

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA-BOUMERDES



Faculté des **Hydrocarbures** et de la **Chimie**

Thèse de Doctorat

Présentée par

RAAB Sadia

Filière : Génie Électrique

Option : Commande Automatique

Contribution à la Modélisation et la Commande des Systèmes à Paramètres Distribués par Approches Floues

Soutenue publiquement le 13 Octobre 2022 devant le jury :

Mr	BOUKHETALA	Djamal	Prof	Ecole Nationale Polytechnique	Président
Mr	RAHMOUNE	Fayçal	Prof	Université de Boumerdès	Examineur
Mr	CHAIB	Ahmed	Prof	Université de Boumerdès	Examineur
Mr	KARA	Redouane	Prof	Université de Tizi-Ouzou	Examineur
Mr	HABBI	Hacene	Prof	Université de Boumerdès	Rapporteur
Mr	MAIDI	Ahmed	Prof	Université de Tizi-Ouzou	Co-Rapporteur

Année Universitaire : 2021/2022

Remerciements

Le travail présenté dans cette thèse a été effectué au sein Laboratoire Automatique Appliquée (LAA), à l'UNIVERSITE M'HAMED BUGARA – BOUMERDES.

Je remercie tout d'abord le Professeur **HABBI Hacène**, le directeur de cette thèse, pour la confiance et le soutien sans faille qu'il m'a accordée. Il m'a conseillée avec franchise et efficacité dans mes choix scientifiques tout en m'en laissant la liberté, j'ai beaucoup appris à son contact sur la façon de mener un travail de recherche. Il s'est toujours rendu disponible, avec sa rigueur scientifique.

Je remercie aussi le Professeur **MAIDI Ahmed**, le codirecteur de thèse, de m'avoir accueilli dans le Laboratoire de Conception et de Conduite des Système de Production (L2CSP), à l'UNIVERSITE MOULOUD MAMMERY-TIZI-OUZOU, m'a guidée dans mes recherches, m'a introduite et initiée à ce monde privilégié de la recherche. Pour son soutien, sa disponibilité et l'aide qu'il m'a apportée tout au long de ma thèse. Il a plusieurs fois trouvé la clef scientifique qui m'a permis de résoudre le problème auquel j'étais confronté.

Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur **BELHARET Karim**, Maitre de Conférences Classe B à l'HEI Châteauroux, Ecole d'Ingénieur, Campus Centre, France pour sa précieuse collaboration. Je le remercie vivement pour sa patience, ses conseils précieux, ses encouragements et son accueil chaleureux durant mon stage scientifique au Laboratoire PRISME.

Mes vifs remerciement s'adresse à Monsieur **BOUKHETALA Djamal**, Professeur à l'Ecole National Polytechnique, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de thèse et le temps consacré pour la lecture de cette thèse. Ses remarques précieuse vont surment améliorer la qualité de cette thèse.

Je voudrais également exprimer toute mes reconnaissances, à Monsieur **RAHMOUNE Fayçal**, Professeur à l'Université Boumerdès, et également, ainsi qu'à Monsieur **CHAIB Ahmed**, Professeur à l'Université Boumerdès, et à Monsieur **KARA Redouane**, Professeur à l'Université Tizi-Ouzou, pour s'être penchés sur cette thèse et l'avoir enrichi par leurs questions, leurs remarques et commentaires lors de la soutenance publique.

Je finie ces remerciements, mon plus grand merci va à toute ma famille, en particulier ma grand-mère, mes parents, mes frères, mes soeurs, mon mari et mes enfants, qui ont été faire preuve de tant de patience et de compréhension face à l'accaparement lié à la finalisation de la thèse.

Enfin, je remercie tous ceux que je n'ai pas cités et qui m'ont soutenu ou qui ont contribué à la finalité de cette thèse.

Dédicaces

*Je dédie cette thèse
A mes parents et A ma grand-mère
A toute ma famille
A la mémoire de Mon grand-père
Mon beau-père*

ملخص

التمثيل المكاني والزمني للمتحرك يخص بشكل طبيعي مجموعة متنوعة من الأنظمة الإنتاج مثل المبادلات الحرارية والمفاعلات الكيميائية والعمليات البيولوجية. يشار إليها عادة بإسم أنظمة ذات الخصائص الموزعة، يتم تمثيل هذه العمليات بنماذج تتضمن مشتقات زمنية ومكانية للكميات المميزة. تحليل ومراقبة أنظمة ذات الخصائص الموزعة هو التحدي الذي تواجهه آلية الطرائق بسبب عدم وجود نظرية عامة مخصصة. و بهذا المعنى نرى حلول تحكم مميزة تم إنشاؤها في أغلب الأحيان بواسطة فصول أنظمة ذات الخصائص الموزعة ويتم تصنيفها عمومًا إلى مجموعتين من الأساليب تسمى التقريب المسبق والتقريب اللاحق. في مجال التحكم الأنظمة ذات الخصائص الموزعة غير الخطية، هناك حاجة ملحة لتوسيع قابلية تطبيق طرق معينة للتحكم في أنظمة ذات الخصائص الموزعة الخطية، والتي كانت متقنة تمامًا حتى الآن نظرًا لأساسها الرياضي المثبت. في ضوء هذا النقص، تم بذل جهود كبيرة في هذا الاتجاه بهدف تقديم حلول جديدة يتم تطبيقها على فئة واحدة أو أكثر من نظام ذات الخصائص الموزعة. في هذا الجانب المحدد، أظهر الذكاء الاصطناعي من خلال تقنياته الحسابية القوية أنه يفرض نفسه في السنوات الأخيرة، كما ورد في العديد من الأعمال حول تطوير وحدات التحكم على أساس نماذج غامضة. مساهمتنا في هذه الأطروحة تندرج في قلب هذه المشكلة مع استراتيجية تحكم جديدة تمامًا تعتمد على نماذج غامضة تفاضلية جزئية متقدمة. يعتمد النهج المقترح على مفهوم التحكم الهندسي عند الحدود ويتم تطويره وفقًا لنهج التطوير المحلي القائم على تقريب غامض للمتحرك زمني و مكاني. إنها مقارنة جديدة تمامًا، مدعومة ببراهين الاستقرار التي أنشأناها، حسب الحالة، بمعنى ليابونوف وشبه المجموعات. تم توضيح فعالية استراتيجية التحكم الهندسي الغامض المقترحة في المحاكاة على أمثلة تطبيقية مختلفة ذات تعقيد وأبعاد متفاوتة.

الكلمات المفتاحية: أنظمة ذات الخصائص الموزعة غير الخطية ؛ النموذج التفاضلي الجزئي ؛ التحكم الهندسي على الحدود ؛ نموذج غامض مشتق جزئي ؛ التحكم الهندسي غامض على الحدود ؛ استقرار الحلقة المغلقة.

Résumé

La représentation spatio-temporelle de dynamique est naturellement calquée à une variété de systèmes de production tels que les échangeurs de chaleur, les réacteurs chimiques et les procédés biologiques. Désignés communément par systèmes à paramètres distribués (SPD), ces procédés sont représentés par des modèles mettant en jeu des dérivées temporelles et spatiales de grandeurs caractéristiques. L'analyse et la commande des systèmes à paramètres distribués est un challenge auquel est confrontée l'automatique des systèmes en raison de l'absence de théorie générale dédiée. C'est dans ce sens que l'on voit distinguer des solutions de contrôle distinctes établies le plus souvent par classes de SPD et catégorisées généralement dans deux groupes d'approches dites de pré-approximation et de post-approximation. Dans le domaine de la commande de SPD non linéaires, il y a besoin pressant d'élargir l'applicabilité de certaines méthodes de commande de SPD linéaires, jusque-là assez maîtrisées au vu de leur fondement mathématique prouvé. Au vu de ce manquement, d'importants efforts se sont d'ailleurs consentis dans ce sens en vue d'introduire des solutions nouvelles relayées à une ou plusieurs classes de SPD. Sur ce volet précis, l'intelligence artificielle à travers ses techniques computationnelles puissantes s'est montrée imposante ces dernières années comme le rapportent les nombreux travaux de synthèse de contrôleurs basée sur les modèles flous. Notre contribution dans ce travail de thèse intervient au cœur de cette problématique avec une toute nouvelle stratégie de commande basée sur les modèles flous aux dérivées partielles avancée. L'approche proposée repose sur le concept du contrôle géométrique à la frontière et est développée selon une approche de synthèse locale basée sur une approximation floue de dynamique spatio-temporelle. C'est tout à fait original comme approche, appuyée par des preuves de stabilité que nous avons établies, selon le cas, au sens de Lyapunov et des semi-groupes. Le potentiel de la stratégie de commande géométrique floue proposée est démontré en simulation sur différents exemples d'application de complexité et de dimension variées.

Mots-clés: Systèmes à paramètres distribués non linéaires; Modèle aux dérivées partielles; Commande géométrique à la frontière; Modèle flou aux dérivées partielles; Commande géométrique floue à la frontière; Stabilité en boucle fermée.

Abstract

Spatio-temporal representation of system dynamics is naturally associated to a variety of production systems such as thermal exchangers, chemical reactors and biological processes. Denoted as distributed parameter systems (DPS), this kind of processes are represented by partial differential models. The analysis and control of DPSs is a challenging task to which control theory is faced due to the absence of general dedicated tools. In this sense, we can distinguish distinct control solutions mostly established by class of DPSs and categorized into two main groups of methods: the early-lumping approach and the late-lumping approach. In nonlinear DPSs control, there is urgent need for extension of well-established linear DPS control methods to the nonlinear case. This is of course challenging, however, one can see huge efforts being devoted recently to this particular problem with the aim to introduce novel solutions. On this issue, computational intelligence techniques have been widely investigated as reported by numerous fuzzy model based control design studies. The contribution of this doctoral study focuses on this special topic with a novel control strategy being introduced by using partial differential fuzzy models. The proposed strategy relies on the concept of boundary geometric control and is achieved based on local control approach involving spatio-temporal dynamics fuzzy approximation. The novelty and originality of the proposed control method is supported by mathematical proofs of closed-loop stability elaborated by means of Lyapunov method and semi-group theory. To assess the feasibility and the potential of the proposed fuzzy boundary geometric control design, simulations are performed on benchmark nonlinear DPSs control problems. The results are concluding enough on the stabilizing performance of the proposed controllers as shown in the comparison study where advanced control techniques of nonlinear DPSs are considered.

Keywords: Nonlinear distributed parameter systems; Partial differential models; Boundary geometric control; Fuzzy partial differential model ; Fuzzy boundary geometric control; Closed-loop stability.

Table des matières

Liste des Figures	<i>i</i>
Notations et Abréviations	<i>iii</i>
Introduction générale	1
Chapitre I. Outils d'analyse et de commande des systèmes à paramètres distribués : Etat de l'art	6
I.1 Introduction	6
I.2 Exemples de procédés à paramètres distribués	7
I.2.1 Procédé de séchage des semi-conducteurs	7
I.2.2 Tige catalytique	8
I.2.3 Réacteur à lit emballé	9
I.3 Représentation des systèmes à paramètres distribués	10
I.3.1 Equation aux dérivées partielles	10
I.3.2 Conditions aux limites	11
I.3.3 Règles générales de transformation	12
I.4 Classification des systèmes à paramètres distribués	13
I.4.1 Classification basée sur la linéarité.....	13
I.4.2 Classification basée sur le discriminant.....	13
I.5 Commande et observation des systèmes à paramètres distribués	14
I.5.1 Configurations de commande	14
I.5.1.1 Commande distribuée	14
I.5.1.2 Commande par zone	15
I.5.1.3 Commande ponctuelle	15
I.5.1.4 Commande aux frontières.....	16
I.5.1.5 Commande par balayage.....	16
I.5.2 Configurations d'observation	17
I.5.2.1 Observation distribuée	17
I.5.2.2 Observation ponctuelle	17
I.5.2.3 Observation aux frontières.....	18
I.5.2.4 Observation par balayage	19

I.5.2.5 Observation par moyennage spatial	19
I.6 Approches de commande des systèmes à paramètres distribués.....	20
I.6.1 Approche de pré-approximation	20
I.6.1.1 Méthode des lignes	22
I.6.1.2 Méthode d'approximation de la solution.....	23
I.6.2 Approche de post-approximation	25
I.6.2.1 Approximation par modèle EDP linéaire.....	26
I.6.2.1 Approximation par modèle EDP flou	27
I.6.2.1 Contraintes de synthèse	28
I.7 Conclusion.....	29
Chapitre II. Modélisation floue de SPD non linéaires.....	30
II.1 Introduction.....	30
II.2 Problème d'approximation floue	31
II.3 Approximation floue des systèmes à paramètres distribués	33
II.4 Analyse de l'approximation floue.....	36
II.5 Construction des modèles flous aux dérivées partielles	37
II.5.1 Méthodes à base de l'erreur d'approximation	38
II.5.2 Méthodes à base de modèle physique	39
II.6 Méthode de transformation par secteur non linéaire.....	39
II.7 Exemples d'application.....	42
II.7.1 Système de réaction-diffusion	42
II.7.2 Système de réaction-diffusion-convection	45
II.7.3 Système de réaction-diffusion bidimensionnel	48
II.8 Conclusion	51
Chapitre III. Commande géométrique floue à la frontière de SPD non linéaires.....	52
III.1 Introduction	52
III.2 Commande géométrique à la frontière d'un SPD linéaire.....	53
III.2.1 Formulation du problème.....	54
III.2.2 Eléments de synthèse	55

III.2.2.1 Indice caractéristique	55
III.2.2.2 Opérateur étendu	56
III.3 Commande géométrique floue à la frontière	59
III.3.1 Formulation du problème	59
III.3.2 Synthèse du contrôleur	60
III.4 Stabilité du système bouclé	63
III.4.1 Enoncé du théorème proposé	63
III.4.2 Preuve	64
III.4.3 Remarques fondamentales	72
III.5 Exemples d'application	72
III.5.1 Système de réaction-diffusion	73
III.5.2 Système de réaction-diffusion-convection	76
III.5.3 Système de réaction-diffusion bidimensionnel	79
III.6 Conclusion	83
Chapitre IV. Commande géométrique floue à la frontière à base de modèle équivalent à commande distribuée	84
IV.1 Introduction	84
IV.2 Quelques éléments de la théorie des semi-groupes	85
IV.3 Commande géométrique floue basée sur un modèle équivalent à commande distribuée	87
IV.3.1 Formulation du problème	87
IV.3.2 Synthèse du contrôleur	89
IV.4 Analyse de stabilité en boucle fermée	93
IV.5 Exemple d'application	97
IV.6 Conclusion	100
Conclusion générale	102
Annexe	105
Bibliographie	106

Liste des Figures

Figure I.1	Four industriel à séchage instantané
Figure I.2	Tige catalytique
Figure I.3	Réacteur à lit emballé
Figure I.4	Commande distribuée
Figure I.5	Commande par zone
Figure I.6	Commande ponctuelle
Figure I.7	Commande aux frontières
Figure I.8	Commande par balayage
Figure I.9	Observation distribuée
Figure I.10	Observation ponctuelle
Figure I.11	Observation aux frontières
Figure I.12	Observation par balayage
Figure I.13	Observation par moyennage spatial
Figure I.14	Stratégie générale de synthèse par approche de pré-approximation
Figure I.15	Stratégie générale de synthèse par approche de post-approximation
Figure II.1	Profil spatio-temporel et secteur d'approximation locale du terme non linéaire $\sin(x(z, t))$
Figure II.2	Profils spatio-temporels des modèles : (a) EDP non linéaire, (b) EDP flou T-S, et (c) de l'erreur d'approximation
Figure II.3	Profils spatio-temporels des modèles : (a) EDP non linéaire, (b) EDP flou T-S, et (c) de l'erreur d'approximation
Figure II.4	Profils d'évolution spatio-temporelle de la variable d'état $x_1(z, t)$: (a) EDP non linéaire, (b) EDP flou T-S, et (c) de l'erreur d'approximation
Figure II.5	Profils d'évolution spatio-temporelle de la variable d'état $x_2(z, t)$: (a) EDP non linéaire, (b) EDP flou T-S, et (c) de l'erreur d'approximation
Figure III.1	Evolution de la norme $\ x(z, t)\ _{L^2(\Omega)}$ en boucle fermée du système de réaction-diffusion en comparaison avec les stratégies de commande (III.89), (III.90) et (III.91)
Figure III.2	Commande géométrique floue à la frontière $u(t)$ comparée aux commandes issues des contrôleurs (III.89), (III.90) et (III.91)
Figure III.3	La sortie commandée $y(t)$
Figure III.4	Profil spatio-temporel de l'état $x(z, t)$ du système de réaction-diffusion bouclé
Figure III.5	Evolution de la norme $\ x(z, t)\ _{L^2(\Omega)}$ en boucle fermée du système de réaction-diffusion-convection
Figure III.6	Commande géométrique floue à la frontière $u(t)$
Figure III.7	La sortie commandée $y(t)$
Figure III.8	Profil spatio-temporel de l'état $x(z, t)$ du système de réaction-diffusion-convection bouclé

- Figure III.9** Evolution des normes $\|x_1(z, t)\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|x_2(z, t)\|_{L^2(\Omega)}$ en boucle fermée du système de réaction-diffusion bidimensionnel en comparaison avec les stratégies de commande (III.99) et (III.100)
- Figure III.10** Commandes géométriques floues $u_1(t)$ et $u_2(t)$ comparées aux commandes issues des contrôleurs flous à la frontière (III.99) et (III.100)
- Figure III.11** Les sorties commandées $y_1(t)$ et $y_2(t)$
- Figure III.12** Profils spatio-temporels des états $x_1(z, t)$ et $x_2(z, t)$ du système de réaction-diffusion bidimensionnel bouclé
- Figure IV.1** Transformation de la commande à la frontière à une commande distribuée
- Figure IV.2** Evolution de la norme $\|x(z, t)\|_{L^2(\Omega)}$ en boucle fermée
- Figure IV.3** Evolution de la commande $u(t)$
- Figure IV.4** Evolution de la sortie contrôlée $y(t)$
- Figure IV.5** Profil spatio-temporel de l'état $x(z, t)$ du système de réaction-diffusion bouclé par le contrôleur géométrique flou (IV.65) proposé

Notations et Abréviations

T	Température
T_a	Température ambiante
t	Variable de temps
C	Chaleur spécifique
$c(z)$	Fonction lisse caractérisant la structure géométrique des capteurs
$F(t)$	Fonction scalaire définie dans le Théorème III.1
f	Fonction non linéaire
\hat{f}	Fonction approchée de f
f_c	Fonction représentant l'effet de convection
f_r	Fonction représentant l'effet de rayonnement
f_z	Fonction définie au point d'espace z
f_0, f_l	Fonctions définies aux points d'espace $z = 0$ et $z = l$
f_{i1}, f_{i2}	Fonctions non linéaires
\tilde{z}	Position normalisée
z	Variable d'espace
z_i	Variable d'espace au point i
z_q	Variable d'espace au point q
z_1, z_2, z_3	Coordonnées spatiales
x	Variable d'état
x_0	Profil spatial initial
$\mathcal{U}(t)$	Opérateur d'un semi-groupe fortement continu
u	Variable de commande
u_e	Signal d'entrée
u_{ei}	Signal d'entrée appliquée à la zone i
u_{e0}, u_{el}	Signaux d'entrée appliqués aux points d'espace $z = 0$ et $z = l$
u_0, u_l	Commandes aux frontières appliquées aux points $z = 0$ et $z = l$
y	Variable de sortie
y_i	Variable de sortie représentant la mesure prise à la position i
\mathcal{K}	Opérateur différentiel spatial associé au contrôleur
\mathcal{K}_i	Opérateur différentiel spatial borné de contrôle associé à la règle i
K	Conductivité thermique
K_1, K_2	Gains de contrôle
\mathcal{A}, \mathcal{B}	Opérateurs différentiels spatiaux bornés
$\mathcal{A}_{bf}, \mathcal{B}_{bf}$	Opérateurs différentiels spatiaux bornés en boucle fermée
a, b	Vecteurs temporels
a_1, a_2	Paramètres constants
$b(z)$	Fonction lisse caractérisant la structure géométrique des actionneurs
$\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{L}, \mathcal{Q}, \mathcal{C}$	Opérateurs différentiels spatiaux bornés et dérivables
$\mathcal{S}(t)$	Perturbation d'un opérateur linéaire borné
q	Nombre de règles floues

P_i	Paramètre de contrôle local associé à la règle i
p	Nombre d'ensembles flous
N	Entier positif représentant le nombre de points de discrétisation
N_p	Nombre de zones composant le domaine spatial
N_q	Nombre de points considérés sur la zone de commande
\mathbb{H}	Espace d'Hilbert séparable
h_i	Fonction d'appartenance
$L^2(\Omega)$	Espace d'Hilbert des fonctions carrées intégrables
l	Longueur
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
N_r	Nombre de termes non linéaires
$M, M_e, M_{\bar{A}}, M_{bf}$	Constants réels
m	Dimension du vecteur de commande
$\omega, \omega_f, \omega_g, \omega_e, \omega_x$	Paramètres de stabilité (vitesse de convergence)
w_i	Degré d'appartenance associé à la règle i
$w(z, t)$	Variable d'état transformée
D_i^j	Ensemble flou de prémisse
\mathfrak{D}	Domaine compact
d_1, d_2	Lignes droites
η_1, η_2	Pentes des lignes droites
$e(t)$	Erreur de commande
$V(t)$	Fonction de Lyapunov
I	Opérateur identité
α, β, γ	Coefficients constants
α^*, β^*	Minimum des valeurs propres des matrices $\Gamma_i(z)$ et \tilde{A}_i
ρ	Densité
τ	Constante de temps
τ^i	Constante de temps associée à la règle i
λ	Vecteur des valeurs propres de la matrice d'opérateurs différentiels spatiaux
$\delta, \delta_\varepsilon$	Fonctions de Dirac
ξ	Indice caractéristique
φ_j	Variable de prémisse
$\Gamma_i(z)$	Matrice définie positive à valeurs propres indépendantes de z
$\Psi_i(z)$	Matrice symétrique
$\Phi_i(z)$	Paramètre du contrôleur
$\Xi(z)$	Fonction propre spatiale orthogonale
$\phi_i(z), \tilde{\phi}_i(z)$	Matrices diagonales regroupant des paramètres de contrôle
A, B, E	Paramètres de modèles linéaires
A_i, B_i	Paramètres de modèles linéaires associés à la règle i
$\lambda_{\min}(\Gamma_i(z))$	Plus petites valeurs propres des matrices $\Gamma_i(z)$ associées à la règle i

$\lambda_{min}(\tilde{A}_i)$	Plus petites valeurs propres des matrices \tilde{A}_i associées à la règle i
ϑ	Paramètre constant
$\vartheta(t)$	Référence externe
Ω	Domaine spatial
$\partial\Omega$	Frontières du domaine spatial
\mathcal{T}	Domaine temporel
Λ	Vecteur de régression de dimension $2q$
θ	Vecteur de paramètres
Δ	Discriminant
Δz	Pas de discrétisation pour la variable espace
$\varepsilon, \tilde{\varepsilon}$	Erreur d'approximation floue
ς, ϱ	Composantes non linéaires
σ_1, σ_2	Constants positifs
$[\underline{\varsigma} \ \bar{\varsigma}], [\underline{\varrho} \ \bar{\varrho}]$	Secteurs locaux
$(.)^T$	Transposée
$(.)^{-1}$	Opérateur inverse
SPD	Systèmes à paramètres distribués
SPL	Système à paramètres localisés
EDP	Equation aux dérivées partielles
T-S	Takagi-Sugeno (Modèle flou)
FHN	FitzHugh-Nagumo (Equation)
LMI	Inégalités matricielles linéaires
MEMS	Capteurs micro-électromécaniques

Introduction générale

Bon nombre de procédés dont la dynamique n'est pas forcément homogène par rapport à l'espace géométrique font partie des plans d'instrumentation de différents systèmes de production. Les phénomènes de réaction, de diffusion et de convection dans les échangeurs thermiques, les réacteurs chimiques et les procédés biologiques ou encore de propagation d'ondes et d'écoulement de fluides en sont quelques exemples typiques illustrant la dépendance conjointe de grandeurs physiques à la variable temps et aux coordonnées spatiales dans un espace monodimensionnel ou multidimensionnel. Une dynamique spatio-temporelle d'une complexité avérée est donc naturellement calquée à la conduite d'une telle classe de procédés physiques, désignés communément par systèmes à paramètres distribués (SPD) ou systèmes de dimension infinie. Et c'est à la base de modèles mettant en jeu des dérivées temporelles et spatiales de grandeurs caractéristiques que sont décrits ces systèmes qui, sans doute, représentent un des challenges auquel est confrontée l'automatique des systèmes.

L'analyse et le contrôle des systèmes à paramètres distribués est une problématique intégrée. Analyser en vue d'une modélisation fiable est un premier problème à résoudre lorsqu'il s'agit d'appréhender un SPD pour le contrôler. A ce niveau, les lois fondamentales est une voie consignée et les modèles mathématiques qui en découlent n'échappent pas à la complexité structurelle et paramétrique, et ne sont donc pas systématiquement manipulables pour la commande au regard de la dimension du système à laquelle se conjuguent des termes non linéaires et non stationnaires. C'est dans ce sens que l'on voit distinguer deux approches de commande distinctes : une approche de pré-approximation et une autre de post-approximation (Ray, 1989 ; Christofides, 2001). Dans la première approche, l'approximation du SPD original de dimension infinie est appliquée a priori avec l'objectif de transformer ce dernier en un système à paramètres localisés (SPL) représenté par un modèle de dimension finie décrit par des équations aux dérivées ordinaires. Ainsi, le problème de commande du SPD est ramené à celui d'un SPL, jusque-là maîtrisable au sens de la théorie de commande classique. Une telle démarche n'est sans doute pas sans impact sur les propriétés fondamentales du SPD, en l'occurrence sa nature distribuée ; chose qui pourrait compromettre les conclusions de stabilité, de commandabilité et d'observabilité du système (Ray, 1989 ; Christofides, 2001). L'autre

approche dite de post-approximation envisage, en revanche, de manipuler le modèle de dimension infinie du SPD sans aucune approximation préalable en vue d'aboutir une réalisation de commande distribuée ou à la frontière du domaine spatial. Une procédure d'approximation du contrôleur résultant pourrait suivre pour pouvoir l'implémenter (Christofides, 2001 ; Meurer 2011). Cette approche est souvent confrontée à des contraintes majeures en l'absence de théorie générale appuyant l'analyse des propriétés fondamentale des SPD, à l'instar de la commandabilité et de la stabilité en boucle fermée (Chen et al., 1999 ; Christofides, 2001a ; Meurer, 2011). Pour les SPD non linéaires, la dimension infinie de l'indice caractéristique est l'une des difficultés qui pourrait entraver la synthèse de la commande vu son rapport avec la commandabilité du système (Maidi et Corriou, 2011). De ce fait, on voit clairement développer des méthodes de post-approximation par classe de SPD; une démarche qui a pour but d'établir des critères de faisabilité en admettant certaines hypothèses simplificatrices confortant les preuves de convergence et de stabilité du système bouclé.

Il est tout à fait clair qu'au vu de ce manquement de règles générales d'analyse et de synthèse de systèmes à dimension infinie, d'importants efforts continuent d'être versés en vue d'introduire de nouvelles solutions relayées à une ou plusieurs classes de SPD. L'intelligence artificielle à travers le concept de modèle à base de règles floues s'est montrée justement imposante ces dernières années sur cette voie de recherche. Construire un modèle aux dérivées partielles orienté-commande est devenu tout à fait envisageable moyennant une procédure d'inférence floue, du moins pour certaines classes de SPD. Le concept d'interpolation de sous-systèmes à paramètres distribués linéaires est à la base de certaines méthodes d'approximation floue ayant eu grand mérite en modélisation de SPD non linéaires. L'approche de post-approximation en a amplement tiré profit comme le démontrent les nombreux travaux de synthèse de contrôleurs distribués et à la frontière utilisant les modèles flous aux dérivées partielles (Song et al., 2018 ; Wang et Li, 2018 ; Wang et Wu, 2018 ; Wang, 2019 ; Wang et Li, 2019).

Notre contribution dans ce travail de thèse intervient au cœur de la problématique de commande de SPD non linéaires. Une toute nouvelle stratégie de commande basée sur les modèles flous aux dérivées partielles (EDP) est proposée. L'approche de commande en question repose sur le concept du contrôle géométrique à la frontière et est développée selon une approche de synthèse locale basée sur une approximation floue de la dynamique spatio-temporelle non linéaire. C'est une approche tout à fait originale présentée sous deux formalismes distincts, le premier basé sur un modèle EDP flou équivalent à entrée

ponctuelle, le second sur un modèle EDP flou équivalent à entrée distribuée. L'approche est appuyée par des preuves mathématiques de stabilité que nous avons établies au sens de Lyapunov (Meurer, 2011) et des semi-groupes (Pazy, 1983 ; Curtain et Zwart, 1995) selon le formalisme adopté. Les principales contributions faisant l'originalité de ce travail de thèse peuvent se résumer aux points suivants :

- Pour surmonter la difficulté de la dimension infinie de l'indice caractéristique du SPD non linéaire, des modèles EDP flous équivalents à entrée ponctuelle et à entrée distribuée sont proposés en exploitant la technique de l'opérateur étendu (Stafford et Dowrick, 1977).
- Une première approche de commande géométrique de SPD non linéaires est développée en se basant sur un modèle EDP flou équivalent à entrée ponctuelle. L'approche est présentée pour le cas multidimensionnel (SPD non linéaire à entrée et sortie multiples), ce qui fait sa généralité et donc son grand mérite.
- Une preuve de stabilité au sens de Lyapunov est donnée pour la première approche de commande proposée. Les conclusions de stabilité sont résumées dans le Théorème III.1 qui nous est entièrement propre.
- Une deuxième approche de commande géométrique de SPD non linéaires est développée en se basant sur un modèle EDP flou équivalent à entrée distribuée. L'approche est présentée pour le cas monodimensionnel.
- Pour cette deuxième approche, la stabilité du système bouclé est démontrée en utilisant la théorie des semi-groupes. A ce titre, une proposition est énoncée (Proposition IV.1) pour donner les conclusions de stabilité.

Le potentiel de la stratégie de commande géométrique floue proposée est démontré en simulation sur une variété d'exemples d'application repris de la littérature concernée. Il s'agit de problèmes de commande de SPD non linéaires benchmark de différentes dimensions. Nous avons considéré à cet effet des problèmes typiques de modélisation et de commande de SPD non linéaires régis par les phénomènes de réaction-diffusion et de convection décrits par les équations de Burger-Fisher ou de FitzHugh-Nagumo (FHN) (Wu et al., 2014). Pour plus de visibilité sur la supériorité de la stratégie proposée, une comparaison avec d'autres techniques récentes est présentée pour appuyer les performances de stabilisation apportées.

Le manuscrit de thèse est structuré en quatre chapitres.

Le chapitre I présente les différents concepts et représentations liés à la manipulation des SPD, à commencer par certains exemples typiques de systèmes physiques décrits par des modèles à paramètres distribués. La description mathématique des SPD y est ensuite abordée en liaison avec leurs différentes classes avant de passer en revue le problème particulier de la commande de SPD qui fait l'objet de cette thèse. Les différentes configurations de commande et d'observation y sont également décrites, suivies d'une description détaillée des différentes méthodes de commande catégorisées dans deux principales classes : l'approche de pré-approximation et l'approche de post-approximation.

Le chapitre II est consacré à la problématique de représentation de SPD non linéaires par modèles flous aux dérivées partielles. Les notions et concepts liés au problème général de la modélisation par logique floue y sont d'abord explicités avant de se pencher sur le problème particulier de l'approximation floue de SPD non linéaires moyennant deux principales approches catégorisées par groupe de méthodes approchées et exactes. Une attention particulière est portée sur la méthode exacte de transformation par secteur non linéaire utilisée justement pour développer la stratégie de commande géométrique floue à la frontière proposée dans ce travail de thèse. Ce chapitre est complété par des exemples d'application illustrant l'utilisation de l'approche du secteur non linéaire pour la modélisation floue de SPD non linéaires de complexité et de dimensions variées.

Le chapitre III est dédié à la nouvelle stratégie de commande géométrique floue à la frontière développée dans le cadre de ce travail de recherche. L'exposé commence par formuler le problème de la commande géométrique dans le cas d'un SPD linéaire et introduire les éléments clés de synthèse du contrôleur. Cette description est suivie par la présentation de la stratégie de commande floue proposée dédiée aux SPD non linéaires. Pour mieux l'appréhender, nous y avons présenté les principales étapes de synthèse, à commencer par formuler le problème de commande, décrire les contraintes et les éléments de synthèse avant de détailler les développements mathématiques de conception du contrôleur géométrique à la frontière basé sur un modèle EDP flou équivalent à entrée ponctuelle. Une preuve de stabilité du système bouclé résultant est ensuite donnée ; les résultats de cette preuve sont résumés dans un Théorème explicitant les conditions suffisantes de stabilité. Trois exemples illustratifs sont présentés à la fin de ce chapitre pour démontrer la faisabilité et le potentiel de la stratégie de commande proposée. Ces exemples représentent des problèmes de commande de SPD non linéaires de complexité et de dimension variée.

Le chapitre IV présente une autre nouvelle forme de synthèse de commande géométrique floue à la frontière de SPD non linéaires basée sur un modèle équivalent à entrée distribuée. L'effort est orienté dans ce chapitre vers l'utilisation de la théorie des semi-groupes pour la synthèse du contrôleur géométrique flou à la frontière. A cet effet, nous y introduisons d'abord quelques notions principales des semi-groupes avant de formuler et résoudre le problème de synthèse de la commande. Une preuve de stabilité du système bouclé résultant est ensuite développée en utilisant la théorie des semi-groupes. Les résultats de cette preuve sont formulés dans une Proposition énonçant les conditions nécessaires de stabilité du système en boucle fermée. L'exemple de commande du système de réaction-diffusion traité dans le Chapitre III est considéré encore une fois dans ce chapitre pour vérifier la faisabilité et le potentiel de la méthode proposée.

Une conclusion générale est formulée à la fin du manuscrit.

Chapitre I

Outils d'analyse et de commande des systèmes à paramètres distribués : Etat de l'art

I.1 Introduction

La forte exigence aux performances élevées accompagnant les grands progrès réalisés en ingénierie des systèmes de production, en particulier dans des domaines relevant de la nanotechnologie, de la biotechnologie ou des sciences des matériaux, ne cesse de motiver les efforts visant l'intégration de solutions pointues orientées vers des aspects de contrôle plus affinés de profils spatio-temporels dans les microstructures, les écoulements de fluides ou les échanges thermiques (Li et Qi, 2011). Ces procédés de nature physique, chimique ou biologique sont catégorisés dans une classe de systèmes dits « *Systèmes à paramètres distribués* (SPD) », dont les variables caractéristiques varient dans les deux dimensions de temps et de l'espace. Bien que la théorie de contrôle des SPD remonte à plusieurs décennies, l'étude de ce type de systèmes s'est rapidement accentuée ces dernières années, appuyée par les avancées technologiques sur les plans d'instrumentation et de calcul haute-performance. Cela explique d'ailleurs le nombre important de travaux en modélisation et commande des SPD rapportés dans la littérature concernée (Ray, 1989; Lasiecka, 1995 ; Padhi et Faruque, 2009 ; Chrisofides, 2001a ; Maldi et Corriou, 2016 ; Hamdadou et al., 2020).

Ce chapitre présente justement les différents concepts et représentations liés à la manipulation des SPD, à commencer par certains exemples typiques de systèmes physiques décrits par des modèles à paramètres distribués. La description mathématique des SPD sera ensuite abordée en liaison avec leurs différentes classes avant de passer en revue le problème particulier de la commande des SPD qui fait l'objet de cette thèse. Pour

cela, nous reviendrons sur les différentes configurations de commande et de mesure et décrirons les principales approches développées.

I.2 Exemples de procédés à paramètres distribués

Pour désigner les systèmes à paramètres distribués, la littérature scientifique utilise de manière équivalente les appellations de « systèmes à paramètres répartis » ou encore « systèmes de dimension infinie ». C'est pour faire allusion à la dépendance de la dynamique aux dimensions temporelle et spatiale que ces dénominations différentes, mais équivalentes en sens, sont utilisées par la communauté scientifique (Curtain et Zwart, 1995 ; Dubljevic et al., 2004). Bon nombre de procédés physiques se caractérisent par des grandeurs dont l'évolution n'est pas forcément homogène par rapport à l'espace géométrique. Les phénomènes de propagation d'ondes, d'écoulement de particules et de fluides, de diffusion et de transfert de chaleur ou encore de réactions chimiques et nucléaires en représentent des exemples typiques de SPD dont la dynamique est régie par des équations aux dérivées partielles (Ray, 1989 ; Pao, 1992 ; Lin et Chen, 1994 ; Christofides, 1998 ; Christofides, 2001 ; Armaou et Christofides, 2002). Nous illustrons dans la suite certains exemples typiques de systèmes SPD thermiques.

I.2.1 Procédé de séchage des semi-conducteurs

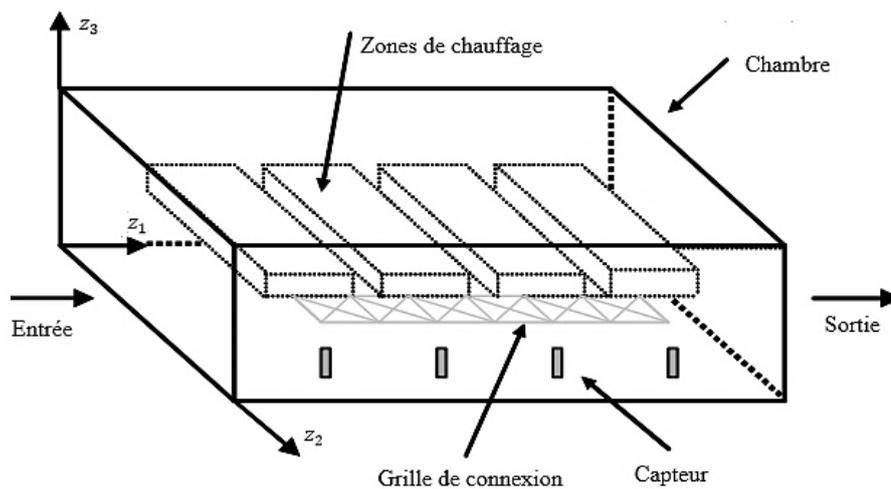


Figure I.1 : Four industriel à séchage instantané (Li et Qi, 2011).

Le séchage des semi-conducteurs est un procédé courant en fabrication électronique dont l'élément principal de séchage est un four instantané disposant de quatre zones de chauffage équipées de thermocouples, comme le montre la Figure I.1. Le four a pour rôle

de fournir la distribution de température de durcissement nécessaire aux zones de chauffage.

Les composants électroniques à durcir sont admis à l'entrée du four pour passer d'une zone à l'autre où sera opéré un traitement thermique propre à chaque zone de chauffage (Deng et al., 2005). Ce processus thermique obéit aux principes de transfert de chaleur dont l'équation fondamentale peut être exprimée par une équation aux dérivées partielles (EDP) parabolique de type non linéaire de la forme (Li et Qi, 2011) :

$$\rho(T) C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z_1} \left(K(T) \frac{\partial T}{\partial z_1} \right) + \frac{\partial}{\partial z_2} \left(K(T) \frac{\partial T}{\partial z_2} \right) + \frac{\partial}{\partial z_3} \left(K(T) \frac{\partial T}{\partial z_3} \right) + f_c(T) + f_r(T) + b(z_1, z_2, z_3) u(t) \quad (I.1)$$

où $T = T(z_1, z_2, z_3, t)$ est la température ; z_1, z_2, z_3 sont des coordonnées spatiales et t est la variable temps. $K(T)$ désigne la conductivité thermique, $\rho(T)$ est la densité et C est la chaleur spécifique. $f_c(T)$ et $f_r(T)$ sont des fonctions représentant les effets de convection et de rayonnement, respectivement, et $u(t)$ désigne le vecteur des entrées manipulées avec la distribution spatiale $b(z_1, z_2, z_3)$.

Les conditions opératoires sont exprimées aux frontières des coordonnées spatiales du four z_1, z_2, z_3 et sont donc fonction de la température T et la température ambiante T_a :

$$K \frac{\partial T}{\partial z_i} \Big|_{z_i=0} = f_{i1}(z_1, z_2, z_3, T, T_a) \Big|_{z_i=0}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (I.2)$$

$$K \frac{\partial T}{\partial z_i} \Big|_{z_i=z_{i0}} = f_{i2}(z_1, z_2, z_3, T, T_a) \Big|_{z_i=z_{i0}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (I.3)$$

Notons qu'il est généralement difficile d'obtenir les fonctions non linéaires $f_{i1}, f_{i2}, i = 1, 2, 3$, par le seul recours aux lois de la physique car certains paramètres peuvent ne pas être connus (Li et Qi, 2011).

I.2.2 Tige catalytique

Le schéma de la Figure I.2 représente un réacteur chimique doté d'une tige mince de longueur donnée où se déroule un processus thermique bien commun dans l'industrie chimique (Christofides, 2001b). Le réacteur est alimenté en matière pure A où une

réaction catalytique exothermique de la forme $A \rightarrow B$ prend place dans la tige. La réaction étant exothermique, un fluide de refroidissement en contact avec la tige est donc utilisé à cet effet.

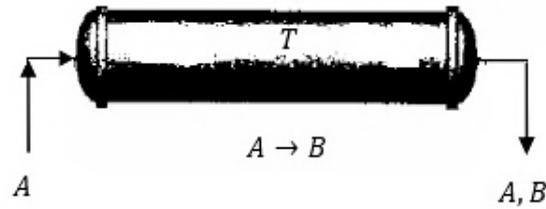


Figure I.2 : Tige catalytique (Li et Qi, 2011).

En supposant constantes les grandeurs suivantes : la densité et la capacité thermique, la conductivité de la tige, la température des deux côtés de la tige et l'excès de matière A dans le four, l'évolution spatio-temporelle de la température de la tige peut être décrite par une EDP parabolique de la forme (Christofides, 2001b) :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + f(T, \theta) + b(z) u(t) \quad (I.4)$$

avec les conditions aux limites de type Dirichlet :

$$T(0, t) = 0, \quad T(\pi, t) = 0 \quad (I.5)$$

et la condition initiale :

$$T(z, 0) = 0 \quad (I.6)$$

où T désigne la température dans le réacteur, et $u(t)$ est l'entrée manipulée (température du fluide de refroidissement) avec la distribution de l'actionneur $b(z)$. Le vecteur θ regroupe certains paramètres du système, comme par exemple la chaleur de réaction, le coefficient de transfert de chaleur et l'énergie d'activation ; f étant une fonction non linéaire.

I.2.3 Réacteur à lit emballé

Nous considérons dans ce procédé la distribution de température dans un réacteur catalytique à lit emballé long, mince et non isotherme (Christofides, 1998). Comme montré dans la Figure I.3, une réaction de la forme $A \rightarrow B$ prend place dans le catalyseur. La réaction est endothermique et une jaquette est utilisée pour chauffer le réacteur.

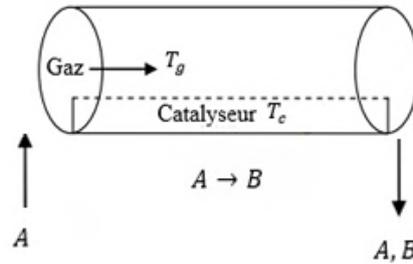


Figure I.3 : Réacteur à lit emballé (Li et Qi, 2011).

Sous l'hypothèse que les phénomènes de diffusion dans la phase gazeuse sont négligeables, que la densité et la capacité thermique du catalyseur et du gaz sont constantes, et que l'excès de la matière A est aussi constant dans le réacteur, un modèle décrivant la dynamique de la température dans ce réacteur tubulaire est donné par (Christofides, 1998) :

$$\frac{\partial T_g}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_g}{\partial z^2} + f(T_g, T_c, \theta) + b(z) u(t) \quad (I.7)$$

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_c}{\partial z^2} + g(T_g, T_c, \theta) + b(z) u(t) \quad (I.8)$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \frac{\partial T_c}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad T_g(0, t) = 0 \quad (I.9)$$

$$\left. \frac{\partial T_c}{\partial z} \right|_{z=1} = 0 \quad (I.10)$$

où T_g et T_c désignent la température du gaz et du catalyseur, respectivement ; $u(t)$ est l'entrée manipulée (température de la jaquette) avec la distribution de l'actionneur $b(z)$; θ représente certains paramètres du système, et f et g sont des fonctions non linéaires.

I.3 Représentation des systèmes à paramètres distribués

I.3.1 Equation aux dérivées partielles

D'une façon générale, la description mathématique d'un SPD à deux variables indépendantes : une variable d'espace monodimensionnel z du domaine géométrique $\Omega = [0, l] \subset \mathbb{R}$ de frontières $\partial\Omega = \{0, l\}$ et une variable de temps t du domaine temporel $\mathcal{T} = [0, \infty[$, est définie sur $\Omega \times \mathcal{T}$ par une équation d'état de la forme :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \mathcal{F}(x(z, t), u(z, t)) \quad (\text{I. 11})$$

et une équation de sortie :

$$y(t) = \mathcal{G}(x(z, t)) \quad (\text{I. 12})$$

avec la condition aux limites :

$$\mathcal{L}(x(z, t)) = \mathcal{H}(u(z, t)), \quad z \in \partial\Omega, t \in \mathcal{T} \quad (\text{I. 13})$$

et la condition initiale :

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad z \in \Omega \quad (\text{I. 14})$$

Dans les équations (I.11)-(I.14), nous désignons par $x(z, t)$ la variable d'état, $y(t)$ la variable de sortie et par $u(z, t)$ la variable de commande du SPD. $\mathcal{F}(\cdot)$, $\mathcal{G}(\cdot)$, $\mathcal{H}(\cdot)$ et $\mathcal{L}(\cdot)$ sont des opérateurs différentiels spatiaux bornés et dérivables par rapport à la variable d'espace z . Comme il peut être constaté, les exemples de procédés physiques illustrés dans la Section I.2 répondent à cette forme de représentation par modèles EDP.

I.3.2 Conditions aux limites

L'opérateur différentiel $\mathcal{L}(\cdot)$ caractérisant les conditions terminales (I.13) permet d'exprimer les conditions aux frontières imposées sur le système (I.11)-(I.12) sous l'une des formes suivantes (El Jai et Amouroux, 1990) :

- **Condition aux limites de Dirichlet**

Une condition aux limites de Dirichlet est imposée à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs que doit vérifier la solution sur les frontières du domaine $\partial\Omega$, c'est-à-dire :

$$x(z, t) = f_z(t), \quad z \in \partial\Omega, t \in \mathcal{T} \quad (\text{I. 15})$$

où $f_z(t)$ est une fonction connue définie au point d'espace z .

- **Condition aux limites de Neumann**

Une condition aux limites de Neumann est imposée à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs des dérivées que doit vérifier la solution sur les frontières du domaine $\partial\Omega$, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial z} = f_z(t), \quad z \in \partial\Omega, t \in \mathcal{T} \quad (\text{I. 16})$$

où $f_z(t)$ est une fonction connue définie au point d'espace z .

- **Condition aux limites de Fourier**

Une condition aux limites de Fourier (appelée également condition aux limites de Robin), est imposée à une équation aux dérivées partielles sous la forme d'une combinaison linéaire entre la solution et sa dérivée exprimée sur la frontière du domaine $\partial\Omega$ par la relation :

$$a_1 \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} + a_2 x(z, t) = f_z(t), \quad z \in \partial\Omega, t \in \mathcal{T} \quad (\text{I.17})$$

où $f_z(t)$ est une fonction connue définie au point d'espace z et a_1, a_2 sont des constants.

- **Condition aux limites mixte**

Une condition aux limites mixte correspond à la juxtaposition de différentes conditions aux limites sur différentes parties de la frontière du domaine spatial Ω . Elle peut être donnée par :

$$x(0, t) = f_0(t) \quad (\text{I.18})$$

$$\left. \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right|_{z=l} = f_l(t) \quad (\text{I.19})$$

où $f_0(t)$ et $f_l(t)$ sont des fonctions connues définies aux points d'espace $z = 0$ et $z = l$, respectivement.

I.3.3 Règles générales de transformation

L'homogénéité des conditions aux limites décrit la situation où $\mathcal{L}(x(z, t)) = 0$ pour tout $z \in \partial\Omega$ et $t \in \mathcal{T}$. Ceci ne peut être systématiquement satisfait, notamment pour les problèmes de commande aux frontières où $u(t) \neq 0$. Il s'agit ici de conditions aux limites non homogènes qui nécessitent d'être transformées en conditions homogènes via des règles de transformation appropriées (Babary et Pelezewski, 1985). Pour un SPD linéaire, des lois de transformation par changement de variables (Ray, 1989 ; El Jai et Amouroux, 1990 ; Hamdadou et al., 2020) ou par la fonction de Dirac (Stafford et Dowrick, 1977 ; Maldi et al. 2009) peuvent être envisagées.

I.4 Classification des systèmes à paramètres distribués

La classification des SPD se fait à partir de l'équation aux dérivées partielles (EDP) régissant leurs dynamiques. Le référentiel de classification étant une EDP du deuxième ordre, explicitant une fonction inconnue de plusieurs variables indépendantes et de leurs dérivées partielles. Ainsi, les SPD se trouvent catégorisés en différentes classes selon les phénomènes physiques qui leur sont inhérents ou bien selon les propriétés mathématiques des EDP.

I.4.1 Classification basée sur la linéarité

Cette classification permet d'avancer les notions de SPD linéaire, non linéaire, semi-linéaire et quasi-linéaire qui sont largement reprises dans la littérature (Wazwaz, 2009). Elle est toutefois manipulée en rapport avec le modèle aux dérivées partielles utilisé pour représenter le SPD. Ainsi, un SPD linéaire est décrit par une combinaison linéaire de dérivées partielles à coefficients constants ; alors qu'un SPD non linéaire est décrit par une EDP à termes non linéaires dont les coefficients peuvent être fonction de la variable d'espace z et du temps t . D'autre part, un SPD semi-linéaire est représenté par une EDP dont les coefficients associés aux dérivées partielles d'ordre supérieur dépendent uniquement des variables indépendantes z et t . Or, si les coefficients associés aux dérivées partielles d'ordre inférieur le sont aussi, le SPD est alors dit quasi-linéaire.

I.4.2 Classification basée sur le discriminant

La classification basée sur le discriminant est généralement établie à partir d'une EDP linéaire du deuxième ordre de la forme (Kumar et Mishra, 2011) :

$$\alpha \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t \partial z} + \gamma \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + [...] = 0 \quad (\text{I. 20})$$

où le terme entre crochets "[...]" est fonction de $x(z, t)$, z , t et des dérivées premières de $x(z, t)$; α , β et γ peuvent être constants ou exprimés en fonction de z et t .

Dans le cas où les coefficients α , β et γ ne sont pas tous nuls et indépendants de la variable d'espace z , le signe du discriminant $\Delta = \beta^2 - \alpha \gamma$ est indicateur de trois classes distinctes de SPD : la classe des systèmes hyperboliques ($\Delta > 0$), la classe des systèmes paraboliques ($\Delta = 0$) et la classe des systèmes elliptiques ($\Delta < 0$).

En général, les systèmes dynamiques sont modélisés par des EDP de forme parabolique (comme par exemple les transferts thermiques) ou hyperbolique (à l'exemple de l'équation d'onde) ; alors que les systèmes stationnaires sont régis par des EDP de forme elliptique (condensateur plan modélisé par une équation de Poisson, par exemple). Notre présentation le long de ce chapitre portera sur les systèmes dynamiques.

I.5 Commande et observation des systèmes à paramètres distribués

La synthèse de systèmes de commande pour les SPD est subordonnée par les configurations de commande et d'observation adoptées dans les plans d'instrumentation (Babary et Pelezewski, 1985). De ce fait, différentes structures de commande et de mesure peuvent être installées en fonction de la nature du SPD à contrôler et des objectifs de contrôle fixés. Nous décrirons dans la suite les configurations usuelles que l'on puisse rencontrer en pratique.

I.5.1 Configurations de commande

I.5.1.1 Commande distribuée

Une commande distribuée (Fig. I.4) est exprimée sur le domaine $\Omega \times \mathcal{T}$ sous la forme :

$$u(z, t) = b(z) u_e(t) \quad (\text{I. 21})$$

où $b(z)$ caractérise la structure géométrique du système d'actionneurs et $u_e(t)$ est le signal d'entrée. A titre d'exemple, ce type de commande peut être envisagé pour le problème de contrôle de température d'une tige mono-dimensionnelle exposée à un flux de chaleur le long de sa longueur (El Jai, 2010).

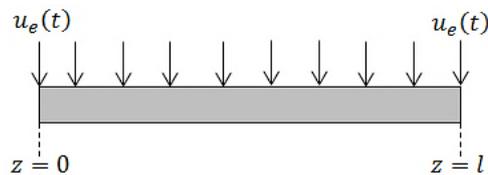


Figure I.4 : Commande distribuée.

I.5.1.2 Commande par zone

Une commande par zone (Fig. I.5) est définie sur un sous-ensemble $\Omega_i \times \mathcal{T}$, en considérant Ω_i comme étant une des N_p zones composant le domaine spatial $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N_p} \Omega_i$. Ainsi définie, la commande $u(z, t)$ s'exprime par :

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^{N_p} b_i(z) u_{ei}(t) \quad (I.22)$$

où $b_i(z), i = 1, \dots, N_p$ caractérise la structure géométrique du système d'actionneurs et $u_{ei}(t), i = 1, \dots, N_p$, est le signal d'entrée appliquée à la zone i . Ce type de commande peut être considéré dans les systèmes de diffusion avec une zone de chauffe importante ou dans les procédés de séchage de composants électroniques (El Jai, 2010).

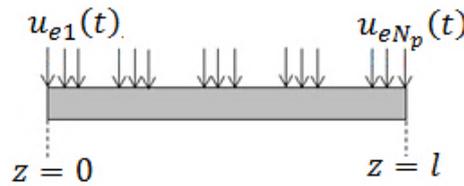


Figure I.5 : Commande par zone.

I.5.1.3 Commande ponctuelle

Une commande ponctuelle (Fig. I.6) est un cas particulier de la commande par zone où l'on réduit la zone de commande à un point situé sur le domaine spatial Ω . Ce type de commande s'exprime sous la forme :

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^{N_q} u_e(t) \delta(z - z_i) \quad (I.23)$$

où δ est la fonction de Dirac, $z_i, i = 1, \dots, N_q$, sont les points d'application de la commande, N_q est le nombre de points considérés sur la zone de commande et $u_e(t)$ est le signal d'entrée. Une telle configuration peut être réalisée sur des systèmes unidimensionnels excités par des actionneurs ponctuels comme par exemple un brûleur dans un système de diffusion (El Jai, 2010).

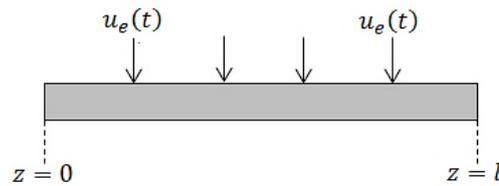


Figure I.6 : Commande ponctuelle.

I.5.1.4 Commande aux frontières

Une commande aux frontières (Fig. I.7) est un cas particulier de la commande ponctuelle qui s'applique à la frontière $\partial\Omega$ du domaine spatial. Par conséquent, elle est donnée par :

$$u(0, t) = u_{e0}(t) \quad (I. 24)$$

$$u(l, t) = u_{el}(t) \quad (I. 25)$$

où $u_{e0}(t)$ et $u_{el}(t)$ sont les signaux d'entrée appliqués aux points d'espace $z = 0$ et $z = l$, respectivement. Dans ce cas, les systèmes sont excités par des actionneurs de zones ou ponctuels localisés sur la frontière du domaine spatial. Le problème de commande d'un four tournant, qui ne peut être excité que par ses extrémités, est un exemple typique d'une commande aux frontières (El Jai et Amouroux, 1990).

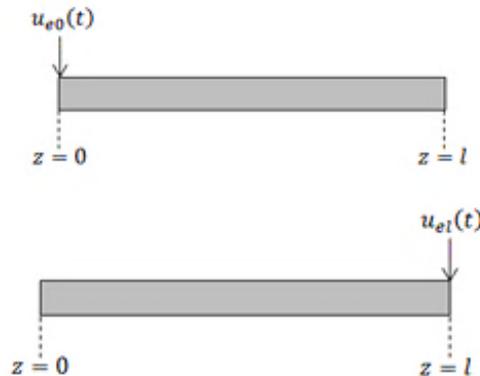


Figure I.7 : Commande aux frontières.

I.5.1.5 Commande par balayage

Dans une configuration de commande par balayage (Fig. I.8), les zones et/ou les points d'action sont mobiles sur le domaine spatial Ω . Pour un point mobile, un actionneur ponctuel dont la position varie avec le temps est utilisé, comme par exemple l'excitation par rayon laser de direction variable (El Jai et Amouroux, 1990). Pour une zone mobile,

un actionneur de zone est utilisé pour mettre en œuvre une commande variant dans le temps à l'exemple du chauffage d'une zone importante dans un système de diffusion (El Jai, 2010).

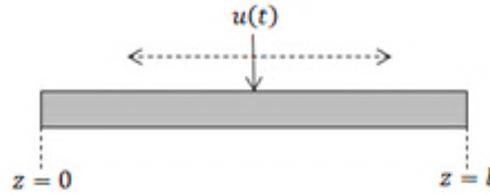


Figure I.8 : Commande par balayage.

I.5.2 Configurations d'observation

I.5.2.1 Observation distribuée

L'observation distribuée (Fig. I.9) est une mesure s'appliquant à tous les points z du domaine $\Omega \times \mathcal{T}$ ou à un sous-ensemble spatial du domaine $\Omega \times \mathcal{T}$ et peut être formulée par :

$$y(z, t) = c(z) x(z, t) \quad (\text{I.26})$$

où $x(z, t)$ est la variable d'état, $y(z, t)$ est la variable de sortie et $c(z)$ est une fonction lisse caractérisant la structure géométrique des capteurs. Des capteurs distribués peuvent être employés à cet effet, à l'exemple des faisceaux laser distribués par miroir pivotant (El Jai et Pritchard, 1986).

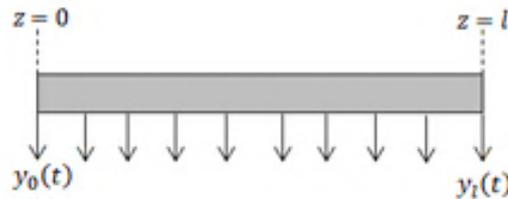


Figure I.9 : Observation distribuée.

I.5.2.2 Observation ponctuelle

L'observation ponctuelle (Fig. I.10) est une mesure localisée sur un ou plusieurs points d'espace indépendants z_i , $i = 1, \dots, N_q$, du domaine spatial Ω , réalisée à l'aide de capteurs appropriés. Dans un échangeur de chaleur, par exemple, un thermocouple est utilisé pour une prise de mesure ponctuelle de température. D'autres capteurs du même

type peuvent être employés à différentes positions pour observer localement l'évolution de la température dans le système (Habbi et al., 2011).

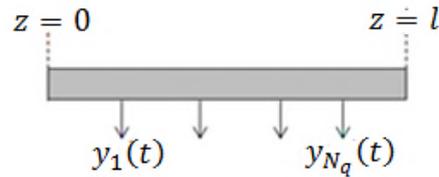


Figure I.10 : Observation ponctuelle.

I.5.2.3 Observation aux frontières

L'observation aux frontières (Fig. I.11) est une mesure qui s'applique aux frontières du domaine spatial $\partial\Omega$ pour ne concerner que les points de mesure $z = 0$ et $z = l$. La variable mesurée est donnée par :

$$y_i(t) = y(z_i, t) = \int_0^l \delta(z - z_i) x(z, t) dz, \quad z_i \in \partial\Omega \quad (I.27)$$

où $y_i(t)$ est une variable de sortie représentant la mesure prise à la position i , z_i est une variable d'espace au point i , $x(z, t)$ est une variable d'état et $\delta(z - z_i)$ est la fonction Dirac. Des captures de zones ou ponctuels peuvent être placés sur la frontière du domaine spatial pour fournir l'état d'une grandeur physique en ces positions spécifiques. Ce type de mesure est souvent employé dans les schémas de commande aux frontières (Maidi et al., 2009).

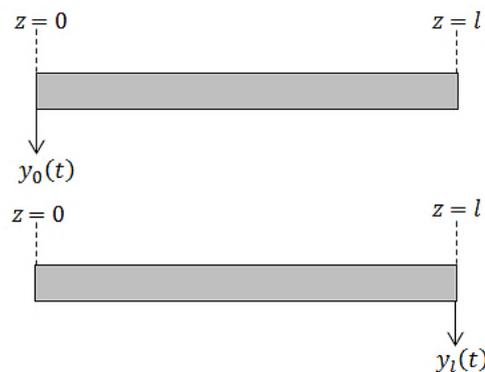


Figure I.11 : Observation aux frontières.

I.5.2.4 Observation par balayage

Ce type d'observation (Fig. I.12) s'effectue à l'aide de capteurs mobiles balayant l'intérieur du domaine spatial Ω à l'effet de suivre l'évolution d'un phénomène physique. En génie thermique, les transferts de chaleur font apparaître des paramètres inaccessibles aux mesures directes (densité de flux, coefficients de transfert) qui peuvent être estimés par l'utilisation de capteurs opérant par balayage (El Jai et Pritchard, 1986).

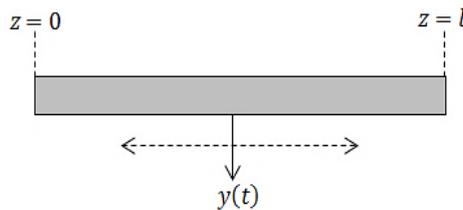


Figure I.12 : Observation par balayage.

I.5.2.5 Observation par moyennage spatial

L'observation par moyennage spatial (Fig. I.13) exprime la moyenne d'un nombre fini de mesures et peut être formulée par :

$$y(t) = \int_0^l c(z) x(z, t) dz \quad (I.28)$$

où $y(t)$ est la variable de sortie mesurée, $x(z, t)$ est la variable d'état et $c(z)$ désigne une fonction lisse caractérisant la structure géométrique des capteurs utilisés. Les capteurs disposés sur le domaine spatial fournissent des signaux de mesure qui ne peuvent être assimilés à un seul point d'observation. Le moyennage des mesures prélevées sur les différentes positions permet justement d'en faire ressortir une seule mesure instantanée. A titre d'exemple, une mesure instantanée de la température le long de l'axe z d'une tige métallique peut être composée en considérant la moyenne des mesures effectuées à différentes positions sur l'axe de mesure (El Jai et Pritchard, 1986).

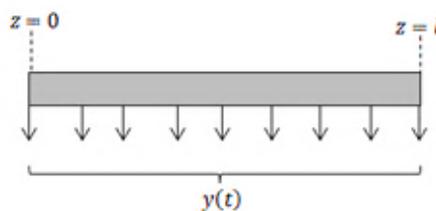


Figure I.13 : Observation par moyennage spatial.

I.6 Approches de commande des systèmes à paramètres distribués

La théorie de commande développée jusque-là pour les systèmes à paramètres distribués est à présent loin d'offrir des méthodes génériques qui soient valables pour tous types de SPD. D'ailleurs, c'est du moins ce qu'il ressort de la synthèse bibliographique que nous avons établie dans le cadre de ce travail, et qui, en fait, rapporte deux principales approches de commande dans lesquelles sont versées une multitude de méthodes d'approximation à performances variables validées le plus souvent par classe de SPD. C'est la raison pour laquelle les résultats développés dans le domaine de la commande des SPD sont souvent associés à la classe du SPD appréhendé, mais aussi aux différentes hypothèses simplificatrices imposées soit sur le modèle du SPD manipulé ou sur la configuration de commande adoptée. En somme, il y a lieu de distinguer dans ce sens deux principales approches dédiées : l'approche de pré-approximation et l'approche de post-approximation (Ray, 1989 ; Christofides, 2001 ; Meurer, 2011).

I.6.1 L'approche de pré-approximation

Dans cette approche, l'approximation en vue de la commande est appliquée a priori sur le modèle différentiel aux dérivées partielles décrivant le SPD avec l'objectif de transformer ce dernier en un système à paramètres localisés (SPL) représenté par un modèle différentiel aux dérivées ordinaires (Ray, 1989 ; Corriou, 2004). Le problème de commande du SPD sera ainsi ramené à un problème de commande d'un SPL qui, en toute évidence, s'apprête bien à la théorie de commande conventionnelle. Les techniques d'approximation employées à cette fin sont multiples et variées, et sont généralement classées en deux groupes de méthodes : la méthode d'approximation de l'équation et la méthode d'approximation de la solution (Liu, 2005).

Le premier groupe de méthodes d'approximation est basé sur la discrétisation spatiale directe des EDP en utilisant les techniques d'approximation numériques (Ames, 1992 ; Wouwer et al., 2004 ; Li et Christofides, 2007a). Il existe différents principes de calcul numérique pour effectuer l'approximation de l'équation à l'exemple de la méthode des différences finies, la méthode des lignes, la méthode des volumes finis et la méthode des éléments finis (Alhumaizi, 2004 ; Wu et Ding, 2008 ; Garcia et al., 2012). Le résultat d'approximation pourrait conduire, selon le cas, à un modèle de représentation linéaire ou non linéaire décrit par des équations différentielles ordinaires.

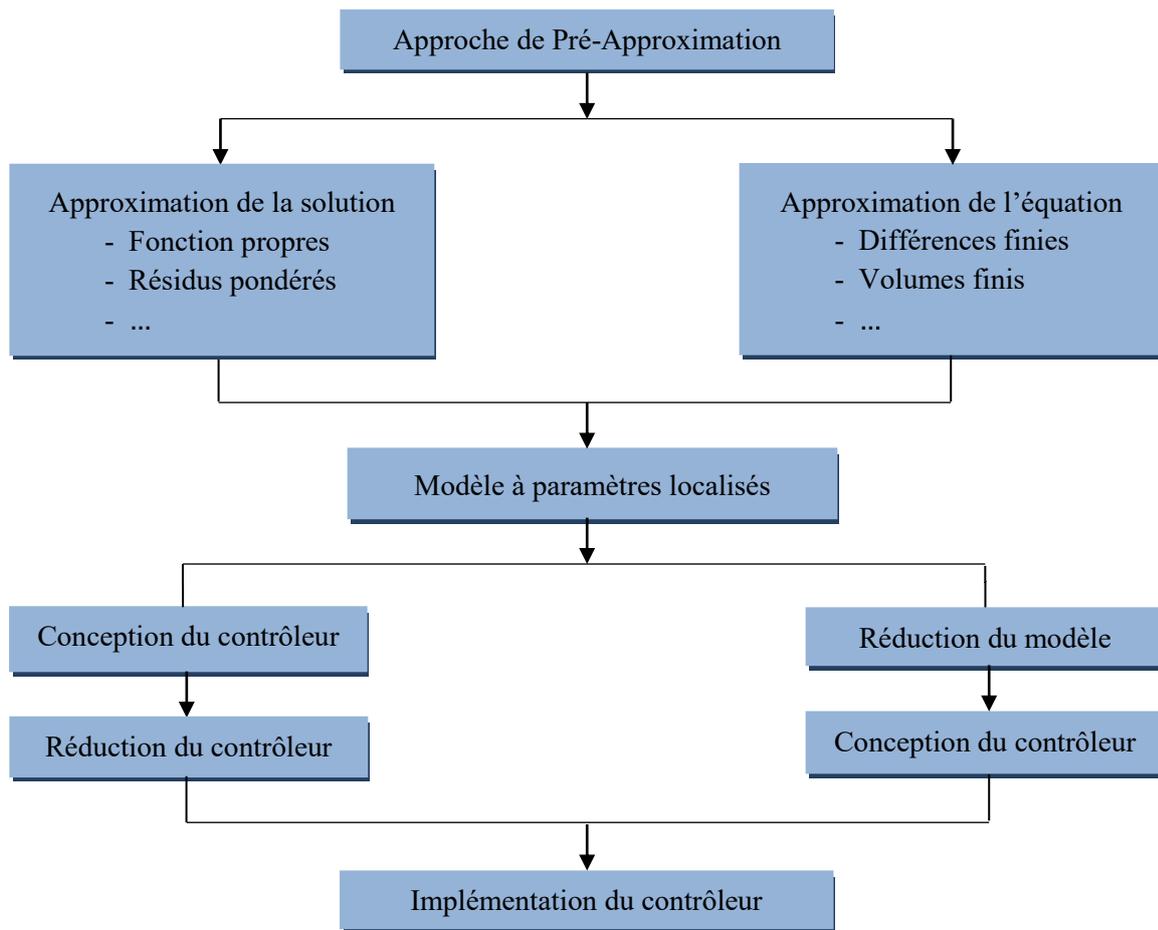


Figure I.14 : Stratégie générale de synthèse par approche de pré-approximation (Maidi, 2008).

Le second groupe de méthodes propose d'aborder le problème d'approximation d'un SPD par des modèles de solutions approchées moyennant des techniques d'approximation analytiques à l'instar de la méthode des fonctions propres, la méthode des résidus pondérés (moindres carrés, Galerkin et méthode des moments, etc.) et la méthode de Ritz (Babary et Pelczewski, 1985 ; Ray, 1989 ; Rachid, 1997 ; Lefèvre et al., 2000). Ces méthodes d'approximation se fondent généralement sur l'hypothèse que la solution du problème est séparable (Maidi, 2008 ; Li et Qi, 2011). La séparabilité des variables permet d'exprimer la solution sous forme d'un produit de deux fonctions dont chacune dépend d'une seule variable indépendante (une variable spatiale ou une variable temporelle). Cela conduit à un modèle de représentation décrit par des équations différentielles ordinaires. La Figure I.14 illustre la démarche générale de synthèse de contrôleurs par l'approche de pré-approximation.

I.6.1.1 Méthode des lignes

L'approximation par la méthode des lignes est bien adaptée aux problèmes de commande impliquant des SPD hyperboliques ou paraboliques (Schiesser, 1991). C'est une méthode de semi-discrétisation qui consiste à discrétiser le domaine spatial Ω en introduisant un pas d'espace Δz dépendant d'un entier positif N représentant le nombre de points de discrétisation. L'opérateur différentiel spatial est ainsi approché suivant un schéma numérique de différences finies stables, donnant lieu à une représentation par modèle à paramètres localisés. Pour assurer une bonne approximation du modèle SPD original, le nombre de points N doit être suffisamment grand. Le principe de la méthode est décrit dans la suite à travers un exemple illustratif.

- **Exemple illustratif :**

Considérons un SPD représenté par le modèle différentiel aux dérivées partielles suivant :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + f(x(z, t)), \quad z \in \Omega, t \in \mathcal{T} \quad (\text{I. 29})$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = u_0(t) \quad (\text{I. 30})$$

$$\left. \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right|_{z=l} = u_l(t) \quad (\text{I. 31})$$

et la condition initiale :

$$x(z, 0) = x_0(z) \quad (\text{I. 32})$$

où $x(z, t)$ est un variable d'état, $f(x(z, t))$ est une fonction non linéaire, $u_0(t)$ et $u_l(t)$ sont les commandes aux frontières appliquées aux points d'espace $z = 0$ et $z = l$, respectivement. En décomposant le domaine spatial Ω en intervalles égaux avec un pas de discrétisation $\Delta z = \frac{1}{N-1}$, nous pourrions exprimer la première dérivée de la variable d'état sous la forme :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \approx \frac{x_{i+1}(t) - x_{i-1}(t)}{2 \Delta z}, \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{I. 33})$$

De même, la deuxième dérivée s'obtient par :

$$\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} \approx \frac{x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)}{\Delta z^2}, \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{I.34})$$

En remplaçant (I.33) et (I.34) dans (I.29), il en résulte un modèle différentiel aux dérivées ordinaires de la forme :

$$\dot{x}_i(t) = \frac{x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)}{\Delta z^2} + f(x_i(t)), \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{I.35})$$

En exprimant (I.35) pour chaque ligne $i = 1, \dots, N$, le modèle différentiel aux dérivées ordinaires peut être mis sous la forme vectorielle suivante :

$$\dot{X}(t) = \frac{1}{\Delta z^2} A X(t) + B u_0(t) + E u_i(t) + F(X(t)) \quad (\text{I.36})$$

où $X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T$, $F(X(t)) = [f(x_1(t)), f(x_2(t)), \dots, f(x_N(t))]^T$ et

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\Delta z} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{2}{\Delta z} \end{bmatrix}$$

avec A une matrice tri-diagonale et symétrique de dimension appropriée.

I.6.1.2 Méthode d'approximation de la solution

Cette méthode d'approximation du modèle SPD est basée sur la décomposition en valeurs propres et fonctions propres des variables d'état et de commande (Ray, 1989 ; Ames, 1992 ; Christofides et Daoutidis, 1996a). Afin de l'illustrer, considérons à présent un SPD linéaire modélisé par l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \mathcal{A}(x(z, t)) + \mathcal{B}(u(t)) \quad (\text{I.37})$$

avec les conditions aux limites :

$$\mathcal{L}(x(z, t)) = 0, \quad z \in \partial\Omega, t \in \mathcal{T} \quad (\text{I.38})$$

et la condition initiale :

$$x(z, 0) = 0 \quad (\text{I.39})$$

où $x(z, t)$ est une variable d'état, $\mathcal{A}(\cdot)$, $\mathcal{B}(\cdot)$ et $\mathcal{L}(\cdot)$ sont des opérateurs différentiels spatiaux bornés, ne comportant que des dérivées par rapport à la variable d'espace z .

L'approximation de la solution s'applique aux composantes du vecteur d'état $x(z, t)$ et à celles du vecteur de commande $u(t)$ que l'on admet de les exprimer sous la forme (Ray, 1989) :

$$x_i(z, t) = \sum_{j=1}^{+\infty} a_{i,j}(t) \Xi_{i,j}(z), \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{I.40})$$

$$u_i(z, t) = \sum_{j=1}^{+\infty} b_{i,j}(t) \Xi_{i,j}(z), \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{I.41})$$

où $\mathbf{a}(t) = [a_{i,j}(t)]^T$, $\mathbf{b}(t) = [b_{i,j}(t)]^T$ sont des vecteurs temporels à déterminer et $\Xi(z) = [\Xi_{i,j}(z)]^T$ désignent des fonctions propres spatiales orthogonales vérifiant pour toute position normalisée $\tilde{z} = z/l$ les propriétés suivantes :

$$\int_0^l \Xi_{i,k}(\tilde{z}) \Xi_{i,l}(\tilde{z}) d\tilde{z} = 1, \quad \text{pour } k = l \quad (\text{I.42})$$

$$\int_0^l \Xi_{i,k}(\tilde{z}) \Xi_{i,l}(\tilde{z}) d\tilde{z} = 0, \quad \text{pour } k \neq l \quad (\text{I.43})$$

Ainsi définies, les fonctions spatiales $\Xi(z)$ représentent les fonctions propres des opérateurs différentiels spatiaux $\mathcal{A}(\cdot)$ et $\mathcal{B}(\cdot)$ (Babary et Pelezewski, 1985 ; Ray, 1989). Le problème de décomposition en valeurs propres λ et en fonctions propres $\Xi(z)$ associées au SPD (I.37)-(I.39) se ramène à la détermination des vecteurs λ et $\Xi(z)$ solutions de l'équation différentielle ordinaire :

$$\mathcal{A}(\Xi(z)) = \lambda \Xi(z) \quad (\text{I.44})$$

$$\mathcal{L}(\Xi(z)) = 0, \quad z \in \partial\Omega \quad (\text{I.45})$$

Cela permet en conséquence d'exprimer $x(z, t)$ et $u(t)$ selon (I.40) et (I.41), respectivement. En substituant ces expressions dans l'équation d'évolution (I.37), et en tenant compte des conditions d'orthogonalité (I.42)-(I.43), un modèle d'état de la forme (I.46) peut être obtenu (Ray, 1989) :

$$\frac{\partial \mathbf{a}(t)}{\partial t} = \mathcal{Q}(\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)) \quad (\text{I.46})$$

où $Q(\cdot)$ est un opérateur différentiel spatial borné et dérivable.

Le système différentiel (I.46) est par conséquent de dimension infinie qui, par troncature d'ordre N , se ramène à un modèle de dimension finie où les dimensions des vecteurs temporels $\mathbf{a}(t)$ et $\mathbf{b}(t)$ sont établies comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t) &= [\mathbf{a}_{i,j}(t)]^T, & i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, N \\ \mathbf{b}(t) &= [\mathbf{b}_{i,j}(t)]^T, & i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, N\end{aligned}$$

I.6.2 Approche de post-approximation

L'approche de post-approximation envisage de manipuler le modèle du SPD dans la procédure de synthèse de la commande sans aucune approximation préalable (Christofides et Daoutidis, 1996a ; Wu et Liou, 2001 ; Maidi et al., 2008a, 2009). C'est donc une approche de commande à base du modèle différentiel aux dérivées partielles qui conduit forcément à une réalisation de nature distribuée. Le contrôleur qui en résulte étant alors de dimension infinie nécessitant, dans la plupart des cas, une forme d'approximation appropriée pour pouvoir l'implémenter, d'où le concept de *post-approximation* en vue de la commande. Dans la Figure I.15, nous illustrons la démarche générale de synthèse de la commande par post-approximation.

Les méthodes de post-approximation s'appuient généralement sur des fondements théoriques utilisant des outils mathématiques puissants et complexes. Les modèles différentiels aux dérivées partielles sont manipulés dans des espaces de fonctions telles que l'espace de Hilbert, de Sobolev ou de Banach (Adams, 1978 ; Curtain et Zwart, 1995) en utilisant des notions d'analyse fonctionnelle (Curtain et Pritchard, 1997 ; Atkinson et Han, 2009). La manipulation de ces modèles en vue de la commande ne peut se faire de manière systématique. La complexité du problème est étroitement liée au modèle différentiel représentant le SPD à commander qui pourrait éventuellement s'exprimer sous forme linéaire ou non linéaire. Les SPD linéaires sont toutefois plus facile à traiter en considérant les outils développés dans la théorie de commande des SPD linéaires à l'exemple des semi-groupes qui permettent d'établir une certaine similarité entre la théorie des SPL et celle des SPD (El Jai et Amouroux, 1990 ; Curtain et Zwart, 1995). Par contre, la manipulation des modèles SPD non linéaires est souvent confrontée à des limitations et des contraintes imposées par l'absence de théorie générale dédiée.

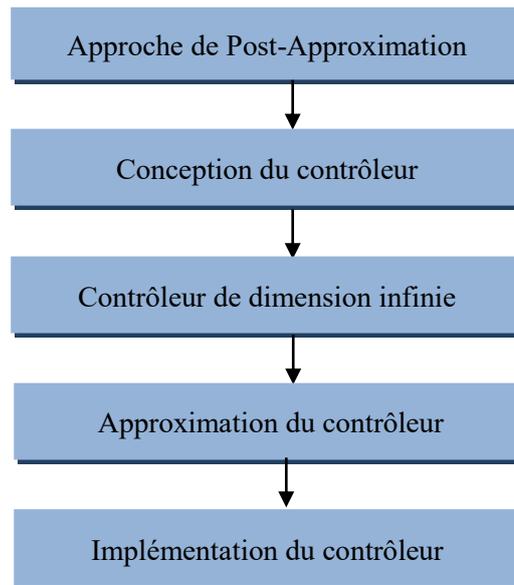


Figure I.15 : Stratégie générale de synthèse par approche de post-approximation.

De ce fait, la résolution des problèmes de commande est souvent menée en fonction de la classe du SPD manipulé ou bien par transformation en problèmes équivalents. Ces transformations peuvent être opérées moyennant différentes techniques comme par exemple la linéarisation (Ray, 1989), l'utilisation des transformations tangentes (Maidi et Corriou, 2016 ; Benameur et al., 2018) ou la représentation multi-modèle basée sur les systèmes flous (Takagi et Sugeno, 1985 ; Takagi et Wang, 2001 ; Raab et al., 2020).

I.6.2.1 Approximation par modèle EDP linéaire

C'est communément une approche de linéarisation du SPD non linéaire autour d'un point de fonctionnement donné qui peut être effectuée moyennant des techniques de transformations tangentes (Maidi et Corriou, 2016 ; Meleshko, 2005). La linéarisation par transformations tangentes a pour objectif de ramener l'étude d'un système SPD non linéaire, décrit par des EDP non linéaires, à celle d'un SPD linéaire équivalent, décrit par des EDP linéaires de formes connues, dont la validité est située au voisinage du point de fonctionnement choisi. Parmi les méthodes de transformations tangentes les plus courantes, nous pouvons citer la transformation de Cole-Hopf (Vadasz, 2010 ; Maidi et Corriou, 2012) et la transformation de Laplace (Friedly, 1972 ; Curtain et Zwart, 1995 ; Maidi et Corriou, 2011). Ces transformations ont été considérées dans différents travaux traitant de la commande des processus de diffusion (El et Amouroux, 1990 ; Curtain et Zwart, 1995 ; Bensoussan et al., 2006), du problème de Stefan (Maidi et Corriou, 2014), du problème de Burger-Fisher (Hamdadou et al., 2018 ; Raab et al., 2020), etc.

I.6.2.2 Approximation par modèle EDP flou

La logique floue, parmi de nombreuses techniques de l'intelligence artificielle, a été appliquée avec succès à bon nombre de problèmes d'identification de systèmes complexes. Plusieurs modèles d'approximation floue ont été ainsi proposés, dont le plus courant est celui de Takagi-Sugeno (T-S) qui a démontré une capacité d'approximation universelle établie (Takagi et Sugeno, 1985 ; Habbi et al., 2011a ; Yuan et Fei, 2013). Le modèle flou T-S devient, par conséquent, une solution efficace et attractive à de nombreux problèmes de modélisation complexes. L'utilisation du modèle T-S en tant qu'approximateur universel a tout d'abord concerné les systèmes décrits par des modèles aux dérivées ordinaires, puis élargi aux systèmes décrits par des modèles aux dérivées partielles moyennant des méthodes exactes ou approchées à l'instar de la méthode du secteur non linéaire (Takagi et Wang, 2001 ; Wang et al., 2012) et les méthodes basées sur l'erreur d'approximation (Song et al., 2018 ; Wang et Wu, 2018).

Pour représenter le SPD (I.11)-(I.12) avec les conditions (I.13)-(I.14), un modèle flou aux dérivées partielles de type T-S peut être utilisé. La forme générale d'un modèle EDP flou de T-S comprend un ensemble de règles conditionnelles de type IF-THEN exprimées par :

$$\begin{aligned} &\text{IF } \varphi_1(z, t) \text{ is } D_i^1 \text{ and } \dots \text{ and } \varphi_p(z, t) \text{ is } D_i^p, \\ &\text{THEN } \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \mathcal{F}_i(x(z, t), u(z, t)), \quad i = 1, \dots, q \end{aligned} \tag{I.47}$$

où $\varphi_j(z, t)$, $j = 1, \dots, p$, sont les variables de prémisses, D_i^j , $i = 1, \dots, q$, sont des ensembles flous et q est le nombre de règles. La conclusion des règles est composée de modèles EDP locaux dont la dynamique est régie par les fonctions $\mathcal{F}_i(x(z, t), u(z, t))$, $i = 1, \dots, q$, où \mathcal{F}_i est un opérateur différentiel borné et dérivable par rapport à la variable d'espace z . Cette forme de représentation permet de construire un modèle EDP pour le SPD (I.11)-(I.12) par simple interpolation de modèles EDP locaux via des mécanismes d'inférence floue appropriés (Takagi et Wang, 2001). L'intérêt est immédiat lorsque les conclusions des règles correspondent à des modèles EDP linéaires. L'objectif étant alors d'aboutir une forme de modèle suffisamment représentatif et facilement manipulable pour les besoins d'analyse et de commande. C'est justement ce qui pourrait être investi par un choix approprié de la méthode d'approximation floue.

I.6.3 Contraintes de synthèse

L'utilisation de l'approche de pré-approximation pour la synthèse de la commande pourrait conduire à un modèle différentiel à paramètres localisés de dimension élevée, nécessitant une procédure de réduction d'ordre avant toute éventuelle manipulation (Jalali et al., 2006). Ceci provient, par exemple, du nombre important de points de discrétisation choisis ou de la difficulté liée à la manipulation de la méthode d'approximation de la solution de l'EDP. Dans ce sens, deux orientations en sont offertes : la première consiste à réduire d'abord l'ordre du modèle différentiel du SPL résultant puis utiliser le modèle réduit pour la synthèse du contrôleur ; la deuxième a pour principe d'employer directement le modèle d'ordre élevé du SPL dans la procédure de synthèse du contrôleur. La réduction d'ordre s'appliquerait dans ce cas au modèle du contrôleur résultant pour pouvoir l'implémenter. Que l'on procède par l'une ou l'autre orientation, les résultats sont étroitement liés à la méthode de discrétisation utilisée, donc au nombre et aux positions des points choisis, ce qui n'est pas sans effet sur les propriétés fondamentales de commandabilité et d'observabilité du système (El Jai et Pritchard, 1986 ; Bensoussan et al., 2006). De plus, la dimension du système réduit résultant conduit parfois à des conclusions erronées en ce qui concerne la stabilité du système original (Christofides, 2001). D'autre part, il est tout à fait clair qu'une procédure d'approximation du modèle SPD par un modèle SPL n'est pas sans impact sur la qualité du modèle obtenu, d'autant plus que les propriétés fondamentales du SPD seront altérées en conséquence. En d'autres termes, c'est la nature distribuée du SPD qui sera tronquée, chose qui a pour effet de restreindre l'efficacité et la validité du contrôleur synthétisé, voire même compromettre la stabilité du système en boucle fermée.

En revanche, l'approche de post-approximation est confrontée à des contraintes majeures de mise en œuvre en raison de la nature spatio-temporelle du modèle EDP manipulé. La synthèse est souvent rendue difficile en l'absence de théorie générale appuyant les analyses fondamentales de commandabilité, d'observabilité et de stabilité (Wouwer et Zeitz, 2003 ; Chen et al., 1999). Les méthodes de post-approximation développées sont souvent appréhendées par classe de SPD ; une démarche qui représente en elle-même un critère de faisabilité assujéti à certaines hypothèses simplificatrices visant l'établissement de conditions nécessaires de convergence et de stabilité. Ce sont

d'ailleurs les bases de validation de tout résultat théorique devant appuyer une stratégie nouvelle de commande des systèmes à paramètres distribués.

I.7 Conclusion

Dans ce chapitre où nous avons passé en revue les différents outils et méthodes de commande des systèmes à paramètres distribués (SPD), il en ressort deux principales approches de commande, en l'occurrence l'approche de pré-approximation et l'approche de post-approximation. L'approximation du modèle pour la commande des SPD constitue donc une procédure fondamentale pour les deux approches, renseignant toutefois de la difficulté liée à la manipulation directe des modèles aux dérivées partielles dans une stratégie de synthèse de la commande. Que l'on choisit d'approcher le modèle du SPD à priori ou à posteriori, il est d'une extrême importance de satisfaire une qualité d'approximation acceptable par rapport aux conditions opératoires. Le choix d'une méthode d'approximation et éventuellement de commande constitue donc un enjeu majeur nécessitant une analyse approfondie du SPD et de son problème de contrôle. Les conditions de convergence et de stabilité doivent nécessairement accompagner les résultats de synthèse ; chose qui n'est pas totalement aisée dans une procédure de commande par post-approximation. Notre méthodologie de commande tente d'apporter une solution théoriquement fondée pour une classe de SPD, dont les éléments de développement sont détaillés dans les chapitres qui suivent.

Chapitre II

Modélisation floue de SPD non linéaires

II.1 Introduction

Un système à paramètres distribués (SPD) laisse attirer l'attention vers une représentation assez particulière de dynamique dans les deux dimensions de l'espace et du temps naturellement distinctes. C'est d'abord complexe comme modèle de représentation de systèmes dynamiques au regard de la dimension auquel se conjuguent des phénomènes physiques régis le plus souvent par des lois fondamentales non linéaires et non stationnaires. Un SPD est donc un système complexe par excellence qu'il est impératif de lui associer une forme de représentation plutôt manipulable pour pouvoir l'analyser et le contrôler. Dans ce sens, la modélisation floue qui relève du grand domaine de l'intelligence artificielle a été utilisée avec succès dans bon nombre de problèmes d'identification de systèmes complexes, y compris les systèmes dynamiques à paramètres distribués. La capacité d'approximation par modèle à base de règles floues – qualifiée d'ailleurs d'universelle par le biais d'un Théorème dédié – a permis d'aboutir des formes de représentation faciles à manipuler mais aussi d'une qualité remarquable, catégorisées sous deux principales classes de modèle : le modèle flou de Mamdani à conséquence de règle linguistique (forme qualitative) (Zadeh, 1965 ; Mamdani et Assilian, 1975 ; Zadeh, 1978) et le modèle flou de Takagi-Sugeno (T-S) à conséquence de règle représentée par une fonction quelconque de sorte à permettre de décrire la dynamique du système sous une forme qualitative et quantitative combinée (Takagi et Sugeno, 1985 ; Takagi et Wang, 2001 ; Qi et al., 2009 ; García et al., 2012).

A l'aide du formalisme de T-S, il est devenu possible de représenter efficacement bon nombre de classes de SPD à dynamique spatio-temporelle non linéaire. Le présent chapitre est justement dédié à la problématique d'approximation floue ou d'une manière équivalente de construction de modèles flous aux dérivées partielles ou encore de modèles flous régis par des équations aux dérivées partielles (modèles EDP flous). Le concept d'interpolation de sous-systèmes à paramètres distribués linéaires est à la base de

certaines méthodes d'approximation floue bien posées ayant eu grand mérite dans le domaine de la commande de SPD, notamment dans la synthèse basée sur l'approche de post-approximation (Wang et al., 2012 ; Wu et al., 2014 ; Wu et Zhu, 2017 ; Song et al., 2018 ; Wang et Li, 2018). Nous illustrons dans ce qui suit différents notions et concepts liés au problème général de la modélisation par logique floue avant de se pencher sur le problème particulier de l'approximation floue de SPD non linéaires moyennant deux principales méthodes approchée et exacte. La méthode exacte est détaillée à travers des exemples illustratifs.

II.2 Problème d'approximation floue

La stratégie de commande développée dans cette thèse repose sur la manipulation de modèles de systèmes non linéaires représentés selon le formalisme de Takagi-Sugeno (Takagi et Sugeno, 1985 ; Takagi et Wang, 2001). Il s'agit d'une représentation par modèle flou composée de propositions conditionnelles IF-THEN (règles) exprimant la dynamique locale du système non linéaire sous forme de modèles linéaires. Ainsi, le modèle flou T-S s'obtient par interpolation de modèles linéaires locaux moyennant d'opérateurs d'inférence appropriés. Afin d'illustrer le concept, considérons un modèle flou T-S avec une conséquence de règle linéaire de la forme :

Règle i :

IF $x_1(t)$ is D_i^1 and ... and $x_n(t)$ is D_i^n ,

THEN $\dot{x}(t) = A_i x(t)$, $i = 1, \dots, q$ (II. 1)

où $x(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T$ est le vecteur d'état du système représentant ici les variables de prémisses, D_i^j , $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, n$, sont des ensembles flous, q est le nombre de règles IF-THEN et $\dot{x}(t) = A_i x(t)$ est la conséquence de la règle i exprimant une dynamique locale linéaire caractérisée par la matrice d'évolution A_i .

La possibilité pour la règle i d'être activée peut être évaluée par le produit de toutes les fonctions d'appartenance associées à la règle :

$$w_i(x(t)) = \prod_{j=1}^n D_i^j(x_j(t)), \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{II. 2})$$

Ainsi, le degré d'activation de la règle i s'obtient par :

$$h_i(x(t)) = \frac{w_i(x(t))}{\sum_{i=1}^q w_i(x(t))}, \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{II. 3})$$

avec $h_i(x(t)) \geq 0$, $i = 1, \dots, q$ et $\sum_{i=1}^q h_i(x(t)) = 1$. Par defuzzification, un modèle global de la forme suivante peut être enfin établi :

$$\dot{x}(t) = \hat{f}(x) = \sum_{i=1}^q h_i(x(t)) A_i x(t) \quad (\text{II. 4})$$

où $\hat{f}(x) = [\hat{f}_1(x) \dots \hat{f}_n(x)]^T$ est le modèle flou T-S qu'il faudra déterminer pour représenter le système dynamique non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x) \quad (\text{II. 5})$$

avec $f(x) = [f_1(x) \dots f_n(x)]^T$ un champs de vecteur défini sur un domaine compact $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, vérifiant $f(0) = 0$ et $f \in C_n^2$, en admettant f , $\partial f / \partial x$ et $\partial^2 f / \partial x^2$ continues et bornées sur \mathcal{D} .

Par approximation floue, il est entendu de déterminer un modèle flou T-S de la forme (II.4) telle que l'erreur d'approximation $\|f(x) - \hat{f}(x)\|$ ainsi que sa dérivée soient suffisamment petites. L'analyse du problème d'approximation de fonctions non linéaires par modèles flous T-S à conséquences linéaires de la forme (II.1) a été étudiée en profondeur dans (Takagi et Wang, 2001). A l'issue de cette analyse, il a été établi le *Théorème d'Approximation Universelle* qui peut être énoncé comme suit.

Théorème II.1 (Takagi et Wang, 2001) : *Pour toute fonction non linéaire lisse $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un domaine compact \mathcal{D} , satisfaisant les conditions $f(0) = 0$ et $f \in C_n^2$, la fonction et ses dérivées peuvent être approximées, à n'importe quel degré de précision, par un modèle flou T-S.*

Par considération du Théorème II.1, il a été démontré dans (Takagi et Wang, 2001) que tout système non linéaire décrit par (II.5), et satisfaisant $f(0) = 0$ et $f \in C_n^2$, peut être approximé, à n'importe quel degré de précision, par un modèle flou T-S de la forme (II.4). Ce résultat est élargi aux systèmes non linéaires décrits plus généralement par :

$$\dot{x}(t) = f(x, u) \quad (\text{II. 6})$$

où $u(t) \in \mathbb{R}^m$ désigne le vecteur de commande. Dans ce cas, la règle floue du modèle T-S prend la forme :

Règle i :

IF $x_1(t)$ is D_i^1 and ... and $x_n(t)$ is D_i^n ,

THEN $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$, $i = 1, \dots, q$ (II. 7)

La conséquence de la règle i représente un modèle dynamique linéaire caractérisé par les matrices d'évolution A_i et de commande B_i . Le résultat d'interpolation par inférence floue conduit au modèle flou T-S :

$$\dot{x}(t) = \hat{f}(x, u) = \sum_{i=1}^q h_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (\text{II. 8})$$

II.3 Approximation floue des systèmes à paramètres distribués

Le problème d'approximation floue (II.1)-(II.5) est un problème bien posé au sens du Théorème d'Approximation Universelle (Takagi et Wang, 2001). Par extension, il en résulte de même pour le problème d'approximation floue d'un système à paramètres distribués (SPD) où l'on s'intéresse à représenter la dynamique spatio-temporelle du SPD par un modèle flou aux dérivées partielles (EDP) de Takagi-Sugeno. Plus généralement, comme il a été mentionné dans la Section I.6.2.2, un modèle EDP flou de T-S de la forme (I.47) peut être utilisé pour représenter un SPD décrit par le modèle (I.11)-(I.12) soumis aux conditions (I.13)-(I.14). Il s'agit-là d'une forme générale de représentation que l'on propose d'affiner, dans ce chapitre, pour une classe très fréquente de SPD régis par les phénomènes physiques de transport et de réaction (Ray, 1989 ; Curtain et Zwart, 1995 ; Christofides et Daoutidis, 1996a ; Christofides, 2001 ; Bartecki, 2016). Pour cette classe de SPD, la dynamique spatio-temporelle est exprimée en termes de diffusion et de convection par l'équation d'état :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = f \left(\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}, \frac{\partial x(z, t)}{\partial z}, x(z, t) \right) \quad (\text{II. 9})$$

avec les conditions aux limites (Neumann) :

$$\left. \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right|_{z=l} = u(t) \quad (\text{II. 10})$$

et la condition initiale :

$$x(z, 0) = x_0(z) \quad (\text{II. 11})$$

où $z \in \Omega$ et $t \in \mathbb{R}^+$ sont les variables spatiale et temporelle, respectivement ; $\Omega = [0, l]$, $l > 0$, est un domaine spatial de bornes $\partial\Omega = \{0, l\}$; $x(z, t) = [x_1(z, t) \cdots x_n(z, t)]^T \in \mathbb{H}$ et $u(t) = [u_1(t) \cdots u_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ sont les variables d'état et de commande, respectivement. $x_0(z) \in \mathbb{H}$ est un profil spatial initial ; $\mathbb{H} = [L^2(\Omega)]^n$ est l'espace d'Hilbert doté du produit scalaire (Atkinson et Han, 2009) :

$$\langle F(z), G(z) \rangle_{\mathbb{H}} = \int_0^l F^T(z) G(z) dz; \quad F, G \in \mathbb{H} \quad (\text{II. 12})$$

et de la norme :

$$\|F(z)\|_{\mathbb{H}}^2 = \langle F(z), F(z) \rangle_{\mathbb{H}}; \quad F \in \mathbb{H} \quad (\text{II. 13})$$

Dans l'équation (II.9), le terme qui ne dépend que de l'état du système $x(z, t)$ est appelé terme source auquel on retient l'hypothèse suivante.

Hypothèse II.1 : *Le terme source de l'équation (II.9) est une fonction non linéaire suffisamment lisse satisfaisant les conditions $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ et $f \in C_n^2$, avec f , $\partial f / \partial x$ et $\partial^2 f / \partial x^2$ sont continus et bornés sur \mathbb{H} .*

Par l'hypothèse (II.1), un modèle EDP flou T-S peut être construit au sens du Théorème d'Approximation Universelle (II.1) pour représenter le SPD (II.9) assujetti aux conditions (II.10)-(II.11). Ce modèle à base de règles floues s'obtient alors par interpolation de modèles EDP linéaires décrivant les dynamiques spatio-temporelles locales du SPD (II.9). Il peut être exprimé sous la forme (Wu et al., 2014) :

Règle i :

IF $\varphi_1(z, t)$ is D_i^1 and ... and $\varphi_p(z, t)$ is D_i^p ,

$$\text{THEN } \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = A_i \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B_i x(z, t), \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{II. 14})$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right|_{z=l} = u(t) \quad (\text{II. 15})$$

où $\varphi_j(z, t)$, $j = 1, \dots, p$, désignent les variables de prémisse qui peuvent être exprimées en fonction de $x(z, t)$ et $\frac{\partial x(z, t)}{\partial z}$, p est le nombre d'ensembles flous, D_i^j , $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, p$ sont les ensembles flous de prémisses et q est le nombre de règles. Les paramètres de la conséquence de la règle i sont donnés par les matrices $A_i = A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, q$ qui caractérisent la dynamique locale du modèle EDP non linéaire avec A_i définie positive.

Compte tenu du modèle (II.14), les dynamiques spatio-temporelles locales du SPD sont ainsi modélisées sous une forme typiquement parabolique. Ceci est motivé par le fait que bon nombre de procédés physiques sont de nature parabolique et c'est justement le cas pour les processus de diffusion thermique, les processus biochimiques, les processus biologiques (Chen et Chang, 2009 ; Wu et al., 2014 ; Wang, 2019), pour ne citer que ces exemples.

Par inférence floue, le modèle EDP flou T-S s'obtient par :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \hat{f} \left(\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}, \frac{\partial x(z, t)}{\partial z}, x(z, t) \right) \quad (\text{II. 16})$$

$$= \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) \left(A_i \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B_i x(z, t) \right) \quad (\text{II. 17})$$

où $\varphi(z, t) = [\varphi_1(z, t) \dots \varphi_p(z, t)]^T$, et

$$h_i(\varphi(z, t)) = \frac{w_i(\varphi(z, t))}{\sum_{i=1}^q w_i(\varphi(z, t))}, \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{II. 18})$$

avec

$$w_i(\varphi(z, t)) = \prod_{j=1}^p D_i^j(\varphi_j(z, t)), \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{II. 19})$$

tel que

$$w_i(\varphi(z, t)) \geq 0, \quad i = 1, \dots, q \text{ et } \sum_{i=1}^q w_i(\varphi(z, t)) > 0 \quad (\text{II. 20})$$

pour tout $z \in [0, l]$ et $t \geq 0$. Ainsi, il est facile d'établir que :

$$h_i(\varphi(z, t)) \geq 0, \quad i = 1, \dots, q, \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) = 1 \quad (\text{II.21})$$

II.4 Analyse de l'approximation floue

L'existence d'un modèle EDP flou T-S de la forme (II.17) susceptible de représenter, à un degré de précision donné, le SPD non linéaire (II.9) est subordonnée par la satisfaction des conditions dictées par le Théorème d'Approximation (II.1). La méthode de construction du modèle flou T-S est déterminante quant à la qualité d'approximation souhaitée qui, toutefois, pourrait être évaluée à l'aide d'une mesure de performance appropriée, dont l'erreur d'approximation floue que l'on définit à présent par :

$$\begin{aligned} \varepsilon(x(z, t)) = & f\left(\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}, \frac{\partial x(z, t)}{\partial z}, x(z, t)\right) \\ & - \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) \left(A_i \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B_i x(z, t) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

Compte tenu de l'expression d'erreur (II.22), le modèle EDP flou T-S (II.17) tend à approximer la fonction non linéaire $f(\cdot)$ en approchant les termes non linéaires associés aux grandeurs $\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}$ et $x(z, t)$. Ainsi, et en référence à l'analyse décrite dans (Wu et al., 2014), la borne de l'erreur d'approximation floue $\varepsilon(x(z, t))$ peut être estimée par :

$$\|\varepsilon(x(z, t))\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \sigma_1^2 \left\| \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} \right\|_{\mathbb{H}}^2 + \sigma_2^2 \|x(z, t)\|_{\mathbb{H}}^2 \quad (\text{II.23})$$

où σ_1 et σ_2 sont des constants positifs.

Pour faciliter la description de ce résultat, admettons une dynamique de réaction-diffusion décrite par la fonction non linéaire :

$$f\left(\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2}, x(z, t)\right) = \varsigma(x(z, t)) \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + \varrho(x(z, t)) \quad (\text{II.24})$$

où $\varsigma(x(z, t))$ et $\varrho(x(z, t))$ sont des composantes non linéaires. A partir de l'expression d'erreur (II.23), l'approximation de la fonction (II.24) par un modèle EDP flou T-S s'effectue dans la tendance d'approcher le profil spatio-temporel des termes non linéaires

$\varsigma(x(z, t))$ et $\varrho(x(z, t))$. Dans ce sens, le Théorème (II.2) établit les conditions d'estimation de la borne de l'erreur d'approximation floue qui est exprimée dans ce cas précis par :

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}(x(z, t)) = & \varsigma(x(z, t)) \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + \varrho(x(z, t)) \\ & - \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) \left(A_i \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B_i x(z, t) \right) \end{aligned} \quad (\text{II. 25})$$

Théorème II.2 (Wu et al., 2014) : *Admettons que les termes non linéaires $\varsigma(x(z, t))$ et $\varrho(x(z, t))$ sont des fonctions scalaires continus définies sur un domaine compact $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}$, c'est-à-dire, $x(z, t) \in \mathfrak{D}$, et $\varsigma(0) = \varrho(0) = 0$. Alors, il existe deux constantes arbitraires $\sigma_1 > 0$ et $\sigma_2 > 0$, telles que :*

$$\|\tilde{\varepsilon}(x(z, t))\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \sigma_1^2 \left\| \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} \right\|_{\mathbb{H}}^2 + \sigma_2^2 \|x(z, t)\|_{\mathbb{H}}^2 \quad (\text{II. 26})$$

Preuve (Wu et al., 2014) :

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varepsilon}(x(z, t))\|_{\mathbb{H}}^2 &= \int_0^l |\tilde{\varepsilon}(x(z, t))|^2 dz \\ &\leq \int_0^l \sigma_1^2 \left| \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} \right|^2 dz + \int_0^l \sigma_2^2 |x(z, t)|^2 dz \\ &\leq \sigma_1^2 \left\| \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} \right\|_{\mathbb{H}}^2 + \sigma_2^2 \|x(z, t)\|_{\mathbb{H}}^2 \end{aligned} \quad (\text{II. 27})$$

■

II.5 Construction des modèles flous aux dérivées partielles

Les méthodes d'obtention des modèles flous aux dérivées partielles de Takagi-Sugeno peuvent être catégorisées en deux principaux groupes : les méthodes approchées et les méthodes exactes. Le premier groupe de méthodes est généralement basée sur l'erreur d'approximation, alors que le deuxième groupe se fonde sur le modèle physique du système à paramètres distribués.

II.5.1 Méthodes à base de l'erreur d'approximation

Ce groupe de méthodes est basé sur la minimisation de l'erreur d'approximation floue définie comme une déviation entre la fonction non linéaire décrivant la dynamique du SPD et la fonction floue représentée par le modèle EDP T-S à déterminer. Typiquement, l'erreur d'approximation floue peut prendre la forme (II.22) et le problème de construction du modèle EDP flou T-S pour le SPD (II.9) peut être formulé en conséquence comme un problème de minimisation de l'erreur quadratique globale composée à partir des valeurs prédites par le modèle et les valeurs observées. En définissant un vecteur de paramètres pour le modèle EDP flou, le problème d'approximation floue se ramène à un problème d'estimation paramétrique qui peut être résolu au sens des moindres carrés (Passino et Yurkovich, 1998).

A titre d'illustration, considérons l'erreur d'approximation floue (II.25). Il en résulte :

$$\begin{aligned} \zeta(x(z, t)) \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + \varrho(x(z, t)) \\ = \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) \left(A_i \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B_i x(z, t) \right) + \tilde{\varepsilon}(x(z, t)) \end{aligned} \quad (\text{II. 28})$$

En procédant par les moindres carrés, admettons un modèle paramétrique de la forme :

$$\zeta(x(z, t)) \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + \varrho(x(z, t)) = \Lambda(x(z, t))^T \theta + \tilde{\varepsilon}(x(z, t)) \quad (\text{II. 29})$$

où $\Lambda(x(z, t))$ est un vecteur de régression de dimension $2q$ arrangé sous la forme :

$$\begin{aligned} \Lambda(x(z, t)) = [h_1(\varphi(z, t))(\partial^2 x(z, t)/\partial z^2), \dots, h_q(\varphi(z, t))(\partial^2 x(z, t)/\partial z^2), \\ h_1(\varphi(z, t))x(z, t), \dots, h_q(\varphi(z, t))x(z, t)]^T \end{aligned} \quad (\text{II. 30})$$

et θ est un vecteur de paramètres à estimer donné par :

$$\theta = [A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_q]^T \quad (\text{II. 31})$$

Ainsi, il devient envisageable d'approximer les termes non linéaires $\zeta(x(z, t))$ et $\varrho(x(z, t))$ du SPD (II.9) à partir de la fonction floue et d'estimer les paramètres θ de la conséquence des règles en utilisant la méthode des moindres carrés (Wu et al., 2014).

II.5.2 Méthodes à base de modèle physique

Lorsque l'on dispose d'un modèle analytique spatio-temporel suffisamment représentatif du SPD, qui soit toutefois d'une complexité établie le rendant difficilement manipulable en commande, il devient fort utile de recourir à une méthode à base de modèle pour la construction du modèle EDP flou T-S. Certaines approches dédiées peuvent être employées à l'exemple de la méthode de décomposition par secteur non linéaire, la méthode d'approximation locale ou une combinaison de ces deux méthodes (Takagi et Wang, 2001). L'approche par secteur non linéaire est une méthode de construction de modèles flous dite exacte, ayant le potentiel de permettre la génération simultanée de la base des règles et des partitions floues. La description suivante portera sur cette dernière approche spécifique qui est d'ailleurs adoptée le long de ce travail de thèse.

II.6 Méthode de transformation par secteur non linéaire

Initiée par Kawamoto et al. (Kawamoto et al., 1992), puis étendue pour s'appliquer à des problèmes de modélisation floue de systèmes dynamiques de dimension finie et infinie (Takagi et Wang, 2001 ; Morère, 2001 ; Zhang et Wu, 2019), cette méthode s'est vue largement utilisée en modélisation floue. Le principe de la méthode se fonde sur une transformation polytopique convexe des termes non linéaires. Le concept du secteur non linéaire repose sur l'idée de déterminer un secteur de représentation global pour la fonction non linéaire à approximer. C'est une démarche qui n'est pas d'ailleurs toujours aisée, notamment pour les systèmes présentant une dynamique complexe. La considération d'un secteur non linéaire local est plutôt envisageable vu que les grandeurs physiques des systèmes dynamiques évoluent en pratique dans des domaines bornés.

Pour simplifier l'illustration de la méthode de construction du modèle flou T-S par secteur non linéaire, considérons un SPD de réaction-diffusion décrit par la fonction non linéaire (II.24). Les termes non linéaire dans l'équation (II.24) seront désignés par :

$$\varphi_1(z, t) = \varsigma(x(z, t)) \quad (\text{II. 32})$$

$$\varphi_2(z, t) = \varrho(x(z, t)) \quad (\text{II. 33})$$

Les variables spatio-temporelles $\varphi_1(z, t)$ et $\varphi_2(z, t)$ désignent ainsi les variables de prémisses du modèle EDP flou T-S et s'expriment alors en fonction du vecteur d'état $x(z, t)$. Ce modèle peut être exprimé par un ensemble de règles floues IF-THEN de la forme :

Règle i :

IF $\varphi_1(z, t)$ is D_i^1 and $\varphi_2(z, t)$ is D_i^2 ,

$$\text{THEN } \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = A_i \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B_i x(z, t), \quad i = 1, \dots, 4 \quad (\text{II. 34})$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right|_{z=l} = u(t) \quad (\text{II. 35})$$

où $D_i^1, D_i^2, i = 1, \dots, 4$, sont les ensembles flous de prémisses et $A_i = A > 0, B_i, i = 1, \dots, 4$, sont des matrices de dimensions appropriées caractérisant la dynamique locale du modèle EDP non linéaire. En considérant les secteurs locaux $\varphi_1(z, t) \in [\underline{\zeta} \ \bar{\zeta}]$ et $\varphi_2(z, t) \in [\underline{\varrho} \ \bar{\varrho}]$, les fonctions d'appartenance $D_i^1, D_i^2, i = 1, \dots, 4$, s'obtiennent à partir des expressions :

$$\varphi_1(z, t) = D_1^1(\varphi_1(z, t)) \cdot \max_{\varphi_1(z, t)} \varphi_1(z, t) + D_1^2(\varphi_1(z, t)) \cdot \min_{\varphi_1(z, t)} \varphi_1(z, t) \quad (\text{II. 36})$$

$$\varphi_2(z, t) = D_2^1(\varphi_2(z, t)) \cdot \max_{\varphi_2(z, t)} \varphi_2(z, t) + D_2^2(\varphi_2(z, t)) \cdot \min_{\varphi_2(z, t)} \varphi_2(z, t) \quad (\text{II. 37})$$

ou d'une manière équivalente :

$$\varphi_1(z, t) = \bar{\zeta} \cdot D_1^1(\varphi_1(z, t)) + \underline{\zeta} \cdot D_1^2(\varphi_1(z, t)) \quad (\text{II. 38})$$

$$\varphi_2(z, t) = \bar{\varrho} \cdot D_2^1(\varphi_2(z, t)) + \underline{\varrho} \cdot D_2^2(\varphi_2(z, t)) \quad (\text{II. 39})$$

où $D_i^1(\varphi_1(z, t)), D_i^2(\varphi_2(z, t)) \in [0 \ 1], i = 1, \dots, 4$, et vérifiant entre-autre les conditions :

$$D_1^1(\varphi_1(z, t)) + D_1^2(\varphi_1(z, t)) = 1 \quad (\text{II. 40})$$

$$D_2^1(\varphi_2(z, t)) + D_2^2(\varphi_2(z, t)) = 1 \quad (\text{II. 41})$$

Etant donnés les ensembles flous $D_i^1, D_i^2, i = 1, \dots, 4$, le modèle EDP flou T-S s'obtient par interpolation des modèles EDP linéaires locaux via un mécanisme

d'inférence approprié. En utilisant la t-norme et la technique de defuzzification par centre de gravité, il en découle un modèle EDP flou de la forme :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^4 h_i(\varphi(z, t)) \left(A_i \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B_i x(z, t) \right) \quad (\text{II.42})$$

où $\varphi(z, t) = [\varphi_1(z, t) \ \varphi_2(z, t)]^T$, et

$$h_i(\varphi(z, t)) = \frac{\prod_{j=1}^2 D_i^j(\varphi_j(z, t))}{\sum_{i=1}^4 \prod_{j=1}^2 D_i^j(\varphi_j(z, t))}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad z \in [0, l] \quad (\text{II.43})$$

Cette méthode exacte de construction de modèles flous T-S a l'avantage de permettre l'approximation de la dynamique spatio-temporelle du SPD à partir du modèle non linéaire (II.24). Ceci a pour effet de préserver la nature physique du SPD en faisant intégrer les propriétés contenues dans les termes non linéaires $\zeta(x(z, t))$ et $\varrho(x(z, t))$ dans la représentation par le modèle flou résultant (II.42). Les conditions des règles de ce dernier sont formées de variables de prémisses et d'ensembles flous s'exprimant en fonction des termes non linéaires. Toutefois, il convient de noter deux formes de découpage par secteur non linéaire, global ou local, donnant lieu à une approximation exacte sur l'intégralité de l'espace spatio-temporel ou bien sur une partie de celui-ci. En effet, dans le cas où les termes non linéaires sont continus et bornés sur l'espace d'état, le découpage par secteur non linéaire est dit global et le modèle EDP flou constitue donc une représentation exacte du SPD sur la totalité de l'espace d'état. Par contre, le découpage par secteur non linéaire est dit local si les termes non linéaires sont uniquement continus et non bornés (totalement ou partiellement), et l'on a ainsi une représentation exacte par modèle EDP flou sur un sous-espace compact de l'espace des variables d'état.

Cette transformation conduit à un certain nombre de modèles EDP locaux dépendant du nombre de non linéarités contenues dans la fonction non linéaire. En règle générale, si cette dernière est composée de N_r termes non linéaires, alors le modèle EDP flou T-S sera constitué d'au plus 2^{N_r} modèles EDP locaux (règles floues). Le nombre de règles augmentera alors en fonction des non linéarités à prendre en compte dans le modèle non linéaire du SPD. Plus généralement, l'approche par secteur non linéaire permet d'associer une infinité de modèles EDP flous T-S pour un système non linéaire à paramètres distribués suivant le découpage des non-linéarités adopté.

II.7 Exemples d'application

II.7.1 Système de réaction-diffusion

Pour décrire la dynamique spatio-temporelle de la température dans un réacteur chimique ou un échangeur thermique, des équations de réaction-diffusion sont généralement utilisées (Ray, 1989). Nous considérons dans cet exemple illustratif un SPD parabolique dont la dynamique est régie par une équation de réaction-diffusion semi-linéaire de la forme (Wu et al., 2014 ; Wang, 2019 ; Raab et al., 2020) :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + 0.5 \sin(x(z, t)) \quad (\text{II.44})$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right|_{z=1} = u(t) \quad (\text{II.45})$$

et la condition initiale :

$$x(z, 0) = 1 + 1.3 \cos(\pi z) \quad (\text{II.46})$$

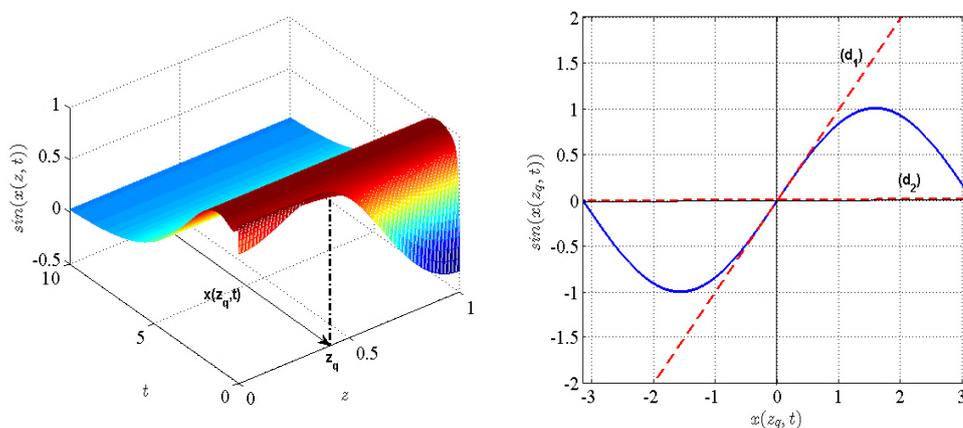


Figure II.1 : Profil spatio-temporel et secteur d'approximation locale du terme non linéaire $\sin(x(z, t))$.

D'après la forme (II.24), la dynamique du SPD (II.44) comprend une seule non linéarité induite par le terme $\varrho(x(z, t)) = \sin(x(z, t))$. Selon l'approche d'approximation floue par secteur non linéaire, $\varrho(x(z, t))$ sera donc la variable de prémisses du modèle EDP flou T-S à construire pour le SPD (II.44)-(II.46), soit $\varphi(z, t) = \sin(x(z, t))$. Le secteur d'approximation locale choisi pour la variable d'état $x(z, t)$ est $[-\pi, \pi]$, $z \in [0, 1]$, comme

dans la référence (Wu et al., 2014). Le profil spatio-temporel du terme non linéaire $\varrho(x(z, t))$ est illustré dans la Figure II.1. A partir de cette figure, il est facile d'établir pour une position quelconque $z = z_q \in [0, 1]$ le secteur $[\eta_1 \eta_2]$ qui consiste en deux droites $(d_1) : \eta_1 x(z_q, t)$ et $(d_2) : \eta_2 x(z_q, t)$ de pentes respectives $\eta_1 = 1$ et $\eta_2 = \frac{0.01}{\pi}$. Ainsi, le terme $\sin(x(z_q, t))$ peut être représenté par :

$$\sin(x(z_q, t)) = D_1(\varphi(z_q, t))\eta_1 x(z_q, t) + D_2(\varphi(z_q, t))\eta_2 x(z_q, t) \quad (\text{II. 47})$$

avec

$$D_1(\varphi(z_q, t)), D_2(\varphi(z_q, t)) \in [0, 1] \text{ et } D_1(\varphi(z_q, t)) + D_2(\varphi(z_q, t)) = 1 \quad (\text{II. 48})$$

Plus généralement, nous pourrions écrire pour tout $z \in [0, 1]$:

$$\sin(x(z, t)) = D_1(\varphi(z, t))\eta_1 x(z, t) + D_2(\varphi(z, t))\eta_2 x(z, t) \quad (\text{II. 49})$$

avec

$$D_1(\varphi(z, t)), D_2(\varphi(z, t)) \in [0, 1] \text{ et } D_1(\varphi(z, t)) + D_2(\varphi(z, t)) = 1 \quad (\text{II. 50})$$

A partir des équations (II.49)-(II.50), les fonctions d'appartenances $D_1(\varphi(z, t))$ et $D_2(\varphi(z, t))$ s'obtiennent par :

$$D_1(\varphi(z, t)) = h_1(\varphi(z, t)) = \begin{cases} \frac{\varphi(z, t) - \eta_2 \sin^{-1}(\varphi(z, t))}{(\eta_1 - \eta_2) \sin^{-1}(\varphi(z, t))}, & \varphi(z, t) \neq 0 \\ 1, & \varphi(z, t) = 0 \end{cases} \quad (\text{II. 51})$$

$$D_2(\varphi(z, t)) = h_2(\varphi(z, t)) = 1 - h_1(\varphi(z, t)) \quad (\text{II. 52})$$

D'après (II.51) et (II.52), il peut être déduit que $h_1(\varphi(z, t)) = 1$, $h_2(\varphi(z, t)) = 0$ lorsque $x(z, t)$ est "environ 0", et $h_1(\varphi(z, t)) \approx 0$, $h_2(\varphi(z, t)) = 1$ lorsque $x(z, t)$ est "environ $-\pi$ ou π ". Il en découle alors que le SPD (II.44)-(II.46) peut être représenté exactement par le modèle EDP flou T-S suivant, qui est composé de deux règles de type IF-THEN assujetti aux conditions (II.45)-(II.46) :

Règle 1 :

IF $x(z, t)$ is "about 0",

$$\text{THEN } \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = A_1 \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B_1 x(z, t)$$

Règle 2 :

IF $x(z, t)$ is "about $-\pi$ or π ",

$$\text{THEN } \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = A_2 \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B_2 x(z, t)$$

Les paramètres des modèles EDP locaux s'obtiennent par simple identification de coefficients à partir du modèle (II.44), ce qui donne $A_1 = A_2 = 1$, $B_1 = 0.5 \eta_1$ et $B_2 = 0.5 \eta_2$. Le modèle EDP flou global ainsi obtenu s'exprime alors sous la forme :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + \sum_{i=1}^{q=2} h_i(\varphi(z, t)) B_i x(z, t) \quad (\text{II.53})$$

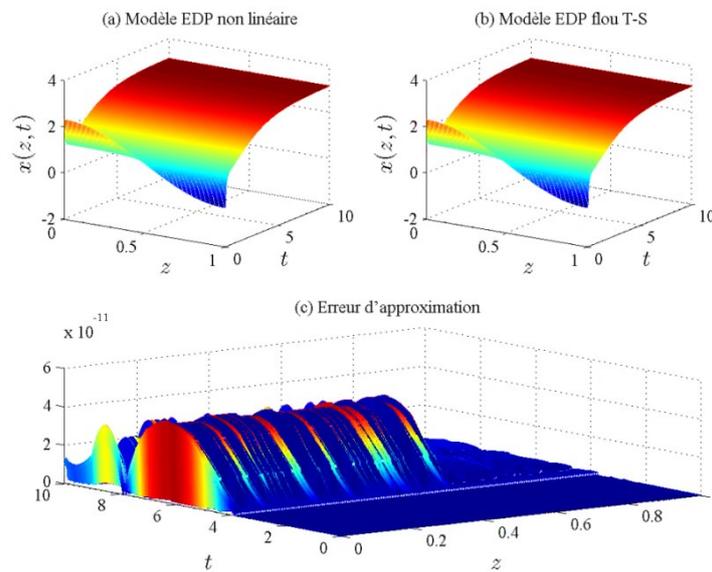


Figure II.2 : Profils spatio-temporels des modèles : (a) EDP non linéaire, (b) EDP flou T-S, et (c) de l'erreur d'approximation.

Les figures II.2(a) et II.2(b) illustrent, respectivement, les profils spatio-temporels du modèle EDP non linéaire (II.44) et de son approximation par modèle EDP flou T-S (II.53). Il est évident de noter que le point d'équilibre $x(z, t) = 0$ du SPD (II.44)-(II.46) est naturellement instable. L'erreur d'approximation floue est tracée sur la Figure II.2(c), elle se situe globalement sur l'échelle 10^{-10} délimitée entre les bornes $\sigma_1 = 0$ et $\sigma_2 = 1.8434 \times 10^{-11}$, d'où la qualité supérieure du modèle EDP flou obtenu.

II.7.2 Système de réaction-diffusion-convection

Les phénomènes de transport et de réaction dans certains procédés chimiques, thermodynamiques et ceux relevant de la dynamique des fluides sont régis par l'équation fondamentale de Burger-Fisher (Smaoui, 2005 ; Wu et al., 2015). A titre d'illustration, nous considérons dans cet exemple un SPD décrit par l'équation de Burger-Fisher suivante (Wu et al., 2015) :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} - x(z, t) \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} + 0.1 x(z, t)(1 - x(z, t)) \quad (\text{II. 54})$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right|_{z=1} = u(t) \quad (\text{II. 55})$$

et la condition initiale :

$$x(z, 0) = 0.1\sin(z) + 0.2 \sin(2z) - 0.3\sin(3z) + 0.2\sin(4z) \quad (\text{II. 56})$$

Il est question dans cette section de représenter le SPD (II.54)-(II.56) par un modèle EDP flou T-S en utilisant l'approche d'approximation par secteur non linéaire. Comme il peut être constaté, la dynamique spatio-temporelle (II.54) regroupe à la fois les termes de réaction-diffusion et de convection. Par souci d'établir une représentation par modèle EDP flou à partir de l'interpolation de modèles EDP linéaires paraboliques répondant à la forme (II.34), les variables de prémisses sont déterminées à partir des termes non linéaires de l'équation (II.54) comme suit :

$$x^2(z, t) = \varphi_1(z, t) x(z, t) \quad (\text{II. 57})$$

$$x(z, t) \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} = \varphi_2(z, t) x(z, t) \quad (\text{II. 58})$$

En adoptant un secteur local commun $[-1, 1]$ pour la variable d'état $x(z, t)$ et son gradient $\frac{\partial x(z, t)}{\partial z}$, les variables de prémisses $\varphi_1(z, t)$ et $\varphi_2(z, t)$ peuvent être exprimées comme dans les équations (II.36)-(II.37) par :

$$\varphi_1(z, t) = D_1^1(\varphi_1(z, t)) \max_{x(z, t)} \varphi_1(z, t) + D_2^1(\varphi_1(z, t)) \min_{x(z, t)} \varphi_1(z, t) \quad (\text{II. 59})$$

$$\varphi_2(z, t) = D_1^2(\varphi_2(z, t)) \max_{x(z, t)} \varphi_2(z, t) + D_2^2(\varphi_2(z, t)) \min_{x(z, t)} \varphi_2(z, t) \quad (\text{II. 60})$$

où

$$\min_{x(z,t)} \varphi_1(z, t) = \min_{x(z,t)} \varphi_2(z, t) = -1$$

$$\max_{x(z,t)} \varphi_1(z, t) = \max_{x(z,t)} \varphi_2(z, t) = 1,$$

et $D_1^1(\varphi_1(z, t))$, $D_2^1(\varphi_1(z, t))$, $D_1^2(\varphi_2(z, t))$, $D_2^2(\varphi_2(z, t))$ sont définies dans $[0, 1]$ vérifiant les conditions :

$$D_1^1(\varphi_1(z, t)) + D_2^1(\varphi_1(z, t)) = 1 \quad (\text{II. 61})$$

$$D_1^2(\varphi_2(z, t)) + D_2^2(\varphi_2(z, t)) = 1 \quad (\text{II. 62})$$

A partir des équations (II.59)-(II.62), il en résulte les fonctions d'appartenance :

$$D_1^1(\varphi_1(z, t)) = \frac{\varphi_1(z, t) + 1}{2} \quad (\text{II. 63})$$

$$D_2^1(\varphi_1(z, t)) = 1 - D_1^1(\varphi_1(z, t)) \quad (\text{II. 64})$$

$$D_1^2(\varphi_2(z, t)) = \frac{\varphi_2(z, t) + 1}{2} \quad (\text{II. 65})$$

$$D_2^2(\varphi_2(z, t)) = 1 - D_1^2(\varphi_2(z, t)) \quad (\text{II. 66})$$

Compte tenu des variables de prémisses et des ensembles flous qui leur sont associées, le SPD (II.54)-(II.56) peut être représenté exactement par un modèle EDP flou T-S composé de quatre règles IF-THEN de la forme suivante, assujetti aux conditions (II.55)-(II.56) :

Règle 1 :

IF $\varphi_1(z, t)$ is Big and $\varphi_2(z, t)$ is Big,

$$\text{THEN } \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = A_1 \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B_1 x(z, t)$$

Règle 2 :

IF $\varphi_1(z, t)$ is Big and $\varphi_2(z, t)$ is Small,

$$\text{THEN } \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = A_2 \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B_2 x(z, t)$$

Règle 3 :

IF $\varphi_1(z, t)$ is Small and $\varphi_2(z, t)$ is Big,

$$\text{THEN } \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = A_3 \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B_3 x(z, t)$$

Règle 4 :

IF $\varphi_1(z, t)$ is Small and $\varphi_2(z, t)$ is Small,

$$\text{THEN } \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = A_4 \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B_4 x(z, t)$$

où *Small* et *Big* désignent différemment les valeurs qualitatives associées aux variables de prémisses $\varphi_1(z, t)$ et $\varphi_2(z, t)$, soit "*Small*" $\triangleq D_2^1(\varphi_1(z, t))$ et "*Big*" $\triangleq D_1^1(\varphi_1(z, t))$ pour la variable floue $\varphi_1(z, t)$, et "*Small*" $\triangleq D_2^2(\varphi_2(z, t))$ et "*Big*" $\triangleq D_1^2(\varphi_2(z, t))$ pour $\varphi_2(z, t)$.

Les paramètres des modèles EDP locaux associés aux conséquences des règles floues sont déterminés par : $A_i = 1$ pour tout $i = 1, 2, 3, 4$, et $B_1 = -1$, $B_2 = 1$, $B_3 = -0.8$ et $B_4 = 1.2$. Le modèle EDP flou global de type T-S représentant le SPD (II.54)-(II.56) prend alors la forme :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + \sum_{i=1}^{q=4} h_i(\varphi(z, t)) B_i x(z, t) \quad (\text{II. 67})$$

où $\varphi(z, t) = [\varphi_1(z, t) \ \varphi_2(z, t)]^T$ et

$$h_i(\varphi(z, t)) = \frac{\prod_{j=1}^2 D_i^j(\varphi_j(z, t))}{\sum_{i=1}^4 \prod_{j=1}^2 D_i^j(\varphi_j(z, t))}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad z \in [0, 1] \quad (\text{II. 68})$$

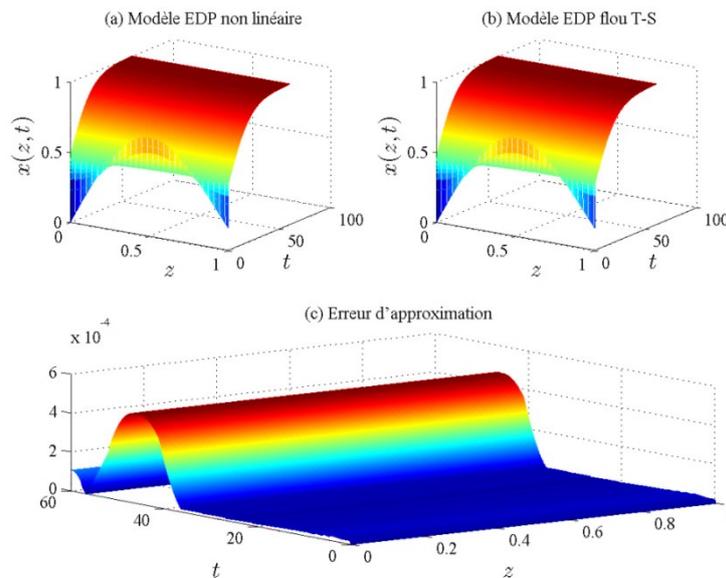


Figure II.3 : Profils spatio-temporels des modèles : (a) EDP non linéaire, (b) EDP flou T-S, et (c) de l'erreur d'approximation.

Il est important de souligner que la dynamique décrite par le modèle EDP flou (II.67) dépend explicitement du terme de convection $\partial x(z, t)/\partial z$ qui apparait dans les conditions des règles floues. Ainsi, les effets de convection et de réaction se trouvent systématiquement induites à travers cette forme d'approximation par modèle EDP flou. La qualité d'approximation floue est illustrée dans la Figure II.3 où sont tracés les profils spatio-temporels du modèle EDP non linéaire (II.54), du modèle EDP flou (II.67) et de l'erreur d'approximation. Cette dernière évolue dans l'échelle 10^{-5} entre les bornes $\sigma_1 = 0$ et $\sigma_2 = 4.5842 \times 10^{-4}$, ce qui renseigne de la qualité suffisante du modèle EDP flou proposé et son aptitude à reproduire les principales caractéristiques du SPD original.

II.7.3 Système de réaction-diffusion bidimensionnel

L'équation de FitzHugh-Nagumo (FHN) est utilisée pour décrire la dynamique de certains processus chimiques et biologiques excitables de réaction-diffusion (Wu et al., 2014). Dans cet exemple illustratif, nous considérons un SPD bidimensionnel dont la dynamique spatio-temporelle est régie par l'équation fondamentale de FHN qui est donnée sous la forme (Wu et al., 2014) :

$$\frac{\partial x_1(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x_1(z, t)}{\partial z^2} + x_1(z, t) - x_2(z, t) - x_1^3(z, t) \quad (\text{II. 69})$$

$$\frac{\partial x_2(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x_2(z, t)}{\partial z^2} + 0.45 x_1(z, t) - 0.1 x_2(z, t) \quad (\text{II. 70})$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \frac{\partial x_1(z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial x_2(z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (\text{II. 71})$$

$$\left. \frac{\partial x_1(z, t)}{\partial z} \right|_{z=1} = u_1(t), \quad \left. \frac{\partial x_2(z, t)}{\partial z} \right|_{z=1} = u_2(t) \quad (\text{II. 72})$$

et les conditions initiales :

$$x_1(z, 0) = 0.5 \cos(\pi z/2), \quad x_2(z, 0) = 0.1 \cos(\pi z) \quad (\text{II. 73})$$

où $x_1(z, t)$ et $x_2(z, t)$ représentent les variables d'état et $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont les variables de commande aux frontières.

La seule non linéarité présente dans le modèle EDP (II.69)-(II.73) est induite par la composante d'état $x_1(z, t)$ à travers le terme non linéaire $x_1^3(z, t)$. Ainsi, et compte tenu du

principe de l'approche de découpage par secteur non linéaire, la variable de prémisse du modèle EDP flou T-S à déterminer est choisie comme $\varphi(z, t) = x_1^2(z, t)$. L'approximation par modèle EDP flou sera établie en considérant le secteur local $x_1(z, t) \in [-1.2, 1.2]$ comme dans (Wu et al., 2014), et ce compte tenu du profil d'évolution spatio-temporelle du SPD (II.69)-(II.73) représenté dans la Figure II.4(a). Ainsi définie, la variable de prémisse $\varphi(z, t) \in [0, 1.44]$ peut être exprimée en fonction des ensembles flous $D_1(\varphi(z, t))$ et $D_2(\varphi(z, t))$ par :

$$\varphi(z, t) = D_1(\varphi(z, t)) \max_{x_1(z, t)} \varphi(z, t) + D_2(\varphi(z, t)) \min_{x_1(z, t)} \varphi(z, t) \quad (\text{II.74})$$

où $\max_{x_1(z, t)} \varphi(z, t) = \vartheta = 1.44$, $\min_{x_1(z, t)} \varphi(z, t) = 0$ et $D_1(\varphi(z, t)), D_2(\varphi(z, t)) \in [0, 1]$ vérifient entre-autre la condition $D_1(\varphi(z, t)) + D_2(\varphi(z, t)) = 1$.

A partir de ces conditions, les fonctions d'appartenance $D_1(\varphi(z, t))$ et $D_2(\varphi(z, t))$ sont déterminées par les expressions suivantes :

$$D_1(\varphi(z, t)) = h_1(\varphi(z, t)) = \frac{\varphi(z, t)}{\vartheta} \quad (\text{II.75})$$

$$D_2(\varphi(z, t)) = h_2(\varphi(z, t)) = 1 - h_1(\varphi(z, t)) \quad (\text{II.76})$$

Désignons par "Around ϑ " et "Around 0" les caractérisations floues respectives des ensembles $D_1(\varphi(z, t))$ et $D_2(\varphi(z, t))$. Le SPD (II.61)-(II.65) peut être ainsi représenté exactement par un modèle EDP flou T-S composé de deux règles de type IF-THEN assujetti aux conditions (II.71)-(II.73) de la forme :

Règle 1 :

IF $\varphi(z, t)$ is "Around ϑ ",

$$\text{THEN } \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = A_1 \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B_1 x(z, t)$$

Règle 2 :

IF $\varphi(z, t)$ is "Around 0",

$$\text{THEN } \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = A_2 \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B_2 x(z, t)$$

Les paramètres des conséquences des règles sont déterminés par simple identification de coefficients à partir du modèle EDP non linéaire (II.69)-(II.73), ce qui donne :

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & -1 \\ b_{12} & -0.1 \end{bmatrix} \text{ et } B_2 = \begin{bmatrix} b_{21} & -1 \\ b_{22} & -0.1 \end{bmatrix}$$

avec $b_{11} = -0.44$, $b_{21} = 1$ et $b_{12} = b_{22} = 0.45$.

Le modèle EDP flou global peut être enfin obtenu comme suit :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + \sum_{i=1}^{q=2} h_i(\varphi(z, t)) B_i x(z, t) \quad (\text{II.77})$$

Les profils spatio-temporels des variables d'état $x_1(z, t)$ et $x_2(z, t)$ et de leurs approximations par le modèle EDP flou (II.77) sont tracés sur les Figures II.4 et II.5 où il apparait clairement que le point d'équilibre $x_1(z, t) = 0$, $x_2(z, t) = 0$ du système est instable. Des erreurs d'approximation identiquement nulles sont obtenues, ce qui démontre la supériorité du modèle EDP flou développé et le potentiel de cette méthode de construction exacte de modèle flou.

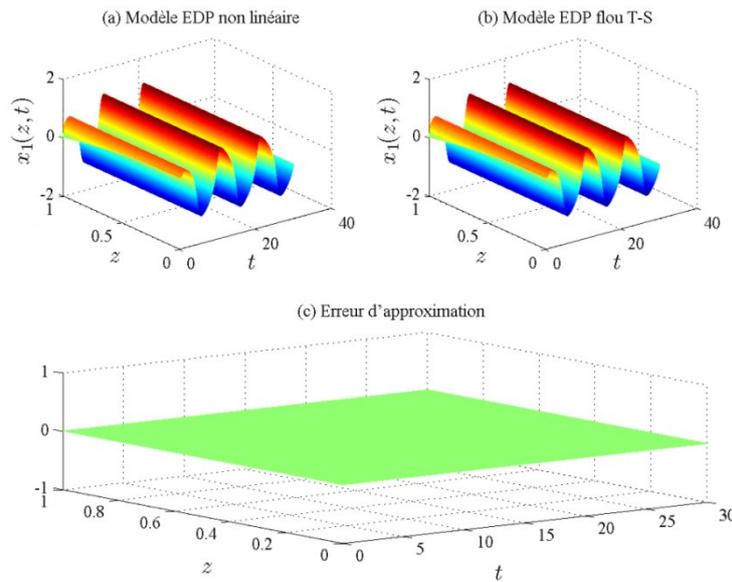


Figure II.4 : Profils d'évolution spatio-temporelle de la variable d'état $x_1(z, t)$: (a) EDP non linéaire, (b) EDP flou T-S, et (c) de l'erreur d'approximation.

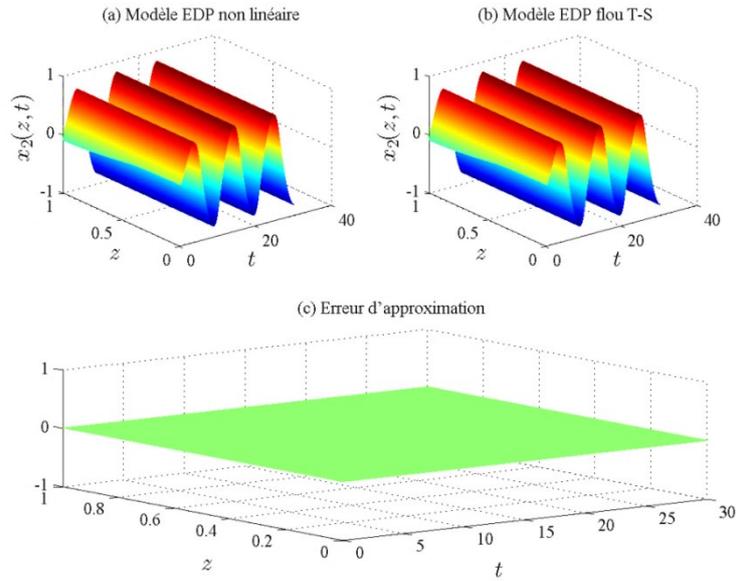


Figure II.5 : Profils d'évolution spatio-temporelle de la variable d'état $x_2(z, t)$: (a) EDP non linéaire, (b) EDP flou T-S, et (c) de l'erreur d'approximation.

II.8 Conclusion

Ce chapitre a été consacré au problème particulier de construction de modèles flous aux dérivées partielles pour des systèmes à paramètres distribués non linéaires. L'enjeu d'une approximation approchée ou exacte est montré dans ce chapitre par l'illustration de deux approches principales, la première se fonde sur l'erreur d'approximation alors que la deuxième utilise le modèle physique du procédé. Une méthode de construction exacte est très avantageuse en commande pourvu que le modèle physique soit suffisamment représentatif de la dynamique spatio-temporelle du SPD à commander. Cela permettra de préserver les caractéristiques du SPD dans la nouvelle forme de représentation ; chose qui se projettera sur la structure et la performance du contrôleur de dimension infinie à déterminer. C'est justement cette particularité de la méthode exacte de construction de modèle flou T-S qui motive notre recours dans ce travail à l'approche par secteur non linéaire, que nous avons illustrée sur des exemples typiques de réaction, diffusion et convection de différentes dimensions. La simplicité du modèle EDP flou et sa qualité sont les deux critères de validation adoptés, en vue de l'exploiter pour la synthèse géométrique floue à la frontière proposée dans ce travail de recherche.

Chapitre III

Commande géométrique floue à la frontière de SPD non linéaires

III.1 Introduction

Les systèmes dynamiques caractérisés par les phénomènes de transport sont souvent décrits par des équations aux dérivées partielles (EDP) non linéaires (Ray, 1989 ; Christofides, 2001). Cette classe de systèmes est désignée sous le vocable de systèmes à paramètres distribués (SPD) non linéaires. Sur le plan méthodologique, la commande des SPD non linéaires est très difficile (Christofides, 2001) en comparaison aux SPD linéaires qui sont toutefois bien maîtrisés grâce à la théorie des semi-groupes (Curtain et Zwart, 1995). Pour la synthèse de contrôleurs, deux approches distinctes peuvent être envisagées (voir section I.6). La première approche (de pré-approximation) consiste à approximer le SPD non linéaire par un système à paramètres localisés (SPL) décrit par un modèle aux dérivées ordinaires en utilisant des méthodes de réduction de modèle appropriées (Ray, 1989). Sur la base du modèle réduit résultant, des techniques de commande de SPL non linéaires (d'ailleurs assez développées) peuvent être employées pour la synthèse de lois commande (Isidori, 1995). Toutefois, certaines limitations méritent d'être soulevées : d'abord c'est par rapport à la grande dimension du modèle réduit qui pourrait en résulter. Cela conduirait à une réalisation de commande de grande dimension également, ce qui contraint son implémentation (Christofides 2001). D'autre part, la réduction de modèle n'est pas sans impact sur les propriétés fondamentales du SPD, ce qui entraîne souvent des conclusions erronées sur la stabilité, la commandabilité et l'observabilité du système (Ray, 1989 ; Christofides, 2001). Dans la deuxième approche (de post-approximation), une procédure de linéarisation du SPD non linéaire autour d'un profil d'équilibre peut être envisagée pour permettre, à titre d'exemple, l'emploi d'outils propres à la théorie des semi-groupes (Ray, 1989 ; Maida 2011). A travers ce concept, il est tout à fait clair de

ramener la synthèse sur de faibles excursions des variables du SPD, ce qui limite le domaine de validité du contrôle et enfreint sa robustesse.

Nous proposons dans ce chapitre une toute nouvelle approche de commande de SPD non linéaires basée sur les modèles EDP flous. La méthode proposée repose sur le concept du contrôle géométrique à la frontière et est développée selon une approche de synthèse locale basée sur une approximation floue de la dynamique spatio-temporelle non linéaire. C'est une approche tout à fait originale qui s'appuie sur un modèle EDP flou de T-S construit par interpolation de modèles EDP linéaires, adoptant une démarche de synthèse prouvée mathématiquement au sens de la stabilité du système de commande géométrique floue résultant. Pour illustrer la méthode, nous aborderons d'abord les principaux éléments de synthèse du contrôle géométrique dédiés aux SPD linéaires, avant de détailler la nouvelle approche de commande géométrique floue développée pour des SPD non linéaires représentés par des modèles flous aux dérivées partielles. Les conditions de stabilité du système de commande fermée résultant seront démontrées et présentées à travers des exemples d'application à la fin du chapitre.

III.2 Commande géométrique à la frontière d'un SPD linéaire

Dans le domaine particulier de la commande des systèmes à paramètres distribués, l'emploi de modèles EDP linéaires a été fondamentalement très avantageux sur le plan analyse et synthèse. Partant de ce principe, la commande géométrique à la frontière s'est vue arrachée une position confortable dans la littérature concernée au vu du bon nombre de travaux et d'applications rapportés (Christofides et Daoutidis, 1996 ; Wu et Liou, 2001; Gugat, 2002 ; Lagnese et Leugering, 2003 ; Wang, 2007 ; Maida et al., 2010). Le potentiel de la méthode tient d'abord à la simplicité des outils mathématiques manipulés, en l'occurrence l'indice caractéristique et l'opérateur étendu. Ces concepts sont introduits dans le but de rendre aisée la manipulation directe du modèle EDP linéaire sans aucune préalable approximation, ce qui permet de conserver les propriétés physiques du système à commander, du moins pour certaines classes de SPD. Un autre intérêt majeur de la méthode réside dans la possibilité d'employer certaines techniques de commande développées pour les systèmes à paramètres localisés (Isidori, 1995 ; Corriou, 2003). L'importance de la méthode tient également à sa faisabilité pratique étant donné qu'un

seul ou plusieurs actionneurs placés à la frontière du domaine spatial seraient requis pour une éventuelle implémentation (Ray, 1989 ; Christofides, 2001). Le problème de commande géométrique est décrit dans la suite en considérant une classe de SPD décrits par des modèles EDP paraboliques linéaires à titre d'illustration de la méthode seulement sans perte de généralité.

III.2.1 Formulation du problème

Considérons un SPD parabolique linéaire représenté dans l'espace d'état par une équation de réaction-diffusion de la forme :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = A \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B x(z, t) \quad (\text{III. 1})$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right|_{z=l} = u(t) \quad (\text{III. 2})$$

et la condition initiale :

$$x(z, 0) = x_0(z) \quad (\text{III. 3})$$

où $z \in \Omega$ et $t \in \mathbb{R}^+$ sont les variables spatiale et temporelle, respectivement ; $\Omega = [0, l]$, $l > 0$, est le domaine spatial ; $x(z, t) \in \mathbb{H}$ est la variable d'état ; $u(t) \in \mathbb{R}$ est la variable de commande ; $x_0(z) \in \mathbb{H}$ est un profil spatial initial ; $\mathbb{H} = L^2(\Omega)$ est l'espace d'Hilbert, et $A, B \in \mathbb{R}$ sont des paramètres constants du modèle.

Pour le système (III.1)-(III.3), définissons la variable de sortie à commander $y(t)$ par :

$$y(t) = \int_0^l c(z) x(z, t) dz \quad (\text{III. 4})$$

où $y(t) \in \mathbb{R}$ et $c(z)$ est une fonction lisse.

Hypothèse III.1 : $c(z)$ est une fonction continue avec $c(l) \neq 0$.

Etant donné la sortie commandée $y(t)$, le problème à résoudre est celui de la synthèse d'un contrôle géométrique à la frontière qui permettra de stabiliser le SPD (III.1)-(III.3) autour du profile d'équilibre $x(z, t) = 0$.

III.2.2 Eléments de synthèse

III.2.2.1 Indice caractéristique

Au vu de la composante $y(t)$ décrite par l'équation (III.4) qui exprime en fait une observation de sortie par moyennage spatial (voir section I.5.2.5), le SPD (III.1)-(III.3) serait alors non commandable au sens du contrôle géométrique car il est de dimension infinie (Kravaris et Kantor, 1990 ; Christofides et Daoutidis, 1996 ; Maida et al., 2009 ; Maida et al., 2010). Ceci a rapport avec l'indice caractéristique qui traduit entre-autre la propriété de commandabilité des SPD selon un formalisme bien posé.

Définition III.1 (Christofides et Daoutidis, 1996) : L'indice caractéristique d'un SPD est par définition le plus petit degré de dérivation de la sortie commandée qui dépend explicitement de l'entrée manipulée.

A titre d'illustration, l'indice caractéristique, noté ici ξ , du SPD décrit par le modèle parabolique linéaire (III.1)-(III.3) s'obtient à partir de l'évaluation des dérivées temporelles successives de la sortie commandée $y(t)$ exprimée par (III.4). Il en résulte :

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \int_0^l c(z) \frac{dx(z,t)}{dt} dz \\ &= \int_0^l c(z) \left(A \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z^2} + B x(z,t) \right) dz \end{aligned} \quad (\text{III. 5})$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{dy^2(t)}{dt^2} &= \int_0^l c(z) A \frac{d\partial^2 x(z,t)}{dt\partial z^2} dz + \int_0^l c(z) B \frac{dx(z,t)}{dt} dz \\ &= \int_0^l c(z) A \frac{d\partial^2 x(z,t)}{dt\partial z^2} dz + \int_0^l c(z) B \left(A \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z^2} + B x(z,t) \right) dz \end{aligned} \quad (\text{III. 6})$$

Il apparaît clairement que les dérivées première et deuxième de la sortie commandée $y(t)$ ne s'expriment pas en fonction de la variable de commande $u(t)$, ce sera de même pour les dérivées d'ordres supérieurs. L'indice caractéristique de ce système est donc infini ($\xi = \infty$) ; le SPD (III.1)-(III.3) serait alors non commandable au sens du contrôle géométrique.

III.2.2.2 Opérateur étendu

Un système à paramètres distribués avec une commande à la frontière est caractérisé par un opérateur de commande dont l'image est un espace de fonctions large par rapport à l'espace d'état du système à commander. Cette caractéristique impose de sérieuses contraintes quant à l'analyse mathématique du problème de commande. Surmonter cette difficulté nécessite la conversion du problème de commande à la frontière en un problème de commande ponctuelle ou distribuée équivalent (Stafford et Dowrick, 1977 ; Maida et al, 2009).

Définition III.2 (Stafford et Dowrick, 1977) : L'opérateur étendu est l'opérateur de commande qui résulte de la transformation d'un problème de commande à la frontière d'un SPD en un problème de commande ponctuelle ou distribuée équivalent.

La technique de l'opérateur étendu introduit donc une forme de transformation du problème de commande visant l'objectif de ramener l'indice caractéristique du SPD à commander à une valeur finie, de sorte qu'il devienne commandable au sens du contrôle géométrique. Pour ce faire, il y a lieu d'introduire la variable de commande $u(t)$ dans l'équation d'état (III.1) en exploitant la fonction de Dirac qui permet d'écrire pour un point d'espace z_1 du domaine spatial :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} &= \int_0^l \delta(z - z_1) \frac{\partial^2 x(z_1, t)}{\partial z_1^2} dz_1 \\ &= \delta(z - z_1) \frac{\partial x(z_1, t)}{\partial z_1} \Big|_{z_1=0}^{z_1=l} - \int_0^l \frac{\partial \delta(z - z_1)}{\partial z_1} \frac{\partial x(z_1, t)}{\partial z_1} dz_1 \end{aligned} \quad (\text{III. 7})$$

Considérons à présent la propriété suivante de la fonction de Dirac (Stafford et Dowrick, 1977) :

$$\int_0^l \frac{\partial \delta(z - z_1)}{\partial z_1} f(z_1) dz_1 = \delta(z - z_1) f(z_1) \Big|_0^l - \int_0^l \delta(z - z_1) \frac{df(z_1)}{dz_1} dz_1 \quad (\text{III. 8})$$

et comme $z \in 0, l$, il en découle $\delta(z - l) = \delta(z) = 0$, ce qui donne :

$$\int_0^l \frac{\partial \delta(z - z_1)}{\partial z_1} f(z_1) dz_1 = - \int_0^l \delta(z - z_1) \frac{df(z_1)}{dz_1} dz_1 = \frac{-df(z_1)}{dz_1} \quad (\text{III. 9})$$

Compte tenu de (III.9), l'équation (III.7) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} &= \delta(z - z_1) \frac{\partial x(z_1, t)}{\partial z_1} \Big|_{z_1=0}^{z_1=l} - \left(- \int_0^l \delta(z - z_1) \frac{\partial^2 x(z_1, t)}{\partial z_1^2} dz_1 \right) \\ &= \delta(z - l) \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=l} - \delta(z) \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (\text{III. 10})$$

Admettons les conditions aux limites $\frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = f_0(t)$ et $\frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=l} = f_l(t)$,

l'équation (III.1) peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = A \left[\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + \delta(z - l) f_l(t) - \delta(z) f_0(t) \right] + B x(z, t) \quad (\text{III. 11})$$

En substituant les conditions aux limites (III.2) dans (III.11), un modèle EDP équivalent avec une commande ponctuelle peut être établi pour le SPD (III.1)-(III.3). L'équation d'état du système devient :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = A \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B x(z, t) + \delta(z - l) A u(t) \quad (\text{III. 12})$$

avec les conditions aux limites :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=l} = 0 \quad (\text{III. 13})$$

En procédant par différenciation successive de la sortie commandée (III.4) qui s'exprime maintenant de manière explicite en fonction de l'entrée manipulée $u(t)$, l'indice caractéristique du modèle (III.12) est évalué comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \int_0^l c(z) \frac{dx(z, t)}{dt} dz \\ &= \int_0^l c(z) \left(A \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B x(z, t) \right) dz + \int_0^l c(z) A \delta(z - l) u(t) dz \end{aligned} \quad (\text{III. 14})$$

Posons (III.15) sous la forme :

$$\frac{dy(t)}{dt} = J_1 + J_2 u(t) \quad (\text{III. 15})$$

où

$$J_1 = \int_0^l c(z) \left(A \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B x(z, t) \right) dz \quad (\text{III. 16})$$

et

$$J_2 = \int_0^l c(z) A \delta(z - l) dz \quad (\text{III. 17})$$

L'évaluation du terme J_2 donne :

$$J_2 = c(l) A \quad (\text{III. 18})$$

Ainsi, il apparaît clairement que la variable de commande $u(t)$ figure explicitement dans la première dérivée temporelle de la sortie à commander $y(t)$. D'autre part, comme $A \neq 0$ et en tenant compte de l'hypothèse (III.1), l'indice caractéristique du SPD a pour valeur $\xi = 1$. Cela signifie qu'une dynamique linéaire du premier ordre de la forme suivante peut être imposée pour le système en boucle fermée :

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \vartheta(t) \quad (\text{III. 19})$$

où $\tau > 0$ est un paramètre de conception et $\vartheta(t)$ désigne la référence externe.

En substituant les termes J_1 et J_2 dans l'équation (III.15), il en résulte :

$$\frac{dy(t)}{dt} = \int_0^l c(z) A \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} dz + \int_0^l c(z) B x(z, t) dz + c(l) A u(t) \quad (\text{III. 20})$$

Ce qui conduit à exprimer la dynamique du système en boucle fermée par l'équation :

$$\tau \left(\int_0^l c(z) A \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} dz + \int_0^l c(z) B x(z, t) dz + c(l) A u(t) \right) + y(t) = \vartheta(t) \quad (\text{III. 21})$$

La loi de commande géométrique à la frontière résultant pour le SPD parabolique linéaire (III.1)-(III.3) s'obtient de l'équation (III.21) par :

$$u(t) = \frac{1}{\tau c(l) A} \left(\vartheta(t) - y(t) - \tau \int_0^l c(z) A \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} dz - \tau \int_0^l c(z) B x(z, t) dz \right) \quad (\text{III. 22})$$

III.3 Commande géométrique floue à la frontière

L'extension de la méthode de synthèse du contrôle géométrique à la frontière aux SPD non linéaires est loin d'être systématique. La principale difficulté tient à la dimension infinie de l'indice caractéristique du système. Comme expliqué dans la section III.2, il est possible de surmonter cette contrainte dans le cas linéaire en utilisant la méthode de l'opérateur étendu. La transformation du problème de commande d'un SPD non linéaire avec une entrée à la frontière au sens de l'opérateur étendu est difficile à mettre en œuvre. Notre contribution vise justement l'objectif de contourner cette contrainte majeure de synthèse en passant par une modélisation orientée du SPD non linéaire. L'idée repose sur l'approximation par modèle EDP flou de la dynamique spatio-temporelle non linéaire de manière à faire ressortir des sous-systèmes linéaires à manipuler suivant une approche de commande locale pour la synthèse d'un contrôleur géométrique à la frontière. Il s'agit d'une nouvelle stratégie de commande géométrique floue à la frontière que nous proposons pour une classe de SPD non linéaires à plusieurs entrées, plusieurs sorties (multi-dimensionnels), dont les détails de synthèse sont décrits dans la suite de cette section.

III.3.1 Formulation du problème

Dans ce qui suit, nous considérons un SPD non linéaire représenté par un modèle EDP de réaction-diffusion-convection de la forme (II.9) assujetti aux conditions initiale et terminale (II.10)-(II.11) tel que décrit dans la section II.3, Chapitre II. Introduisons pour ce SPD la variable de sortie à commander $y(t)$:

$$y(t) = \int_0^l c(z) x(z, t) dz \quad (\text{III. 23})$$

où $y(t) = [y_1(t) \cdots y_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ et $c(z) = \text{diag}(c_1(z) \cdots c_n(z))$ avec $c_k(z) \in L^2(\Omega)$, $k = 1, \dots, n$, sont des fonctions lisses.

Hypothèse III.2 : $c_k(z) > 0$, $k = 1, \dots, n$, avec $\ddot{c}_k(z) = 0$.

Etant donnée la sortie commandée $y(t)$, le problème de commande à résoudre consiste à déterminer un contrôleur géométrique à la frontière qui permettra de stabiliser le système (II.9)-(II.11) autour du profil d'équilibre $x(z, t) = 0$ tout en assurant la stabilité de la boucle fermée. Notre démarche de synthèse repose d'abord sur une approximation

floue de la dynamique spatio-temporelle du SPD non linéaire que l'on choisit de décrire par un modèle EDP flou de type T-S de la forme (II.14) avec les conditions aux limites (II.15). Cela permettrait de définir un contrôleur géométrique flou à la frontière de type T-S de la forme :

Règle i :

IF $\varphi_1(z, t)$ is D_i^1 and ... and $\varphi_p(z, t)$ is D_i^p ,

THEN $u(t) = \mathcal{K}_i[x(z, t)]$, $i = 1, \dots, q$ (III. 24)

où $\varphi_j(z, t)$, $j = 1, \dots, p$, désignent les variables de prémisse de la règle i , D_i^j , $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, p$, sont les ensembles flous de prémisse, p est le nombre d'ensembles flous et q est le nombre de règles. \mathcal{K}_i est un opérateur différentiel spatial linéaire borné associé à la commande locale $u(t)$ figurant dans la conséquence de la règle i .

Par inférence de l'ensemble des q règles IF-THEN, un contrôleur géométrique flou à la frontière peut être obtenu sous la forme :

$$u(t) = \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) \mathcal{K}_i[x(z, t)] \quad (\text{III. 25})$$

où $\varphi(z, t) = [\varphi_1(z, t) \dots \varphi_p(z, t)]^T$ et $h_i(\varphi(l, t))$, $i = 1, \dots, q$, sont des fonctions d'appartenance exprimées à la frontière du domaine spatiale avec $h_i(\varphi(l, t)) \geq 0$ et $\sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) = 1$ pour tout $t \geq 0$.

III.3.2 Synthèse du contrôleur

Le contrôleur géométrique flou à la frontière (III.25) est caractérisé par l'opérateur différentiel $\mathcal{K}_i[x(z, t)]$ qu'il faudra déterminer pour chaque règle i en utilisant l'indice caractéristique. Cet indice étant infini comme montré dans la section III.2, ce qui conduit à faire appel à l'opérateur étendu pour surmonter la difficulté de synthèse. De ce fait, compte tenu de la forme linéaire de la conséquence des règles du modèle EDP flou (II.14), la conversion du problème de commande à la frontière en un problème de commande ponctuelle avec un indice caractéristique fini est plutôt envisageable. C'est une transformation à opérer pour le besoin de synthèse du contrôleur seulement. Pour ce faire, l'entrée manipulée $u(t)$ est appliquée à la frontière du domaine spatial ($z = l$) avec les conditions non homogènes (II.15). Ces conditions nécessitent d'être transformées en une

forme homogène en introduisant la variable de commande locale $u(t)$ dans la conséquence de la règle i du modèle (II.14) à laquelle on associe la fonction $\delta(z - l)$. Ainsi, un modèle EDP flou T-S équivalent avec une entrée ponctuelle peut être établi sous la forme :

Règle i :

IF $\varphi_1(z, t)$ is D_i^1 and ... and $\varphi_p(z, t)$ is D_i^p ,

$$\text{THEN } \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = A_i \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B_i x(z, t) + \delta(z - l)A_i u(t), \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{III. 26})$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right|_{z=l} = 0 \quad (\text{III. 27})$$

Hypothèse III.3 : $A_i, i = 1, \dots, q$, sont des matrices définies positives.

En évaluant la première dérivée de la sortie commandée (III.23), il en résulte :

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \int_0^l c(z) \frac{dx(z, t)}{dt} dz \\ &= \int_0^l c(z) \left(A_i \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B_i x(z, t) \right) dz + \left(\int_0^l c(z) A_i \delta(z - l) dz \right) u(t) \\ &= \int_0^l c(z) \left(A_i \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B_i x(z, t) \right) dz + c(l) A_i u(t), \quad i = 1, \dots, q \end{aligned} \quad (\text{III. 28})$$

D'après l'équation (III.28), il est facile de remarquer que les commandes locales $u(t)$, $i = 1, \dots, q$, apparaissent explicitement dans l'expression de la première dérivée de la sortie $y(t)$. D'autre part, étant donné que les matrices $A_i, i = 1, \dots, q$, et $c(l)$ sont non singulières (voir hypothèses III.2 et III.3), il en découle que les matrices caractéristiques $c(l) A_i, i = 1, \dots, q$, le sont également. Cela conduit à réaliser qu'une dynamique linéaire du premier ordre de la forme suivante peut être imposée (localement) pour la boucle fermée :

$$\tau^i \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \vartheta(t), \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{III.29})$$

où $\tau^i = \text{diag}(\tau_1^i, \dots, \tau_n^i)$, avec $\tau_k^i > 0$, $k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, q$, sont les paramètres de contrôle associés à la règle i et $\vartheta(t) = [\vartheta_1(t) \ \dots \ \vartheta_n(t)]^T$ est le vecteur des références externes. Les paramètres de conception τ^i , $i = 1, \dots, q$, doivent être choisis en fonction du comportement en boucle désiré.

En combinant les équations (III.28) et (III.29), la commande locale $u(t)$ s'obtient par :

$$u(t) = (\tau^i c(l) A_i)^{-1} \left(\vartheta(t) - y(t) - \tau^i \int_0^l c(z) A_i \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} dz - \tau^i \int_0^l c(z) B_i x(z, t) dz \right), \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{III.30})$$

En considérant l'hypothèses III.2 et les conditions (III.27), la commande (III.30) peut être exprimée par :

$$u(t) = (\tau^i c(l) A_i)^{-1} \left(\vartheta(t) - y(t) + \tau^i \frac{\partial c(z)}{\partial z} \Big|_{z=l} A_i x(l, t) - \tau^i \frac{\partial c(z)}{\partial z} \Big|_{z=0} A_i x(0, t) - \tau^i \int_0^l c(z) B_i x(z, t) dz \right), \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{III.31})$$

Posons $P_i = (\tau^i c(l) A_i)^{-1}$, le contrôleur géométrique flou à la frontière proposée est finalement décrit par la loi de commande globale :

$$u(t) = \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) P_i \left(v(t) - y(t) + \tau^i \frac{\partial c(z)}{\partial z} \Big|_{z=l} A_i x(l, t) - \tau^i \frac{\partial c(z)}{\partial z} \Big|_{z=0} A_i x(0, t) - \tau^i \int_0^l c(z) B_i x(z, t) dz \right) \quad (\text{III.32})$$

A l'issue de cette analyse, nous pourrions affirmer avoir pu avancer une procédure de synthèse systématique qui nous a permis de résoudre le problème de commande du SPD non linéaire (II.9) moyennant des outils de la théorie de commande géométrique. Le contrôleur géométrique flou à la frontière est alors entièrement défini par la loi de commande (III.32) dont les paramètres de contrôle τ^i , $i = 1, \dots, q$, peuvent être ajustés en fonction du comportement en boucle souhaité. Ce contrôleur répond à la forme de mesure

distribuée vu que l'observation entière de l'état du système est requise ; chose que l'on peut réaliser à l'aide de capteurs distribués (piézo-céramiques) ou intelligents (capteurs micro-électromécaniques (MEMS)).

III.4 Stabilité du système bouclé

Dans cette section, nous développerons les conditions suffisantes pour la stabilisation exponentielle en boucle fermée du SPD (II.9)-(II.11) avec la loi de commande géométrique floue à la frontière (III.32) en employant la méthode directe de Lyapunov. Nous commençons d'abord par énoncer le théorème que nous avons établi dans ce sens avant de détailler sa preuve pour finir avec quelques remarques essentielles.

III.4.1 Enoncé du théorème proposé

Hypothèse III.4 : Pour les références externes $\vartheta(t)$, on suppose que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \vartheta(t) = 0$.

Théorème III.1 : Considérons le SPD non linéaire (II.9)-(II.11) sous la loi de commande géométrique floue à la frontière (III.32) telle que l'hypothèse III.2 soit satisfaite. Étant données $\tau^i > 0$, $i = 1, \dots, q$, des matrices diagonales de dimension $n \times n$ regroupant les paramètres de contrôle, et $\phi_i(z)$ et $\tilde{\phi}_i(z)$, $i = 1, \dots, q$, des matrices de dimension $n \times n$ définies par : $\phi_i(z) = A_i P_i \tau^i c(z) B_i$ et $\tilde{\phi}_i(z) = \frac{1}{2}(\phi_i(z) + \phi_i^T(z))$, $i = 1, \dots, q$, telles que $\tilde{\phi}_i(z) = \Gamma_i(z) + \Psi_i(z)$, $i = 1, \dots, q$, avec $\Gamma_i(z)$, $i = 1, \dots, q$, des matrices définies positives dont les valeurs propres sont indépendantes de la variable spatiale z , et $\Psi_i(z)$, $i = 1, \dots, q$, des matrices symétriques. Ainsi, le système en boucle fermée résultant est exponentiellement stable si la condition suivante est satisfaite :

$$\sum_{i=1}^q \|B_i\| - \alpha^* - \frac{\beta^*}{4l^2} > 0 \quad (\text{III.33})$$

où $\alpha^* = \min\{\lambda_{\min}(\Gamma_1(z)), \dots, \lambda_{\min}(\Gamma_q(z))\}$ et $\beta^* = \min\{\lambda_{\min}(\tilde{A}_1), \dots, \lambda_{\min}(\tilde{A}_q)\}$ avec $\tilde{A}_i = \frac{1}{2}(A_i + A_i^T)$. $\lambda_{\min}(\Gamma_i(z))$ et $\lambda_{\min}(\tilde{A}_i)$ sont les plus petites valeurs propres des matrices $\Gamma_i(z)$ et \tilde{A}_i associées à la règle floue i , respectivement.

III.4.2 Preuve

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{2} \|x(z, t)\|_{\mathbb{H}}^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l x^T(z, t) x(z, t) dz \end{aligned} \quad (\text{III. 34})$$

La première dérivée temporelle de $V(t)$ le long de la trajectoire du SPD représenté par le modèle EDP flou T-S s'obtient par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \int_0^l x^T(z, t) \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} dz \\ &= \int_0^l x^T(z, t) \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) \left(A_i \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B_i x(z, t) \right) dz \\ &= \int_0^l x^T(z, t) \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) A_i \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} dz \\ &\quad + \int_0^l x^T(z, t) \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) B_i x(z, t) dz \end{aligned} \quad (\text{III. 35})$$

Evaluons le premier terme intégral de l'équation (III.35) et considérons les conditions aux limites (II.15), il en découle :

$$\begin{aligned} \int_0^l x^T(z, t) A_i \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} dz &= \left[x^T(z, t) A_i \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right]_{z=0}^{z=l} - \int_0^l \left(\frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right)^T A_i \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} dz \\ &= \underbrace{x^T(l, t) A_i \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=l}}_{u(t)} - \int_0^l \left(\frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right)^T A_i \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (\text{III. 36})$$

Par conséquent, $\dot{V}(t)$ peut s'écrire :

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) x^T(l, t) A_i u(t) - \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) \int_0^l \left(\frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right)^T A_i \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} dz$$

$$+ \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) \int_0^l x^T(z, t) B_i x(z, t) dz \quad (\text{III. 37})$$

ou de manière équivalente :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = x^T(l, t) \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) A_i u(t) - \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) \int_0^l \left(\frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right)^T A_i \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} dz \\ + \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) \int_0^l x^T(z, t) B_i x(z, t) dz \end{aligned} \quad (\text{III. 38})$$

En substituant la loi de commande géométrique floue (III.32) dans (III.38), $\dot{V}(t)$ peut être mise sous la forme :

$$\dot{V}(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t) \quad (\text{III. 39})$$

où les termes $V_1(t)$, $V_2(t)$, $V_3(t)$ et $V_4(t)$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} V_1(t) = x^T(l, t) \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) A_i P_i \left(\vartheta(t) - y(t) + \tau^i \frac{\partial c(z)}{\partial z} \Big|_{z=l} A_i x(l, t) \right. \\ \left. - \tau^i \frac{\partial c(z)}{\partial z} \Big|_{z=0} A_i x(0, t) \right) \end{aligned} \quad (\text{III. 40})$$

$$V_2(t) = -x^T(l, t) \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) \int_0^l \phi_i(z) x(z, t) dz \quad (\text{III. 41})$$

$$V_3(t) = - \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) \int_0^l \left(\frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right)^T A_i \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} dz \quad (\text{III. 42})$$

et

$$V_4(t) = \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) \int_0^l x^T(z, t) B_i x(z, t) dz \quad (\text{III. 43})$$

où l'on définit les matrices $\phi_i(z)$, $i = 1, \dots, q$, figurant dans l'équation (III.41) par :

$$\phi_i(z) = A_i P_i \tau^i c(z) B_i, \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{III. 44})$$

Estimons à présent les bornes des fonctions $V_2(t)$, $V_3(t)$ et $V_4(t)$.

• **Fonction $V_2(t)$:**

$$\begin{aligned} V_2(t) &= - \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) \int_0^l x^T(l, t) \phi_i(z) x(z, t) dz \\ &= - \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) \int_0^l (x^T(z, t) + x^T(l, t) - x^T(z, t)) \phi_i(z) x(z, t) dz \end{aligned} \quad (\text{III. 45})$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} V_2(t) &= - \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) \int_0^l x^T(z, t) \phi_i(z) x(z, t) dz \\ &\quad + \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) \int_0^l (x^T(z, t) - x^T(l, t)) \phi_i(z) x(z, t) dz \end{aligned} \quad (\text{III. 46})$$

ou de manière équivalente :

$$V_2(t) = - \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) \int_0^l x^T(z, t) \phi_i(z) x(z, t) dz + W_1(t) \quad (\text{III. 47})$$

avec

$$W_1(t) = \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) \int_0^l (x^T(z, t) - x^T(l, t)) \phi_i(z) x(z, t) dz \quad (\text{III. 48})$$

D'autre part, soit $\tilde{\phi}_i(z) = \frac{1}{2}(\phi_i(z) + \phi_i^T(z))$, $i = 1, \dots, q$. Ainsi, nous avons:

$$x^T(z, t) \phi_i(z) x(z, t) = x^T(z, t) \tilde{\phi}_i(z) x(z, t), \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{III. 49})$$

Selon le théorème de Rayleigh-Ritz (voir Théorème A.1, Annexe A), nous pouvons établir :

$$x^T(z, t) \phi_i(z) x(z, t) \geq \lambda_{\min}(\tilde{\phi}_i(z)) x^T(z, t) x(z, t), \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{III. 50})$$

Selon (III.50), il en résulte de l'équation (III.47) :

$$V_2(t) \leq - \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) \int_0^l \lambda_{\min}(\tilde{\phi}_i(z)) x^T(z, t) x(z, t) dz + W_1(t) \quad (\text{III. 51})$$

A présent, en supposant qu'il soit possible de mettre les matrices $\tilde{\phi}_i(z)$, $i = 1, \dots, q$, sous la forme :

$$\tilde{\phi}_i(z) = \Gamma_i(z) + \Psi_i(z), \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{III. 52})$$

où $\Gamma_i(z)$, $i = 1, \dots, q$ sont des matrices définies positives dont les valeurs propres ne sont pas fonctions de la variable spatiale z , et $\Psi_i(z)$ des matrices symétriques. Ainsi, nous avons (Atkinson et Han, 2009) :

$$\lambda_{\min}(\Gamma_i(z) + \Psi_i(z)) \geq \lambda_{\min}(\Gamma_i(z)) + \lambda_{\min}(\Psi_i(z)), \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{III. 53})$$

Par conséquent, la borne de $V_2(t)$ sera donnée par :

$$\begin{aligned} V_2(t) &\leq - \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) \int_0^l (\lambda_{\min}(\Gamma_i(z)) + \lambda_{\min}(\Psi_i(z))) x^T(z, t) x(z, t) dz + W_1(t) \\ &\leq - \int_0^l \left(\sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) \lambda_{\min}(\Gamma_i(z)) \right) x^T(z, t) x(z, t) dz + W_2(t) \end{aligned} \quad (\text{III. 54})$$

Comme $\sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) = 1$, il en découle :

$$V_2(t) \leq -\alpha^* \int_0^l x^T(z, t) x(z, t) dz + W_2(t) \quad (\text{III. 55})$$

où

$$\alpha^* = \min \{ \lambda_{\min}(\Gamma_1(z)), \dots, \lambda_{\min}(\Gamma_q(z)) \} \quad (\text{III. 56})$$

et

$$W_2(t) = - \int_0^l \left(\sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) \lambda_{\min}(\Psi_i(z)) \right) x^T(z, t) x(z, t) dz + W_1(t) \quad (\text{III. 57})$$

• **Fonction $V_3(t)$:**

Définissons d'abord les matrices $\tilde{A}_i = \frac{1}{2}(A_i + A_i^T)$, $i = 1, \dots, q$. Ainsi, nous avons :

$$\left(\frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right)^T A_i \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} = \left(\frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right)^T \tilde{A}_i \frac{\partial x(z, t)}{\partial z}, \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{III. 58})$$

Selon le théorème de Rayleigh-Ritz (voir Théorème A.1, Annexe A), nous pouvons établir le suivant :

$$\left(\frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right)^T \tilde{A}_i \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \geq \lambda_{\min}(\tilde{A}_i) \left(\frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right)^T \frac{\partial x(z, t)}{\partial z}, \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{III. 59})$$

Selon (III.59), il en résulte de l'équation (III.42) :

$$\begin{aligned} V_3(t) &\leq - \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) \int_0^l \lambda_{\min}(\tilde{A}_i) \left(\frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right)^T \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} dz \\ &\leq - \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) \lambda_{\min}(\tilde{A}_i) \int_0^l \left(\frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right)^T \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (\text{III. 60})$$

Comme $\sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) = 1$, il en découle :

$$V_3(t) \leq -\beta^* \int_0^l \left(\frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right)^T \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} dz \quad (\text{III. 61})$$

où

$$\beta^* = \min\{\lambda_{\min}(\tilde{A}_1), \dots, \lambda_{\min}(\tilde{A}_q)\} \quad (\text{III. 62})$$

De manière équivalente, l'équation (III.61) peut être réécrite sous la forme :

$$V_3(t) \leq -\beta^* \int_0^l \left(\frac{\partial x_k(z, t)}{\partial z} \right)^2 dz \quad (\text{III. 63})$$

En intégrant par parties le terme $\int_0^l x_k^2(z, t) dz$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^l x_k^2(z, t) dz &= l x_k^2(l, t) - 2 \int_0^l z x_k(z, t) \frac{\partial x_k(z, t)}{\partial z} dz \\ &\leq l x_k^2(l, t) + 2 \left| \int_0^l z x_k(z, t) \frac{\partial x_k(z, t)}{\partial z} dz \right| \\ &\leq l x_k^2(l, t) + 2 \left| \int_0^l x_k(z, t) \left(z \frac{\partial x_k(z, t)}{\partial z} \right) dz \right| \end{aligned} \quad (\text{III. 64})$$

En utilisant l'inégalité de Hölder (voir Lemme A.1, Annexe A), il en résulte :

$$\int_0^l x_k^2(z, t) dz \leq l x_k^2(l, t) + 2 \left(\int_0^l x_k^2(z, t) dz \right)^{1/2} \left(\int_0^l z^2 \left(\frac{\partial x_k(z, t)}{\partial z} \right)^2 dz \right)^{1/2} \quad (\text{III. 65})$$

Selon l'inégalité de Young (voir Lemme A.2, Annexe A), nous pourrions établir que :

$$\begin{aligned} \int_0^l x_k^2(z, t) dz &\leq l x_k^2(l, t) + \frac{1}{2} \int_0^l x_k^2(z, t) dz + 2 \int_0^l z^2 \left(\frac{\partial x_k(z, t)}{\partial z} \right)^2 dz \\ &\leq 2 l x_k^2(l, t) + 4 \int_0^l z^2 \left(\frac{\partial x_k(z, t)}{\partial z} \right)^2 dz \end{aligned} \quad (\text{III. 66})$$

Aussi, comme $0 \leq z \leq l$, nous obtenons :

$$\int_0^l x_k^2(z, t) dz \leq 2 l x_k^2(l, t) + 4 \int_0^l l^2 \left(\frac{\partial x_k(z, t)}{\partial z} \right)^2 dz \quad (\text{III. 67})$$

Par conséquent :

$$\int_0^l \left(\frac{\partial x_k(z, t)}{\partial z} \right)^2 dz \geq \frac{1}{4 l^2} \int_0^l x_k^2(z, t) dz - \frac{1}{2 l} x_k^2(l, t) \quad (\text{III. 68})$$

Cela conduit à exprimer (III.68) sous la forme :

$$\sum_{k=1}^n \int_0^l \left(\frac{\partial x_k(z, t)}{\partial z} \right)^2 dz \geq \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4 l^2} \int_0^l x_k^2(z, t) dz - \frac{1}{2 l} x_k^2(l, t) \right) \quad (\text{III. 69})$$

ou de manière équivalente :

$$\sum_{k=1}^n \int_0^l \left(\frac{\partial x_k(z, t)}{\partial z} \right)^2 dz \geq \frac{1}{4 l^2} \int_0^l x^T(z, t) x(z, t) dz - \frac{1}{2 l} x^T(l, t) x(l, t) \quad (\text{III. 70})$$

A l'issue de cette analyse, la borne de la fonction $V_3(t)$ peut être estimée à partir des équations (III.63) et (III.70) par :

$$V_3(t) \leq -\frac{\beta^*}{4 l^2} \int_0^l x^T(z, t) x(z, t) dz + \frac{\beta^*}{2 l} x^T(l, t) x(l, t) \quad (\text{III. 71})$$

- **Fonction $V_4(t)$:**

Nous proposons d'abord de manipuler les termes $x^T(z, t) B_i x(z, t)$, $i = 1, \dots, q$, de l'équation (III.43). Pour ce faire, soit l'espace Euclidien doté du produit interne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme $\|\cdot\|$ et en se basant sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir Théorème A.2, Annexe A), nous avons :

$$x^T(z, t)B_i x(z, t) \leq |\langle x(z, t), B_i x(z, t) \rangle| \leq \|x(z, t)\| \|B_i x(z, t)\|, \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{III.72})$$

$$x^T(z, t)B_i x(z, t) \leq \|B_i\| \|x(z, t)\|^2, \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{III.73})$$

$$x^T(z, t)B_i x(z, t) \leq \|B_i\| x^T(z, t)x(z, t), \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{III.74})$$

Par conséquent, la borne de la fonction $V_4(t)$ s'obtient comme suit :

$$\begin{aligned} V_4(t) &= \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) \int_0^l x^T(z, t)B_i x(z, t) dz \\ &\leq \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) \|B_i\| \int_0^l x^T(z, t) x(z, t) dz \end{aligned} \quad (\text{III.75})$$

De plus, comme $0 \leq h_i(\varphi(l, t)) \leq 1, i = 1, \dots, q$, il en découle :

$$V_4(t) \leq \sum_{i=1}^q \|B_i\| \int_0^l x^T(z, t) x(z, t) dz \quad (\text{III.76})$$

A l'issue de cette analyse, les bornes de toutes les fonctions $V_2(t)$, $V_3(t)$ et $V_4(t)$ sont établies selon les résultats (III.55), (III.71) et (III.76). Cela nous permet d'exprimer l'inégalité (III.39) sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \left(\sum_{i=1}^q \|B_i\| - \alpha^* - \frac{\beta^*}{4l^2} \right) \int_0^l x^T(z, t) x(z, t) dz + V_1(t) + W_2(t) \\ &\quad + \frac{\beta^*}{2l} x^T(l, t) x(l, t) \end{aligned} \quad (\text{III.77})$$

De manière équivalente, l'équation (III.77) peut s'exprimer également par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq 2 \left(\sum_{i=1}^q \|B_i\| - \alpha^* - \frac{\beta^*}{4l^2} \right) \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^l x^T(z, t) x(z, t) dz}_{V(t)} + V_1(t) + W_2(t) \\ &\quad + \frac{\beta^*}{2l} x^T(l, t) x(l, t) \end{aligned} \quad (\text{III.78})$$

que l'on peut mettre sous la forme standard :

$$\dot{V}(t) \leq -\omega V(t) + F(t) \quad (\text{III.79})$$

où

$$\omega = -2 \left(\sum_{i=1}^q \|B_i\| - \alpha^* - \frac{\beta^*}{4l^2} \right) \quad (\text{III.80})$$

et

$$\begin{aligned} F(t) = & x^T(l, t) \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) A_i P_i \left(e(t) + \tau^i \dot{c}(l) A_i x(l, t) - \tau^i \dot{c}(0) A_i x(0, t) \right) \\ & + \int_0^l \left(\sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) \lambda_{\min}(\Psi_i(z)) \right) x^T(z, t) x(z, t) dz \\ & + \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) \int_0^l (x^T(z, t) - x^T(l, t)) \phi_i(z) x(z, t) dz \\ & + \frac{\beta^*}{2l} x^T(l, t) x(l, t) \end{aligned} \quad (\text{III.81})$$

où $e(t) = \vartheta(t) - y(t)$ désigne l'erreur de commande.

Selon l'hypothèse III.4, comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \vartheta(t) = 0$ et d'après (III.23), nous avons alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$. Ainsi, il est évident que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0$. D'autre part, en considérant l'hypothèse III.2, il est facile d'avoir $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(z, t) = 0$ à partir de (III.23). Il en résulte alors de l'équation (III.81) : $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 0$. Par conséquent, l'estimée exponentielle de $F(t)$ peut être donnée par :

$$|F(t)| \leq M |F(0)| e^{-\omega_f t} \quad (\text{III.82})$$

avec $M \geq 1$ et $\omega_f > 0$.

De plus, selon la théorie des semi-groupes (Pazy, 1983), nous avons :

$$\begin{aligned} V(t) & \leq V(0) e^{-\omega t} + \int_0^t e^{-\omega(t-s)} |F(s)| ds \\ & \leq V(0) e^{-\omega t} + M |F(0)| e^{-\omega t} \int_0^t e^{(\omega - \omega_f)s} ds \end{aligned} \quad (\text{III.83})$$

ce qui donne :

$$V(t) \leq (V(0) + M |F(0)| t) e^{-\omega t}, \quad \text{si } \omega = \omega_f \quad (\text{III.84})$$

$$V(t) \leq (V(0) + M|F(0)|) e^{-\max(\omega, \omega_f)t}, \quad \text{si } \omega \neq \omega_f \quad (\text{III. 85})$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\|x(z, t)\|_{\mathbb{H}} \leq \sqrt{2 (V(0) + M|F(0)| t)} e^{-\frac{\omega}{2}t}, \quad \text{si } \omega = \omega_f \quad (\text{III. 86})$$

$$\|x(z, t)\|_{\mathbb{H}} \leq \sqrt{2 (V(0) + M|F(0)|)} e^{-\frac{\max(\omega, \omega_f)}{2}t}, \quad \text{si } \omega \neq \omega_f \quad (\text{III. 87})$$

Ceci implique que le SPD non linéaire (II.9)-(II.11) bouclé par le contrôleur géométrique flou à la frontière (III.32) est exponentiellement stable pour tout $\omega > 0$.

III.4.3 Remarques fondamentales

- En vue de procéder correctement avec la synthèse géométrique floue proposée, le modèle EDP flou T-S (II.14)-(II.15) représentant le SPD non linéaire (II.9)-(II.10) devrait d'abord être vérifié pour son adéquation par rapport à la condition de non-singularité des matrices caractéristiques $c(l) A_i, i = 1, \dots, q$.
- Les développements mathématiques présentés le long de cette section sont applicables uniquement aux SPD carrés (ayant donc la même dimension d'entrée et de sortie), ce qui permet de satisfaire la condition de non-singularité des matrices caractéristiques $c(l) A_i, i = 1, \dots, q$. Sinon, il est opportun d'établir l'importance des grandeurs d'entrée et de sortie du SPD dans le cas pratique pour conduire une réalisation carrée nécessaire à la mise en œuvre propre de la méthode de synthèse proposée.

III.5 Exemples d'application

Le potentiel de la méthode de commande géométrique floue à la frontière proposée est démontré dans cette section à travers trois exemples d'application distincts. Nous reprenons ici les mêmes SPD non linéaires présentés dans le chapitre II, section II.7, où sont décrits les différents résultats de modélisation floue de ces systèmes. Les modèles EDP flous T-S développés sont utilisés dans ce chapitre pour concevoir des contrôleurs géométriques flous à la frontière selon la procédure de synthèse proposée. Il s'agit de problèmes de commande de trois SPD benchmark de différentes dimensions. Le premier exemple représente un SPD non linéaire de réaction-diffusion (Wu et al., 2014) ; le deuxième SPD est régi par l'équation de Burger-Fisher qui décrit une dynamique de réaction-diffusion-convection (Smaoui, 2005 ; Wu et al., 2015), et le troisième traite de la commande d'un SPD bidimensionnel représenté par l'équation FitzHugh-Nagumo (FHN) (Wu et al., 2014). Pour démontrer la supériorité de la méthode proposée, nous comparons

les résultats de commande obtenus avec d'autres techniques récentes proposées dans la littérature.

III.5.1 Système de réaction-diffusion

Nous considérons dans cet exemple un SPD parabolique dont la dynamique est régie par une équation de réaction-diffusion semi-linéaire de la forme (II.44)-(II.46). Ce SPD est caractérisé par un profil d'équilibre instable à $x(z, t) = 0$, comme montré en Figure II.1. Le modèle EDP flou T-S développé pour ce système est composé de deux règles IF-THEN et est décrit globalement par l'équation (II.53) assujettie aux conditions (II.45)-(II.46). Le problème de commande consiste en la détermination d'un contrôleur géométrique flou à la frontière permettant de stabiliser le système autour du point d'équilibre.

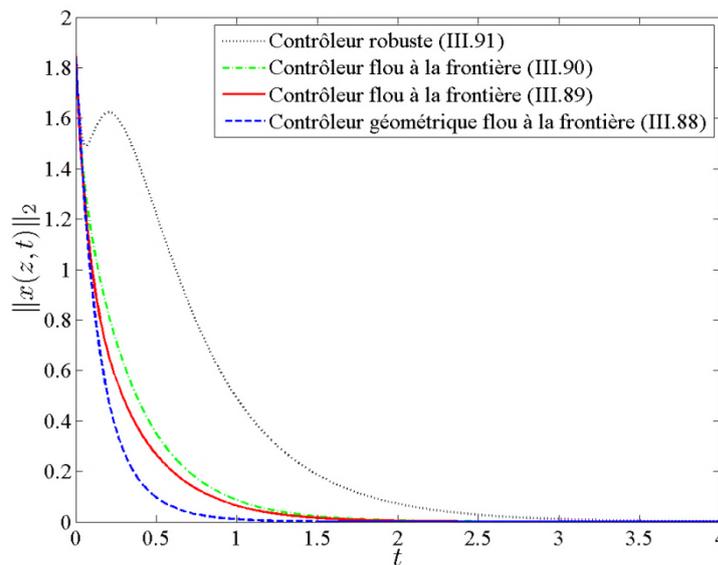


Figure III.1 : Evolution de la norme $\|x(z, t)\|_{L^2(\Omega)}$ en boucle fermée du système de réaction-diffusion en comparaison avec les stratégies de commande (III.89), (III.90) et (III.91).

Pour stabiliser ce système, nous choisissons donc la référence externe $\vartheta(t) = 0$ de sorte à parvenir à ramener le SPD bouclé vers l'état d'équilibre $x(z, t) = 0$. Les paramètres de conception précisés dans les équations (III.23) et (III.32) sont ajustés aux valeurs suivantes : $c(z) = z$ et $\tau^1 = \tau^2 = 0.5$. Sur la base de cet ajustement, le contrôleur géométrique flou à la frontière obtenu est exprimé par la loi de commande :

$$u(t) = \sum_{i=1}^{q=2} h_i(x(l,t)) \left(-2 y(t) + x(l,t) - x(0,t) - B_i \int_0^l z x(z,t) dz \right) \quad (\text{III. 88})$$

où $B_1 = 0.5$, $B_2 = 0.005/\pi$ et $l = 1$. Les fonctions d'appartenance $h_i(x(l,t))$, $i = 1,2$, sont définies comme dans (II.51)-(II.52).

La trajectoire $\|x(z,t)\|_{L^2(\Omega)}$ du système bouclé résultant est tracée dans la Figure III.1. Ce profile d'évolution de l'état du système commandé est comparé sur la même figure avec trois autres types de contrôleurs :

- Un contrôleur flou à la frontière se présentant sous une forme de mesure distribuée exprimé par la loi de commande (Wu et al., 2014) :

$$u(t) = - \int_0^1 \sum_{i=1}^{q=2} h_i(x(z,t)) K_i x(z,t) dz \quad (\text{III. 89})$$

avec $K_1 = 1.9165$ et $K_2 = 1.5843$,

- Un contrôleur flou à la frontière se présentant sous une forme de mesure colocalisée donné par (Wu et al., 2014) :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^{q=2} h_i(x(1,t)) K_i x(1,t) \quad (\text{III. 90})$$

avec $K_1 = 6.8715$ et $K_2 = 2.2021$,

- Un contrôleur robuste proposé dans (Hagen, 2006) sous forme d'un retour d'état stabilisant la partie instable de dimension finie du SPD et qui est donné par la loi de commande :

$$\dot{u}(t) = -k u(t) - \rho(t) \quad (\text{III. 91})$$

$$\rho(t) = -[8.9000 \quad 4.9751] \int_0^1 \eta(z,t) dz \quad (\text{III. 92})$$

avec $k = 0.6$ et

$$\eta(z,t) = [x(z,t) - \gamma(z) u(t) \quad \gamma(z) u(t)]^T \quad (\text{III. 93})$$

$$\gamma(z) = \cos \frac{\sqrt{k} z}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k} z) \quad (\text{III. 94})$$

Les commandes à la frontière du domaine spatial issues de l'ensemble des contrôleurs comparés (III.88), (III.89), (III.90) et (III.91) sont illustrées dans la Figure III.2. La comparaison des profils d'évolution des variables d'état et de commande obtenus montre clairement la supériorité du contrôleur géométrique flou proposé qui arrive à stabiliser adéquatement le SPD de réaction-diffusion (II.44)-(II.46) avec un effort de contrôle raisonnable, ce qui permet à la sortie commandée $y(t)$ d'évoluer doucement vers la consigne désirée comme le montre la Figure III.3. Ainsi, l'objectif de commande est nettement atteint comme il peut être constaté à partir du profil spatio-temporel du système bouclé de la Figure III.4 qui montre une parfaite stabilisation du système de réaction-diffusion autour de l'état d'équilibre.

Sur le plan de l'implémentation pratique, il est important de souligner que le contrôleur géométrique flou proposé est bien placé pour une mise œuvre aisée et non couteuse car il aurait nécessité un placement d'actionneurs à la frontière du domaine spatio-temporel seulement, au même titre que les contrôleurs flous (III.89) et (III.90). Néanmoins, le contrôleur proposé est plus facile à ajuster au vu de la simplicité de sa structure algorithmique qui est d'ailleurs paramétrée par les seules constantes de temps τ^1 et τ^2 . Alors que l'ajustement des contrôleurs (III.89), (III.90) et (III.91) est plus compliqué car il nécessite des techniques numériques relativement difficiles.

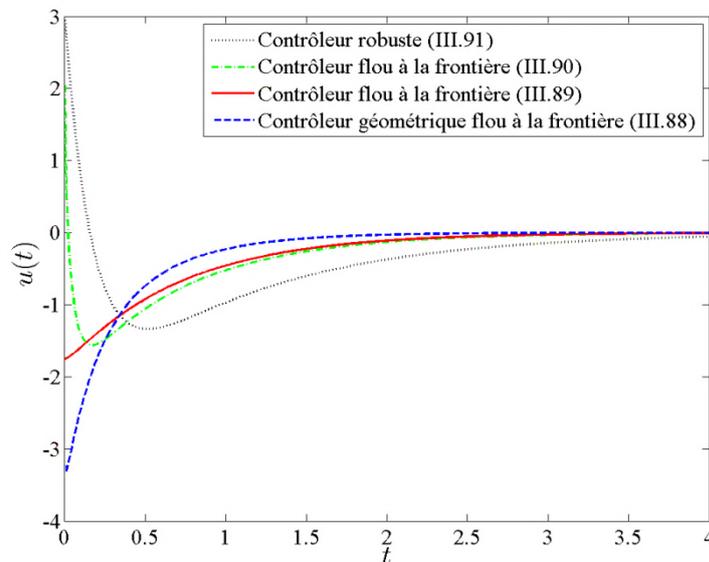


Figure III.2 : Commande géométrique floue à la frontière $u(t)$ comparée aux commandes issues des contrôleurs (III.89), (III.90) et (III.91).

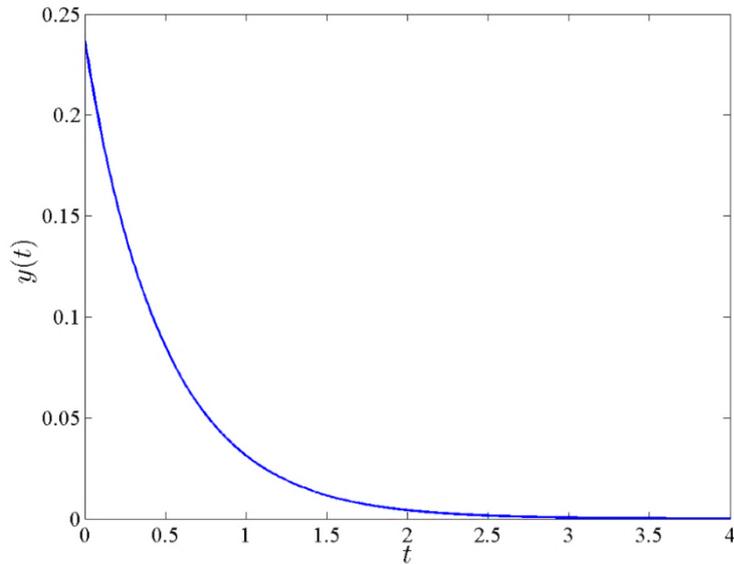


Figure III.3 : La sortie commandée $y(t)$.

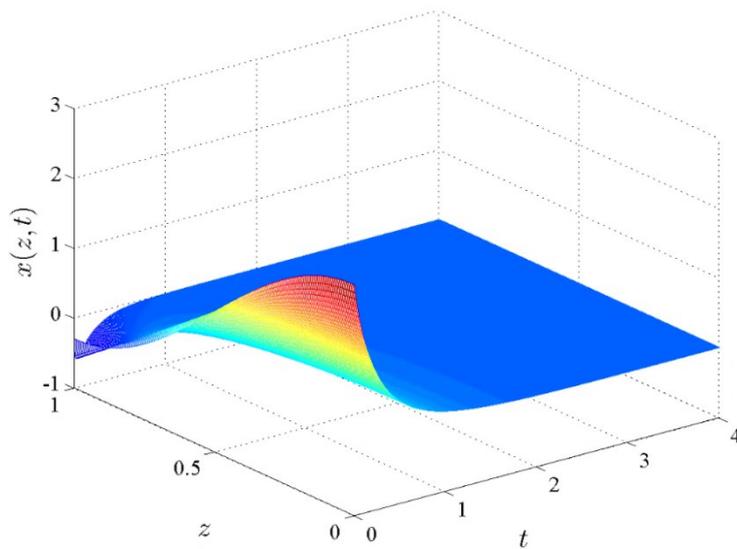


Figure III.4 : Profil spatio-temporel de l'état $x(z, t)$ du système de réaction-diffusion bouclé.

III.5.2 Système de réaction-diffusion-convection

Le système de réaction-diffusion-convection est représenté dans le chapitre II, section II.7, par l'équation d'état de Burger-Fisher (II.54) avec les conditions aux limites (II.55) et la condition initiale (II.56). Le point d'équilibre $x(z, t) = 0$ de ce SPD non linéaire est instable, comme il peut être déduit à partir du profil spatio-temporel de la Figure II.3(a). L'objectif de la commande est donc de stabiliser le système autour de l'équilibre à l'aide

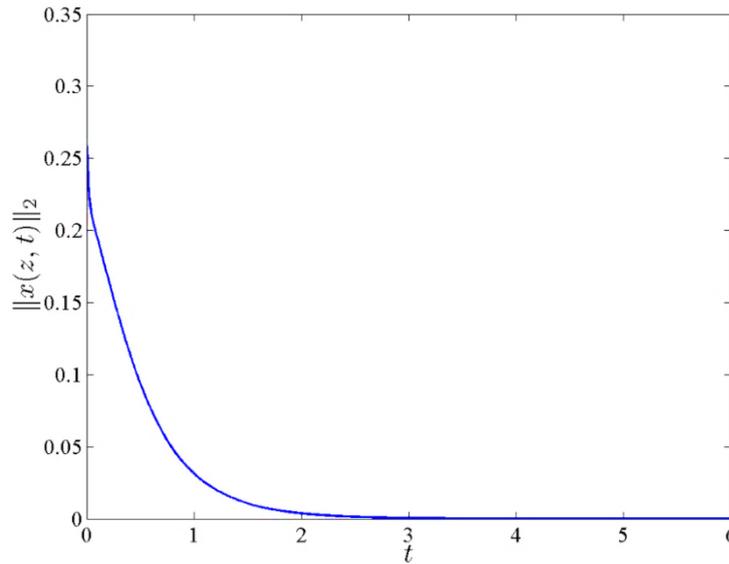


Figure III.5 : Evolution de la norme $\|x(z, t)\|_{L^2(\Omega)}$ en boucle fermée du système de réaction-diffusion-convection.

d'un contrôleur flou à la frontière basé sur la synthèse géométrique proposée. Pour ce faire, nous utilisons le modèle EDP flou T-S développé pour ce système qui est décrit globalement par l'équation d'état (II.67). De manière équivalente, ce modèle flou est représenté par quatre règles IF-THEN avec les conditions aux limites et initiale (II.55)-(II.56). Selon la procédure de synthèse proposée, le contrôleur géométrique flou à appliquer au SPD (II.54)-(II.56) est défini par la loi de commande (III.95) qu'il faudra paramétrer judicieusement en fonction des paramètres du système et des spécifications de contrôle requises. Pour cela, nous adoptons les ajustements suivants : $\vartheta(t) = 0$, $c(z) = z$ et $\tau^i = 1$, $i = 1, 2, 3, 4$. La loi de commande géométrique floue ainsi obtenue est exprimée par :

$$u(t) = \sum_{i=1}^{q=4} h_i(\varphi(l, t)) \left(-y(t) + x(l, t) - x(0, t) - B_i \int_0^l z x(z, t) dz \right) \quad (\text{III. 95})$$

où $B_1 = -1$, $B_2 = 1$, $B_3 = -0.8$, $B_4 = 1.2$ et $l = 1$. Les fonctions d'appartenance $h_i(\varphi(l, t))$, $i = 1, 2, 3, 4$ sont définies comme dans (II.63)-(II.66).

La trajectoire d'état $\|x(z, t)\|_{L^2(\Omega)}$ du système bouclé résultant est tracée dans la Figure III.5. Les variables de commande $u(t)$ et de sortie $y(t)$ sont illustrées dans les Figures

III.6 et III.7, respectivement. L'objectif de stabiliser le SPD représenté par l'équation de Burger-Fisher (II.54)-(II.56) est donc clairement réalisé suivant un profil régulier et un effort de commande raisonnable comme il peut être également déduit à partir de la Figure III.8 qui montre l'évolution spatio-temporelle de l'état du système bouclé.

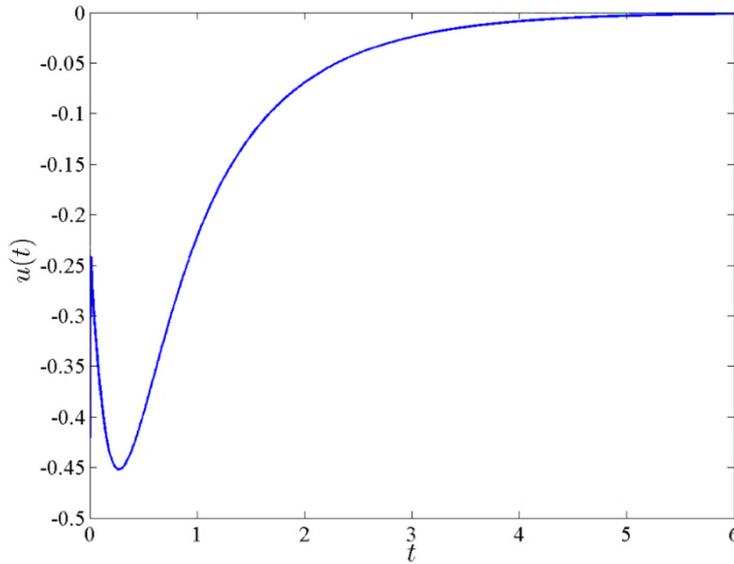


Figure III.6 : Commande géométrique floue à la frontière $u(t)$.

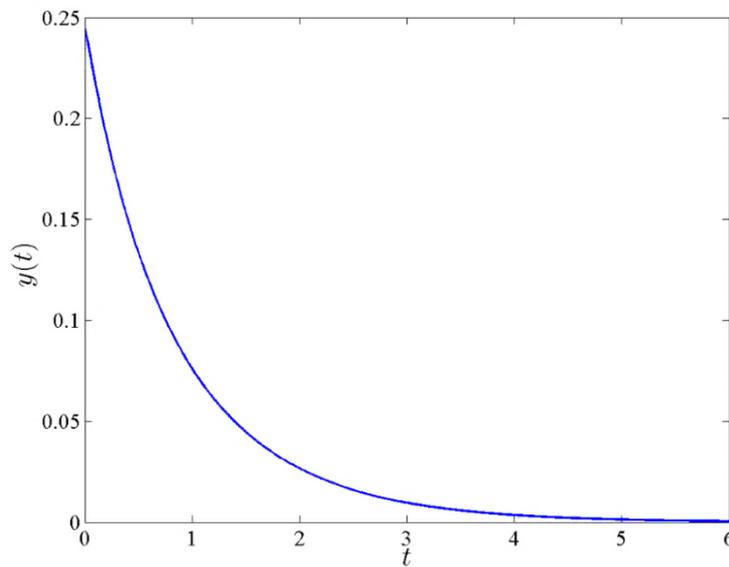


Figure III.7 : La sortie commandée $y(t)$.

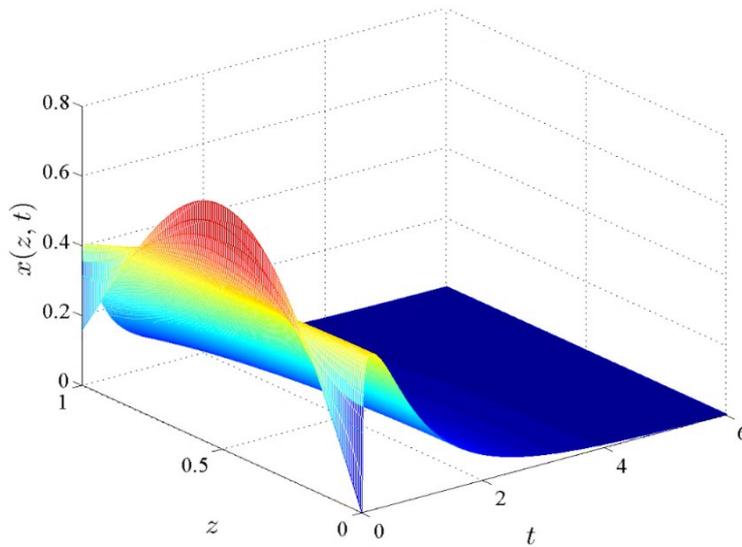


Figure III.8 : Profil spatio-temporel de l'état $x(z, t)$ du système de réaction-diffusion-convection bouclé.

III.5.3 Système de réaction-diffusion bidimensionnel

Le système de réaction-diffusion considéré dans ce problème est bidimensionnel (deux états, deux commandes) de dynamique spatio-temporelle régie par l'équation fondamentale de FitzHugh-Nagumo (FHN). Ce SPD est décrit dans l'espace d'état par le modèle (II.69)-(II.70) assujéti aux conditions aux limites (II.71)-(II.72) et la condition initiale (II.73). L'état d'équilibre du système est caractérisé par $x_1(z, t) = 0$ et $x_2(z, t) = 0$ qui est visiblement instable comme il peut être constaté à partir des Figures II.4(a) et II.5(a). Il y a lieu donc d'assurer pour ce SPD un contrôle stabilisant via une synthèse géométrique floue à la frontière qui permettra de conduire la dynamique du système bouclé régie par l'équation FHN vers l'état d'équilibre à partir de la condition initiale (II.73). Pour synthétiser ce contrôleur, nous avons utilisé le modèle EDP flou T-S développé dans la section II.7.3 et qui est décrit globalement par l'équation d'état (II.77). Cette équation désigne en fait le résultat d'inférence d'un modèle composé de deux règles de type IF-THEN assujéti aux conditions (II.71)-(II.73).

Pour la synthèse du contrôleur, nous définissons dans une première étape les deux variables de sortie à commander $y_1(t)$ et $y_2(t)$ par :

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \int_0^l \begin{bmatrix} c_1(z) & 0 \\ 0 & c_2(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(z, t) \\ x_2(z, t) \end{bmatrix} dz \quad (\text{III. 96})$$

avec $c_1(z) = c_2(z) = z$ et $l = 1$.

Les références externes sont fixées aux valeurs $\vartheta_1(t) = \vartheta_2(t) = 0$ et les paramètres de contrôle τ^1 et τ^2 sont ajustés à la valeur commune 1 pour toutes les règles floues, soit $\tau_1^1 = \tau_2^1 = 1$, et $\tau_1^2 = \tau_2^2 = 1$. Il en résulte alors deux lois de commande géométriques floues à la frontière $u_1(t)$ et $u_2(t)$ qui sont exprimées par :

$$u_1(t) = \sum_{i=1}^{q=2} h_i(\varphi(l, t)) \left(-y_1(t) + x_1(l, t) - x_1(0, t) - b_{i1} \int_0^l z x_1(z, t) dz + \int_0^l z x_2(z, t) dz \right) \quad (\text{III. 97})$$

$$u_2(t) = \sum_{i=1}^{q=2} h_i(\varphi(l, t)) \left(-y_2(t) + x_2(l, t) - x_2(0, t) - b_{i2} \int_0^l z x_1(z, t) dz + 0.1 \int_0^l z x_2(z, t) dz \right) \quad (\text{III. 98})$$

où $b_{11} = -0.44$, $b_{21} = 1$, $b_{12} = b_{22} = 0.45$ et $l = 1$. Les fonctions d'appartenance $h_i(\varphi(l, t))$, $i = 1, 2$, sont définies comme dans (II.75)-(II.76).

Les trajectoires normalisées $\|x_1(z, t)\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|x_2(z, t)\|_{L^2(\Omega)}$ du système bouclé sont représentées dans la Figure III.9 où elles sont comparées aux trajectoires du même système résultant des deux types de contrôle flou suivants développés dans (Wu et al., 2014) :

– Un contrôleur flou se présentant sous forme de mesure distribuée exprimée par :

$$u(t) = - \int_0^1 \sum_{i=1}^{q=2} h_i(\varphi(z, t)) K_i x(z, t) dz \quad (\text{III. 99})$$

où les gains de contrôle K_1 et K_2 sont ajustés aux valeurs :

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1.4246 & -0.6403 \\ -1.8375 & 1.3288 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 0.3570 & -0.3057 \\ -2.9929 & 1.8022 \end{bmatrix}$$

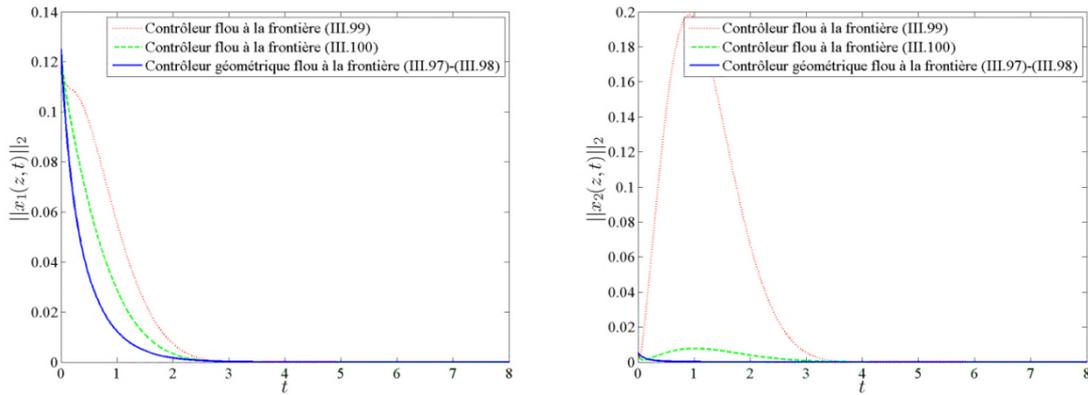


Figure III.9 : Evolution des normes $\|x_1(z, t)\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|x_2(z, t)\|_{L^2(\Omega)}$ en boucle fermée du système de réaction-diffusion bidimensionnel en comparaison avec les stratégies de commande (III.99) et (III.100).

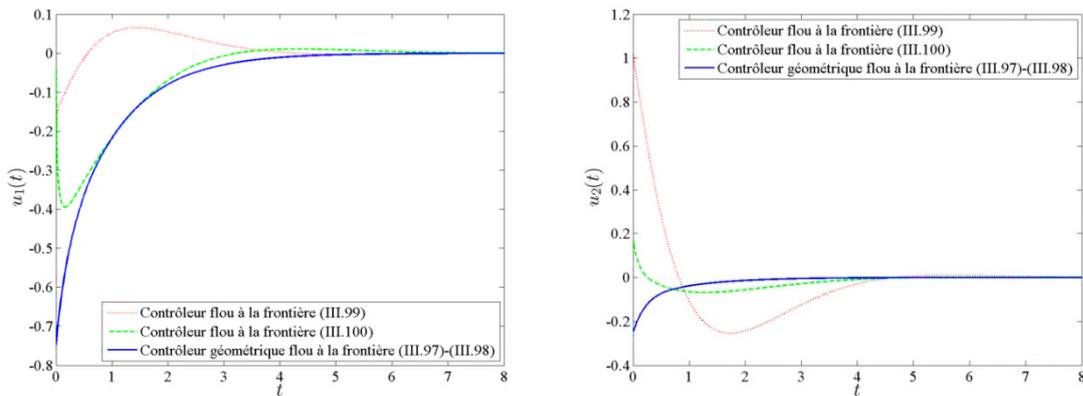


Figure III.10 : Commandes géométriques floues $u_1(t)$ et $u_2(t)$ comparées aux commandes issues des contrôleurs flous à la frontière (III.99) et (III.100).

- Un contrôleur flou se présentant sous forme de mesure colocalisée à la frontière défini par la loi de commande :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^{q=2} h_i(\varphi(1, t)) K_i x(1, t) \quad (\text{III. 100})$$

avec

$$K_1 = \begin{bmatrix} 4.1826 & -0.4819 \\ -0.5334 & 1.7003 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 2.8375 & -0.3623 \\ -0.5360 & 1.7344 \end{bmatrix}$$

À partir de la Figure III.9, il est facile de constater que les trajectoires d'état du système bouclé par la commande géométrique floue proposée évoluent considérablement bien vers l'état d'équilibre tout en assurant les meilleures transitions en comparaison avec

les contrôleurs (III.99) et (III.100). Ces performances peuvent être également observées sur l'évolution des lois de commandes $u_1(t)$ et $u_2(t)$ comparées sur la Figure III.10. Cette qualité de contrôle est traduite par une transition comme souhaité des variables de sortie $y_1(t)$ et $y_2(t)$ qui convergent toutes les deux vers l'état d'équilibre consigné par les références externes $\vartheta_1(t) = 0$ et $\vartheta_2(t) = 0$, comme montré sur la Figure III.11. Les profils d'évolution spatio-temporels de l'état du SPD bouclé dressés sur la Figure III.12 démontrent également l'efficacité de l'action stabilisatrice réalisée par le contrôle géométrique flou proposé.

Il convient de souligner la simplicité de la procédure de synthèse proposée qui se réduit à un simple paramétrage opéré uniquement sur les paramètres de contrôle τ^1 et τ^2 en fonction de la dynamique en boucle fermée souhaitée. En revanche, les contrôleurs flous (III.99) et (III.100) auxquels notre méthode est comparée sont ajustés par rapport à des matrices de gains K_1 et K_2 nécessitant un effort de calcul plus compliqué impliquant la résolution d'inégalités matricielles linéaires complexes de type LMI. D'un point de vue pratique, les contrôleurs flous comparés (III.97)-(III.98), (III.99) et (III.100) ne nécessitent que peu d'actionneurs à la frontière. Cependant, comme le contrôleur proposé (III.97)-(III.98) et le contrôleur flou (III.99) se présentent sous une forme de mesure distribuée, ils requièrent toute l'information sur l'état du SPD (II.69)-(II.73) pour une éventuelle implémentation, à la différence du contrôleur flou (III.100) qui peut être implémenté avec un nombre de capteurs relativement limité car il se présente sous forme de mesure colocalisée.

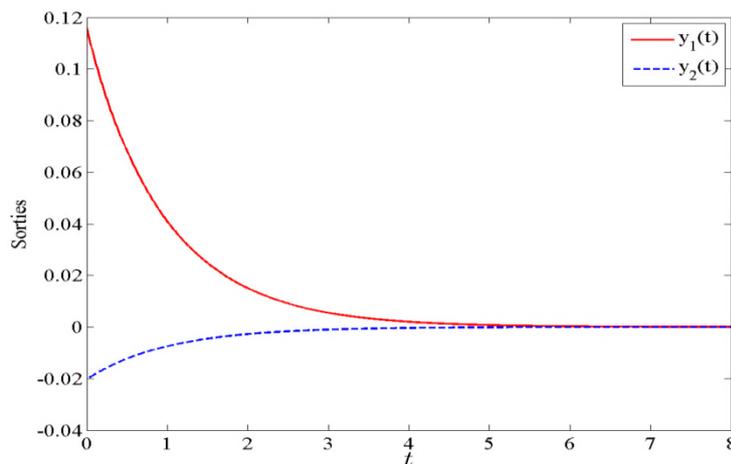


Figure III.11 : Les sorties commandées $y_1(t)$ et $y_2(t)$.

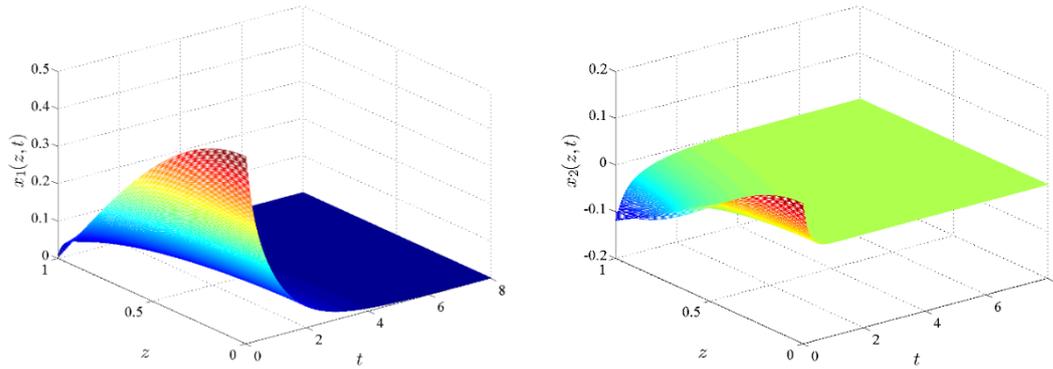


Figure III.12 : Profils spatio-temporels des états $x_1(z, t)$ et $x_2(z, t)$ du système de réaction-diffusion bidimensionnel bouclé.

III.6 Conclusion

Une toute nouvelle stratégie de commande géométrique à la frontière à base de modèles flous aux dérivées partielles est développée dans ce chapitre. La méthode proposée constitue la principale contribution de ce travail de thèse. Pour mieux l'appréhender, nous y avons présenté les principales étapes de synthèse, à commencer par formuler le problème de commande, décrire les contraintes et les éléments de synthèse avant de détailler les développements mathématiques de conception de la commande. L'approche proposée est totalement originale, dédiée à une classe de SPD non linéaires et menée suivant une approche locale basée sur une représentation par modèle flou aux dérivées partielles. L'extension au cas multidimensionnel (plusieurs entrées, plusieurs sorties) est sans doute le grand mérite de l'approche de commande proposée qui pourrait s'appliquer sans perte de généralités à tout SPD satisfaisant les conditions suffisantes de stabilité énoncées dans le Théorème III.1. Ce Théorème – qui nous est d'ailleurs propre – résume les principaux résultats d'analyse de stabilité du système de commande proposé. Ceci dit, notre démarche de synthèse est donc appuyée par une preuve mathématique démontrant la stabilité du système bouclé. La simplicité du contrôleur proposé et de sa technique d'ajustement se rajoute au potentiel de l'approche de commande développée. C'est ce que révèlent du moins les résultats comparatifs de simulation illustrés à la fin de ce chapitre sur des exemples d'application typiques. En effet, le contrôle géométrique proposé parvient à réaliser des performances supérieures sur l'ensemble des exemples benchmarks auxquels il a été comparé, démontrant toutefois une aptitude à la stabilisation de SPD régis par des dynamiques spatio-temporelles complexes.

Chapitre IV

Commande géométrique floue à la frontière à base de modèle équivalent à commande distribuée

IV.1 Introduction

Les premiers travaux sur la théorie de semi-groupes d'opérateurs linéaires dans l'espace de Banach remontent à 1948 à l'issue de la publication par Hille Yosida (Pazy, 1983 ; Engel et Nagel, 2006) du théorème précisant les conditions nécessaires pour qu'un opérateur génère un semi-groupe. Plusieurs travaux ont contribué par la suite au développement de cette théorie dont les domaines d'application ne cessent d'accroître à ce jour. Depuis, la théorie des semi-groupes est devenue une des branches importantes de l'analyse fonctionnelle, qui ne s'est d'ailleurs pas limitée à l'étude des équations différentielles déterministes ou stochastiques mais aussi à l'analyse et la synthèse des systèmes à paramètres distribués décrits par des équations intégré-différentielles pour constituer un outil incontournable en commande de SPD. En effet, il est important de souligner que grâce à la notion de semi-groupe, différents résultats sur la commande des systèmes linéaires de dimension finie ont pu être étendus au cas de dimension infinie, c'est-à-dire aux systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles (Curtain et Zwart, 1995 ; El Jai, 2010).

Dans le cadre de la théorie des semi-groupes, un SPD linéaire peut être décrit par une représentation d'état abstraite (Curtain et Zwart, 1995 ; El Jai, 2010), ce qui permet de généraliser la notion de la matrice de transition aux SPD linéaires. Cette forme de représentation s'apprête au mieux à l'analyse des propriétés fondamentales d'un SPD linéaire à l'instar de la commandabilité, l'observabilité, la stabilité, la stabilisabilité et la détectabilité. Pour les SPD non linéaires, l'analyse au sens des semi-groupes est plutôt restreinte à des classes de SPD particulières alors que peu de résultats théoriques intéressants sont jusque-là rapportés dans la littérature. Ce constat constitue d'ailleurs une des motivations de ce travail

de thèse que nous avons bien voulu orienter, dans ce dernier chapitre, vers l'utilisation des semi-groupes dans l'analyse de la stabilité d'un SPD non linéaire bouclé par un contrôleur géométrique flou. Le concept que nous avons développé dans ce sens est toutefois original tirant profit de la capacité d'un modèle EDP flou d'approximer un SPD non linéaire moyennant l'interpolation de sous-systèmes linéaires de dimension infinie. Les résultats présentés dans ce chapitre s'inscrivent justement dans l'objectif d'avancer une procédure de conception d'une commande géométrique de nature distribuée pour une classe de SPD non linéaires via une transformation d'état linéaire. Cette démarche est appuyée par une analyse de stabilité du système bouclé résultant en utilisant le théorème des opérateurs linéaires perturbés issu de la théorie des semi-groupes.

Pour commencer, un rappel de certaines notions de la théorie des semi-groupes est d'abord présenté en mettant tout particulièrement l'accent sur le fameux théorème de la perturbation d'un opérateur linéaire borné. Le problème de synthèse du contrôle géométrique flou à la frontière est ensuite traité, suivi par une analyse de stabilité du système bouclé résultant en utilisant les semi-groupes.

IV.2 Quelques éléments de la théorie des semi-groupes

Un système dynamique donné sous la forme d'état :

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t), \quad x(0) \in \mathcal{D} \quad (\text{IV.1})$$

peut être étudié d'un point de vue purement abstrait au regard de la régularité de l'opérateur d'état \mathcal{A} dont la matrice d'état est un cas particulier (en dimension finie). On peut aussi s'intéresser aux propriétés de sa solution, c'est-à-dire à l'évolution de son état $x(t)$. Dans ce cas, la théorie des semi-groupes des opérateurs linéaires est plus indiquée. Nous donnerons dans la suite quelques définitions et théorèmes y afférent, repris des références (Pazy, 1983 ; El Jai, 2010).

Définition IV.1 (Semi-groupe fortement continu) : On appelle semi-groupe fortement continu d'opérateurs sur l'espace de Hilbert séparable \mathbb{H} toute famille d'opérateurs $\mathcal{U}(t)$ ($t > 0$) satisfaisant :

1. $\mathcal{U}(0) = I$ (I est l'opérateur identité),
2. $\mathcal{U}(t + s) = \mathcal{U}(t) \mathcal{U}(s)$, pour tout $t, s \geq 0$,
3. $\|\mathcal{U}(t)x - x\| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0^+$, pour tout $x \in \mathbb{H}$.

Définition IV.2 (Générateur d'un semi-groupe) : On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $\mathcal{U}(t)$, l'opérateur \mathcal{A} défini par :

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{U}(t)x - x}{t} \quad (\text{IV.2})$$

quand cette limite existe.

Définition IV.3 (Domaine de l'opérateur) : On appelle domaine de l'opérateur \mathcal{A} l'ensemble des x dans \mathbb{H} pour lesquels :

$$\mathfrak{D}(\mathcal{A}) = \left\{ x \in \mathbb{H} / \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{U}(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \quad (\text{IV.3})$$

Le semi-groupe joue un rôle important dans la détermination de la solution d'une équation différentielle abstraite. En particulier, la solution de l'équation (IV.1) est donnée par :

$$x(t) = \mathcal{U}(t)x(0), \quad x(0) \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \quad (\text{IV.4})$$

Théorème IV.1 (Hille-Yosida) : Si un opérateur \mathcal{A} est fermé à domaine $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ dense dans \mathbb{H} et satisfait :

1. $(\varpi I - \mathcal{A})^{-1}$ existe pour $\varpi > \omega$,
 2. $\|(\varpi I - \mathcal{A})^m\| \leq \frac{M}{(\varpi - \omega)^m}$, $M, \omega \in \mathfrak{R}, m = 1, 2, \dots$
- (IV.5)

alors \mathcal{A} génère un semi-groupe fortement continu $\mathcal{U}(t)$ satisfaisant :

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathbb{H}} \leq Me^{\omega t}, \quad t > 0 \quad (\text{IV.6})$$

Définition IV.4 (Semi-groupe exponentiellement stable) : Un semi-groupe fortement continu $\mathcal{U}(t)$ sur \mathbb{H} est un semi-groupe exponentiellement stable s'il existe deux constantes réelles $M \geq 1$ et $\omega > 0$ telles que :

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathbb{H}} \leq Me^{-\omega t}, \quad t > 0 \quad (\text{IV.7})$$

Dans le cas d'un SPD linéaire à commande distribuée donné sous la forme abstraite suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t) \\ x(0) &= x_0 \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

où \mathcal{A} et \mathcal{B} sont respectivement les opérateurs d'état et de commande supposés bornés, une forme usuelle de la commande en boucle fermée (cas de stabilisation) est un retour d'état de

la forme :

$$u(t) = \mathcal{K}x(t) \quad (\text{IV. 9})$$

où \mathcal{K} est un opérateur spatial qui détermine la dynamique désirée en boucle fermée. Ainsi, la dynamique du système en boucle fermée s'exprime par :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (\mathcal{A} + \mathcal{BK})x(t) \\ x(0) &= x_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \end{aligned} \quad (\text{IV. 10})$$

L'opérateur définissant la dynamique du système commandé est $\mathcal{A} + \mathcal{BK}$. Cet opérateur, qui génère le semi-groupe en boucle fermée, est vu comme une perturbation de l'opérateur \mathcal{A} .

Théorème IV.2 (*Théorème de perturbation d'un opérateur*) : Si \mathcal{A} est un générateur d'un semi-groupe fortement continu $\mathcal{U}(t)$ tel que $\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathbb{H}} \leq Me^{-\omega t}$, $t > 0$, et si \mathcal{BK} est un opérateur borné sur \mathbb{H} , alors l'opérateur $\mathcal{A} + \mathcal{BK}$ génère un semi-groupe fortement continu $\mathcal{S}(t)$ tel que :

$$\|\mathcal{S}(t)\|_{\mathbb{H}} \leq Me^{(-\omega + M\|\mathcal{BK}\|)t} \quad (\text{IV. 11})$$

Ce théorème précise la condition pour que le système bouclé par la commande $u(t) = \mathcal{K}x(t)$ soit défini à partir d'un générateur de semi-groupe exponentiellement stable.

IV.3 Commande géométrique floue basée sur un modèle équivalent à commande distribuée

IV.3.1 Formulation du problème

Considérons un SPD non linéaire représenté sous la forme (II.9) avec les conditions aux limites (II.10) et la condition initiale (II.11) tel que décrit dans le Chapitre II, section II.3. Notre illustration dans cette section se limite au cas unidimensionnel, c'est-à-dire en admettant $x(z, t) \in \mathbb{R}$ et $u(t) \in \mathbb{R}$. La variable de sortie à commander $y(t)$ est définie par :

$$y(t) = \int_0^l c(z)x(z, t)dz \quad (\text{IV. 12})$$

avec $y(t) \in \mathbb{R}$ et $c(z)$ est une fonction lisse.

Hypothèse IV.1 : L'état du système est positif, c'est-à-dire : $x(z, t) \geq 0$.

Hypothèse IV.2 : La fonction lisse $c(z) \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ avec $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$ est un espace de Soborov d'ordre 2 défini comme suit (Atkinson et Han, 2009):

$$\mathbb{H}_0^2(\Omega) = \{c(z) \in L^2(\Omega) ; c(l) \neq 0 \text{ et } \dot{c}(0) = \dot{c}(l) = 0\} \quad (\text{IV.14})$$

Hypothèse IV.3 : La fonction lisse $c(z)$ est orthogonale à la fonction lisse $b(z)$, c'est-à-dire (Atkinson et Han, 2009) :

$$\langle c(z), b(z) \rangle_{\mathbb{H}} = \int_0^l c(z)b(z) dz = 0 \quad (\text{IV.14})$$

Hypothèse IV.4 : La fonction lisse $c(z)$ n'est pas orthogonale à la fonction lisse $b(z)$, c'est-à-dire (Atkinson et Han, 2009) :

$$\langle c(z), \ddot{b}(z) \rangle_{\mathbb{H}} = \int_0^l c(z)\ddot{b}(z) dz \neq 0 \quad (\text{IV.15})$$

Admettons que la dynamique spatio-temporelle de ce système puisse être représentée exactement par un modèle EDP flou de type T-S de la forme :

Règle i :

IF $\varphi_1(z, t)$ is D_i^1 and ... and $\varphi_p(z, t)$ is D_i^p ,

$$\text{THEN } \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = A_i \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B_i x(z, t), \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{IV.16})$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right|_{z=l} = u(t) \quad (\text{IV.17})$$

où $\varphi_j(z, t)$, $j = 1, \dots, p$, sont les variables de prémisses, p est le nombre d'ensembles flous, D_i^j , $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, p$ sont les ensembles flous de prémisses et q est le nombre de règles. La conséquence de la règle i décrit une dynamique locale linéaire du SPD caractérisée par les coefficients $A_i \in \mathbb{R}$ et $B_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, q$, ($A_i > 0$). Ainsi, l'équation d'état du système s'obtient par :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) \left(A_i \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B_i x(z, t) \right) \quad (\text{IV.18})$$

où $\varphi(z, t) = [\varphi_1(z, t) \dots \varphi_p(z, t)]^T$ et $h_i(\varphi(l, t))$, $i = 1, \dots, q$, sont des fonctions d'appartenance exprimées à la frontière du domaine spatiale avec $h_i(\varphi(l, t)) \geq 0$ et $\sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) = 1$ pour tout $t \geq 0$.

Pour ce système, définissons un contrôleur géométrique flou à la frontière de type T-S représenté par un modèle à base de règles IF-THEN de la forme :

Règle i :

IF $\varphi_1(z, t)$ is D_i^1 and ... and $\varphi_p(z, t)$ is D_i^p ,

THEN $u(t) = \mathcal{K}_i[x(z, t)]$, $i = 1, \dots, q$ (IV.19)

où \mathcal{K}_i est un opérateur différentiel spatial linéaire borné associé à la commande locale $u(t)$ figurant dans la conséquence de la règle i . Par inférence de l'ensemble des q règles IF-THEN, le contrôleur géométrique flou à la frontière peut être déterminé par :

$$u(t) = \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) \mathcal{K}_i[x(z, t)] \quad (IV.20)$$

Ainsi formulé, et étant donnée la sortie commandée $y(t)$, le problème de commande à résoudre se ramène à la détermination d'un contrôleur géométrique à la frontière de la forme (IV.20) qui permettra de stabiliser le système (II.9)-(II.11) représenté par le modèle EDP flou (IV.16)-(IV.17) autour du profile d'équilibre $x(z, t) = 0$ tout en assurant la stabilité de la boucle fermée.

IV.3.2 Synthèse du contrôleur

La transformation linéaire (IV.21) permettant de convertir le problème de commande à la frontière à un autre de commande distribuée est illustrée par la Figure IV.1 (Hamdadou, 2022).

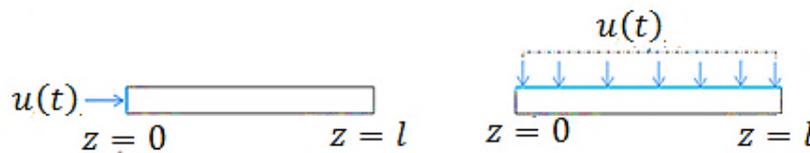


Figure IV.1 : Transformation de la commande à la frontière à une commande distribuée.

La loi de commande géométrique floue à la frontière exprimée par l'équation (IV.20) est entièrement définie par l'opérateur différentiel $\mathcal{K}_i[x(z, t)]$ qu'il faudra déterminer pour

chaque règle i en utilisant l'indice caractéristique. Cet indice étant infini comme montré dans la section III.2. Pour parvenir à concevoir ce contrôleur, il y a lieu d'insérer la variable manipulée $u(t)$ dans l'équation d'état du système. Pour cela, on propose d'introduire une transformation d'état linéaire (changement de variable) telle que proposé dans (Hamdadou et al., 2020) :

$$w(z, t) = x(z, t) + b(z)u(t) \quad (\text{IV. 21})$$

où $w(z, t) \in \mathbb{H}$ est la nouvelle variable d'état et la fonction lisse $b(z)$ satisfait les conditions suivantes :

$$\dot{b}(0) = 0 \text{ et } \dot{b}(l) = -1 \quad (\text{IV. 22})$$

A partir de l'équation (IV.21), nous avons :

$$x(z, t) = w(z, t) - b(z)u(t) \quad (\text{IV. 23})$$

En substituant la variable d'état (IV.23) dans l'équation (IV.16), un modèle flou T-S avec une commande distribuée peut être établi sous la forme :

Règle i :

IF $\varphi_1(z, t)$ is D_i^1 and ... and $\varphi_p(z, t)$ is D_i^p ,

$$\text{THEN } \frac{\partial w(z, t)}{\partial t} = A_i \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2} + B_i w(z, t) - (A_i \ddot{b}(z) + B_i \dot{b}(z)) u(t) + b(z) \dot{u}(t), \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{IV. 24})$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \frac{\partial w(z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial w(z, t)}{\partial z} \right|_{z=l} = 0 \quad (\text{IV. 25})$$

et la condition initiale :

$$w(z, 0) = x_0(z) + b(z)u(0) = w_0(z) \quad (\text{IV. 26})$$

Exprimons à présent la variable de sortie à commander $y(t)$, donnée par l'équation (IV.12), en fonction de la nouvelle variable d'état $w(z, t)$. Par substitution de la variable d'état (IV.23) dans l'équation (IV.12), et en tenant compte de l'hypothèse IV.3, on obtient :

$$y(t) = \int_0^l c(z)w(z, t)dz \quad (\text{IV. 27})$$

Ainsi formulé, le problème qu'on se propose de résoudre est celui de la détermination d'une commande géométrique permettant de réaliser une linéarisation entrée/sortie (u - y) en

utilisant le sous-modèle linéaire de la conséquence du modèle flou T-S (IV.24).

Le calcul de la dérivée temporelle de la sortie (IV.27) donne :

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \int_0^l c(z) \frac{dw(z,t)}{dt} dz \\ &= \int_0^l c(z) \left(A_i \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2} + B_i w(z,t) \right) dz - \left[\int_0^l c(z) (A_i \ddot{b}(z) + B_i b(z)) dz \right] u(t) \\ &\quad + \left[\int_0^l c(z) b(z) dz \right] \dot{u}(t), \quad i = 1, \dots, q \end{aligned} \quad (IV.28)$$

Ensuite, en tenant compte de l'hypothèse IV.3, l'équation (IV.28) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \int_0^l c(z) \left(A_i \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2} + B_i w(z,t) \right) dz - \left[A_i \int_0^l c(z) \ddot{b}(z) dz \right] u(t), \\ &\quad i = 1, \dots, q \end{aligned} \quad (IV.29)$$

Notons que la commande $u(t)$ apparait linéairement dans la première dérivée (IV.29) de la sortie à commander. D'après l'hypothèse IV.4, le terme entre crochets figurant dans l'équation (IV.29) est non nul ; l'indice caractéristique du système est donc fini et égal à 1. Par conséquent, il devient possible de concevoir une commande géométrique permettant d'imposer une dynamique locale du premier ordre au système bouclé de la forme :

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \vartheta(t) \quad (IV.30)$$

où $\tau > 0$ est la constante de temps désirée en boucle fermée et $\vartheta(t)$ est une référence externe.

Ainsi, en combinant les équations (IV.29) et (IV.30), une commande locale $u(t)$ est obtenue sous la forme :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{-1}{\tau A_i \int_0^l c(z) \ddot{b}(z) dz} \left[\vartheta(t) - y(t) - \tau A_i \int_0^l c(z) \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2} dz \right. \\ &\quad \left. - \tau B_i \int_0^l c(z) w(z,t) dz \right], \quad i = 1, \dots, q \end{aligned} \quad (IV.31)$$

Pour pouvoir implémenter ce contrôleur sur le système original (II.9), il faudra exprimer la commande (IV.31) en fonction de la variable d'état d'origine $x(z,t)$. Pour cela, intégrons par parties le premier terme intégral figurant entre crochets dans l'équation (IV.31) en tenant compte de la condition (IV.22) et des conditions aux limites (IV.25). Il advient :

$$A_i \int_0^l c(z) \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2} dz = A_i \int_0^l \ddot{c}(z) w(z, t) dz, \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{IV.32})$$

En utilisant la transformation linéaire (IV.21), on obtient :

$$A_i \int_0^l c(z) \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2} dz = A_i \int_0^l \ddot{c}(z) x(z, t) dz + \left[A_i \int_0^l \ddot{c}(z) b(z) dz \right] u(t), \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{IV.33})$$

En procédant de même avec le deuxième terme intégral entre crochets de l'équation (IV.31) en utilisant la transformation linéaire (IV.21) et en tenant compte de l'hypothèse IV.3, il en résulte :

$$B_i \int_0^l c(z) w(z, t) dz = B_i \int_0^l c(z) x(z, t) dz, \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{IV.34})$$

Par substitution des équations (IV.33) et (IV.34) dans l'équation (IV.31), la commande géométrique locale peut être exprimée en fonction de la variable d'état $x(z, t)$ comme suit :

$$u(t) = \frac{1}{\tau A_i c(l)} \left[\vartheta(t) - y(t) - \tau A_i \int_0^l \ddot{c}(z) x(z, t) dz - \tau B_i \int_0^l c(z) x(z, t) dz \right], \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{IV.35})$$

Le résultat (IV.35) conduit à établir le modèle à base de règles suivant pour le contrôleur géométrique flou à la frontière proposé :

Règle i :

IF $\varphi_1(z, t)$ is D_i^1 and ... and $\varphi_p(z, t)$ is D_i^p ,

$$\text{THEN } u(t) = \frac{1}{\tau A_i c(l)} \left[\vartheta(t) - y(t) - \tau \int_0^l (A_i \ddot{c}(z) + B_i c(z)) x(z, t) dz \right], \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{IV.36})$$

L'inférence de l'ensemble des q règles du modèle (IV.36) permet d'exprimer la loi de commande floue globale par :

$$u(t) = \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) P_i \left[\vartheta(t) - y(t) - \tau \int_0^l (A_i \ddot{c}(z) + B_i c(z)) x(z, t) dz \right] \quad (\text{IV.37})$$

où $P_i = (\tau A_i c(l))^{-1}$ et $h_i(\varphi(l, t))$, $i = 1, \dots, q$, sont des fonctions d'appartenance exprimées à la frontière du domaine spatiale ($z = l$) avec $h_i(\varphi(l, t)) \geq 0$ et $\sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) = 1$ pour tout $t \geq 0$.

IV.4 Analyse de stabilité en boucle fermée

Dans cette section, on s'intéresse à la stabilité du système bouclé résultant de la mise en œuvre de la loi de commande géométrique floue (IV.37) sur le SPD (II.9) sous la dimension précisée. Notre analyse de stabilité est menée au sens de la théorie des semi-groupes en s'appuyant sur le théorème des opérateurs linéaires perturbés. Pour ce faire, considérons le système bouclé résultant de l'introduction de la loi de commande (IV.37) dans (IV.18) moyennant la fonction de Dirac (Stafford et Dowrick, 1977 ; Ray, 1989 ; Maidi et al., 2010). Ainsi, l'équation d'évolution du système bouclé devient :

$$\begin{aligned} \dot{x}(z, t) = & \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) A_i \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + B_i x(z, t) \\ & + \sum_{i=1}^q \delta_\varepsilon(z-l) A_i \left(\sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) P_i (\vartheta(t) - y(t)) \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) \int_0^l \Phi_i(z) x(z, t) dz \right) \end{aligned} \quad (IV.38)$$

Posons

$$A^* = \max\{A_1, A_2, \dots, A_q\}$$

$$B^* = \max\{B_1, B_2, \dots, B_q\}$$

$$P^* = \max\{P_1, P_2, \dots, P_q\}$$

$$\Phi^* = \min \left\{ \min_z \Phi_1(z), \min_z \Phi_2(z), \dots, \min_z \Phi_q(z) \right\}$$

avec $\Phi_i(z) = P_i \tau (A_i \ddot{c}(z) + B_i \dot{c}(z))$, $i = 1, \dots, q$.

Comme $\sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) = 1$ et tenant compte de l'hypothèse IV.1, il en découle :

$$\sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) B_i x(z, t) \leq \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) B^* x(z, t) \leq B^* x(z, t) \quad (IV.39)$$

$$\delta_\varepsilon(z-l) \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) A_i \leq \delta_\varepsilon(z-l) \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(z, t)) A^* \leq \delta_\varepsilon(z-l) A^* \quad (IV.40)$$

S'agissant du dernier terme de l'équation (IV.38), on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) \int_0^l \Phi_i(z) x(z, t) dz &\geq \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) \int_0^l \min_z \Phi_i(z) x(z, t) dz \\
&\geq \sum_{i=1}^q h_i(\varphi(l, t)) \Phi^* \int_0^l x(z, t) dz \geq \Phi^* \int_0^l x(z, t) dz
\end{aligned} \tag{IV.41}$$

Par conséquent, le système en boucle fermée (IV.38) peut être exprimé sous la forme abstraite suivante :

$$\dot{e}(t) = -\frac{1}{\tau} e(t) + \frac{1}{\tau} \dot{\vartheta}(t) \tag{IV.42}$$

$$\dot{x}(z, t) \leq \mathcal{A}_{bf} x(z, t) + \mathcal{B}_{bf} e(t) \tag{IV.43}$$

où

$$\mathcal{A}_{bf} = A^* \frac{\partial^2}{\partial z^2} + B^* - \delta_\varepsilon(z-l) A^* C \tag{IV.44}$$

et

$$\mathcal{B}_{bf} = \delta_\varepsilon(z-l) A^* P^* \tag{IV.45}$$

avec \mathcal{C} un opérateur défini par :

$$\mathcal{C}x(z, t) = \int_0^l x(z, t) dz \tag{IV.46}$$

Dans le cas où l'on a :

$$\|\dot{\vartheta}(t)\| \leq M_\vartheta e^{-\omega_\vartheta t} \tag{IV.47}$$

Il en découle alors de l'équation (IV.42) (Liu, 2010) :

$$\begin{aligned}
|e(t)| &\leq M_e (|e(0)| + t) e^{-t/\tau} \quad \text{si } \frac{1}{\tau} = \omega_\vartheta \\
|e(t)| &\leq M_e (|e(0)| + 1) e^{-\alpha t} \quad \text{si } \frac{1}{\tau} \neq \omega_\vartheta
\end{aligned} \tag{IV.48}$$

où $\alpha = \max\left(\frac{1}{\tau}, \omega_\vartheta\right)$ et $M_e > 0$.

Par conséquent, pour que le système en boucle fermée (IV.42)-(IV.43) soit stable, il suffit que l'opérateur \mathcal{A}_{bf} , donné par l'équation (IV.44), soit un générateur de semi-groupe stable. \mathcal{A}_{bf} représente l'opérateur de diffusion-réaction qui est défini par :

$$\bar{A} = A^* \frac{\partial^2}{\partial z^2} + B^* \tag{IV.49}$$

perturbé par l'opérateur borné $\mathcal{D} = -\delta_\varepsilon(z-l)A^*C$. Comme $B^* < 0$, alors l'opérateur \bar{A} génère un semi-groupe stable :

$$\| \mathcal{U}(t) \|_{\mathbb{H}} \leq M_{\bar{A}} e^{-B^* t} \quad (\text{IV.50})$$

D'après le Théorème IV.2 (Perturbation d'un opérateur linéaire borné), l'opérateur en boucle fermée \mathcal{A}_{bf} est un générateur du semi-groupe :

$$\| \mathcal{S}(t) \|_{\mathbb{H}} \leq M_{bf} e^{-B^* + M_{\bar{A}} \|\delta_\varepsilon(z-l)A^*C\|_{\mathbb{H}} t} \quad (\text{IV.51})$$

Par conséquent, pour que le système en boucle fermée soit exponentiellement stable, il suffit que le semi-groupe $\mathcal{S}(t)$ soit exponentiellement stable, d'où la condition de stabilité en boucle fermée :

$$-B^* + M_{\bar{A}} \|A^*\| \|\delta_\varepsilon(z-l)C\|_{\mathbb{H}} < 0 \quad (\text{IV.52})$$

ou encore

$$M_{\bar{A}} \|A^*\| \|\delta_\varepsilon(z-l)C\|_{\mathbb{H}} < B^* \quad (\text{IV.53})$$

A l'issue de cette analyse de stabilité, nous énonçons la proposition suivante.

Proposition IV.1 : *Le système bouclé résultant de la mise en œuvre de la loi de commande géométrique floue (IV.37) sur le système (II.9) représenté par le modèle EDP flou (IV.16)-(IV.17) est exponentiellement stable si la condition suivante est vérifiée :*

$$M_{\bar{A}} \|A^*\| \|\delta_\varepsilon(z-l)C\|_{\mathbb{H}} < B^* \quad (\text{IV.54})$$

Montrons que dans le cas où la condition (IV.54) est vérifiée, le système en boucle fermée (IV.42)-(IV.43) est exponentiellement stable. L'équation (IV.42) peut s'écrire comme suit :

$$|e(t)| \leq \bar{M}_e e^{-\omega_e t} \quad (\text{IV.55})$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{M}_e &= M_e (|e(0)| + t) \quad \text{et} \quad \omega_e = \frac{1}{\tau} \quad \text{si} \quad \frac{1}{\tau} = \omega_g \\ \bar{M}_e &= M_e (|e(0)| + 1) \quad \text{et} \quad \omega_e = \alpha \quad \text{si} \quad \frac{1}{\tau} \neq \omega_g \end{aligned} \quad (\text{IV.56})$$

En posant maintenant :

$$\omega_x = B^* - M_{\bar{A}} \|\delta_\varepsilon(z-l)A^*C\|_{\mathbb{H}} \quad (\text{IV.57})$$

La propriété (IV.51) prend la forme :

$$\| \mathcal{S}(t) \|_{\mathbb{H}} \leq M_{bf} e^{-\omega_x t} \quad (\text{IV. 58})$$

En utilisant la méthode de la variation de la constante (El Jai et Amouroux, 1990), il est facile de montrer que la solution de l'équation (IV.43) vérifie la relation :

$$x(z, t) \leq \mathcal{S}(t)x(z, 0) + \int_0^t \mathcal{S}(t - \zeta) B_{bf} e(\zeta) d\zeta \quad (\text{IV. 59})$$

D'où :

$$\| x(z, t) \|_{\mathbb{H}} \leq \| \mathcal{S}(t) \|_{\mathbb{H}} \| x(z, 0) \|_{\mathbb{H}} + \int_0^t \| \mathcal{S}(t - \zeta) \|_{\mathbb{H}} \| B_{bf} \|_{\mathbb{H}} |e(\zeta)| d\zeta \quad (\text{IV. 60})$$

En utilisant les équations (IV.55) et (IV.58), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \| x(z, t) \|_{\mathbb{H}} &\leq M_{bf} e^{-\omega_x t} \| x(z, 0) \|_{\mathbb{H}} + \int_0^t M_{bf} e^{-\omega_x(t-\zeta)} \| B_{bf} \|_{\mathbb{H}} \bar{M}_e e^{-\omega_e \zeta} d\zeta \\ &\leq M_{bf} \| x(z, 0) \|_{\mathbb{H}} e^{-\omega_x t} + M_{bf} \bar{M}_e \| B_{bf} \|_{\mathbb{H}} e^{-\omega_x t} \int_0^t e^{(\omega_x - \omega_e)\zeta} d\zeta \end{aligned} \quad (\text{IV. 61})$$

De ce qui précède, trois cas distincts peuvent se présenter :

- **Premier cas :** $\omega_x = \omega_e$

$$\begin{aligned} \| x(z, t) \|_{\mathbb{H}} &\leq M_{bf} \| x(z, 0) \|_{\mathbb{H}} e^{-\omega_x t} + M_{bf} \bar{M}_e \| B_{bf} \|_{\mathbb{H}} e^{(-\omega_x t)t} \\ &\leq M_{bf} \| x(z, 0) \|_{\mathbb{H}} e^{-\omega_x t} + M_{bf} \bar{M}_e \| B_{bf} \|_{\mathbb{H}} \frac{e^{-\omega t}}{\omega_x - \omega}, \quad 0 < \omega < \omega_x \end{aligned} \quad (\text{IV. 62})$$

- **Deuxième cas :** $\omega_x > \omega_e$

$$\begin{aligned} \| x(z, t) \|_{\mathbb{H}} &\leq M_{bf} \| x(z, 0) \|_{\mathbb{H}} e^{-\omega_x t} + M_{bf} \bar{M}_e \| B_{bf} \|_{\mathbb{H}} \frac{e^{-\omega_x t}}{\omega_x - \omega_e} (e^{(\omega_x - \omega_e)t} - 1) \\ &\leq M_{bf} \| x(z, 0) \|_{\mathbb{H}} e^{-\omega_x t} + M_{bf} \bar{M}_e \| B_{bf} \|_{\mathbb{H}} \frac{e^{-\omega_x t}}{\omega_x - \omega_e} \end{aligned} \quad (\text{IV. 63})$$

- **Troisième cas :** $\omega_x < \omega_e$

$$\begin{aligned} \| x(z, t) \|_{\mathbb{H}} &\leq M_{bf} \| x(z, 0) \|_{\mathbb{H}} e^{-\omega_x t} + M_{bf} \bar{M}_e \| B_{bf} \|_{\mathbb{H}} \frac{e^{-\omega_x t}}{|\omega_x - \omega_e|} (e^{(\omega_x - \omega_e)t} - 1) \\ &\leq M_{bf} \| x(z, 0) \|_{\mathbb{H}} e^{-\omega_x t} + M_{bf} \bar{M}_e \| B_{bf} \|_{\mathbb{H}} \frac{e^{-\omega_x t}}{|\omega_x - \omega_e|} \end{aligned} \quad (\text{IV. 64})$$

Comme $\omega_x > 0$ et $\omega_e > 0$, il advient que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x\|_{L^2(\Omega)} = 0$, ce qui conduit à conclure que le système bouclé (IV.42)-(IV.43) est exponentiellement stable.

IV.5 Exemple d'application

A titre d'illustration de l'approche de commande proposée, nous reprenons dans cette section l'exemple d'application traité dans le Chapitre II, section II.7. Il s'agit pour rappel d'un SPD non linéaire de réaction-diffusion décrit par le modèle (II.44)-(II.46). Le modèle EDP flous T-S développé pour ce système est utilisé dans ce chapitre pour la synthèse du contrôleur géométrique flou à la frontière selon la procédure de synthèse proposée.

Le problème de commande consiste en la détermination d'un contrôleur géométrique flou à la frontière qui permet de stabiliser le système autour de son point d'équilibre $x(z, t) = 0$ qui est naturellement instable, comme montré dans la Figure II.1. Pour ce faire, nous utilisons le modèle EDP flou T-S développé pour ce système et qui est composé de deux règles IF-THEN ($q = 2$) et globalement décrit par l'équation (II.53) avec les conditions aux limites (II.45) et la condition initiale (II.46). De ce qui précède, ce contrôleur est régi par la loi de commande (IV.37) qu'on choisit d'implémenter en simulation sur le SPD (II.44)-(II.46) en admettant le paramétrage suivant :

- Paramètres du modèle EDP flou : $A_1 = A_2 = 1$, $B_1 = 0.5$, $B_2 = 0.005/\pi$, $l = 1$ et $h_i(x(l, t))$, $i = 1, 2$, sont définies comme dans les équations (II.51)-(II.52).
- Paramètres de contrôle : $\vartheta(t) = 0$, $c(z) = z$ et $\tau = 0.5$.

Ainsi paramétré, le contrôleur géométrique flou à la frontière est régi par la loi de commande :

$$u(t) = \sum_{i=1}^{q=2} h_i(x(l, t)) \left(-2y(t) - B_i \int_0^l z x(z, t) dz \right) \quad (\text{IV. 65})$$

Notons ici que $c(z) > 0$, la sortie commandée exprimée par l'équation (IV.12) satisfait alors :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y = 0,$$

ce qui implique :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Par conséquent, le système est asymptotiquement stable.

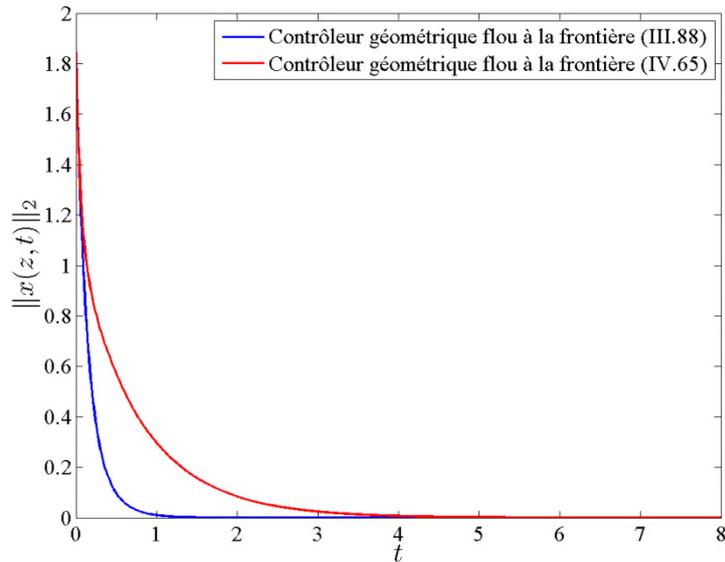


Figure IV.2 : Evolution de la norme $\|x(z, t)\|_{L^2(\Omega)}$ en boucle fermée.

Ce résultat est confirmé en simulation comme il peut être observé sur la Figure IV.2 qui illustre la trajectoire $\|x(z, t)\|_{L^2(\Omega)}$ du système bouclé résultant.

Cette stabilisation exponentielle de l'état du système à paramètres distribués (II.44)-(II.46) est réalisée grâce au contrôleur proposé (IV.65) dont l'action stabilisatrice $u(t)$ générée à la frontière du domaine spatial est tracée sur la Figure IV.3. Cette commande a bel et bien permis au système de rejoindre la référence externe désirée comme le précise l'évolution de la sortie commandée $y(t)$ illustrée en Figure IV.4, de même que le profil spatio-temporel du système bouclé de la Figure IV.5.

Dans les Figures IV.2-IV.4, nous comparons les résultats des deux contrôleurs géométriques flous à la frontière proposés dans ce travail et qui sont décrits par les lois de commande (III.88) et (IV.65). La Figure IV.2 montre l'évolution de la norme de l'état du système en boucle fermée. On remarque clairement que les deux contrôleurs stabilisent le système de manière exponentielle. Néanmoins, la convergence est plus rapide dans le cas du contrôleur (III.88), comme il est confirmé par la Figure IV.4, mais avec effort de commande plus important en comparaison au contrôleur (IV.65).

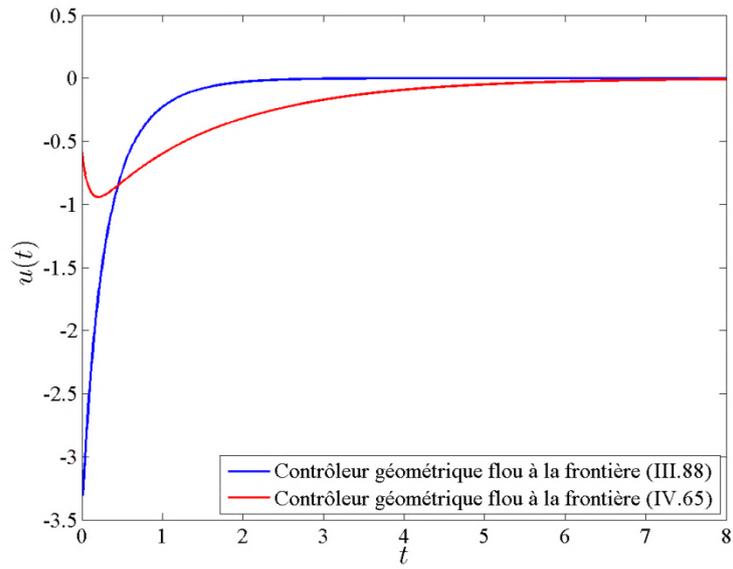


Figure IV.3 : Evolution de la commande $u(t)$.

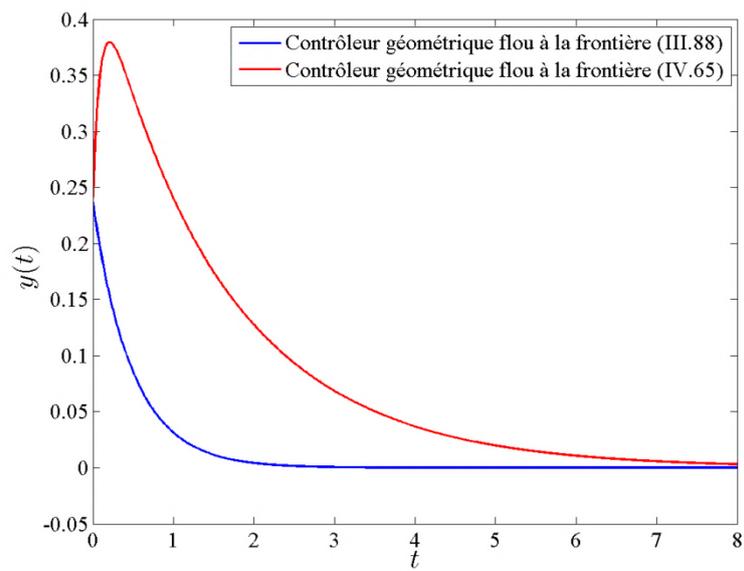


Figure IV.4 : Evolution de la sortie contrôlée $y(t)$.

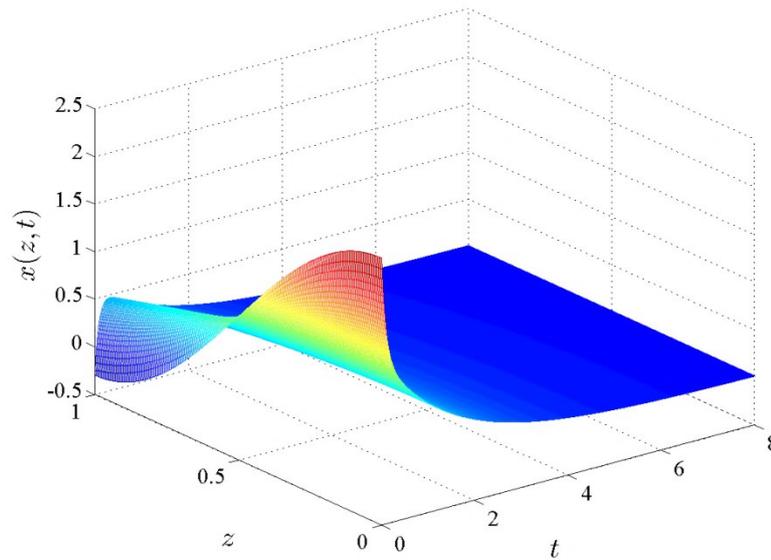


Figure IV.5 : Profil spatio-temporel de l'état $x(z, t)$ du système de réaction-diffusion bouclé par le contrôleur géométrique flou (IV.65) proposé.

IV.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé le problème de synthèse du contrôle géométrique flou suivant une approche basée sur la transformation du problème de commande à la frontière en un problème de commande distribuée. Ceci est effectuée moyennant une transformation d'état linéaire avec l'objectif de ramener l'indice caractéristique infini du SPD non linéaire à commander en un indice fini ; chose qui permet de surmonter la contrainte de commandabilité. Le contrôleur proposé se présente sous la forme de mesure distribuée et est développé sur la base d'un modèle flou aux dérivées partielles de type T-S représentant exactement la dynamique spatio-temporelle non linéaire du SPD à commander.

Le concept proposé est tout à fait original appuyé par une preuve de stabilité élaborée au sens de la théorie des semi-groupes. Une analyse de stabilité exponentielle du système bouclé a été donc menée en l'exprimant sous forme une forme abstraite par l'introduction de la loi de commande à la frontière proposée dans l'équation d'état du système bouclé via la fonction de Dirac. La condition de stabilité exponentielle du système résultant a été ensuite déduite à l'aide du fameux Théorème de perturbation d'un opérateur linéaire borné. Un exemple de stabilisation d'un système de diffusion-réaction non linéaire est

traité à la fin de ce chapitre pour démontrer le potentiel de la méthode de commande géométrique floue proposée.

Conclusion générale

L'effort de recherche consenti dans le cadre de cette thèse répond au besoin d'étoffer la recherche sur la commande des systèmes à paramètres distribués (SPD) non linéaires par de nouvelles approches intelligentes exploitant le potentiel de l'existant des techniques traditionnelles jugées jusque-là assez maîtrisées de part leur rigueur mathématique. Nous nous sommes ainsi fixés l'objectif de contribuer à la commande des SPD en associant techniques intelligentes et classiques suivant une approche de commande tout à fait originale répondant surtout à deux critères clés de simplicité et d'efficacité. Au vu de l'existant des techniques classiques, notre synthèse bibliographique en a fait ressortir la technique du contrôle géométrique de SPD linéaires dont l'intérêt est multiple. C'est d'abord une approche de commande non linéaire employant des outils d'analyse et de synthèse facile à maîtriser à l'instar de l'indice caractéristique et de l'opérateur étendu. L'autre intérêt de l'approche réside dans l'aspect computationnel du contrôleur dont le paramétrage s'opère avec un simple ajustement d'une dynamique de sortie du premier ordre avec une conséquence immédiate sur l'implémentation en temps réel.

Motivés par la simplicité de la procédure, notre souci était justement orienté vers l'extension de l'approche de commande géométrique aux SPD non linéaires décrits dans l'espace d'état et de sortie multidimensionnels. A la base, c'est bien-entendu compliqué comme problème de commande surtout que la synthèse doit non seulement aboutir une forme de contrôle raisonnable, mais également être appuyée par une preuve mathématique de stabilité. Une première issue valable était de recourir à l'approximation floue de dynamique spatio-temporelle. C'est un moyen de représentation de SPD non linéaires sous forme de sous-SPD linéaires interpolés par inférence floue. C'est avantageux comme modèle de représentation vu la propriété d'approximation universelle calquée à ce formalisme et puis c'est orienté-commande. Ceci dit, la stratégie de commande géométrique de SPD non linéaires proposée est exclusivement basée sur des modèles flous aux dérivées partielles. Cette association de techniques intelligente et classique nous a conduits à développer un contrôle géométrique flou à la frontière du domaine spatial basé sur deux formes de modèles EDP flous équivalents à entrées ponctuelle et distribuée qu'il a fallu conforter par des preuves mathématiques de stabilité. Une exigence synéquanone pour ce genre de problème d'une extrême difficulté au vu de la nature

spatio-temporelle de la dynamique du système. Défi relevé à ce niveau avec deux preuves à l'appui de cette contribution : 1) un Théorème sur la stabilité en boucle fermée du système de commande géométrique flou à base de modèle équivalent à entrée ponctuelle, établi dans le cas multidimensionnel au sens de Lyapunov (voir Théorème III.1) ; 2) une Proposition sur la stabilité en boucle fermée du système de commande géométrique flou à base de modèle équivalent à entrée distribuée, établi dans le cas monodimensionnel au sens de la théorie des semi-groupes (voir Proposition IV.1).

A l'issue de la stratégie de synthèse proposée, nous pourrions énoncer les quelques conclusions suivantes :

- L'extension du contrôle géométrique à la frontière aux SPD non linéaires est un vrai challenge mathématique en raison de la dimension infinie de l'indice caractéristique. Sans le recours aux systèmes flous, il n'était guère possible pour nous de trouver une solution pratique du fait que les outils employés en contrôle géométrique classique ne peuvent s'appliquer systématiquement.
- En évoquant la question de simplicité, nous pourrions confirmer avoir pu avancer une méthode de contrôle simple à paramétrer et à implémenter, bien que dédiée à des systèmes naturellement complexes. La procédure consiste en une simple évaluation de dérivées temporelles de la sortie commandée, suivie d'un paramétrage judicieux de la dynamique bouclée à travers le choix de la constante de temps. C'est donc aussi simple comme calcul à la différence des méthodes comparées et illustrées dans le Chapitre III dont l'aspect computationnel est assez lourd avec l'emploi d'outils nécessitant un effort de calcul supérieur comme les inégalités matricielles linéaires (LMI) ou les techniques de décomposition, toutes subordonnées par l'existence de solutions.
- Pour ce qui est de l'efficacité, les résultats de comparaison présentés dans l'étude de simulation menée sur l'ensemble des exemples d'application avaient clairement montré la supériorité de l'approche proposée en matière de stabilisation et d'effort de commande nécessaire. En effet, les SPD non linéaires de réaction-diffusion, de réaction-diffusion-convection et de réaction-diffusion décrits dans l'espace d'état bidimensionnel avaient tous rempli un profil spatio-temporel stable sous la commande proposée avec un temps de transfert vers l'équilibre nettement meilleur.
- A ces avantages, se rajoute la particularité du contrôle proposé qui est choisi de s'appliquer à la frontière du domaine spatial, ce qui nécessite le déploiement d'un

nombre limité d'actionneurs en comparaison avec les méthodes de commande distribuées.

Enfin, notons ces quelques points de perspective tirés des insuffisances de la stratégie de commande proposée mais aussi des manquements soulevés :

- Catégorisée comme étant une stratégie de commande à la frontière, le contrôleur géométrique flou proposé requiert la totalité des mesures de l'état du système pour pouvoir l'implémenter en temps réel. C'est éventuellement coûteux pour les systèmes de grande dimension vu la cherté des capteurs distribués (piézo-céramiques, MEMS,...). A envisager dans ce sens un capteur soft du type observateur, ce qui n'est pas sans impact sur la loi de commande et la stabilité qui nécessitent dans ce cas d'être revisités.
- Le contrôle géométrique flou à base de modèle équivalent à entrée ponctuelle se base sur l'hypothèse d'avoir un SPD avec un nombre égal d'entrées et de sorties (SPD carré). L'extension au cas de SPD non linéaires non-carrés mérite prospection sur le plan mathématique.
- Enfin, l'extension au cas multidimensionnel de l'approche de commande à base de modèle équivalent à entrée distribuée dont la stabilité est vérifiée au moyen des semi-groupes est une priorité de recherche future.

Annexe

- **Théorème de Rayleigh-Ritz (Lutkepohl, 1996)**

Théorème A.1 : Soit $M \in \mathbb{R}^{r \times r}$ est une matrice symétrique, $\lambda(M)$ sont des valeurs propres et $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$. Alors :

$$\lambda_{\min}(M) = \min_{\mathcal{X}} \frac{\mathcal{X}^T M \mathcal{X}}{\mathcal{X}^T \mathcal{X}} \quad (\text{A. 1})$$

$$\lambda_{\max}(M) = \max_{\mathcal{X}} \frac{\mathcal{X}^T M \mathcal{X}}{\mathcal{X}^T \mathcal{X}} \quad (\text{A. 2})$$

- **Inégalité de Hölder (Atkinson et Han, 2009)**

Lemme A.1 : Soit $\alpha \in [1, \infty)$ et β peut être son conjugué. Alors pour tout $F \in L^\alpha(\Omega)$ et tout $G \in L^\beta(\Omega)$:

$$\int |F(z) G(z)| dz = \|F(z)\|_{L^\alpha(\Omega)} \|G(z)\|_{L^\beta(\Omega)} \quad (\text{A. 3})$$

- **Inégalité de Young (Atkinson et Han, 2009)**

Pour $\alpha \in [1, \infty)$, le conjugué de β est donné par la relation suivante :

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \quad (\text{A. 4})$$

Lemme A.2 : Soit $a, d \geq 0$, $1 < \alpha < \infty$, et β le conjugué de α . Alors :

$$a d \leq \frac{a^\alpha}{\alpha} + \frac{d^\beta}{\beta} \quad (\text{A. 5})$$

- **Inégalité de Cauchy-Schwarz (Atkinson et Han, 2009)**

Théorème A.2 : Soit F un espace vectoriel avec un produit intérieur $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors :

$$|\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle| \leq \sqrt{\langle \mathcal{X}, \mathcal{X} \rangle \langle \mathcal{Y}, \mathcal{Y} \rangle}; \quad \forall \mathcal{X}, \mathcal{Y} \in F \quad (\text{A. 6})$$

et l'égalité tient si et seulement si \mathcal{X} et \mathcal{Y} sont linéairement dépendants.

Noton que l'inégalité ci-dessus peut être écrite sous la forme suivante :

$$|\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle| \leq \|\mathcal{X}\| \|\mathcal{Y}\| \quad (\text{A. 7})$$

où $\|\cdot\|$ est un norme pour F .

Bibliographie

- R. Adams. Sobolev Spaces. Academic Press, NY, USA, 1978.
- K. Alhumaizi. Comparison of Finite Difference Methods for the Numerical Simulation of Reaction Flow. *Computers and Chemical Engineering*, vol. 28, no 9, pp. 1759–1769, 2004.
- W. F. Ames. Numerical Methods for Partial Differential Equations. Academic Press, San Diego, 1992.
- A. Armaou and P. D. Christofides. Dynamic Optimization of Dissipative PDE Systems Using Nonlinear Order Reduction. *Chemical Engineering Science*, vol. 57, no 24, pp. 5083–5114, 2002.
- K. Atkinson and W. Han. Theoretical Numerical Analysis. A Functional Analysis Framework. Springer: Dordrecht, 2009.
- J. P. Babary et W. Pelezewski. Commande Optimale des Systèmes Continus Déterministes. Masson, Paris, 1985.
- K. Bartecki. Modeling and Analysis of Linear Hyperbolic Systems of Balance Laws. New York, NY: Springer; 2016.
- D. Benameur, A. Maldi, S. Djennoune and J.-P. Corriou. Observer Design for a Nonlinear Diffusion System Based on the Kirchhoff Transformation. *International Journal of Dynamics and Control*, vol. 6, no. 1, pp. 154–166, 2018.
- A. Bensoussan, G. DA Prato, M. C. Delfour et S. K. Mitter. Representation and Control of Infinite Dimensional Systems. Birkhäuser Boston, 2006.
- G. Chen, I. Lasiecka and J. Zhou. Control of Nonlinear Distributed Parameter System. CRC Press, 1999.
- B.-S. Chen and Y.-T. Chang. Fuzzy State-Space Modeling and Robust Observer-based Control Design for Nonlinear Partial Differential Systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*; vol. 17, no. 5, pp. 1025–1043, 2009.
- P.D. Christofides and P. Daoutidis. Nonlinear Control of Diffusion-Convection-Reaction Processes. *Computuer and Chemical Engineering*, vol. 20, no S2, pp. S1071–S1076, 1996a.
- P.D. Christofides and P. Daoutidis. Feedback Control of Hyperbolic PDE Systems. *AICHe Journal*, vol. 42, no 11, pp. 3063–3086, 1996.
- P. D. Christofides. Robust Control of Parabolic PDE Systems. *Chemical Engineering Science*, vol. 53, pp. 2949–2965, 1998.
- P. D. Christofides. Control of Nonlinear Distributed Process Systems: Recent Developments and Challenges. *AICHe Journal*, vol. 47, no. 3, pp. 514–518, 2001a.

- P. D. Christofides. *Nonlinear and Robust Control of PDE Systems: Methods and Applications to Transport-Reaction Processes*. Birkhauser, Boston, 2001.
- P. D. Christofides. *Nonlinear and Robust Control of PDE Systems: Methods and Applications to Transport-Reaction processes*. Birkhäuser, Boston, 2001b.
- J.P. Corriou. *Commande des Procédés*. Lavoisier, Tec & Doc, Paris, 2003.
- J. P. Corriou. *Process Control-Theory and Applications*. Springer: London. 2004.
- R. F. Curtain and H.J. Zwart. *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*. Springer: New York, 1995.
- R. F. Curtain and A. J. Pritchard. *Functional Analysis in Modern Applied Mathematics*. Academic Press, 1997.
- H. Deng, H.-X. Li and G. Chen. Spectral-Approximation-Based Intelligent Modeling for Distributed Thermal Processes. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 13, no. 5, pp. 686–700, 2005.
- S. Djuljevic, P. D. Christofides and I. G. Kevrekidis. Distributed Nonlinear Control of Diffusion-Reaction Processes. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 14, no 2, pp. 133–156, 2004.
- A. El Jai et A. J. Pritchard. *Capteurs et Actionneurs dans l'Analyse des Systèmes Distribués*. Masson, Paris New York, 1986.
- A. El Jai et M. Amouroux. *Automatique des Systèmes Distribués*. Hernès, Paris, 1990.
- A. El Jai. *Eléments d'Analyse et de Contrôle des Systèmes*. Collection Etudes, Presses Universitaires de Perpignan, 2010.
- K. J. Engel and R. Nagel. *A Short Course on Operator Semigroups*. Springer, New York, 2006.
- J. C. Friedly. *Dynamic Behaviour of Processes*. Prentice-Hall, New Jersey, 1972.
- M. R. García, C. Vilas, L. O. Santos and A. A. Alonso. A Robust Multi-Model Predictive Controller for Distributed Parameter Systems. *Journal of Process Control*, vol. 22, no 1, pp. 60–71, 2012.
- M. Gugat. Analytic Solutions of L^∞ Optimal Control Problems for the Wave Equation. *Journal of Optimization Theory and Application*; vol. 114, no. 2, pp. 397–421, 2002.
- H. Habbi, M. Kidouche, M. Kinnaert and M. Zelmat. Fuzzy Model-Based Fault Detection and Diagnosis for a Pilot Heat Exchanger. *International Journal of Systems Science*, vol. 42, n°4, pp. 587-599, 2011.
- H. Habbi, M. Kidouche and M. Zelmat. Data-Driven Fuzzy Models for Nonlinear Identification of a Complex Heat Exchanger. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 35, no. 3, pp. 1470–1482, 2011a.

- G. Hagen. Absolute Stability via Boundary Control of a Semilinear Parabolic PDE. *IEEE Trans. Automat Control*, vol. 51, no. 3, pp. 489–493, 2006.
- D. Hamdadou, A. Maldi and J.-P. Corriou. Boundary Control of Burgers' Equation by Input-Output Linearization. In: Chadli, M., Bououden, S., Ziani, S., Zelinka, I. (eds) *Advanced Control Engineering Methods in Electrical Engineering Systems. Lecture Notes in Electrical Engineering*, vol 522. Springer, Cham, 2018.
- D. Hamdadou, A. Maldi and J.-P. Corriou. Neumann Boundary Control of a Linear Diffusion System Based on the Equivalent Distributed Control Model. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 142, no. 6, pp. 061008, 2020.
- D. Hamdadou. Contribution à la Commande des Systèmes de Dimension Infinie par l'Approche de Post-Approximation. Thèse de Doctorat en Automatique, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2022.
- A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- A. A. Jalali, C. S. Sims and P. Famouri. *Process Dynamics and Control*. Springer, 2006.
- S. Kawamoto, K. Tada, A. Ishigame and T. Taniguchi. An Approach to Stability Analysis of Second Order Fuzzy Systems. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pp. 1427–1434, 1992.
- M. Kumar and G. Mishra. An Introduction to Numerical Methods for the Solutions of Partial Differential Equations. *Applied Mathematics*, vol. 2, no. 11, pp. 1327–1338, 2011.
- C. Kravaris and J. Kantor. Geometric Methods for Nonlinear Process Control. 1. Background. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, vol. 29, pp. 2295–2310, 1990.
- J. E. Lagnese and G. Leugering. Time-Domain Decomposition of Optimal Control Problems for the Wave Equation. *Systems & Control Letters*, vol. 48, pp. 229–242, 2003.
- I. Lasiecka. Control of Systems Governed by Partial Differential Equations: A Historical Perspective. *Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control*, New Orleans, USA, 1995.
- L. Lefèvre, D. Dochain, S. Feye de Azevedo and A. Magnus. Optimal Selection of Orthogonal Polynomials Applied to the Integration of Chemical Reactor Equations by Collocation Methods. *Computers and Chemical Engineering*, vol. 24, no 12, pp. 2571–2588, 2000.
- C.-L. Lin and B.-S. Chen. Robust Observer-Based Control of Large Flexible Structures. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 116, pp. 713–722, 1994.
- M. Li et P. D. Christofides. An Input/Output Approach to the Optimal Transition Control of a Class of Distributed Chemical Reactors. *Chemical Engineering Science*, vol. 62, no 11, pp. 2979–2988, 2007a.

- H.-X. Li and Ch. Qi. *Spatio-Temporal Modeling of Nonlinear Distributed Parameter Systems : A Time/Space Separation Based Approach*. Springer, Dordrecht, 2011.
- Y. Liu. *Grey-Box Identification of Distributed Parameter Systems*. Doctoral Thesis, The Royal Institute of Technology, Sweden, 2005.
- W. Liu. *Elementary Feedback Stabilization of the Linear Reaction-Convection-Diffusion Equation and the Wave Equation*. Springer, Berlin, 2010.
- H. Lukepohl. *Handbook of Matrices*. Chichester, England : John Wiley & Sons ; 1996.
- A. Maldi. *Commande des Systèmes Décrits par des Equations aux Dérivées Partielles Hyperboliques*. Thèse de Doctorat en Automatique, Université Mouloud Mameri de Tizi-Ouzou, 2008.
- A. Maldi, M. Diaf and J.-P. Corriou. *Distributed Geometric Control of Wave Equation*. 17th IFAC World Congress, July 6-11, Seoul, Korea, 2008a.
- A. Maldi, M. Diaf and J.-P. Corriou. *Boundary Geometric Control of a Counter-Current Heat Exchanger*. *Journal of Process Control*, vol. 19, no 2, pp. 297–313, 2009.
- A. Maldi, M. Diaf and J.-P. Corriou. *Boundary Control of a Parallel-Flow Heat Exchanger by Input-Output Linearization*. *Journal of Process Control*, vol. 20, no. 10, pp. 1161-1174, 2010.
- A. Maldi and J.-P. Corriou. *Boundary Control of Nonlinear Distributed Parameter Systems by Input-Output Linearization*. *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 44, no. 1, pp. 10910-10915, 2011.
- A. Maldi and J.-P. Corriou. *Distributed Control of Nonlinear Diffusion Systems by Input-Output Linearization*. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 24, no. 3, pp. 389–405, 2012.
- A. Maldi and J.-P. Corriou. *Boundary Control of Linear Stefan Problem*. *Journal Process Control*, vol. 24, no. 6, pp. 939–946, 2014.
- A. Maldi and J.-P. Corriou. *Boundary Geometric Control of a Nonlinear Diffusion System with Time-Dependent Spatial Domain*. *Asian Journal of Control*, vol. 18, no. 5, pp. 1–10, 2016.
- E. H. Mamdani and S. Assilian. *An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller*. *International Journal of Man-Machine Studies*, vol. 7, pp. 1–13, 1975.
- S. V. Meleshko. *Methods for Constructing Exact Solutions of Partial Differential Equations. Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering*. Springer, New York, 2005.
- T. Meurer. *Control of Higher-Dimensional PDEs: Flatness and Backstapping Designs*. Springer, Berlin, 2011.
- Y. Morère. *Mise en Ouvre de Lois de Commande pour les Modèles Flous de Type Takagi-Sugeno*. Thèse de doctorat de l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2001.

- R. Padhi and S. A. Faruque. An Account of Chronological Developments in Control of Distributed Parameter Systems. *Annual Reviews in Control*, vol. 33, no. 1, pp. 59–68, 2009.
- C. V. Pao. *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*. Springer, New York, 1992.
- K. M. Passino and S. Yurkovich. *Fuzzy Control*. Addison-Wesley, New York, 1998.
- A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer, New York, 1983.
- C. Qi, H.-X. Li, S. Li, X. Zhao and F. Gao. A Fuzzy-Based Spatio-Temporal Multi-Modeling for Nonlinear Distributed Parameter Processes. *Applied Soft Computing*, vol. 25, no. 12, pp. 306–321, 2009.
- S. Raab, H. Habbi and A. Maida. Late-Lumping Fuzzy Boundary Geometric Control of Nonlinear Partial Differential Systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 30, no. 16, pp. 6473-6501, 2020.
- S. Raab, H. Habbi, A. Maida and K. Belharet. Fuzzy Distributed Control of the Forced Burgers-Fisher Equation under Periodic Boundary Conditions. The 4th Edition of the International Conference on Control, Automation and Diagnosis (ICCAD'20), October 7-9, Paris, 2020.
- A. Rachid. *Systèmes de Régulation*. Masson, Paris, 1997.
- W. H. Ray. *Advanced Process Control*. Butterworth, Boston, 1989.
- W. E. Schiesser. *The Numerical Method of Lines: Integration of Partial Differential Equations*. Academic Press, San Diego, 1991.
- X. Song, M. Wang, S. Song and J. Man. Dissipativity-Based Controller Design for Time-delayed T-S Fuzzy Switched Distributed Parameter Systems. *Complexity*, vol. 2018, Article ID 6215945, pp. 1–11, 2018.
- E. M. Stafford and G. Dowrick. Applications of Extended Operators to Diffusive Systems, *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 10, no. 5, pp. 527-537, 1977.
- N. Smaoui. Boundary and Distributed Control of the Viscous Burgers Equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*; vol. 182, no. 1, pp. 91–104, 2005.
- T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy Identification of Systems and its Application to Modeling and Control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, SMC-vol. 15*, no 1, pp. 116–132, 1985.
- T. Takagi and H. O. Wang. *Fuzzy Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. Addison-Wiley, New York, 2001.
- P. Vadasz. Analytical Solution to Nonlinear Thermal Diffusion Kirchhoff Versus Cole-Hopf Transformations. *Journal of Heat Transfer*, vol. 132, no. 12, pp. 121302.1–121302.6, 2010.

- Z. Wang. Exact Boundary Controllability for non-Autonomous Quasilinear Wave Equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 30, pp. 1311–1327, 2007.
- J.-W. Wang, H.-N. Wu, and H.-X. Li. Distributed Proportional-spatial Derivative Control of Nonlinear Parabolic Systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part B: Cybernetic*, vol. 42, no. 3, pp. 927–938, 2012.
- J.-W. Wang and H.-X. Li. Static Collocated Piecewise Fuzzy Control Design of Quasi-Linear Parabolic PDE Systems Subject to Periodic Boundary Condition. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 27, no 7, pp. 1479–1492, 2018.
- J. W. Wang and H. N. Wu. Exponential Pointwise Stabilization of Semi-linear Parabolic Distributed Parameter Systems via the Takagi-Sugeno Fuzzy PDE Model. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 26, no. 1, pp. 155–173, 2018.
- J. Wang. Dynamic Boundary Fuzzy Control Design of Semilinear Parabolic PDE Systems with Spatially Noncollocated Discrete Observation. *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 49, no. 8, pp. 3041–3051, 2019.
- J. Wang and H. Li. Static Collocated Piecewise Fuzzy Control Design of Quasi-Linear Parabolic PDE Systems Subject to Periodic Boundary Conditions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 27, no 7, pp. 1479–1492, 2019.
- A. M. Wazwaz. *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. Springer, Berlin, 2009.
- V. A. Wouwer and M. Zeitz. State Estimation in Distributed Parameter Systems. In: *Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS): Control Systems, Robotics and Automation*. EOLSS, Paris, France, 2003.
- A. V. Wouwer, P. Saucez and W. E. Schiesser. Simulation of Distributed Parameter Systems Using a Matlab-Based Method of Lines Toolbox: Chemical Engineering Applications. *Industrial and Engineering Chemical Research*, vol, 43, no, 14, pp. 3469–3477, 2004.
- W. Wu and C. Liou. Output Regulation of Nonisothermal Plug-Flow Reactors with Inlet Perturbations. *Computers and Chemical Engineering*, vol. 25, pp. 433–443, 2001.
- W. Wu and S.-Y. Ding. Model Predictive Control of Nonlinear Distributed Parameter Systems Using Spatial Neural-Network Architectures. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, vol, 47, no 19, pp. 7264–7273, 2008.
- H.-N. Wu, J.-W. Wang and H.-X. Li. Fuzzy Boundary Control Design for a Class of Nonlinear Parabolic Distributed Parameter Systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*; vol. 22, no 3, pp. 642–652, 2014.
- H.-N. Wu and H.-Y. Zhu. Guaranteed Cost Fuzzy State Observer Design for Semilinear Parabolic PDE Systems Under Pointwise Measurements. *Automatica*; vol. 85, no. 11, pp. 53–60, 2017.

H.-N. Wu, H.-D. Wang and H.-X. Li. Guo. Disturbance Rejection Fuzzy Control for Nonlinear Parabolic PDE Systems via Multiple Observers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*; vol. 24, no. 6, pp. 1334–1348, 2015.

K. Yuan and S. Fei. Partial Synchronisation of the Distributed Parameter System with Time Delay via Fuzzy Control. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, vol. 31, no. 1, pp. 51–72, 2013.

L. A. Zadeh. Fuzzy Sets. *Information and Control*, vol. 8, no. 3, pp. 338–353, 1965.

L. A. Zadeh. Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 100, Supplement 1, pp. 9-34, 1978.

X. Zhang and H. Wu. Fuzzy Stabilization Design for Semilinear Parabolic PDE Systems with Mobile Actuators and Sensors. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 28, no. 3, pp. 474-486, 2019.