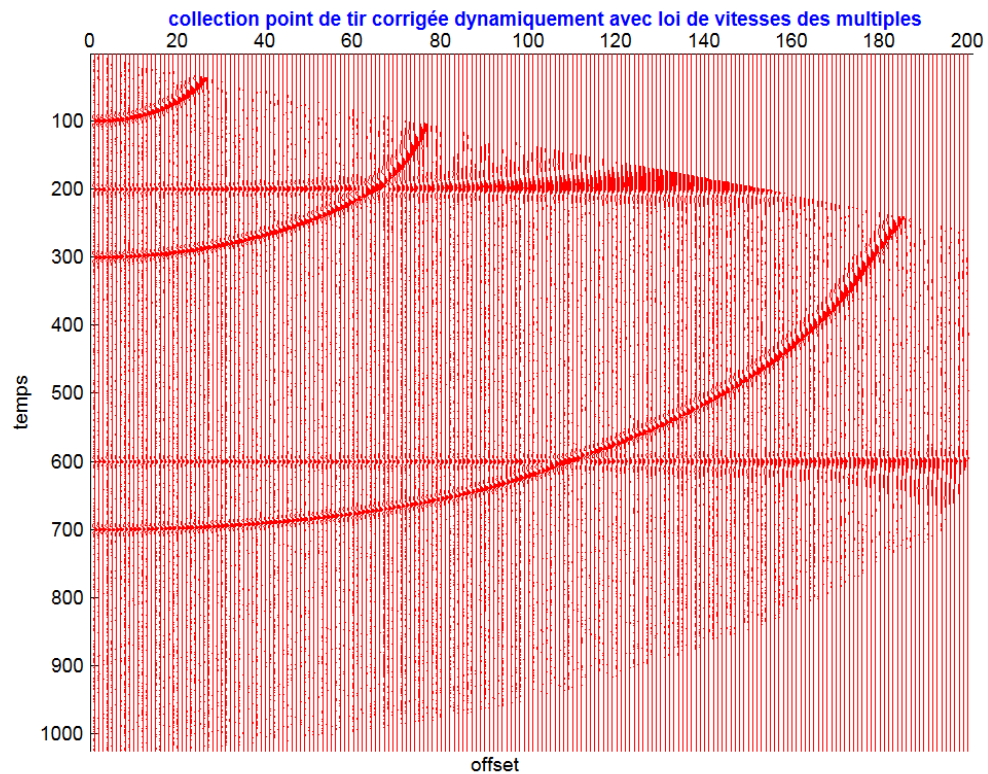


Fig.III.15. Section sismique après correction dynamique avec loi des multiples

- Après la définition du masque on calcule la transformée en ondelettes inverse (TOCI) pour revenir au domaine temporel où on obtient une trace sismique filtrée sans multiples (figure III.16).
- On répète l'opération pour l'ensemble des traces c'est à dire trace par trace (figure.III.17).
- Pour revenir à la position temporelle initiale des traces de la section sismique, on effectue une correction dynamique inverse, le résultat final de l'opération est présenté sur la (figure III.18).
- Les différentes étapes à parcourir sont résumées dans l'organigramme (figure.III.19)

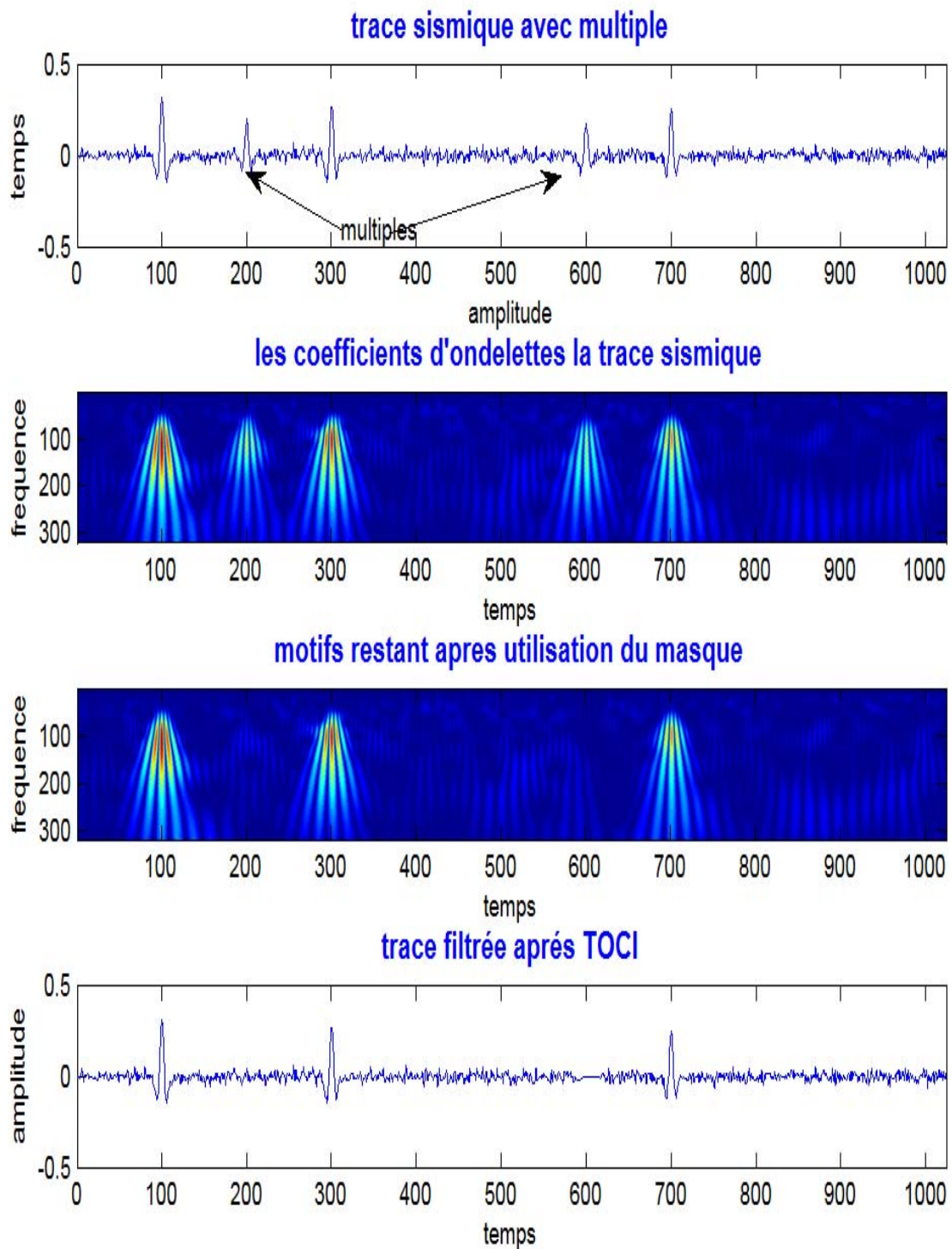


Fig.III.16. L'application de la TOC pour atténuer les multiples sur la trace n°1

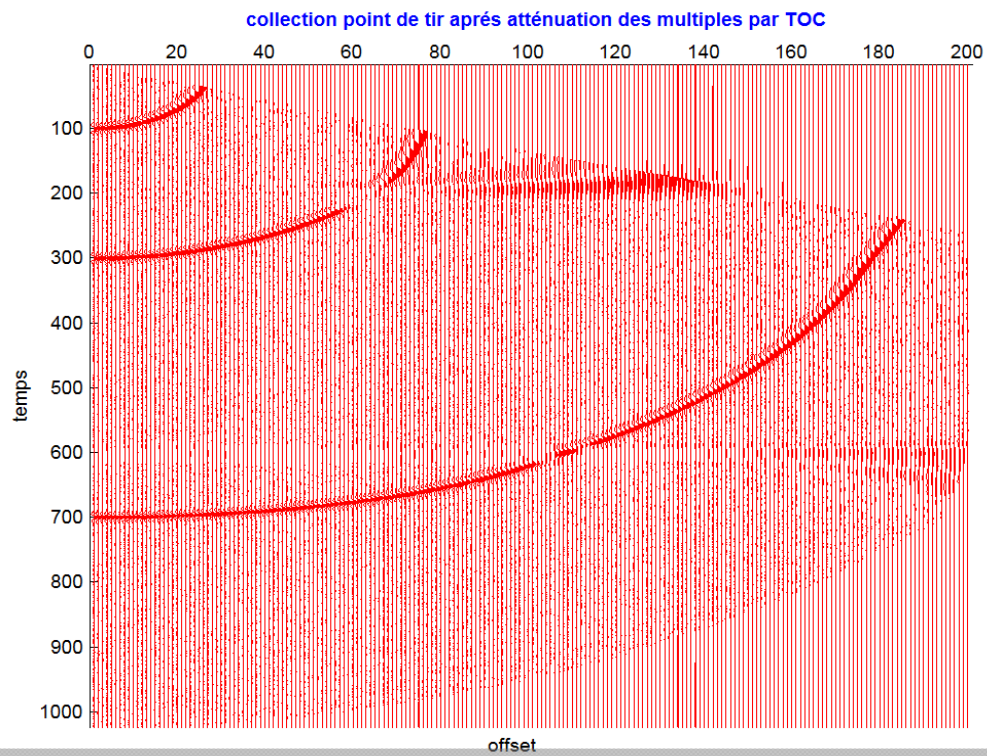


Fig. III.17 Section sismique sans multiples avant correction dynamique inverse

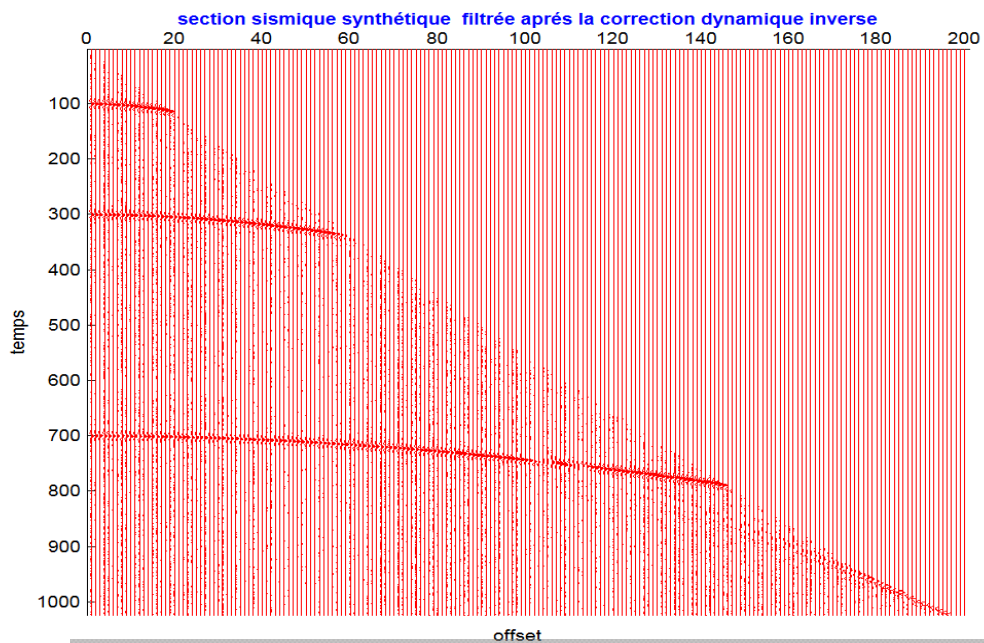
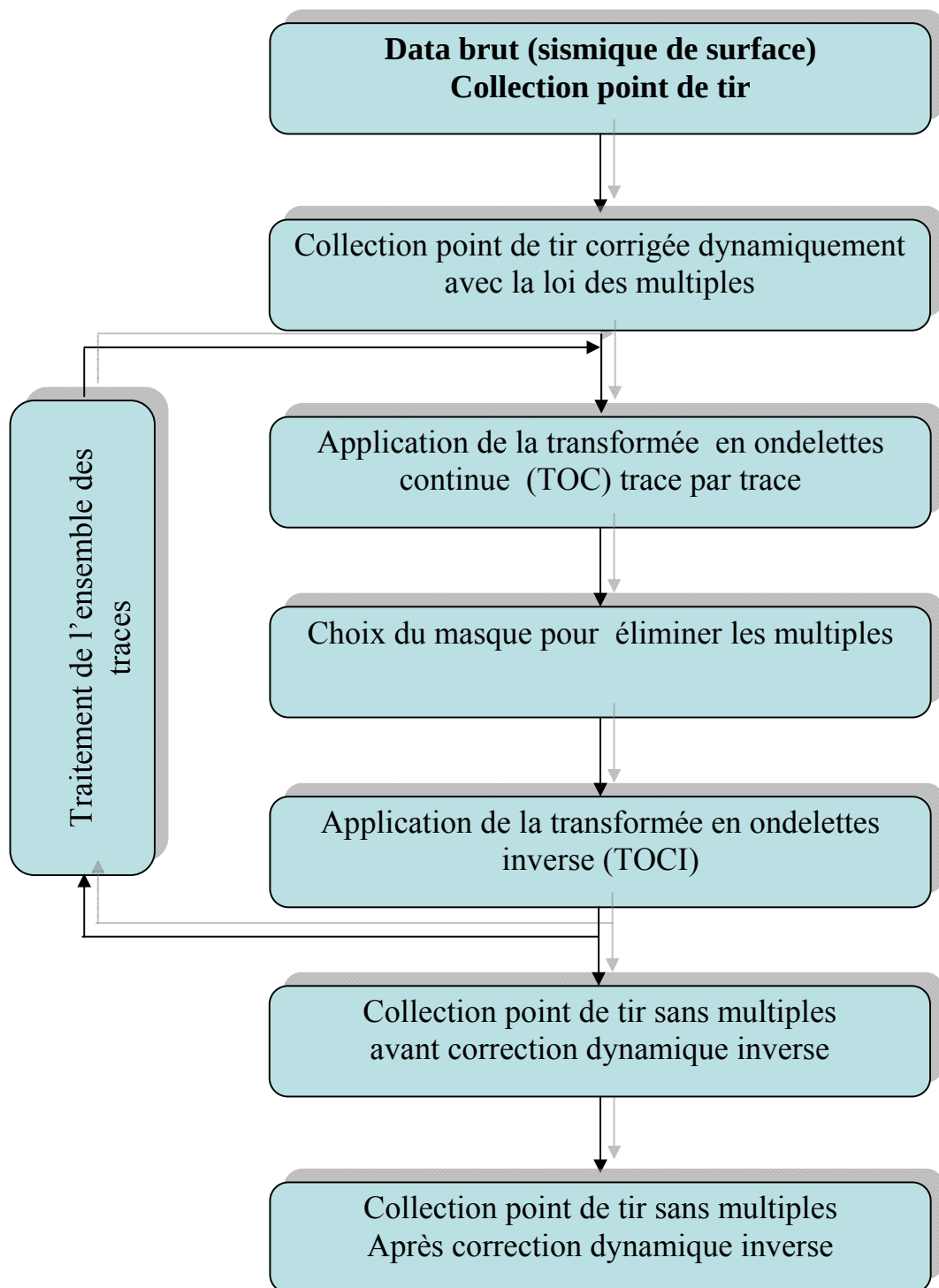


Fig. III.18 Section sismique sans multiples après correction NMO

**Fig. III.19 Organigramme pour filtrer les multiples par la TOC**

Conclusion

Dans la mesure où les paramètres essentiels pour le filtrage tels que le temps d'arrivée des multiples, leur loi de vitesse et leur bande fréquentielle sont connus avec une bonne précision. Les événements sismiques projetés à l'aide de la TOC dans le plan temps-fréquence (scalogramme) sont représentés par des motifs distincts faciles à filtrer. Le masque à appliquer est automatique suit la forme de l'onde multiple à éliminer. Après application de la correction NMO les multiples sont alignés (figure III.15) ainsi que des bruits sont générés, dus probablement au phénomène d'étirement c'est-à-dire il ya perte de hautes fréquences très prononcé pour les traces à grand offset. Le filtre par la TOC a bien fonctionné sur des données synthétiques.

III.1.5. Application de la TOC pour la séparation du champ d ondes d'un profil sismique vertical (PSV)

Introduction

Nous rappelons qu'un PSV est une opération de sismique de puits pour laquelle le signal est émis en surface et enregistré par un géophone situé à différentes profondeurs dans le puits. Le géophone est soit un capteur à une composante (verticale) soit un capteur à 3 composantes (une verticale et deux horizontales). On peut distinguer deux familles d'ondes, l'une de vitesse apparente positive : événements descendants, l'autre de vitesse apparente négative : événements montants, caractérisant une réflexion sur un marqueur géologique. Chaque famille est constituée de plusieurs types d'onde, ce sont principalement les ondes de compression « P », et de cisaillement « S ». La séparation et l'analyse du champ d'ondes permettent de donner une idée sur lithologie et la structure géologique autour du puits. On a introduit une nouvelle technique de séparation à l'aide de la TOC, la séparation s'effectue dans le plan temps-fréquence.

III.1.5.1.Modèle synthétique

Le modèle géologique pour générer la section sismique synthétique est mis en relief par la figure (III.20). Il est composé de trois couches horizontales, la densité des couches est constante partout, le coefficient de la réflexion à la surface est -1 et la source sismique est une impulsion de Ricker dont sa fréquence centrale est de 35 hz avec un nombre d'échantillons égal 80.

Les traces PSV synthétiques ont été calculées sur la profondeur de 20 m à 510 m, avec les paramètres suivants :

- ✚ pas échantillonnage : 4ms
- ✚ nombre d'échantillons temporels par trace : 256
- ✚ inter- trace : 10
- ✚ nombre de trace : 50
- ✚ l'offset : 10
- ✚ vitesse du milieu : 1700m/s, 1900m/s, 2100m/s

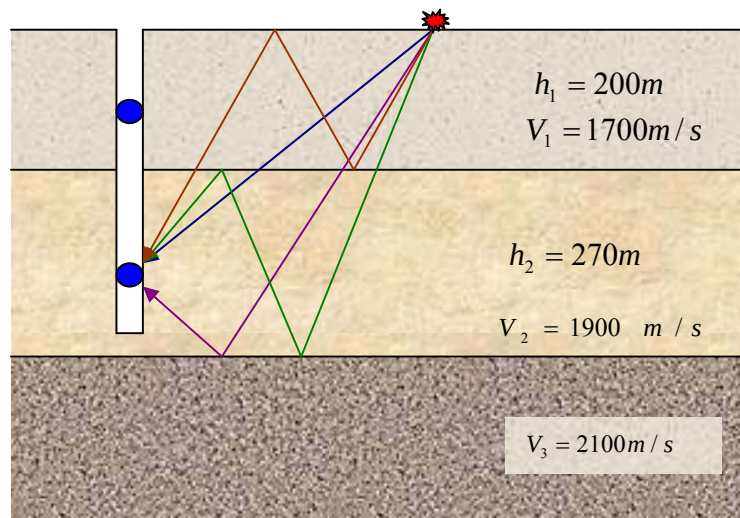


Fig. III.20 Modèle géologique pour générer un PSV synthétique

III.1.5.2. Application de la méthode

Appliquons la transformée en ondelettes continue (TOC) pour séparer le champs d'ondes du PSV synthétique représenté par la figure (III.21).

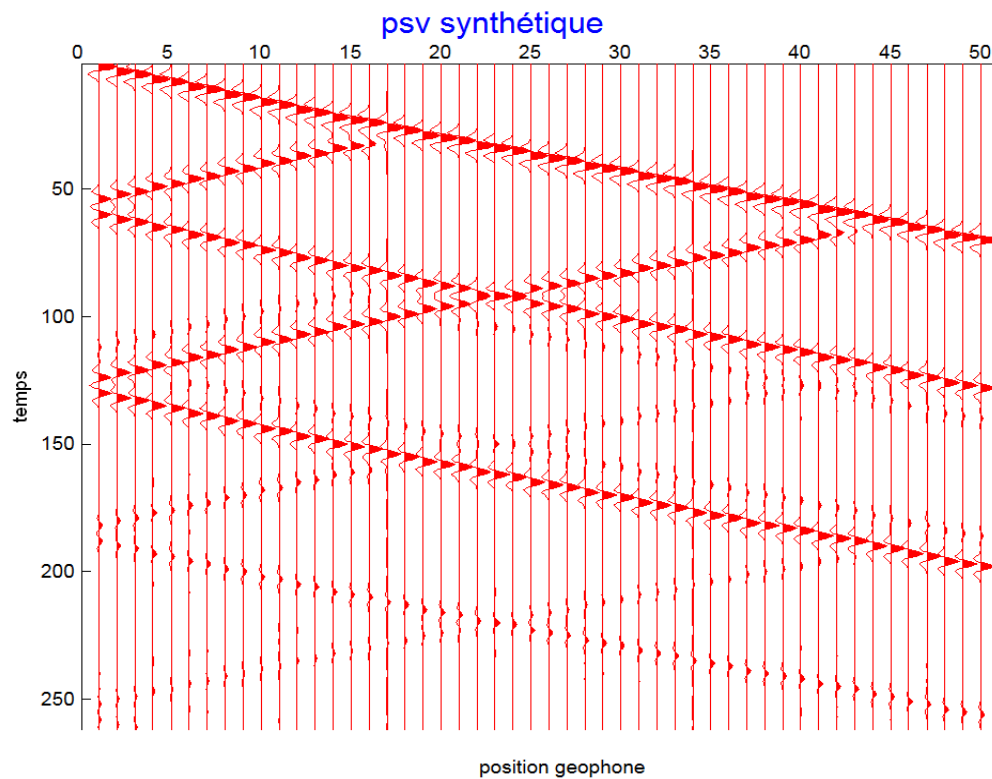


Fig. III.21 Profil sismique vertical synthétique

Pour réaliser la séparation du champ d'ondes de ce PSV, en utilisant la TOC, on doit parcourir les étapes suivantes :

La première étape consiste à aligner l'un des champs d'ondes descendantes ou montantes à séparer, il est conseillé d'aligner le champ d'ondes descendantes car il est plus énergétique par rapport au champ d'ondes montantes, cela nous aide à mieux localiser en temps les événements du champ descendant (figure (III.23)).

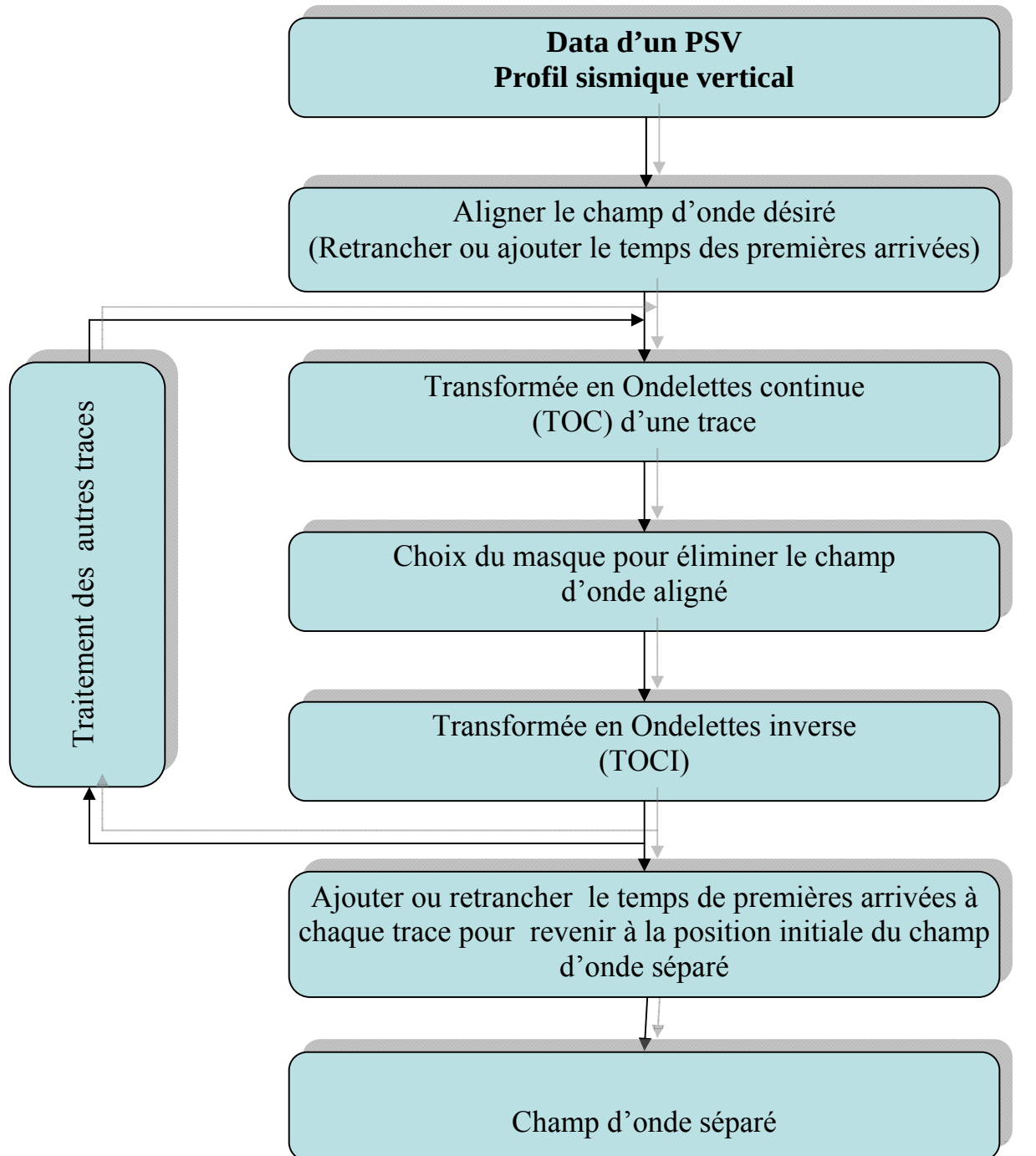


Fig. III.22 Algorithme pour séparer les champs d'un PSV

En suite, on projette chaque trace dans le plan temps- fréquence à l'aide de la TOC, où on distingue clairement les composantes de cette trace (figure III.24), par conséquent, il est facile d'éliminer l'importe composante en appliquant le masque.

Considérons la trace n° 6 où les limites temporelles du masque à appliquer sont définis comme suit: (50-60) ms et (120-130) ms, ces limites sont constantes pour les autres traces. Une fois que les motifs correspondants au champ descendant sont éliminés, on calcule la transformée en ondelettes inverse (TOCI) pour les motifs restant. On obtient ainsi une trace du PSV qui contient seulement un champ d'ondes montantes. Cette opération est répétée pour l'ensemble des traces (trace par trace) de l'enregistrement.

La dernière étape est le retour à la position initiale des traces du PSV, on procède de la manière suivante : on ajoute à chaque trace le temps correspondant au temps des premières arrivées .La figure (III.26) montre le champ d'ondes montantes obtenu après séparation par le filtre TOC.

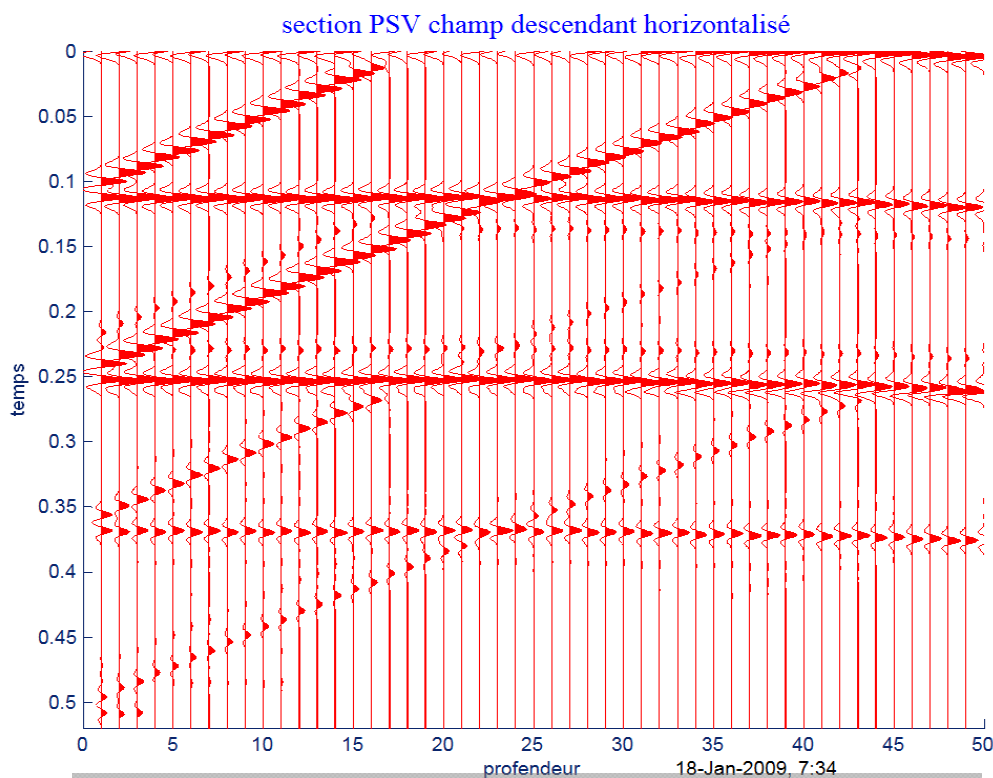


Fig. III.23 Section PSV avec champ d'onde descendant aligné

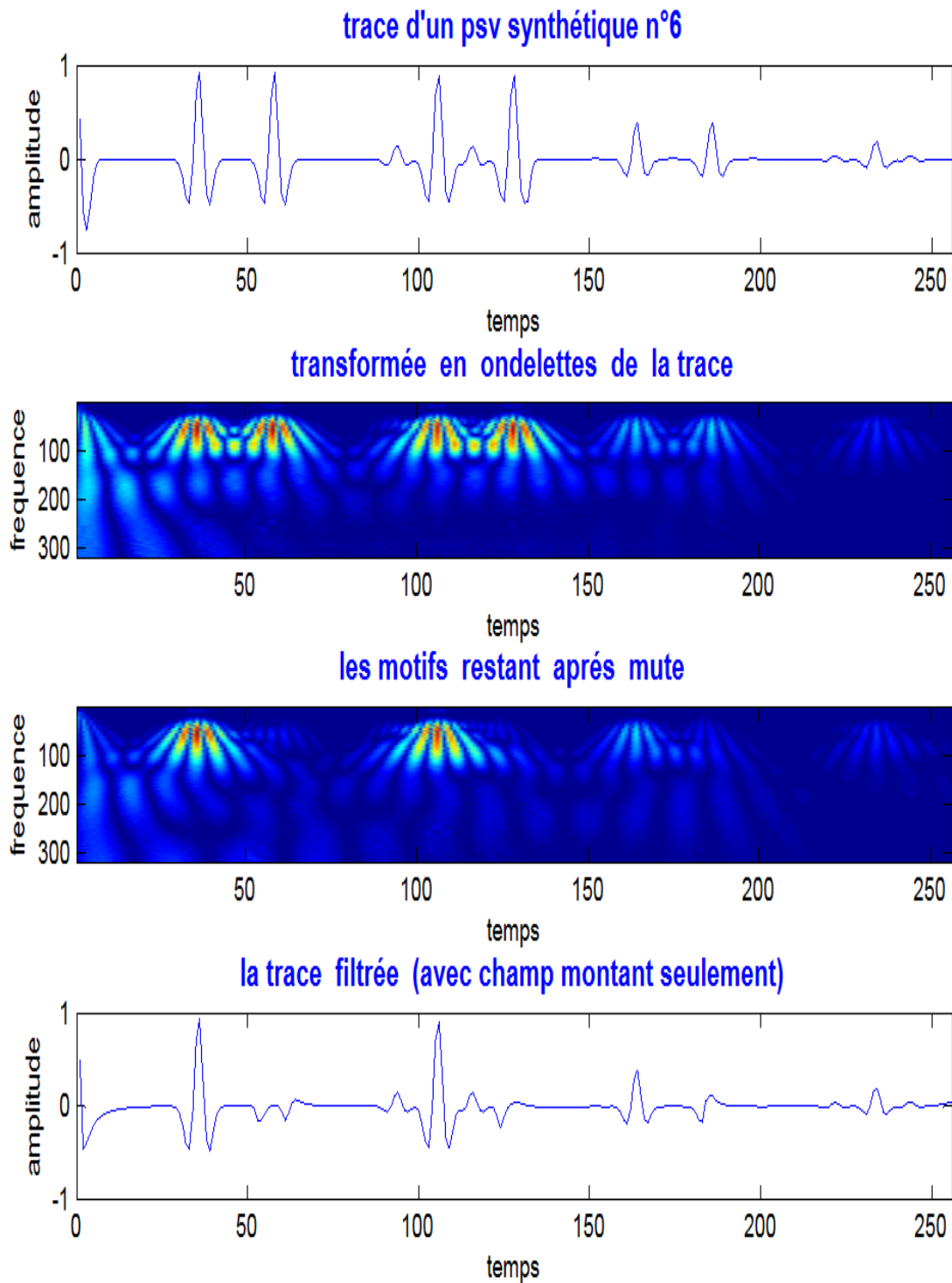
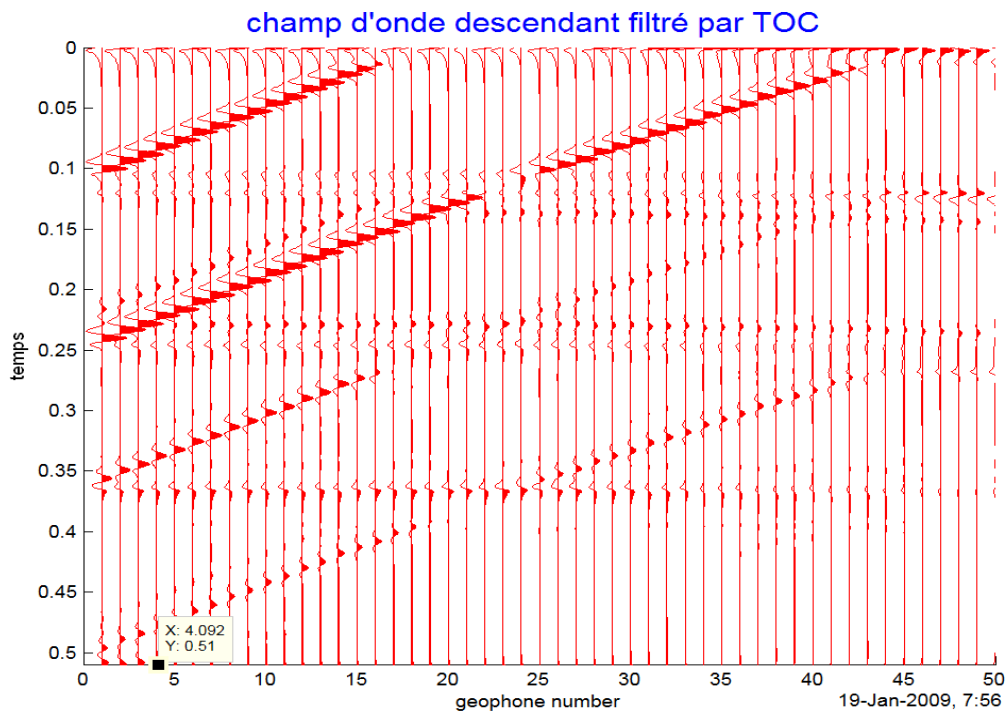
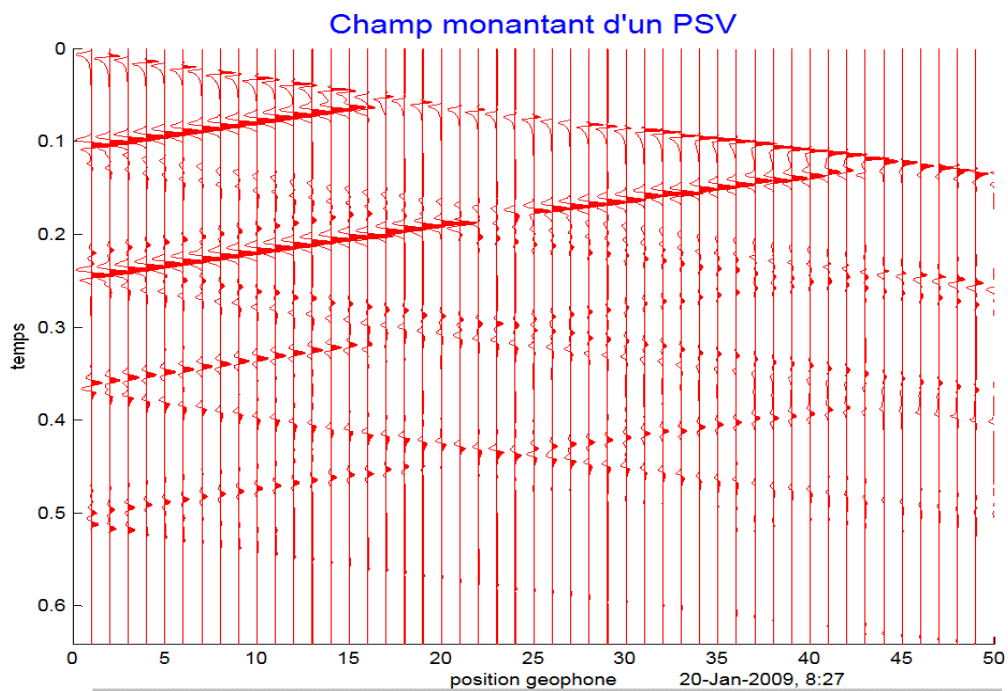


Fig. III.24 Séparation du champ d'onde d'un PSV par TOC sur trace n°6

**Fig. III.25 Champ d'onde descendant filtré par la transformée en ondelettes****Fig. III.26 Champ d'onde montant d'un PSV**

Conclusion

L'opération de séparation du champ d'ondes de PVS par la TOC a bien fonctionné sur un modèle synthétique. Le champ d'ondes montantes présenté sur la figure (III .26) est obtenu à l'aide de la TOC .Ce champ mis en évidence les ondes réfléchies de deux horizons géologiques et les ondes descendantes sont quasiment filtrées .Cette technique est simple et rapide à appliquer n'exige pas un pas d'échantillonnage régulier d'enregistrement dans le puits ce n'est pas le cas pour certaines méthodes classiques telles que la Transformé de Fourier ou de la transformée de Radon.

III.2 : Filtrage dans le plan temps- échelle des données sismiques réelles.

III.2.1 Filtrage de l'onde de surface (ground roll)

Introduction

L'onde de surface est un vieux problème présent dans les enregistrements sismiques. C'est un bruit de basse fréquence avec une amplitude énergétique. Plusieurs techniques sont utilisées pour le filtrer, tel que le filtre FK, une technique qui convient bien pour traiter le signal stationnaire ainsi que la transformée en ondelettes continue qui s'adapte bien pour les signaux non-stationnaires. Elle permet de projeter le signal dans un espace temps- fréquence dans lequel on va filtrer l'onde de surface. Les 02 techniques de filtrage sont appliquées sur des données réelles et les résultats obtenus sont comparés.

Préparation des données réelles

Les données réelles issues d'une campagne sismique réalisée au sud Algérien contiennent des ondes de Rayleigh. Ces ondes sont des ondes de surface qui se propagent directement de la source aux récepteurs, sans pénétrer profondément dans la subsurface ; elles constituent les bruits de surface qui peuvent être gênants et masquer les réflexions primaires. Où $s(t)$ une trace sismique contient des ondes réfléchies et réfractées qui sont cachées par l'onde de surface. La figure (III.27) montre la section sismique enregistrée par un dispositif de 283 traces constituées par des capteurs équidistants de 20m, avec un pas d'échantillonnage $\Delta t = 4$ ms, la source est camion vibreur (vibroiseis) qui émet un train d'onde (sweep linéaire) de fréquence entre 30-75hz de durée 10 s. Les ondes de Rayleigh sont des ondes dispersives qui se propagent à la surface du sous sol, et très énergétiques. Leur caractère dispersif nous incite à utiliser des méthodes temps- échelle pour les étudier. Notre but est d'extraire l'onde de surface afin de la séparer de $s(t)$ dans la mesure où les ondes primaires contenues dans $s(t)$ peuvent apporter de l'information utile sur les caractéristiques géophysiques du milieu de propagation. Pour rendre les réflexions primaires exploitables, il faut donc éliminer les ondes de surface qui peuvent les masquer.

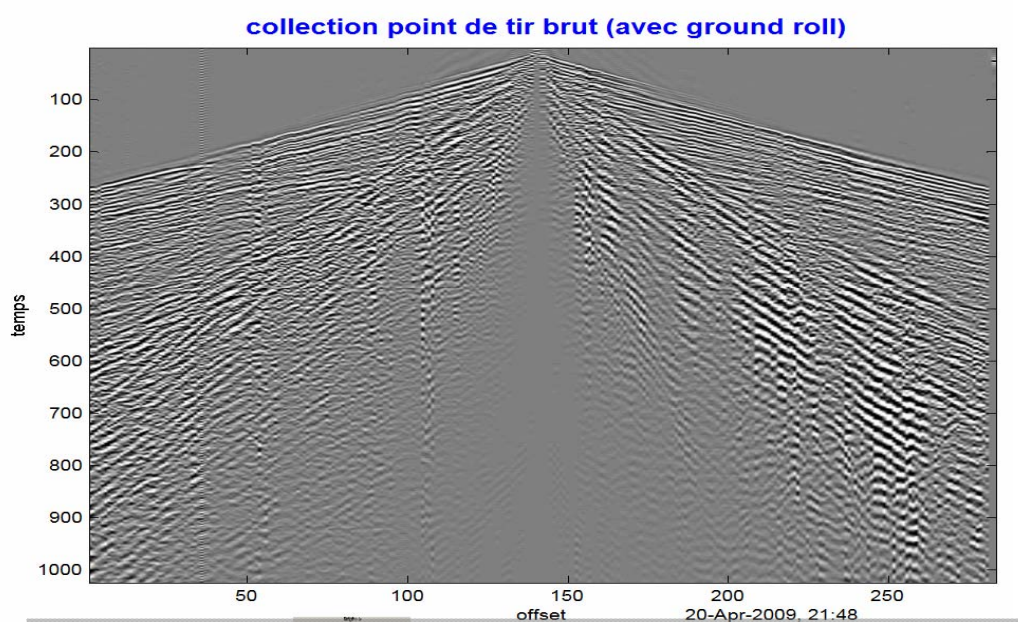


Fig. III.27 Les données réelles avec l'onde de surface

III.2.1 .1. Filtrage de l'onde de surface par la transformation FK

- **Rappels théoriques sur la transformation de Fourier à 02 dimensions (F-K)**

La transformation (F-K) est la transformée de Fourier à 2 dimensions. Soit une fonction $s(t, x)$, par définition la double transformée de Fourier de $s(t, x)$, est :

$$TF_{x,t}[s(x, t)] = TF_x \{ TF_t[s(x, t)] \}$$

$$S(f, k) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t, x) e^{-2\pi j (ft - kx)} dt dx$$

Si on considère un enregistrement à M traces dont chacune est composée de N échantillons, le spectre $S(f, k)$ prend la forme discrète suivante:

$$s(i, j) = \Delta t \Delta x \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^M s(p, q) e^{-2\pi j \left(\frac{(p-1)i}{N} - \frac{(q-1)j}{M} \right)}$$

Si un événement donné a une grande cohérence spatiale dans le domaine (t, x) , il sera localisés dans le diagramme (f, k) par des points concentrés et de fortes amplitudes, par contre les événements de faible cohérence auront des amplitudes faibles et seront étalés dans le plan image.

Une section sismique est fonction des variables temps et distance. Si $s(t, x)$ représente une section sismique, on obtient par la transformation FK une image de cette section dans le plan (f, k) définie par les fréquences temporelle (f) et spatiale (k) . Cette transformation est inversible. Il suffit de prendre la transformation de Fourier inverse pour retrouver le signal initial.

Cette transformation est intéressante dans le cas où le signal $s(t, x)$ se propage à vitesse constante V et est observé sur un réseau de capteurs régulièrement espacés, $s(t, x)$ peut s'écrire :

$$s(t, x) = g\left(t - \frac{x}{V}\right)$$

Alors

$$TF_{x,t}\left[g\left(t - \frac{x}{V}\right)\right] = G(f) \delta\left(k + \frac{f}{V}\right) \quad \text{Où} \quad G(f) = TF_t[g(t)]$$

Alors dans le plan des deux fréquences f et k , $\delta\left(k + \frac{f}{V}\right)$ représente la droite $k + f/V$ passant par l'origine et de pente $-1/V$.

- **Filtrage dans le domaine FK**

Dans le plan (f, k) défini par des fréquences temporelles f et spatiales k , les ondes de vitesse constante peuvent être sélectionnées par des filtres ou masques (en éventail, en bande ou en polygone). Par transformation inverse on trouve le signal filtré en tant que section sismique. Sur la figure (III.28) est représenté le gabarit d'un tel filtre qui vaut 1 dans les régions blanches et zéro dans les régions bleues ne sont représentées que les parties non redondantes c'est à dire pour les fréquences temporelles f les valeurs de 0 à la fréquence

maximal $f_{\max}$ et pour les fréquences spatiales les valeurs du nombre d'onde k les valeurs positives et négatives de $k_{\min}$ à $k_{\max}$

Avec la définition ici utilisée pour la transformée de Fourier à deux dimensions, à une vitesse apparente positive ($x = vt$) dans le plan (x, t) correspond une vitesse apparente négative $f = kv$ dans le plan (f, k) .

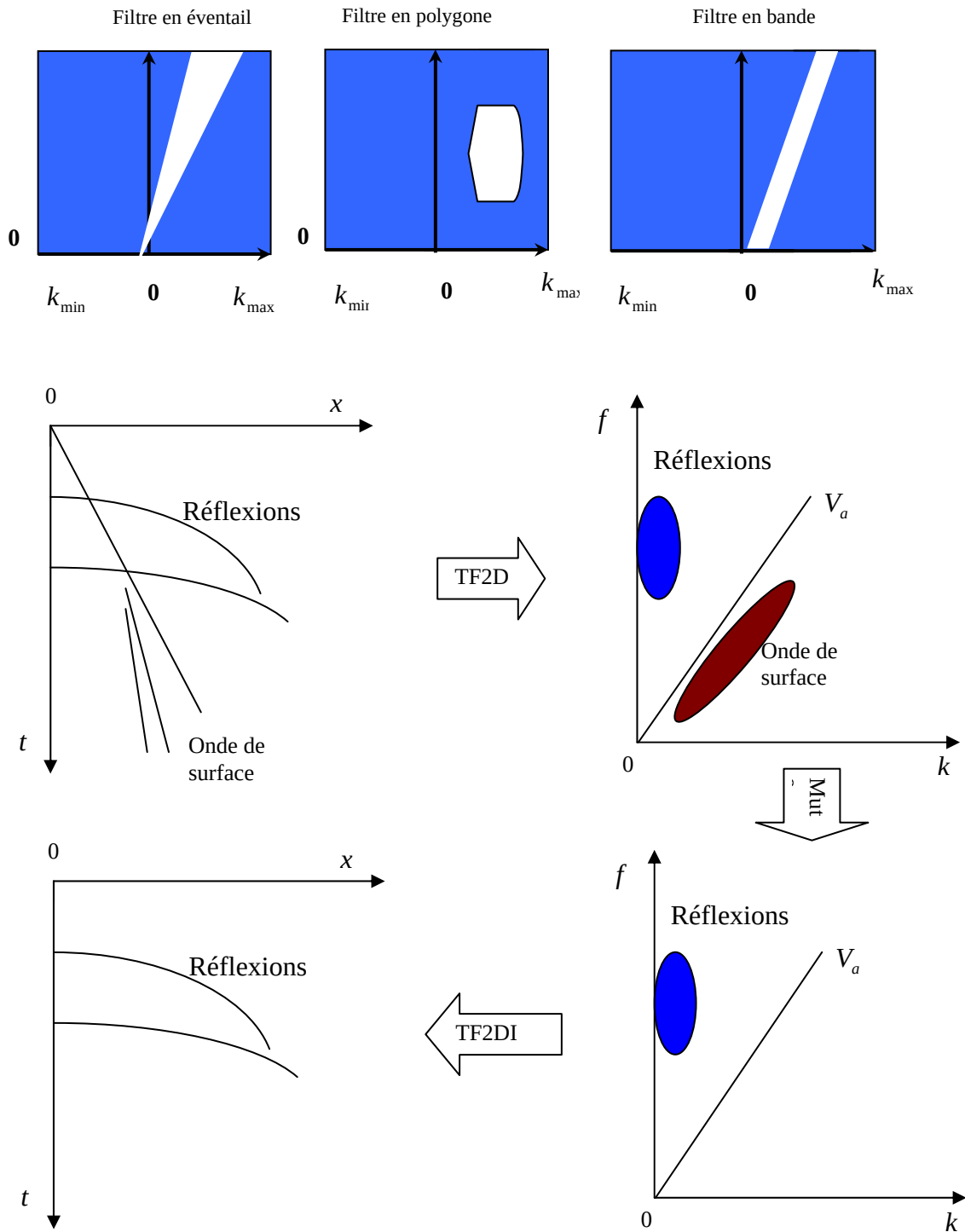


Fig.III.28 Filtre fréquence- nombre d'onde

La double transformée permet de :

- mettre en évidence les ondes de vitesses constantes et estimer ces vitesses
- filtrer les ondes de vitesses différentes et améliorer le rapport signal sur bruit.

Ce filtrage est très utilisé en sismique pour éliminer l'onde de surface des sections sismiques. En effet, l'onde de surface étant directionnel, il doit se retrouver sous forme de pente dans le domaine FK. Les filtres décrits ci dessus permettront donc de bien la filtrer.

• Résultats du filtrage FK

Parmi les méthodes classiques du traitement des signaux sismiques, nous présentons les résultats du filtrage en fréquence avec la transformée de Fourier à deux dimensions. Cette méthode est couramment utilisée en traitement des signaux sismiques [Yilmaz87]. Elle s'effectue en trois étapes :

- ✚ Calcul de la transformée de Fourier à deux dimensions de la section sismique.
- ✚ Caractérisation manuelle d'un gabarit de filtre dans l'espace des fréquences.
- ✚ Calcul de la transformée de Fourier à deux dimensions inverse des coefficients multipliés par le filtre.

On applique un double transformé de Fourier à la section sismique présentée au-dessus. L'image de cette section dans le plan (f, k) est représentée sur la figure (III.29). On retrouve une des caractéristiques de l'onde de surface à savoir qu'elle est basse fréquence. Par contre elle est relativement mal représentée dans le domaine (f, k) . C'est à dire qu'elle est assez étalée. De ce fait le filtrage ne peut pas être vraiment précis.

L'onde de surface se trouve à l'intérieur des deux faisceaux délimités par les deux segments de droites à l'intérieur du cercle rouges. C'est pourquoi un filtre en éventail est plus recommandé. Cependant, une partie du signal utile étant basse fréquence se trouve filtrée avec l'onde de surface.

Une fois le filtre effectué (la mise à zéro des coefficients compris dans les faisceaux), on repasse en dimension temps- distance par la transformée inverse pour obtenir la section sismique filtrée.

La figure (III.30), montre le point de tir initial et le point de tir après filtrage, permet de se rendre compte de l'effet et l'efficacité du filtre. L'onde de surface a effectivement été supprimée en majeure partie mais du signal utile a aussi été éliminé. De plus les zones correspondant aux ondes réfractées n'ont pas ou peu été modifiées.

Il semble que l'on perde de l'information sur la section en générale. En effet les zones extérieures du faisceau où se trouve l'onde de surface ont été fortement modifiées (la figure III.31), notamment la zone centrale. Or cette zone n'est pas affectée par le signal parasite. Les effets de bords aussi sont assez importants.

Conclusion

L'utilisation du filtrage dans le domaine (f, k) est très efficace pour atténuer les bruits organisés tel que l'onde de surface. Il permet donc une séparation relativement efficace de l'onde de surface. Pour l'application du débruitage en géophysique, le problème est que l'extraction n'est pas totale et que ce débruitage entraîne aussi une détérioration du signal. Cet effet est important car l'énergie du signal est en général moins grande que celle du bruit.

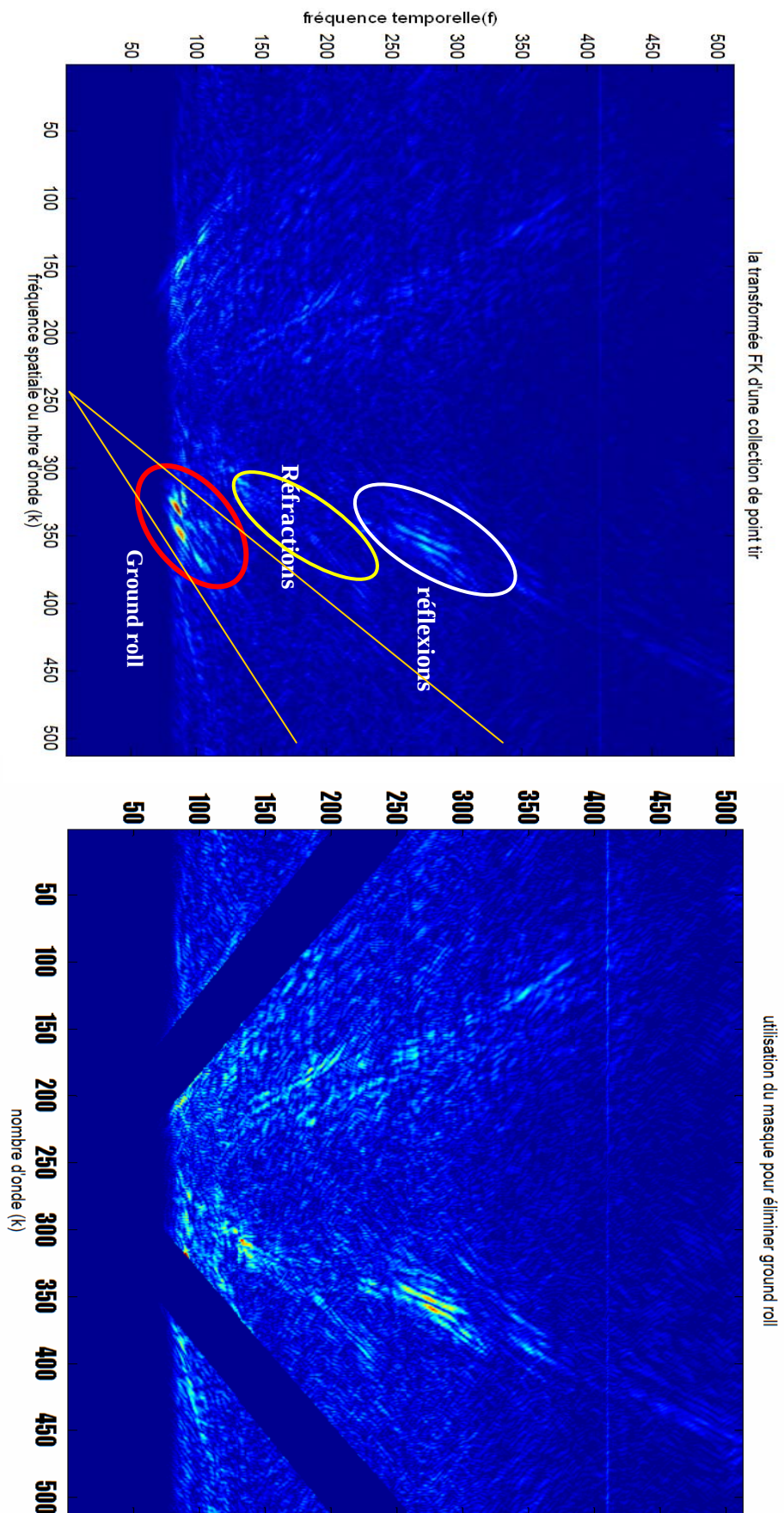


Fig III.29 Application d'un mute sur le module de la transformée de Fourier 2D

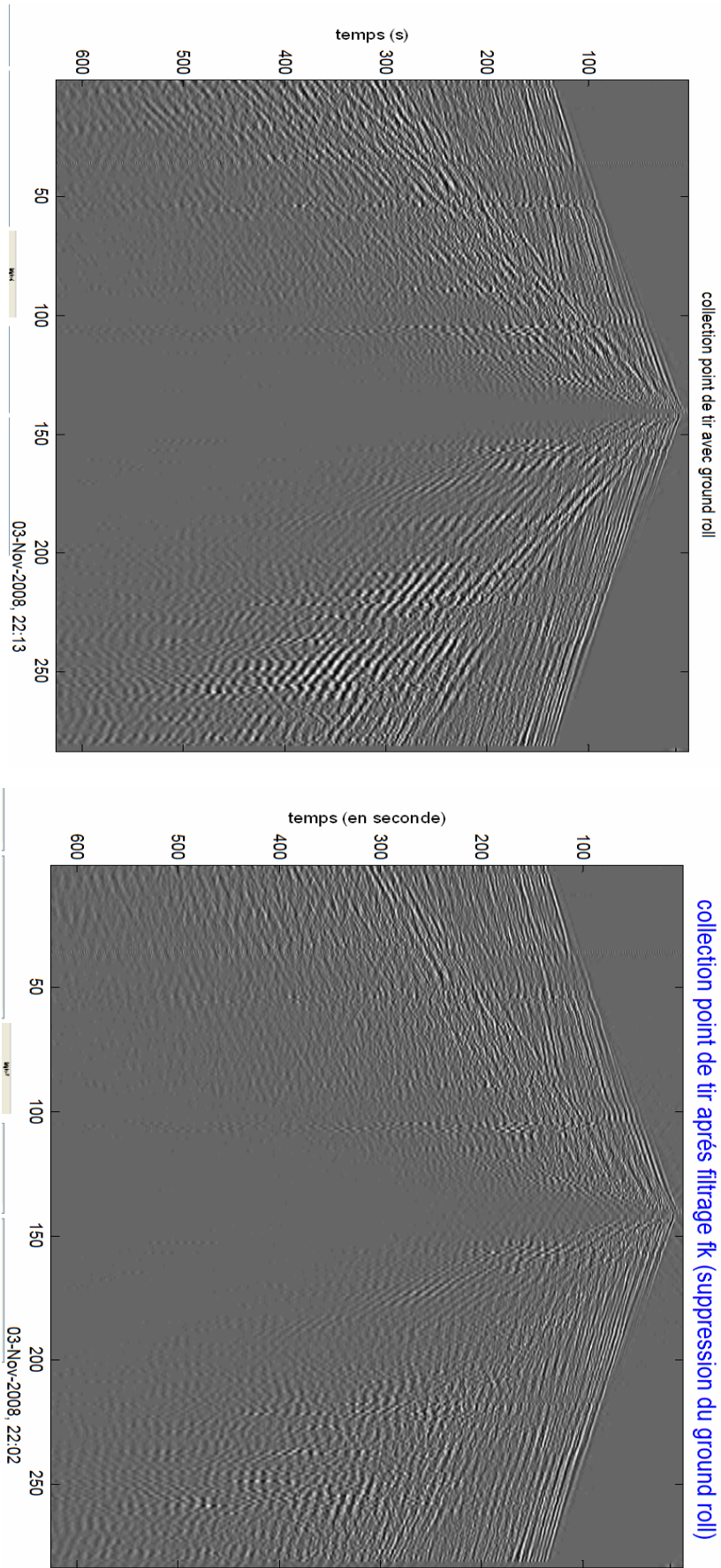


Fig III.30 Une collection des données réelles avant et après filtrage de l'onde de surface

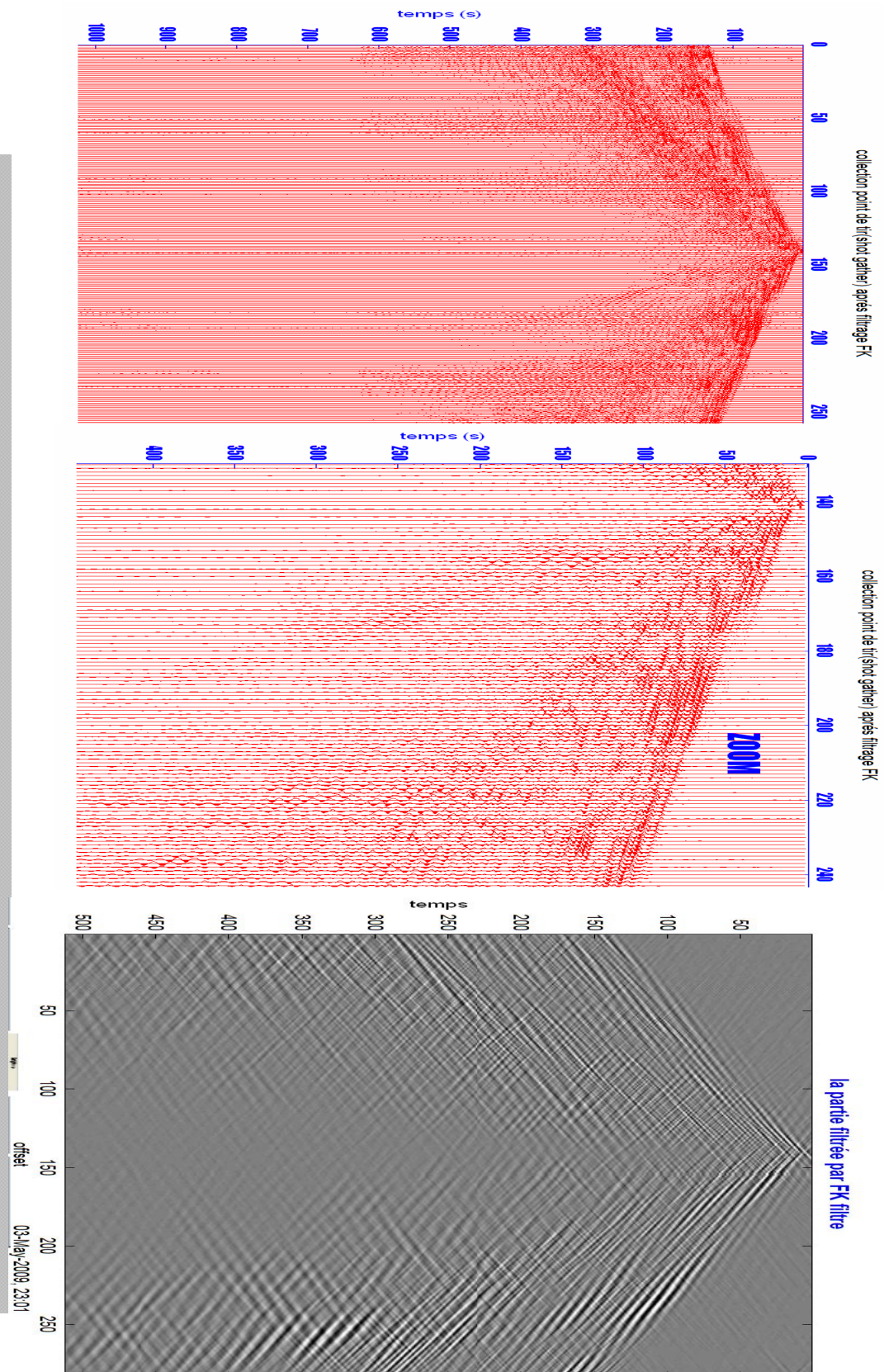


Fig III.31 Suppression du ground roll après le filtrage FK (application sur les données réelles)

III.2.2. Filtrage de l'onde de surface par la transformée en ondelettes continue (TOC)

Après avoir présenté la méthode de filtrage par la transformée de Fourier à deux dimensions (f-k), nous proposons à présent une autre méthode plus simple à utiliser et n'entraînant pas l'addition de bruits. Cette méthode est basée sur l'application à chaque trace de la collection point de tir du profil, l'algorithme de séparation dans le plan temps- fréquence proposée précédemment. Ce filtrage étant trace à trace, il n'induit pas d'artefact dans la dimension spatiale.

Pour chaque trace de la section étudiée, nous calculons le module de la représentation temps -fréquence en utilisant la TOC. Ces images temps- fréquence sont ensuite "empilées" les unes sur les autres, définissant ainsi un volume de données. Les trois dimensions de ce volume sont respectivement : le temps, la fréquence ou échelle, et la distance (éloignement du capteur à la source). Ceci est illustré sur la figure (III.38).

L'utilisateur définit les faisceaux à l'intérieur desquels il veut appliquer le masque. Même si l'objectif est de filtrer l'onde de surface, les ondes réfractées peuvent être englobées dans les faisceaux. En effet ces ondes sont les plus rapides et sont aussi très énergétiques. Elles masquent les réflecteurs peu profonds pour les faibles offsets. On aimerait donc les enlever au même titre que l'onde de surface dans le but d'améliorer le rapport signal sur bruit.

Ces ondes sont plus hautes fréquences que l'onde de surface et donc se trouvent proche de la même gamme fréquentielles que le signal utile. Il n'est donc pas vraiment facile de les en séparer. C'est pourquoi finalement, les englober dans les faisceaux ou pas, ne modifiera pas réellement une grand-chose dans le filtrage. La partie réellement améliorée se situera au niveau de l'onde de surface où les composantes ne s'interfèrent pas.

L'onde de surface n'est pas aussi bien encadrée qu'on le voudrait. En effet, plus on s'éloigne de la source, plus les faisceaux s'élargissent et donc une partie de la section « hors ground roll » se retrouve englobée par les faisceaux. Mais si on les rétrécit, se seront les zones de l'onde de surface près de la source qui ne seront pas filtrées. La figure (III.32) montre comment l'utilisateur peut choisir les limites temporelles.

L'étendue temporelle du masque est déterminée d'une manière automatique car le temps d'arrivée de l'onde de surface est donné par l'équation $t = x/V$ donc les limites du masque sont deux droites d'équations $t = x/V_1$ et $t = x/V_2$ avec une plage d'échelles qui correspond aux basses fréquences, en général la gamme des fréquences pour l'onde de surface varie de zéro jusqu'au 16 Hz.

Une fois les faisceaux déterminés, chaque trace est projetée dans l'espace temps-échelle où le masque est appliqué. Voici quelques exemples sur des traces bien choisies (exemple de la trace n°16 (figure III.34) et l'exemple de la trace n°40 (figure III.35)). Sur la trace n°16 l'onde de surface est concentrée entre deux flèches violettes (de 480 à 865ms) dans une plage de fréquence (0 à 16hz) qui correspond aux échelles (6-7). A l'intérieur de ces limites, le masque va mettre à zéro tous les coefficients supérieurs à une amplitude de référence.

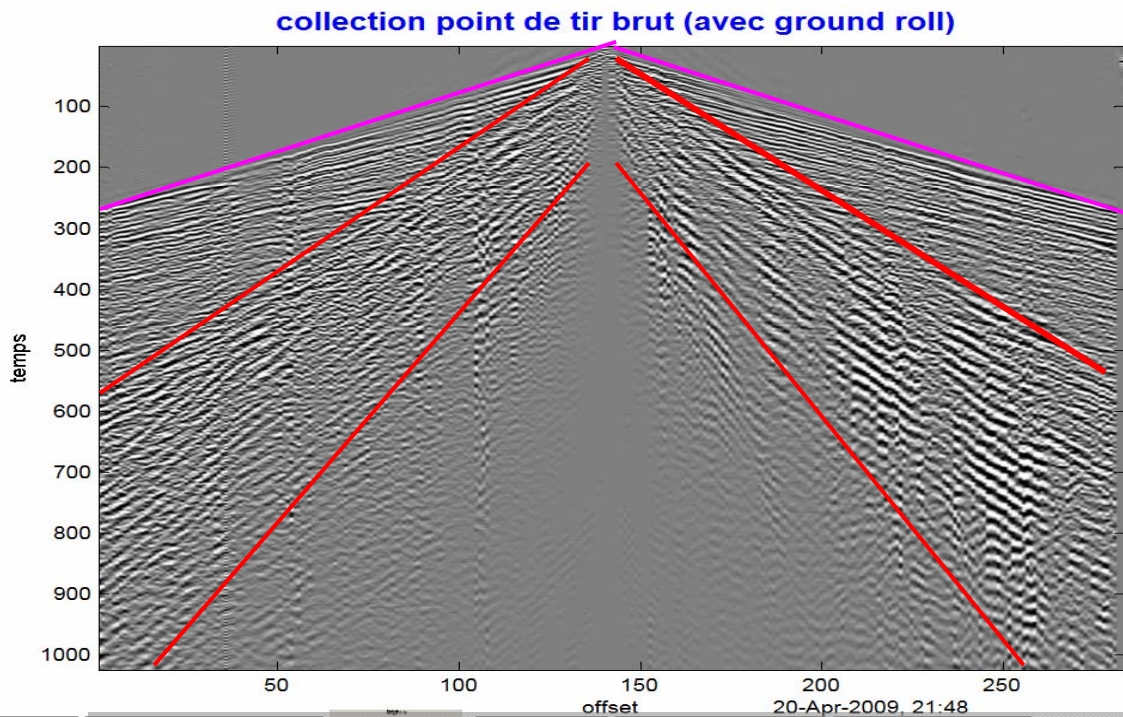


Fig. III.32 Délimitation de la zone de l'onde de surface

$$amp_moy = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ampl_max(i)$$

$$ampl_ref = amp_moy / x$$

L'amplitude maximale est la valeur maximale des coefficients en ondelettes pour chaque échantillon de la trace et x est un facteur de pondération pour améliorer ou dégrader l'effet du masque sur le signal utile.

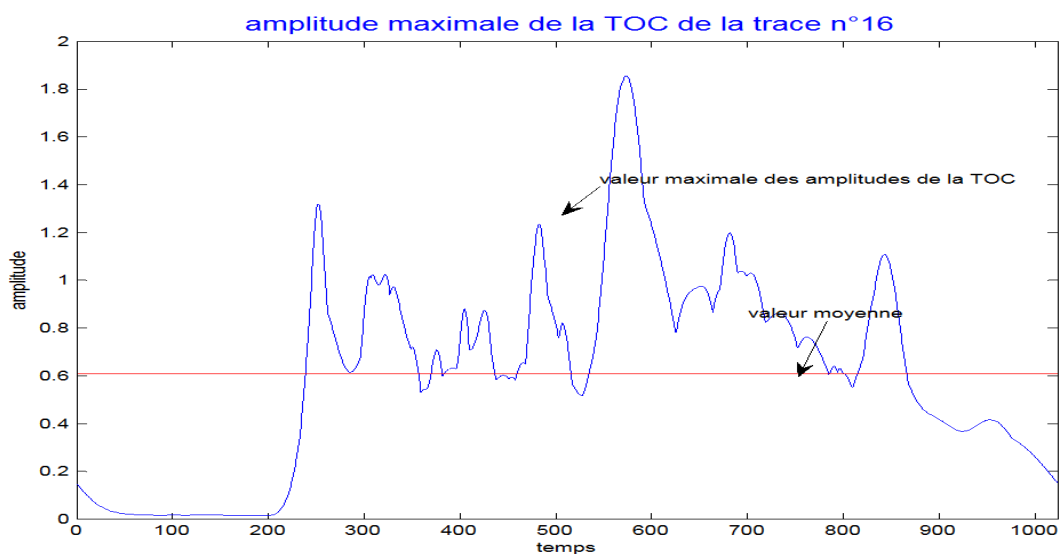


Fig. III.33 L'amplitude maximale et moyenne du module de la TOC d'une trace

La figure (III.35) montre la représentation de la trace n° 16 dans le plan (a, b), on peut distinguer les motifs énergétiques correspondant aux ondes de surface. Les deux figures (III.34) et (III.35) sont l'étape clé du filtrage, on applique le masque qui permet de sélectionner le motif d'énergie qui nous intéresse, puis de le reconstruire dans le domaine temporel par la transformée en ondelettes inverse.

Le filtre a bien agi sur l'onde de surface. La flèche rouge indique ce qui a été modifié sur la trace, dans la zone entre les deux flèches violettes. Cependant les hautes fréquences correspondant aux ondes réfractées sont encore très présentes et nous empêchent d'améliorer le filtrage.

Dans ce cas, le filtrage s'est bien effectué. Il agit sur la bande fréquentielle [0 à 15 Hz], et l'onde de surface est découpée chirurgicalement. Les hautes fréquences correspondant aux ondes réfractées sont rehaussées ainsi que les basses fréquences se trouvant en dehors de la zone de l'onde de surface.

L'effet du filtrage est bien marqué sur la figure (III.36). L'onde de surface a été effectivement filtrée dans les zones définies par les faisceaux. La partie centrale du point de tir sismique n'a pas été modifiée. De plus, la réflexion qui se trouvant entre 450 ms et 500 ms est visible de bout en bout. Les morceaux de réflexion masqués par l'onde de surface dans le rectangle jaune. Sur cette zone indiquée par la flèche bleue, la partie de la réflexion qui était complètement masquée par l'onde parasite a été mise en évidence.

La figure III.37 montre la partie du signal supprimée lors du filtrage par la transformée en ondelettes continue. L'onde de surface a été identifiée et filtrée sur le côté droit alors que le côté gauche le filtre est plus chirurgical. Ceci est dû à la forme de l'onde de surface sur l'enregistrement brut du point de tir initial.

On essaie de choisir avec précision l'étendue temporelle car l'effet du faisceau est assez marqué, il le sera d'autant plus que le coefficient x définissant la « violence » du masque est élevé. Pour cela il est confortable de combiner visuellement à un filtrage en faisceau un peu violent, un léger filtrage vertical. C'est à dire un filtrage qui n'ait pas de borne temporelle. Ainsi les zones se trouvant en dehors des faisceaux seront atténuées (toute la section sera touchée). La démarcation entre les deux zones filtrées par les faisceaux et le reste du tir sera moins nette. Dans ce cas aussi il est difficile de dire quel est le bon compromis du fait que l'on ne dispose pas de critère quantitatif.

Si on filtre trop violemment en variant la valeur de x , on dégrade considérablement la qualité de la section sismique. Ce coefficient est choisi dans cet exemple égal à 2 après des tests qu'on fait d'une manière de ne pas toucher au signal utile, mais on constate qu'il reste un peu de l'onde de surface. Cependant nous avons constaté que donner des valeurs plus grandes à x ne semblait pas améliorer le filtrage. De plus, il est préférable de prendre x petit pour conserver le maximum de signal utile, parce que nous sommes dans la phase de pré traitement et donc il s'agit de dégrader le moins possible l'image sismique. D'autres traitements pourront améliorer ce que le filtrage par la transformée en ondelettes continue n'a pas pu améliorer

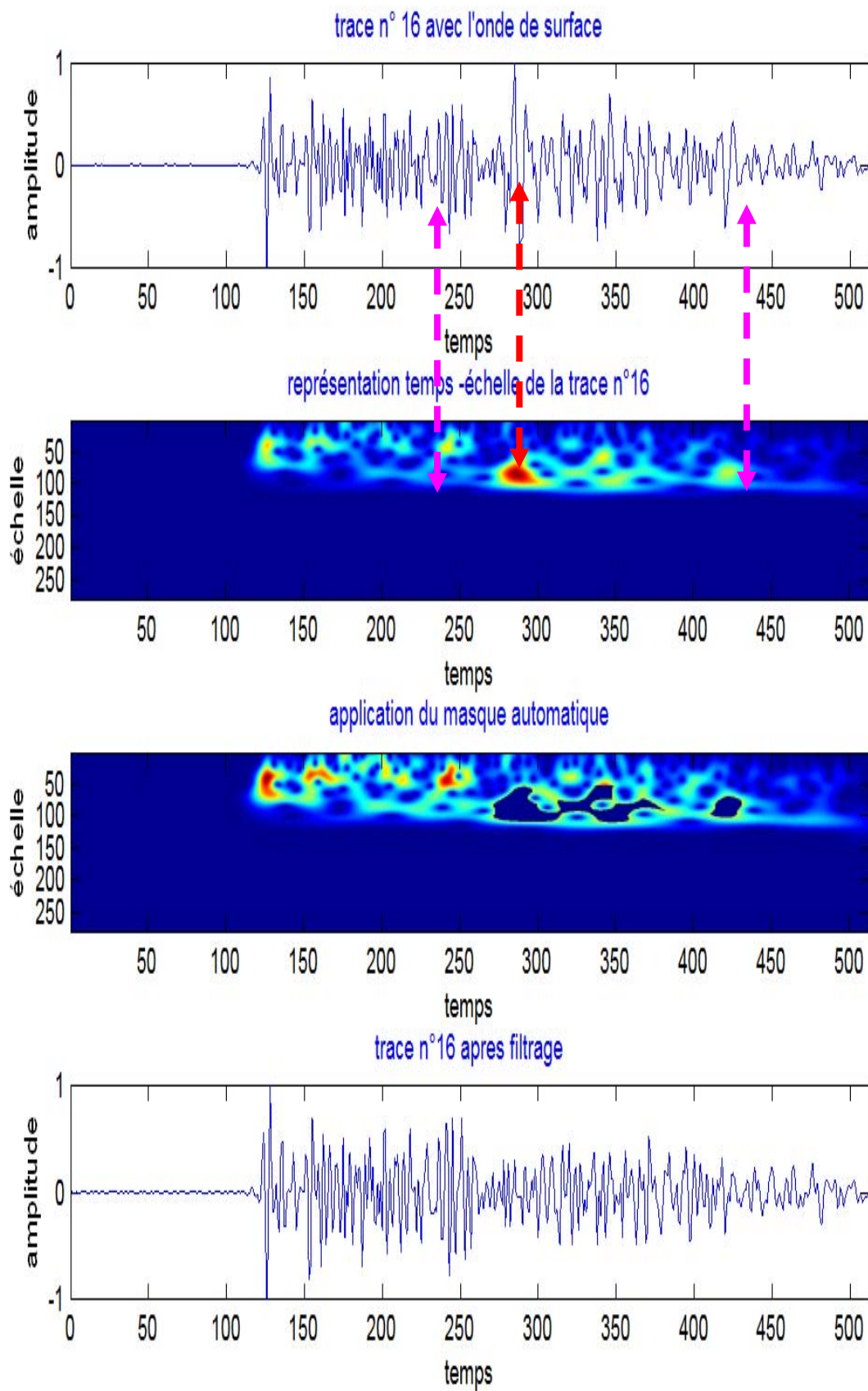


Fig. III.34 Trace 16 et son module de TOC avant et après filtrage

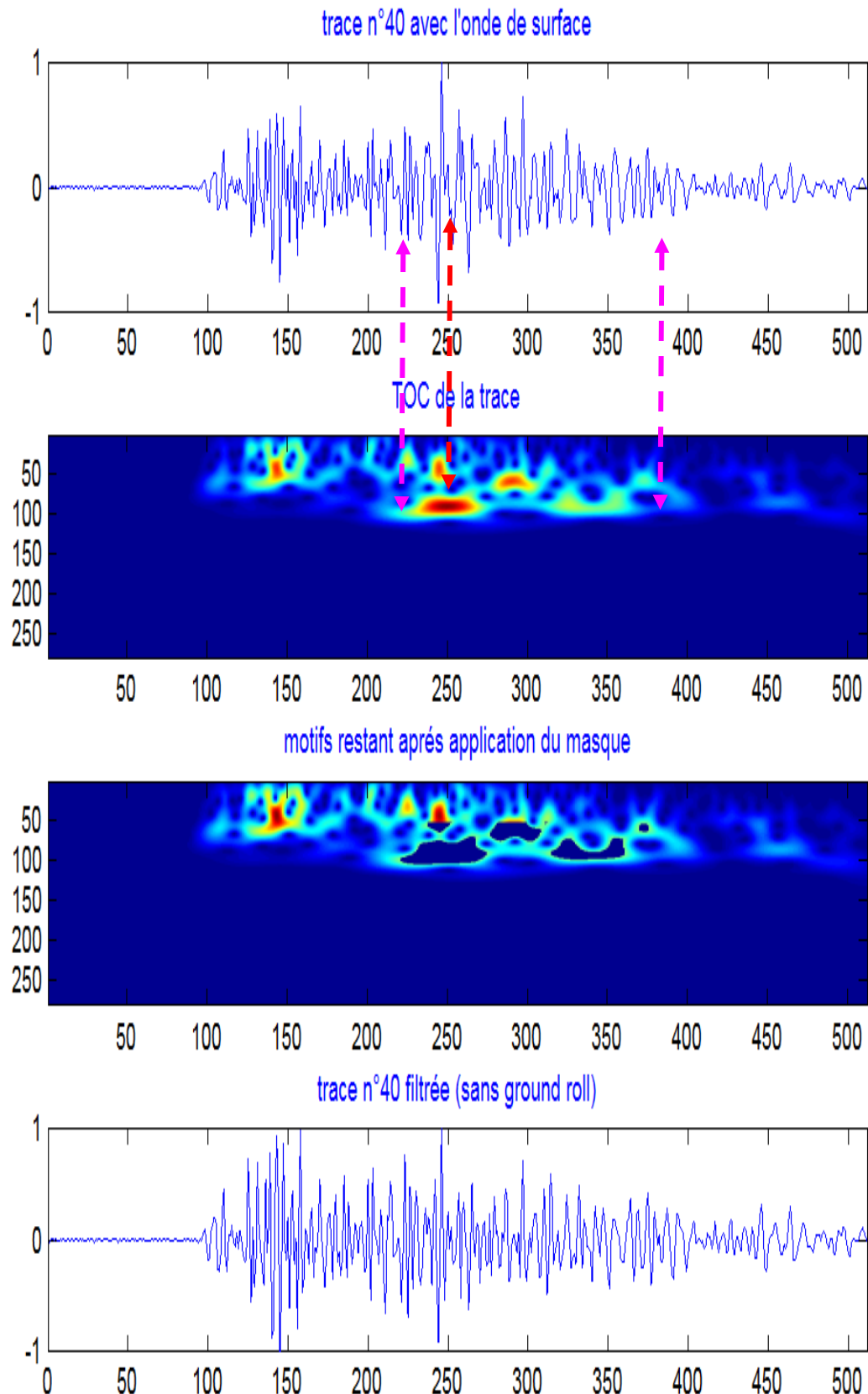
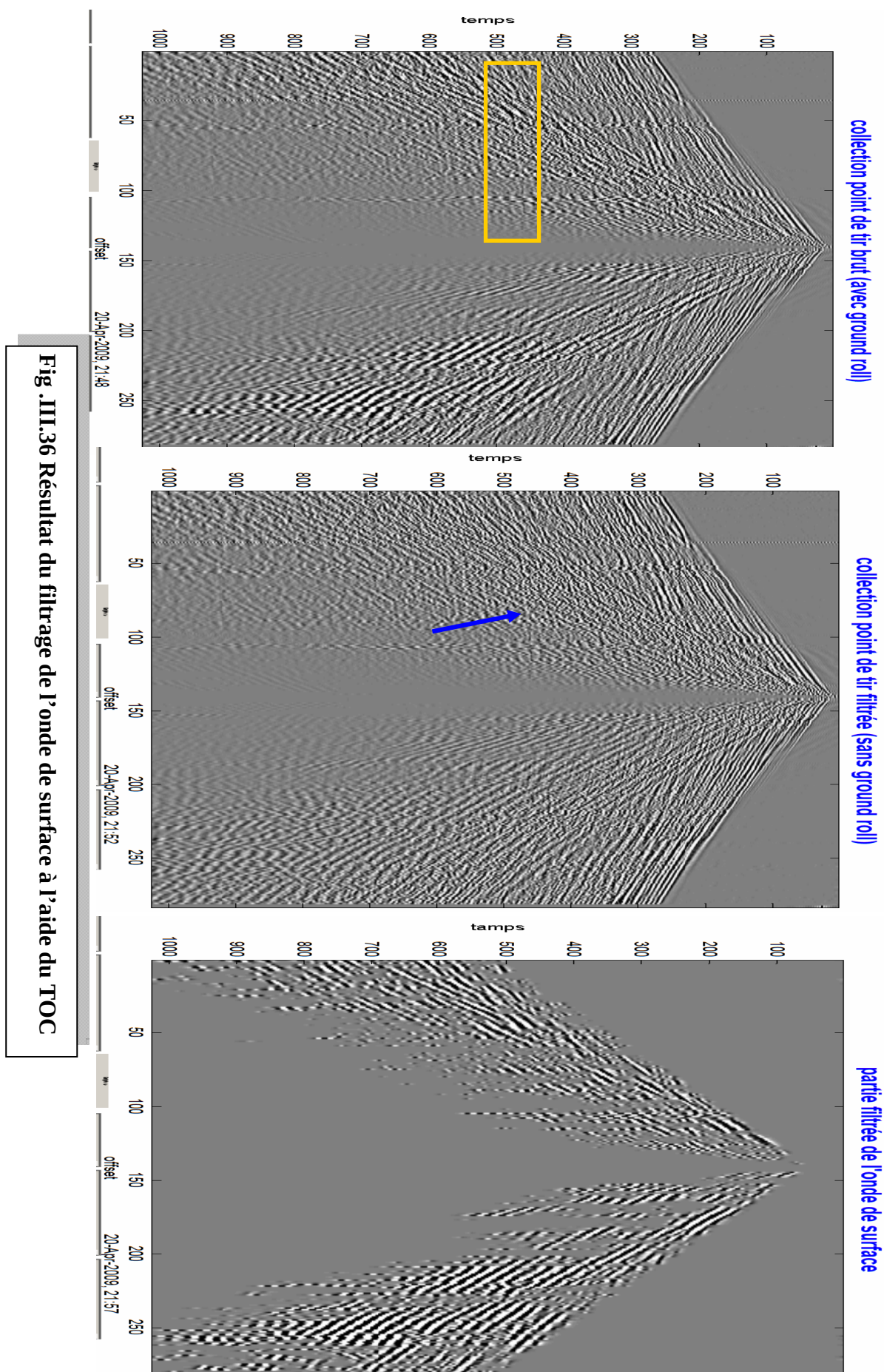


Fig. III.35. Trace 40 et son module de TOC avant et après filtrage



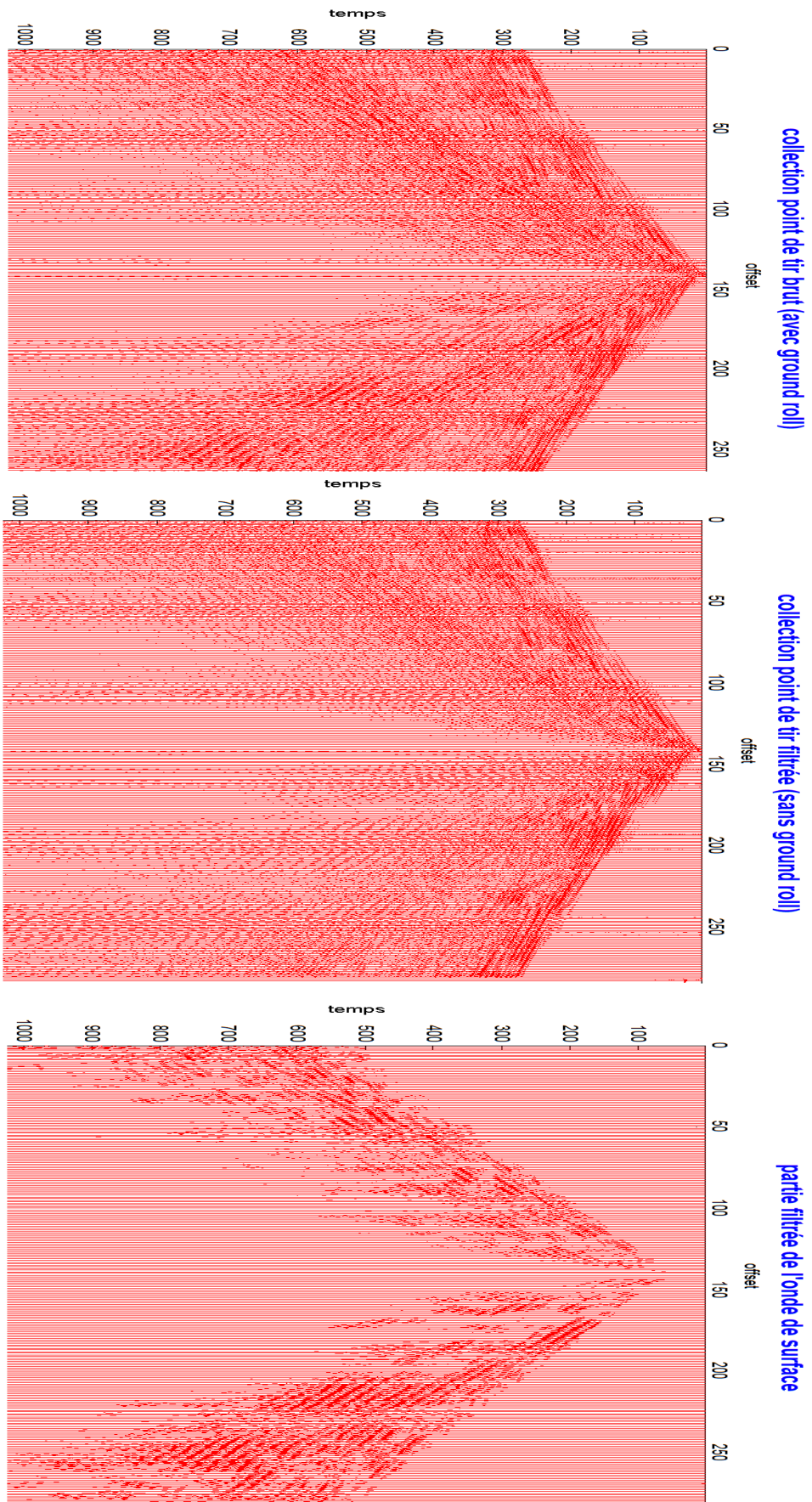


Fig. III.37 Résultat du filtrage de l'onde de surface à l'aide du TOC

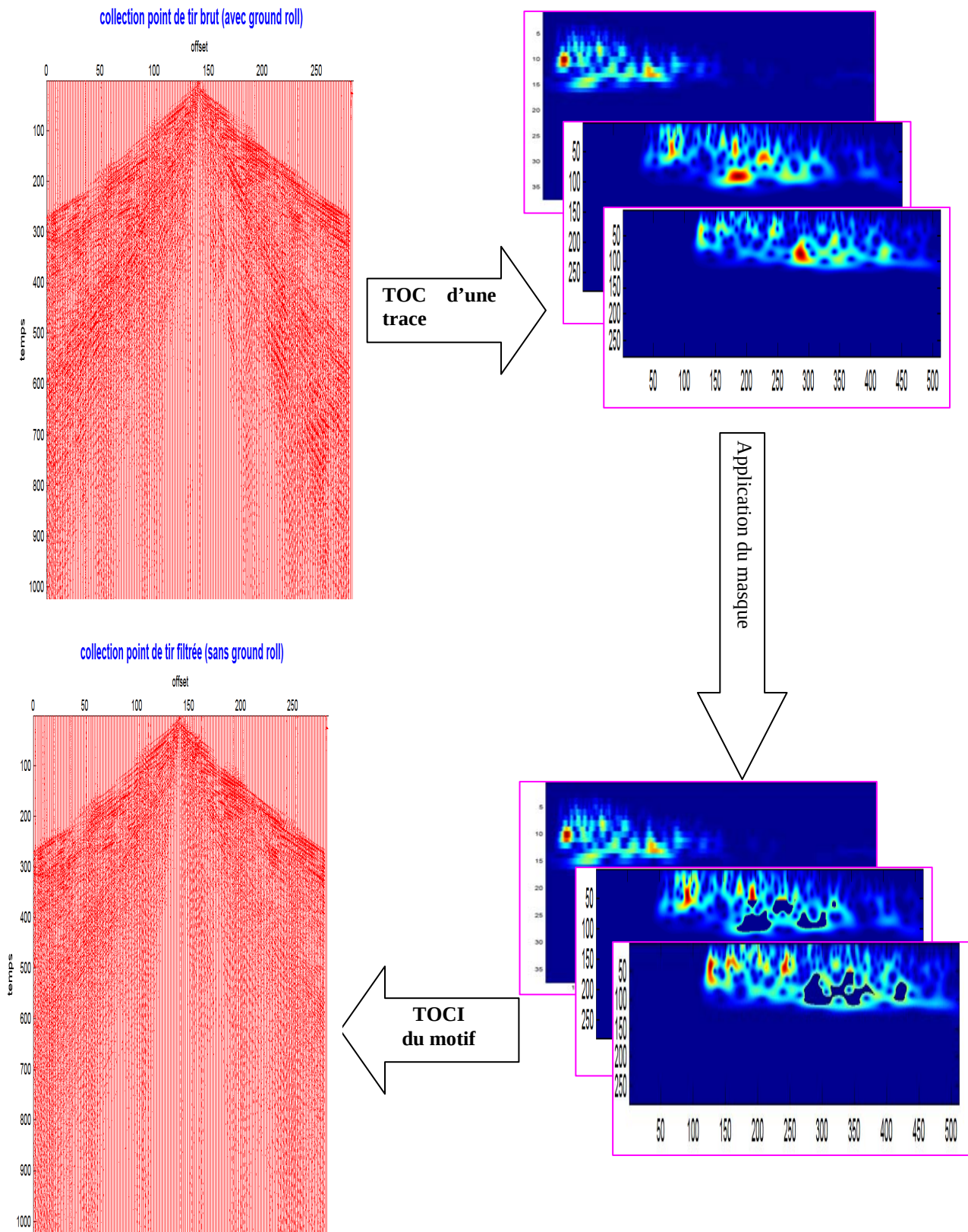


Fig.III.38 Procédure du filtrage dans plan temps -échelle

Il y a deux conditions pour que cette méthode de filtrage présentée donne de bons résultats :

La première condition est que les motifs ne se recouvrent pas dans le plan temps-fréquence. Si les motifs se recouvrent partiellement, les régions sont découpées de sorte que les ondes restent partiellement séparées. Afin d'améliorer la séparation dans ce cas, il est naturel à penser à une redistribution équitable de l'énergie au niveau de la frontière, mais le problème est que du fait de l'information de phase, l'amplitude de la somme des ondes n'est pas la somme des amplitudes, nous n'avons donc pas accès à l'énergie de la somme des deux ondes, la redistribution de l'énergie est donc difficile. Pour la même raison (mélange irréversible de l'information de phase). En présence d'interférence, le filtrage a donc pour conséquence de laisser dans la partie signal une partie du bruit et dans la partie bruit de prendre une partie du signal.

La seconde condition de bon fonctionnement est que le nombre de maxima locaux pour une onde soit strictement égal à un. Ce type de problème apparaît quand du bruit, même de faible amplitude s'ajoute au signal, résultant en la présence de maxima locaux de faible dynamique, ou quand l'enveloppe de l'onde admet plusieurs maxima locaux.

L'utilisation de la transformée en ondelettes continue pour les applications de filtrage s'avère être un outil particulièrement intéressant et puissant. Lorsque les motifs dans le plan temps- échelle sont bien distincts.

La reconstruction du signal à partir de son motif donne des résultats très satisfaisants, avec des erreurs de reconstruction très faibles

L'intérêt de cette technique réside dans le fait que la séparation dans le plan temps-fréquence est, dans la grande majorité des cas, plus performante que dans la dimension temporelle et/ou fréquentielle. De plus, elle est automatique ce qui rend notre algorithme attrayant pour des applications industrielles.

Conclusion

On peut comparer notre méthode de filtrage avec le filtre FK qui est très utilisée en traitement des données sismiques, mais un filtrage qui nécessite un échantillonnage rigoureux en temps et en distance et aussi que ce filtrage introduit des distorsions importantes du signal.

Dans les deux cas de filtrage on peut récupérer le morceau réflexion dans la zone rectangle jaune qui est masqué par l'onde de surface. Le résultat obtenu par la transformée en ondelettes semble plus satisfaisant car la réflexion est plus nette. Le but de ces filtrages étant de faire ressortir les réflexions sismiques, il n'est pas possible d'affirmer que le filtre TOC est plus efficace que le filtre FK.

Sur le point de tir filtré par FK, l'onde de surface a été entièrement filtrée, la réflexion qui nous sert de référence a été mise en valeur et on peut la suivre de bout en bout. Le reste de la section a été fortement modifié. Les événements relativement horizontaux ont été conservés.

Ce tir filtré par la transformée en ondelettes, l'onde de surface a été en grande partie filtrée. D'ailleurs il est possible de la supprimer entièrement en augmentant le coefficient α c'est à dire diminuer le seuil d'amplitude de référence. Les parties en dehors des faisceaux de filtrage n'ont pas été modifiées.

Globalement, on ne peut pas réellement trancher entre ces deux méthodes de filtrage. La réflexion qui nous sert de critère est assez bien visible après chacun des deux filtrages. Un avantage du filtrage TO est que la partie se trouvant en dehors des faisceaux de filtrage n'a pas été modifiée. Alors que ce n'est pas le cas pour le filtre FK, car la totalité de la section sera touchée et si on élimine une composante fréquentielle, l'amplitude des traces sera atténuée pour toute la section.

La différence entre les données initiales et la section traitée par le filtrage FK est montrée à la figure ci-dessous. On remarque que ce filtrage n'est pas aussi efficace que celui réalisé à l'aide de la TO. Pour mieux caractériser l'effet de ces deux filtres, comparons la partie de signal filtrée par chacun d'eux (figure III.39). Signal enlevé lors du filtrage TO. Côté droit, l'onde de surface a été identifiée et filtrée alors que côté gauche le filtre est plus chirurgical. Ceci est dû à la forme de l'onde de surface sur l'enregistrement du tir. Par contre le signal enlevé lors du filtrage FK. L'onde de surface est aussi bien repérée et filtrée mais beaucoup de signal hors de la zone de l'onde de surface est éliminé. Ce signal correspond à différents événements : c'est du signal (signal utile ou bruit) qui se trouvait dans la zone de filtrage dans le plan FK. Mais ce sont aussi des artefacts générés par la double transformée de Fourier. Ce qui signifie que la TF2D introduit des artefacts dans la section filtrée et donc bruite le point de tir. C'est un inconvénient majeur de la transformation FK. De plus, des effets de bords parasitent aussi la section

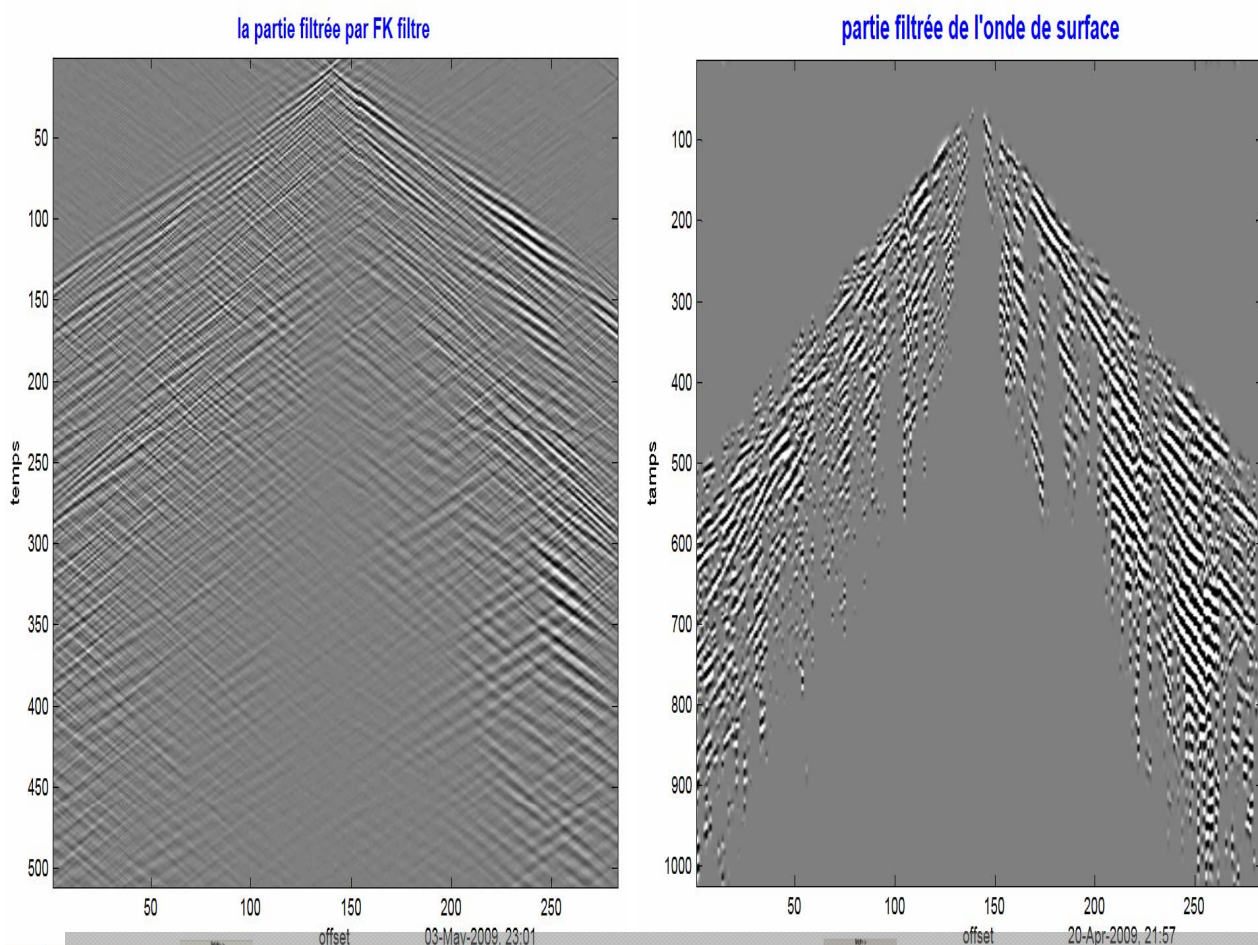


Fig .III.39 Le signal enlevé à l'aide les deux filtres FK et TOC

Les images ci-dessous permettent de faire la comparaison entre le filtrage FK et le filtrage par la transformée en ondelettes continue. La réflexion qui nous intéresse semble plus visible sur le tir filtré par TOC que sur le tir filtré par FK. Le critère visuel étant la référence, il est difficile d'être catégorique dans ce cas là. Par conséquent le point de tir filtré par la TO convient pour une étude en amplitudes préservées ce n'est pas le cas pour le point de tir filtré par le (F-k).

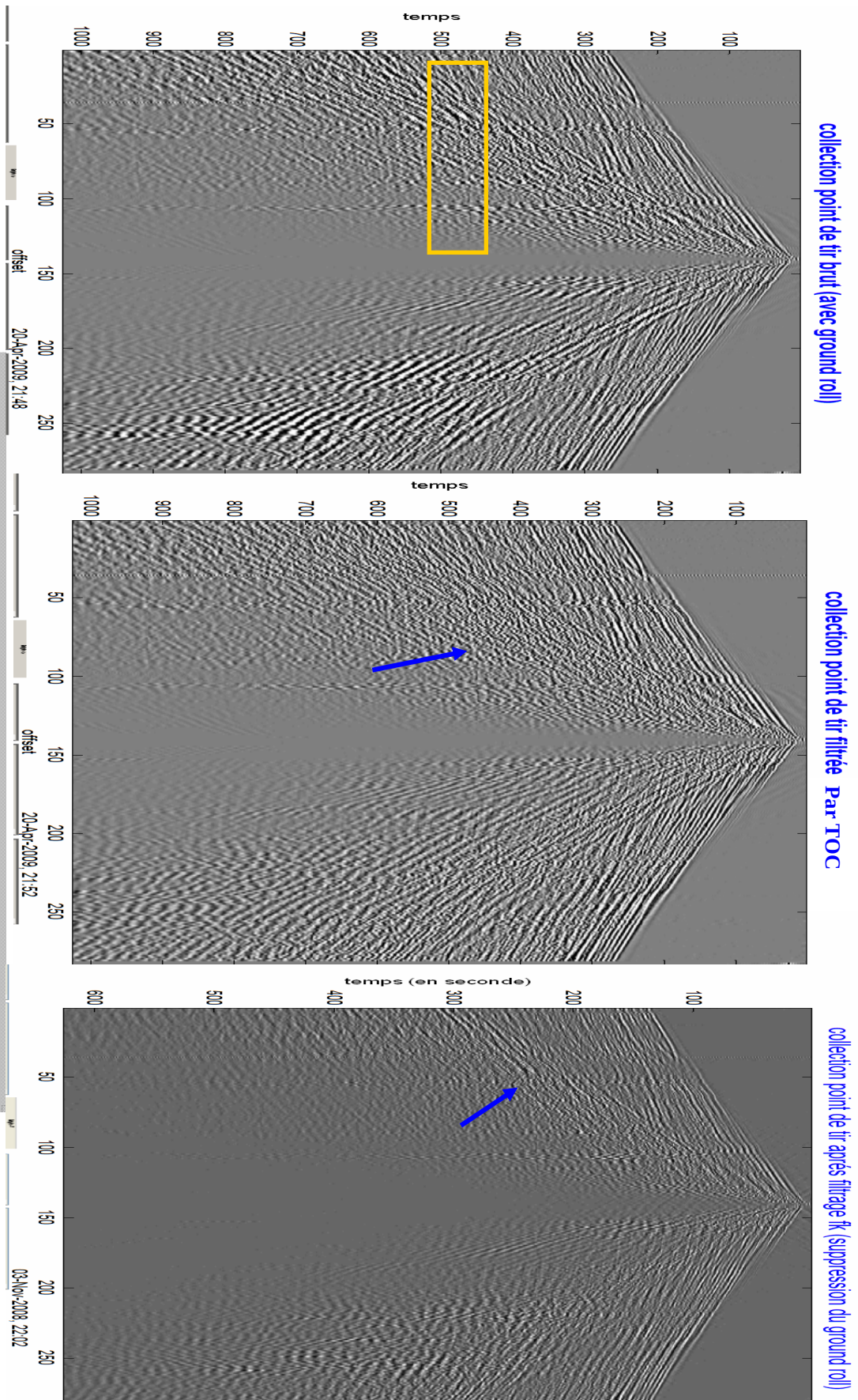


Fig. III.40 Résultat du filtrage de l'onde de surface à l'aide du TOC

III.3.1 Application de la transformée en ondelettes continue pour l'atténuation des multiples

Introduction

Les multiples sont considérés comme un bruit gênant et difficile à éliminer. Les techniques couramment utilisées pour le filtrer sont : la déconvolution prédictive et le filtre (F-K) qui s'avèrent quelquefois inefficaces.

Dans le but de surmonter les insuffisances rencontrées, on a introduit un nouveau outil mathématique performant et puissant qui est la Transformée en Ondelette Continue « TOC » (Morlet 1982).Cet outil s'adapte bien pour le traitement des signaux non stationnaires et permet la localisation du signal en temps-fréquence ou temps-échelle (scalogramme) ce qui n'est pas le cas des méthodes classiques.

III.3.1.1.Application de la méthode

On utilise la TOC pour filtrer deux multiples identifiés sur la trace n° 25, de la section sismique enregistrée avec les paramètres suivants :

98 traces, 1250 échantillons par trace, un pas d'échantillonnage de 4ms et la distance inter-récepteur est 20m.

Le principe de cette méthode est schématisé sur la figure (III.41). La méthode consiste d'abord à identifier les multiples et en suite calculer la correction dynamique (NMO) avec une loi de vitesse correspondant à celle des multiples (figure. III.41.a). Les multiples se trouvent ainsi alignés et les réflexions primaires sur-corrigées (figure. III.42).

Les multiples sont bien alignés lorsque la loi de vitesse est convenablement déterminée. Ce résultat nous aide à identifier facilement les multiples sur la section sismique et de connaître leurs temps d'arrivée.

Une trace somme "trace gather" est calculée à l'intérieur de cette collection après application de la correction dynamique (NMO) (figure (III.43)).Le temps d'arrivée des multiples correspondant à celui de la trace somme. Les temps d'arrivée des multiples servent à définir les limites temporelles du masque à appliquer. Le masque est défini automatiquement à partir de ces trois paramètres : le temps d'arrivée, la fréquence et l'énergie.

On calcule la (TOC) de la trace sismique à traiter pour la projeter dans le plan temps-fréquence. Les motifs correspondant aux multiples sont localisés en temps, un temps qui correspond au temps d'arrivée de l'amplitude maximale sur la trace somme qui est indiquée par les deux flèches vertes (523 et 633) (figure.III.44) .La localisation en fréquence est proche de la plage fréquentielle du signal utile..L'amplitude de ces motifs correspondant aux multiples est relativement faible par rapport à celle des réflexions primaires.

Le filtrage dans le domaine temps- échelle consiste à ne garder que les coefficients de la transformée en ondelette qui se trouvent en dehors du masque et de mettre égal à zéro les coefficients qui sont supérieurs à une amplitude seuil se trouvant à l'intérieur de cette fenêtre temporelle. L'amplitude seuil change d'un multiple à un autre dans la mesure où l'amplitude d'un multiple dans de la première couche n'est pas la même amplitude que dans la deuxième couche.

Le retour au domaine temporelle après filtrage s'effectue en calculant la transformée en ondelettes inverse de la trace filtrée, cette opération est répétée pour le reste des traces. A la fin on obtient une section sismique sans multiple après application de la correction dynamique inverse avec la même loi de vitesse (figure.III.45)

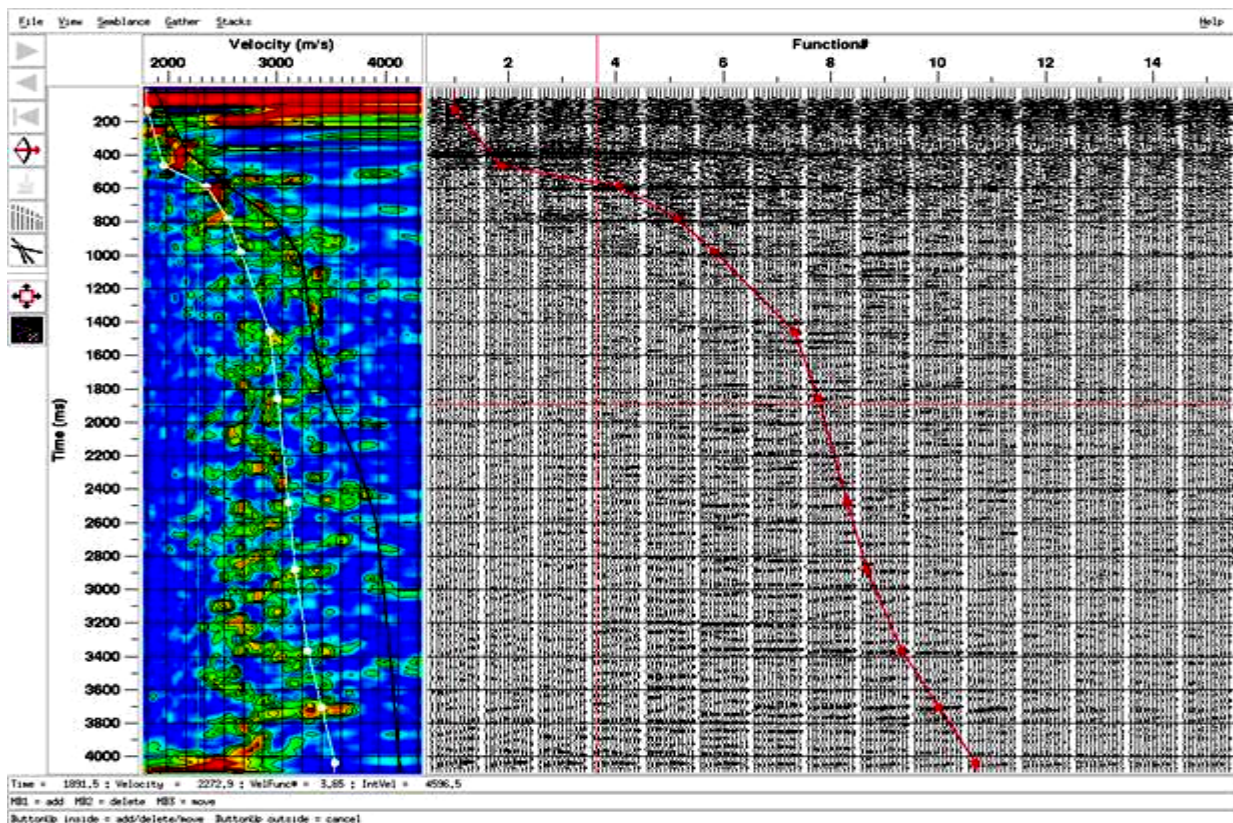
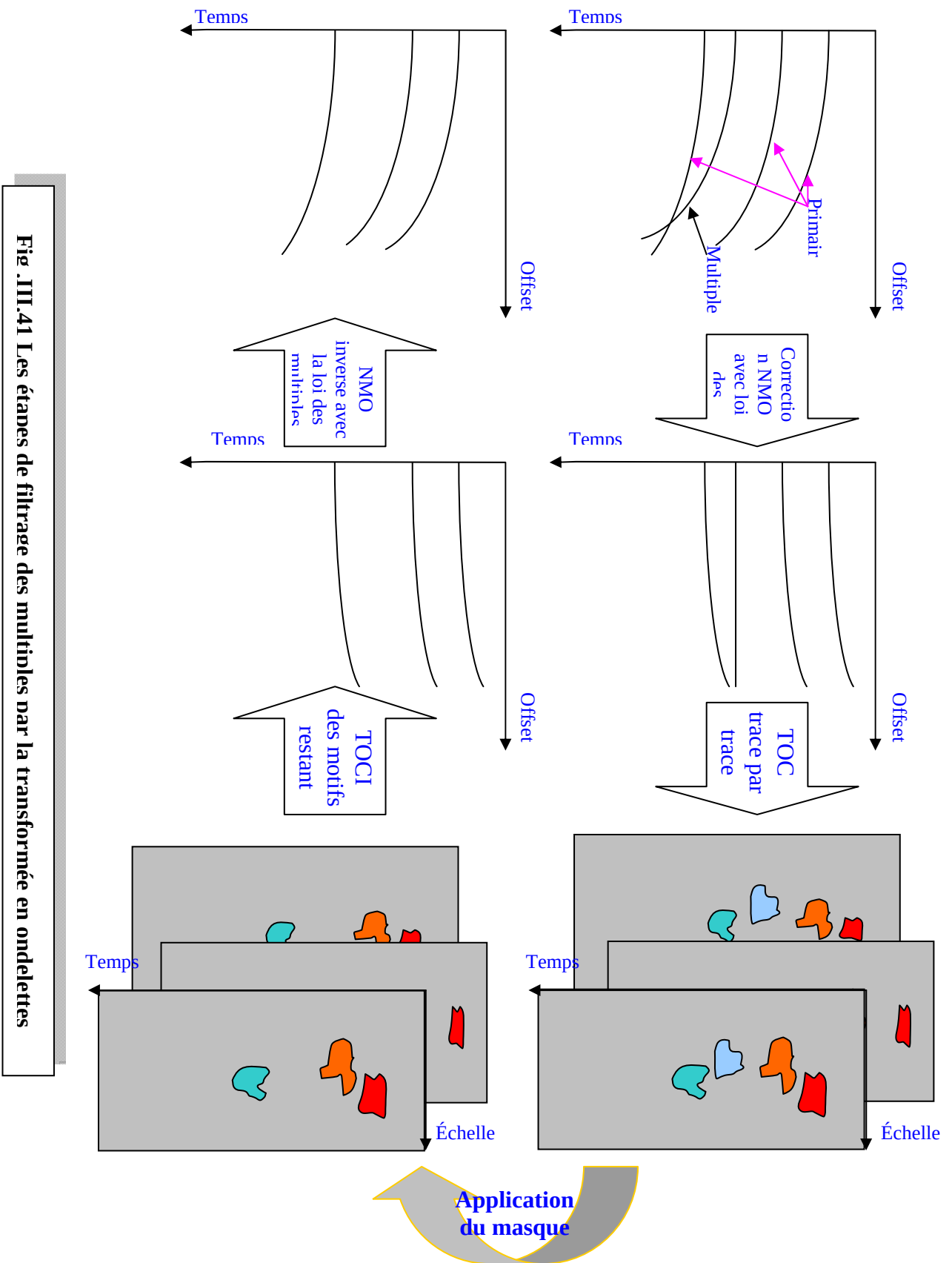


Fig.III.41.a : La loi de vitesse des multiples déterminée par logiciel ProMax



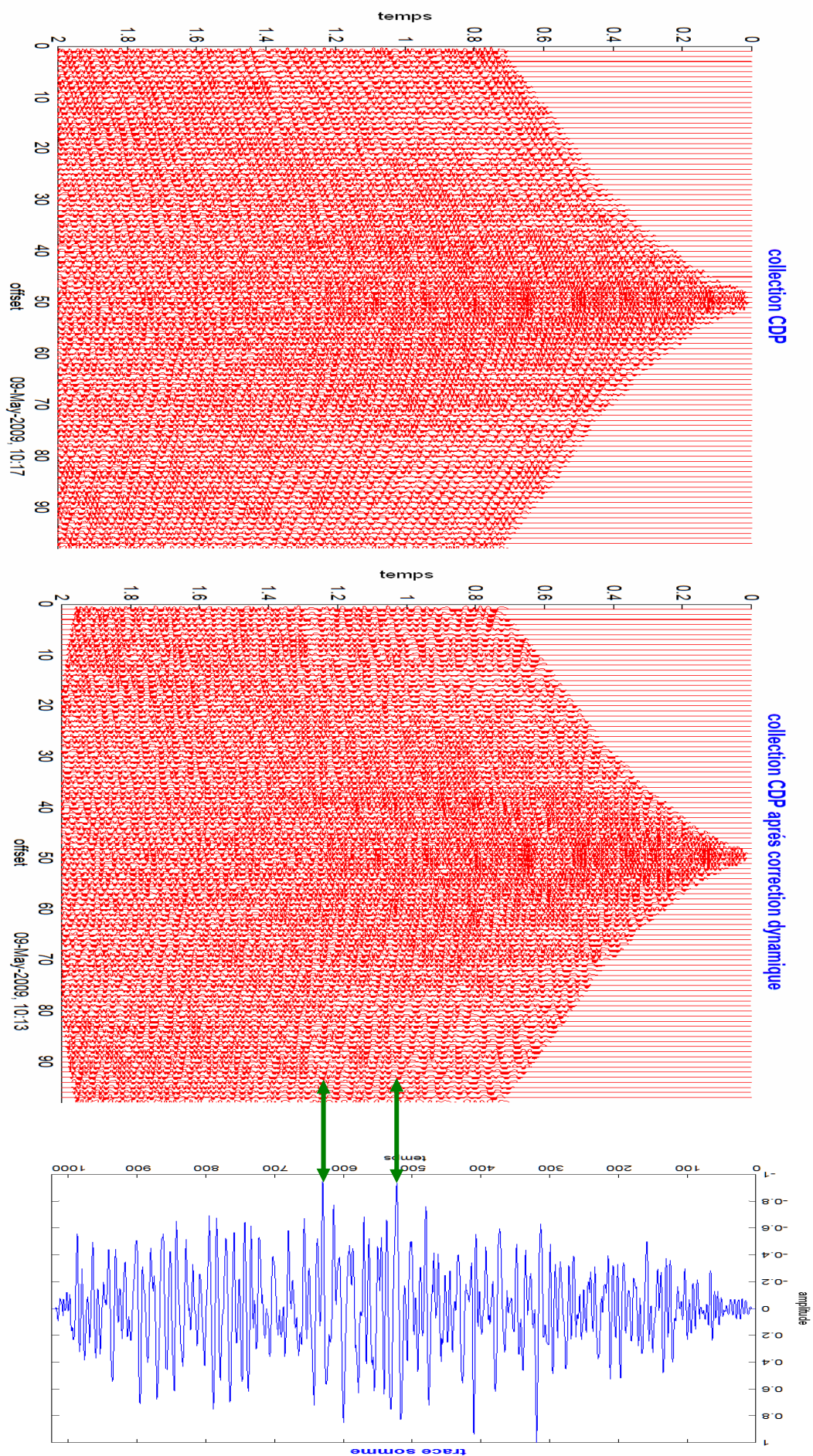


Fig. III.42 Collection CDP avant et après correction dynamique avec la loi vitesse des multiples et la trace somme

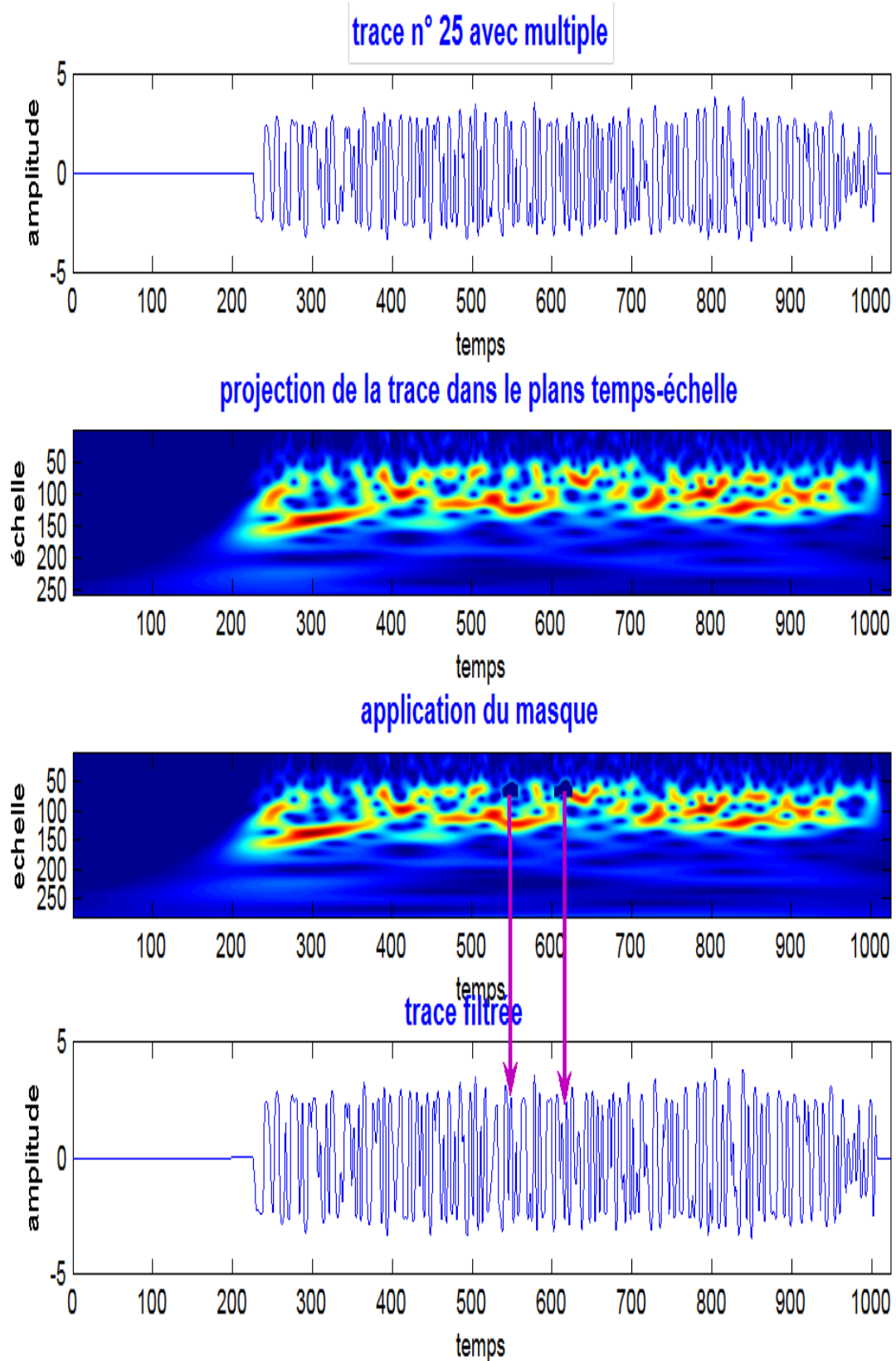


Fig.III.43 Exemple de filtrage des multiples par TOC pour la trace n°25

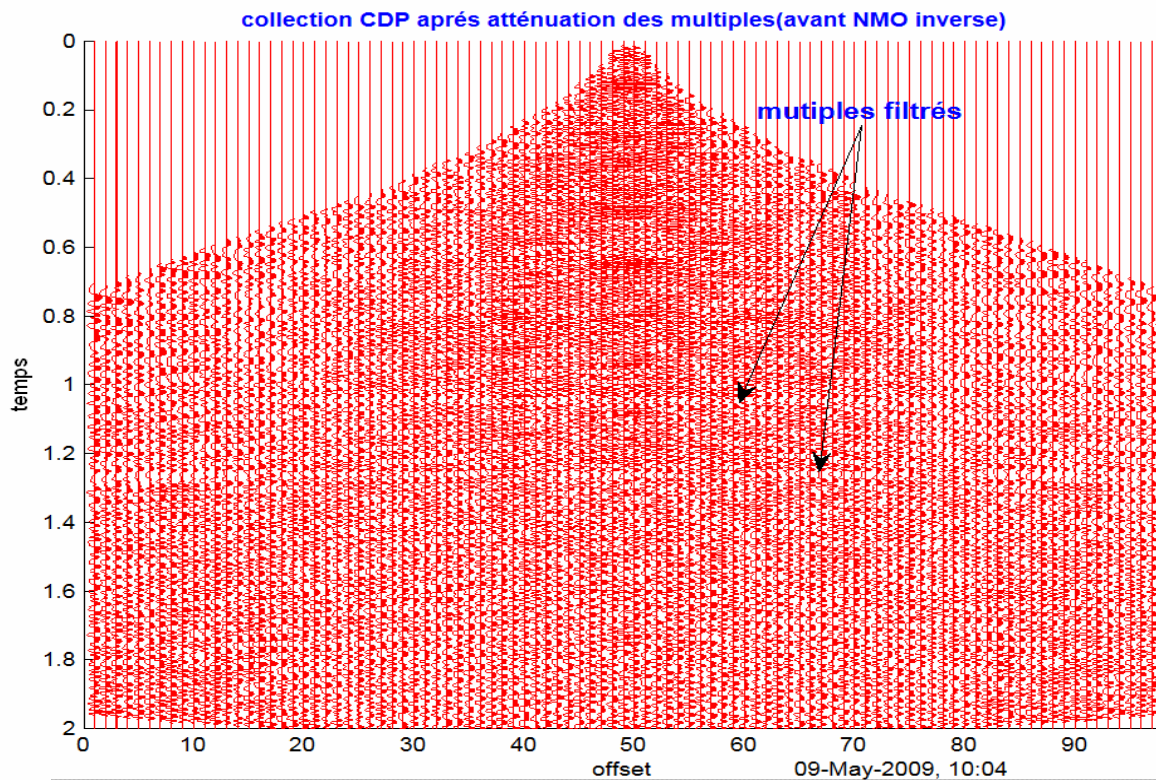


Fig.III.44 Collection CDP après atténuation des multiples avant correction NMO

Conclusion

Le filtrage du multiple n'est pas une opération facile, l'efficacité de la méthode dépend des facteurs suivants :

- L'identification correcte des multiples.
- La détermination de la loi de vitesse réelle des multiples, qu'on utilise pour le calcul des corrections dynamiques NMO afin de rendre les multiples alignés et les réflexions primaires sur-corrigés. Lors de l'application de la correction NMO des bruits sont générés dus probablement au phénomène d'étirement, ils parasitent l'enregistrement sismique.
- Les motifs relatifs aux événements sismiques projetés dans le plan temps- échelle sont bien distincts et ne se recouvrent pas ce qui facilite leur filtrage. Le masque appliqué est automatique, sa forme n'a pas une grande importance, ce n'est pas le cas des filtres classiques où la taille et la forme de la fenêtre jouent un rôle important.
- L'identification des multiples de courte durée reste toujours posée, quant à celle de longue durée, elle se fait en observant la courbure de leur hyperbole de réflexion qui est différente de celle de l'onde primaire.

L'effet du filtre est bien marqué, les deux multiples observés au niveau de la trace n°25, sont quasiment atténués (figure. II.11). Les difficultés de la méthode se situent au niveau de la détermination de la loi de vitesse des multiples, la définition du masque pour filtrer et une amplitude seuil significative.

III.2.5 Séparation du champ d'ondes d'un Profil Sismique Vertical (PSV) par de la Transformée en Ondelette Continue.

Introduction

Le PSV est une opération sismique de puits pour laquelle un signal sismique émis à la surface du sol est enregistré par un géophone situé successivement à différentes profondeurs dans le puits, la source étant toujours sur la même verticale que le géophone quelle que soit la profondeur du géophone.

La figure III.45 montre un enregistrement de PSV non traité sur ce document l'axe horizontal représente les différentes profondeurs du géophone dans puits, l'axe vertical, le temps d'écoute. Dans cet exemple la profondeur du capteur varie entre 1000 m et 3580 m, la source de surface est faiblement déportée par rapport à la tête de puits. La distance entre deux positions successives du géophone dans le puits varie de 10 à 25m.

Après traitement, le PSV fournit une trace sismique sans multiples directement comparable à la section sismique de surface passant au voisinage du puits. Les événements visibles sur PSV peuvent être classés en deux catégories:

- ✚ Les événements montants caractérisés par des vitesses apparentes négatives
- ✚ Les événements descendants caractérisés par des vitesses apparentes positives et plus énergétiques que les ondes montantes.

La séparation des ondes montantes et descendantes est basée dans les différentes méthodes de séparation, sur le fait que les deux champs d'ondes ont des vitesses apparentes de signe opposé, mais il existe d'autres méthodes de séparation non basées sur le critère de vitesse apparente notamment les filtres de polarisation pour l'extraction (des ondes P et des ondes S), et la SVD (singular values decomposition).

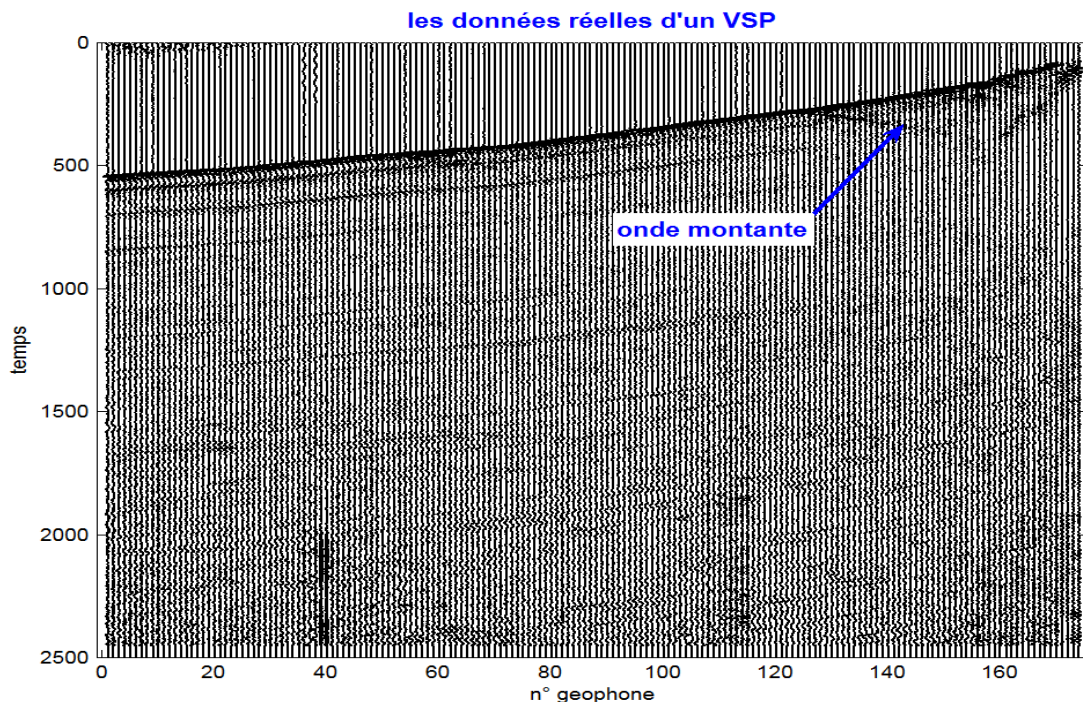


Fig. III45 Données réelles brutes d'un PSV

III.2.5.1. Application de la Transformée en ondelette continue

Dans cette partie, nous proposons une nouvelle technique de séparation par la transformée en ondelettes continue, cette méthode se résume dans les étapes suivantes :

Après horizontalisation, les ondes descendantes ont une vitesse apparente infinie. La figure (III.46) illustre ce résultat où le champ d'ondes descendantes très énergétique est aligné.

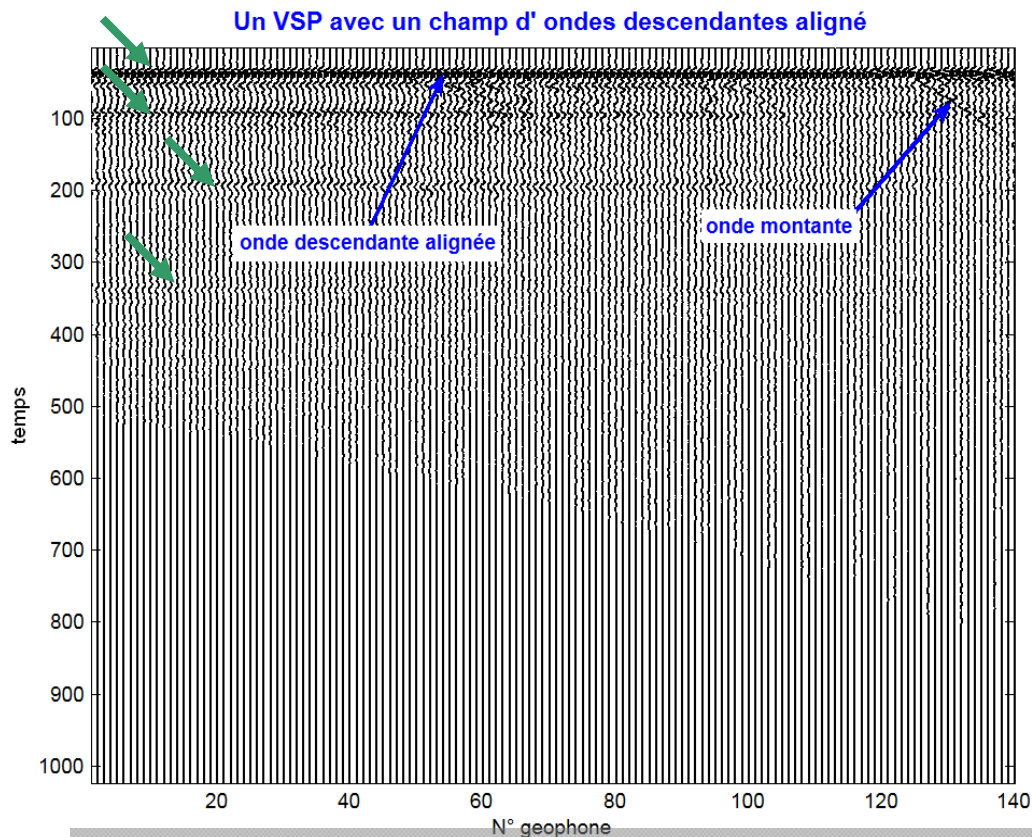


Fig III46 Données réelles brutes d'un PSV après horizontalisation

Après la projection de chaque trace à l'aide de la TOC dans le plan temps- fréquence que montre la figure (III.48). Les motifs correspondant au champ d'ondes descendantes sont localisés en temps, un temps qui correspond aux temps d'arrivées des événements alignés sur l'enregistrement de PSV, qui sont indiqués par les flèches vertes (35 ms, 110 ms, 175 ms et 317 ms) sur la figure (III.46), quant à la localisation en échelle, varie de 1 à 10.

L'amplitude de ces motifs correspondant aux ondes descendantes est relativement plus énergétique par rapport à celle des ondes montantes que la figure (III.48) montre.

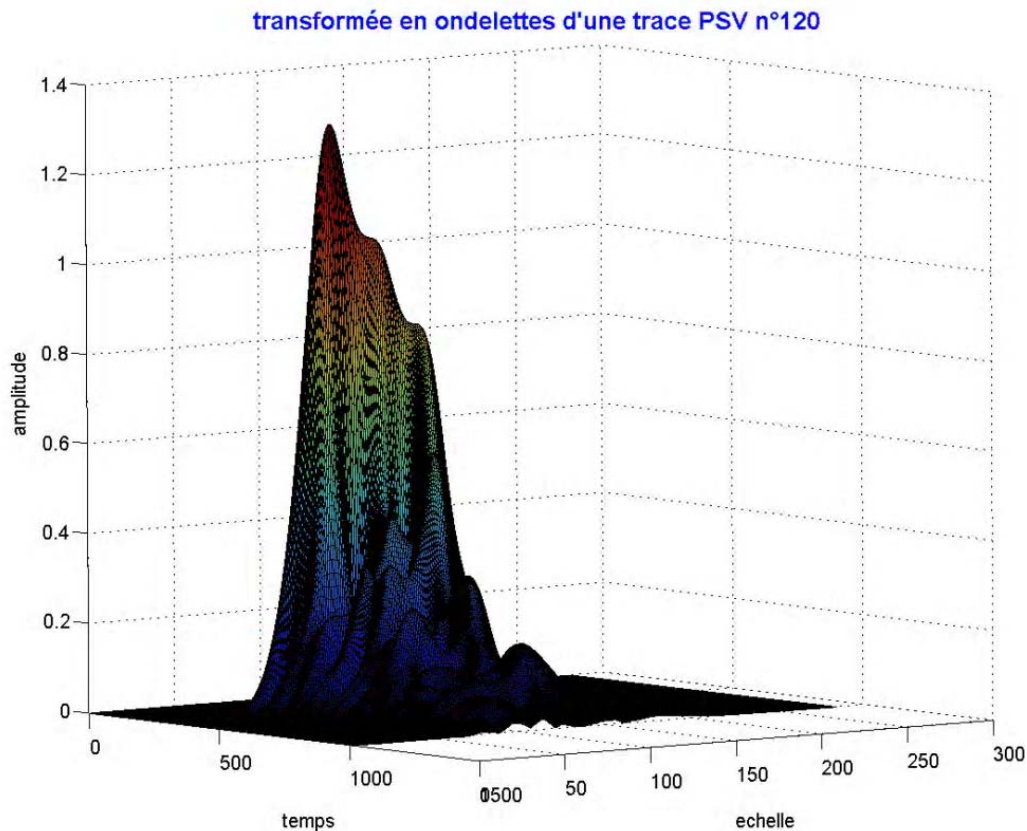


Fig III.47 Représentation en 3D de la TOC d'une trace VSP

L'application du filtrage dans le domaine temps- échelle consiste à ne garder que les coefficients en ondelettes qui se trouvent en dehors du masque et la mise à zéros de tous les coefficients à l'intérieur de cette fenêtre temporelle inférieurs à une amplitude seuil. L'amplitude seuil varie d'un événement aligné à autre car l'amplitude de l'onde descendantes dans de la première couche n'est pas la même amplitude dans la deuxième couche.

En suite, pour chaque trace on fait une projection dans le plan temps fréquence, on distingue clairement les composantes de cette trace figure (III. 48), par conséquence, il est facile d'éliminer une composante quelconques, en appliquant le masque.

Pour la trace n° 120 les limites temporelles du masque sont : (22-69), (100-115), (150-211) et (300-345), ces limites sont les mêmes pour les autres traces et sa TOC en 3D est illustrée par la figure (III.47).

Une fois les motifs correspond au champ descendant sont éliminés, on calcule la transformée en ondelettes inverse (TOCI) pour les motifs restant, on obtient ainsi une trace d'un PSV constituée seulement d'ondes montantes, (figure (III.48)). Cette opération est répétée pour toutes les traces, c'est-à-dire le traitement se fait trace par trace. A la fin, on obtient une collection de traces qui contient seulement un champ d'ondes montantes (figure (III.49)).

La dernière étape est le retour à la position initiale, on ajoute à chaque trace le temps correspondant au temps des premières arrivées, la figure (III.50) représente le champ d'ondes montantes avec des résidus du champ d'ondes descendantes.

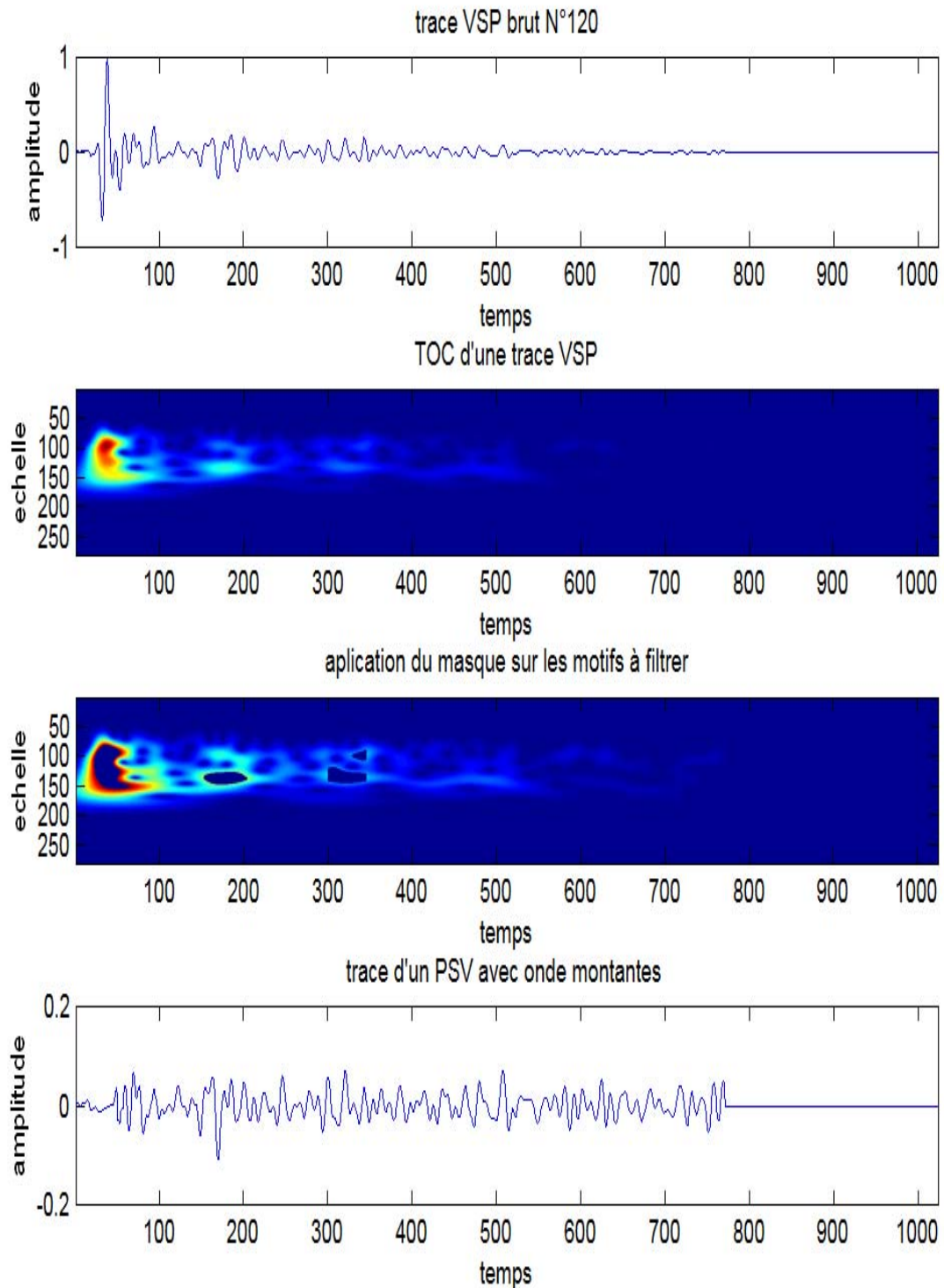


Fig. III.48 Exemple de séparation du champ montant et descendant d'onde par la TOC

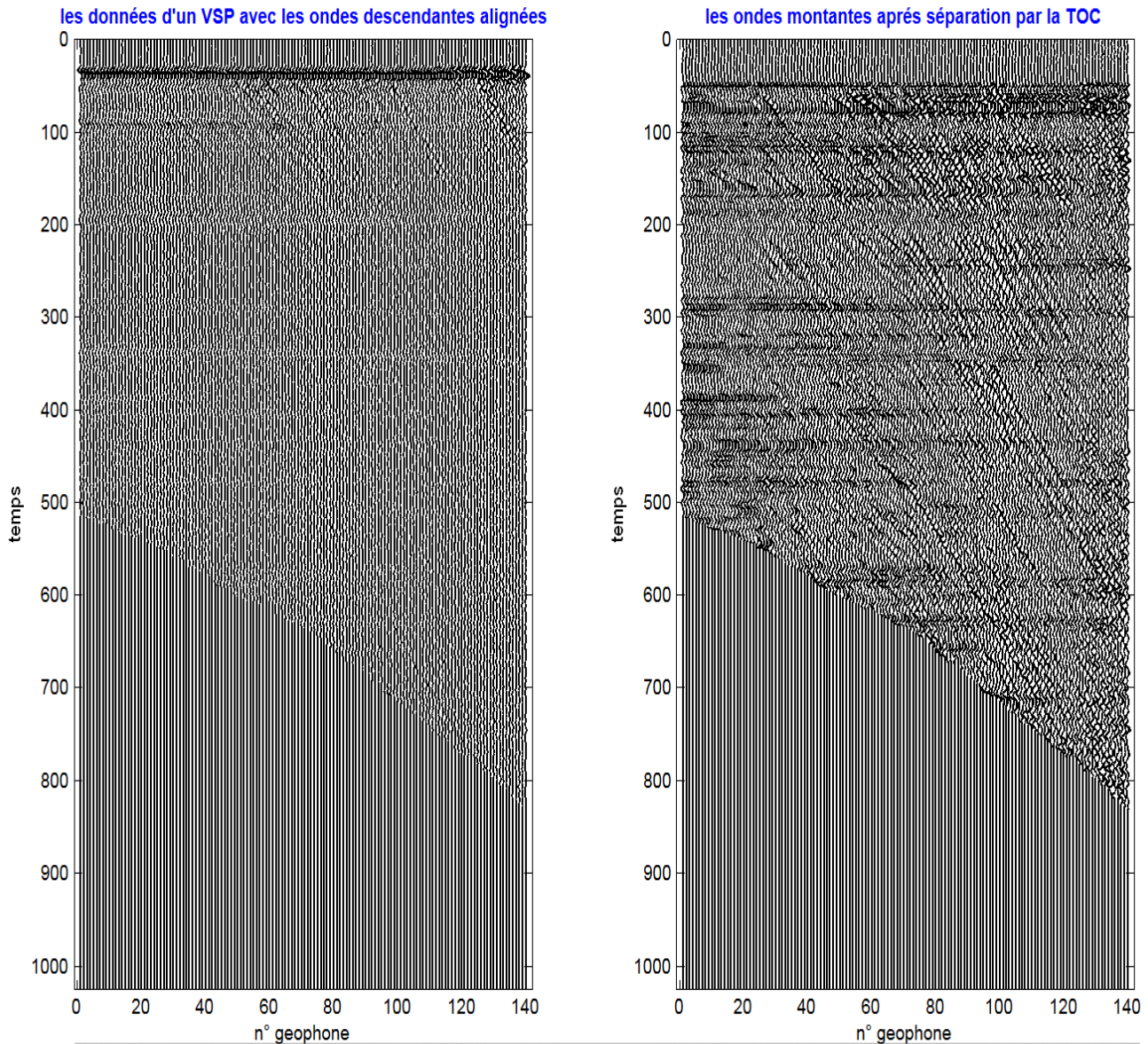


Fig.III.49 un PSV avec ondes descendantes alignées et un champ d'ondes montantes après séparation par TOC

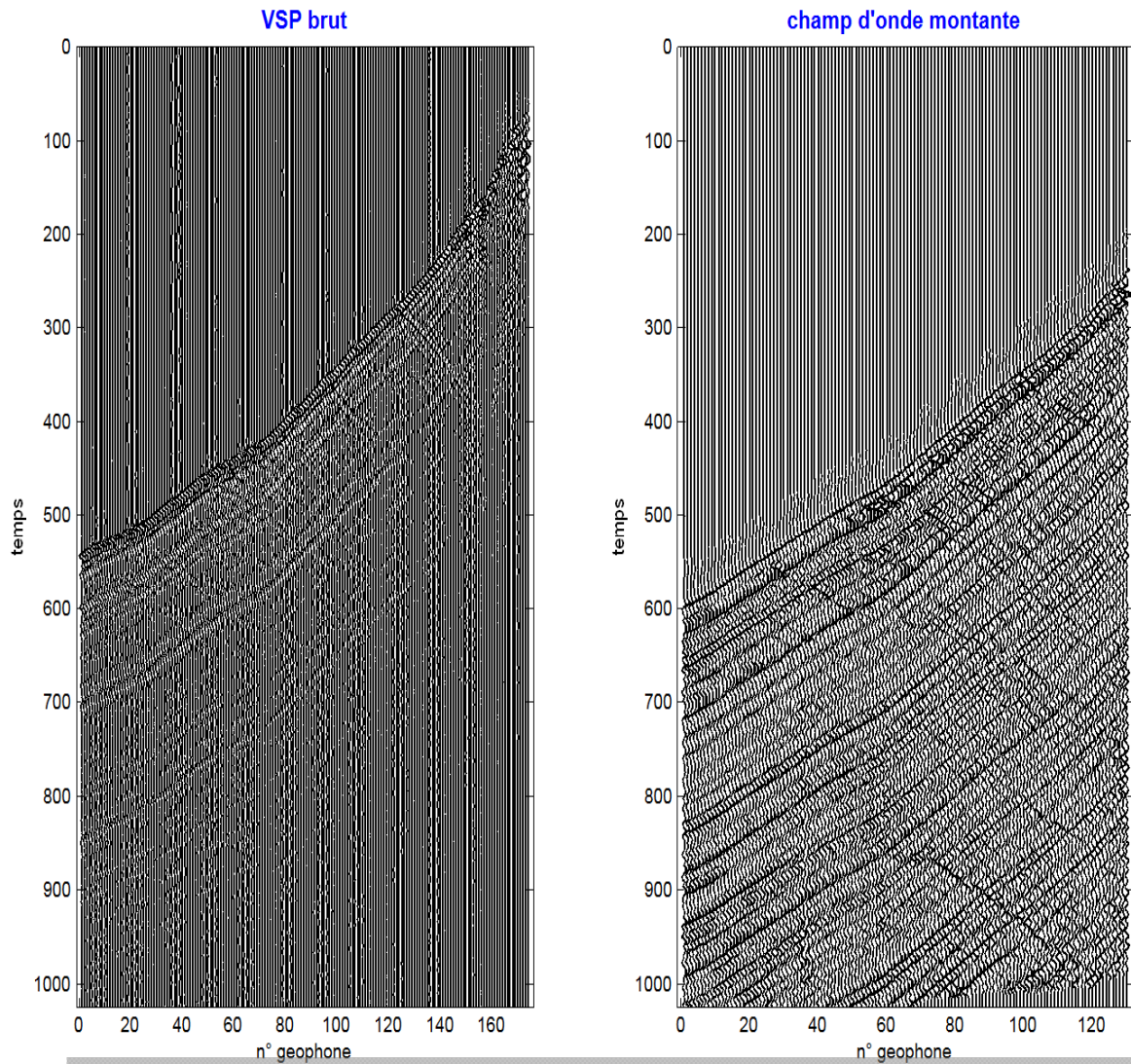


Fig III.50 VSP brut et un champ d'ondes montantes

Conclusion

La séparation du champ d'ondes de PSV par la transformée en ondelettes continue donne des résultats appréciables, lorsque les motifs correspondants aux ondes à éliminer sont distincts et ne se chevauchent pas dans le plan temps-échelle. Le masque pour isoler les motifs est automatique sa forme n'a pas une grande importance pour le filtrage car il suit la forme de l'onde à enlever. Il n'agit pas en dehors de la zone délimitée, ce n'est pas le cas des filtres classiques où la forme et la taille de la fenêtre temporelle jouent un rôle important. La TOC se présente comme un filtre fiable, simple, facile à utiliser et il n'exige pas un échantillonnage régulier en temps et en profondeur. La TOC convient bien pour la séparation des signaux non stationnaires, le champ d'ondes montantes séparé est mis en évidence par la figure (III.50). La méthode a des inconvénients majeurs dans la mesure où les motifs ne doivent pas se chevaucher dans le plan temps-échelle et l'amplitude de référence doit être significative. Le champ d'ondes montantes séparé figure (III.50) contient des résidus du champ d'ondes descendantes, la déconvolution prédictive peut améliorer la qualité de l'image.

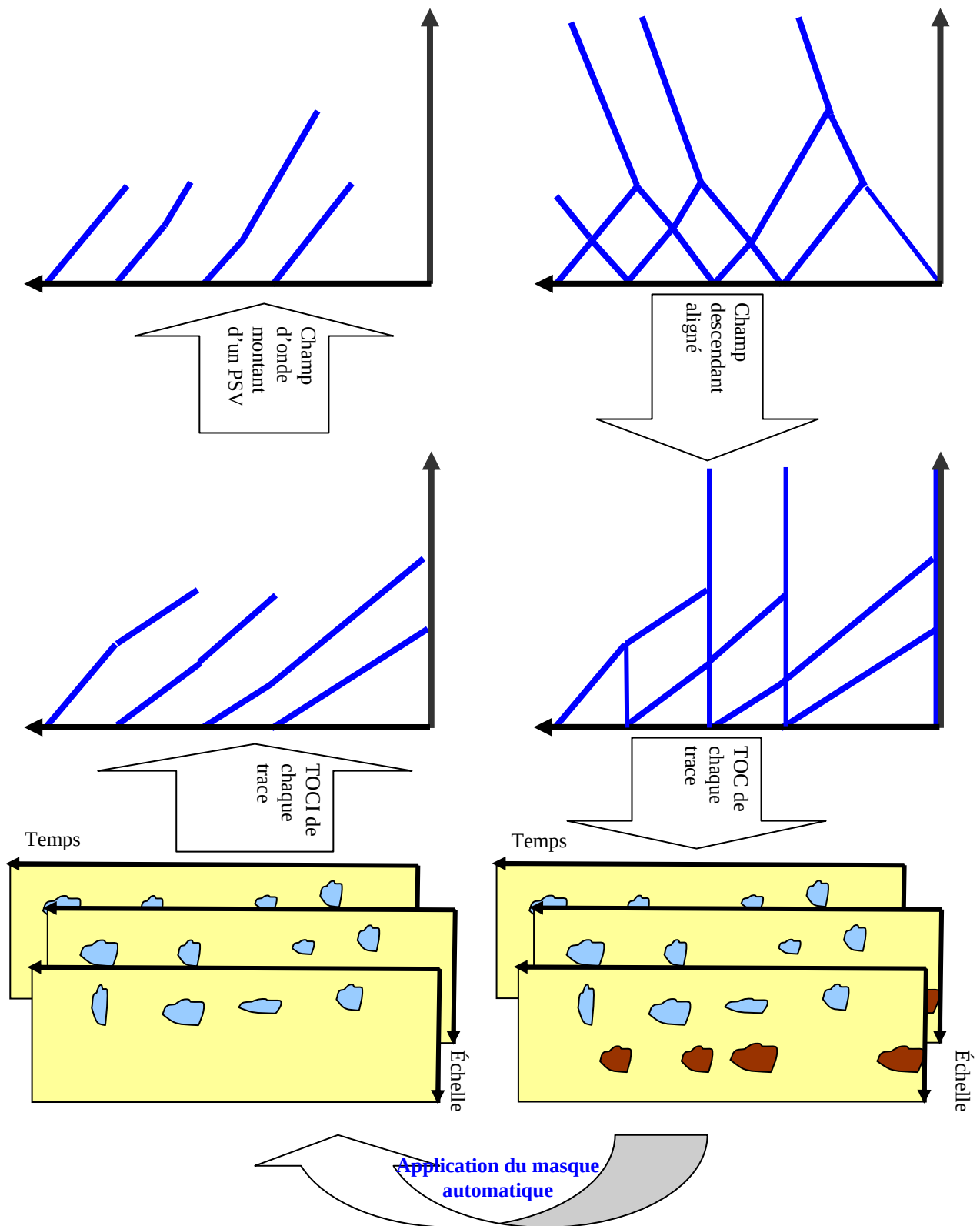


Fig .III.51 Les étapes de séparation du champ d'onde d'un PSV par la transformée en ondelettes continue

Conclusion générale

Le but du travail présenté consiste à mettre en place de nouveaux outils de traitement des signaux sismiques. L'efficacité des algorithmes proposés a été illustrée par leurs validations sur des données réelles provenant de campagnes sismiques.

Dans notre travail le filtre FK a été choisi comme méthode de filtrage de l'onde de surface à titre comparatif. Malgré ses limites (l'effet de bords, difficulté à restituer les fluctuations d'amplitude) et il convient bien aux signaux stationnaires. Au niveau de l'industrie, ce filtre reste un outil indéniable en traitement des données sismiques, son application est simple, rapide et ses résultats sont satisfaisants.

La transformée en ondelettes continue permet de décomposer le signal dans le plan temps- échelle avec beaucoup de redondance et permet ainsi d'analyser le signal avec une bonne robustesse vis-à-vis du bruit. La représentation d'une trace sismique dans le plan temps- échelle par la transformée en ondelettes continue permet une meilleure identification des événements et de leurs composantes les plus énergétiques, ce qui permet une discrimination facile entre elles en termes d'échelles.

Le filtrage dans le plan temps- échelle est un filtrage précis et efficace lorsque les différentes composantes du signal sont bien distinctes. Les applications effectuées sur les données synthétiques et les données réelles ont permis d'affirmer que l'outil que nous avons développé est intéressant pour l'analyse et le filtrage des signaux non stationnaires.

La méthode de filtrage utilisée dans ce travail de recherche est une approche qui s'applique trace par trace, en adaptant un masque sur le motif à filtrer. Ce masque est déterminé d'une manière automatique. Les résultats de la méthode présentée sont satisfaisants. Cependant, l'inconvénient de cet algorithme, il fonctionne pour un filtrage à une dimension (1D) et lorsque les motifs se recouvrent dans le plan temps-fréquence, la séparation devient partielle. Il est à noter que le filtrage dans le plan temps-échelle est un filtrage fiable, mais devient fastidieux lorsque le nombre de traces est élevé.

La comparaison avec le filtrage classique utilisé habituellement par les géophysiciens, en l'occurrence le filtre FK, a permis de valider ces deux méthodes.

Aucun géophysicien n'ignore que le filtrage des multiples est une opération facile, pour pallier à ce problème une nouvelle technique de filtrage dans le domaine temps- fréquence a été élaborée. Les résultats obtenus sont acceptables. L'efficacité de la méthode dépend de certains facteurs :

- ✓ Les motifs relatifs aux événements sismiques projetés dans le plan temps-échelle sont bien distincts et ne se recouvrent pas.

- ✓ L'identification correcte de multiple de courte durée reste toujours poser, quant à celle de longue durée, elle se fait en observant la courbure de leur hyperbole de réflexion qui est différente de celle de l'onde primaire.

L'utilisation de la transformée en ondelettes continue s'avère efficace pour la séparation du champ d'onde d'un profil sismique vertical (PSV). Malgré que le résultat obtenu est satisfaisant, le champ d'onde descendant n'est pas totalement éliminé, il reste des résidus. Cette technique présente un avantage lors de l'acquisition des données n'exige pas un pas d'échantillonnage régulier, ce n'est pas le cas pour les méthodes classiques telles que la Transformé de Fourier ou de la transformée de Radon.

PERSPECTIVE

Notre approche repose sur une analyse monodimensionnelle de la trace sismique qui représente la "matière première" de construction de l'image sismique, donc il est en question de généraliser cette analyse au cas bidimensionnel ou tridimensionnel (bloc sismique) en cherchant des modélisations mathématiques convenables et en utilisant des ondelettes directionnelles. Une telle approche paraît applicable pour estimer "globalement" l'onde à séparer.

Du point de vue sismique, cette méthode offre des perspectives intéressantes dans le cadre des traitements à des amplitudes préservées AVO (amplitude versus offset) puisque la TOC permet de faire la séparation sans toucher aux amplitudes des signaux.

L'application de la transformée en ondelettes au traitement des données géophysiques reste limitée au niveau certains projets universitaires. L'objectif est d'adapter cet outil mathématique puissant à des logiciels de traitement spécial sur un plan industriel.

Bibliographie

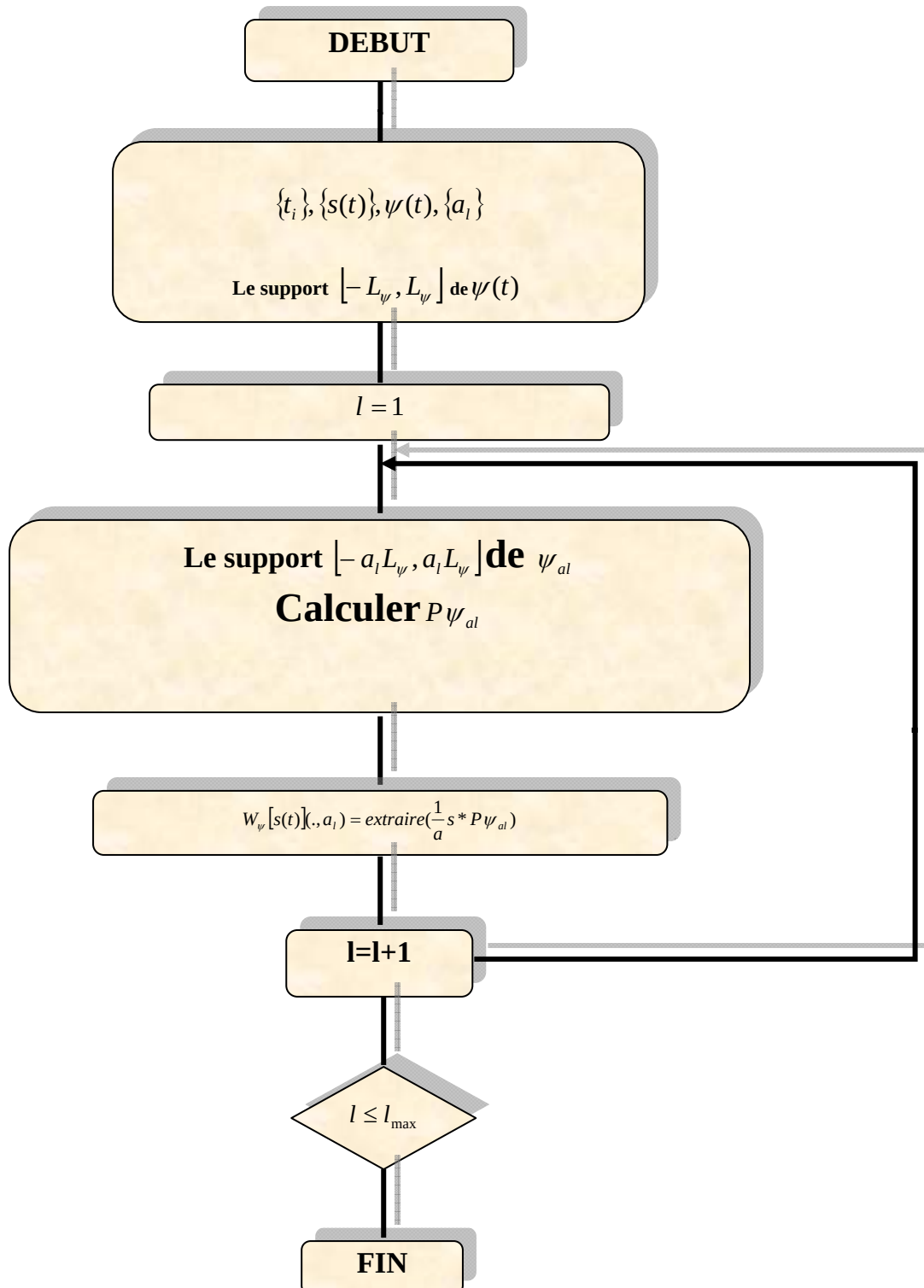
- [1] **Andrew J. Deighan and Doyle R. Watts 1997**, Ground-roll suppression using the wavelet transform ,geophysics, vol. 62, no. 6 ; p. 1896–1903, 9 figs.
- [2] **Barrat.V et Lepetit. O.1990**, Fast processing of the wavelet transform Calcul rapide de la transformée en ondelettes Traitement du Signal volume 8 n°1
- [3] **Bonnet. P et Remond. D A .1991**, Fast wavelet transform ,Traitement du Signal volume 8 - n° 3 ,pp. 195-207.
- [4] **Bournay. E. Bouchereau. 1997**, Analyse d'images par transformées en ondelettes application aux images sismiques Thèse préparée au sein du Laboratoire TIMC - Institut IMAG.
- [5] **Bruno Torrèsani 1997**, Ondelettes, analyse temps-fréquence et signaux non stationnaires , DEA de Physique Théorique, Marseille.
- [6] **Carrozzo .M.T., R. de Franco, L. De Luca, D. Luzio, R. Primiceri, T. Quarta and M. Vitale. 2002**, Wavelet correlation filter for wide-angle seismic data. Geophysical Prospecting, 50, p: 547-564.
- [7] **Chakraborty , Chakraborty.A et Okaya .D. 1995**, Frequency-time decomposition of seismic data using wavelet-based methods. Geophysics, vol. 60, n° 6, pp. 1906–1916.
- [8] **Chassandre -Mottin, 1998**, Méthode de réallocalisation dans le plan temps-fréquence pour l'analyse et traitement de signaux non stationnaires. Thèse doctorat Université de Cergy-pontoise.
- [9] **Cohen, 1995**, Time-frequency analysis, Prentice Hall PTR, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [10] **Daubechies .I. 1992**, Wavelets, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [11] **Deighan A.J. and Watts D.R. 1997**, Ground roll suppression using the wavelet transform. . Geophysics 62, p: 1896-1903.
- [12] **Diallo et al. 2006** , Instantaneous polarization attributes in the time-frequency domain and wavefield separation. . Geophysical Prospecting. v53. 723-731.
- [13] **Gabor, 1946**, Theory of communication. Journal of IEEE, 1946, pp429-457.
- [14] **Glangeaud. F, P. Gavin et J.L. Mari.1993**, “Utilisation des vecteurs propres de la matrice spectrale”, Traitement du Signal, Vol. 10, No. 2, pp. 86-104.
- [15] **Glangeaud. F. and Mari. J.L. 1994**, “Wave separation”, Revue de l’Institut Français du Pétrole, Vol. 49, Editions Technip, Paris, France.

- [16] **Foufoula -Georgiou E. and Kumar P. 1994**, Wavelets in Geophysics. Academic Press, Inc.
- [17] **Holschneider.1995**, Wavelets: An Analysis Tool. Oxford University Press, USA.
- [18] **Holschneider et al. 2005**, Characterization of dispersive surface waves using continuous wavelet transforms. Geophysical Journal International. v163.p: 463-478.
- [19] **Mari.J, Glangeaud.F et Coppens.F.1997**, Traitement du signal pour géologues et géophysiciens, éditions TECHNIP.
- [20] **Mari J.L, Glangeaud.F et Coppens.F.1997**, Traitement du signal pour géologues et géophysiciens, Edition Technip
- [21] **Mari.J et Coppens.F.2000**, Sismique de puits, éditions TECHNIP.
- [22] **Mari .J.L et Glangeaud .F.1994**, Wave separation. – Edition Technip, Paris.
- [23] **Mars.J.1988**,“ Séparations d’ondes”, Thèse de doctorat de l’Institut National Polytechnique de Grenoble, France.
- [24] **Morlet.J, Arens.G, Fourgeau.E et D. Giard.1982** , Wave propagation and sampling theory, complex signal and scattering in multilayered media. Geophysics, pp. 203-221.
- [25] **Mallat. S.1992**, Multi-resolution approximation and wavelets. Transactions of the American Mathematical Society 315, p: 69-88 .
- [26] **Mallat .S.1999**, A Wavelet Tour of Signal Processing. Academic Press, Inc.
- [27]**Mars.J, Glandgeaud.F.L, Fourmann.J.Mand Spitz.S.1987**, Separation of seismic waves, SEG.
- [28] **Nguyen. M.-Q. 2000**, Analyse multi-dimensionnelle et analyse par les ondelettes des signaux sismiques. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- [29] **Olivier Rioul and Martin Vetterli. 1991**, Wavelets and signal processing IEEE SP magazine .
- [30] **Percival D. B. and Walden A. T. 2002**, Wavelet methods for time series analysis Cambridge University Press.
- [31] **Rongfeng Zhang and Daniel Trad.2002**, Noise Attenuation: A Hybrid Approach Based on Wavelet Transform- University of British Columbia CSEG geophysics.
- [32] **Roueff. A, Chanussot. J, Mars. J.I, Nguyen 2003**, Segmentation of time-frequency images for the separation of seismic waves .Laboratoire des Images et des Signaux (LIS – CNRS UMR 5083, OSUG), BP 46 – 38402 Saint Martin d’Hères Cedex France GDR Information Signal Image vision (ISIS).

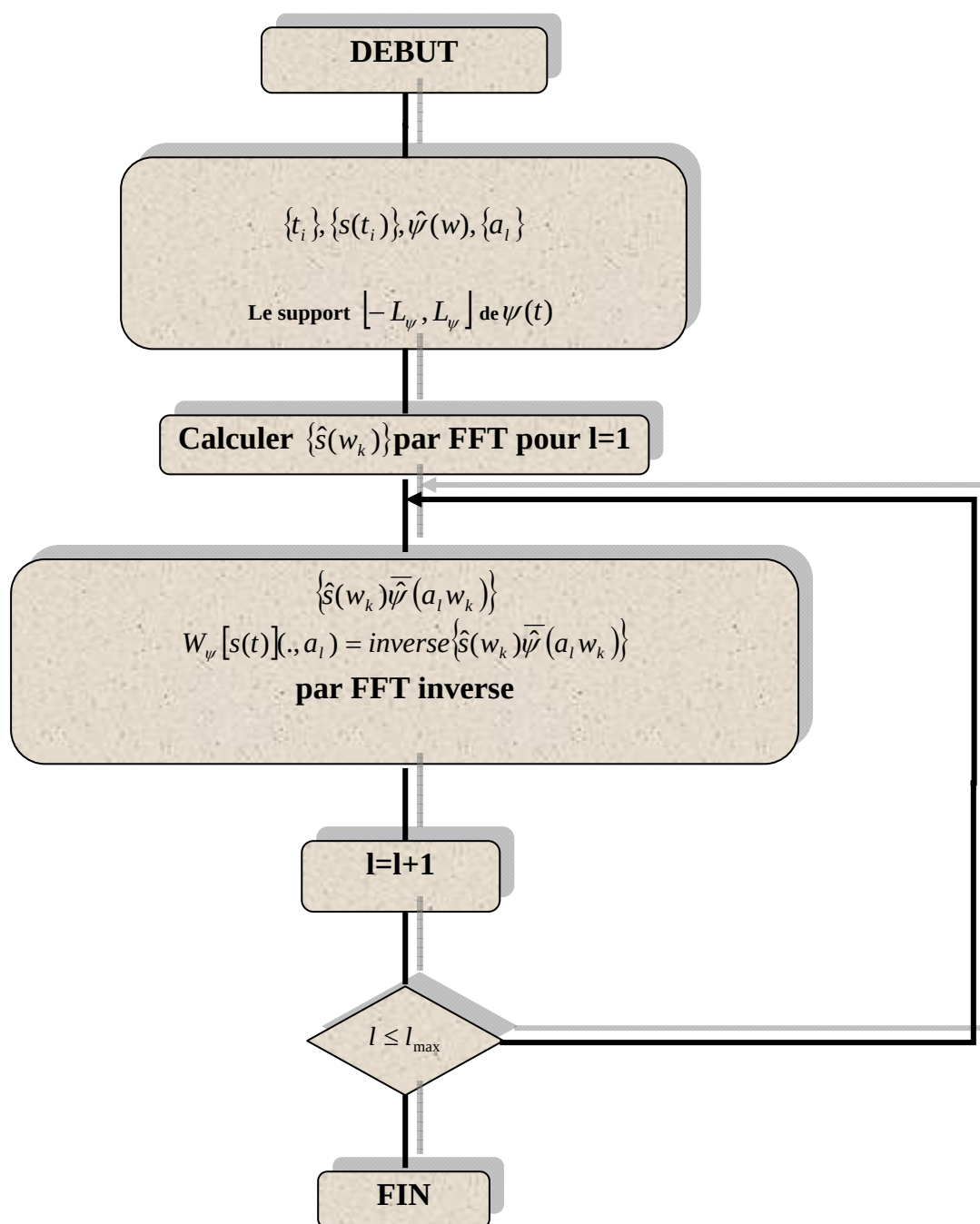
- [33] **Quarta. Lucas 2001**, Une introduction (élémentaire) à la théorie des ondelettes Université de Mons-Hainaut Institut de Mathématique.
- [34] **Quarta. Lucas 2001**, Une introduction à la théorie des ondelettes Cahier pédagogique #2 Université de Mons-Hainaut, panoramas des méthodes en traitement du signal F.CASTANIE professeur à l'INP-ENSEEIH
- [35] **Sandhya Devi. K. R and Herb Schwab,2009**, High-resolution seismic signals from band-limited data using scaling laws of wavelet transforms ,Geophysics 74.
- [36] **Sailhac .P, Gibert. D and Boukerbout. H, 2009**, The theory of the continuous wavelet transform in the interpretation of potential fields,Geophysical Prospecting Volume 57 Issue 4, Pages 517 – 525.
- [37] **Satish Sinha, Partha S. Routh, Phil D. Anno, and John P.2005**, Castagna, Spectral decomposition of seismic data with continuous-wavelet transforms. Geophysics, vol. 70, n°6 ; p. P19–p25.
- [38] **Sergio L. M. Freire and Tad J.Ulrych. 1988**, Application of singular value decomposition to vertical seismic profiling. Geophysics, 53, pp. 778-785.
- [39] **Yilmaz O, 1987**, Seismic data processing, Society of exploration geophysicists.

ANNEXE 1 : Différentes algorithmes de calcul de la TOC

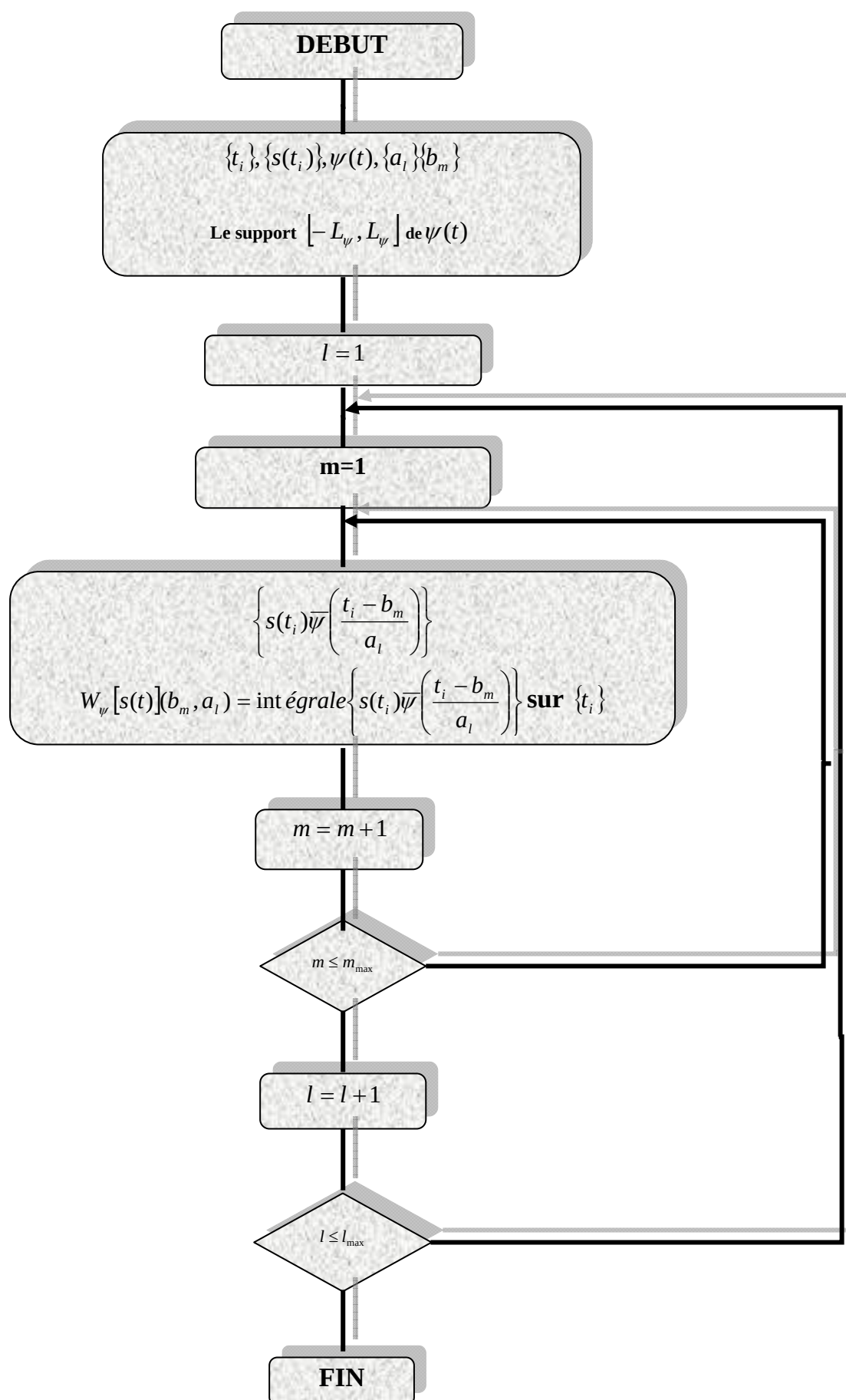
Algorithme pour le calcul de la transformée en ondelette par convolution



Algorithme pour le calcul de la transformée en ondelette par FFT



Algorithme pour le calcul direct de la transformée en ondelette



ANNEXE 2 : Noyau reproduisant

Dans le cas général, le noyau K n'a pas une formulation facile, cependant on peut détailler le calcul pour le noyau reproduisant associé à des ondelettes de Morlet. L'équation (II.13) s'écrit:

$$K(a_0, b_0, a, b) = \frac{1}{C_\psi} \sqrt{\frac{a}{a_0}} \int_{\mathbb{R}} \psi^* \left(\frac{at - b_0 + b}{a_0} \right) \psi(t) dt \quad (\text{III.1})$$

On écrit l'ondelette de Morlet sans le coefficient de normalisation pour simplifier l'écriture:

$$\psi(t) = \exp(ict) \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \quad (\text{III.2})$$

Où C est le paramètre qui fixe la période d'oscillation de l'ondelette et en pratique on choisit $5 < c < 6$.

Calcul de $N = \int_{\mathbb{R}} \psi \left(\frac{at - b_0 + b}{a_0} \right) \psi(t) dt$

$$\begin{aligned} N &= \int_{\mathbb{R}} \exp \left[-ic \left(\frac{at - b_0 + b}{a_0} \right) \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{at - b_0 + b}{a_0} \right)^2 \right] \exp(ict) \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt \\ &= \exp\left(ic \left(\frac{b_0 - b}{a_0} \right)\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(ict \frac{a_0 - a}{a_0}\right) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{a^2 t^2 + 2a(b - b_0)t + (b + b_0)^2 + a_0^2 t^2}{a_0^2} \right) \right] dt \end{aligned}$$

En notant : $\lambda = \exp\left(\frac{ic(b_0 - b)}{a_0}\right)$, on a :

$$N = \lambda \exp\left(-\frac{(b + b_0)^2}{2(a^2 + a_0^2)}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(ict \frac{a_0 - a}{a_0}\right) \exp \left[-\left(\frac{\sqrt{a^2 + a_0^2}}{\sqrt{2}a_0} t + \frac{a(b - b_0)}{\sqrt{2}a_0 \sqrt{a^2 + a_0^2}} \right)^2 \right] dt$$

Car :

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{a^2 t^2 + 2a(b - b_0)t + (b + b_0)^2 + a_0^2 t^2}{a_0^2} \right) = \left(\frac{\sqrt{a^2 + a_0^2}}{\sqrt{2}a_0} t + \frac{a(b - b_0)}{\sqrt{2}a_0 \sqrt{a^2 + a_0^2}} \right)^2 + \frac{(b + b_0)^2}{2(a^2 + a_0^2)}$$

Notons $\alpha = \frac{\sqrt{a^2 + a_0^2}}{\sqrt{2}a_0}$ et $\beta = \frac{a(b - b_0)}{\sqrt{2}a_0 \sqrt{a^2 + a_0^2}}$ alors, on a :

$$N = \lambda \exp\left(-\frac{(b + b_0)^2}{2(a^2 + a_0^2)}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(ict \frac{a_0 - a}{a_0}\right) \exp\left[-(\alpha t + \beta)^2\right] dt \quad (\text{III.3})$$

On reconnaît dans le second membre de cette équation la transformée de Fourier de la gaussienne pour la valeur $\nu = \frac{c}{2\pi} \left(\frac{a - a_0}{a_0} \right)$

$$\exp\left[-(\alpha t + \beta)^2\right] \xrightarrow{TF} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp\left(-\frac{\pi^2 \nu^2}{\alpha^2}\right) \exp\left(\frac{2i\pi \nu \beta}{\alpha}\right)$$

On obtient alors:

$$\int_{\Re} \exp\left(ic \frac{a_0 - a}{a_0} t\right) \exp\left[-(\alpha t + \beta)^2\right] dt = \frac{\sqrt{2\pi} a_0}{\sqrt{a_0^2 + a^2}} \exp\left[-\frac{c^2 (a - a_0)^2}{2(a^2 + a_0^2)}\right] \exp\left[ic \frac{a(a - a_0)(b - b_0)}{a_0(a^2 + a_0^2)}\right]$$

En définitive, après simplification, on a:

$$K(a_0, b_0, a, b) = \frac{\sqrt{2\pi} \sqrt{aa_0}}{C_\psi \sqrt{a_0^2 + a^2}} \exp\left[-\frac{c^2 (a - a_0)^2 + (b - b_0)^2}{2(a^2 + a_0^2)}\right] \exp\left[ic \frac{(a + a_0)(b_0 - b)}{(a^2 + a_0^2)}\right]$$

En notant $a_0 = a + \Delta a$ et $b_0 = b + \Delta b$, on obtient:

$$K(a + \Delta a, b + \Delta b, a, b) = \frac{\sqrt{2\pi} \sqrt{a + \Delta a}}{C_\psi \sqrt{(a + \Delta a)^2 + a^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{c^2 \Delta a^2 + \Delta b^2}{(a^2 + (a + \Delta a)^2)}\right] \exp\left[-ic \frac{\Delta b(2a + \Delta a)}{(a^2 + (a + \Delta a)^2)}\right]$$

En définitive, on trouve:

$$K(a_0, b_0, a, b) = \frac{\sqrt{2\pi} \sqrt{aa_0}}{C_\psi \sqrt{a_0^2 + a^2}} \exp\left[ic \frac{(a + a_0)(b_0 - b)}{(a^2 + a_0^2)}\right] \exp\left[-\frac{c^2 (a - a_0)^2 + (b - b_0)^2}{2(a^2 + a_0^2)}\right] \quad (\text{III.4})$$