

*Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*

**UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA  
BOUMERDES**

**FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR**



**DEPARTEMENT ENERGETIQUE**

**MEMOIRE DE MAGISTER**

**Spécialité :** Energétique

**Option :** Thermique et Combustion

**ESTIMATION DE FONCTIONS EN CONDUCTION INVERSE**

Présenté par : **BOULAADJOUL Younes**

Devant le jury d'examen composé de :

BOUSSAID Mohammed	Président	MC A	UMBB
HEDIBEL Mohamed	Promoteur	MC A	UMBB
ZIOUCHI Abdennacer	Examineur	MC A	IAP Boumerdes
BENZAOU Ahmed	Examineur	MC A	USTHB
BENBRIK Abderrahmane	Examineur	MC A	UMBB

**BOUMERDES 2011**

## Résumé :

L'objectif de ce mémoire de magister est la mise en œuvre des techniques inverses dans le but d'estimer les propriétés thermiques et les conditions aux limites qui pourraient être délicates à mesurer ou à évaluer. Pour estimer des propriétés telles que la masse volumique, la chaleur massique, la conductivité thermique ou la diffusivité thermique, la méthode de Levenberg-Marquardt d'identification des paramètres est utilisée. Nous avons réalisé pour cela un programme basé sur cet algorithme. Pour valider ce programme, nous avons d'abord eu recours à des simulations numériques sur une plaque d'épaisseur donnée et de propriétés connues. Le résultat donné par la simulation numérique du problème direct permet de calculer le champ de température à travers la plaque et donc aux endroits où sont disposés les capteurs de température. L'utilisation d'une ou de plusieurs évolutions de températures en fonction du temps, qu'on perturbe éventuellement par un bruit aléatoire pour simuler la réalité de la mesure, permet de revenir par le biais du programme aux propriétés recherchées. La deuxième étape de ce travail a consisté à estimer des fonctions telles que coefficient de convection ou flux de chaleur fonction du temps. La mise en œuvre de la méthode d'inversion utilisant le gradient conjugué a été adoptée. Un programme a été réalisé et a permis de retrouver la fonction flux en fonction du temps imposée sur une face de l'échantillon durant une période donnée. Les mêmes étapes de validations que pour l'estimation des paramètres ont été suivies. Un calcul de sensibilités a été effectué pour s'assurer que la procédure d'inversion est correcte. Les résultats proposés dans ce mémoire se sont appuyés sur des expériences réalisées en laboratoire sur divers échantillons tels que fer Armco, cuivre électrolytique et autres laiton, acier inox ou acier au carbone.

**Mots clés :** Méthode inverse, conduction inverse, différence finie, méthode flash, Méthode de Levenberg-Marquardt, la méthode du gradient conjugué avec problème adjoint, identification de paramètres, identification de fonctions.

## Abstract

The aim of this thesis of magister is the implementation of inverse techniques in order to estimate the thermal properties and boundary conditions that may be difficult to measure or assess. To estimate properties such as density, specific heat, thermal conductivity and thermal diffusivity, the method of Levenberg-Marquardt for parameter identification is used. We realized a program based on this algorithm. To validate this program, we first used numerical simulations on a plate of given thickness and known properties. The results given by the numerical simulation of the direct problem allow us to calculate the temperature field through the plate and therefore where the temperature sensors are located. The use of one or more changes in temperature fields over time, which may be disturbed eventually by a random noise to simulate the reality of the measure, enable us to return by means of the program to the desired properties. The second stage of this work consisted to estimate time dependant's functions such as convection coefficient or heat flux. The implementation of the inversion method based on the conjugate gradient was adopted. A program was conducted and allowed to recover the boundary heat flux function versus time imposed on one side of the sample in a given period. The same validation steps for estimating the parameters have been followed. A calculation of sensitivities was performed to ensure that the inversion procedure is correct. The results proposed in this paper were based on laboratory experiments on various samples such as Armco iron, electrolytic copper and other brass, stainless steel or carbon steel.

**Key words:** Inverse Method, inverse heat conduction, finite difference, flash method, Levenberg-Marquardt Method, Conjugate gradient method with Adjoint problem, parameters identification, functions identification

## ملخص :

الهدف من مذكرة الماجستير التي بين أيدينا هو تنفيذ تقنيات العكسية من أجل تقدير الخصائص الحرارية والشروط الحدية التي يصعب قياسها أو تقديرها. لتقدير بعض الخصائص الفيزيائية مثل الكتلة الحجمية ، الحرارة النوعية ، والناقلية الحرارية والانتشار الحراري، تم الإستعانة بطريقة ليفنبرق- ماركوارت لتقدير المعالم. لهذا الغرض تم إنشاء برنامج قائم على أساس خوارزمية هذه الطريقة ومن أجل إثبات نجاعة هذا البرنامج تم الرجوع إلى المحاكاة العددية على صفيحة ذات سمك معلوم وخصائص معروفة. النتيجة المتحصل عليها من خلال المحاكاة العددية للإشكال المباشر سمح بحساب حقول درجة الحرارة خلال هذه الصفيحة في أماكن وضع المجسات الحرارية. استخدام حقل أو حقول تغيرات درجة الحرارة بدلالة الزمن، والتي يتم إدخال عليها بعض التشويش العشوائي لمحاكاة القياسات الواقعية لهذه التجربة مكنتنا من الرجوع إلى خصائص المطلوبة.

القسم الثاني من هذا العمل كرس لتقدير الدوال كدالة عامل انتقال الحمل الحراري و دالة التدفق الحراري بدلالة الزمن، في هذا القسم تم استخدام التقدير العكسي باستعمال أسلوب التدرج المتزوج مع الإشكال المرافق وتم إنشاء برنامج يتم من خلاله الرجوع إلى دالة التدفق الحراري المفروضة على أحد جوانب الصفيحة خلال فترة زمنية معينة. وقد تم اتباع الخطوات نفسها في القسم الأول و أجري حساب الحساسيات لضمان صحة إجراء عمليات العكس. واستندت النتائج المقترحة في هذه الورقة إلى تجارب مخبرية على عينات مختلفة مثل الحديد أرامكو والنحاس و الفولاذ المقاوم للصدأ و الفولاذ بالكربون.

## كلمات المفتاح:

الطريقة العكسية، التلامس الحراري العكسي، الفوارق المنتهية، طريقة الفلاش، طريقة ليفنبرق- ماركوارت، طريقة التدرج المتزوج مع الإشكال المرافق،

## TABLE DES MATIERES

<b>Résumé.....</b>	<b>I</b>
<b>Table des matières.....</b>	<b>III</b>
<b>Nomenclature.....</b>	<b>VI</b>
<b>La liste des figures.....</b>	<b>VIII</b>
<b>La liste des tableaux.....</b>	<b>X</b>
<b>Introduction .....</b>	<b>01</b>
<b>Chapitre 1 - Études Bibliographique Spécifique sur la conduction inverse.....</b>	<b>03</b>
1-1 Historique des PICC.....	03
1-2 Bilan des études antérieures.....	05
1-3 Conclusion.....	08
<b>Chapitre 2 - La conduction et la conduction inverse de la chaleur.....</b>	<b>09</b>
2-1 Introduction.....	09
2-2 Problème direct de la conduction.....	10
2-2-1 conduction de la chaleur.....	10
2-2-2 flux de chaleur.....	10
2-2-3 Equation différentielle de la conduction de la chaleur.....	11
2-2-4 Equation de la chaleur dans les différents systèmes de coordonnées.....	13
2-2-5 Conditions aux limites générales.....	15
2-2-6 Condition aux limites linéaire.....	17
2-3 Résolution numérique des équations aux dérivées partielles par les méthodes des différences finies.....	19
2-3-1 Classification des équations différentielles aux dérivées partielles de deuxième ordre.....	19
2-3-2 Approximation des dérivés par différences finies par le développement de séries de Taylor.....	20
2-3-2-1 Approximation de la dérivée première.....	21
2-3-2-2 Approximation de la dérivée seconde.....	23
2-3-3 Résolution de l'équation de la conduction transitoire unidimensionnelle par différences finies.....	24
2-3-3-1 Méthode explicite.....	24
2-3-3-2 Méthode implicite.....	26
2-3-3-3 Méthode mixte.....	27
2-4 Problème inverse de la conduction de la chaleur.....	29
2-4-1 Représentation d'un problème inverse de conduction de la chaleur (PICC).....	30
2-4-2 Méthodes de résolution du problème inverse de conduction de la chaleur.....	32
2-4-3 Difficultés dans la solution des PICC.....	33
2-4-4 Problèmes mal posés.....	34
2-4-5 Quasi solution.....	34
2-4-6 Erreurs de mesures.....	35
2-4-7 Exemples d'applications.....	36
2-5 Conclusion.....	37

<b>Chapitre 3- Estimation de paramètres</b> .....	38
3.1 Introduction.....	38
3.2 Problème directe.....	39
3.2.1 Equation de la chaleur.....	39
3.2.2 Formulation du problème direct.....	40
3.2.3 Résolution du problème direct par la méthode des différences finies.....	40
3.3 Problème inverse.....	42
3.3.1 Formulation du problème inverse.....	42
3.3.2 Procédure itérative de la méthode de LEVENBERG-MARQUARDT.....	43
3.3.3 Critère d'arrêt.....	46
3.4 Etude de sensibilité et optimisation de l'expérience.....	46
3.4.1 Coefficients de sensibilité .....	47
3.4.2 Approximation numérique des coefficients de sensibilité par différence finie.....	48
3.4.3 Matrice de sensibilité.....	49
3.4.4 Identifiabilité et conception optimale de l'expérience.....	49
3.5 Algorithme de la méthode de LEVENBERG-MARQUARDT.....	50
3.6 Résultats et discussion.....	51
3-7 Conclusion.....	56
<b>Chapitre 4- Estimation de fonctions</b> .....	57
4-1 Introduction.....	57
4-2 Problème direct.....	58
4.2.1 Equation de conduction de la chaleur.....	58
4-3 Formulation du problème inverse.....	60
4-4 Problème de sensibilité.....	61
4-5 Problème adjoint.....	61
4-5-1 Variation du fonctionnel du problème inverse.....	61
4-5-2 Variation du fonctionnel de Lagrange et le problème adjoint.....	62
4-6 Equation du gradient.....	67
4-7 Procédure itérative.....	68
4-8 Le critère d'arrêt.....	70
4-9 L'algorithme de calcul.....	70
4-10 Résultats et Discussion.....	72
4-11 Conclusion.....	79
<b>Chapitre 5: Applications</b> .....	80
5.1 - Introduction.....	80
5.2- Techniques de mesure des champs de température.....	81
5.3- Méthodes de résolution des problèmes inverses.....	81
5.3-1 Méthodes fréquentielles.....	81
5.3-2 Méthode à fil chaud.....	82
5.3-3 Méthode à plan chaud.....	82
5.3-4 Méthodes instationnaires .....	83
5.4 La méthode flash.....	83
5.4-1 Principe de la méthode flash.....	83
5.4-2 Description du dispositif expérimental.....	84
5.4-3 Préparation des thermocouples.....	85
5.4-4 Préparation des échantillons.....	86

5.4-5	Enceinte de mesure.....	88
5.4-6	Acquisition et traitement .....	88
5.5	L'excitation thermique.....	89
5.6	Résultats et analyses.....	89
5.7	Conclusion	99
	<b>Conclusion et recommandations.....</b>	<b>96</b>

# Nomenclature

## Symboles alphabétiques

$T$	: Température (°C)
$T_\infty$	: Température ambiante
$t$	: Temps (S)
$t_f$	: Temps finale de l'expérience
$x$	: Coordonné cartésienne
$h$	: Coefficient de transfert convectif
$C$	: Chaleur volumique
$c_p$	: Chaleur spécifique
$\mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{t})$	: Vecteur du flux de chaleur
$\mathbf{q}_f$	: Flux fourni par une source externe
$\mathbf{q}_{cov}$	: Flux perdu par convection
$\mathbf{q}_n$	: Composante normale du flux de chaleur
$\mathbf{q}_{ray}$	: Flux perdu par rayonnement
$dA$	: Élément de surface
$dV$	: Élément de volume
$f(\mathbf{t})$	: Fonction des mesures de températures
$\Delta f_o$	: Delta Fourier
$\vec{n}$	: Vecteur normal unitaire, orienté vers l'extérieur
$\mathbf{S}(\mathbf{r}, \mathbf{t})$	: Vecteur de la source de chaleur
$L$	: Epaisseur de la plaque
$L(Q)$	: Le fonctionnel de Lagrange
$\mathbf{P}(\mathbf{r}, \phi, \mathbf{z})$	: Coordonnés cylindriques
$\mathbf{P}(\mathbf{r}, \phi, \theta)$	: Coordonnés polaires
$Y_{iM}$	: Les mesures de température
$J(\mathbf{P})$	: Somme carrée des erreurs (fonction objective)
$J(Q(\mathbf{t}))$	: La fonction objective
$\mathbf{P}^T$	: Vecteur des paramètres inconnus $P$
$\bar{T}_i$	: Vecteurs des températures
$\mathbf{X}(\mathbf{P})$	: Matrice de sensibilité
$X$	: Coefficient de sensibilité

## Symboles grecs

$\alpha$	: Diffusivité thermique
$\lambda$	: Conductivité thermique
$\rho$	: Masse volumique
$\epsilon$	: Emissivité de l'élément de surface
$\sigma_b$	: Constante de Stefan Boltzmann
$\phi$	: Fonction arbitraire
$\delta(\mathbf{t})$	: Fonction de temps
$\mu$	: Coefficient d'amortissement
$\Omega$	: Matrice d'identité.
$\epsilon$	: Critère d'arrêt
$\sigma$	: Ecart type des erreurs des mesures
$\omega$	: Variables aléatoires.
$\theta$	: Températures réduites
$\zeta_2$	: Espace d'Hilbert
$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{t})$	: Multiplicateur de Lagrange
$\eta(\mathbf{x})$	: Multiplicateur de Lagrange

$\mu(t)$  : *Multiplicateur de Lagrange*  
 $\omega(t)$  : *Multiplicateur de Lagrange*  
 $\beta^k$  : *Pas de recherche*  
 $d^k$  : *La direction de descente*  
 $\delta^k$  : *Paramètre de descente*

## La liste des figures

	Page
Figure (2-1) : Nomenclature de la dérivation de l'équation de la conduction de la chaleur	11
Figure (2-3) : Le système de coordonnées cylindriques	14
Figure (2-4) : Le système de coordonnées sphériques	14
Figure (2-5) : Le bilan d'énergie dans la surface du solide	15
Figure (2-6) : Nomenclature pour la représentation de séries de	21
Figure (2-7) ; Nomenclature pour la représentation de fonction par différences	22
Figure (2-8) : les nœuds des différences finies du schéma explicite simple	25
Figure (2-9) : les nœuds des différences finies du schéma implicite simple	27
Figure (2-10) : les nœuds des différences finies du schéma combinée scheme	28
Figure (2-11) : Problème inverse de la conduction de la chaleur.	30
Figure (3.1) : Schéma géométrique des points de mesure	40
Figure (3.2) : Les nœuds de la température dans la plaque.	40
Figure (3-3) : les coefficients de sensibilité à $x = 0$	52
Figure (3-4) : les coefficients de sensibilité à $x = 1$	52
Figure (3-5) : le profil du flux de chaleur	53
Figure (3-6) : le profil des mesures températures simulées avec bruitage	53
Figure (3-7) : le profil des mesures températures simulées sans bruitage (exacte)	54
Figure (4-1) : Le schéma du problème inverse.	59
Figure (4-2) : organigramme de la méthode de gradient conjugué avec problème adjoint pour l'estimation de fonctions	72
Figure (4-3) : le profil du flux de chaleur N°1	74
Figure (4-4) : les profils des mesures exactes des températures simulées de la fonction de flux N°1	74
Figure (4-5) : le profil du flux de chaleur N°2	74
Figure (4-6) les profils des mesures exactes des températures simulées de la fonction de flux N°2	74
Figure (4-7) : le profil du flux de chaleur N°3	75
Figure (4-8) les profils des mesures exactes des températures simulées de la fonction de flux N°3	75
Figure (4-9) : le profil du flux de chaleur N°4	75
Figure (4-10): les profils des mesures exactes des températures simulées de la fonction de flux N°4	75
Figure (4-11) :l'estimation de la fonction de flux N°1 en fonction de $\Delta f_o$ pour $\sigma = 0$	76
Figure (4-12) :l'estimation de la fonction de flux N°2 en fonction de $\Delta f_o$ pour $\sigma = 0$	76
Figure (4-13) :l'estimation de la fonction de flux N°3 en fonction de $\Delta f_o$ pour $\sigma = 0$	76
Figure (4-14) :l'estimation de la fonction de flux N°4 en fonction de $\Delta f_o$ pour $\sigma = 0$	76
Figure (4-15) : Profils des mesures des températures simulées avec bruitage de la fonction de flux N°1	77
Figure (4-16) : Profils des mesures des températures simulées avec bruitage de la fonction de flux N°2	77
Figure (4-17) : Profils des mesures des températures simulées avec bruitage de la fonction de flux N°3	77
Figure (4-18) : Profils des mesures des températures simulées avec bruitage de la fonction de flux N°4	77
Figure (4-19) :l'estimation de la fonction de flux N°1 en fonction de $\Delta f_o$ pour $\sigma = 0.01$	78
Figure (4-20) :l'estimation de la fonction de flux N°2 en fonction de $\Delta f_o$ pour $\sigma = 0.01$	78
Figure (4-21) :l'estimation de la fonction de flux N°3 en fonction de $\Delta f_o$ pour $\sigma = 0.01$	78
Figure (4-22) :l'estimation de la fonction de flux N°4 en fonction de $\Delta f_o$ pour $\sigma = 0.01$	78

Figure (5.1) : Schéma descriptif de la chaîne de mesure	84
Figure (5.2) : Fixation du thermocouple sur l'échantillon	85
Figure (5.3) : Photographie des échantillons	85
Figure (5.4) : Dispositif de soudage des thermocouples	86
Figure (5.5) : Forme des échantillons utilisés dans les essais	87
Figure (5.6) : Enceinte de mesure	88
Figure (5.7) : Dispositif de notre mesure de la diffusivité thermique à basse température	88
Figure (5.8) : Thermogramme à la température ambiante de l'échantillon d'acier surface polie : $e = 5.5$ mm.	90
Figure (5.9) : Thermogramme à la température ambiante de l'échantillon d'acier surface Noire : $e = 5.5$ mm.	90
Figure (5.10) : L'impulsion des flux de chaleur estimé pour l'échantillon de l'acier pour les deux surfaces par un flash	90
Figure (5.11) : Thermogramme à la température ambiante de l'échantillon d'acier inoxydable, surface polie $e = 4.3$ mm	91
Figure (5.12) : Thermogramme à la température ambiante de l'échantillon d'acier inoxydable, surface noire $e = 4.3$ mm	91
Figure (5.13) : L'impulsion des flux de chaleur estimé pour l'échantillon de l'acier inoxydable pour les deux surfaces par un flash	91
Figure (5.14) : Thermogramme à la température ambiante de l'échantillon de l'Aluminium: Surface polie $e = 6$ mm	92
Figure (5.15) : Thermogramme à la température ambiante de l'échantillon de l'Aluminium: Surface noire $e = 6$ mm	92
Figure (5.16) : L'impulsion des flux de chaleur estimé pour l'échantillon de l'Aluminium pour les deux surfaces par flash	92
Figure (5.17) : Thermogramme à la température ambiante de l'échantillon de laiton: Surface polie $e = 3.3$ mm,	93
Figure (5.18) : Thermogramme à la température ambiante de l'échantillon de laiton: Surface polie $e = 3.3$ mm,	93
Figure (5.19) : Impulsion de flux de chaleur estimé pour l'échantillon du Laiton pour les deux surfaces par flash.	93
Figure (5.20) : Thermogramme à la température ambiante du même échantillon d'acier, surface polie par l'expérience de la Lampe.	95
Figure (5.21) : Thermogramme à la température ambiante du même échantillon d'acier, surface noire par l'expérience de la Lampe.	95
Figure (5.22) : les fonctions de flux de chaleur estimé pour l'échantillon de l'acier pour les deux surfaces par l'expérience de la Lampe.	95
Figure (5.23) : Thermogramme à la température ambiante du même échantillon l'Aluminium, surface polie par l'expérience de la Lampe.	96
Figure (5.24) : Thermogramme à la température ambiante du même échantillon l'Aluminium, surface noire par l'expérience de la Lampe.	96
Figure (5.25) : les fonctions de flux de chaleur estimé pour l'échantillon de l'Aluminium pour les deux surfaces par l'expérience de la Lampe	96
Figure (5.26) : Thermogramme à la température ambiante du même échantillon d'acier inoxydable, surface	

	X
polie par l'expérience de la Lampe	97
Figure (5.27): Thermogramme à la température ambiante du même échantillon d'acier inoxydable, surface noire par l'expérience de la Lampe	97
Figure (5.28): les fonctions de flux de chaleur estimé pour l'échantillon de l'acier inoxydable pour les deux surfaces par l'expérience de la Lampe.	97
Figure (5.29): Thermogramme à la température ambiante du même échantillon du Laiton, surface polie par l'expérience de la Lampe.	98
Figure (5.30): Thermogramme à la température ambiante du même échantillon du Laiton, surface noire par l'expérience de la Lampe	98
Figure (5.31): les fonctions de flux de chaleur estimé pour l'échantillon du Laiton pour les deux surfaces par l'expérience de la Lampe.	98

### **La liste des tableaux**

	<b>Page</b>
Tableau (3-1) : Valeurs identifiées des paramètres thermo-physiques par la méthode de Levenberg-Marquardt pour l'estimation des paramètres	55
Tableau (5.1) : Dimensions des éprouvettes	87

# *Introduction*

# Introduction

## Présentation de la problématique liée à la conduction inverse

L'objectif majeur des problèmes de la conduction de la chaleur est de déterminer le champ de la température dans le milieu à étudier à partir des conditions initiales et des conditions aux limites ainsi que la connaissance de propriétés thermo-physiques et la géométrie du domaine, mais la tendance actuelle montre que la modélisation thermique de quelques problèmes de la conduction thermique est souvent limitée non par l'inadaptation des codes de calcul mais par la méconnaissance des propriétés thermo-physiques ou les conditions aux limites thermiques du domaine étudié.

La réponse à ces préoccupations se représente dans la résolution du problème de conduction inverse de la chaleur qui consiste à estimer les conditions aux limites à partir de mesures de température internes dans les situations où la condition ne peut être obtenue directement, soit parce qu'il est impossible de placer un capteur dans des surfaces inaccessibles, soit parce que le capteur sera détruit (le cas d'un milieu extérieur agressif, de frottement...) ou bien lorsque la présence du capteur perturbe sensiblement le champ de température surfacique (rayonnement). Ici le mot « estimer » a été utilisé au lieu de « déterminer » ou bien « définir » parce que toutes les valeurs obtenues à partir des données expérimentales pour des quantités inconnues sont par nécessité des approximations et des approches des valeurs exactes.

Parmi les avantages des techniques inverses celui de permettre la métrologie des propriétés d'interfaces comme les coefficients d'échange, résistance de contact ainsi que la caractérisation des grandeurs thermo-physiques d'un milieu. Ceci a été rendu possible par la coopération des mathématiques appliquées, de l'analyse des systèmes thermiques, de l'accroissement de la puissance des ordinateurs et des moyens de mesures.

Il faut noter que les problèmes de conduction inverses, mathématiquement, appartiennent à une classe appelée les problèmes mal posés, par contre les problèmes standards de conduction

thermique sont bien posés. Cette nature des problèmes inverses se manifeste dans l'instabilité des solutions obtenues. Et pour stabiliser des solutions il faut utiliser des méthodes de régularisation.

### **Objectifs de l'étude**

L'objectif principal poursuivi dans ce travail de mémoire est scindé en deux parties:

- La première partie consiste à mettre en œuvre la méthode de LEVENBERG-MARQUARDT pour estimer la conductivité thermique et la chaleur volumique comme des paramètres (constantes) d'une plaque exposée à un flux de chaleur à l'aide de mesures de températures prises en deux positions à l'intérieur de la plaque.

- La deuxième partie est l'estimation de la fonction du flux de chaleur transitoire à la frontière d'une plaque exposée à des différents flux de chaleur par la méthode du gradient conjugué avec problème adjoint à l'aide de mesures de température à l'intérieur de la plaque.

La présentation de ce travail scientifique est structurée en cinq chapitres.

- Dans le premier chapitre, une revue bibliographique sur le sujet est proposée afin de faire le point sur les méthodes existantes, les plus utilisées par les scientifiques. Quelques rappels sont également effectués concernant les applications pratiques des méthodes inverses.

- Dans le deuxième chapitre, nous présentons quelques rappels sur le transfert thermique par conduction dans les matériaux solides, nous donnerons ensuite une description des méthodes de résolution de l'équation du transfert conductif dans les matériaux solides par la méthode des différences finies puis on termine par une description de la conduction inverse.

- Dans le troisième chapitre nous présentons la méthode de Levenberg-Marrquardt pour l'estimation des paramètres avec une application où la conductivité thermique et la chaleur volumique ont été estimés.

- Le quatrième chapitre représente une description approfondie de la méthode de gradient conjugué avec problème adjoint pour l'estimation des fonctions de flux de chaleur transitoire, dans ce chapitre les mesures de la température à l'intérieur de la plaque sont simulées numériquement par la solution du problème direct de la conduction thermique.

- Dans le cinquième et dernier chapitre la performance de la méthode du gradient conjugué est examinée par l'utilisation des mesures de température expérimentales prises par la méthode flash pour l'estimation de flux de chaleur.

## *Chapitre I*

# *Étude bibliographique spécifique à la conduction inverse*

# 1- Étude bibliographique spécifique à la conduction inverse

## 1.1- Historique des Problèmes Inverses de la Conduction de Chaleur

Les Problèmes Inverses de la Conduction de Chaleur (PICC) ont reçu une attention particulière de mathématiciens, de physiciens et d'ingénieurs à cause de leurs nombreuses applications dans les sciences et dans l'industrie. Les plus connus de problèmes de conduction inverse par exemple est sans doute celui lié à la thermo-protection des véhicules spatiaux à la rentrée dans l'atmosphère terrestre. La principale difficulté des problèmes inverses, c'est leur caractère mal posé dans le sens d'Hadamard [1]. Par exemple il se peut qu'ils n'ont pas de solution (condition de solvabilité), ou si la solution existe, elle pourrait ne pas être unique (condition d'unicité) ou bien pas continue par rapport aux données (stabilité).

Par conséquent, les « PICC » ont longtemps été considérés comme insolubles et irréalistes. La méthode de transformation d'un problème mal posé en un problème bien posé est appelée régularisation. Tikhonov [2] a proposé un concept basé sur des informations à priori appelées la régularisation de Tikhonov. Alifanov [3] a introduit une méthode itérative de régularisation basée sur la technique du gradient conjugué. Un autre type de régularisation est proposé par J.V. Beck et connue sous le nom de la méthode de futur temps [4].

Dans la fin des années cinquante et le début des années soixante les programmes spatiaux ont joué un rôle très important dans le développement et l'avancement des techniques de solution des problèmes de la conduction inverse. Par exemple le chauffage aérodynamique du véhicule spatial durant la rentrée dans l'atmosphère est très fort et la température de la surface de l'armature thermique atteint des températures très élevées, donc la mesure directe de ces températures par des capteurs devient une question impossible. Mais par l'utilisation des températures enregistrées par

des capteurs placés à l'intérieur de la surface chaude et à l'aide d'une analyse inverse on peut avoir la température de la surface chaude [5].

### **1.2- Bilan des études antérieures**

Dans les trois dernières décades plusieurs travaux ont été effectués sur les problèmes inverses de la conduction de la chaleur dont on a choisi quelques uns :

**[6] 1985 Travaux de N. M. Al-najem. M. N. Ozisik :** Une approche analytique précise et stable est développée pour la résolution d'un problème inverse linéaire de la conduction de la chaleur tridimensionnelle impliquant la détermination de la température de surface à partir de la connaissance de la variation temporelle de la température à la frontière de la surface opposée. La technique des moindres carrés est utilisée pour calculer les paramètres inconnus associés à la solution. Les résultats numériques montrent que la courante méthode d'analyse est insensible aux erreurs de mesure, reste stable avec des mesures impliquant de grandes nombre de points de données prises avec des pas de temps extrêmement petit, et peut fournir, avec un degré élevé d'exactitude, de brusques changements dans le temps en température inconnue de la surface.

**[7] 1990 C. H. Huang and M. N. Ozisik:** Dans ce travail une méthodologie d'intégration directe est développée pour la détermination de bonnes estimations initiales pour les coefficients de propriété inconnue, faire des estimations initiales des inconnues suffisamment précises pour commencer les itérations représente l'une des difficultés dans la solution des problèmes inverses de conduction thermique. Ayant de bonnes estimations initiales, l'analyste peut appliquer la méthode Levenberg-Marquardt pour affiner les résultats à l'intérieur d'un critère de convergence préconisée. Le problème étudié ici est préoccupé par l'estimation simultanée de la variation spatiale de la conductivité thermique et la capacité thermique à partir des mesures spatiales et temporelles multiples faites au cours de la conduction de chaleur transitoire. Des capteurs de température à l'intérieur sont nécessaires lorsque les propriétés varient dans l'espace. Une analyse statistique est effectuée pour déterminer les limites approximatives de la bande de confiance pour l'estimation de la conductivité thermique et capacité calorifique par unité de volume.

**[8] 1991 Y. Jarny, M. N. Ôzisik, J. P. Bardon:** Une formulation de trois dimensions est présentée pour résoudre un problème de conduction thermique inverse comme un problème d'optimisation générale en appliquant l'approche de l'équation adjointe associée à l'algorithme du gradient conjugué. La formulation comprend le problème de sensibilité, le problème adjoint et le gradient équations. Un algorithme de résolution est présenté pour l'estimation de l'état de surface (flux de chaleur ou température), la conductivité thermique en fonction de l'espace et la capacité

thermique à partir de la connaissance des enregistrements des températures prises dans le solide. Dans cette approche, aucune information n'est nécessaire à priori sur la fonction inconnue à déterminer. Il est montré que les problèmes impliquant une information à priori sur la fonction inconnue deviennent des cas particuliers de cette approche générale.

[9] 1991 **C. H. Huang and M. N. Ozisik** : La méthode de régularisation combinée avec approche de la Validation Croisée Généralisée (GCV) est utilisée pour résoudre le problème de la conduction de chaleur inverse impliquant la détermination de la puissance d'une source de chaleur à surface située à l'intérieur d'une plaque. L'avantage de la présente approche réside dans le fait que la méthode GCV permet la détermination de la valeur optimum du paramètre de régularisation. Les expériences numériques sont présentés pour démontrer que la valeur de la régularisation, déterminée de cette manière est en effet optimal.

[10] 1992 **M. N. Ôzisik, N. M. AL-Najem** : Une analyse inverse de conduction thermique pour estimer l'état de surface dans des couches composites est présentée. La méthode est basée sur la procédure scission "splitting up procedur" et la technique des moindres carrés non linéaire, sur l'ensemble de domaine du temps. Les conditions frontières ayant changement brusque peuvent facilement être logées avec la présente méthode, puis une analyse statistique est effectuée pour établir les limites de confiance pour les erreurs liées à la détermination des quantités de frontière.

[11] En 1996 **Cheng-Hung Huang et Jan-Yuan Yan** ont publié une étude dont une analyse inverse a été effectuée par l'utilisation de la méthode de gradient conjugué et la minimisation des équations adjointes pour estimer la capacité volumique qui est fonction de la température dans un milieu homogène. La forme du fonctionnel de la capacité volumique est inconnue, alors le problème est classé comme un problème inverse d'estimation de fonction inconnue. L'exactitude de cet analyse inverse est examinée par l'utilisation des mesures exactes et des mesures bruitées et les résultats obtenus montrent qu'une excellente estimation peut être obtenue par l'utilisation des mesures à l'interface du domaine.

[12] En 2004 **Jian Su et Geoffrey F. Hewitt** ont résolu un problème inverse de conduction de la chaleur par la méthode de régularisation d'ALIFANOV [3] pour estimer le coefficient de transfert de la convection forcée d'un écoulement de vapeur sur une surface de tube circulaire chauffant. L'estimation est basée sur les mesures de température prises par un thermocouple dans la surface intérieure du tube, le problème inverse a été considéré comme un problème d'optimisation dans lequel le carré du fonctionnel résiduel est minimisé par la méthode du gradient conjugué avec problème adjoint. Les mesures de la température sont simulées numériquement. Les résultats

obtenus montrent que pour certaines configurations expérimentales il y a une limitation physique sur l'échelle du temps de la variation du coefficient de transfert de chaleur par convection qui peut être estimée par une analyse inverse.

[13] En 2005 **Pao-Tung Hsu** a élaborée une étude qui permet d'estimer les conditions aux limites dans un problème de conduction inverse en 3D. La méthode des différences finies a été utilisée pour résoudre le problème direct, puis un modèle inverse linéaire a été construit pour identifier les conditions aux limites et la méthode des moindres carrés linéaire est adoptée pour avoir la solution. Les résultats obtenus montrent que la méthode proposée est capable de fournir des bonnes approximations même avec des mesures bruitées.

[14] 2005 **Xiao-Wei Gao** a présenté un article où il a utilisé une analyse inverse pour l'identification des propriétés et des géométries d'un problème multi zones par l'utilisation de la méthode des éléments frontières. Dans cette approche les propriétés et les coordonnées de la zone inconnue sont prises comme des variables d'optimisation et les coefficients de sensibilités sont calculés par la méthode de différentiation des variables complexes des équations de base.

[15] 2005 **H. Jiang et T.H. Nguyen** : Dans cette étude la méthode du gradient conjugué avec problème adjoint a été appliquée pour résoudre un problème inverse de conduction de la chaleur pour l'estimation d'un flux de chaleur transitoire afin d'avoir une distribution de température donnée au temps final de l'expérience. La méthode des différences finies a été utilisée pour résoudre le problème direct, le problème adjoint et le problème de sensibilité.

[16] 2005 **S.L.R. Mendonça, C. R.B. Filho, Z.E. da Silva** : Une méthodologie pour estimer la conductivité thermique et une capacité calorifique volumétrique d'une pomme est décrite. La méthodologie est basée sur la solution d'un problème inverse de conduction de la chaleur. Les pommes sont considérées comme des objets sphériques. Cette approche repose sur une solution analytique du problème et sur une technique d'optimisation pour estimer les deux propriétés Thermo-physiques. Typiquement, un test est établi pour mesurer la réponse de la température d'un échantillon soumis à un échauffement transitoire par l'air chaud pour déterminer les propriétés directement en fonction de la température.

[17] 2006 **P. L. Woodfield, M.Monde, Y. Mitsutake**: Dans cette étude les auteurs ont utilisé une procédure modifiée basée sur les mesures de la température en deux points et la condition frontière d'un milieu semi infini pour calculer la diffusivité thermique des solides. La méthode utilise la solution d'un problème inverse de la conduction de la chaleur transitoire unidimensionnelle dans un milieu semi infini et les résultats obtenus montre une grande précision.

[18] 2006 Chia-Lung Chang, Ming Chang : Dans cette étude un développement de l'approche de volume fini est mobilisé pour l'estimation inverse de la conductivité thermique dans un domaine unidimensionnel. Les équations différentielles de la conduction thermique sont converties en un système d'équations algébriques linéaires sous forme de matrice en utilisant les données de la température et la source de chaleur en chaque nœud du domaine discrétisé. Les conductivités thermiques sont obtenues par la solution directe du système d'équations algébriques.

[19] 2007 Tsung-Chien Chen : Dans ce travail une méthode inverse de la conduction de la chaleur a été présentée pour l'estimation du flux de chaleur et la température dans un canon d'arme à feu, des mesures expérimentales sont utilisées pour avoir le champ de la température, l'algorithme de la méthode comprend l'utilisation du filtre de KALMAN pour dériver le modèle de régression, l'estimateur des moindres carrés récursive est proposé pour extraire la variation temporelle du flux de chaleur. Les résultats obtenus montrent que la méthode proposée donne des estimations et facilite l'implémentation pratique.

### 1.3- Conclusion

La recherche bibliographique exposée dans cette première partie montre l'intérêt scientifique qu'a suscité la pratique de l'utilisation des problèmes inverses de la conduction de la chaleur dans l'estimation des flux de chaleur, les propriétés thermo-physiques, les conditions frontières et les formes géométriques dans les problèmes de la conduction de la chaleur soit sous forme de paramètres ou bien sous forme de fonctions temporelles ou spatiales. Cette étude bibliographique nous permet de choisir les méthodes inverses à utiliser dans notre estimation et la méthode de Levenberg-Marquardt est jugée plus efficace dans l'estimation des paramètres bien que la méthode de gradient conjugué avec problème adjoint est la plus utilisée dans l'estimation des fonctions.

## ***Chapitre II***

# ***Conduction et conduction inverse de la chaleur***

## 2. Conduction et conduction inverse de la chaleur

### 2.1- Introduction

Avant d'aborder le problème inverse, nous commençons par une étude préliminaire du problème direct. Au cours de cette étude, nous décrirons le type de transfert considéré dans nos travaux et définirons les paramètres Thermo-physiques caractérisant les matériaux homogènes et isotropes. Nous introduirons quelques notions essentielles relatives à la conduction de la chaleur dans un solide opaque. Le problème direct traité dans la deuxième partie de ce chapitre est restreint à la recherche du profil de température en tout point de la surface d'une plaque soumise à un flux de chaleur à une de ses surfaces. Il s'avère indispensable de décrire clairement les différents mécanismes responsables du phénomène de conduction de chaleur et de préciser les conditions physiques extérieures de température ou/et de flux de chaleur auxquelles un solide opaque peut être soumis. Dans un solide opaque la conduction est le seul mode de transfert de chaleur. Elle est modélisée par la loi phénoménologique de Fourier. La conservation de l'énergie calorifique est traduite localement en tout point par une équation aux dérivées partielles (EDP) satisfaite en tout point du solide. Cette équation est dite équation de la chaleur. Cette équation fait intervenir les propriétés intrinsèques du matériau comme la conductibilité thermique  $\lambda$  et chaleur volumique  $\rho c$ . Dans le cas unidimensionnel, elle se réduit sous certaines conditions à

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Où  $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p}$  est la diffusivité thermique. A l'équation de la chaleur, il est indispensable d'adjoindre les conditions aux limites déterminant la valeur de la température et/ou la continuité de flux de chaleur aux frontières du matériau. On suppose aussi connue la répartition de température dans le matériau à l'instant initial. La résolution de l'équation de la chaleur munie des conditions aux limites et initiales, revient à exprimer  $T$  en fonction des variables d'espace ( $x, y, z$ ) (par exemple dans les coordonnées cartésiennes) et du temps  $t$ : c'est résoudre le problème direct.

Pour résoudre le système d'équations comprenant l'équation de la chaleur et les équations de conditions aux limites et initiales, il existe plusieurs techniques numériques : les différences finies, les volumes finis, les éléments finis, etc. Nous nous intéressons essentiellement à la technique des

différences finies et nous montrerons comment l'équation aux dérivées partielles de la chaleur se réduit à un système d'équations algébriques.

Le problème inverse introduit dans la deuxième partie de ce manuscrit sera bien posé et nous donnerons les informations nécessaires pour **résoudre un problème inverse**.

## **2.2- Problème direct de la conduction**

Nous allons procéder à la description du phénomène thermique et aux différents principes conduisant à l'équation de la conduction. Le principe de conservation d'énergie conduira à la formulation de l'équation de la chaleur. Nous présenterons ensuite quelques modèles de conditions aux limites.

### **2.2.1- Conduction de la chaleur**

La conduction de la chaleur est le transfert d'énergie entre les particules constituantes comme les atomes, les molécules et les électrons libres des régions chaudes d'un corps vers ceux des régions froides. La conduction est un mode de transfert thermique dans lequel l'échange d'énergie prend place dans les solides et les fluides en repos (pas de mouvement du au déplacement des portions macroscopiques du milieu). Cet échange se fait de la région de haute température vers la région de basse température à cause de la présence d'un gradient de température dans le corps. La science de la conduction de la chaleur est principalement concernée par la détermination de la distribution de la température dans les solides [20].

### **2.2.2- Flux de chaleur**

La loi de base qui donne la relation entre le flux de chaleur et le gradient de température, basée sur des observations expérimentales, est généralement dénommée sous le nom du physicien français *Josef FOURIER*, qu'il a utilisé dans sa théorie analytique de la chaleur. Pour un corps homogène et isentropique, la loi de FOURIER est donnée par la formule suivante :

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = -\lambda \nabla T(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \quad \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (2 - 1)$$

où le gradient de température est le vecteur normal aux surfaces isothermes. Le vecteur de flux de chaleur  $\mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{t})$  représente l'écoulement de la chaleur par unité de temps, par unité de surface des plans d'isothermes dans le sens de diminution de la température et  $\lambda$  est la conductivité thermique du matériel qui est une quantité scalaire positive. Quand le sens de vecteur de flux de chaleur  $\mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{t})$  est dirigé vers le sens de diminution des températures, le signe moins inclus dans l'équation (1-1)

est pour rendre le flux de chaleur une quantité positive. Dans le système des coordonnées cartésiennes l'équation (1-1) est écrite comme suite :

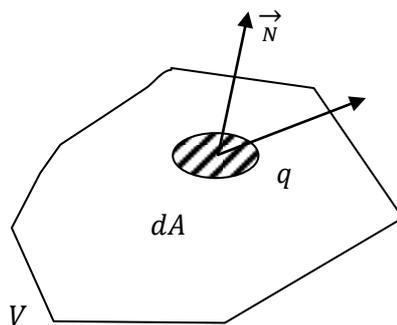
$$\mathbf{q}(x, y, z, t) = -\vec{i}\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \vec{j}\lambda \frac{\partial T}{\partial y} - \vec{k}\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2 - 2)$$

Où  $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont les vecteurs unitaires le long des directions des x, y et z respectivement.

Il est clair que le taux de flux de chaleur pour un gradient de température donnée est directement proportionnel à la conductivité thermique  $\lambda$  du matériel. Donc dans l'analyse de la conduction de la chaleur, la conductivité thermique du matériau est une propriété très importante qui contrôle le taux de transfert de chaleur dans le milieu. Il y a une large différence entre les conductivités thermiques des différents matériaux d'engineering, la plus grande valeur de la conductivité thermique est donnée pour les purs métaux et la plus basse valeur est donnée pour les gaz et les vapeurs et entre ces deux valeurs on trouve les matières isolantes et les liquides organiques.

### 2-2-3 L'équation différentielle de la conduction de la chaleur

On va tirer l'équation différentielle de la conduction de la chaleur pour un solide isotrope, stationnaire et homogène avec une source de chaleur à l'intérieur du corps. Les sources d'énergie peuvent être dues à des sources nucléaires, électriques, chimiques ou autres et qui peuvent être des fonctions de temps et/ou d'espace. La chaleur générée par la source d'énergie dans le milieu est généralement spécifiée comme chaleur fournie par unité de temps et par unité de volume, elle est désignée par le symbole  $S(r, t)$  et si les unités SI sont utilisées, l'unité de la source d'énergie sera  $(\mathbf{w}/\mathbf{m}^3)$ . On considère l'équation du bilan d'énergie d'un volume de contrôle  $V$  illustré dans la figure (2-01)



**Figure (2-01) : Nomenclature de la dérivation de l'équation de la conduction de la chaleur**

$$\left[ \begin{array}{l} \text{La quantité de chaleur entrante} \\ \text{à travers les limites des surfaces} \\ \text{de contrôle de volume } V \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{La quantité de chaleur générée} \\ \text{dans le} \\ \text{volume } V \end{array} \right] \\ = \left[ \begin{array}{l} \text{La quantité d'énergie} \\ \text{stockée dans le volume} \\ V \end{array} \right] \quad (2 - 3)$$

Où les termes de cette équation sont évalués comme suite :

$$\left[ \begin{array}{l} \text{La quantité de chaleur entrante} \\ \text{à travers les limites des surfaces} \\ \text{de contrôle de volume } V \end{array} \right] = - \int_A \mathbf{q} \cdot \vec{N} \, dA = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{q} \, dV \quad (2 - 4)$$

Où  $A$  est la surface du volume  $V$ ,  $\vec{N}$  est le vecteur d'unité normal à la surface élémentaire  $dA$  dirigé vers l'extérieur.  $\mathbf{q}$  est le vecteur de flux de chaleur à travers  $dA$ . Le signe moins est inclus pour assurer que le flux de chaleur est entrant dans l'élément de volume  $V$ . Le théorème de la divergence est utilisé pour convertir l'intégrale de surface en intégrale de volume.

$$\left[ \begin{array}{l} \text{La quantité de chaleur générée} \\ \text{dans le} \\ \text{volume } V \end{array} \right] = \int_V S(\mathbf{r}, t) \, dV \quad (2 - 5)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{La quantité d'énergie} \\ \text{stockée dans le volume} \\ V \end{array} \right] = \int_V \rho C_p \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \, dV \quad (2 - 6)$$

La substitution des équations (2-4), (2-5) et (2-6) dans l'équation (2-3) donne :

$$\int_V \left[ -\nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) + S(\mathbf{r}, t) - \rho C_p \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] \, dV = 0 \quad (2 - 7)$$

L'équation (2-7) est dérivée d'un élément de volume arbitraire dans le solide, alors que le volume  $V$  peut être choisi très petit de manière qu'on peut enlever l'intégrale et on obtient :

$$-\nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) + S(\mathbf{r}, t) - \rho C_p \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (2 - 8)$$

Substituant le flux de chaleur  $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$  de l'équation (2-1) dans l'équation (2-8), on obtient l'équation différentielle suivante, de la conduction stationnaire de la chaleur pour un solide isotrope et homogène avec une source d'énergie à l'intérieur:

:

$$\nabla[\lambda \nabla T(\mathbf{r}, t)] + \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) - \rho C_p \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (2 - 9)$$

Cette équation est utile dans le cas où  $\lambda$  et  $C_p$  sont dépendants de la température et de l'espace. L'équation (2-9) devient:

$$\nabla^2 T(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\lambda} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2 - 10)$$

Où

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p} = \text{la diffusivité thermique}$$

Pour un milieu avec une diffusivité thermique constante et sans source de chaleur, l'équation (2-10) devient *l'équation de Fourier*.

$$\nabla^2 T(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2 - 11)$$

La diffusivité thermique  $\alpha$  représente la propriété du milieu et elle a une dimension de [longueur<sup>2</sup>/temps] qui prend une unité de [m<sup>2</sup>/h] ou [m<sup>2</sup>/s]. La signification physique de la diffusivité thermique est reliée avec la vitesse de propagation de la chaleur dans le solide durant les changements de la température avec le temps. Une grande diffusivité thermique signifie une propagation rapide de la chaleur dans le milieu et vice versa.

#### **2.2.4- Equation de la chaleur dans les différents systèmes de coordonnées**

La première étape dans la solution analytique ou numérique d'un problème de conduction de la chaleur dans une région donnée est de choisir un système de coordonnées orthogonal de manière que ces surfaces coïncident avec les frontières de la région à étudier. Par exemple le système de coordonnées cartésiennes est utilisé pour les corps rectangulaires, les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques sont utilisés pour les corps qui ont des formes cylindriques ou sphériques respectivement.

Dans cette partie nous allons présenter l'équation de la conduction de la chaleur d'un solide homogène et isotrope, dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

Les équations (2-9) et (2-10) dans le système de coordonnées cartésiennes (x,y,z) deviennent respectivement:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + S = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2 - 12)$$

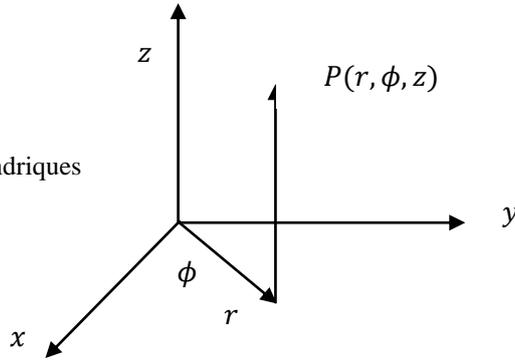
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{\lambda} S = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2 - 13)$$

Dans le système des coordonnées cylindriques les équations précédentes deviennent :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + S = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2 - 14)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{\lambda} S = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2 - 15)$$

Figure (2-3) : Le système de coordonnées cylindriques

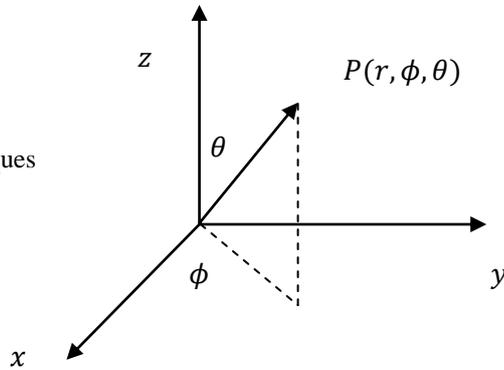


Et dans le système des coordonnées sphériques les équations (2-9) et (2-10) prennent les formes suivantes :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + S = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2 - 16)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\lambda} S = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2 - 17)$$

Figure (2-4) : Le système de coordonnées sphériques



### 2.2.5- Conditions aux limites générales

La résolution de l'équation différentielle de la conduction de la chaleur aura de nombreuses solutions à moins que l'ensemble des conditions aux limites et les conditions initiales soit bien définies. Les conditions initiales précisent la distribution de la température dans le milieu à l'origine des coordonnées du temps ( à  $t = 0$  ) et les conditions limites précisent la température ou le flux de chaleur dans les frontières du milieu. Par exemple dans des surfaces limites bien déterminées on peut définir la distribution de la température ou bien la distribution du flux de chaleur ou bien l'échange de la chaleur par convection ou/et rayonnement avec l'environnement.

Les conditions limites peuvent être obtenues en utilisant l'équation du bilan d'énergie dans la surface limite du solide en question.

On considère un élément de surface orienté par un vecteur unitaire normal  $\vec{n}$  dirigé vers l'extérieur et exposé à une convection, un rayonnement et un flux de chaleur de l'extérieur comme il est montré sur la figure (2-5).

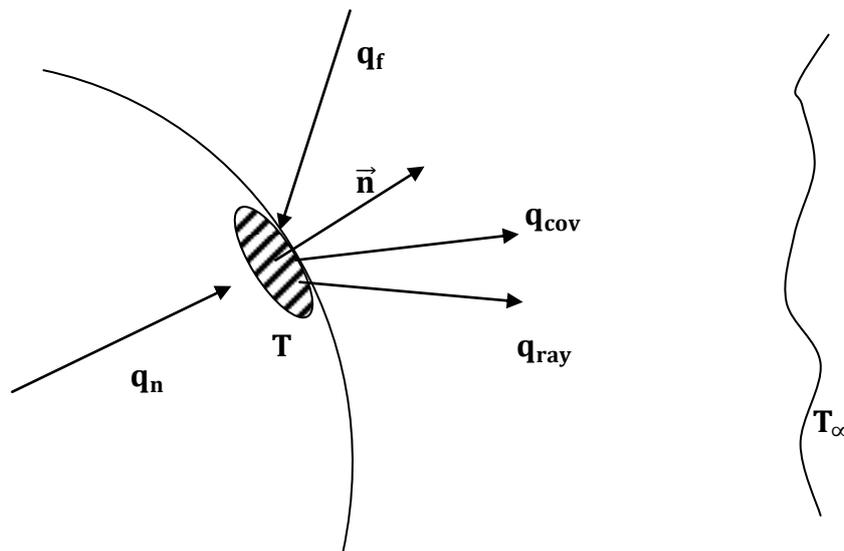


Figure (2-5) : Le bilan d'énergie à la surface du solide

La signification physique des flux de chaleur présentés sur la figure (2-5) est comme suit :

La quantité  $\mathbf{q}_f$  représente l'énergie fournie à l'élément de surface en  $[\mathbf{W}/\mathbf{m}^2]$  par une source extérieure.

La quantité  $\mathbf{q}_{cov}$  représente les pertes thermiques à travers l'élément de surface à la température  $\mathbf{T}$ , par convection avec l'environnement ambiant à la température  $\mathbf{T}_\infty$ , définis par un coefficient de transfert thermique  $\mathbf{h}$ . Cette quantité est donnée par :

$$\mathbf{q}_{con} = \mathbf{h}(\mathbf{T} - \mathbf{T}_\infty) \quad (2 - 18)$$

Ici le coefficient de transfert thermique  $\mathbf{h}$  varie selon le type de l'écoulement (laminaire, turbulent etc.), la géométrie du solide, la surface de passage de l'écoulement, les propriétés physiques du fluide, la température moyenne, etc.

La quantité  $\mathbf{q}_{ray}$  représente les pertes thermiques par rayonnement de l'élément de surface avec l'environnement ambiant à température fictive  $\mathbf{T}_\infty$  et elle est donnée par la formule suivante:

$$\mathbf{q}_{ray} = \epsilon \sigma_b (\mathbf{T}^4 - \mathbf{T}_\infty^4) \quad (2 - 19)$$

où :

$\epsilon$  est l'émissivité de l'élément de surface

$\sigma_b$  est la constante de Stefan Boltzman :  $\sigma_b = 5,6697 \times 10^{-8} \left[ \frac{W}{m^2 k^4} \right]$

La quantité  $\mathbf{q}_n$  représente les composantes normales du vecteur flux de chaleur par conduction à travers l'élément de surface. Elle est donné par :

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{q} \cdot \vec{n} = -\lambda \nabla T \vec{n} \quad (2 - 20)$$

Dans les coordonnées cartésiennes nous avons :

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \quad (2 - 21)$$

Et

$$\vec{n} = D_x \vec{i} + D_y \vec{j} + D_z \vec{k} \quad (2 - 22)$$

Introduisant ces deux dernières équations dans l'équation (2-20), alors les composantes normales du vecteur flux de chaleur par conduction dans l'élément de surface deviennent :

$$\mathbf{q}_n = -\lambda \left[ D_x \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + D_y \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + D_z \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \right] \quad (2 - 23)$$

$$\mathbf{q}_n = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2 - 24)$$

où  $D_x$ ,  $D_y$  et  $D_z$  sont les cosinus directeurs du vecteur normal par rapport aux axes des coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Des expressions similaires peuvent être développées de la même façon avec les autres systèmes de coordonnées.

Pour obtenir la condition aux limites, on considère le bilan d'énergie suivant, au niveau de l'élément de surface.

$$\text{CHALEUR FOURNIE} \equiv \text{CHALEUR PERDUE}$$

Où

$$\mathbf{q}_n + \mathbf{q}_f = \mathbf{q}_{\text{con}} + \mathbf{q}_{\text{ray}} \quad (2 - 25)$$

Introduisant les équations (2-18), (2-19) et (2-24) dans (2-25), la condition aux limites devient.

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + hT + \epsilon \sigma_b T^4 = hT_\infty + \mathbf{q}_f + \epsilon \sigma_b T_r^4 \quad (2 - 26)$$

où toutes les quantités du côté droit de l'équation sont connues et la température de l'élément de surface  $T$  est inconnue.

La condition aux limites générale donnée par l'équation (2-26) est non linéaire, car elle contient la puissance quatrième de la température  $T$ .

### 2.2.6- Conditions aux limites linéaires

Pour la solution analytique et numérique des problèmes linéaires de la conduction thermique il nous faut prendre en considération les trois types de conditions aux limites linéaires suivants.

**La condition aux limites de premier type :** C'est le cas où la distribution de température est prescrite à la limite de surface, qui est

$$T = f(\mathbf{r}, t) \text{ sur } S \quad (2 - 27)$$

où la température prescrite est une fonction de l'espace et du temps.

**La condition aux limites de deuxième type :** C'est la situation dans laquelle le flux de chaleur est défini à la surface limite :

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q(\mathbf{r}, t) \text{ sur } S \quad (2 - 28)$$

Où  $\frac{\partial T}{\partial n}$  est la dérivée première de la température le long de vecteur normal à la surface vers l'extérieur.

La fonction  $f(\mathbf{r}, t)$  représente le flux de chaleur en  $[W/m^2]$ .

**La condition aux limites de troisième type :** C'est la condition aux limites de convection, qui est facilement obtenue à partir de l'équation (2-26) en mettant le terme du rayonnement et le flux de chaleur fourni de l'extérieur égaux à zéro :

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + hT = hT_{\infty}(\mathbf{r}, t) \text{ sur } S \quad (2 - 29)$$

Il est clair que les conditions aux limites du premier et du deuxième type sont obtenues à partir de la condition aux limites du troisième type comme des cas particuliers, si  $\lambda$  et  $h$  sont pris comme des coefficients. Par exemple, par la mise de  $\lambda = 0$  et  $T_{\infty}(\mathbf{r}, t) \equiv f(\mathbf{r}, t)$ , l'équation (2-29) se réduit à l'équation (2-27). De même, par la mise de  $T_{\infty}(\mathbf{r}, t) \equiv f(\mathbf{r}, t)$ , puis de  $h = 0$  sur le côté gauche, l'équation se réduit à l'équation (2-28).

## 2.3- Résolution numérique des équations aux dérivées partielles par les méthodes des différences finies

Les méthodes numériques sont très utiles pour la résolution des problèmes de mécanique des fluides, de transfert de chaleur, de transfert de matière,... lorsque ces problèmes n'ont pas de solutions analytiques due à leur non linéarité et à la complexité des géométries et des conditions aux limites. Le développement des outils informatiques et les calculateurs à grande vitesse a amélioré l'utilisation de ces méthodes dans plusieurs branches des sciences de l'ingénieur. Plusieurs problèmes compliqués peuvent être maintenant résolus rapidement et avec un coût très bas.

Les méthodes des différences finies sont parmi les méthodes numériques les plus utilisées dans la résolution des équations différentielles aux dérivées partielles de transfert de chaleur et de matière, avec les méthodes des éléments finis et les méthodes des volumes finis. Les méthodes des différences finies sont simples et faciles à formuler et peuvent être aisément généralisées aux problèmes à deux et trois dimensions.

Dans ce qui suit, il sera donné un résumé général sur les méthodes des différences finies qui nous permettent ensuite de résoudre les problèmes de la conduction de la chaleur dans le reste de notre travail.

### 2.3.1- Classification des équations différentielles aux dérivées partielles de deuxième ordre.

Dans la solution des équations différentielles aux dérivées partielles avec les différences finies, le choix d'un schéma particulier de différences finies, dépend également du type de l'équation différentielle partielle considérée. Généralement, les équations différentielles partielles sont classifiées en trois catégories, dites elliptiques, paraboliques et hyperboliques. Pour illustrer cette classification, nous considérons l'équation différentielle aux dérivées partielles générales de deuxième ordre de deux variables indépendantes  $x$ ,  $y$ , suivante donnée par FORSYTHE et WASOW [21].

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F\phi + G(x, y) = 0 \quad (2 - 30)$$

Ici nous supposons que l'équation est linéaire, c'est à dire, les coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  et  $F$  ne dépendent que de deux variables ( $x$  et  $y$ ).

La classification est faite sur la base des coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  des plus hautes dérivées dans l'équation (2-30), selon le signe du déterminant

$$-\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \quad (2 - 31)$$

Si  $B^2 - 4AC < 0$  l'équation est elliptique.

Si  $B^2 - 4AC = 0$  l'équation est parabolique.

Si  $B^2 - 4AC > 0$  l'équation est hyperbolique.

Par exemple l'équation de la conduction transitoire unidimensionnelle de la chaleur suivante :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2 - 32)$$

Est une équation différentielle aux dérivées partielles parabolique.

### 2.3.2- Approximation des dérivés par différences finies par le développement en séries de

#### Taylor

L'idée de la représentation d'une dérivée par différence finie peut être présentée en rappelant la définition de la dérivée de la fonction  $F(x, y)$  à  $x = x_0, y = y_0$  par rapport  $x$  :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \Delta x, y_0) - F(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (2 - 33)$$

Il est clair que si la fonction  $F(x, y)$  est continue, la partie droite de l'équation (2-33) peut être considérée comme une approximation raisonnable à  $\partial F / \partial x$  pour un  $\Delta x$  fini et suffisamment petit.

Considérons le développement en séries de Taylor de la fonction  $\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h})$  et  $\mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{h})$  au point  $\mathbf{x}$ , comme illustré sur le Figure (2-7) :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{h}\mathbf{f}'(\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{h}^2}{2!}\mathbf{f}''(\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{h}^3}{3!}\mathbf{f}'''(\mathbf{x}) \quad (2 - 34 \text{ a})$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}\mathbf{f}'(\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{h}^2}{2!}\mathbf{f}''(\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{h}^3}{3!}\mathbf{f}'''(\mathbf{x}) \quad (2 - 34 \text{ b})$$

où les primes dénotent les dérivées par rapport  $x$ . La dérivée première et la dérivée seconde peuvent être représentées de manière différente, sous la forme de différences finies, en utilisant le développement en séries de Taylor donné par les équations (2-34).

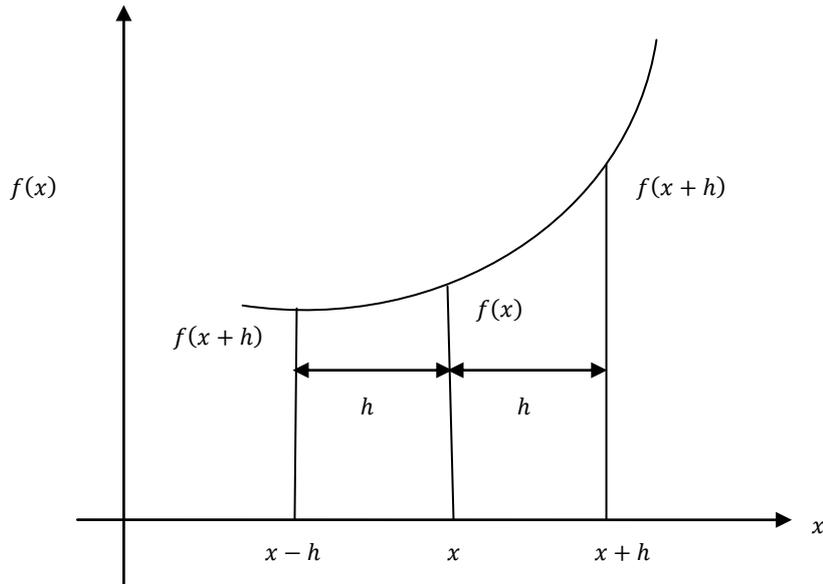


Figure (2-7) Nomenclature pour la représentation de séries de Taylor

### 2.3.2.1- Approximation de la dérivée première

Les dérivées premières progressives (à droite) et régressives (à gauche) de la fonction  $f(x)$  sont obtenues à travers les équations (2-34 a) et (2-34 b) respectivement :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(x) - \frac{h^2}{6} f'''(x) \dots \text{(progressive)} \quad (2 - 35 a)$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2} f''(x) - \frac{h^2}{6} f'''(x) \dots \text{(régressive)} \quad (2 - 35 a)$$

Soustrayant les équations (2-34 b) de (2-34 a), l'approximation de la dérivée première de la fonction  $f(x)$  par des différences finies centrées d'ordre deux, est déterminée comme :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(x) \dots \quad \text{(Centrée)} \quad (2 - 35 c)$$

Ces trois résultats sont écrits de manière plus compacte comme :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h) \quad \text{(progressive)} \quad (2 - 36 a)$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h) \quad \text{(régressive)} \quad (2 - 36 b)$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad \text{(Centrée)} \quad (2 - 36 c)$$

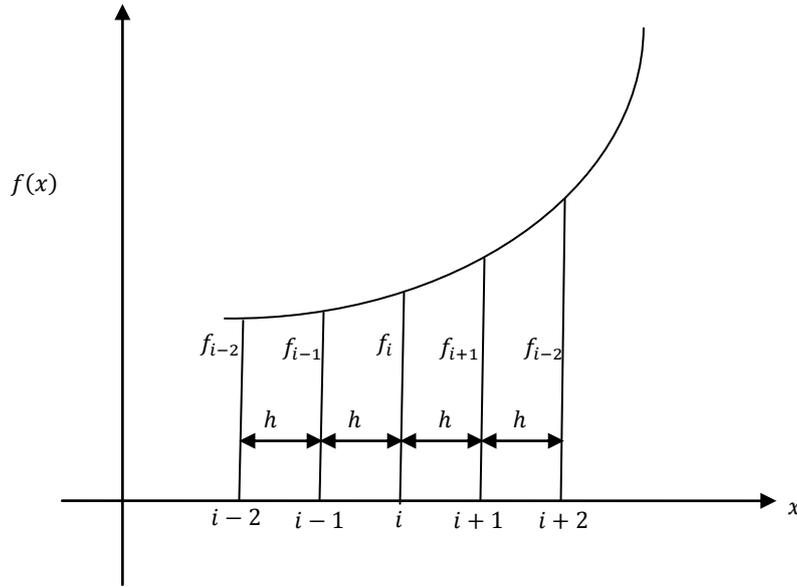


Figure (2-8) Nomenclature pour la représentation de fonction par différences finies séries de Taylor

Ici la notation  $O(h)$  est utilisée pour dire que l'erreur de l'approximation est de l'ordre de  $h$  ; pareillement,  $O(h^2)$  est pour un erreur de l'ordre de  $(h^2)$ .

Si maintenant on introduit la notation suivante :

$$\mathbf{x = ih, \quad x + h = (i + 1)h, \quad x - h = (i - 1)h, \quad etc}$$

$$\mathbf{f(x) = f_i, \quad f(x + h) = f_{i+1}, \quad f(x - h) = f_{i-1}, \quad etc}$$

Comme il est illustré sur la figure (2-8), la représentation des dérivées premières de la fonction  $f(x)$  au point  $x$ , données par les équations (2-36) sont écrites respectivement comme :

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h) \text{ (progressive) (2 - 37 a)}$$

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h) \text{ (régressive) (2 - 37 b)}$$

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2) \text{ (Centrée) (2 - 37 c)}$$

**2.3.2.2- Approximation de la dérivée seconde**

Pour avoir la représentation de la dérivée seconde  $f''(x)$  au point  $x$  de la fonction  $f(x)$  par différences finies, on considère le développement en séries de Taylor des fonctions  $f(x - 2h)$  et  $f(x + 2h)$  suivantes:

$$f(x + 2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f''(x) + \frac{4}{3}h^3f'''(x) + \dots \quad (2 - 38 a)$$

$$f(x - 2h) = f(x) - 2hf'(x) + 2h^2f''(x) - \frac{4}{3}h^3f'''(x) + \dots \quad (2 - 38 b)$$

L'élimination de la dérivée  $f'(x)$  entre l'équation (2-34 a) et (2-38 a) nous donne:

$$f''(x) = \frac{f(x) + f(x + 2h) - 2f(x + h)}{h^2} - hf'''(x) \dots \quad (2 - 39)$$

De la même manière, l'élimination de  $f'(x)$  entre l'équation (2-34 b) et (2-38 b) nous donne:

$$f''(x) = \frac{f(x - 2h) + f(x) - 2f(x - h)}{h^2} - hf'''(x) \dots \quad (2 - 40)$$

Par l'élimination de  $f'(x)$  entre l'équation (2-34a) et (2-38 b) on trouve:

$$f''(x) = \frac{f(x - h) + f(x + h) - 2f(x)}{h^2} - \frac{1}{12}h^2f''''(x) \dots \quad (2 - 41)$$

Les résultats obtenus peuvent être écrits de manière plus compacte comme:

$$f''_i = \frac{f_i - 2f_{i+1} - f_{i+2}}{h^2} + O(h) \quad (\text{progressive}) \quad (2 - 42 a)$$

$$f''_i = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2} + O(h) \quad (\text{régressive}) \quad (2 - 42 b)$$

$$f''_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} + O(h^2) \quad (\text{Centrée}) \quad (2 - 42 c)$$

Où

$$f''_i = \left. \frac{d^2f(x)}{dx^2} \right|_i$$

Nous notons ici que la précision de la représentation en différence centrée est de l'ordre  $O(h^2)$  par contre la précision des deux autres représentations (progressive et régressive) est de l'ordre  $O(h)$ .

### 2.3.3- Résolution de l'équation de la conduction transitoire unidimensionnelle par différences finies

Dans ce qui suit, nous allons montrer la représentation de l'équation de la conduction transitoire unidimensionnelle de la chaleur par les différences finies. Plusieurs schémas sont disponibles pour exprimer cette équation. Par cette méthode, chacun de ces schémas a ses avantages et ses limites. Nous allons discuter de certains de ces schémas en coordonnées rectangulaires.

#### 2.3.3.1- Méthode explicite

On considère l'équation de la conduction de chaleur transitoire unidimensionnelle pour une région finie délimitée par  $0 \leq x \leq L$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{à } 0 \leq x \leq L, \quad t > 0 \quad (2 - 43 \text{ a})$$

avec les conditions aux limites et initiales suivantes:

$$T(0, t) = T_a = \text{connue} \quad (2 - 43 \text{ b})$$

$$T(L, t) = T_L = \text{connue} \quad (2 - 43 \text{ c})$$

$$T(x, 0) = T_i = \text{connue} \quad (2 - 43 \text{ d})$$

L'équation différentielle (2- 43a) est représentée par la forme de différences finies en utilisant les différences centrales pour discrétiser  $\partial^2 T / \partial x^2$  et les différences régressives pour discrétiser  $\partial T / \partial t$ .

On obtient :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} + O[\Delta t, (\Delta x)^2] \quad (2 - 44a)$$

Où  $T(x, t) = T(i\Delta x, n \Delta t) \equiv T_i^n \quad (2 - 44b)$

Et l'équation (2-44) devient

$$T_i^{n+1} = rT_{i-1}^n - (1 - 2r)T_i^n + rT_{i+1}^n \quad (2 - 45a)$$

Où

$$r = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (2 - 45b)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{et} \quad i = 1, 2, \dots, M - 1$$

Avec une erreur de troncature de l'ordre de  $\mathbf{O}[\Delta t, (\Delta x)^2]$

La représentation des différences finies donnée par les équations (2-45) est appelée la forme explicite, parce que la température inconnue  $T_i^{n+1}$  à l'instant  $(n+1)$  peut être explicitement déterminée à partir de la connaissance préalable des températures  $T_{i-1}^n, T_i^n$  and  $T_{i+1}^n$  au pas de temps  $n$  selon l'équation (2-45a). Le seul inconvénient de cette méthode est que si  $\alpha$  et  $\Delta x$  sont fixés, il y a un maximum admissible du pas de temps  $\Delta t$  qui ne devrait pas dépasser la valeur imposée par le texte suivant sur le critère de stabilité :

$$0 < r \equiv \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (2 - 46)$$

Pour une valeur donnée de  $\alpha$  résultant, et pour une amplification des erreurs  $\Delta x$ , si le pas de temps  $\Delta t$  dépasse la limite imposée par le critère ci-dessus, le calcul numérique devient instable.

Lorsque les conditions limites sont déterminées, le nombre d'équations de différences finies (2-44) devient égal au nombre de nœuds de températures inconnues. La figure (2-8) illustre les nœuds des différences finies associées au schéma explicite.

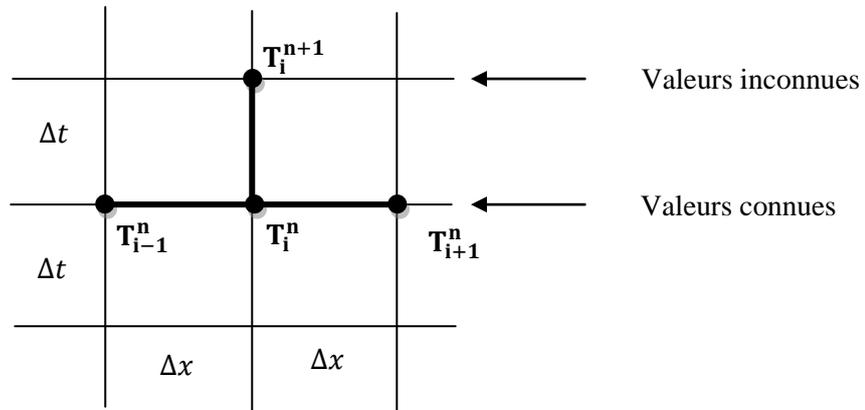


Figure (2-8) : les nœuds des différences finies du schéma explicite simple.

La procédure de calcul est comme suit :

- Commencer le calcul avec  $\mathbf{n} = \mathbf{0}$ . Calculer  $\mathbf{T}_i^1, i = 1, 2, \dots, \mathbf{M} - 1$ , par les équations (2-45), tant que les températures au coté droit de l'équation sont définies par les conditions initiales.
- Mettre dans le deuxième pas  $\mathbf{n} = \mathbf{1}$  et calculer  $\mathbf{T}_i^2, = 1, 2, \dots, \mathbf{M} - 1$ , en utilisant les températures calculées dans l'étape précédente.
- Répéter la procédure pour chaque pas de temps et continuer les calculs jusqu'à un instant où une valeur de la température est atteinte.

### 2.3.3.2- Méthode implicite

Le calcul par méthode explicite discutée précédemment est simple, mais la taille maximale du pas de temps est limitée par des considérations de stabilité. Si les calculs sont effectués sur une longue période de temps, le nombre de calculs nécessaires deviendra prohibitif large. Pour pallier à cette difficulté, les schémas de différences finies qui ne sont pas restrictives de la taille des pas de temps  $\Delta t$  ont été développés. Une telle méthode est la méthode implicite. Nous considérons l'équation de diffusion unidimensionnelle suivante:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{à } 0 \leq x \leq L, \quad t > 0 \quad (2 - 47)$$

La représentation par différences finies de cette équation avec le schéma implicite est donnée par :

$$\frac{\mathbf{T}_i^{n+1} - \mathbf{T}_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{\mathbf{T}_{i-1}^{n+1} - 2\mathbf{T}_i^{n+1} + \mathbf{T}_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + O[\Delta t, (\Delta x)^2] \quad (2 - 48a)$$

qui est précise à  $O[\Delta t, (\Delta x)^2]$  et inconditionnellement stable. Il s'agit d'un système implicite, car à chaque niveau de temps des équations algébriques sont à résoudre simultanément afin de déterminer les températures nodales au prochain niveau de temps.

La figure (2-8) illustre les nœuds des différences finies associées au schéma implicite. Si le problème consiste en M nœuds de température inconnues, une solution simultanée de M équations est nécessaire à chaque pas de temps. Une telle solution exige plus de calculs que celle de schéma explicite, mais la méthode est avantageuse de façon qu'il n'y a aucune restriction sur la taille du pas de temps  $\Delta t$  pour les considérations de stabilité.

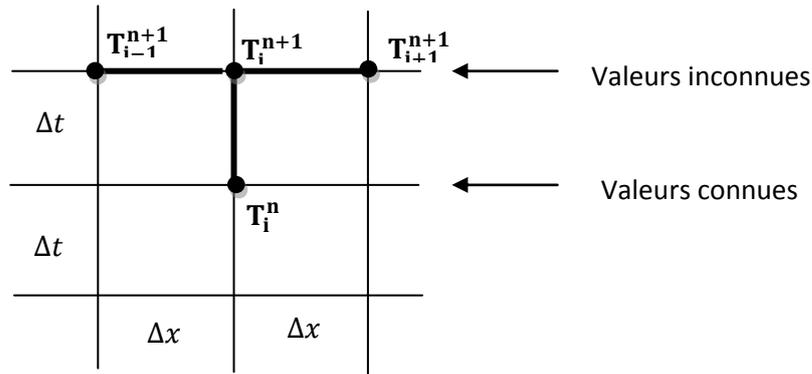


Figure (2-9) : les nœuds des différences finies du schéma implicite simple

Il est facile de vérifier que le schéma implicite (2-48) est effectivement bien défini, c'est-à-dire qu'on peut calculer les valeurs de  $T_i^{n+1}$  en fonction de  $T_i^n$ . En effet il faut inverser la matrice tri diagonale carré de taille M.

$$\begin{pmatrix} 1 + 2D & -D & & & 0 \\ -D & 1 + 2D & & -D & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & -D & 1 + 2D & -D \\ & & & -D & 1 + 2D \end{pmatrix}$$

Avec

$$D = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$$

### 2.3.3.3- Méthode combinée

Une combinaison de la méthode explicite donnée par l'équation (2-44a) et la méthode implicite donnée par l'équation (2-48) est écrite comme :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha \left[ \vartheta \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + (1 - \vartheta) \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \quad (2 - 49)$$

où la constante  $\vartheta$  ( $0 \leq \vartheta \leq 1$ ) est le facteur de pondération. C'est-à-dire l'équation (2-49) se réduit à la simple forme explicite pour  $\vartheta = 0$ , à la méthode de Crank-Nicolson pour  $\vartheta = \frac{1}{2}$  et à la forme implicite simple pour un  $\vartheta = 1$ .

L'ordre de précision des différences schémas correspondant à des différentes valeurs de  $\vartheta$  sont données par:

1.  $\vartheta = 0$ , la method explicite :  $O[\Delta t, (\Delta x)^2]$
2.  $\vartheta = 1$ , la method implicite :  $O[\Delta t, (\Delta x)^2]$
3.  $\vartheta = \frac{1}{2}$ , la method de Crank-Nicolson :  $O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$
4.  $\vartheta = \frac{1}{2} - \frac{\Delta x^2}{12\alpha\Delta t}$  :  $O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^4]$

Il est évident que les schémas de différences finies de différents degrés de précision peuvent être obtenus à partir de la méthode combinée, par le propre choix de la valeur du facteur de pondération  $\vartheta$ . La stabilité de la méthode combinée dépend de la valeur de facteur de pondération  $\vartheta$  comme suit:

$\frac{1}{2} \leq \vartheta \leq 1$  : inconditionnellement stable pour toutes les valeurs de  $r$

$0 \leq \vartheta \leq \frac{1}{2}$  : Stable seulement si  $0 \leq r \leq \frac{1}{2-4\vartheta}$

Où  $r = (\alpha\Delta t)/\Delta x^2$

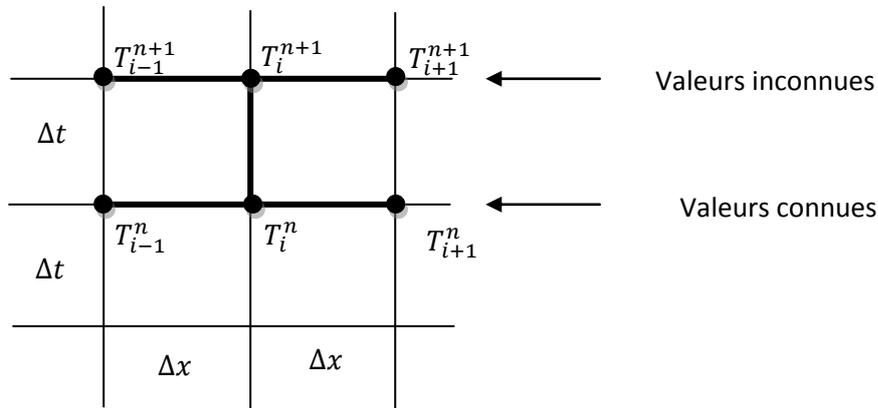


Figure (2-10) : les nœuds des différences finies du schéma combinée

Figure (2-10) montre les nœuds de différences finies de la méthode combinée. Pour résoudre l'équation (2-49), les températures inconnues  $T^{n+1}$  sont regroupées d'un côté et les températures connues  $T^n$  de l'autre côté et on obtient :

$$-r\vartheta T_{i-1}^{n+1} + (1 + 2r\vartheta)T_i^{n+1} - r\vartheta T_{i+1}^{n+1} = r(1 - \vartheta)T_{i-1}^n + [1 - 2r(1 - \vartheta)]T_i^n + r(1 - \vartheta)T_{i+1}^n \quad (2 - 50)$$

Où  $r = (\alpha\Delta t)/\Delta x^2$ .

## 2.4- Problème inverse de la conduction de la chaleur

Les échanges de chaleur interviennent dans de multiples procédés industriels. Ils interviennent directement, par exemple dans les processus d'induction, de refroidissement, d'utilisation de l'énergie solaire, d'isolation thermique, ou indirectement de façon inévitable dans les chocs thermiques, les pertes thermiques, le rayonnement, lors des déformations et sollicitations mécaniques, etc. L'ingénieur ou le technicien a donc besoin des connaissances de base pour :

- comprendre les phénomènes physiques qu'il observe,
- maîtriser le procédé et donc la qualité des produits,
- prédire certains phénomènes thermiques qui peuvent apparaître.

Afin de mieux comprendre, prédire ou expliquer ces phénomènes, l'expérimentateur a besoin de connaître les paramètres Thermo-physiques du matériau sur lequel les études vont porter. Ces propriétés sont caractérisées par des paramètres Thermo-physiques mis en jeu dans la conduction de la chaleur et dans les conditions aux limites de flux thermiques surfaciques. Les études relatives à l'identification des paramètres Thermo-physiques des matériaux par des méthodes de mesure en régime permanent et en régime instationnaire connaissent un élan considérable depuis quelques années. L'élaboration de nouveaux matériaux de hautes performances Thermo-physiques a accéléré le développement des méthodes thermiques en régimes instationnaires. Les techniques récentes utilisant des mesures sans contact telle que la thermographie, présentent beaucoup d'intérêt sur le plan de la qualité et elles sont moins destructives par rapport aux méthodes anciennes. Nous pouvons globalement distinguer deux directions de recherche dans les problèmes inverses d'identification en thermique :

- Le premier axe regroupe les travaux de recherche destinés à trouver :

- le flux de chaleur
- la température initiale
- le flux de chaleur et les coefficients convectifs

qui conduisent à un champ de températures souhaité. Les problèmes étudiés sont dits mal posés, c'est-à-dire que les seules observations expérimentales ne suffisent pas à déterminer parfaitement tous les paramètres du modèle. Il est donc nécessaire d'ajouter des contraintes ou des hypothèses qui permettent de réduire l'espace dès que possible de façon à aboutir à une solution unique.

- Le deuxième axe de recherche porte sur l'estimation des paramètres Thermo-physiques telles que la diffusivité thermique, la conductivité thermique, la chaleur spécifique, etc.

Les deux axes sont en fait liés : en général on suppose soit les conditions aux limites et initiales connues, et on cherche à identifier les paramètres Thermo-physiques, ou inversement; soit ce sont les paramètres qui sont supposés connus et on cherche à déterminer les conditions aux limites ou initiales.

### 2.4.1- Représentation d'un problème inverse de conduction de la chaleur (PICC)

Considérons le solide représenté figure (2-11) soumis à des perturbations extérieures  $Q(r,t)$ . Dans le cas d'un problème direct, le champ de la températures initiales  $T(r,0)$  est connu ainsi que les perturbations et l'on cherche à déterminer l'évolution de la température  $T(r,t)$  dans le solide. L'équation de diffusion de la chaleur est une équation aux dérivées partielles du second ordre. C'est un problème qui est bien posé lorsque la condition initiale et les conditions aux limites sur l'intégralité de la frontière du domaine sont spécifiées.

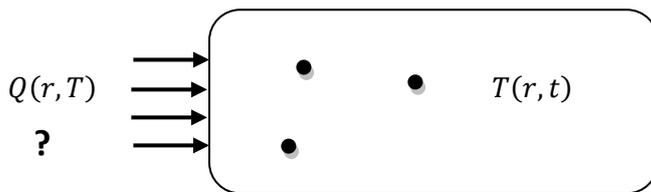


Figure (2-11) : Problème inverse de la conduction de la chaleur.

Cependant, il existe des nombreuses situations où les perturbations sont inconnues lorsque la température où le flux surfacique ne sont pas accessibles à la mesure. On peut, à l'aide d'une méthode inverse, retrouver l'évolution des perturbations. Il faut alors mesurer la température où le flux de chaleur [22] en un ou plusieurs points judicieusement choisis à l'intérieur du solide et déterminer, à partir des ces mesures, la température et le flux surfacique inconnus. C'est un problème mal posé car il ne dépend pas des données de façon continue.

La signification physique de concept d'un problème inverse de conduction de la chaleur est mieux envisagée en référant au problème inverse de conduction de la chaleur unidimensionnel instationnaire dans une plaque d'épaisseur  $L$ . La distribution de la température initiale dans la plaque est  $F(x)$ . Pour les instants  $t > 0$ , un flux de chaleur transitoire  $f(t)$  est appliqué sur la

frontière  $x=0$ , alors qu'à la frontière  $x = L$  la température est maintenue constante  $T_L$ . La formulation mathématique de ce problème est donnée par :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{à } 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (2 - 51a)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial t} = f(t) \quad \text{à } x = 0, \quad t > 0 \quad (2 - 51b)$$

$$T = T_L \quad \text{à } \quad x = L, \quad t > 0 \quad (2 - 51c)$$

$$T = F(x) \quad \text{pour } \quad t = 0 \quad \text{à } 0 < x < L, (2 - 51d)$$

Dans le cas où les conditions aux limites  $f(t)$  et  $T_L$ , les conditions initiales  $F(x)$  et propriétés Thermo-physiques  $\rho, c_p$  et  $\lambda$  sont tous spécifiées le problème donné par les équations (2 – 51) est préoccupé par la détermination de la distribution de la température  $T(x, t)$  à l'intérieur de la plaque comme fonction du temps et de la position. C'est ce qu'on appelle **le problème direct**.

Nous allons maintenant examiner un problème analogue à celui donné par les équations (2 – 51), mais la fonction de la condition à la limite de la surface de  $x = 0$  est inconnue, alors que toutes les autres quantités figurant dans les équations sont connues. Ensuite, nous souhaitons déterminer la condition à la limite inconnue ( $t$ ). Pour compenser le manque d'information sur la condition à la limite des mesures de température  $T_{mes_i} = T(x_{mes}, t_i)$  sont prises en des points de mesures  $x_{mes}$  à l'intérieur de la plaque pour les instants  $t_i (i = 1, 2, \dots, I)$  pendant un intervalle de temps  $0 < t < t_f$  où  $t_f$  est le temps final. Il s'agit ici d'un problème inverse par ce que il s'agit de l'estimation de l'état de surface inconnu  $f(t)$ .

la formulation mathématique de ce problème inverse est donnée par :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{à } 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (2 - 52a)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial t} = f(t) = ? \text{ (inconnu)} \quad \text{à } x = 0, \quad t > 0 \quad (2 - 52b)$$

$$T = T_L \quad \text{à } \quad x = L, \quad t > 0 \quad (2 - 52c)$$

$$T = F(x) \quad \text{pour } \quad t = 0 \quad \text{à } 0 < x < L, (2 - 52d)$$

Et les mesures de température au point  $x_{mes}$  à l'intérieur de la plaque dans les différents instants  $t_i$  sont données par:

$$T_{mes_i} = T(x_{mes}, t_i) \text{ à } x = x_{mes} \text{ pour } t = t_i (i = 1, 2, \dots, I) \quad (2 - 52e)$$

#### **2.4.2- Méthode de résolution du problème inverse de conduction de la chaleur**

Il ne s'agit nullement de décrire ni même de citer, toutes les méthodes qui ont été proposées pour la solution du PICC durant les trois dernières décennies. Les livres d'Alifanov [23], de Beck [24], de Hensel [25], de Murio [26], et de Kurpisz [26], sont tous consacrés au PICC. Nous contenterons de classer les diverses méthodes, avec les inconvénients que cela comportent ; l'objectif étant de situer les méthodes spécifiquement développées pour les PICC par rapport aux autres. Le premier groupe comprend les méthodes dans lesquelles le flux surfacique est supposé, a priori, varier suivant une loi particulière (exponentielle, sinusoïdale, etc...). Il ne s'agit plus d'un PICC mais d'un problème d'estimation des paramètres. La méthode des moindres carrés, sous ses diverses formes, est alors utilisée. Il reste deux grandes classes de méthodes. D'une part, les méthodes globales dans lesquelles toutes les données sont traitées simultanément pour déterminer itérativement les inconnues, et d'autre part les méthodes séquentielles dans lesquelles les grandeurs surfaciques sont déterminées une par une.

Les méthodes globales présentent l'avantage de traiter le PICC comme un problème d'estimation de paramètres quelconques (dans lequel le nombre de paramètres inconnus est très grand), ce qui permet une formulation générale. Elle repose donc sur la minimisation d'une fonctionnelle basé sur l'écart entre les grandeurs calculées et mesurées. Ce sont des méthodes itératives qui nécessitent la résolution d'un problème adjoint pour déterminer le gradient.

Les méthodes séquentielles ont été développées spécifiquement pour les PICC. Elles sont moins coûteuses en temps de calcul, plus simples à mettre en œuvre mais ne peuvent être directement utilisées pour d'autres problèmes. Parmi ces méthodes nous distinguons la méthode de spécification de fonction de J.V.Beck [29, 30], des méthodes inverses utilisant des différences finies, Raynaud [28].

Dans le cas des méthodes inverses de minimisation de critère dans lesquelles la solution du problème direct intervient, il faut noter que la solution employée pour résoudre le problème direct, méthode analytique, semi analytique, différences finies, élément de frontière ou encore élément

finis, n'a quasiment aucune influence sur la précision des résultats de l'inversion. Seul le temps de calcul et la commodité de mise en œuvre varie d'une méthode à une autre.

### 2.4.3- Difficultés dans la solution des PICC

La principale difficulté dans la solution des problèmes inverses découle du fait qu'ils sont mal posés. Les problèmes de conduction de la chaleur sont bien posés, parce que la solution existe, elle est unique et stable sous les petits changements dans les données d'entrée. Les problèmes qui ne satisfont pas à l'une de ces conditions sont appelés des problèmes mal posés.

Pour illustrer la sensibilité de la solution inverse aux petits changements dans les données d'entrée mesurées, nous considérons des champs de température unidimensionnels quasi-stationnaires dans un solide semi infini soumis périodiquement à un flux de chaleur transitoire à la surface de limite  $x = 0$ . Le problème physique est énoncé comme suit:

Un solide semi infini confiné au domaine  $0 < x < \infty$  est initialement à une température nulle, pour les instants  $t > 0$  la surface de limite  $x = 0$  est soumise périodiquement à un flux de chaleur variable donnée par la forme  $q_0 \cos(\omega t)$  où  $q_0$  est la constante de flux de chaleur et  $\omega$  est la fréquence des oscillations. Après avoir passé la phase transitoire, la distribution de la température quasi stationnaire dans le solide à tout instant, dans la position  $x$  est donnée par :

$$T(x, t) = \frac{q_0}{\lambda} \sqrt{\frac{\alpha}{\omega}} \exp\left(-x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right) \cos\left(\omega t - x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2 - 53)$$

L'amplitude maximale en une position  $x$  quelconque est obtenue par la mise de  $\cos(.) = 1$ .

$$[T(x, t)]_{\max} = \frac{q_0}{\lambda} \sqrt{\frac{\alpha}{\omega}} \exp\left(-x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right) \quad (2 - 54)$$

L'équation (2-53) montre que le maximum de la température à l'intérieur du solide s'atténue exponentiellement avec l'augmentation de la distance  $x$  de la surface et la racine carrée de la fréquence  $\omega$ . Toutefois, si la température de surface est déterminée en utilisant des températures mesurées à l'intérieur des points, les erreurs de mesure seront amplifiées exponentiellement avec la distance  $x$ , avec la racine carrée de la fréquence des oscillations  $\omega$ , donc en fonction de l'emplacement du capteur et des oscillations. La solution du problème inverse peut devenir très sensible aux erreurs de mesures dans les données d'entrée.

### 2.4.4- Problèmes mal posés

Soit  $U, Y$  deux espaces vectoriels normés et  $A$  un opérateur (linéaire ou non linéaire) qui à  $U \in U$  associe  $Y = A(U) \in Y$ . D'après Hadamard [1], le problème (d'inversion) avec  $Y \in Y$ ,

consiste à trouver  $U \in \mathbf{U}$  tel que  $A(U) = Y$ , est un problème bien posé si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- $\forall Y \in \mathbf{Y}$ , il existe une solution  $U \in \mathbf{U}$ , (*existence*)
- La solution  $U$  est unique, (*unicité*).
- La solution dépend continûment des données, (*stabilité*).

Il suffit donc que l'un des trois critères ci-dessus ne soit pas satisfait pour qu'un problème d'inversion soit mal posé et relève de la problématique inverse. En ce sens, le problème standard en calcul numérique d'inversion d'une matrice carrée  $A$  n'est pas un problème inverse si la matrice est régulière.

### 2.4.5- Quasi solution

Le critère de stabilité traduit la propriété suivante : A de faibles variations  $\|\delta Y\|$  sur les données, il correspond de faibles variations  $\|\delta U\|$  sur la solution. Soulignons que ce critère est introduit relativement aux normes des espaces  $U, Y$ . Le caractère mal posé d'un problème dépend en général du choix de ces normes. En pratique ce critère est essentiel, il conduit à redéfinir le concept de solution. Compte tenu des incertitudes inhérentes à toute mesure, tout élément  $U \in \mathbf{U}$  qui à travers l'opérateur  $A$  reproduit les données  $Y \in \mathbf{Y}$  connues à  $\varepsilon$  près, est une solution acceptable au problème d'inversion. Il n'existe peut être aucune solution au sens strict  $U = A^{-1}(Y)$ , mais le problème peut admettre plusieurs, voire une infinité de solutions acceptables à  $\varepsilon$  près, c'est-à-dire qui satisfont :

$$\|A(U) - Y\|_Y \leq \varepsilon \quad (2 - 55)$$

Les éléments  $U \in \mathbf{U}$  qui minimisent le résidu  $\|A(U) - Y\|_Y$  sont appelés quasi- solutions au sens des moindres carrés. Soulignons que la définition du résidu conduit à utiliser la norme  $\|\cdot\|_Y$  dans l'espace  $Y$ .

Les méthodes dites inverses ont pour objet de prendre en compte l'incertitude  $\varepsilon$  sur les données en vue de proposer des stratégies de choix dans l'ensemble des quasi-solutions stables. Un moyen pour y parvenir consiste à introduire des informations à priori sur les solutions, par exemple sous forme des contraintes sur leur régularité. Ces contraintes sont liées au modèle choisi et proviennent de considérations physiques. La mise en œuvre d'une méthode inverse vise donc à construire une quasi solution stable au problème d'inversion lorsque celui-ci présente les caractéristiques d'un problème mal posé.

### 2.4.6- Erreurs de mesure

Les erreurs aléatoires des mesures sont généralement la source principale des erreurs dans les estimations faites par l'analyse inverse. Une description statistique des erreurs est utile dans l'analyse des erreurs aléatoires. Huit hypothèses standard concernant la mesure de la température figurent ci-dessous.

1. Les erreurs sont additives :

$$T_{mes_i} = T_{ext_i} + \varepsilon_i$$

Où  $T_{mes_i}$  est la température mesurée,  $T_{ext_i}$  est la température exacte et  $\varepsilon_i$  est l'erreur aléatoire à l'instant  $t_i$ .

2. Les erreurs de la température,  $\varepsilon_i$  ont une moyenne de zéro, c'est-à-dire

$$E(\varepsilon_i) = 0$$

où  $E(.)$  est l'opérateur de l'espérance.

3. Les erreurs ont une variance constante c'est-à-dire

$$E \left\{ [T_{mes_i} - E(T_{mes_i})]^2 \right\} = \sigma^2 = \text{constante}$$

qui veut dire que la variance de  $T_{mes_i}$  est indépendante du temps.

4. Deux erreurs de mesures  $\varepsilon_i$  et  $\varepsilon_j$ , où  $i \neq j$  sont incorrélées si la covariance de  $\varepsilon_i$  et  $\varepsilon_j$  est nulle.

$$cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \equiv E\{[\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)][\varepsilon_j - E(\varepsilon_j)]\} = 0 \text{ pour } i \neq j$$

Les différentes erreurs  $\varepsilon_i$  et  $\varepsilon_j$  sont dites incorrélées, si l'une n'a aucune relation ou effet sur l'autre.

5. Les erreurs de mesure ont une distribution normale (Gaussienne), c'est-à-dire la fonction de la probabilité de distribution de  $\varepsilon_i$  est donnée par:

$$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\varepsilon_i^2}{2\sigma^2}\right)$$

6. Les paramètres statistiques comme  $\sigma^2$  et  $\varepsilon_i$  sont connues
7. Les instants de mesures  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ , les positions des mesures  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , les dimensions des spécimens, et toutes les propriétés thermo physique sont connues.
8. Il n'y a aucune information à priori sur la distribution de la fonction à estimer, si cette information existe, elle pourrait être utilisée pour obtenir les estimés.

### **2.4.7- Exemples d'application**

Nous citons ici brièvement les différentes situations qui peuvent donner lieu à la résolution d'un problème de conduction inverse.

La solution d'un PICC permet de déterminer les grandeurs surfaciques dans toutes les situations où il est impossible de placer un capteur sur la paroi, soit:

- parce que la surface est inaccessible, cas d'un tube (dans lequel on cherche à connaître les températures surfaciques internes) ou les raisons de sécurité interdisent de percer la paroi.
- parce que le milieu extérieur est trop agressif, cas d'une paroi soumise à un flux de haute densité (incendie, soudage laser, torche plasma, etc...) qui donne lieu à une température surfacique très élevée.
- parce que l'on s'intéresse à une interface entre deux solides en frottement, cas des freins, paliers, roulements, etc...sur lequel le capteur est immédiatement détruit.
- ou encore lorsque la présence de capteur perturbe sensiblement le phénomène que l'on désire étudier, cas de l'ébullition, de la condensation, ou de matériaux semi transparents.

L'avantage de cette approche réside dans le fait que seul l'équation de la diffusion de la chaleur dans le solide doit être résolue ce qui ne pose aucun problème surtout si l'on utilise une méthode numérique. Il n'est donc absolument pas nécessaire de modéliser et de résoudre le phénomène, parfois extrêmement complexe, qui engendre les variations de flux et températures surfaciques recherchées. L'inconvénient majeur est le caractère "mal posé" qui amplifie singulièrement les bruits des mesures.

Il convient de souligner que la précision des résultats, comme un problème direct, est largement tributaire de la bonne connaissance des propriétés thermo physiques des matériaux. Bien souvent, il sera nécessaire de caractériser ces matériaux avant de réaliser l'expérimentation. Pareillement, les positions de capteurs doivent être mesurées avec précision.

## **2.5- Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté tous les outils nécessaires à la formulation et la solution numérique du problème direct de la conduction thermique, qui représente une partie très importante dans la solution des problèmes inverses de la conduction de la chaleur. Nous avons présenté le phénomène de transfert thermique par conduction. Nous avons développé mathématiquement l'équation du transfert thermique par conduction dans les différents systèmes de coordonnées. Les différents types de conditions aux limites et conditions initiales ont été introduits. Nous avons aussi introduit la méthode des différences finies pour la solution numérique de l'équation de conduction de chaleur. La troisième partie de ce chapitre a été consacrée à la définition et la formulation d'un problème inverse de la conduction de la chaleur.

## *Chapitre III*

### *Estimation de paramètre*

## 3. Estimation de paramètre

### 3.1- Introduction

L'élaboration de nouveaux matériaux utilisés dans les technologies de hautes performances thermiques (matériaux d'isolation, thermoéléments, etc.), de matériaux composites à particules, mousse en fibres minérales ou végétales et de polymères est suivie de processus de caractérisation de leurs propriétés thermiques.

Dans ce chapitre, la forme quadratique à minimiser sera définie à partir de l'équation différentielle linéaire qui est obtenue de l'équation de conduction de la chaleur par la méthode des différences finies (MDF). La solution du problème direct s'obtient par la transformation de l'équation différentielle linéaire de conduction de la chaleur à un système d'équations algébriques.

Après la définition du phénomène et des concepts relatifs à la conduction de la chaleur dans un solide opaque, la méthode de LEVENBERG-MARQUARDT est utilisée pour l'élaboration de l'organigramme d'évaluation des paramètres Thermo-physiques  $\lambda$  et  $\rho c$  (conductivité thermique et chaleur volumique respectivement). La méthode de LEVENBERG-MARQUARDT basée sur la minimisation du critère des moindres carrés est destinée à l'application aux problèmes inverses d'estimation de paramètres non linéaires. Elle est aussi applicable aux problèmes linéaires qui sont fortement mal conditionnés. La solution d'un problème inverse par cette méthode passe par les étapes suivantes :

- le problème direct
- le problème inverse
- la procédure itérative
- le critère d'arrêt
- l'algorithme de calcul

Dans ce qui suit nous allons présenter le détail de chacune de ces étapes appliquées à la solution du problème inverse de la conduction de la chaleur pour l'estimation des propriétés thermo physiques (conductivité thermique et chaleur volumique).

### 3.2- Problème direct

#### 3.2.1- Equation de conduction de la chaleur

Considérons une plaque solide rectangulaire homogène d'épaisseur  $E$ , de largeur  $l$  et de longueur  $L$ . La distribution de température dans la plaque est évaluée en 3-D par la fonction température  $T(x, y, z, t)$ . En supposant la plaque homogène avec une faible épaisseur, on peut valablement considérer une conduction de façon unidimensionnelle où la distribution de température dans la plaque est donnée par  $T(x, t)$ .

Supposons donc que cette plaque occupe l'intervalle  $[0, L]$  de l'axe  $Ox$  et qu'à l'instant  $t = 0$ , la distribution de température soit connue en tout point  $x \in [0, L]$  et est égale à  $T_{\infty}(x)$ . Supposons en outre avoir placé à la surface limitée par  $x = 0$  un flux de chaleur transitoire  $q \delta(t)$ . La quantité  $q \delta(t)$  représente la puissance par unité de longueur fournie au point  $x = 0$  et à l'instant  $t > 0$ . La surface à  $x = L$  est supposée isolée. Les autres surfaces sont bien protégées contre tout courant convectif, radiatif et conductif. La figure (3.1) illustre la forme géométrique et les coordonnées unidimensionnelles du problème physique considéré.

Si  $\rho$ ,  $c$  et  $\lambda$  sont des constantes positives données, représentant respectivement la densité volumique, la chaleur spécifique massique et la conductivité thermique, la distribution de température de la plaque au point  $x$  et à l'instant  $t$  est donnée par l'équation aux dérivées partielles:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x \in [0, L], t \geq 0 \quad (3-1a)$$

À cette équation, on adjoint les conditions aux limites de flux :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q \delta(t), \quad x = 0 \text{ et } t \geq 0 \quad (3-1b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = L \text{ et } t \geq 0 \quad (3-1c)$$

et la condition initiale :

$$T(0, x) = T_{\infty}(x), \quad x \in [0, L] \quad (3-1d)$$

$C = \rho C$  ( $\text{J.Kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ) : chaleur volumique.

$\lambda$  ( $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ) : conductivité thermique.

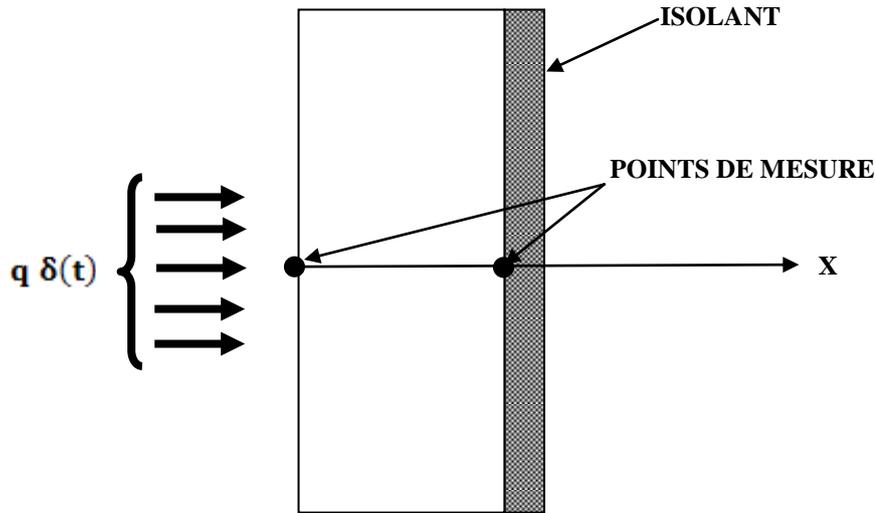


Figure (3.1): Schéma de la plaque

### 3.2.2- Formulation du problème direct

Connaissant la masse volumique  $\rho$  et les paramètres Thermo-physiques  $\lambda$  et  $C$  ainsi que les conditions aux limites et initiales données par les équations (3-1), le problème direct consiste à déterminer la fonction de la température  $T(x, t)$  dépendant des variables du temps  $t$  et de l'espace  $x$  dans la plaque.

Pour la résolution numérique du problème direct, la technique des différences finies implicite centrée est utilisée pour la discrétisation.

### 3.2.3- Résolution du problème direct par la méthode des différences finies

Pour la discrétisation du domaine  $[0, L]$ , on introduit un pas d'espace  $\Delta x = 1/(M + 1) > 0$  (avec  $M$  un entier positif) et un pas de temps  $\Delta t > 0$ , et on définit les nœuds d'un maillage régulier comme il est présenté sur la figure (3.2).

$$(t_n, x_i) = (n\Delta t, i\Delta x) \text{ pour } n \geq 0, i \in \{0, 1, \dots, M + 1\} \quad (3 - 2)$$

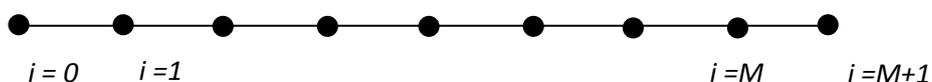


Figure (3.2): Nœuds de température dans la plaque.

On note que  $T_i^n$  est la valeur d'une solution discrète approchée au point  $(t_n, x_i)$ , et  $T(t, x)$  la solution exacte du système (3-1).

La condition initiale est discrétisée par :

$$T_i^0 = T_\infty(x_i) \quad \dots (3 - 3)$$

$$C \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cong \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - \lambda \frac{T_{i-1}^{n+1} - T_i^{n+1} - T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad \dots (3 - 4)$$

En introduisant le terme de la diffusivité thermique  $\alpha = \lambda/C$ , l'équation (3-4) devient :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - \alpha \frac{T_{i-1}^{n+1} - T_i^{n+1} - T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad \dots (3 - 5)$$

Après réarrangement et introduction du nombre de Fourier  $\Delta F = \alpha \Delta t / \Delta x^2$  on obtient :

$$-\Delta F T_{i-1}^{n+1} + (\Delta F + 1) T_i^{n+1} - \Delta F T_{i+1}^{n+1} = T_i^n \quad \dots (3 - 6)$$

Au nœud ( $i = 0$ ) :

$$-2\Delta F_0 T_1^{n+1} + (\Delta F_0 + 1) T_0^{n+1} = T_0^n + \frac{2\Delta F_0 \Delta x q \delta(\Delta t)}{\lambda} \quad \dots (3 - 7)$$

Au nœud ( $i = M+1$ ) :

$$-2\Delta F_0 T_M^{n+1} + (\Delta F_0 + 1) T_{M+1}^{n+1} = T_{M+1}^n \quad \dots (3 - 8)$$

Alors on obtient le système de  $(M+1)$  équations algébriques pour déterminer  $(M+1)$  valeurs de température aux nœuds :

$$\begin{cases} -2\Delta F_0 T_1^{n+1} + (\Delta F_0 + 1) T_0^{n+1} = T_0^n + B & i = 0 \\ -\Delta F T_{i-1}^{n+1} + (\Delta F + 1) T_i^{n+1} - \Delta F T_{i+1}^{n+1} = T_i^n & i = 1, M \\ -2\Delta F_0 T_M^{n+1} + (\Delta F_0 + 1) T_{M+1}^{n+1} = T_{M+1}^n & i = M + 1 \end{cases} \quad \dots (3 - 9a)$$

avec :

$$B = \frac{2\Delta F_0 \Delta x q \delta(\Delta t)}{\lambda}$$

Le système d'équations algébriques peut être écrit sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} D_1 & S_1 & & & & 0 \\ F_2 & D_2 & S_2 & & & \\ 0 & F_3 & D_3 & S_3 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & F_M & D_M & S_M \\ & & & & F_{M+1} & D_{M+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ T_3^{n+1} \\ \vdots \\ T_M^{n+1} \\ T_{M+1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^n + B \\ T_2^n \\ T_3^n \\ \vdots \\ T_M^n \\ T_{M+1}^n \end{pmatrix} \quad \dots (3-9b)$$

**[A]**                      **[T]**                      **[R]**

La matrice **[A]** dans l'équation (3-9) est une matrice tri diagonale. La technique utilisée pour la résolution rapide d'un système d'équations algébriques linéaires est due à THOMAS (1949) et elle est appelée algorithme de Thomas.

### 3.3- Problème inverse

#### 3.3.1- Formulation du problème inverse

Dans notre problème de conduction inverse, pour l'estimation des propriétés Thermophysiques, ces paramètres sont considérés inconnus et l'information additionnelle est obtenue à travers des mesures des températures transitoires dans les positions  $x_1$  et  $x_2$  comme il est présenté sur la figure (3-1) aux instants  $t = t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, I$ ).

$$C(?) \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda (?) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x \in [0, L], t \geq 0 \quad \dots (3-10 a)$$

$$-\lambda (?) \frac{\partial T}{\partial x} = q \delta(t), \quad x = 0 \text{ et } t \geq 0 \quad \dots (3-10 b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = L \text{ et } t \geq 0 \quad \dots (3-10 c)$$

$$T(0, x) = T_\infty(x), \quad x \in [0, L] \quad \dots (3-10 d)$$

et les mesures de température à l'intérieur de la plaque à étudier dans les positions  $x_1$  et  $x_2$ .

$$T(t_i, x_M) = Y_{iM} \quad \dots (3-10 e)$$

Pour  $x = x_M$  ( $M = 1 \text{ et } 2$ ) et  $t = t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, I$ )

Le problème présenté par le système d'équations (3-10) est un problème inverse de conduction de la chaleur dans lequel les paramètres  $\mathbf{C} = \rho\mathbf{c}$  et  $\lambda$  seront estimés. La solution de ce problème de conduction inverse est basée sur la minimisation du critère des moindres carrés :

$$J(\mathbf{P}) = \sum_{M=1}^l \sum_{i=1}^I [Y_{iM} - T_{iM}(\mathbf{P})]^2 \dots (3 - 11)$$

$J$  : somme carrée des erreurs ou la fonction objective.

$\mathbf{P}^T \equiv [\rho\mathbf{c}, \lambda]$ : Le vecteur des paramètres inconnus.

$T_{iM}(\mathbf{P}) \equiv \mathbf{T}(\mathbf{P}, \mathbf{t}_i, \mathbf{x}_M)$ : Les températures estimées à l'instant  $t_i$  et la position  $\mathbf{x}_M$ .

$Y_{iM} \equiv \mathbf{Y}(\mathbf{t}_i, \mathbf{x}_M)$  : Les mesures de la température à l'instant  $t_i$  et la position  $\mathbf{x}_M$ .

$l$ : nombre des capteurs  $l = 2$ .

$I$ : nombre total de mesures.

Les températures estimées  $T_{iM}(\mathbf{P})$  sont obtenues à travers la solution du problème direct de la conduction de la chaleur dans les positions des mesures  $\mathbf{x}_M$  et l'exposant  $\mathbf{T}$  dénote le transposé du vecteur  $\mathbf{P}$ .

### 3.3.2- Procédure itérative de la méthode de LEVENBERG-MARQUARDT

Pour minimiser le critère des moindres carrés qui sont donnés par l'équation (3-11) il faut mettre les dérivées de  $J(\mathbf{P})$  par rapport aux paramètres inconnus  $\mathbf{P}$  égales à zéro, alors :

$$\frac{\partial J(\mathbf{P})}{\partial P_1} = \frac{\partial J(\mathbf{P})}{\partial P_2} = \dots = \frac{\partial J(\mathbf{P})}{\partial P_j} = \mathbf{0} \dots (3 - 12)$$

Cette condition nécessaire pour la minimisation de  $J(\mathbf{P})$  peut être représentée sous la forme de suivante :

$$\nabla J(\mathbf{P}) = 2 \left[ -\frac{\partial \mathbf{T}^T(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} \right] [\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P})] = \mathbf{0} \dots (3 - 13)$$

où

$$\frac{\partial \mathbf{T}^T(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial(\mathbf{C})} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \end{bmatrix} [\bar{\mathbf{T}}_1, \bar{\mathbf{T}}_2, \dots, \bar{\mathbf{T}}_I] \dots (3 - 14)$$

et

$$\bar{\mathbf{T}}_i = [\mathbf{T}_{i1}, \mathbf{T}_{i2}] \text{ pour } i = 1, 2, \dots, I$$

La matrice de sensibilité  $X(\mathbf{P})$  est définie comme le transposé de l'équation (3-14)

$$\mathbf{X}(\mathbf{P}) = \left[ \frac{\partial \mathbf{T}^T(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}_1^T}{\partial(\mathbf{C})} & \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}_1^T}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}_2^T}{\partial(\mathbf{C})} & \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}_2^T}{\partial \lambda} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}_I^T}{\partial(\mathbf{C})} & \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}_I^T}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \dots (3 - 15)$$

où

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{T}}_i^T}{\partial(\mathbf{C})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{T}_{ix_1}^T}{\partial(\mathbf{C})} \\ \frac{\partial \mathbf{T}_{ix_2}^T}{\partial(\mathbf{C})} \end{bmatrix}$$

et

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{T}}_i^T}{\partial \lambda} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{T}_{ix_1}^T}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \mathbf{T}_{ix_2}^T}{\partial \lambda} \end{bmatrix}$$

pour  $i = 1, 2, \dots, I$

Les éléments de la matrice de sensibilité donnée par l'équation (3-14) peuvent être écrits sous la forme:

$$\mathbf{X}_{KJ} = \frac{\partial \mathbf{T}_K}{\partial \mathbf{P}_J} \dots (3 - 16)$$

où les indices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{J}$  représente le nombre de lignes et de colonnes respectivement, le nombre de lignes  $\mathbf{K}$  est lié à l'instant de mesure  $\mathbf{t}_i$  et le nombre de capteurs  $\mathbf{m}$  (entre 1 et 2) par l'expression :

$$\mathbf{K} = (\mathbf{i} - 1)\mathbf{M} + \mathbf{m} \quad \dots (3 - 17)$$

Par l'utilisation de la matrice de sensibilité donnée par l'équation (3-13) on obtient :

$$-2\mathbf{X}^T(\mathbf{P})[\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P})] = \mathbf{0} \dots (3 - 18)$$

Pour les problèmes de la conduction inverse linéaire, la matrice de sensibilité n'est pas fonction des paramètres inconnus  $\mathbf{P}$ . Dans ce cas l'équation (3-17) peut être résolue explicitement par l'expression suivante :

$$\mathbf{P} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y} \dots (3 - 19)$$

Dans le cas des problèmes inverses non linéaires la matrice de sensibilité a une indépendance fonctionnelle du vecteur des paramètres inconnus  $\mathbf{P}$ , alors la solution de l'équation (3-17) nécessite une procédure itérative appelée l'algorithme de LEVENBERG- MARQUARDT pour l'estimation des paramètres et elle est donnée par l'expression suivante :

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k + [(\mathbf{X}^k)^T\mathbf{X}^k + \mu^k\mathbf{\Omega}^k]^{-1}(\mathbf{X}^k)^T[\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P}^k)] \dots (3 - 20)$$

où :

$\mathbf{T}(\mathbf{P}^k)$  : La température estimée à l'itération  $k$

$\mathbf{P}^k$  : Le vecteur des paramètres estimés à l'itération  $k$

$\mathbf{X}^k$  : La matrice de sensibilité évaluée à l'itération  $k$

$\mu^k$  : Le coefficient d'amortissement

$\mathbf{\Omega}$  : la matrice d'identité.

### 3.3.3- Critère d'arrêt

En pratique, le processus numérique d'optimisation ne peut pas être de pas infinis. Lors de la réalisation de l'algorithme il faut ajouter une condition d'arrêt de calcul.

Pour arrêter la procédure itérative de calcul, on utilise des critères basant sur l'évaluation de la précision des solutions, cependant il est difficile d'évaluer la précision réelle obtenue puisque les constantes caractérisant la convergence sont habituellement inconnues. C'est pourquoi, on estime la précision en utilisant des indices indirects.

En pratique, on utilise les critères d'arrêts suivants :

$$1) \quad J(\mathbf{P}^{k+1}) < \varepsilon_1 \quad \dots (3 - 21a)$$

$$2) \quad \left\| \left[ (\mathbf{X}^k)^T [\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P}^k)] \right] \right\| < \varepsilon_2 \quad \dots (3 - 21b)$$

$$3) \quad \left\| \mathbf{P}^{k+1} - \mathbf{P}^k \right\| < \varepsilon_3 \quad \dots (3 - 21c)$$

Avec  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  sont des petites valeurs.

### 3.4- Etude de sensibilité et optimisation de l'expérience

Il s'agit principalement dans cette étude de faire la synthèse des différents concepts qui ont été présentés jusqu'à présent afin de dégager les grands principes qui permettront de concevoir une estimation "optimale", c'est-à-dire de concevoir une expérience qui permettra de déterminer avec la plus grande précision possible, les paramètres inconnus.

Il est bien évident que nous fixons à priori les paramètres que l'on recherche, afin de créer, par la solution du problème direct, un jeu de données "fictif" qui servira à l'inversion. La comparaison des paramètres identifiés à ceux introduits dans le modèle direct permettra de valider globalement la démarche. Par ailleurs pour les problèmes non linéaires cette simulation est fiable à condition de choisir à priori des valeurs réalistes des paramètres inconnus, autrement les conditions de simulation peuvent être trop éloignées de la réalité. La détermination des conditions optimales d'une expérience est un problème difficile car ces conditions peuvent porter aussi bien sur la conception du dispositif expérimental (influence de la géométrie, du matériau, etc.) que sur le protocole d'essai (influence des excitations, durée des mesures, etc.). Dans tous les cas et quelque

soit la méthode inverse utilisée la qualité des résultats de l'estimation dépend de la sensibilité des mesures aux variations des paramètres. Il faut donc définir un critère de sensibilité et choisir parmi les paramètres ajustables et les entrées contrôlables du système, celle susceptibles de maximiser ce critère.

### 3.4.1- Coefficients de sensibilité

#### Etude de sensibilité :

Soit  $\mathbf{T}(\mathbf{t}_i, \mathbf{x}_M)$  la température calculée par la résolution du système d'équations (3-1) du problème direct. Le coefficient de sensibilité  $X_{ij}$  de la température  $\mathbf{T}(\mathbf{t}_i, \mathbf{x}_M)$  par rapport aux paramètres  $P_j$  est :

$$X_{ij} = \frac{\partial T(\mathbf{t}_i, \mathbf{x}_M)}{\partial P_j} \dots (3 - 22)$$

#### Signification physique :

Le coefficient de sensibilité  $X_{ij}$  indique quantitativement la variation de la température  $T$  au point  $\mathbf{x}_M$  et à l'instant  $\mathbf{t}_i$  lorsque le paramètre  $P_j$  varie, l'estimation sera d'autant plus facile et précise que le coefficient de sensibilité est grand. Lorsqu'il est connu le coefficient de sensibilité permet de calculer la variation  $\Delta \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  de la température (souvent mesurée) engendrée par une variation  $\Delta P_j$  du paramètre (tous les autres étant inchangés).

$$\Delta \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{t}_i, \mathbf{P}) = \mathbf{X}_{ij} \Delta P_j \dots (3 - 23)$$

Si pour une expérience donnée, le coefficient de sensibilité d'un paramètre  $P_j$  est petit du début à la fin de l'expérience et à n'importe quel point du domaine, cela indique que ce paramètre influe très peu sur la température  $\mathbf{T}(\mathbf{t}_i, \mathbf{x}_M)$ . En terme d'estimation de paramètres, cela montre que seul un changement énorme de ce paramètre induira un changement significatif de la température, ce qui revient à dire que l'information contenue dans les mesures sur ce paramètre est très pauvre. Ainsi il sera très difficile d'estimer ce paramètre.

Si  $\mathbf{X}_{ij}$  est toujours égal à zéro, alors l'estimation sera impossible. Pour la détermination de  $P_j$  avec une précision  $\Delta P_j$ , et si la variation du modèle donnée par l'équation (3-23) est noyée dans le bruit de mesure, alors on peut dire qu'il sera aussi très difficile d'estimer ce paramètre.

Lorsqu' il y a plusieurs paramètres à estimer les comparaisons sont délicates puisque les coefficients de sensibilité peuvent avoir des unités différentes, il est donc plus intéressant d'étudier les coefficients de sensibilité réduite.

$$\bar{X}_{ij} = P_j \frac{\partial T(t_i, x_M)}{\partial P_j} = P_j X_{ij} \quad \dots (3 - 24)$$

dont les unités sont identiques à celle de la température. Il indique la variation absolue de la température par rapport la variation relative du paramètre.

### 3.4.2- Approximation numérique des coefficients de sensibilité par différence finie

Lorsque le système de sensibilité est difficile à résoudre la méthode la plus simple consiste alors à déterminer les coefficients de sensibilité avec les approximations usuelles utilisées pour le calcul des dérivées premières avec bien sûr une précision suffisante.

La dérivée première apparue dans l'équation (3-22) du coefficient de sensibilité peut être calculée par la méthode de différences finies.

Par l'utilisation de la méthode progressive de différences finies le coefficient de sensibilité par rapport le paramètre  $P_j$  est approximé par :

$$X_{ij} = \frac{T(t_i, x_M, P_j + \epsilon P_j) - T(t_i, x_M, P_j)}{\epsilon P_j} \quad \dots (3 - 25)$$

où  $\epsilon \approx 10^{-5}$  .

Et par la méthode centrée de différences finies on obtient :

$$X_{ij} = \frac{T(t_i, x_M, P_j + \epsilon P_j) - T(t_i, x_M, P_j - \epsilon P_j)}{2\epsilon P_j} \quad \dots (3 - 26)$$

### 3.4.3- Matrice de sensibilité

Lorsque l'on dispose de  $n$  mesures et qu'on désire estimer  $P$  paramètres, la matrice de sensibilité  $X$  de dimension  $n \times P$  est une matrice dont la  $j^{\text{ème}}$  colonne correspond au coefficient de sensibilité du  $j^{\text{ème}}$  paramètre et dont la  $i^{\text{ème}}$  ligne correspond à la  $i^{\text{ème}}$  mesure.

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} & \dots & \dots & X_{P1} \\ X_{12} & X_{22} & \dots & \dots & X_{P2} \\ X_{13} & X_{23} & \dots & \dots & X_{P3} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ X_{1n} & X_{2n} & \dots & \dots & X_{Pn} \end{bmatrix} \quad \dots (3 - 27)$$

### 3.4.4- Identifiabilité et conception optimale de l'expérience

Pour déterminer la faisabilité de l'inversion on peut utiliser le critère suivant:

Si  $\bar{X}_{ij} = 0$  dans tout le domaine alors l'estimation du paramètre est impossible.

Si  $\bar{X}_{ij} \leq 0,01 |T(t_i, x_M)|$  dans le domaine alors l'estimation du paramètre  $P_j$  est très délicate.

Si les coefficients de sensibilité de deux paramètres  $P_k$  et  $P_j$  sont linéairement dépendants  $\bar{X}_{ij} = c\bar{X}_{ik}$ , alors un changement de  $P_k$  ou  $P_j$  provoque le même effet sur la température  $T(t_i, x_M)$ . Il est par conséquent impossible de déterminer uniquement et simultanément les deux paramètres. Il faut alors faire un changement au niveau de l'expérience par le déplacement du capteur, par exemple, qui est le but de la conception optimale de l'expérience. L'analyse des coefficients de sensibilité fournit une autre information qui permet d'une part, de simplifier la technique d'inversion, et d'autre part de limiter le temps de calcul. En effet, il existe de nombreuses situations où les différentes mesures sont sensibles uniquement à un nombre limité de paramètres. Il est alors possible de n'utiliser que ces mesures pour estimer, dans un premier temps, ces paramètres uniquement et d'utiliser ensuite les mesures restantes pour identifier les autres paramètres. Cette procédure permet de diminuer la dimension de la matrice de sensibilité et par conséquent le temps de calcul.

### 3.5- Algorithme de la méthode de LEVENBERG-MARQUARDT

Différentes versions de la méthode de **Levenberg-Marquardt** peuvent être trouvées dans la littérature, selon le choix de la matrice diagonal  $\Omega$  et le paramètre d'amortissement  $\mu$  utilisés dans l'équation (3-19). L'algorithme utilisé dans notre cas pour l'estimation des paramètres est représenté dans les étapes suivantes:

On suppose connues les mesures de la température  $Y_{iM} \equiv Y(t_i, x_M)$  dans les deux points de mesure et aux instants  $t = t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, I$ ). Aussi on suppose une valeur initiale connue  $P^0$  pour le vecteur des paramètres inconnus  $P$ , on prend  $\mu = 0.001$  et on met  $k = 0$  puis on suit les étapes suivantes:

**Etape 01:** Résolution du problème direct de la conduction de la chaleur donné par le système d'équations (3-1). Estimer le vecteur de paramètre  $P^k$  pour obtenir le vecteur des températures  $T_{iM}(P^k)$ .

**Etape 02 :** Calcul de  $J(P^k)$  à partir de l'équation (3-11).

**Etape 03 :** Calcul de la matrice de sensibilité  $X(P^k)$  définie par l'équation (3-15) par l'utilisation des valeurs du vecteur  $P^k$ .

**Etape 04 :** Résolution du système d'équations algébriques linéaires obtenu à partir de la procédure itérative de la méthode de **Levenberg-Marquardt** donné par :

$$[(X^k)^T X^k + \mu^k \Omega^k] \Delta P^k = (X^k)^T [Y - T(P^k)]$$

afin de calculer :

$$\Delta P^k = P^{k+1} - P^k$$

**Etape 05:** Calcul de la nouvelle valeur du vecteur  $P^{k+1}$  par

$$P^{k+1} = P^k + \Delta P^k$$

**Etape 06:** Résolution du problème direct (3-1) par l'utilisation du nouvel vecteur de paramètre estimé  $P^{k+1}$  pour obtenir le vecteur des températures  $T_{iM}(P^{k+1})$ . Puis le calcul de  $J(P^{k+1})$ .

**Etape 07:** Vérification des critères d'arrêt donnés par les équations (3-21 a-c). Si l'un de ces critères est satisfait on arrête, si non on remplace  $k$  par  $k + 1$  et on recommence par l'étape 03.

### 3.6- Résultats et Discussion

Dans ce chapitre nous avons développé un algorithme de calcul pour estimer deux paramètres simultanément qui sont la capacité calorifique  $C = \rho c_p$  et la conductivité thermique  $\lambda$  par la méthode de Levenberg-Marquardt à l'aide des mesures de la température en deux points par deux capteurs. Ces mesures simulées sont artificiellement obtenues par la solution du problème direct dans les points choisis des capteurs par l'utilisation des valeurs prédéfinies de ces paramètres. Avant de procéder à la discussion des résultats obtenus il faut d'abord faire une étude de sensibilité pour voir la faisabilité de notre méthode d'estimation.

#### *Etude de sensibilité :*

Les figures (3-3) et (3- 4) représentent les variations des coefficients de sensibilité qui mesurent la sensibilité de la température par rapport à la variation des paramètres à estimer (capacité calorifique et la conductivité thermique) donnés par l'équation (3-21) dans les positions des capteurs (à  $x=0$  et  $x=1$ ). Dans cette opération le problème direct est résolu avec les paramètres:  $C = \rho c_p = 1$  et  $\lambda = 1$ , la fonction de flux de chaleur est représentée sur la figure (3-5) et les coefficients de sensibilité sont calculés par la formule (3-25). Les deux figures des coefficients de sensibilité montrent que les valeurs absolues des coefficients sont supérieures à 0,01 , ce qui donne un bon signe sur la faisabilité et la facilité de l'estimation.

Egalement, d'après la figure (3-3) on note que les coefficients de sensibilité de la capacité volumique et les coefficients de sensibilité de la conductivité thermique sont linéairement dépendants dans l'intervalle de temps entre 0 et 0,35s ; ce qui veut dire que l'estimation de ces paramètres simultanément est impossible. Par contre, dans le reste de l'intervalle de temps il est clair que les coefficients de sensibilité sont linéairement indépendants, ce que veut dire que l'estimation est possible et faisable. Sur la figure (3-4) les coefficients de sensibilité sont linéairement indépendants dans tout l'intervalle de temps alors on peut dire que l'estimation est possible par l'utilisation des mesures pris au point  $x=0$ .

Ainsi, d'une manière générale, et d'après cette étude de sensibilité il ressort que l'utilisation des mesures de température simulées dans les deux points de mesure (à  $x=0$  et  $x=1$ ) dans l'intervalle de temps entre  $t=0$  et  $t= 1s$  nous permettent de faire l'estimation simultanée de la capacité volumique et de la conductivité thermique.

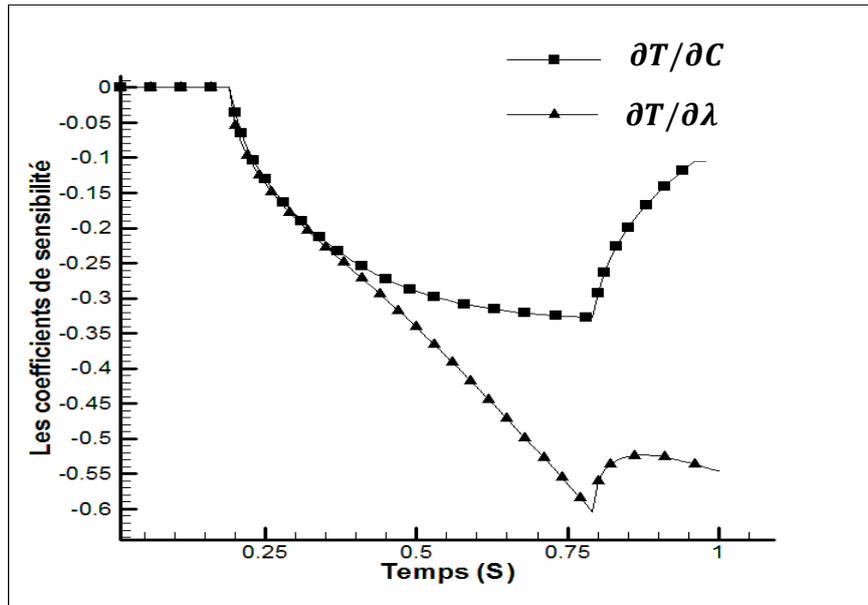


Figure (3-3) : Variation en fonction du temps, des coefficients de sensibilité à  $x = 0$

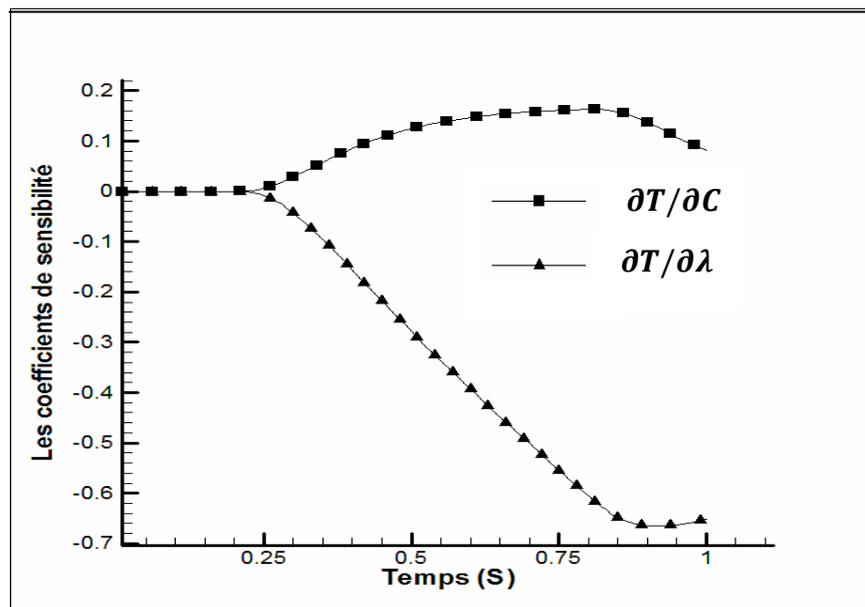


Figure (3-4) : Variation en fonction du temps, des coefficients de sensibilité à  $x = 1$

**Simulation du champ de température :**

Pour démontrer la validité et l'exactitude de la méthode inverse considérée, nous choisissons des valeurs numériques réalistes des paramètres Thermo-physiques pour une simulation numérique du champ de températures. Le champ de températures est obtenu par la résolution du système (3-1) et il est exact et est représenté sur la figure (3-6). Pour se mettre dans les conditions expérimentales un ajout de bruit aléatoire de type random  $\sigma\omega$  est introduit dans le champ de la température exact de la manière suivante:

$$Y_{mes} = T_{ex} + \sigma\omega \quad \dots (3 - 28)$$

$Y_{mes}$ : mesures simulées contenant des erreurs aléatoires.

$T_{ex}$ : mesures exactes simulées

$\sigma$ : écart type des erreurs des mesures.

$\omega$ : variables aléatoires ( $-2.576 < \omega < 2.576$ ).

Le champ de températures obtenu est représenté sur la figure (3-7).

Le tableau (3-1) représente les résultats obtenus pour l'estimation de la capacité calorifique et la conductivité thermique de différents matériaux. Deux types de mesure sont utilisés dans cette analyse, la première avec  $\sigma = 0$  (mesures exactes) et l'autre avec  $\sigma = 0.01 T_{max}$  où  $T_{max}$  est la température maximale mesurée.

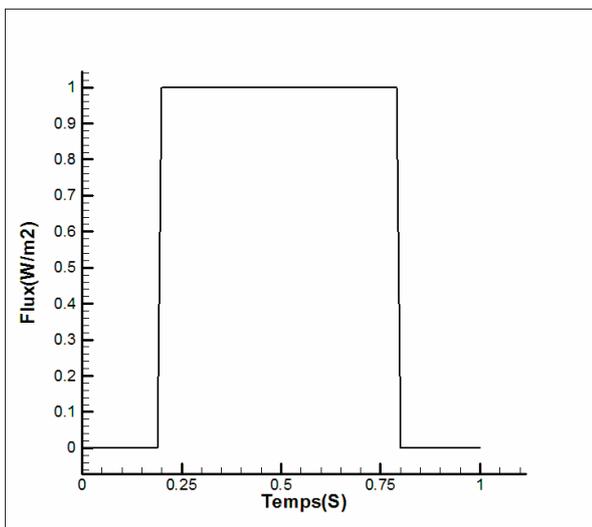


Figure (3-5) : Profil du flux de chaleur

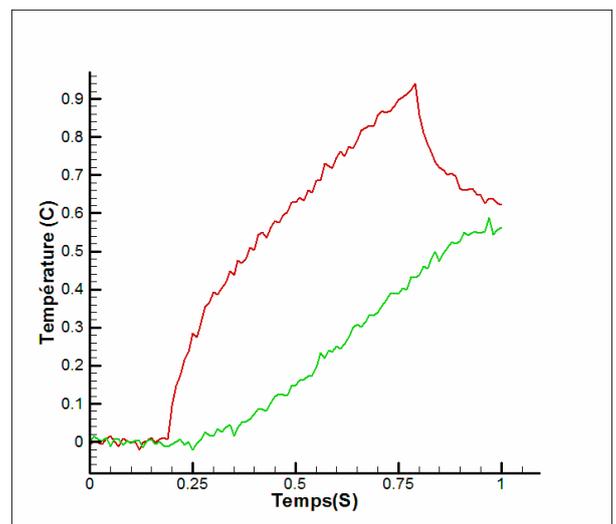


Figure (3-6) : Profil des températures simulées avec bruitage

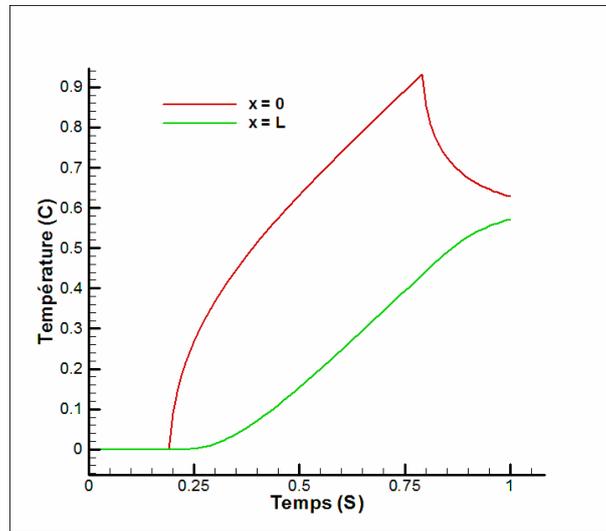


Figure (3-7) : Profil des températures simulées sans bruitage (exacte)

Les résultats obtenus dans le tableau (3.1) montrent que les valeurs exactes des paramètres Thermo-physiques des différents matériaux utilisés sont estimées par la méthode de Levenberg-Marquardt quand les mesures exactes sont utilisées. Par contre dans le cas où les mesures utilisées dans l'analyse inverse contiennent des erreurs de mesure de l'ordre de  $0.01 T_{\max}$ , les valeurs identifiées deviennent les valeurs exactes par des erreurs près, entre 0.09% et 3.76%. Ceci peut confirmer que la méthode de Levenberg Marquardt pour l'estimation de paramètres Thermo-physiques donne les meilleurs résultats dans l'estimation des paramètres. Cette conclusion n'est pas générale et ne devrait pas être accordée directement à d'autres problèmes d'estimation de paramètres. Les résultats peuvent dépendre de la nature physique du problème, du nombre de paramètres à estimer, des valeurs initiales, etc...

Paramètres	Valeurs exactes	Valeurs initiales	$\sigma$	Valeurs estimées	Erreur(%)
$\lambda$ (W/m <sup>°c</sup> )	1	0.01	0	1	0
			0.01	0.9952	0.48
$\rho c$ (J/m <sup>3</sup> ·°C)	1	0.01	0	1	0
			0.01	0.9990	0.1
<b>Acier</b>					
$\lambda$ (W/m <sup>°c</sup> )	64	0.01	0	64	0
			0.01	63.527	0.73
$\rho c$ (J/m <sup>3</sup> ·°C)	3398220	0.01	0	3398220	0
			0.01	3394298.655	-0.11
<b>Aluminium</b>					
$\lambda$ (W/m <sup>°c</sup> )	237	0.01	0	237	0
			0.01	229.420	3.19
$\rho c$ (J/m <sup>3</sup> ·°C)	2449835	0.01	0	2449835	0
			0.01	2447620	0.090
<b>Cuivre</b>					
$\lambda$ (W/m <sup>°c</sup> )	398	0.01	0	398	0
			0.01	383.016	3.76
$\rho c$ (J/m <sup>3</sup> ·°C)	3438336	0.01	0	3438336	0
			0.01	3435251.860	0.89

Tableau (3-1) : Valeurs identifiées des paramètres Thermo-physiques par la méthode de Levenberg-Marquardt pour l'estimation des paramètres.

### 3.7- Conclusion

Dans ce chapitre la MDF a été utilisée pour transformer le système d'équations aux dérivées partielles de conduction thermique en un système d'équations algébriques tri diagonales. Puis la technique THOMAS a été utilisée pour la résolution des systèmes d'équations tri diagonales. Aussi la MDF est utilisée pour calculer les coefficients de sensibilités en deux points de mesure. Il ressort de l'analyse de sensibilité qu'on peut identifier simultanément les deux paramètres Thermo-physiques par l'utilisation des mesures simulées obtenues par la résolution du problème direct soit avec des erreurs de mesure ou bien avec les mesures exactes aux deux points de mesure. Un programme Fortran 90 de l'algorithme de la Méthode de Levenberg-Marquardt est utilisée pour estimer les deux paramètres Thermo-physiques et les résultats obtenus montrent qu'avec l'utilisation des mesures exactes les paramètres identifiés sont exacts, par contre avec l'utilisation des mesures bruitées les paramètres identifiés deviennent relativement des paramètres exacts.

## *Chapitre IV*

### *Estimation de fonction*

## 4. Estimation de fonction

### 4.1- Introduction

L'objectif de ce chapitre est la résolution du problème de conduction inverse qui consiste en l'estimation de fonction inconnue « flux de chaleur » en utilisant une méthode d'optimisation non linéaire appelée méthode du gradient conjugué avec problème adjoint. Cette approche se base d'une part sur l'introduction de la distance (critère des moindres carrés) entre la réponse mesurée d'un système et celle calculée en résolvant le modèle (problème direct) gouverné par l'équation de la chaleur, et d'autre part sur la fonction à estimer en dimension finie. Les difficultés viennent du fait que ces problèmes inverses sont des problèmes mal posés. La solution est très sensible aux erreurs et risque de ne pas être unique [9]. Cette nature des problèmes se manifeste dans l'instabilité des solutions obtenues. Pour stabiliser des solutions, il faut utiliser des méthodes de régularisation.

Dans ce chapitre il sera utilisé la méthode de régularisation itérative d'*Alifanov* connue aussi sous le nom de la méthode de gradient conjugué avec problème adjoint [23]. Ce problème inverse de conduction est résolu comme un problème d'optimisation dans lequel les multiplicateurs de Lagrange sont introduits comme des contraintes d'optimisation et le carré du fonctionnel résiduel est minimisé par la méthode du gradient conjugué.

La démarche de cette étude consiste à considérer une plaque métallique mince chauffée par un flux de chaleur transitoire  $Q(t)$  inconnu, localisé dans l'une de ses extrémités. Des mesures de température sont prises à l'intérieur de la plaque pour des différentes distances par rapport les flux de chaleur. Ces mesures sont obtenues artificiellement par la résolution du problème direct et avec l'ajout d'une erreur transitoire. Ces mesures sont alors introduites dans un programme Fortran 90 de l'algorithme de la méthode de gradient conjugué avec problème adjoint pour estimer le flux de chaleur  $Q(t)$ .

Les étapes de base de la technique de gradient conjugué pour les problèmes inverses d'estimation de fonction inconnue sont :

- le problème direct
- le problème inverse
- le problème de sensibilité
- le problème adjoint
- l'équation du gradient
- la procédure itérative
- le critère d'arrêt
- l'algorithme de calcul.

Dans ce qui suit, nous allons présenter avec plus de détail chaque étape.

## 4.2- Problème direct

### 4.2.1- Equation de la chaleur

Considérons une plaque solide mince d'épaisseur  $L$ . La distribution de température dans la plaque est évaluée en 3-D par la fonction température  $T(x, y, z, t)$ . En supposant la plaque homogène avec une faible épaisseur, on peut valablement considérer une conduction de façon unidimensionnelle où la distribution de température dans la plaque est donnée par  $T(x, t)$ .

Supposons donc que cette plaque occupe l'intervalle  $[0, L]$  de l'axe  $Ox$  et qu'à l'instant  $t = 0$ , la distribution de température soit connue en tout point  $x \in [0, L]$  et égale à  $T_\infty(x)$ . Supposons en outre avoir placé à la surface limitée par  $x = 0$  un flux de chaleur transitoire inconnu  $Q(t)$  qui représente la puissance par unité de longueur fournie au point  $x = 0$  et à l'instant  $t > 0$ . La surface à  $x = L$  est supposée exposée à un transfert convectif par un coefficient de transfert convectif  $h$ . Les autres surfaces sont bien protégées contre tout courant convectif, radiatif et conductif. La figure (4.1) illustre la forme géométrique et les coordonnées unidimensionnelles du problème physique considéré.

Si  $\rho$ ,  $c$  et  $\lambda$  sont des constantes positives données, représentant respectivement la densité volumique, la chaleur spécifique massique et la conductivité thermique, la distribution de température de la plaque au point  $x$  et à l'instant  $t$  est donnée par l'équation aux dérivées partielles suivante:

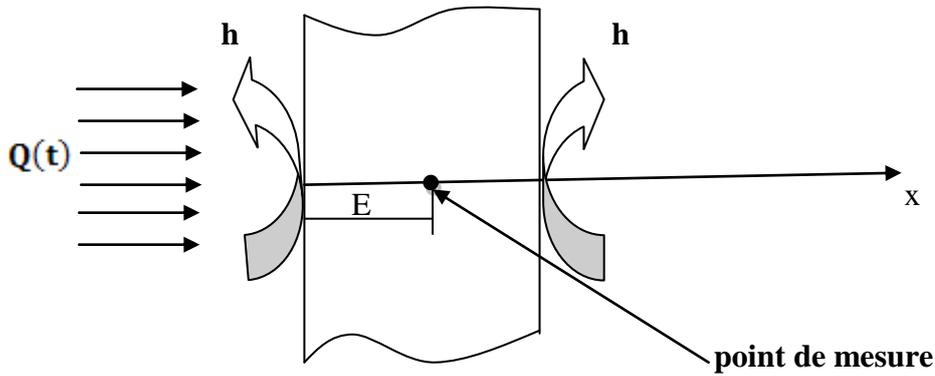


Figure (4-1): Schéma du problème inverse.

Equation de la chaleur :

$$\rho c_p \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{à } 0 \leq x \leq L \text{ et } 0 \leq t \leq t_f \quad (4-1a)$$

Conditions aux limites :

$$-\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = Q(t) - h(T - T_\infty) \quad \text{pour } x = 0 \text{ et } 0 \leq t \leq t_f \quad (4-1b)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = h(T - T_\infty) \quad \text{pour } x = L \text{ et } 0 \leq t \leq t_f \quad (4-1c)$$

Condition initiale :

$$T(x, 0) = T_\infty \quad \text{pour } t = 0 \text{ et } 0 \leq x \leq L \quad (4-1d)$$

Soit  $\theta(x, t)$  la température réduite telle que :  $\theta(x, t) = T(x, t) - T_\infty$ . De plus, en introduisant la diffusivité thermique  $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ , le système d'équations du problème direct de la conduction thermique devient:

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{pour } 0 \leq x \leq L \text{ et } 0 \leq t \leq t_f \quad (4-2a)$$

$$-\lambda \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} = Q(t) - h \theta(0, t) \quad \text{pour } x = 0 \text{ et } 0 \leq t \leq t_f \quad (4-2b)$$

$$-\lambda \frac{\partial \theta(L, t)}{\partial x} = h \theta(L, t) \quad \text{pour } x = L \text{ et } 0 \leq t \leq t_f \quad (4-2c)$$

$$\theta(x, 0) = 0 \quad \text{pour } t = 0 \text{ et } 0 \leq x \leq L \quad (4-2d)$$

Comme au chapitre précédent, pour l'estimation de paramètres, la méthode des différences finies (MDF) est utilisée pour la résolution numérique du problème direct par la transformation du système d'équations différentielles en un système d'équations algébriques tri diagonale qui peut être ensuite résolu par l'algorithme de Thomas.

### 4.3- Formulation du problème inverse

La formulation mathématique d'un problème inverse de traitement des données expérimentales est basée sur deux éléments principaux : un problème direct dans lequel une fonction inconnue est indiquée et un schéma de mesure (c'est-à-dire le type des capteurs de mesure, de leurs emplacements). La plupart des méthodes de résolution des problèmes inverses sont basées sur la comparaison des réponses du système analysé (mesurées par des capteurs), et la réponse est calculée en résolvant le problème direct selon le schéma de mesure.

On considère maintenant le problème régi par le système d'équations (4-4), le flux de chaleur  $Q(t)$  à la surface limite  $x = 0$  étant inconnu, alors que toutes les autres quantités figurant dans le système d'équations sont connues. Nous tenons donc à déterminer la condition limite inconnue  $Q(t)$ . Pour compenser le manque d'information sur la condition limite, des températures mesurées  $f(t) = T(x_{mes}, t)$  sont données en un point intérieur  $x_{mes}$  sur un intervalle de temps spécifié  $0 < t \leq t_f$  où  $t_f$  est le temps final. Ceci est un problème inverse car il est préoccupé par l'estimation de la fonction inconnue du flux de chaleur  $Q(t)$ .

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq L \text{ et } 0 \leq t \leq t_f \quad (4 - 3a)$$

$$-\lambda \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} = Q(t) - h \theta(0, t) \quad \text{pour} \quad x = 0 \text{ et } 0 \leq t \leq t_f \quad (4 - 3b)$$

$$\lambda \frac{\partial \theta(L, t)}{\partial x} = h \theta(L, t) \quad \text{pour} \quad x = L \text{ et } 0 \leq t \leq t_f \quad (4 - 3c)$$

$$\theta(x, 0) = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0 \text{ et } 0 \leq x \leq L \quad (4 - 3d)$$

$$f(t) = T(x_{mes}, t) \quad (4 - 3e)$$

Afin de résoudre ce problème d'estimation de fonction, le fonctionnel  $J(Q(t))$  défini par la formule (4-4) est minimisé sous des contraintes spécifiées par le système d'équation du problème direct.

$$J(Q(t))_{Q \in \zeta_2} = \sum_{n=1}^N \int_0^{t_f} [\theta(x_n, t; Q) - f(t)]^2 dt \quad (4 - 4)$$

où  $N$  : est le nombre de points de mesure.

#### 4.4- Problème de sensibilité

Pour dériver le problème de sensibilité on suppose que quand la fonction de flux de chaleur  $Q(t)$  subit une augmentation de  $\Delta Q(t)$  la température  $\theta(x, t)$  subit aussi un changement de  $\Delta\theta(x, t)$ . Par conséquent nous remplaçons  $\theta(x, t)$  par  $[\theta(x, t) + \Delta\theta(x, t)]$  et  $Q(t)$  par  $[Q(t) + \Delta Q(t)]$  dans le problème direct (4-2) puis nous soustrayons le problème original (4-2), nous obtenons alors le problème de sensibilité suivant :

$$\frac{\partial \Delta\theta(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \Delta\theta(x, t)}{\partial x^2} \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < t_f \quad (4-5a)$$

$$-\lambda \frac{\partial \Delta\theta(0, t)}{\partial x} + h\Delta\theta(0, t) = \Delta Q(t) \quad , \quad 0 < t < t_f \quad (4-5b)$$

$$\lambda \frac{\partial \Delta\theta(L, t)}{\partial x} - h\Delta\theta(L, t) = 0 \quad , \quad 0 < t < t_f \quad (4-5c)$$

$$\Delta\theta(x, 0) = 0 \quad , \quad t = 0 \quad (4-5d)$$

La variation de la fonction du flux de chaleur  $\Delta Q(t)$  est une fonction générale dans l'espace d'Hilbert  $\zeta_2[0, t_f]$ . Comme la fonction est elle-même inconnue, son choix sera décrit dans le reste de l'analyse.

#### 4.5- Problème adjoint

##### 4.5.1- Variation du fonctionnel du problème inverse

On suppose que la fonction inconnue  $Q(t)$  est un élément de l'espace d'Hilbert  $\zeta_2[0, t_f]$ . Les réponses du système qui sont calculées ou mesurées représentent un vecteur des fonctions avec  $N$  composantes. Le fonctionnel résiduel défini «la distance» entre ces deux réponses dans l'espace  $L_2$ . La formulation de la variation du problème inverse sous les contraintes d'égalité données par les équations du problème direct (4-2) est donnée par l'équation (4-4)

$$\cdot \min J(Q(t))_{Q \in \zeta_2} = \sum_{n=1}^N \int_0^{t_f} [\theta(X_n, t; Q) - f(t)]^2 dt$$

Ces contraintes doivent être prises en considération parce que les composantes de la réponse du système calculé ne peuvent pas être choisies arbitrairement ; elles sont calculées à partir de la solution du problème direct.

#### 4.5.2- Fonctionnel de Lagrange et conditions d'optimisation nécessaires

La première étape de l'analyse est l'écriture formelle du fonctionnel de Lagrange pour le problème de minimisation par l'introduction des multiplicateurs de Lagrange pour chaque contrainte écrite sous sa forme standard.

$$\begin{aligned}
 L(Q) = & 2 \sum_{n=1}^N \int_0^{t_f} [\theta(X_n, t; Q) - f_n(t)]^2 dt + \int_0^{t_f} \int_0^L \psi(x, t) \left[ \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \right] dx dt \\
 & + \int_0^L \eta(x) [\theta(x, 0)] dx \\
 & + \int_0^{t_f} \mu(t) \left[ -\lambda \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} + h\theta(0, t) - Q(t) \right] dt \\
 & + \int_0^{t_f} \omega(t) \left[ \lambda \frac{\partial \theta(L, t)}{\partial x} - h\theta(L, t) \right] dt \quad (4 - 6)
 \end{aligned}$$

où  $\psi(x, t)$ ,  $\eta(x)$ ,  $\mu(t)$  et  $\omega(t)$  sont les multiplicateurs de Lagrange.

Puis le fonctionnel de Lagrange est analysé sans contraintes. Les conditions d'optimisation nécessaire du fonctionnel de Lagrange est l'égalité à zéro de sa variation.

$$\delta L(Q, \delta Q) = 0 \quad (4 - 7)$$

où  $\delta Q = \delta Q(t)$  est une petite variation de la fonction  $Q(t)$

#### 4.5.2- Variation du fonctionnel de Lagrange et du problème adjoint

Pour obtenir l'expression de la variation du fonctionnel de Lagrange  $\delta L(Q, \delta Q)$ , la fonction  $Q(t)$  est perturbée par une petite variation  $\delta Q(t)$ . Par conséquent, la température aussi subit une perturbation par une petite variation  $\delta \theta(x, t) = \Delta \theta(x, t)$ . Le fonctionnel résiduel et le problème direct sont également perturbés par une petite variation.

La variation du fonctionnel résiduel est :

$$\delta J(\mathbf{Q}, \Delta \mathbf{Q})_{\mathbf{Q} \in \zeta_2} = 2 \sum_{n=1}^N \int_0^{t_f} [\theta(\mathbf{X}_n, \mathbf{t}; \mathbf{Q}) - \mathbf{f}_n(\mathbf{t})] \Delta \theta(\mathbf{x}, \mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (4-8)$$

La variation du problème direct est donnée par le système d'équation du problème de sensibilité (4-5).

On introduit maintenant la fonction Dirac delta  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{X}_n)$ .

Par définition :

$$[\theta(\mathbf{X}_n, \mathbf{t}; \mathbf{Q}) - \mathbf{f}(\mathbf{t})] \Delta \theta(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \int_0^L \delta(\mathbf{x}, \mathbf{X}_n) [\theta(\mathbf{X}_n, \mathbf{t}; \mathbf{Q}) - \mathbf{f}(\mathbf{t})] \Delta \theta(\mathbf{x}, \mathbf{t}) d\mathbf{x} \quad (4-9)$$

Alors la variation du fonctionnel résiduel peut être écrite comme suit :

$$\delta J(\mathbf{Q}, \Delta \mathbf{Q})_{\mathbf{Q} \in L_2} = 2 \sum_{n=1}^N \int_0^{t_f} \int_0^L \delta(\mathbf{x}, \mathbf{X}_n) [\theta(\mathbf{X}_n, \mathbf{t}; \mathbf{Q}) - \mathbf{f}_n(\mathbf{t})] \Delta \theta(\mathbf{x}, \mathbf{t}) d\mathbf{x} d\mathbf{t} \quad (4-10)$$

La variation du fonctionnel de Lagrange peut être aussi écrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \delta L(\mathbf{Q}, \delta \mathbf{Q}) &= 2 \sum_{n=1}^N \int_0^{t_f} \int_0^L \delta(\mathbf{x}, \mathbf{X}_n) [\theta(\mathbf{X}_n, \mathbf{t}; \mathbf{Q}) - \mathbf{f}_n(\mathbf{t})] \Delta \theta(\mathbf{x}, \mathbf{t}) d\mathbf{x} d\mathbf{t} \\ &+ \int_0^{t_f} \int_0^L \psi(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \left[ \frac{\partial \Delta \theta(\mathbf{x}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} - \alpha \frac{\partial^2 \Delta \theta(\mathbf{x}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{x}^2} \right] d\mathbf{x} d\mathbf{t} + \int_0^L \eta(\mathbf{x}) [\Delta \theta(\mathbf{x}, 0)] d\mathbf{x} \\ &+ \int_0^{t_f} \mu(\mathbf{t}) \left[ -\lambda \frac{\partial \Delta \theta(0, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{h} \Delta \theta(0, \mathbf{t}) - \Delta \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \right] d\mathbf{t} \\ &+ \int_0^{t_f} \omega(\mathbf{t}) \left[ \lambda \frac{\partial \Delta \theta(L, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{h} \Delta \theta(L, \mathbf{t}) \right] d\mathbf{t} \end{aligned} \quad (4-11)$$

L'intégration par parties de l'intégrale suivante donne:

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_f} \int_0^L \psi(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \left[ \frac{\partial^2 \Delta \theta(\mathbf{x}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{x}^2} \right] d\mathbf{x} d\mathbf{t} \\ &= \int_0^{t_f} \left[ \psi(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \frac{\partial \Delta \theta(\mathbf{x}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{x}} \right]_0^L - \int_0^{t_f} \int_0^L \left[ \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \Delta \theta(\mathbf{x}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{x}} \right] d\mathbf{x} d\mathbf{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \int_0^L \left[ \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \Delta \theta(x, t)}{\partial x} \right] dx dt \\ &= \int_0^{t_f} \left[ \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \Delta \theta(x, t) \right]_0^L + \int_0^{t_f} \int_0^L \left[ \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \Delta \theta(x, t) \right] dx dt \end{aligned}$$

En fin :

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \int_0^L \psi(x, t) \left[ \frac{\partial^2 \Delta \theta(x, t)}{\partial x^2} \right] dx dt \\ &= \int_0^{t_f} \left[ \psi(x, t) \frac{\partial \Delta \theta(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \Delta \theta(x, t) \right]_0^L dt \\ &+ \int_0^{t_f} \int_0^L \left[ \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \Delta \theta(x, t) \right] dx dt \\ & \int_0^{t_f} \int_0^L \psi(x, t) \left[ \frac{\partial^2 \Delta \theta(x, t)}{\partial x^2} \right] dx dt \\ &= \int_0^{t_f} \left[ \psi(L, t) \frac{\partial \Delta \theta(L, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(L, t)}{\partial x} \Delta \theta(L, t) \right] dt \\ &+ \int_0^{t_f} \int_0^L \left[ \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \Delta \theta(x, t) \right] dx dt \quad (4 - 12) \end{aligned}$$

De même:

$$\int_0^{t_f} \int_0^L \psi(x, t) \left[ \frac{\partial \Delta \theta(x, t)}{\partial t} \right] dx dt = \int_0^{t_f} [\psi(x, t) \Delta \theta(x, t)]_0^L dt - \int_0^{t_f} \int_0^L \left[ \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \Delta \theta(x, t) \right] dx dt$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \int_0^L \psi(x, t) \left[ \frac{\partial \Delta \theta(x, t)}{\partial t} \right] dx dt \\ &= \int_0^L \left[ [\psi(x, t_f) \Delta \theta(x, t_f)] - [\psi(x, 0) \Delta \theta(x, 0)] \right] dx \\ &- \int_0^{t_f} \int_0^L \left[ \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \Delta \theta(x, t) \right] dx dt \quad (4 - 13) \end{aligned}$$

Remplaçant ces deux intégrales (4-12) et (4-13) dans l'équation de la variation du fonctionnel de Lagrange (4-11) et par la prise en considération de la condition initiale et des conditions aux limites de la variation du problème direct on obtient :

$$\begin{aligned}
 \delta L(Q, \delta Q) = & 2 \sum_{n=1}^N \int_0^{t_f} \int_0^L \delta(x, X_n) [\theta(X_n, t; Q) - f_n(t)] \Delta \theta(x, t) dx dt \\
 & + \int_0^{t_f} \left[ \alpha \left[ \psi(L, t) \frac{\partial \Delta \theta(L, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(L, t)}{\partial x} \Delta \theta(L, t) \right] \right. \\
 & - \left. \left[ \psi(0, t) \frac{\partial \Delta \theta(0, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} \Delta \theta(0, t) \right] \right] dt + \int_0^{t_f} \int_0^L \left[ \alpha \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \Delta \theta(x, t) \right] dx dt \\
 & + \int_0^L \left[ [\psi(x, t_f) \Delta \theta(x, t_f)] - [\psi(x, 0) \Delta \theta(x, 0)] \right] dx \\
 & - \int_0^{t_f} \int_0^L \left[ \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \Delta \theta(x, t) \right] dx dt + \int_0^L \eta(x) [\Delta \theta(x, 0)] dx \\
 & + \int_0^{t_f} \mu(t) \left[ -\lambda \frac{\partial \Delta \theta(0, t)}{\partial x} + h \Delta \theta(0, t) \right] dt - \int_0^{t_f} \mu(t) \Delta Q(t) dt \\
 & + \int_0^{t_f} \omega(t) \left[ \lambda \frac{\partial \Delta \theta(L, t)}{\partial x} - h \Delta \theta(L, t) \right] dt \quad (4-14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta L(Q, \delta Q) = & \int_0^{t_f} \int_0^L \left\{ \alpha \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} + \delta(x, X_n) [\theta(X_n, t; Q) - f_n(t)] \right\} \Delta \theta(x, t) dx dt \\
 & + \int_0^{t_f} \left[ \psi(L, t) \frac{\partial \Delta \theta(L, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(L, t)}{\partial x} \Delta \theta(L, t) \right] dt \\
 & - \left[ \psi(0, t) \frac{\partial \Delta \theta(0, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} \Delta \theta(0, t) \right] dt + \int_0^L \left[ [\psi(x, t_f) \Delta \theta(x, t_f)] \right] dx \\
 & + \int_0^L \eta(x) [\Delta \theta(x, 0)] dx \\
 & + \int_0^{t_f} \mu(t) \left[ -\lambda \frac{\partial \Delta \theta(0, t)}{\partial x} + h \Delta \theta(0, t) \right] dt - \int_0^{t_f} \mu(t) \Delta Q(t) dt \\
 & + \int_0^{t_f} \omega(t) \left[ \lambda \frac{\partial \Delta \theta(L, t)}{\partial x} - h \Delta \theta(L, t) \right] dt \quad (4-15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta L(Q, \delta Q) = & \int_0^{t_f} \int_0^L \left\{ \alpha \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} + \right\} \Delta \theta(x, t) dx dt \\
 & + \int_0^{t_f} \frac{\partial \Delta \theta(0, t)}{\partial x} [\mu(t) - \psi(0, t)] dt + \int_0^{t_f} \Delta \theta(0, t) \left[ \mu(t) h + \frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} \right] dt \\
 & + \int_0^{t_f} \Delta \theta(L, t) \left[ -\frac{\partial \psi(L, t)}{\partial x} \right] dt + \int_0^L [\psi(x, t_f) \Delta \theta(x, t_f)] dx \\
 & + \int_0^{t_f} \mu(t) \Delta Q(t) dt \quad (4-16)
 \end{aligned}$$

Mettant maintenant les coefficients des variations de la température égaux à zéro on obtient :

$$\Delta \theta(x, t): \quad \left[ \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + \sum_{n=1}^N \delta(x, X_n) [\theta(X_n, t; Q) - f_n(t)] \right] \quad (4-17a)$$

$$\Delta \theta(x, t_f): \quad [\psi(x, t_f) = 0] \quad (4-17b)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta(0, t)}{\partial x}: \quad [\mu(t) - \psi(0, t) = 0] \Rightarrow \mu(t) = \psi(0, t) \quad (4-17c)$$

$$\Delta \theta(0, t): \quad \left[ -\lambda \frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} + \mu(t) h = 0 \right] \Rightarrow \frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} - \psi(0, t) \frac{h}{\lambda} = 0 \quad (4-17d)$$

$$\Delta \theta(L, t): \quad \left[ \frac{\partial \psi(L, t)}{\partial x} = 0 \right] \quad (4-17e)$$

Ces équations forment un problème aux conditions aux limites appelé *problème adjoint*.

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + \sum_{n=1}^N \delta(x, X_n) [\theta(X_n, t; Q) - f_n(t)] \quad 0 < t \leq t_f \quad (4-18a)$$

$$\psi(x, t_f) = 0 \quad 0 \leq x \leq L \quad (4-18b)$$

$$\frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} + \psi(0, t) \frac{h}{\lambda} = 0 \quad 0 < t \leq t_f \quad (4-18c)$$

$$\frac{\partial \psi(L, t)}{\partial x} = 0 \quad 0 < t \leq t_f \quad (4-18e)$$

Le problème adjoint représente la première partie des conditions nécessaires d'optimisation du fonctionnel de Lagrange.

On remarque que la forme du problème adjoint est similaire à celle du problème direct mais le problème adjoint doit être résolu par l'inversement du temps initial  $t_0 = t_f$  en introduisant une autre variable de temps :

$$\tau = t_f - t \quad (4 - 19)$$

Dans le problème adjoint on obtient alors :

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + \sum_{n=1}^N \delta(x, X_n) [\theta(X_n, t_f - \tau; Q) - f_n(t_f - \tau)] \quad 0 < \tau \leq t_f \quad (4 - 20a)$$

$$\psi(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq L \quad (4 - 20b)$$

$$\frac{\partial \psi(0, \tau)}{\partial x} + \psi(0, \tau) \frac{h}{\lambda} = 0 \quad 0 < \tau \leq t_f \quad (4 - 20c)$$

$$\frac{\partial \psi(L, \tau)}{\partial x} = 0 \quad 0 < \tau \leq t_f \quad (4 - 20d)$$

qui représente le problème adjoint du problème inverse.

#### 4.6- Equation du gradient

Dans l'équation (4-16) le seul terme de la variation du fonctionnel de Lagrange non nul est bien l'intégrale :

$$\int_0^{t_f} \mu(t) \Delta Q(t) dt \quad (4 - 21)$$

Alors la variation du fonctionnel de Lagrange sera :

$$\delta L(Q, \delta Q) = \int_0^{t_f} \mu(t) \Delta Q(t) dt \quad (4 - 22)$$

Le multiplicateur de Lagrange est calculé à partir du problème adjoint par l'équation :

$$\mu(t) = \psi(0, t) \quad (4 - 23)$$

Alors :

$$\delta L(Q, \delta Q) = \int_0^{t_f} \psi(0, t) \Delta Q(t) dt \quad (4 - 24)$$

De même, nous avons :

$$\delta L(Q, \delta Q) = \delta J(Q, \Delta Q)_{Q \in L_2} \quad (4 - 25)$$

Alors :

$$\delta J(Q, \Delta Q)_{Q \in L_2} = \int_0^{t_f} \psi(0, t) \Delta Q(t) dt \quad (4 - 26)$$

Par définition la variation du fonctionnel résiduel défini dans l'espace d'Hilbert  $L_2(0, t_f)$  a la forme de produit interne dans cet espace du gradient du fonctionnel résiduel par la variation  $\delta Q(t)$  dans l'espace  $L_2(0, t_f)$ .

Alors :

$$\delta J(Q, \Delta Q)_{Q \in L_2} = \int_0^{t_f} J'_Q(t) \Delta Q(t) dt \quad (4 - 27)$$

Et enfin :

$$J'_Q(t) = \psi(0, t) \quad (4 - 28)$$

Cette formule représente le gradient du fonctionnel résiduel dans l'espace d'Hilbert  $L_2(0, t_f)$ .

L'expression du gradient du fonctionnel résiduel forme la deuxième partie de la condition nécessaire d'optimisation pour le problème de minimisation du fonctionnel résiduel.

Pour la solution optimale du gradient du fonctionnel résiduel, ce dernier doit être égal à zéro et la condition nécessaire d'optimisation sera satisfaite.

$$\delta L(Q, \Delta Q)_{Q \in L_2} = 0 \quad (4 - 29)$$

#### 4.7- Procédure itérative

Le développement mathématique précédent nous a permis de distinguer trois problèmes bien définis. Le premier est appelé problème direct et est défini par les équations (4-2), le deuxième est appelé problème de sensibilité et est défini par les équations (4-5) et le troisième est le problème adjoint et est défini par les équations (4-20).

Les mesures de la température prise à la position  $x = x_{mes}$  sont considérées connues et le gradient  $J'_Q(t)$  est relié à  $\psi$  par l'équation (4-28).

La fonction de flux de chaleur  $Q(t)$  peut être identifiée par une procédure basée sur la minimisation du fonctionnel  $J(Q(t))_{Q \in L_2}$  par une approche itérative appelée la méthode de gradient conjugué pour minimisation. Dans la méthode du gradient conjugué, on considère le schéma itératif suivant pour la détermination de  $(t)$  .

$$\mathbf{Q}^{k+1} = \mathbf{Q}^k - \beta^k \mathbf{d}^k \quad (4 - 30)$$

où

$\beta^k$ : est le pas de recherche.

$\mathbf{d}^k$  : est la direction de descente définie par :

$$\mathbf{d}^k = \mathbf{J}'^k + \delta^k \mathbf{d}^{1-k} \quad (4 - 31)$$

$$\text{avec } \mathbf{d}^0 = \mathbf{J}'^0 \quad (4 - 32)$$

$$\text{et } \mathbf{K} = 1, 2 \dots$$

Le paramètre  $\delta$  peut être calculé soit par la relation de POLAK-RIBIERE donnée par l'expression suivante :

$$\delta^k = \frac{\int_0^{tf} \{ [\mathbf{J}'^k] [\mathbf{J}'^k - \mathbf{J}'^{1-k}] \} dt}{\int_0^{tf} \{ [\mathbf{J}'^{1-k}] \} dt} \quad \mathbf{K} = 1, 2 \dots \quad (4 - 33)$$

$$\text{avec } \delta^0 = 0$$

ou bien par la formule de FLETCHER-REEVES donnée par l'expression suivante:

$$\delta^k = \frac{\int_0^{tf} \{ [\mathbf{J}'^k]^2 \} dt}{\int_0^{tf} \{ [\mathbf{J}'^{1-k}]^2 \} dt} \quad \mathbf{K} = 1, 2 \dots \quad (4 - 34)$$

$$\text{avec } \delta^0 = 0$$

La valeur du pas  $\beta^k$  est déterminée par la minimisation du fonctionnel  $\mathbf{J}(\mathbf{Q}(t))_{Q \in L_2}$  donnée par l'équation (4-4) par rapport  $\beta$  .

$$\beta^K = \frac{\sum_{n=1}^N \int_0^{t_f} [\theta(X_n, t; Q^k) - f_n(t)] \Delta\theta(X_n, t; d^k) dt}{\sum_{n=1}^N \int_0^{t_f} [\Delta\theta(X_n, t; d^k)]^2 dt} \quad (4 - 35)$$

#### 4.8- Critère d'arrêt

En pratique, le processus numérique d'optimisation ne peut pas être de pas infinis. Lors de la réalisation de l'algorithme il faut ajouter une condition d'arrêt de calcul.

Pour arrêter la procédure itérative de calcul, on utilise des critères basés sur l'évaluation de la précision des solutions. Cependant, il est difficile d'évaluer la précision réelle obtenue puisque les constantes caractérisant la convergence sont habituellement inconnues. C'est pourquoi, on estime la précision en utilisant des indices indirects.

$$J(Q(t)) < \varepsilon \quad (4 - 36)$$

où  $J(Q(t))$  est calculé par l'équation (4-4). La tolérance  $\varepsilon$  est choisie de sorte que des solutions lisses sont obtenues avec des mesures contenant des erreurs aléatoires. Il a été admis que la solution est suffisamment atteinte quand :

$$|\theta(X_n, t; Q) - f(t)| \approx \sigma \quad (4 - 37)$$

Avec  $\sigma$  est l'écart type des erreurs des mesures.

Ainsi,  $\varepsilon$  est obtenu de l'équation (4-4) comme :

$$\varepsilon = \sigma^2 t_f \quad (4 - 38)$$

Pour les cas impliquant des mesures sans erreurs,  $\varepsilon$  peuvent être spécifié à priori comme un nombre suffisamment restreint.

#### 4.9- Algorithme de calcul

Supposons une valeur initiale  $Q^0(t)$  de la fonction  $Q(t)$ , on met  $K = 0$  et on suit les étapes présentées dans l'organigramme de la figure (4-2).

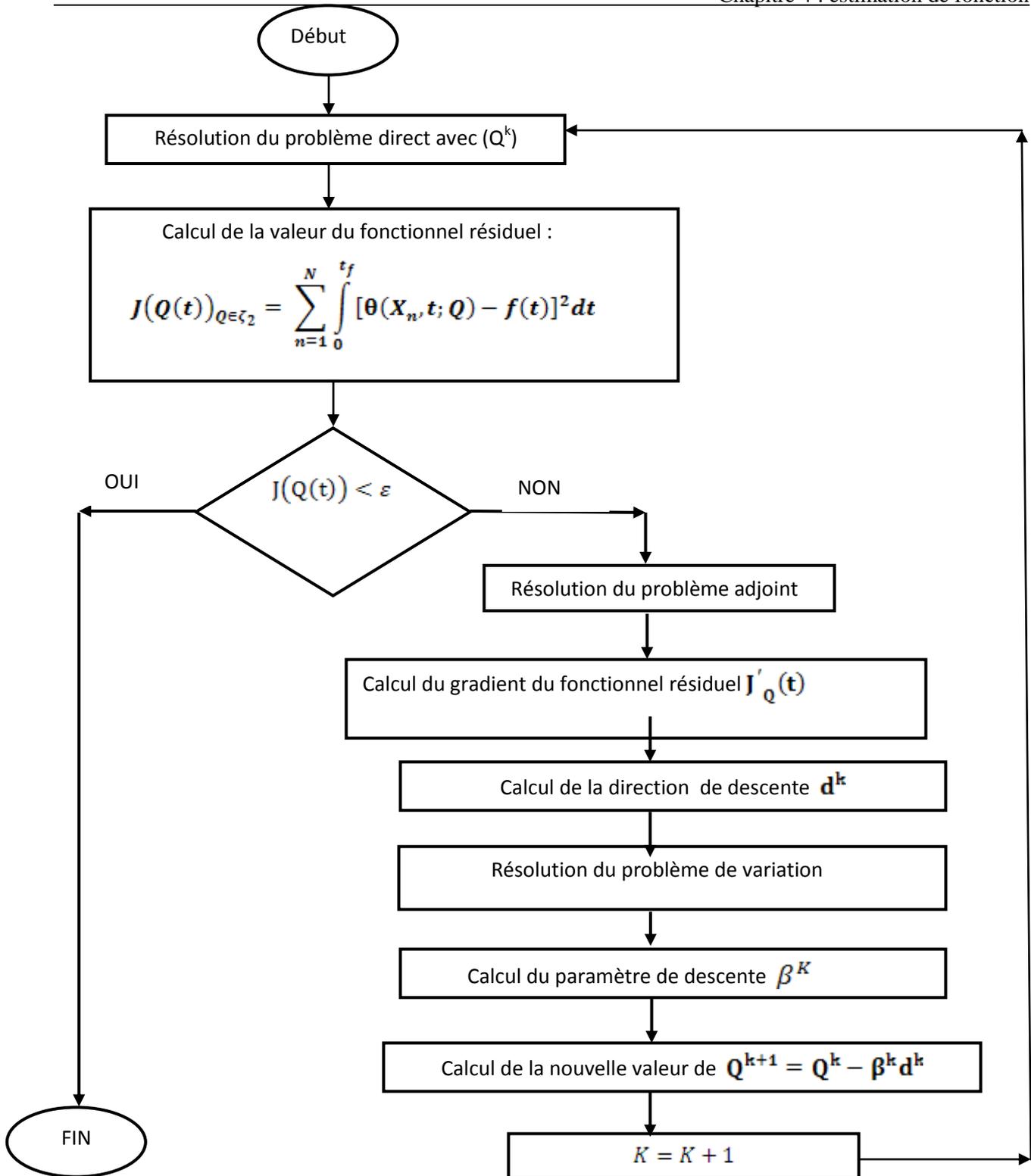


Figure (4-2) : Organigramme de la méthode de gradient conjugué avec problème adjoint pour l'estimation de fonctions

#### 4.10- Résultats et discussions

Le but de ce chapitre est d'estimer la fonction inconnue de flux de chaleur  $\mathbf{Q}(\mathbf{t})$  par la méthode de gradient conjugué avec problème adjoint par l'utilisation des mesures de température simulées par la solution du problème direct.

Dans notre analyse inverse monodimensionnelle nous allons étudier la précision de l'estimation de la fonction de flux en fonction du pas de temps adimensionnel  $\Delta \mathbf{f}_0$ :

$$\Delta \mathbf{f}_0 = \frac{\alpha \Delta \mathbf{t}}{\mathbf{E}^2} \quad (4 - 39)$$

où  $\alpha$  est la diffusivité thermique du matériau,  $\Delta \mathbf{t}$  est le pas de temps de discrétisation temporelle du flux surfacique recherché et  $\mathbf{E}$  (figure (4-1)) est la distance entre la surface exposée au flux de chaleur et le capteur (le plus proche de la surface s'il y a plusieurs capteurs). Nous notons ici que dans ce chapitre la diffusivité thermique et le pas de temps de discrétisation sont considérés comme des constantes alors le seul paramètre qui influe sur la valeur de  $\Delta \mathbf{f}_0$  est bien la distance  $\mathbf{E}$ . C'est-à-dire le but de notre étude est de voir l'impact de la distance  $\mathbf{E}$  sur la précision des fonctions de flux identifiées.

La méthode de différences finies a été utilisée pour résoudre le problème direct, le problème de sensibilité et le problème adjoint. Les mesures de température à l'intérieur de la plaque métallique sont obtenues par la résolution du problème direct donné par le système d'équations (4-2) avec les paramètres Thermo-physiques suivants  $\alpha = \mathbf{t}_f = \mathbf{L} = \mathbf{h} = \mathbf{1}$ . Deux types de mesures sont utilisés dans notre analyse. Des mesures exactes (sans erreurs de mesures) pour différentes fonctions de flux, représentées par les figures (4-4)- (4-10). Dans le deuxième type les mesures de température sont simulées avec les mêmes flux de chaleur mais avec l'ajout d'un bruit de mesure selon l'équation (4-41) et les résultats obtenus sont présentés sur les figures (4-15)-(4-18).

$$\mathbf{f}(\mathbf{t}_i)_{\text{mes}} = \mathbf{f}(\mathbf{t}_i)_{\text{ex}} + \sigma \omega \quad \dots (4 - 40)$$

$\mathbf{f}(\mathbf{t}_i)_{\text{mes}}$ : mesures simulées contenant des erreurs aléatoires.

$\mathbf{f}(\mathbf{t}_i)_{\text{ex}}$ : mesures exactes simulées

$\sigma$ : écart type des erreurs de mesure.

$\omega$ : variables aléatoires.

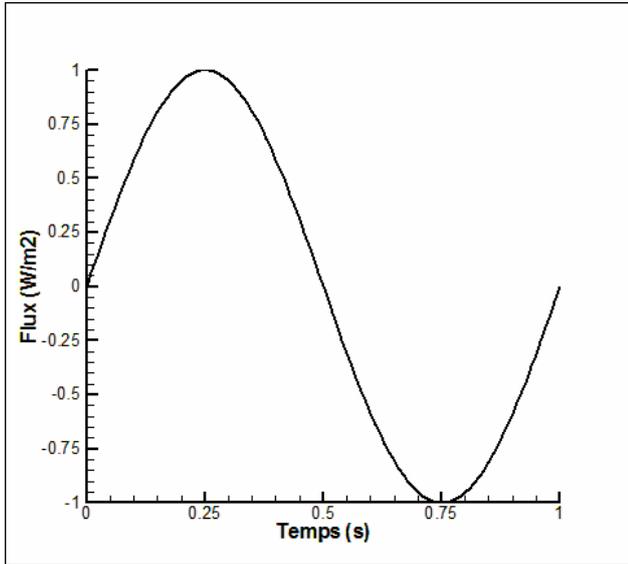


Figure (4-3) : Profil du flux de chaleur N°1

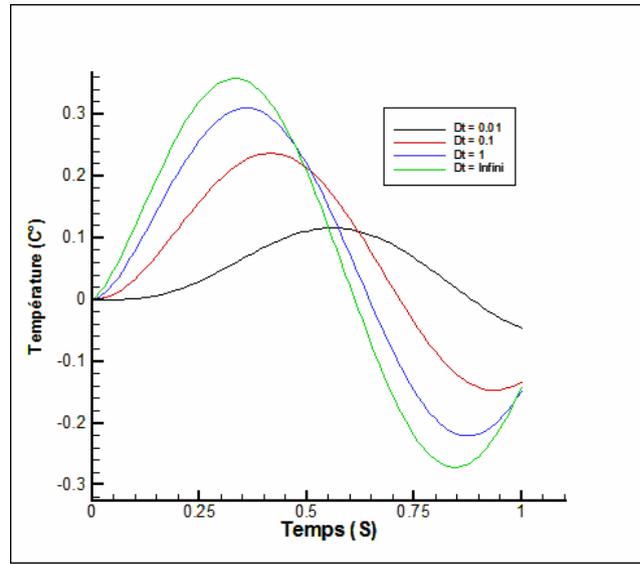


Figure (4-4) : Profils des mesures exactes des températures simulées de la fonction de flux N°1

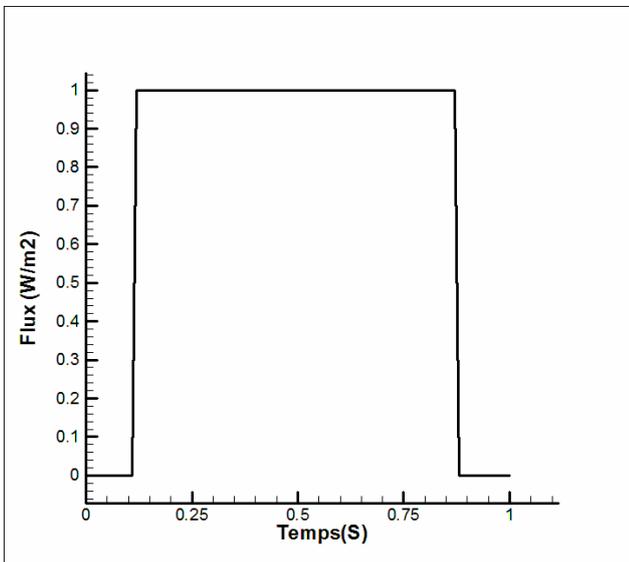


Figure (4-5) : Profil du flux de chaleur N°2

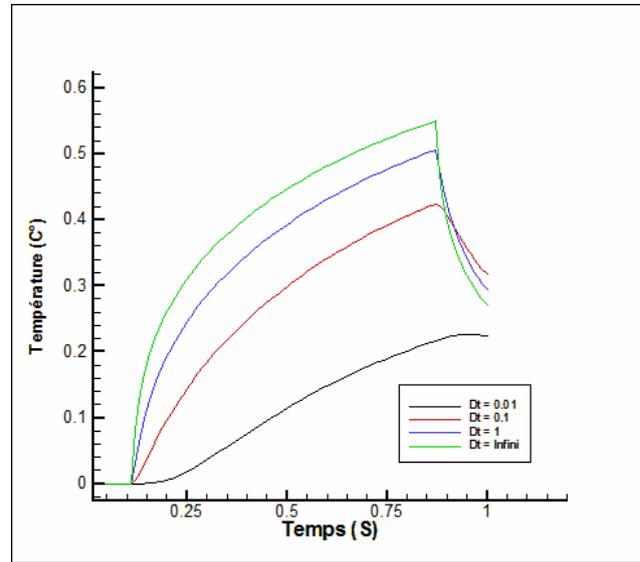


Figure (4-6) : Profils des mesures exactes des températures simulées de la fonction de flux N°2

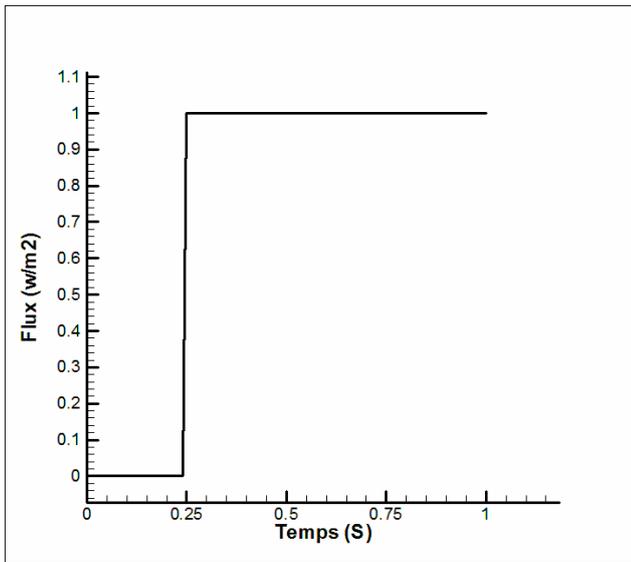


Figure (4-7) : Profil du flux de chaleur N°3

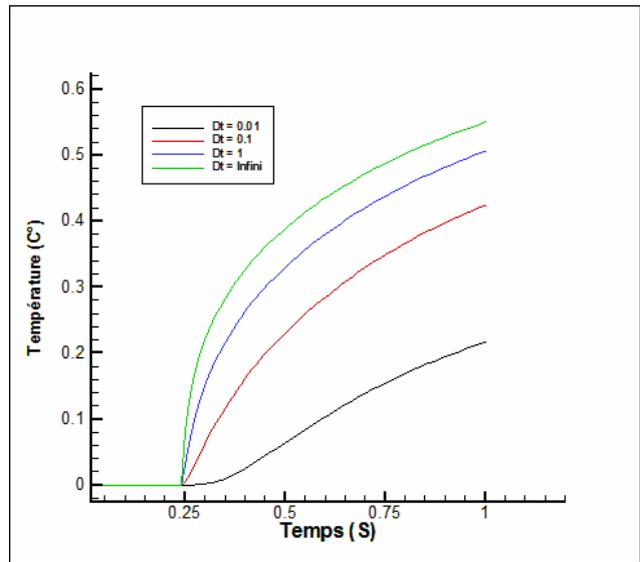


Figure (4-8) : Profils des mesures exactes des températures simulées de la fonction de flux N°3

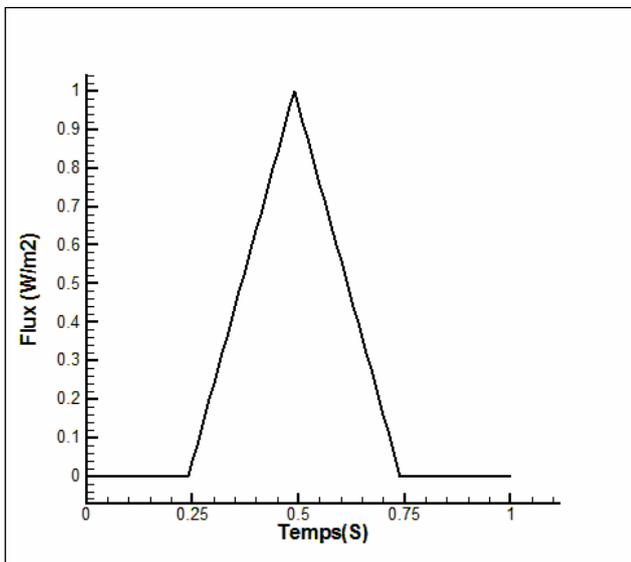


Figure (4-9) : Profil du flux de chaleur N°4

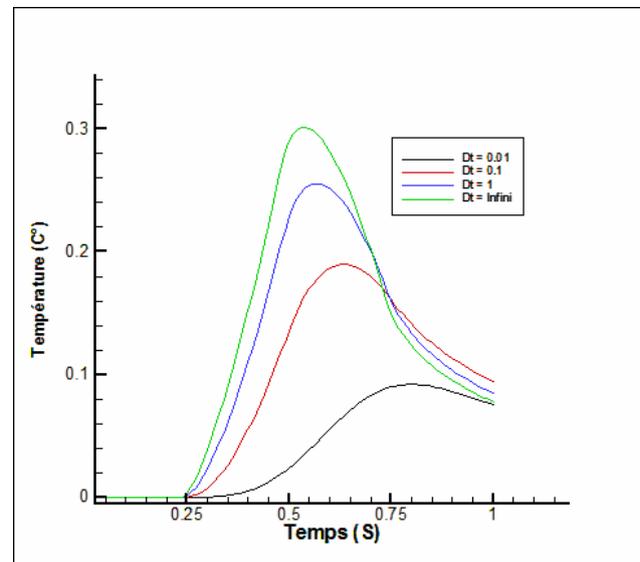


Figure (4-10) : Profils des mesures exactes des températures simulées de la fonction de flux N°4

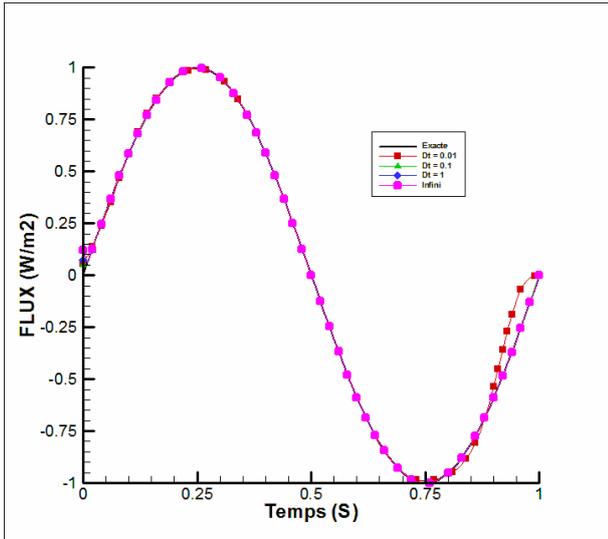


Figure (4-11) : Estimation de la fonction de flux N°1 en fonction de  $\Delta f_0$  pour  $\sigma = 0$

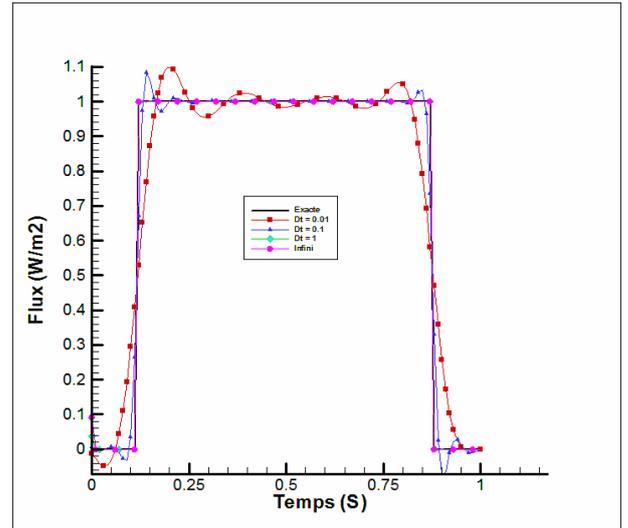


Figure (4-12) : Estimation de la fonction de flux N°2 en fonction de  $\Delta f_0$  pour  $\sigma = 0$

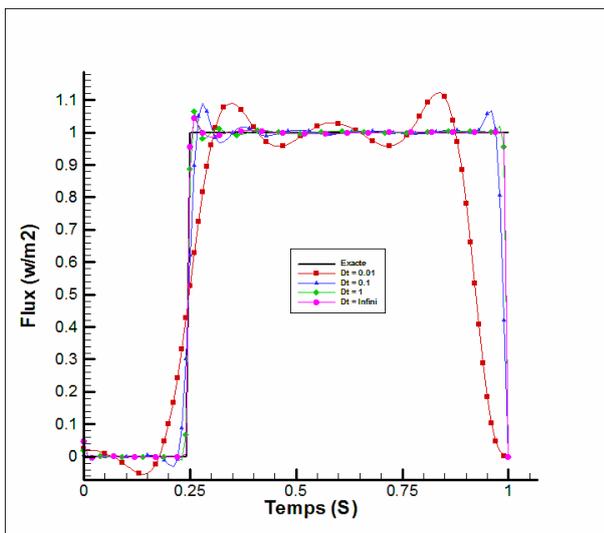


Figure (4-13) : Estimation de la fonction de flux N°3 en fonction de  $\Delta f_0$  pour  $\sigma = 0$

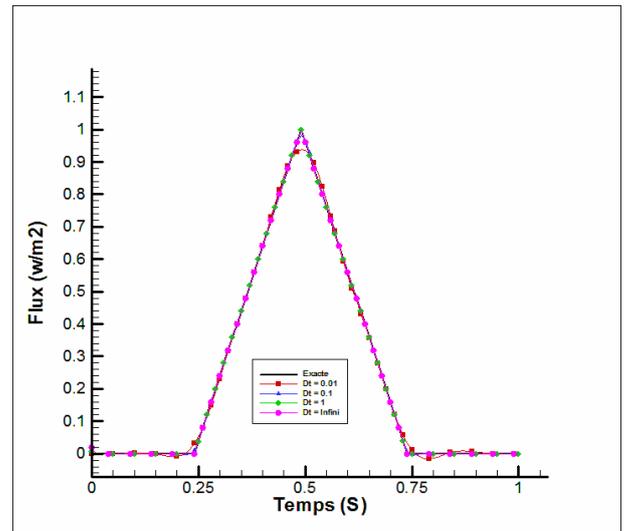


Figure (4-14) : Estimation de la fonction de flux N°4 en fonction de  $\Delta f_0$  pour  $\sigma = 0$

Les figures (4-11)-(4-14) présentent la solution du problème inverse pour les différentes fonctions de flux de chaleur utilisées dans l'estimation, obtenues avec les mesures exactes. Les figures montrent que les fonctions N°1 et N°3 de flux de chaleur sont presque exactes pour les différentes valeurs du pas de temps adimensionnel  $\Delta f_0$ . Par contre, pour les fonctions estimées N°2 et N°4 nous remarquons des perturbations et des instabilités. Ceci est dû à la forme de ces fonctions qui représentent des changements radicaux et des angles aigus et qui sont les cas les plus difficiles à recouvrer par l'analyse inverse.

Les figures (4-11) à (4-14) présentent la solution du problème inverse pour les différentes fonctions de flux de chaleur utilisées dans l'estimation, obtenues avec les mesures bruitées. Les résultats montrent qu'avec l'ajout des erreurs la précision des fonctions estimées est détériorée. L'estimation devient plus délicate en fonction du pas de temps adimensionnel  $\Delta f_0$ . D'après les résultats nous avons trouvé que :

Si  $\Delta f_0 > 10^{-2}$  : la résolution du PICC ne pose pas problème particulier car l'amplification des erreurs de mesure est faible.

Si  $\Delta f_0 < 10^{-2}$  : la résolution du PICC est très délicate et ne peut être obtenue qu'avec des mesures de bonne qualité et introduisant un biais important.

Dans la pratique  $\Delta f_0$  est utilisée pour déterminer la faisabilité de l'estimation des grandeurs surfaciques à l'aide des méthodes de conduction inverse. En effet, le phénomène que l'on désire étudier est toujours partiellement connu et l'on peut fixer la limite supérieure du pas de temps qui permettra représenter le flux surfacique avec la résolution temporelle désirée. Le matériau étant généralement imposé et donc la diffusivité, il ne reste qu'à déterminer s'il est possible ou non de placer un capteur tel que  $\Delta f_0 > 10^{-3}$ .

En examinant la fonction de flux N° 3, on remarque que la fonction du flux estimée revient toujours à la valeur initiale et ceci est dû aux équations (4-18b) et (4-28) où nous constatons que le gradient équation est nul au temps final  $t_f$ . Par conséquent, l'estimation initiale utilisée pour  $Q(t)$  n'est jamais changée par la procédure itérative de la méthode du gradient conjugué. Donc, afin d'éviter de telles difficultés, soit que le temps final doit être prolongé soit que le calcul doit être répété plusieurs fois en utilisant des valeurs initiales égales aux les valeurs estimées pour  $Q(t)$  à un temps  $t$  au voisinage du temps final  $t_f$ .

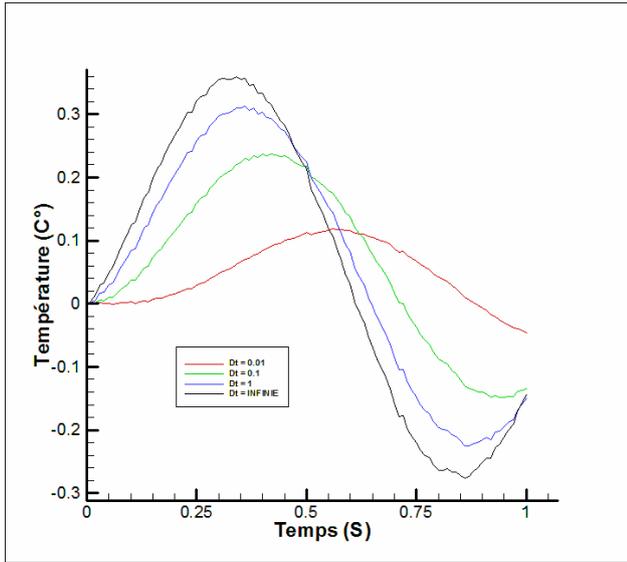


Figure (4-15) : Profils des mesures des températures simulées avec bruitage de la fonction de flux N°1

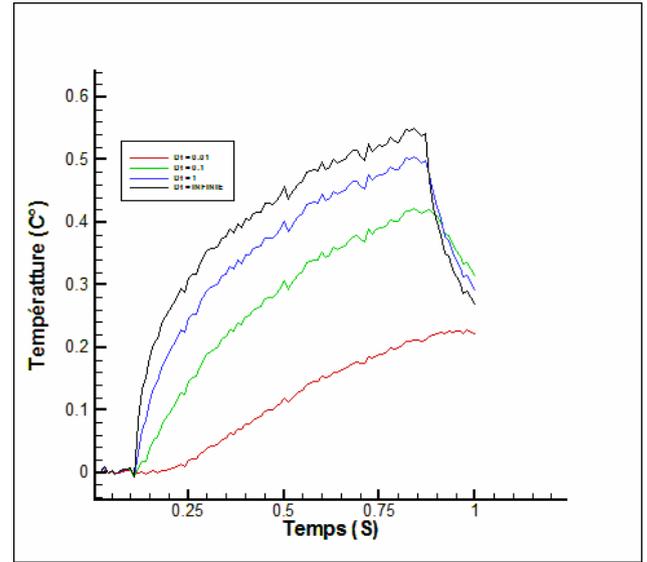


Figure (4-16) : Profils des mesures des températures simulées avec bruitage de la fonction de flux N°2

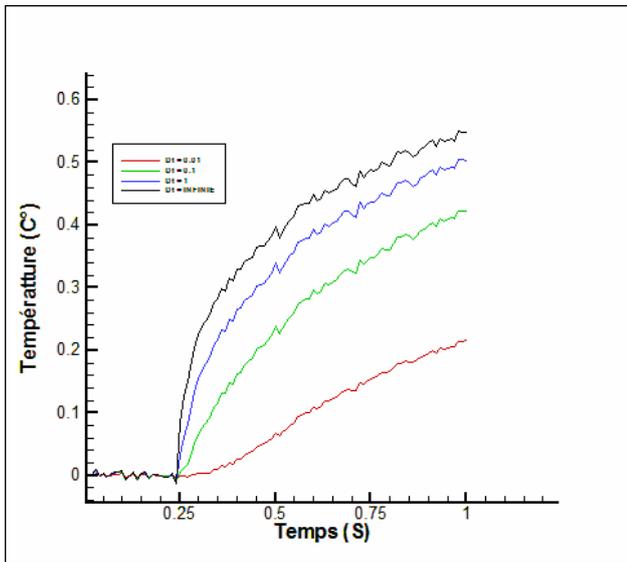


Figure (4-17) : Profils des mesures des températures simulées avec bruitage de la fonction de flux N°3

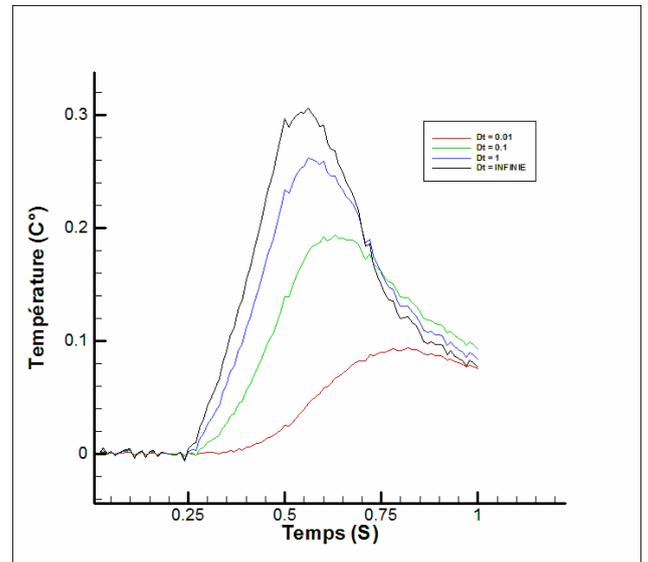


Figure (4-18) : Profils des mesures des températures simulées avec bruitage de la fonction de flux N°4

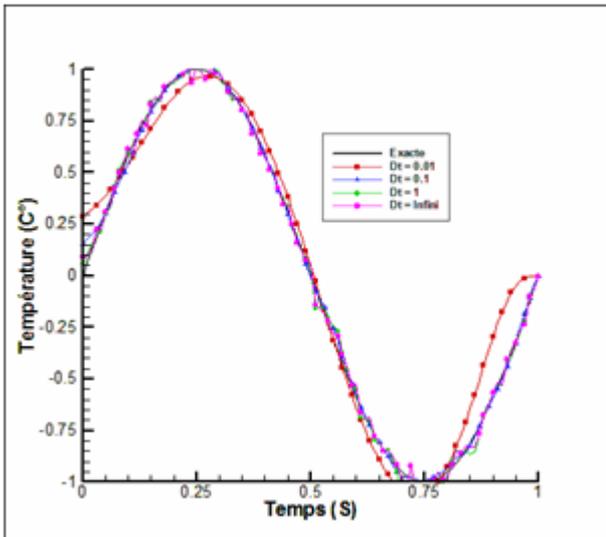


Figure (4-19) : Estimation de la fonction de flux N°1 en fonction de  $\Delta f_o$  pour  $\sigma = 0.01$

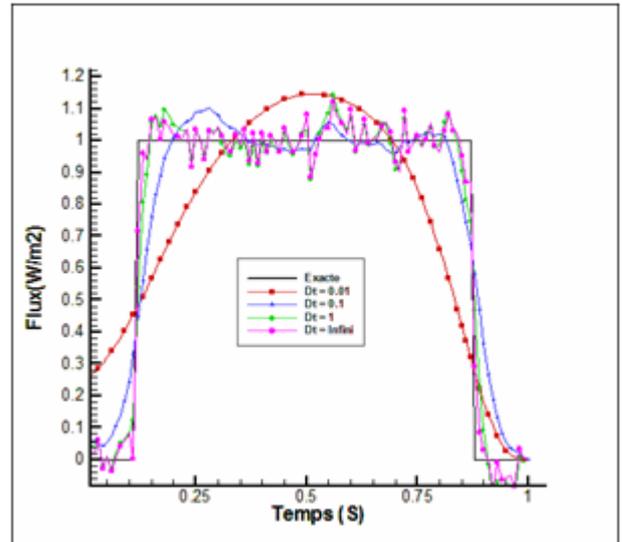


Figure (4-20) : Estimation de la fonction de flux N°2 en fonction de  $\Delta f_o$  pour  $\sigma = 0.01$

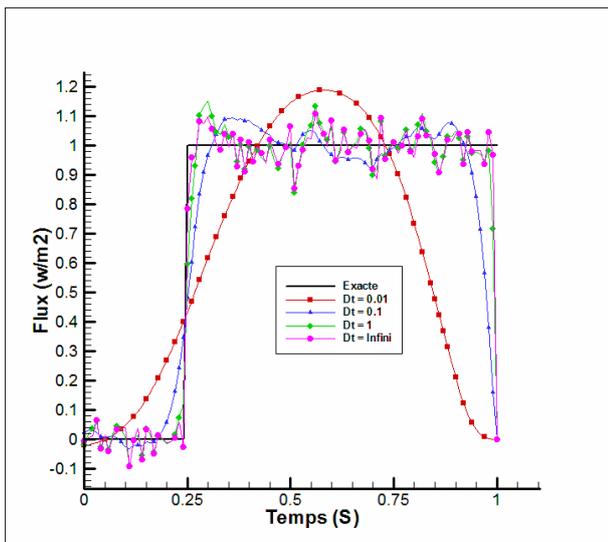


Figure (4-21) : Estimation de la fonction de flux N°3 en fonction de  $\Delta f_o$  pour  $\sigma = 0.01$

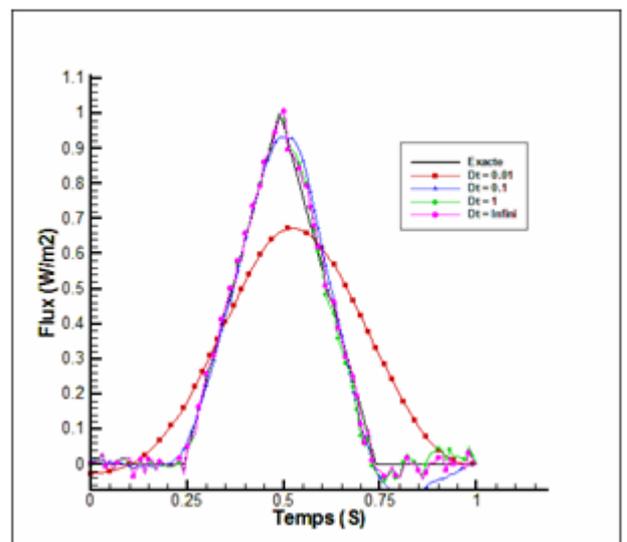


Figure (4-22) : Estimation de la fonction de flux N°4 en fonction de  $\Delta f_o$  pour  $\sigma = 0.01$

#### 4.11- Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé un algorithme de résolution du problème inverse de conduction thermique par la méthode de gradient conjugué avec problème adjoint pour l'estimation d'une fonction de flux de chaleur à une surface limite. Deux types de mesures simulées ont été utilisés comme informations additionnelles pour identifier la forme fonctionnelle du flux de chaleur. L'analyse a été faite en fonction du pas de temps adimensionnel qui représente explicitement la distance entre la surface exposée au flux de chaleur et le point de mesure de la température. Les résultats obtenus montrent que plus le point de mesure est près de la surface exposée au flux de chaleur, plus les résultats sont précis. Il en est de même pour les mesures exactes, les fonctions sont exactes, par contre les mesures bruitées, l'estimation est moins précise.

Cet algorithme nous permet maintenant de traiter un problème inverse réel de conduction de la chaleur où nous allons utiliser des mesures réelles de température. C'est l'objet du chapitre suivant.

*Chapitre V*

*Applications*

## 5. Applications

### 5.1- Introduction

Dans le chapitre précédent nous sommes arrivés à estimer les fonctions de flux de chaleur imposées à un matériau par la résolution d'un problème inverse de la conduction de chaleur par la méthode de gradient conjugué avec problème adjoint. Ces fonctions ont été connues et notre objectif était leur ré-identifications à partir des mesures de température simulées numériquement par la résolution du problème direct, et afin de rendre ces mesures comme des mesures réelles. Un ajout d'erreur a été effectué sur les mesures exactes et nous estimons avoir obtenu des bons résultats.

Dans ce chapitre et pour juger expérimentalement notre algorithme d'identification, nous allons utiliser des mesures de température réelles obtenues par la méthode flash où nous avons choisi des matériaux solides dont les propriétés thermiques sont relativement bien connues. L'algorithme d'identification développé dans le chapitre précédent est appliqué à cet effet et notre objectif est d'identifier les fonctions inconnues de l'impulsion et les profils des flux de chaleur exposés à nos échantillons.

## 5.2- Techniques de mesure de champs de températures

Les méthodes d'identification des sources de chaleur, du flux de chaleur ou des paramètres Thermo-physiques nécessitent expérimentalement un instrument de mesure de température (appelé capteurs) en régime transitoire ou permanent en des points précis sur la surface arrière ou avant des échantillons. Divers moyens sont utilisés suivant les moyens et les besoins des chercheurs ou des ingénieurs. Parmi les instruments de mesure avec contact, les plus utilisés sont le thermocouple, les sondes de platine et thermistances. Ceux-ci ne fournissent que des informations locales. Le thermocouple comme les deux autres capteurs sont faciles d'emploi ; de plus il permet une exploitation rapide des mesures et est beaucoup moins coûteux qu'une caméra infrarouge. Néanmoins, son utilisation nécessite un contact avec l'échantillon étudié ; ce contact peut modifier la géométrie du matériau et engendrer la présence d'une résistance de contact due à une fixation du thermocouple (colle, graisse,...). Les techniques sans contact sont souvent préférées. Elles sont basées sur le rayonnement émis par les corps étudiés. La radiométrie par caméra infrarouge (IR) est de nos jours utilisée pour la mesure de température de surface. Elle permet la réalisation sans contact de cartographies multidimensionnelles et transitoires de température, contrairement aux mesures ponctuelles effectuées par les thermocouples. Parallèlement à de ces avantages, la caméra IR est très onéreuse et nécessite un étalonnage de l'ensemble de la chaîne de mesure.

## 5.3- Méthodes de résolution des problèmes inverses

Pour la détermination des propriétés Thermo-physiques, différentes techniques et méthodes de mesures ont été utilisées par plusieurs auteurs. Nous avons résumé ici les principaux travaux.

### 5.3.1- Méthodes fréquentielles

Les premières investigations sur les phénomènes thermiques furent celles de A. G. Bell en 1881 qui analysa les phénomènes photo-acoustiques engendrés par l'excitation d'un échantillon par un faisceau lumineux modulé périodiquement. Ses études concernent essentiellement la détermination de la conductivité et de la diffusivité thermiques. La diffusivité thermique, qui caractérise l'aptitude d'un matériau à diffuser la chaleur, est une propriété intervenant dans tous les processus de transfert de chaleur en régime instationnaire, c'est-à-dire pour lesquels la température varie avec le temps. La connaissance de ce paramètre est essentielle pour résoudre de nombreux problèmes de transfert thermique.

### 5.3.2- Méthode du fil chaud

Dans les années 1930, B. Stalhane et S. Pyk développent la méthode du fil chaud pour estimer la conductivité thermique. La technique permet d'identifier directement la conductivité thermique à partir du comportement asymptotique de l'évolution de la température du fil chaud aux temps longs et du formalisme quadripolaire. Le principe de la méthode du fil chaud est le suivant : on dispose un fil résistif sur l'axe d'un échantillon cylindrique de grande longueur et d'extension radiale supposée infinie.

L'échantillon, initialement isotherme, est soumis à un flux en créneau, délivré sous forme d'effet Joule par le fil résistif. Si le fil est supposé infiniment long et de rayon négligeable, le transfert est radial et la conductivité thermique peut être identifiée à partir de l'évolution de la température en un point donné.

### 5.3.3- Méthode du plan chaud

La méthode du plan chaud est une extension de la méthode du fil chaud à une géométrie plane. Elle permet d'identifier l'effusivité thermique du matériau. Le principe est le suivant : un flux de chaleur uniforme est imposé à l'interface de deux échantillons symétriques de section quelconque et d'extension infinie dans la direction perpendiculaire à l'interface. Ceci est réalisé par la mise en place d'un élément chauffant mince occupant toute la section de l'interface. Les échantillons sont assimilables à un milieu infini si le rapport de leur longueur à l'épaisseur de l'élément chauffant est supérieur à 20. Par ailleurs, les faces latérales des deux échantillons sont isolées et le transfert peut être considéré comme unidirectionnel. La réponse en température au cours du temps est mesurée dans le plan du chauffage par un thermocouple. Le comportement asymptotique aux temps longs, du thermogramme ainsi obtenu, est proportionnel à la racine carrée du temps, le coefficient de proportionnalité étant directement lié à l'effusivité des échantillons. Le comportement aux temps courts est influencé par l'inertie thermique de la sonde (élément chauffant + thermocouple) et par la résistance de contact sonde-milieu. Cette méthode permet de mesurer l'effusivité thermique avec une précision de l'ordre de  $\pm 6\%$  pour peu que l'intervalle de temps sur lequel est réalisée l'identification soit correctement choisi de sorte que puissent être négligés les effets inertiels de la sonde aux temps courts et les éventuelles pertes thermiques aux temps longs.

### 5.3.4- Méthodes instationnaires

Les travaux de Bell ont été repris en 1961 par Parker et al. [31] en mettant au point la méthode flash. La méthode flash dans son principe, est une technique impulsionnelle qui consiste à soumettre la face avant d'un échantillon plan à une impulsion de flux de chaleur de courte durée et à observer l'évolution temporelle de la température en un ou plusieurs points de la face arrière de l'échantillon. Outre l'identification de la diffusivité thermique, elle permet d'accéder indirectement à la conductivité thermique lorsque la capacité massique et la masse volumique sont connues.

Les méthodes d'estimation de paramètres liées à la méthode flash ont fait l'objet de nombreuses études. Ces méthodes ont été revues en tenant compte des outils liés aux méthodes d'estimation de paramètres (méthodes inverses). Les trois principaux types de méthodes flash sont présentés ci-après :

1. Estimation à partir de quelques points du thermogramme (méthode des temps partiels).
2. Somme pondérée du thermogramme (méthode des moments temporels partiels).
3. Méthode itérative visant à minimiser l'écart quadratique moyen entre théorie et expérience.

Dans notre travail nous avons utilisé la méthode flash pour obtenir les profils de la température des différents matériaux exposés un flux thermique et on utilise la troisième méthode pour estimer les fonctions de flux de chaleur.

## 5.4- La méthode flash

La méthode flash proposée par J. Parker et al. [31] est actuellement l'une des méthodes de détermination des propriétés Thermo-physiques des matériaux la plus utilisée. Sa mise en œuvre expérimentale est particulièrement simple, et son domaine d'application est très étendu aussi bien en température, que pour la gamme des matériaux expérimentés (isolants, conducteurs, solides, liquides granulaires, etc....).

### 5.4.1- Principe de la méthode flash

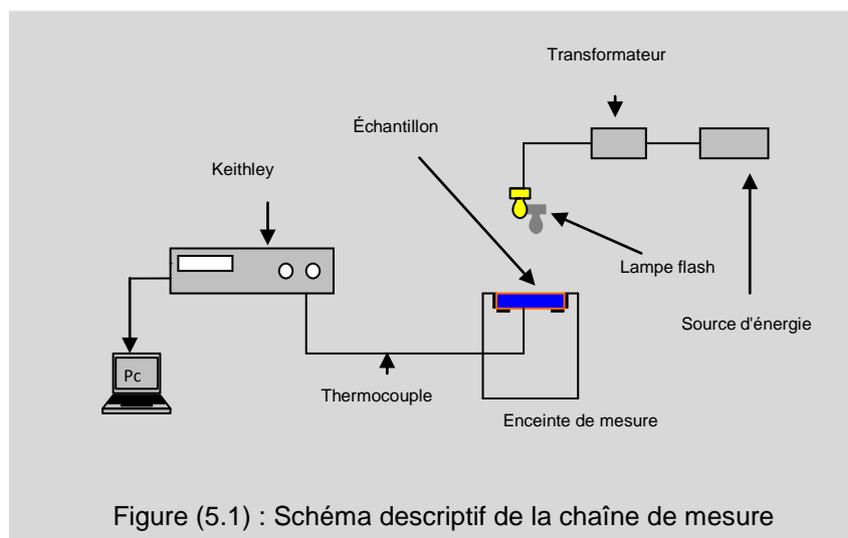
La méthode flash est couramment employée pour la mesure des diffusivités thermiques de matériaux. Elle consiste à exciter un échantillon plan cylindrique de petites dimensions par une brève impulsion thermique sur sa face avant. On mesure ensuite sa réponse en température soit du côté de la face irradiée, on parle alors de technique « face avant », soit sur la face opposée, et il s'agit alors d'une technique de type « face arrière ». La mesure de la température est réalisée soit à

l'aide de thermocouples de type semi-conducteurs ( $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ ), soit à l'aide de détecteurs optiques ( $\text{HgCdTe}$ ) ou encore de simples thermocouples métalliques. L'échantillon est supposé homogène, isotrope et opaque. Ses propriétés Thermo-physiques sont également supposées constantes au cours de l'expérience (faible élévation de la température). Dans le cas idéal correspond à un 'échantillon parfaitement isolé, subissant une impulsion thermique infiniment brève et répartie de façon uniforme sur la face avant.

#### 5.4.2- Description du dispositif expérimental

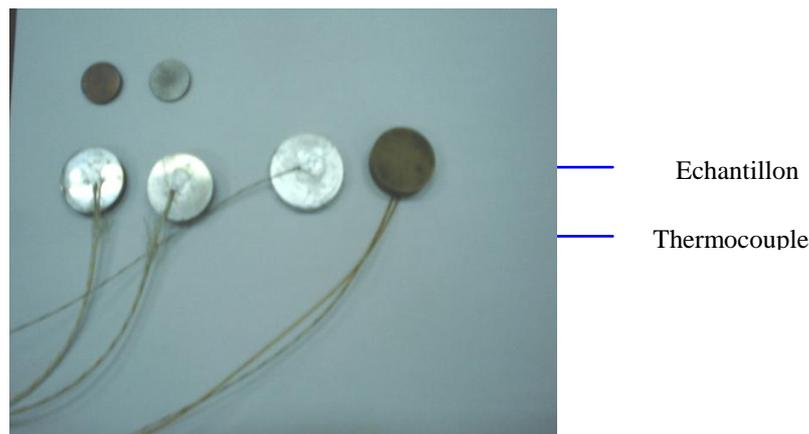
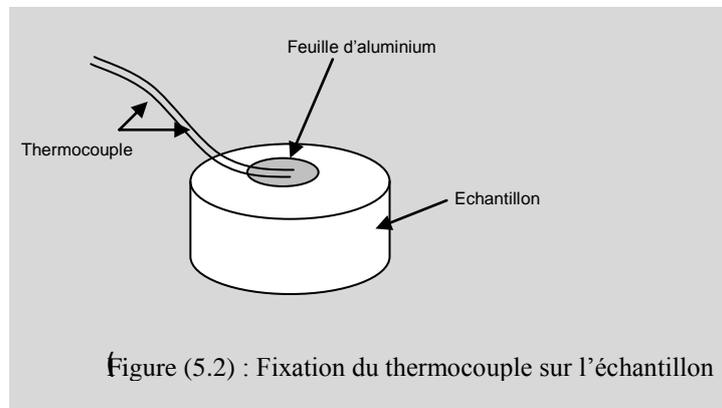
Notre installation de mesure par la méthode flash comprend : une source d'énergie, une enceinte de mesure permettant de porter l'échantillon dans les conditions désirées, un détecteur thermoélectrique, une chaîne d'acquisition et de traitement de données, un micro-ordinateur de contrôle et de commande de l'ensemble des éléments de la chaîne de mesure.

La figure (4.1) décrit la chaîne de mesure de la diffusivité thermique par la méthode flash.



L'excitation de l'échantillon dans notre expérience se fait par deux moyens: une lampe de forte puissance utilisée dans les rétroprojecteurs 400W et un ensemble de lampes flash au xénon au nombre de 20 montées en parallèle et alimentées par une batterie de 50 condensateurs. Les lampes au xénon que nous avons utilisées ainsi que les condensateurs ont été récupérés d'appareils photo jetables. Le détecteur de température est un thermocouple du type K chromel-alumel de  $40\mu\text{V}/^\circ\text{C}$  de gain. Le thermocouple est collé directement sur l'échantillon métallique avec des contacts séparés d'environ 3mm. Dans le cas d'échantillons non conducteurs, une mince feuille d'aluminium est préalablement collée sur celui-ci avant de fixer le thermocouple voir figures (5.2) et (5.3). Les

échantillons semi transparents sont opacifiés en collant sur toute la surface une mince feuille d'aluminium. La lecture et l'acquisition des températures sont faites à l'aide d'un multimètre numérique reconnaissant les quatre types classiques de thermocouples J,K,T et N avec une fréquence minimale de 0.027 secondes (Keithley 2000). Les résultats sont traités par ordinateur.



### 5.4.3- Préparation des thermocouples

Les thermocouples que nous utilisons dans cette expérience sont réalisés à partir de fil de Chromel et d'alumel. Pour réaliser la soudure des deux fils de diamètre  $1/10^{\text{ème}}$  de mm, nous utilisons un montage réalisé aussi sur place et constitué d'un bain de mercure surmonté d'une couche d'huile diélectrique de 2cm empêchant ainsi l'oxydation de la soudure. L'anode est par exemple collée au fond du récipient contenant le mercure, la cathode constitue le thermocouple est alimentée électriquement le rapprochement de la cathode vers le plan de mercure produit un arc qui soude le thermocouple, voir le schéma de principe de ce dispositif figure (5.4). Les thermocouples

sont ensuite étalonnés. Pour ce faire, nous procédons comme suit : nous utilisons un bain thermostaté de température connue au  $1/100^{\text{ème}}$  de degré, qu'on peut faire varier de  $-30^{\circ}\text{C}$  à  $+300^{\circ}\text{C}$ . Les forces électromotrices produites par les thermocouples sont notées ainsi que les températures correspondantes.

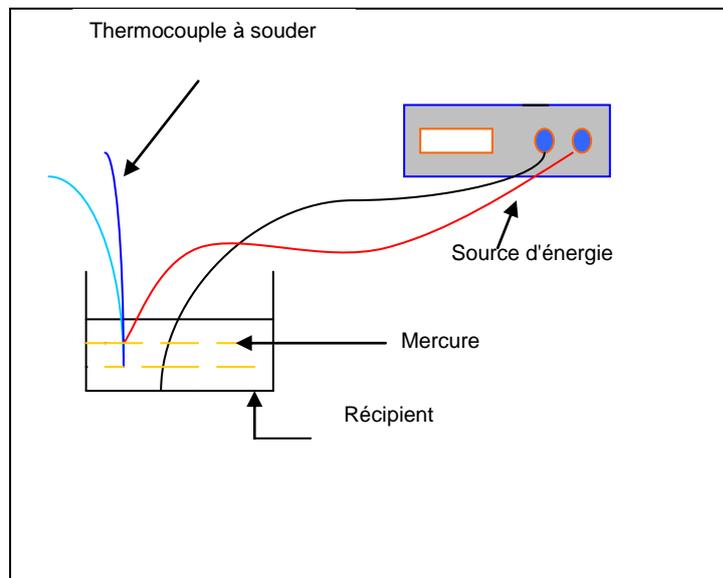


Figure (5.4): Dispositif de soudage des thermocouples

#### 5.4.4- Préparation des échantillons

La préparation des échantillons fait intervenir deux aspects importants qui sont le choix de l'épaisseur et une éventuelle opacification des surfaces.

L'épaisseur ne doit cependant pas être trop importante afin de limiter la masse thermique de l'échantillon et rendre l'exploitation du signal plus aisée. En effet plus l'échantillon est mince, plus le temps de réponse de la face arrière est bref et le signal est intense.

Concernant les échantillons utilisés dans notre expérience, ceux-ci sont préparés au laboratoire de thermique et combustion de l'université de Boumerdès. Les échantillons à étudier se présentent sous forme d'un disque plan de diamètres de 30mm et d'épaisseur variant entre (1mm et 10mm) de différents matériaux avec deux types de surfaces avant, une surface polie et une surface noire pour chaque échantillon.

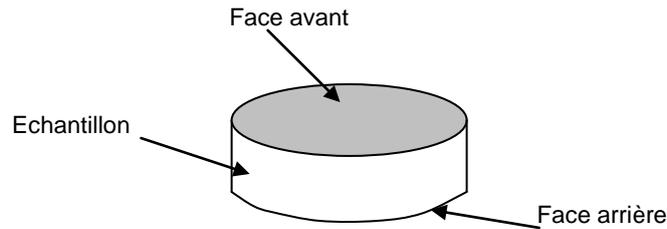


Figure (5.5) : Forme des échantillons utilisés dans les essais

Nous pouvons repérer les matériaux pour chaque échantillon dans le tableau 5.1.

	Matériau	Epaisseur e (mm)	Diffusivité théorique $\alpha$ ( $10^{-6}m^2/s$ )
Echantillons	Acier	5.5	11.85
	Acier inoxydable	4.7	4
	Aluminium	6.1	68.8
	Laiton	5.5	33.2

Tableau (5.1) : Dimensions des éprouvettes

Pour détecter l'interface, nous avons attaqué la surface de face avant avec une préparation de couche noire puis une surface polie pour chaque éprouvette. Nous l'avons repérée pour réaliser ensuite l'implantation des thermocouples. Nous avons choisi de placer les thermocouples au centre de l'échantillon.

### 5.4.5- Enceinte de mesure

L'enceinte de mesure de la diffusivité thermique par la méthode flash est représentée sur la figure (5.7).

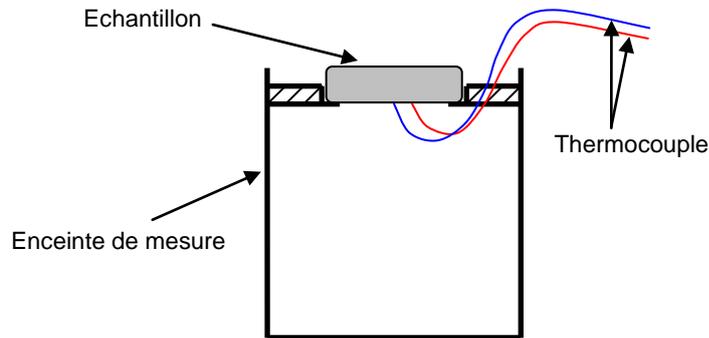


Figure (5.6) : Enceinte de mesure

### 5.4.6- Acquisition et traitement

L'instrument de mesure de la force électromotrice utilisé est un multimètre digital modèle 2000 "Keithley". Ce dernier nous permet de mesurer les températures délivrées par les thermocouples, et peut être relié à un PC grâce à un câble RS 232. Un micro-ordinateur muni d'interfaces assure d'une part la conduite automatique de l'expérience voir figure (4.9), et d'autre part le dépouillement des thermogrammes pour l'identification de la diffusivité thermique.

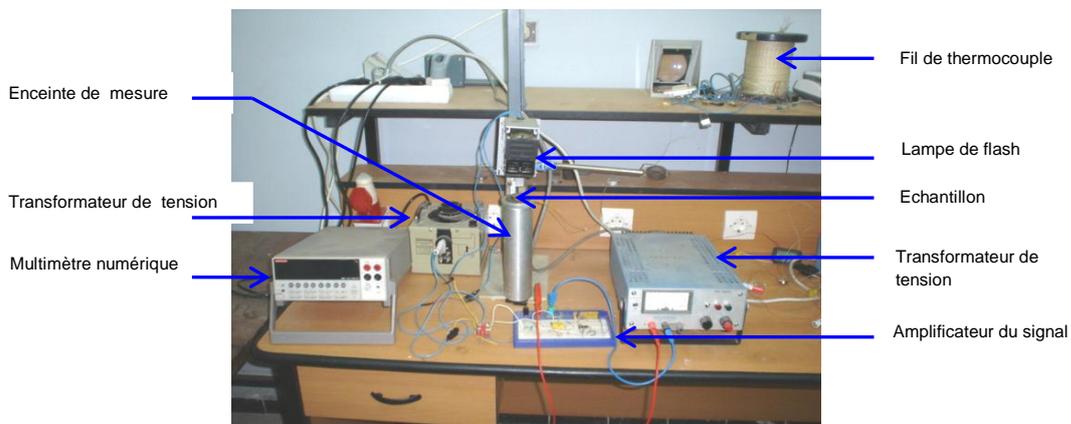


Figure (5.7) : Dispositif de notre mesure de la diffusivité thermique à basse température.

## 5.5- Excitation thermique

Dans notre banc, l'excitation de l'échantillon se fait sur la face avant grâce à deux sources. La première source est constituée d'un ensemble de vingt lampes flash au xénon montées en série et en parallèle et alimentées par une batterie de condensateur de 8800  $\mu\text{F}$ , chargée sous une tension variable de 450 V. La forme de l'impulsion est assimilable à un triangle d'une durée d'environ 3 ms. En pratique, elle est assimilée à un Dirac de flux. Il est clair que c'est le flash qui se rapproche le mieux d'un pic de Dirac. La deuxième source utilisée est une lampe de faible inertie de 400W de puissance avec une durée d'exposition qui atteint les 5s

## 5.6- Résultats et analyses

### Echantillons étudiés :

Pour mener la campagne de mesure, nous avons réalisé un certain nombre d'échantillons homogènes et isotropes d'épaisseurs différentes (entre 2 et 8mm) et de 30mm de diamètre. Les échantillons sont des échantillons métalliques : acier au carbone, aluminium, acier inoxydable type 18/8 et le laiton.

Dans cette première partie d'étude expérimentale et afin d'estimer la fonction d'impulsion du flash, la première source d'impulsion a été utilisé pour les deux types de surface (noire +polie) pour chaque éprouvette, et le même programme de la méthode de gradient conjugué avec problème adjoint utilisé dans le chapitre précédent est utilisé pour l'estimation des fonctions d'impulsions et nous avons obtenu les résultats suivants :

### Acier :

La surface de l'échantillon de l'acier est un disque de 30 mm de diamètre avec une épaisseur constante et supérieure à une valeur critique. Nous nous sommes fixés comme objectif une épaisseur à 5.5 mm.

Les résultats obtenus à température ambiante pour les deux surface (polie et noire) sont donnés par les figures (5.8) et (5.9) et qui présentent respectivement le thermogramme de la température par l'échantillon de l'acier et les flux de chaleur ou les fonctions de l'impulsion de flash estimée à partir de ces mesures de température sont données par la figure (5.10) .

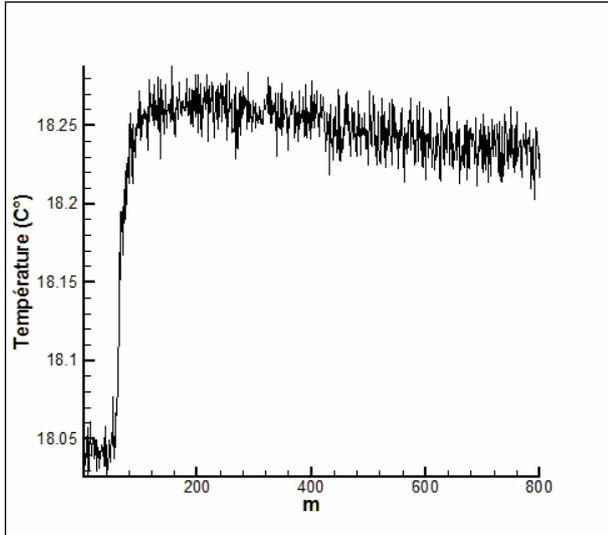


Figure (5.8): Thermogramme à la température ambiante de l'échantillon d'acier surface Noire:  $e = 5.5$  mm,  $R = 30$  mm

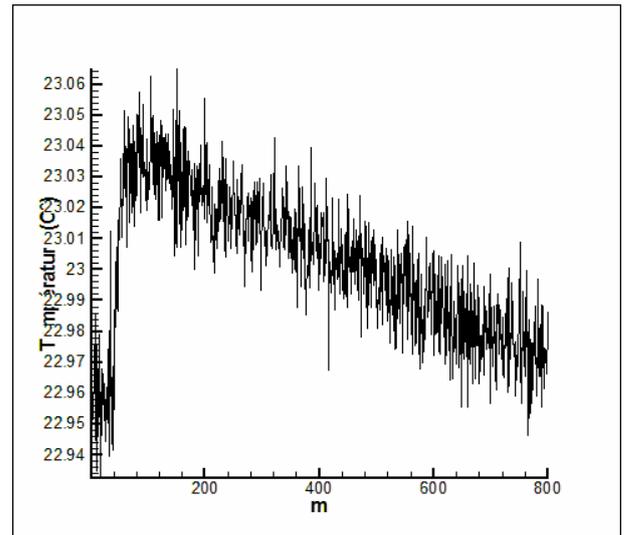


Figure (5.9): Thermogramme à la température ambiante de l'échantillon d'acier surface polie :  $e = 5.5$  mm,  $R = 30$  mm

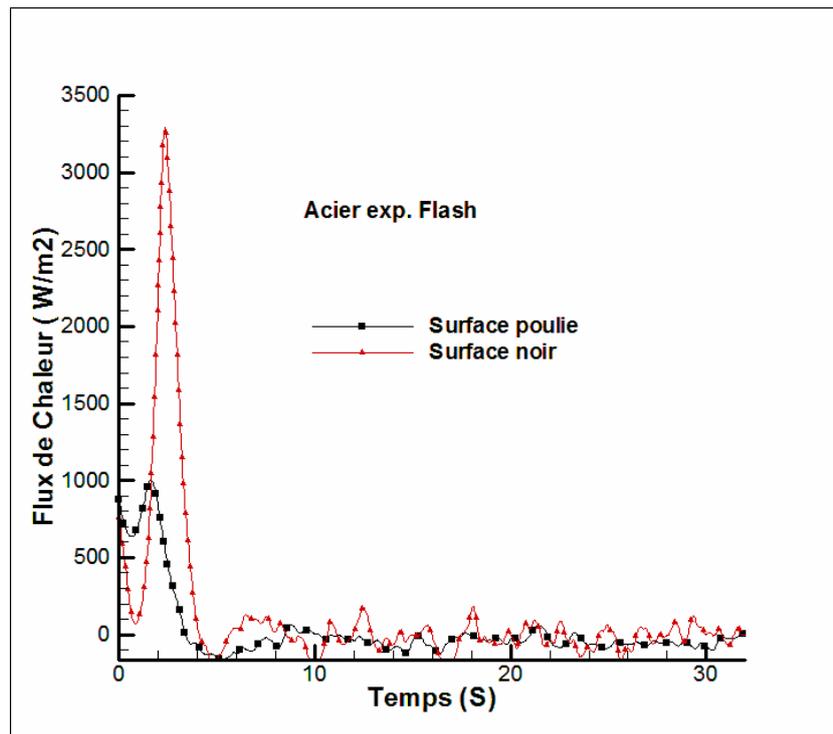


Figure (5.10): L'impulsion des flux de chaleur estimée pour l'échantillon de l'acier pour les deux surfaces par un flash.

**Acier inoxydable :**

Les mesures ont été réalisées sur l'échantillon de l'inox de 30 mm de diamètre et de 4.3 mm d'épaisseur. Les thermo grammes mesurés pour les deux types de surfaces sont présentés dans les figures (5.11) et (5.12) respectivement et les flux de chaleur estimés sont présentés dans la figure (5.12).

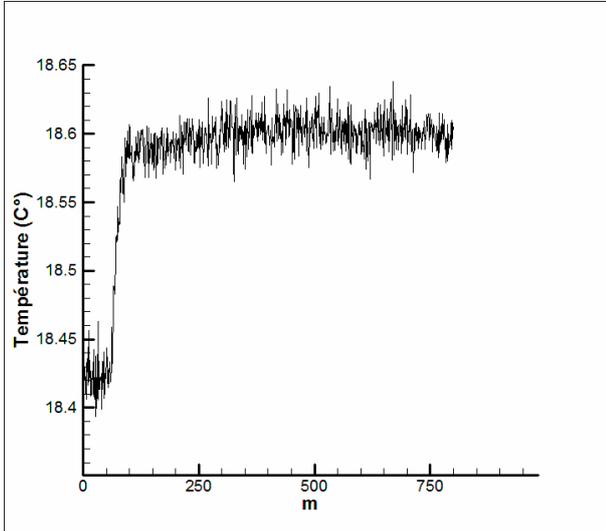


Figure (5.11): Thermogramme à la température ambiante de l'échantillon d'acier inoxydable : surface polie  $e = 4.3$  mm,

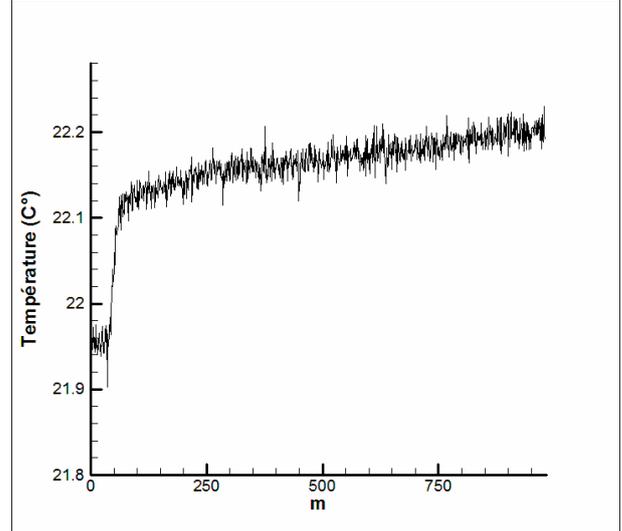


Figure (5.12): Thermogramme à la température ambiante de l'échantillon d'acier inoxydable : surface noire  $e = 4.3$  mm,

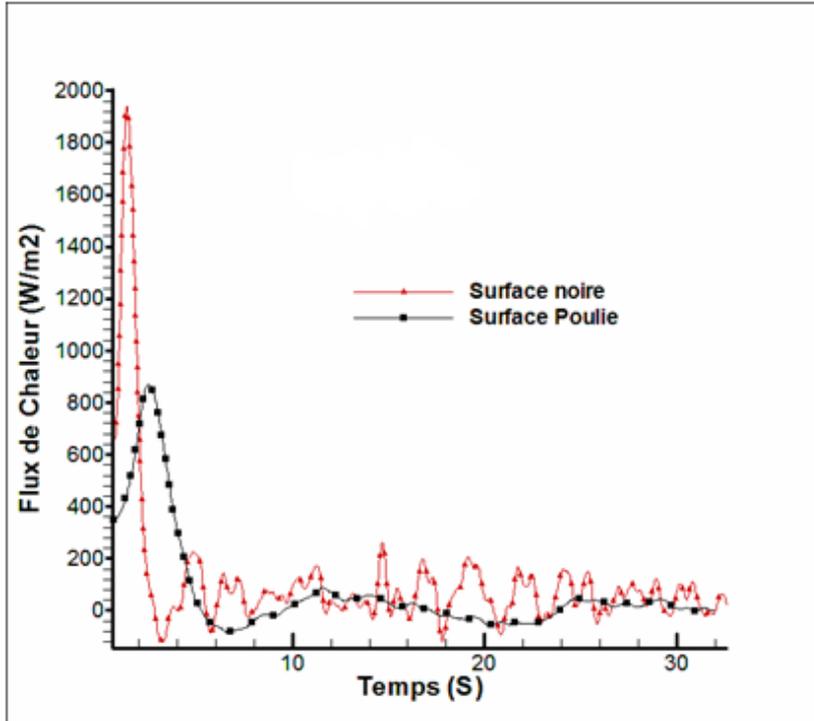


Figure (5.13): L'impulsion des flux de chaleur estimés pour l'échantillon de l'acier inoxydable pour les deux surfaces par un flash.

## Aluminium :

Les mesures ont été réalisées sur l'échantillon de l'inox de 30 mm de diamètre et de 6.1 mm d'épaisseur. Les thermo grammes mesurés pour les deux types de surfaces sont présentés dans les figures (5.14) et (5.15) respectivement et les flux de chaleur estimés sont présentés dans la figure (5.16).

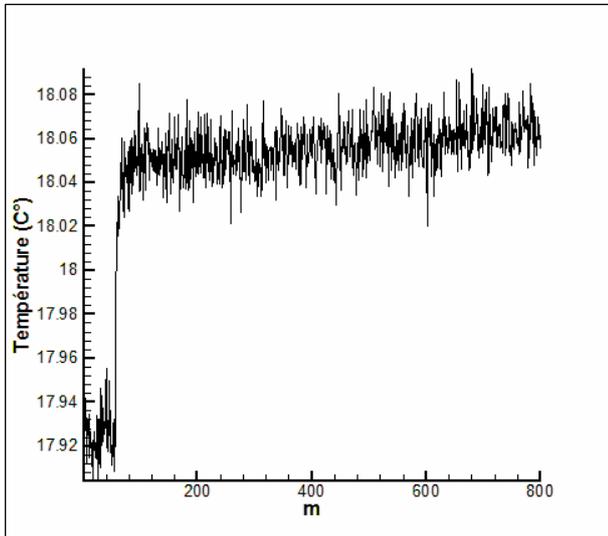


Figure (5.14): Thermogramme à la température ambiante de l'échantillon de l'Aluminium: Surface polie  $e = 6$  mm,

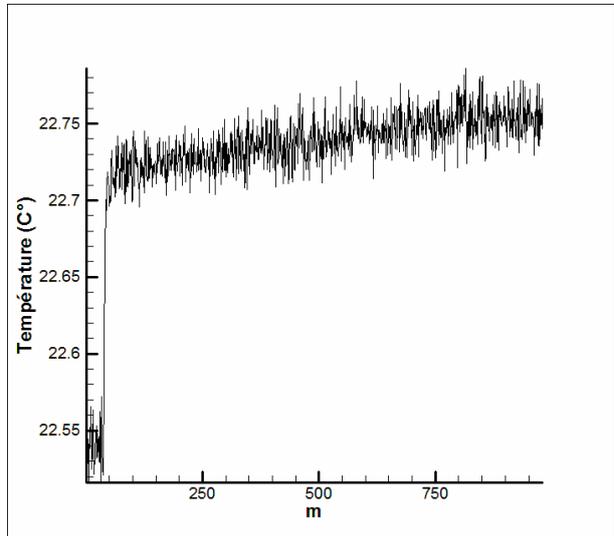


Figure (5.15): Thermogramme à la température ambiante de l'échantillon de l'Aluminium: Surface Noire  $e = 6$  mm,

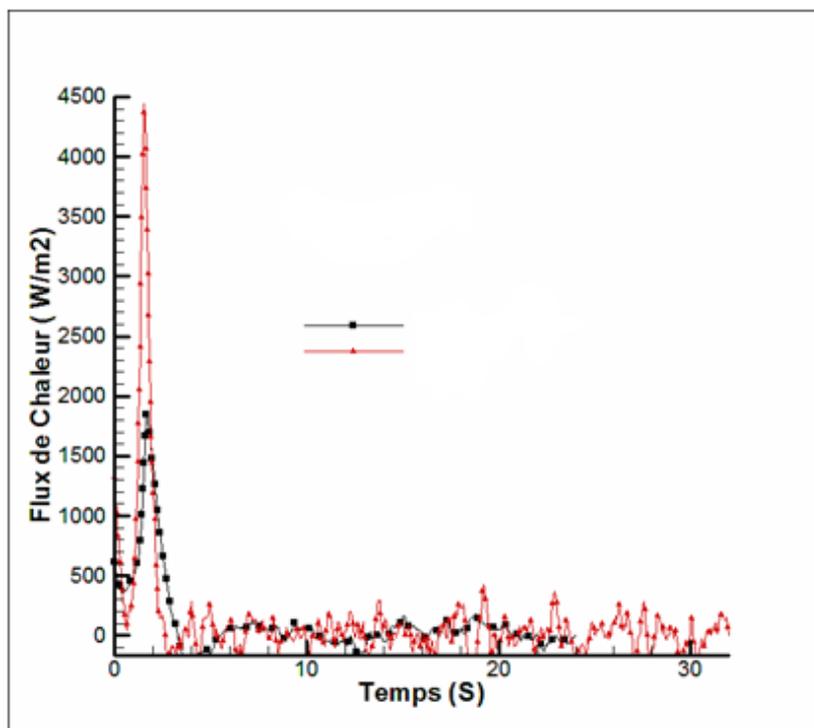


Figure (5.16): Impulsion de flux de chaleur estimé pour l'échantillon de l'Aluminium pour les deux surfaces par un flash.

**Laiton:**

Les mesures ont été réalisées sur l'échantillon de laiton de 30 mm de diamètre et de 3.3 mm d'épaisseur. Les thermogrammes mesurés pour les deux types de surfaces sont présentés dans les figures (5.17) et (5.18) respectivement et les flux de chaleur estimés sont présentés dans la figure (5.19).

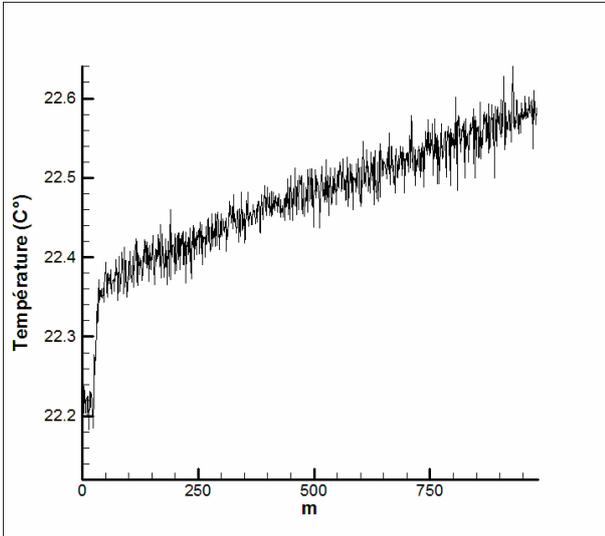


Figure (5.17): Thermogramme à la température ambiante de l'échantillon de laiton: Surface polie  $e = 3.3$  mm,

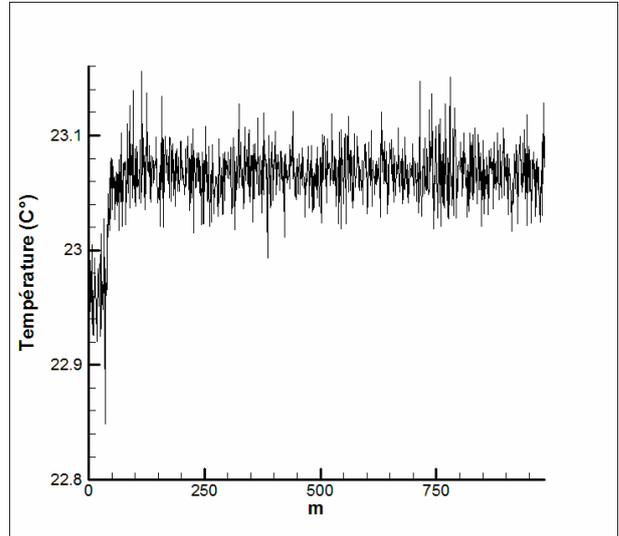


Figure (5.18): Thermogramme à la température ambiante de l'échantillon de laiton: Surface Noire  $e = 3.3$  mm,

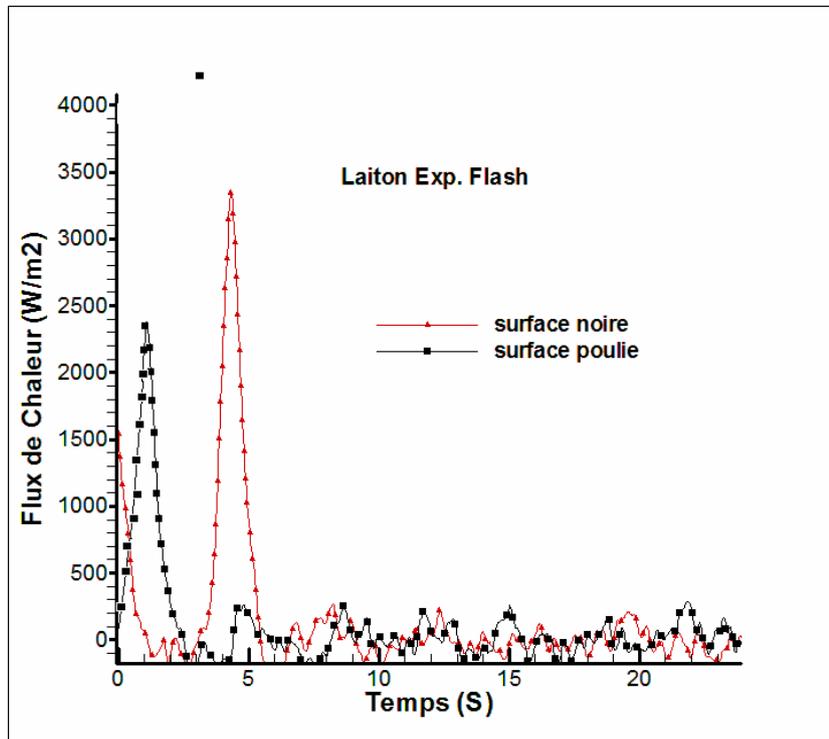


Figure (5.19): Impulsion de flux de chaleur estimé pour l'échantillon du Laiton pour les deux surfaces par un flash.

D'après les profils de température obtenus par la méthode de flash nous avons constaté que les augmentations des températures enregistrées dans les échantillons des quatre matériaux se différencient en fonction de la surface exposée à l'impulsion de flux de chaleur, dans tous les échantillons dont la surface est noire, l'augmentation est plus élevée par rapport aux surfaces polies c'est-à-dire le flux de chaleur absorbé par les surfaces noires est plus élevé que ce qui est absorbé par les surfaces polies, par exemple dans l'échantillon de l'acier l'augmentation de la température dans la surface noire est presque  $0.2\text{ C}^\circ$  par contre dans la surface polie nous avons enregistré une augmentation de  $0.1\text{ C}^\circ$ . Cette explication a été confirmée par les impulsions de flux de chaleur estimées dans les figures (5.10), (5.13), (5.16) et (5.19) par la méthode de gradient conjugué avec problème adjoint. Les flux de chaleur obtenus dans cette expérience ont été convergés pour un critère d'arrêt le égale à 0.01, au delà de cette valeur les solutions deviennent instables. Les résultats de flux de chaleur estimés pour les deux surfaces pour chaque matériau représentent des augmentations brusques de flux de chaleur (un pic) de même ordre de grandeur pour toutes les surfaces noires et se différencient pour les surfaces polies selon la qualité et la brillance des surfaces. Ce qui n'est pas normale dans ces résultats c'est la durée de ces impulsions de flash qui sont réellement de l'ordre de  $1/70$  seconde et qui est de l'ordre de 1 à 2 secondes dans nos résultats, ceci est dû à plusieurs raisons parmi les :

- aux bruits de mesures qui sont très importants comparés avec l'augmentation des températures durant l'expérience.
- L'erreur dans la résolution du problème direct (1 D) et par une méthode itérative.
- Les conditions expérimentales.
- Les erreurs dans les valeurs des propriétés thermo physiques.
- Les erreurs de mesures.
- L'ordre de grandeur de la durée du flash.

Dans la deuxième partie de cette étude expérimentale nous avons utilisé une lampe comme source de chaleur avec une durée de 5 secondes avec les mêmes échantillons pour les deux surfaces et les résultats obtenus ci-dessous montrent que les surfaces noires pour les quatre matériaux absorbent un flux de chaleur plus élevé par rapport aux surfaces polies, ainsi que les valeurs des flux de chaleur estimés ont le même ordre de grandeur ce qui donne confiance à la fiabilité et la performance de notre méthode. Il est clair que la durée des flux de chaleur sont à l'ordre de 5 secondes ce qui représente un résultat très satisfaisant.

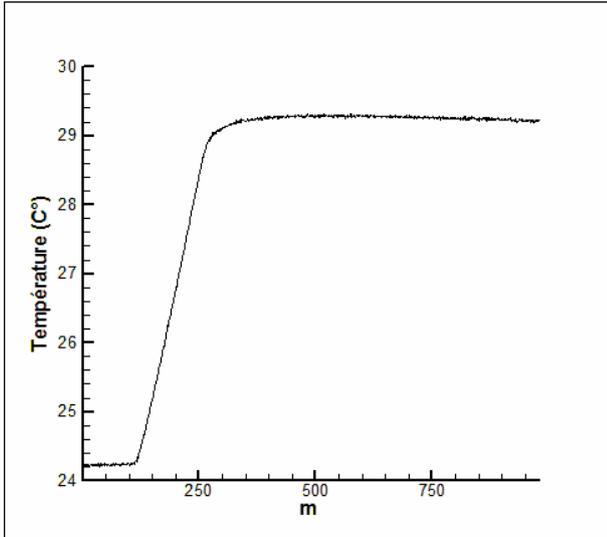


Figure (5.20): Thermogramme à la température ambiante du même échantillon d'acier, surface polie par l'expérience de la Lampe.

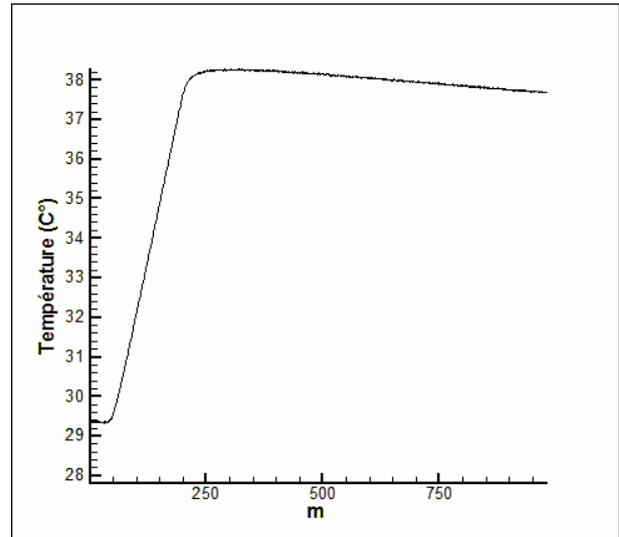


Figure (5.21): Thermogramme à la température ambiante du même échantillon d'acier, surface noire par l'expérience de la Lampe.

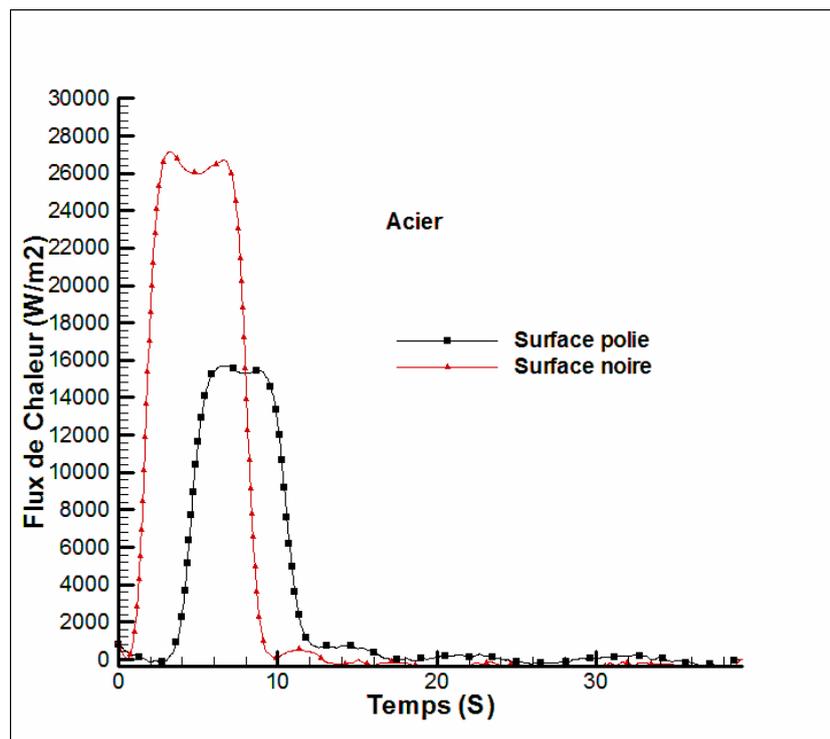


Figure (5.22): les fonctions de flux de chaleur estimé pour l'échantillon de l'acier pour les deux surfaces par l'expérience de la Lampe.

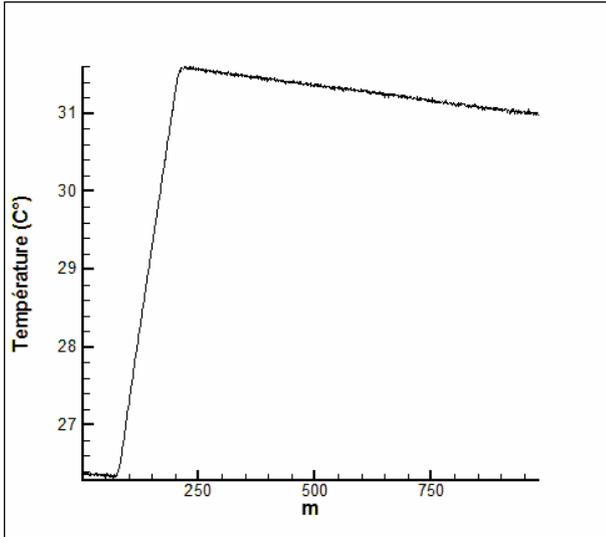


Figure (5.23): Thermogramme à la température ambiante du même échantillon l'Aluminium, surface polie par l'expérience de la Lampe.

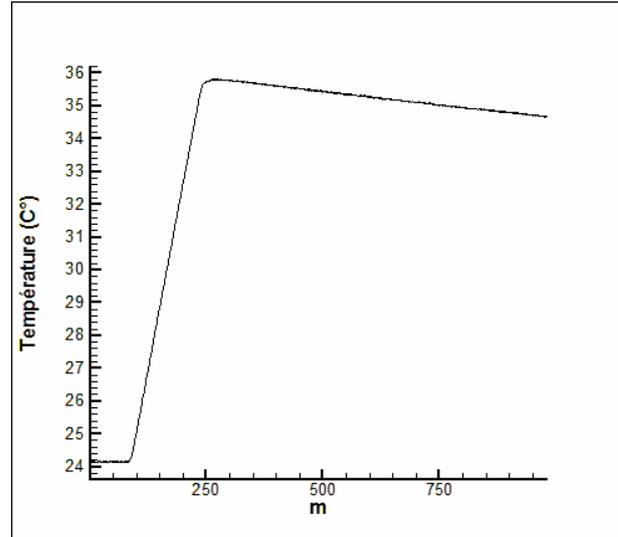


Figure (5.24): Thermogramme à la température ambiante du même échantillon l'Aluminium, surface noire par l'expérience de la Lampe.

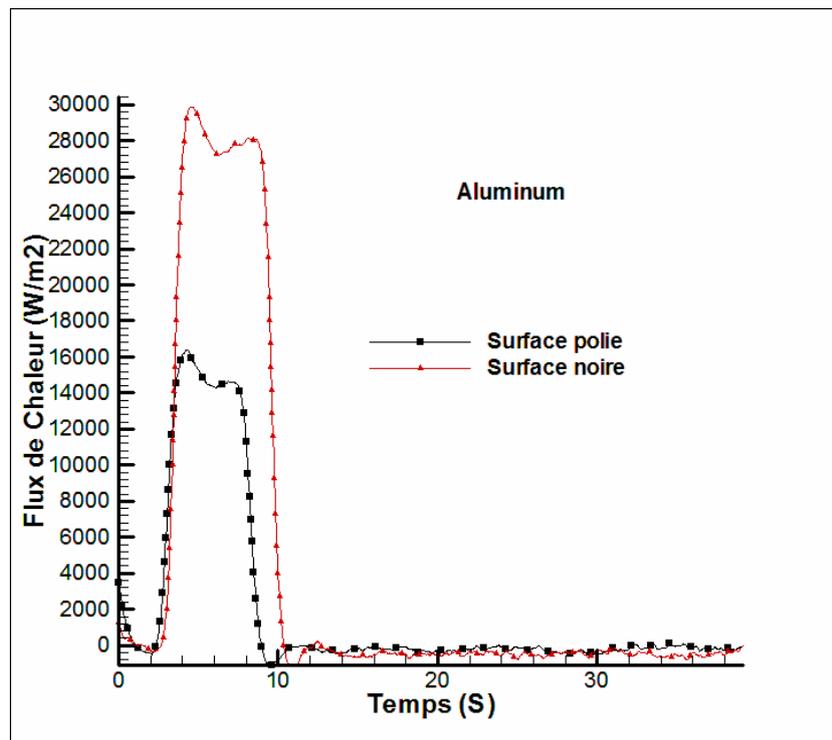


Figure (5.25): les fonctions de flux de chaleur estimé pour l'échantillon de l'Aluminium pour les deux surfaces par l'expérience de la Lampe.

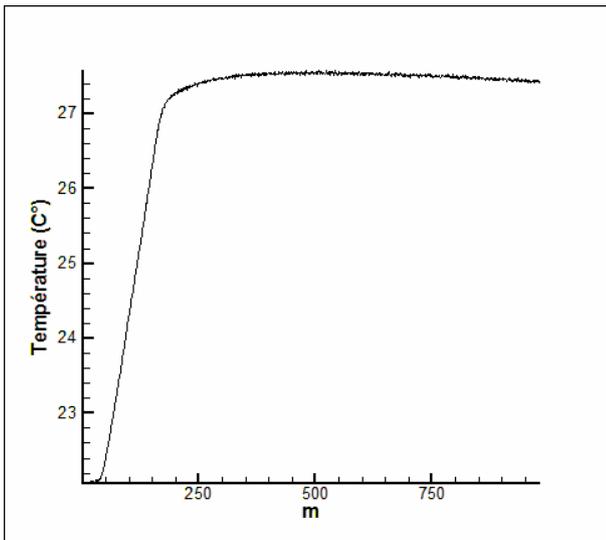


Figure (5.26): Thermogramme à la température ambiante du même échantillon d'acier inoxydable, surface polie par l'expérience de la Lampe.

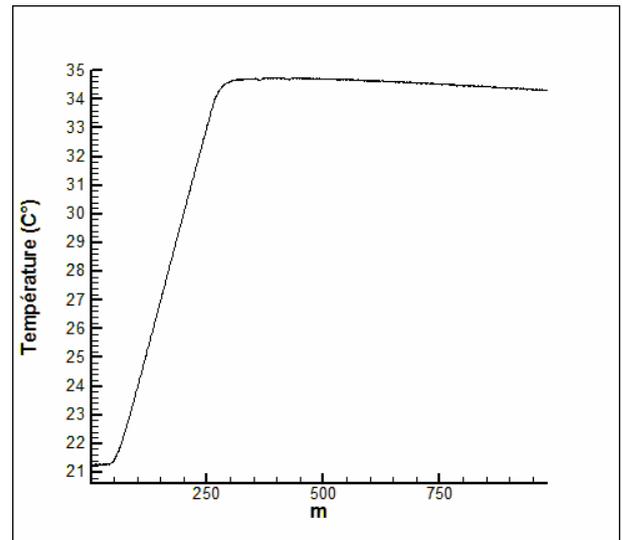


Figure (5.27): Thermogramme à la température ambiante du même échantillon d'acier inoxydable, surface noire par l'expérience de la Lampe.

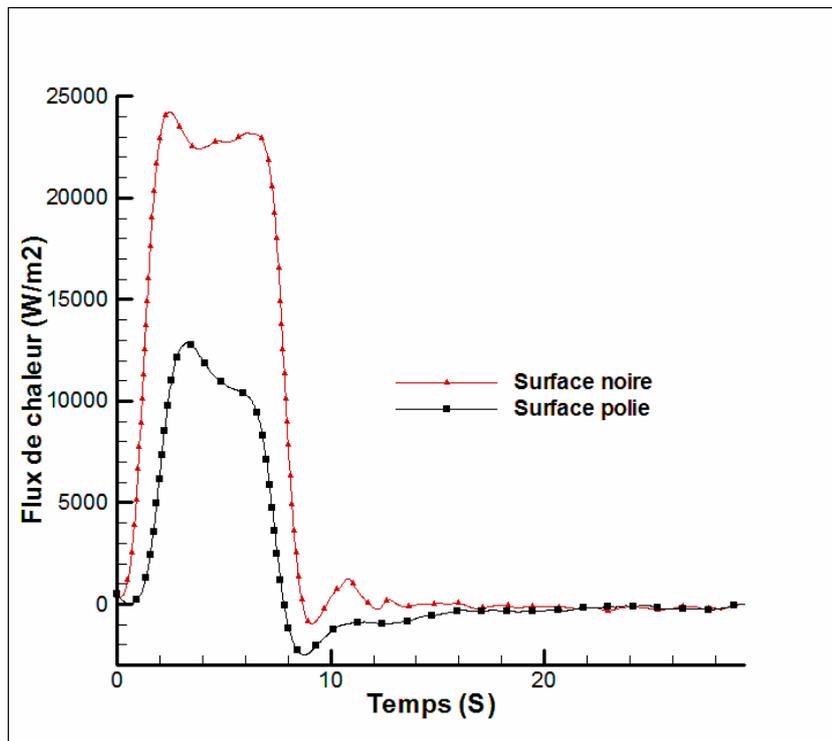


Figure (5.28): les fonctions de flux de chaleur estimé pour l'échantillon de l'acier inoxydable pour les deux surfaces par l'expérience de la Lampe.

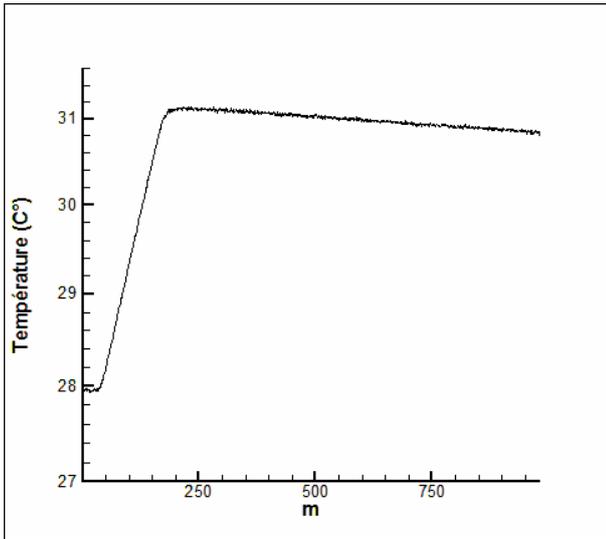


Figure (5.29): Thermogramme à la température ambiante du même échantillon du Laiton, surface polie par l'expérience de la Lampe.

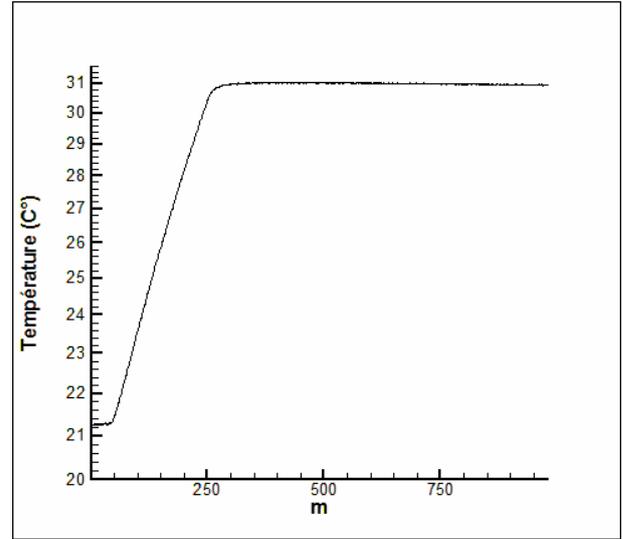


Figure (5.30): Thermogramme à la température ambiante du même échantillon du Laiton, surface noire par l'expérience de la Lampe.

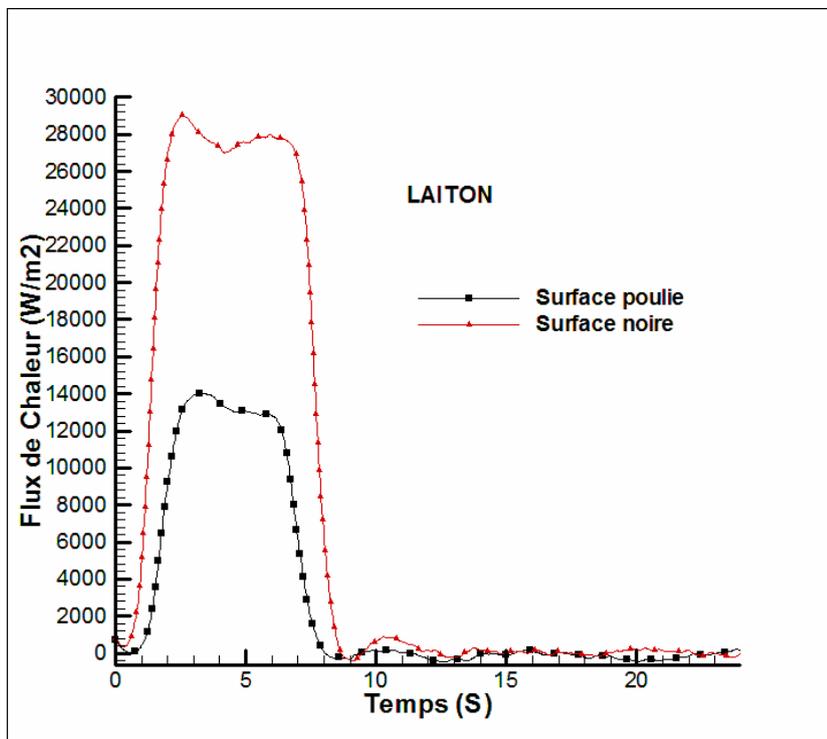


Figure (5.31): les fonctions de flux de chaleur estimé pour l'échantillon du Laiton pour les deux surfaces par l'expérience de la Lampe.

## **Conclusion**

Dans cette partie d'étude on a essayé de valider avec des résultats expérimentales la performance de la méthode du gradient conjugué avec problème adjoint pour l'estimation de fonction ainsi que la fiabilité du programme développé dans le chapitre précédent. Dans cette étude expérimentale on a prouvé expérimentalement l'une des propriétés des surfaces noires qui est l'absorption du maximum des rayons lumineux, nous avons constaté aussi que pour que l'estimation des flux de chaleurs qui dure une longue période sont faciles à estimer par contre pour les flux de forme flash sont très délicates à estimer.

*Conclusion générale*  
*Et*  
*Recommandations*

## Conclusion et recommandations

### Conclusion et recommandations

Dans ce présent mémoire, notre objectif principal est de faire une analyse de conduction thermique inverse pour l'identification soit de paramètres (des constantes thermo physiques), ou bien de fonction (fonction de flux de chaleur) dans un milieu isotrope par deux techniques inverses en utilisant deux types de mesures de température, des mesures de température simulées numériquement et des mesures réels pris par des thermocouples.

Dans notre travail nous avons commencé par une étude bibliographique où il a été donné un aperçu sur l'historique des problèmes inverse de la conduction de la chaleur et les différents motifs qui ont participé au développement et l'avancement de ce type de problèmes de mathématiques appliquées. Enfin, cette étude a été terminée par un aperçu de quelques travaux faits durant ces dernières années. Puis nous avons présenté un résumé théorique du mode de transfert thermique par conduction avec une introduction aux problèmes inverses de la conduction de la chaleur.

Nos travaux pratiques ont débuté d'abord par l'estimation inverse des propriétés Thermo-physiques où nous avons essayé d'identifier la conductivité thermique et la chaleur volumique simultanément par la méthode de Levenberg-Marquardt pour l'estimation des paramètres par l'utilisation des mesures de températures simulées numériquement en deux points de mesure par la résolution du problème directe de la conduction thermique. Un programme fortran 90 a été élaboré à cet effet. Dans la première simulation des mesures exactes de température ont été prises; c'est-à-dire des mesures prises directement à partir de la résolution du problème direct. Des résultats exacts ont alors été obtenus. Dans la deuxième simulation et afin de se rapprocher des conditions expérimentales réelles, nos mesures exactes ont été perturbées par un ajout de bruit introduisant des erreurs de types random. Les résultats obtenus montrent des déférentes déviations par rapport aux valeurs exactes en fonction des amplitudes des erreurs utilisées où la précision restent relativement bonne, ce qui confirme la performance de la méthode de Levenberg-Marquardt pour l'estimation des paramètres.

La deuxième étude a été consacrée à l'estimation de la fonction de flux de chaleur dans un problème de conduction inverse par la méthode de gradient conjugué avec problème adjoint pour l'estimation des fonctions. Dans cette étude nous avons utilisé des mesures de température simulées comme dans l'estimation de paramètres mais en un seul point de mesure. Les résultats obtenus montrent une bonne estimation. Ceci est directement lié à la position des capteurs et à l'amplitude des erreurs dans les mesures de température. Puis nous avons utilisé des mesures de température réelles pour valider notre programme avec des données expérimentales obtenues par l'expérience de la méthode flash pour différents échantillons de matériau. Les résultats obtenus sont bons et confirment donc la fiabilité de notre programme et l'efficacité de la technique utilisée dans cette étude.

Devant l'importance de ce sujet d'avenir qui représente une introduction aux problèmes inverses transfert de chaleur, nous espérons ouvrir une porte à d'autres études plus détaillées. Ces études prendront en considération d'autres paramètres qui tiendraient compte de la complexité et de l'importance pratique du problème en ajoutant les autres modes de transfert thermique comme le rayonnement, la convection, les modes mixtes, la métallurgie, les problèmes à deux ou trois dimensions ainsi que l'utilisation d'autres dispositifs expérimentaux afin d'obtenir des mesures plus précises. Après quoi, des applications à usage industriel et commercial peuvent être envisagées.

## Référence bibliographique

- [1] **J. Hadamard**, Lecture on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations, Yale University Press, New Haven,CT, 1923.
- [2] **A.N. Tikhonov**, **Dokl. Akad. Nauk SSSR** 153 (1963).
- [3] **O.M. Alifanov**, Inverse Heat Transfer Problems, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [4] **J.V. Beck, B. Blackwell, C.R. St-Clair Jr.**, Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems, Wiley Interscience, New York,1985.
- [5] **M. Necati Ozisik and Helcio R. B. Orlande**, Inverse heat transfer. Taylor & Francis, New York, 2000.
- [6] **N. M. AL-NAJEM. M. N. OZISIK**, On the solution of three-dimensional inverse heat conduction in finite media Int. J. Heat Mass transfer. Vol. 28. No. II, pp. 2121-2128, 1985.
- [7] **C. H. Huang and M. N. Ozisik** A direct integration approach for simultaneously estimating spatially varying thermal conductivity and heat capacity Int. J. Heat and Fluid Flow, Vol. 11, No. 3, September 1990.
- [8] **Y. Jarny, M. N. Ôzisik, J. P. Bardon**, A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction. Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 34, No. I I, pp. 2911-2919, 1991.
- [9] **C. H. Huang and M. N. Ozisik**. Optimal regularization method to determine the strength of a plane surface heat source- Int. J. Heat and Fluid Flow, Vol. 12, No. 2, June 1991.
- [10] **M. N. Ôzisik, N. M. AL-Najem**, Estimating Unknown Surface Condition In Composite Media. INT. COMM. HEAT MASS TRANSFER Vol. 19, pp. 69-77, 1992 USA
- [11] **Cheng-Hung Huang et Jan-Yuan Yan** "An inverse problem in predicting temperature dependent heat capacity per unit volume without internal measurements". **INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING, VOL. 39,605-618 (1996)**
- [12] **Jian Su et Geoffrey F. Hewitt** "Inverse heat conduction problem of estimating time-varying heat transfer coefficient" Numerical Heat Transfer, Part A, 45: 777-789, 2004
- [13] **Pao-Tung Hsu**, Estimating the boundary condition in a 3D inverse hyperbolic heat conduction problem, Applied Mathematics and Computation 177 (2006) 453-46
- [14] **Xiao-Wei Gao** "A new inverse analysis approach for multi-region heat conduction BEM using complex-variable-differentiation method " Engineering Analysis with Boundary Elements 29 (2005) 788.
- [15] **H. Jiang et T.H. Nguyen** "Control of the boundary heat flux during the heating process of a solid material" International Communications in Heat and Mass Transfer 32 (2005) 728-738

- [16] **S L.R. Mendonça, C. R.B. Filho, Z.E. da Silva.** Transient conduction in spherical fruits: method to estimate the thermal conductivity and volumetric thermal capacity *Journal of Food Engineering* 67 (2005) 261–266
- [17] **P. L. Woodfield, M. Monde, Y. Mitsutake,** On estimating thermal diffusivity using analytical inverse solution for unsteady one-dimensional heat conduction *International Journal of Heat and Mass Transfer* xxx (2006) xxx–xxx
- [18] **Chia-Lung Chang, Ming Chang,** Non-iteration estimation of thermal conductivity using finite volume method *International Communications in Heat and Mass Transfer* 33 (2006) 1013–1020
- [19] **Tsung-Chien Chen** "Inverse estimation of heat flux and temperature in multi-layer gun barrel"
- [20] **Ozisik, M. N.** *Heat Conduction*, 2nd ed., Wiley Interscience, New York, 1993.
- [21]. **G. E. Forsythe and W. R. Wasow,** *Finite Difference Methods for Partial Differential Equations.* Wiley. New York. 1960.
- [22] **Tahar Loulou, Elaine P. Scott,** An inverse heat conduction problem with heat flux Measurements. *International Journal For Numerical Methods In Engineering.*
- [23] **Alifanov, O.M., Artyukhin, E.A. and Romyantsev, S.V.** *Extreme Methods for Solving Ill-Posed Problems with Applications to Inverse Heat Transfer Problems,* Begell House Inc., New York (1995),
- [24] **Beck, J. V., B. Blackwell, and C. R. St. Clair, Jr.,** *Inverse Heat Conduction: III Posed Problems,* Wiley-Interscience, New York, 1985.
- [25] **Hensel, E.,** *Inverse Theory and Applications for Engineers,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991
- [26] **Murio, D. A.,** *The Mollification Method and the Numerical Solution of III-Posed Problems,* Wiley-Interscience, NY, 1993.
- [27] **Kurpisz, K. and A. J. Nowak,** *Inverse Thermal Problems,* Computational Mechanics Publications, Boston, MA, 1995.
- [28] **Raynaud (M.).** Influence of convection on the boiling curve of LN2 estimated around the periphery of a rotating disk. 1st European, Thermal Sciences and 3rd UK National Heat Transfer Conference, Vol. I, pp. 147-152, Birmingham, UK, sept. 1992.
- [29] **Beck (J.V.).** Nonlinear estimation applied to the nonlinear inverse heat conduction problem, *Int. J. Heat Mass Transfer,* Vol. 13, 1970.
- [30] **Beck (J.V.), Blackwell (B.) et ST. Clair (C.).** *Inverse heat conduction, ill-posed problems.* Wiley interscience, New York, 308 p., 1985.
- [31] **W. J. Parker, R. J. Jenkins, C. P. Butler and G. L. Abbott,** *J. Appl. Phys.,* 32 (1961) 1679.