

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA-BOUMERDES



Faculté de Technologie

Département Ingénierie des Systèmes Electriques

**Mémoire de Master**

Présenté par

**HAMADACHE Issam**

**HAMADACHE Younes**

**Filière : Automatique**

**Spécialité : Automatique et Informatique Industrielle**

---

## **Modélisation et commande d'un robot manipulateur mobile**

---

**Soutenu le 07 /07 /2022 devant le jury composé de :**

MILOUDI	Lalia	MCB	UMBB	Présidente
GABOUR	Nour El houda	MAB	UMBB	Examinatrice
RIACHE	Samah	MCB	UMBB	Rapporteur

**Année Universitaire : 2021/2022**

## ***Remerciement***

*Nous tenons tout d'abord à remercier en premier lieu Allah, le tout puissant, de nous avoir donné autant la santé, de courage, de patience et surtout la volonté pour terminer ce travail.*

*Nous tenons aussi à exprimer nôtres sincères remerciements à notre promoteur Madame **RIACHE Samah**, notre profonde gratitude et toutes nos reconnaissances pour votre soutien scientifique, pour votre confiance, pour votre disponibilité, pour vos multiples conseils qui ont été pour nous une source d'information et d'encouragement, ce travail n'a pas été fait sans votre aide et votre attention permanente.*

*Nos remerciements vont également à tous les enseignants et tous le corps formateur de université M'Hamed Bougara de Boumerdès qui nous ont aidé à améliorer nos compétence et ils nous ont supporté tout le long de ce cycle universitaire.*

*Nos reconnaissances vont aussi à messieurs les membres de jury, pour l'honneur qu'ils auront fait en acceptant de juger ce travail.*

*Nous exprimons notre profonde reconnaissance à ceux qui se sont sacrifiés corps et âmes dans l'espoir de voir un jour le fruit de leurs efforts nos très chers parents, ainsi qu'à toute notre famille pour leur soutien et encouragement qui ont permis l'accomplissement de ce travail.*

## *Dédicace*

*A mon très cher frère, mon jumeau et mon binôme **Issam**, Les mots ne suffisent guère pour exprimer l'attachement, l'amour et l'affection que je porte pour*

*Vous, ainsi je dédie mes frères **Khaled, Anes et Asmaa**.*

*A mes chers amis : Mohammed El Fatah, Hocine, Walid, Chams Eddine, Sidahmed, Tawfik, Akram, mouad, Sid Ali, Salim, Yacine.*

**Younes**

*Je dédie ce travail :*

*A ma chère mère et mon cher père,*

*A mon très cher frère, mon jumeau et mon binôme **Younes**.*

*A mes chers frères **Khaled, Anes** et ma sœur **Asmaa**.*

*A mes chers amis : Mohammed El Fatah, Hocine, Akram,*

*Chams Eddine, Walid, Amine, Ayoub, Islam.*

**Issam**

### *Résumé*

Le travail développé dans ce mémoire consiste à étudier la modélisation d'un robot manipulateur mobile et trouver une commande robuste pour avoir la précision et la stabilité de ce robot. Nous avons calculé un modèle géométrique, cinématique et dynamique avec une méthode pour résoudre le problème des contraintes non holonome.

Ensuite, nous avons appliqué une commande linéaire classique PID et une autre commande non linéaire qui est le mode glissant, puis, nous avons passé au mode glissant d'ordre supérieur pour soulever le problème de broutement.

**Mots clés :** Manipulateur mobile, Contrainte non holonome, PID, Mode glissant, Broutement, Système non linéaire.

### *Abstract*

The work developed in this memory is to study a robot manipulator mobile modeling and find a robust control to have the precision and stability of this robot. We have calculated a geometric, kinematical and dynamic model with a method to solve the problem of non-holonomic constraints.

Then, we have applied a classic linear command PID and another non-linear command, which is the sliding mode control, then, we have gone to high order sliding mode control to solve the problem of chattering.

**Key words:** Manipulator mobile, non-holonomic constraint, PID, Sliding mode control, Chattering, Non-linear system.

### *ملخص*

العمل المطور في هذه المذكرة هو دراسة نمذجة روبوت متحرك بذراع الي وإيجاد تحكم الي للحصول على دقة وتوازن هذا الروبوت. قمنا بحساب نموذج هندسي، كينماتي وديناميكي مع طريقة لحل مشكلة القيود non holonome .

بعد ذلك، قمنا بتطبيق تحكم كلاسيكي خطي PID وآخر غير خطي يتمثل في النمط الانزلاقي، بعدها، تطرقنا إلى نمط انزلاقي ذو الدرجة المرتفعة لحل مشكلة التردد.

**كلمات مفتاحية:** متحرك بذراع الي، القيود non holonome، PID، النمط الانزلاقي، التردد، الانظمة الغير خطية.

## *Sommaire*

<b>Introduction générale</b> .....	1
<b>Chapitre 1 : généralités sur la robotique</b>	
1. Introduction.....	5
2. Définition.....	5
2.1. Définition de robot.....	5
2.2. Définition de robotique.....	5
3. Historique.....	5
4. Composants d'un système robotique.....	9
4.1. Unité opérationnelle.....	10
4.2. Unité informationnelle.....	10
5. Chaîne cinématique.....	10
6. Le degré de liberté.....	10
7. Classification des robots.....	11
7.1. Les robots manipulateurs.....	11
7.1.1. Concept de base.....	11
7.1.2. Espace de travail.....	13
7.1.3. Classification géométrique des manipulateurs.....	13
7.2. Les robots mobiles.....	16
7.2.1. Les robots mobiles à roues.....	16
7.2.2. Les robots mobiles à pattes.....	17
7.2.3. Les robots mobiles à chenilles.....	17
7.2.4. Les robots volants (drones).....	17
7.3. Les robots manipulateurs mobiles.....	18
7.3.1. Les humanoïdes.....	18
7.3.2. Les manipulateurs mobiles sous-marins.....	18
7.3.3. Les manipulateurs mobiles à roues.....	19
8. La redondance.....	20
9. Conception de système.....	20
9.1. Partie électrique.....	20
9.1.1. Carte arduino.....	20
9.1.2. Moteur à courant continu.....	22

9.1.3. Servomoteur.....	22
9.1.4. Potentiomètre.....	23
9.1.5. Alimentation.....	23
9.1.6. Fils de connexion.....	24
9.2. Partie mécanique.....	24
10. Conclusion.....	24

### **Chapitre 2 : Modélisation d'un robot manipulateur mobile**

1. Introduction.....	26
2. Positionnement.....	26
2.1. Les coordonnées opérationnelles.....	26
2.2. Les coordonnées généralisées.....	27
3. Matrice de transformation homogène.....	27
3.1. Les coordonnées homogènes.....	27
3.2. Transformation de vecteur.....	28
3.3. Matrice de translation homogène.....	29
3.4. Matrice de rotation homogène.....	30
4. Méthodologies de modélisation des robots.....	31
5. Description de système.....	32
6. Le modèle géométrique du manipulateur mobile.....	32
6.1. Principe.....	33
6.2. Modèle de Denavit-Hartenberg DH.....	33
6.3. Modèle géométrique direct MGD.....	34
6.3.1. Modèle géométrique du bras manipulateur.....	34
6.3.2. Modèle géométrique direct d'une plateforme mobile.....	36
6.3.3. Modèle géométrique direct de robot manipulateur-mobile.....	38
6.4. Le modèle géométrique inverse MGI du système.....	38
7. Modèle cinématique du manipulateur mobile.....	39
7.1. Modèle cinématique direct.....	39
7.2. Calcul de la matrice Jacobéenne.....	39
7.3. Jacobéenne inverse.....	39
7.4. Modèle cinématique d'un robot manipulateur mobile.....	40
8. Modèle dynamique d'un manipulateur-mobile.....	40
8.1. Modèle dynamique.....	40

8.2. Formulation de Lagrange.....	41
8.3. Forme générale de modèle dynamique.....	41
8.4. Les contraintes non holonomes.....	43
9. Conclusion.....	44

### **Chapitre 3 : Commande d'un robot manipulateur mobile**

1. Introduction.....	46
2. Régulation.....	46
3. Commande linéaire classique PID.....	47
3.1. Définition.....	47
3.2. Proportionnel.....	47
3.3. Intégral.....	48
3.4. Dérivateur.....	48
3.5. Loi de commande classique.....	49
4. La commande par Mode Glissant.....	50
4.1. Propriétés de mode glissant.....	51
4.2. Conception de la commande par mode glissant.....	51
4.3. Choix de la surface de glissement.....	52
4.4. Etablissement de condition d'existence de convergence.....	52
4.5. Le calcul de loi de commande.....	53
4.6. La commande équivalente.....	53
4.7. La commande discontinue.....	54
4.8. La stabilité de système.....	55
4.9. Le broutement (chattering).....	56
4.10. Solution pour atténuer le phénomène de broutement.....	57
4.10.1. Solution de couche limite.....	57
4.10.2. Solution par lois d'approche.....	57
4.10.3. Solution par mode glissante d'ordre supérieur.....	58
5. Conclusion.....	62

### **Chapitre 4 : Résultats de simulation**

1. Introduction.....	64
2. Génération de trajectoire.....	64
3. Commande de manipulateur mobile par la commande classique PID.....	65

## Sommaire

---

3.1. Résultats de simulation.....	66
3.2. Test de robustesse.....	69
4. Commande par mode glissant.....	70
4.1. Les surfaces de glissement.....	71
4.2. La commande équivalente.....	71
4.3. Résultats de simulation.....	72
4.4. Solution pour le broutement.....	79
4.4.1. Solution de couche limite.....	79
4.4.2. Solution par les lois d'approche.....	82
4.4.3. Solution par le mode glissant d'ordre 2.....	84
4.5. Etude comparative.....	86
4.6. Test de robustesse.....	87
5. Conclusion.....	88
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>89</b>
<b>Webographie et Bibliographie.....</b>	<b>92</b>
<b>Annexe A.....</b>	<b>96</b>
<b>Annexe B.....</b>	<b>103</b>

*Liste des figures :*

<b>Figure 1.1</b> Chien électrique.....	6
<b>Figure 1.2</b> Philidog.....	6
<b>Figure 1.3</b> Tortue cybernétique.....	6
<b>Figure 1.4</b> Premier robot industriel 1959.....	7
<b>Figure 1.5</b> LUNOKHOD1 1970.....	7
<b>Figure 1.6</b> Shaky 1967.....	7
<b>Figure 1.7</b> Robot humanoïde Wabat-1.....	7
<b>Figure 1.8</b> Robot puma 1978.....	8
<b>Figure 1.9</b> Robodoc.....	8
<b>Figure 1.10</b> Robot Cog 1993.....	8
<b>Figure 1.11</b> Robot AIBO-ERS-110 Sony 1999.....	8
<b>Figure 1.12</b> Robot Sojourner.....	8
<b>Figure 1.13</b> Robot Opportunity.....	8
<b>Figure 1.14</b> Robot Curiosity.....	8
<b>Figure 1.15</b> Robot chien Aibo.....	9
<b>Figure 1.16</b> Robot EffiBOT.....	9
<b>Figure 1.17</b> Robot Ameca.....	9
<b>Figure 1.18</b> Structure fonctionnelle d'un système robotique.....	9
<b>Figure 1.19</b> Types de structures.....	10
<b>Figure 1.20</b> Degré de liberté.....	11
<b>Figure 1.21</b> Architecteur d'un robot manipulateur.....	11
<b>Figure 1.22</b> Représentation d'une articulation rotoïde.....	12
<b>Figure 1.23</b> Représentation d'une articulation prismatique.....	12
<b>Figure 1.24</b> Moteur pas à pas.....	13
<b>Figure 1.25</b> Moteur à vitesse.....	13
<b>Figure 1.26</b> Structure cartésienne (robot Gantry).....	14
<b>Figure 1.27</b> Structure sphérique.....	14
<b>Figure 1.28</b> Structure dite SCARA.....	15
<b>Figure 1.27</b> Structure anthropomorphe.....	15
<b>Figure 1.30</b> Robot mobile à roues.....	16
<b>Figure 1.31</b> Robot mobile à patte.....	17

<b>Figure 1.32</b> Robot à chenilles.....	17
<b>Figure 1.33</b> Robot Volant.....	17
<b>Figure 1.34</b> Robot Nao (Aldebaran Robotics) 2006.....	18
<b>Figure 1.35</b> Robot sous-marin Bathy Boi.....	18
<b>Figure 1.36</b> Robot omnidirectionnel.....	19
<b>Figure 1.37</b> Robot tricycle.....	19
<b>Figure 1.38</b> Robot de type voiture.....	19
<b>Figure 1.39</b> Carte arduino Mega 2560.....	21
<b>Figure 1.40</b> Moteur à courant continu.....	22
<b>Figure 1.41</b> Principe d'un moteur à courant continu.....	22
<b>Figure 1.42</b> Servomoteurs.....	23
<b>Figure 1.43</b> Potentiomètre.....	23
<b>Figure 1.44</b> Batterie 12V.....	24
<b>Figure 1.45</b> Chargeur 12V.....	24
<b>Figure 1.46</b> Fils de connexion.....	24
<b>Figure 2.1</b> Positionnement d'un point.....	28
<b>Figure 2.2</b> Positionnement d'un vecteur.....	29
<b>Figure 2.3</b> Représentation d'une translation homogène.....	29
<b>Figure 2.4</b> Représentation d'une rotation autour de x.....	30
<b>Figure 2.5</b> Représentation d'une rotation autour de y.....	30
<b>Figure 2.6</b> Représentation d'une rotation autour de z.....	31
<b>Figure 2.7</b> Modèle géométrique.....	33
<b>Figure 2.8</b> Paramètre géométrique de passage.....	34
<b>Figure 2.9</b> Modèle géométrique direct.....	34
<b>Figure 2.10</b> Modèle géométrique d'un bras manipulateur.....	35
<b>Figure 2.11</b> Changement de repaire de plateforme.....	36
<b>Figure 2.12</b> Modèle géométrique inverse.....	38
<b>Figure 2.13</b> Schéma de manipulateur mobile dans le plan X-Z.....	41
<b>Figure 3.1</b> Schéma bloqué de régulation.....	46
<b>Figure 3.2</b> Modèle générale d'un régulateur PID.....	47
<b>Figure 3.3</b> Proportionnel.....	48
<b>Figure 3.4</b> Intégrateur.....	48

<b>Figure 3.5</b> Dérivateur.....	49
<b>Figure 3.6-a-</b> Convergence de la trajectoire du système du point initial $x(t_0)$ vers l'origine du plan de phase.....	50
<b>Figure 3.6-b-</b> Principe de la convergence de système vers la surface de glissement.....	51
<b>Figure 3.7</b> Schéma bloc de la commande par mode glissant.....	53
<b>Figure 3.8</b> Fonction Sign.....	55
<b>Figure 3.9</b> Phénomène de broutement.....	56
<b>Figure 3.10</b> Fonction de saturation.....	57
<b>Figure 3.11</b> La convergence de l'algorithme PCL dans le plan de phase.....	59
<b>Figure 3.12</b> La convergence de l'algorithme Twisting dans le plan de phase.....	60
<b>Figure 3.13</b> La convergence de l'algorithme super Twisting dans le plan de phase.....	61
<b>Figure 3.14</b> La convergence de l'algorithme QC dans le plan de phase.....	61
<b>Figure 4.1</b> Schéma bloc de modèle dynamique avec contrôleur PID.....	65
<b>Figure 4.2</b> Schéma bloc des contraintes non holonome.....	66
<b>Figure 4.3</b> : Les trajectoires avec PID.....	67
<b>(a, b, c, d)</b> Les trajectoires de $\theta_r$ et $\theta_{rd}$ ; $\theta_l$ et $\theta_{ld}$ ; $\theta_1$ et $\theta_{1d}$ ; $\theta_2$ et $\theta_{2d}$	
<b>(e)</b> trajectoire de plateforme	
<b>Figure 4.4</b> : Les erreurs avec PID.....	68
<b>(a, b, c, d)</b> L'erreur de position $\theta_r$ ; $\theta_l$ ; $\theta_1$ ; $\theta_2$	
<b>Figure 4.5</b> : Les dérivées de trajectoire (vitesses) avec PID.....	69
<b>(a, b, c, d)</b> les dérivées des trajectoires de $\theta_r$ ; $\theta_l$ ; $\theta_1$ ; $\theta_2$	
<b>Figure 4.6</b> Vitesse linéaire et angulaire de plateforme avec PID.....	69
<b>Figure 4.7</b> : Test de robustesse avec PID.....	70
<b>(a, b, c, d)</b> L'erreur de position $\theta_r$ ; $\theta_l$ ; $\theta_1$ ; $\theta_2$	
<b>Figure 4.8</b> Schéma bloc de modèle dynamique de robot avec un SMC.....	74
<b>Figure 4.9</b> : Les trajectoires et les positions avec SMC.....	75
<b>(a, b, c, d)</b> Les trajectoires de $\theta_r$ et $\theta_{rd}$ ; $\theta_l$ et $\theta_{ld}$ ; $\theta_1$ et $\theta_{1d}$ ; $\theta_2$ et $\theta_{2d}$	
<b>(e)</b> trajectoire de plateforme	
<b>Figure 4.10</b> : Les erreurs avec SMC.....	76
<b>(a, b, c, d)</b> L'erreur de position $\theta_r$ ; $\theta_l$ ; $\theta_1$ ; $\theta_2$	
<b>Figure 4.11</b> : Les surfaces de glissement.....	77
<b>(a, b, c, d)</b> les surfaces de glissement de $\theta_r$ ; $\theta_l$ ; $\theta_1$ ; $\theta_2$	

<b>Figure 4.12</b> : Les commandes par SMC.....	78
(a, b, c, d) La commande $u_1$ de $\theta_r$ ; $u_2$ de $\theta_l$ ; $\tau_1$ de $\theta_1$ ; $\tau_2$ de $\theta_2$	
<b>Figure 4.13</b> : Les vitesses avec SMC.....	79
(a, b) Vitesse angulaire de roues droit et gauche	
(c, d) Vitesse angulaire de bras 1 et bras 2	
(e) Vitesse liniaire et angulaire de plateforme	
<b>Figure 4.14</b> : Les trajectoires par méthode de saturation.....	80
(a, b, c, d) Les trajectoires de $\theta_r$ et $\theta_{rd}$ ; $\theta_l$ et $\theta_{ld}$ ; $\theta_1$ et $\theta_{1d}$ ; $\theta_2$ et $\theta_{2d}$	
<b>Figure 4.15</b> : Les erreurs par méthode de saturation.....	81
(a, b, c, d) L'erreur de position $\theta_r$ ; $\theta_l$ ; $\theta_1$ ; $\theta_2$	
<b>Figure 4.16</b> : Les commandes par méthode de saturation.....	81
(a, b, c, d) La commande $u_1$ de $\theta_r$ ; $u_2$ de $\theta_l$ ; $\tau_1$ de $\theta_1$ ; $\tau_2$ de $\theta_2$	
<b>Figure 4.17</b> : Les trajectoires par méthode des lois d'approche.....	82
(a, b, c, d) Les trajectoires de $\theta_r$ et $\theta_{rd}$ ; $\theta_l$ et $\theta_{ld}$ ; $\theta_1$ et $\theta_{1d}$ ; $\theta_2$ et $\theta_{2d}$	
<b>Figure 4.18</b> : Les erreurs par méthode des lois d'approche.....	83
(a, b, c, d) L'erreur de position $\theta_r$ ; $\theta_l$ ; $\theta_1$ ; $\theta_2$	
<b>Figure 4.19</b> : Les commandes par méthode des lois d'approche.....	84
(a, b, c, d) La commande $u_1$ de $\theta_r$ ; $u_2$ de $\theta_l$ ; $\tau_1$ de $\theta_1$ ; $\tau_2$ de $\theta_2$	
<b>Figure 4.20</b> : Les trajectoires par méthode de Twisting et super Twisting.....	85
(a, b, c, d) Les trajectoires de $\theta_r$ et $\theta_{rd}$ ; $\theta_l$ et $\theta_{ld}$ ; $\theta_1$ et $\theta_{1d}$ ; $\theta_2$ et $\theta_{2d}$	
<b>Figure 4.21</b> : Les erreurs par méthode de Twisting et super Twisting.....	85
(a, b, c, d) L'erreur de position $\theta_r$ ; $\theta_l$ ; $\theta_1$ ; $\theta_2$	
<b>Figure 4.22</b> : les commandes par méthode Twisting et super Twisting.....	86
(a, b, c, d) La commande $u_1$ de $\theta_r$ ; $u_2$ de $\theta_l$ ; $\tau_1$ de $\theta_1$ ; $\tau_2$ de $\theta_2$	
<b>Figure 4.23</b> : test de robustesse de SMC avec 2 <sup>ème</sup> loi d'approche.....	88
(a, b, c, d) L'erreur de position $\theta_r$ ; $\theta_l$ ; $\theta_1$ ; $\theta_2$	
<b>Figure I.1</b> Schéma de manipulateur mobile dans le plan X-Y.....	97
<b>Figure I.2</b> Schéma de manipulateur mobile dans le plan X-Z.....	97
<b>Figure II.1</b> Structure mécanique de plateforme avec SolidWorks.....	103
<b>Figure II.2</b> Structure mécanique de roue avec SolidWorks.....	104

## Liste des figures

---

<b>Figure II.3</b> Structure mécanique de moteur a vitesse avec SolidWorks.....	104
<b>Figure II.4</b> Structure mécanique de bras manipulateur avec SolidWorks.....	105
<b>Figure II.5</b> Structure mécanique de servomoteur avec SolidWorks.....	105
<b>Figure II.6</b> Structure mécanique de manipulateur mobile avec SolidWorks.....	106
<b>Figure II.7</b> Schéma bloc de modèle géométrique.....	106
<b>Figure II.8</b> Simulation de manipulateur mobile avec MATLAB.....	107

*Liste des tableaux :*

<b>Tableau 1.1</b> Synthèse des caractéristiques d'Arduino.....	21
<b>Tableau 2.1</b> Les paramètres de système.....	32
<b>Tableau 2.2</b> Les paramètres de Denavit-Hartenberg de bras manipulateur.....	35
<b>Tableau 2.3</b> Les paramètres D-H de mobile.....	37
<b>Tableau 3.1</b> Tableau de résumé de PID.....	50
<b>Tableau 4.1</b> Résultats en utilisant SSE.....	87

### *Abréviations :*

**AEMT** : Absolute Error Multiple with the Time.

**ASEA** : Allmanna Svenska Elektriska Aktiebolaget.

**B.C** : Before Christ.

**CES** : Consumer Electronics Show.

**DDL** : Degré De Liberté.

**DH** : Denavit-Hartenberg.

**EEPROM** : Electrically-Erasable Programmable Read-Only Memory.

**E/S** : Entrée/Sortie.

**ICSP** : programmation "in-circuit".

**MDD** : Modèle Différentiel Direct.

**MGD** : Modèle Géométrique Direct.

**MGI** : Modèle Géométrique Inverse.

**MIT** : Massachusetts Institute of Technology.

**NASA** : National Aeronautics and Space Administration.

**P** : Prismatique.

**PCL** : Prescribed Convergence Law.

**PID** : Proportionnelle, Intégrateur, Dérivateur.

**PUMA** : Programmable Universal Machine for Assembly.

**PWM** : Pulse Width Modulation (largeur d'impulsion modulée).

**QC** : Quasi-Continue.

**R** : Rotoïde.

**R.U.R** : Rossum's Universal Robot.

**SCARA** : Selective Compliance Assembly Robot Arme.

## **Abréviations**

---

**S.M.A** : Système Mécanique Articulé.

**SMC** : Sliding Mode Controller.

**SRAM** : Static Random Access Memory.

**SSE** : Sum of Square Control.

**STW** : Super Twisting.

**TWG** : Twisting.

**UART** : Universal Asynchronous Receiver Transmitter (port série matériel).

**USB** : Universal Serial Bus.

---

# **INTRODUCTION GENERALE**

---

## Introduction générale

---

Les chercheurs regardent toujours une création d'un monde parfait rend plus facile la vie humaine. Cette dernière conduite à rechercher des mécanismes pour réalisations techniques à automatiser tout processus dans la vie quotidienne. Cet objectif de l'automatisation construit donc l'image du robot, une machine qui peut faire les missions humaines.

La demande d'utilisation des robots est dominante dans toutes les domaines de vie, de plus petites aux plus grandes industries comme le transport, l'assemblage, le soudage...etc. la nécessité de la robotique augmente plus précisément dans les zones où l'homme ne peut pas y accéder ou bien dans les milieux dangereux. La robotique permis d'augmenter la productivité par contre diminuer la main d'œuvre grâce à ses capacités à supporter des tâches qui sont délicat ou même impossible pour l'être humain. Aujourd'hui, dans tous les domaines les entreprise préfère d'utiliser les robots grâce à sa propriété de travailler pendant longtemps sans arrêts et sans plaintes. Dans les domaines qui nécessitent une très grande pression, le taux d'erreurs très faible.

Au début, les robots ont eu des tâches simples, le développement dans plusieurs secteurs, a conduit à une création des techniques de commande pour faciliter le contrôle des robots avec une grande précision. Comme dans la médecine (des robots utilisés en mode de co-manipulation série pour la suture chirurgicale contrôler par distance), ou dans la robotique scientifique par exemple pour l'exploration de l'espace (aérobot), des fonds marins (robot sous-marine autonome), dans les laboratoires d'analyse (robotique de laboratoire)...etc.

L'évolution de la technologie de la robotique permet d'avoir un passage dans les robots d'un bras à bras fixe à un manipulateur mobile. Ce dernier a la capacité de faire plusieurs missions dans un grand espace de travail avec grand vitesse.

Notre travail a pour objectif de faire une modélisation d'un robot de type manipulateur mobile qui est un système non linéaire sous-actionné, ce type de robot nécessite une commande adéquate. Pour cela l'étude doit être sur plusieurs méthodes de commande pour trouver la meilleure qui garantit la stabilité et la robustesse de notre robot.

Ce mémoire est articulé autour de quatre chapitres organisés de la manière suivante.

Le premier chapitre contient un historique sur la robotique et des définitions des termes et des concepts reliées avec notre travail avec une présentation des composants de réalisation de robot (partie électrique et mécanique).

## **Introduction générale**

---

Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation géométrique, cinématique et dynamique du notre robot

Dans le troisième chapitre, on va présenter les commandes linéaires (commande classique PID) et non linéaire (commande par mode glissant) et avoir les lois et les propriétés de chaque commande.

Dans le quatrième chapitre, on va appliquer les commandes conçues sur le modèle dynamique de manipulateur mobile, et faire des tests de simulation sur l'interface de MATLAB/SimuLink.

Le mémoire se termine évidemment par une conclusion générale.

---

# **Chapitre 1**

---

**Généralités sur la robotique**

## **1- Introduction :**

Le développement rapide de l'industrie a créé un champ de difficulté inattendue à être traité par le corps humain, cela a fait le besoin d'invention des robots qui peuvent faire des actions nécessitant la force et l'effort de façon rapide, répétitif et dans des milieux dangereux.

Nous introduisons dans ce chapitre une présentation générale sur la robotique et tout ce qui est lié au terme « manipulateur mobile ».

En commençant par des définitions et un profil historique sur ce domaine. Ensuite, on parle sur les composants d'un système robotique. Et enfin, on cite les différents types des robots et les composants de chaque type.

## **2- Définitions :**

### **2-1- Définition de robot :**

Le mot robot a été dérivé en 1920 du mot technique ROBOTA ce qui signifie “ travail obligatoire ” ou bien tout ce qu'il fait est le travail et seulement le travail.

D'après la ROUSSE on dit le mot robot est tout appareil automatique peut se substituer à l'homme pour exécuter diverses actions [1]. En autre définition : un robot est un ensemble des articulateurs et des capteurs mécaniques gérés par des commandes qui créent une machine automatique capable d'effectuer des tâches, des opérations ou bien des travaux déterminés en s'adaptant à leur environnement.

### **2-2- Définition de robotique :**

La filière de la technologie fait les études et les techniques de conception de mise en œuvre et de construction des machines automatiques et des robots. La robotique regroupe par conséquent tout ce qu'il aide à créer les robots réels ou virtuels.

## **3- Historique :**

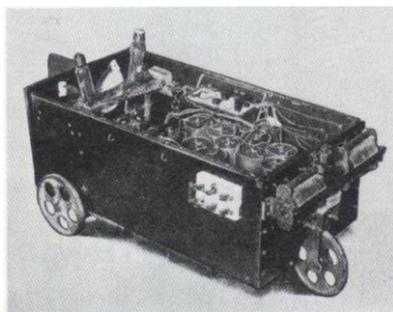
L'idée de fabriquer des machines revenant à l'antiquité, presque près de 300 ans avant B.C, le philosophe grec Aristote (384-322 B.C) a dit la notion d'avoir des machines qui travaillent à notre service pour accomplir des tâches a commencé. Si nous considérons que les mécanismes comme la première étape dans l'évolution des robots, la roue est la première œuvre technique qu'elle a été inventée et apparue les années avant le B.C [2]. La clepsydre ou l'horloge à l'eau qu'elle a été introduite par les babyloniens en Égypte vers 1600 B.C a établi le concept du robot. En 125, Héros d'Alexandrie a créé des automates mus par l'eau.

De la 16<sup>ème</sup> jusqu'au 18<sup>ème</sup> siècle, la base des machines a été formée par les automates qui ne se contentent pas d'effectuer des mouvements programmés, mais ils ont été contrôlés par le côté mécanique, tel que la machine à calculer mécanique de Blaise Pascal (1641), le camarade mécanique de Jacquet de Vaucanson (1739), les automates de Pierre Jacquet-Droz (1774) qu'ils sont capables d'écrire, de dessiner et de jouer de la musique [3]. En 1920 le mot robot est apparu pour la première fois sous la plume du dramaturge Karel Capek dans sa pièce de théâtre R.U.R (Rossum's Universal Robot).

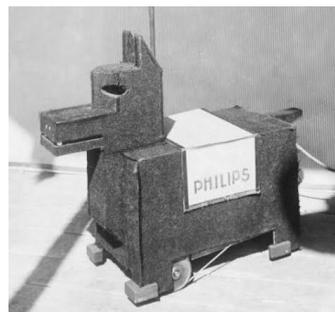
Au début des années 1900, les cybernétiques sont apparues :

- Le chien électrique de John Hammond et Benjamin Miessenr (1915).
- Philidog, le chien d'Henri Piraux (1928).
- Les tortues cybernétiques de William Gray Walter (1950) étaient équipées de capteurs tactiles et lumineux.
- Le renard électronique d'Albert Ducrocq (1953).

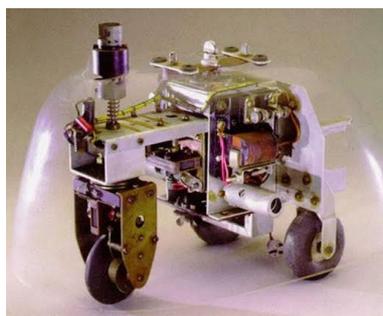
Ces robots sont conçus comme un obstacle des animaux.



**Figure 1.1** Chien électrique [4].



**Figure 1.2** Philidog [5].



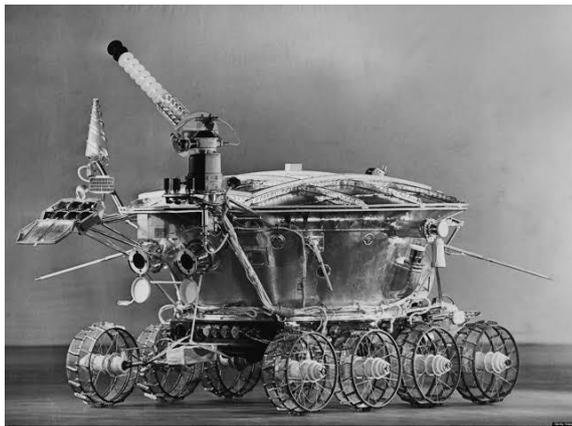
**Figure 1.3** Tortue cybernétique [6].

En 1956, John McCarthy a publié ces travaux qui définissent le terme d'« intelligence artificielle » [7]. Uni-mat, le premier robot industriel (1959), est un robot manipulateur avec des entraînements de pivot hydraulique il a commencé à travailler en 1961 dans la production automobile.



**Figure 1.4** Premier robot industriel 1959 [8].

Les robots mobiles ont été connus dès les années 1960, tel les rovers au astro-mobiles LUNOKHOD1 qu'il développe par les russes. Shakey, le premier robot mobile contrôlé par l'ordinateur (1967).



**Figure 1.5** LUNOKHOD1 1970 [9].



**Figure 1.6** Shakey 1967 [10].

En 1973, les développeurs créent pour la première fois un robot contient un système de traitement d'image. Le premier robot humanoïde appelé Wabot-1 a été développé dans la même année.



**Figure 1.7** Robot humanoïde Wabot-1 [11].

En 1974, la société ASEA a lancé des robots programmés par des microprocesseurs ( $\mu$ p). La NASA a développé des rovers dans le programme Apollo les dernières années de 1970 tel Sojourner (1996). D'après les années 1990, le nombre des robots dans le monde dépassé 100000 robots et de nombreuses robots célèbres ont été créé tel que :

- le robot PUMA (Programmable Universal Machine for Assembly) en 1978.
- Robodoc (1992), premier robot pour une opération de la hanche.
- Cog (1993), humanoïde robotise groupe développée en MIT (Massachusetts Institute of Technology).
- AIBO-ERS-110, Sony (1999).



Figure 1.8 Robot puma 1978 [12].



Figure 1.9 Robodoc [13].

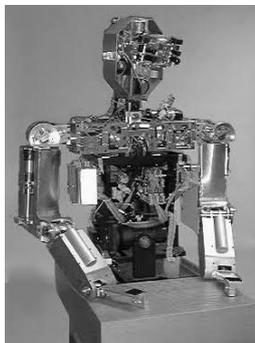


Figure 1.10 Robot Cog 1993 [14].



Figure 1.11 Robot AIBO-ERS-110 Sony 1999 [15].



Figure 1.12 Sojourner [16].



Figure 1.13 Opportunity [17].



Figure 1.14 Curiosity [18].

- Les rovers SPIRIT et Opportunity sur Mars, NASA (2003), le robot Serpent Amphibie (2004) et le rover Curiosity sur Mars, NASA (2012).

En 2015, les ventes des robots dépassée 250000 unités.

- En 2018, Sony présenté le robot chien Aibo au Consumer Electronics Show (CES) à Las Vegas le 12 janvier 2018.
- Effidence a conçu EffiBOT crée en 2020, est un chariot robotisé autonome qui agit comme un véritable assistant logistique.
- Le robot humanoïde Ameca était présenté en 2022 au CES par les britanniques, était permit les robots le plus avancé dans le monde.



Figure 1.15 Robot chien Aibo [19]. Figure 1.26 Robot EffiBOT [20]. Figure 1.17 Robot Ameca [21].

#### 4- Composants d'un système robotique :

Un système robotique est l'ensemble des composants mécaniques, électriques, électromécaniques et hydrauliques qu'ils sont associé pour former un robot.

L'autonomie des robots présente une interaction entre deux unités : opérationnelle et informationnelle comme indiqué dans la figure ci-dessous :

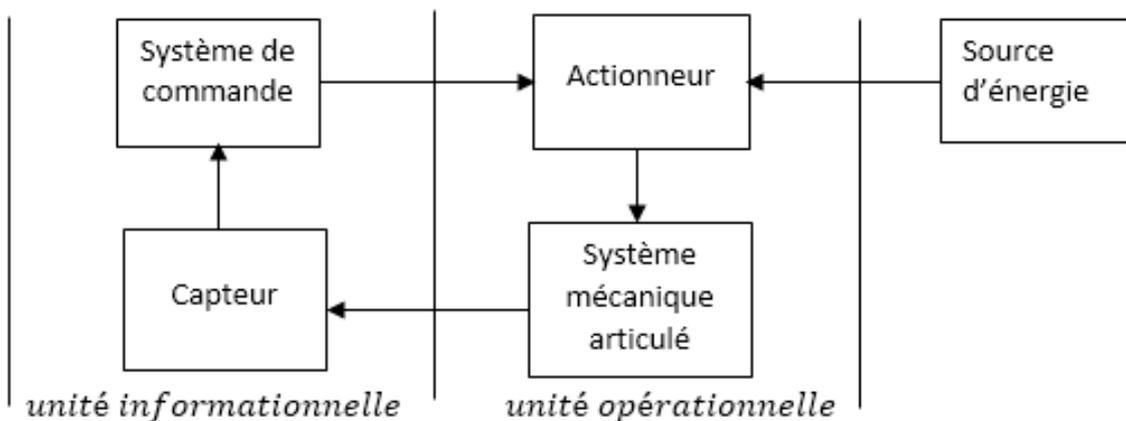


Figure 1.18 Structure fonctionnelle d'un système robotique.

#### 4.1. Unité opérationnelle :

C'est la partie de système qui mise en œuvre les commandes de l'unité informationnelle. Elle consiste les actionneurs et la structure de robot qui est appelé le système mécanique articulé (S.M.A).

#### 4.2. Unité informationnelle :

Elle Envoie des commandes à l'unité opérationnelle après avoir traité une information reçue par le capteur.

### 5- Chaîne cinématique :

La chaîne cinématique présent la structure mécanique de système, donc on parle sur le nombre de corps attacher aux liaisons pour former le corps générale de robot.

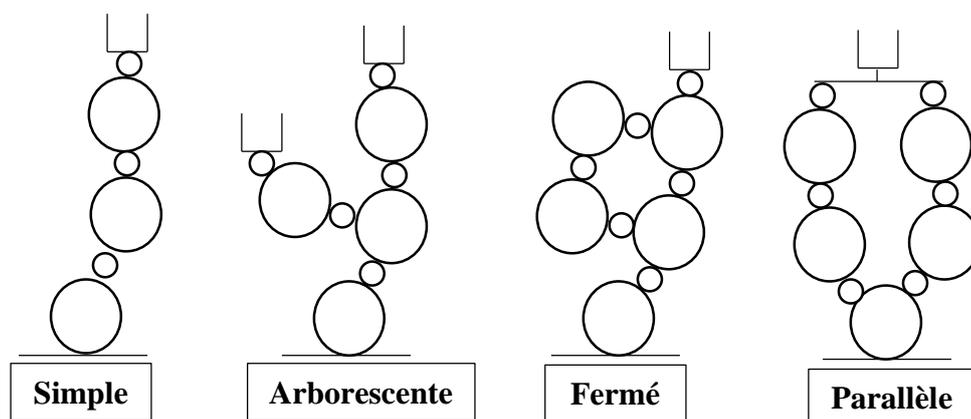


Figure 1.19 Types de structures.

### 6- Le degré de liberté (DDL) :

Le degré de liberté (ddl) est le nombre de déplacements élémentaire indépendants autorisés par cette liaison. D'autre définition, c'est le nombre de paramètres indépendants qui corrige la situation d'un effecteur.

Le degré de liberté détermine un endroit où il peut se plier ou faire une rotation ou une translation. On peut identifier le nombre de de degré de liberté par le nombre des articulateurs. Le positionnement d'un solide dépend à son degré de liberté.

En total on a 6 degrés de liberté :

$$m = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \text{translation} \\ \text{rotation} \end{array} \right\}$$

- 3 paramètres indépendants définissent la translation d'un point dans les axes x,y,z.
- 3 paramètres indépendants définissent l'orientation du solide dans ces axes.

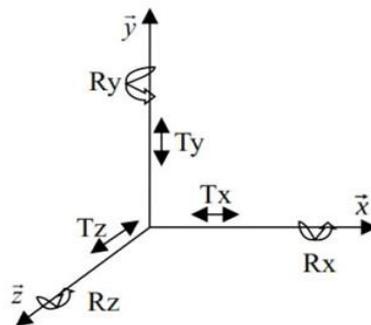


Figure 1.20 Degré de liberté.

### 7- Classification des robots :

Dans la technologie des robots on définit trois types des robots :

#### 7-1- les robots manipulateurs :

Comme son nom indique, les manipulateurs sont ceux qui manipulent et fonctionnent comme le bras humain. Ce type de robots ont une base fixe pour cela ils ont un espace de travail réduit mais d'autre côté ils sont capables de faire plusieurs tâches débutant par des actions simples (comme le déplacement des choses d'un point à un autre) et arrivant à des actions complexes (comme l'écriture, le soudage et même faire des opérations médicales).

##### 7-1-1- Concept de base :

Le robot manipulateur contient des corps (des segments) connectés entre eux avec des articulations fixées avec la base de robot et contient un outil final noté l'organe terminal.

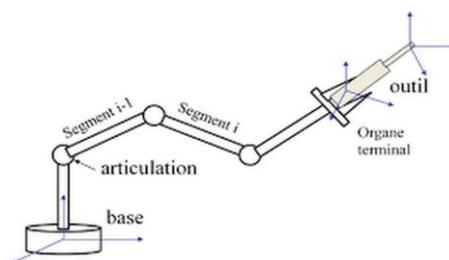


Figure 1.21 Architecture d'un robot manipulateur.

**a- La base :**

La base du manipulateur est la partie fixée dans le lieu de travail. Elle est presque considérée comme un point de départ pour la géométrie des robots manipulateurs.

**b- Le corps :**

C'est l'ensemble des bras et des segments qui se connectent les uns avec les autres pour former le look extérieur du robot.

**c- Les articulations :**

Les articulations sont les liens entre les bras, comme le coude de la main du corps humain.

On peut dire que ce dernier a le crédit que les manipulateurs peuvent être multitâche tel qu'ils permettent le robot de faire des mouvements et des rotations dans les différents axes. Il existe deux types des articulations : l'une pour les translations dans les axes (x, y, z) et l'autre pour les rotations dans ces axes.

- **Articulation rotoïde :**

Elle est de type pivot qui est responsable au mouvement rotatif d'un corps autour d'un axe. Le changement de la position de corps par rapport à autre est donné par l'angle autour  $\theta$ .

La géométrie des robots représente l'articulation rotoïde par un cylindre noté R.



**Figure 1.22** Représentation d'une articulation rotoïde.

- **Articulation prismatique :**

Elle est de type glissière qui permet la translation d'un corps. Le changement coulissant de la position entre deux corps est représenté par la distance variable dans un axe.

La translation noté P et représentée par un cuboïde ou un rectangle.



**Figure 1.23** Représentation d'une articulation prismatique.

**d- L'actionneur :**

Le mot actionner signifie : « mettre de quelque chose en mouvement ». En concept général, l'actionneur est la partie qui engendre un phénomène physique à partir de la transformation de l'énergie.

Dans le robot, l'actionneur est la partie qui anime le robot et mettre les corps en mouvement, il s'agit des moteurs commandés tel que : les moteurs pas à pas pour contrôler la position des bras ou les moteurs à vitesse pour les déplacements et les mouvements répétés.



**Figure 1.24** Moteur pas à pas.



**Figure 1.25** Moteur à vitesse.

**e- L'organe terminal :**

C'est la dernière pièce dans le robot manipulateur ; il peut être une torche de soudage, une pince, outil de forage, torche de peinture...etc.

**7-1-2- Espace de travail :**

L'espace de travail est tous les points qui peuvent être atteints par le robot dans l'espace. L'espace de travail dépend de :

- Les longueurs de bras.
- La limite d'angle d'orientation et de distance de translation.
- La dimension de robot et son configuration.

**7-1-3- Classification géométrique des manipulateurs :**

On peut classer les robots manipulateurs à partir de l'espace physique formée par les mouvements de manipulateur.

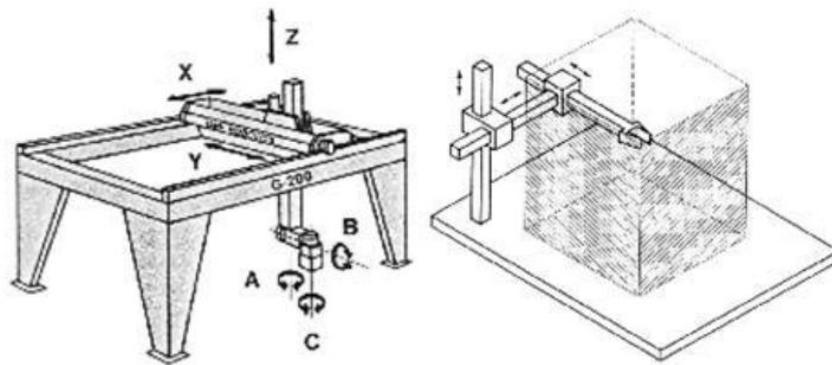
**a- Robot cartésien :**

Les robots cartésiens sont des robots ayant que des articulations de type prismatique (par exemple 3 axes pour le déplacement de l'organe terminal de type PPP 3DDL).

Les robots cartésiens assurent :

- Une très bonne précision de l'effecteur (si on parle sur les déplacements des objets par exemple).
- La facilité de modéliser, commander et fabriquer le robot.
- Une grande capacité à traité les pois et les choses lourdes

Mais, car tous les articulations sont prismatiques, les robots cartésiens présent une limitation des mouvements et une faible dextérité dans le travail.

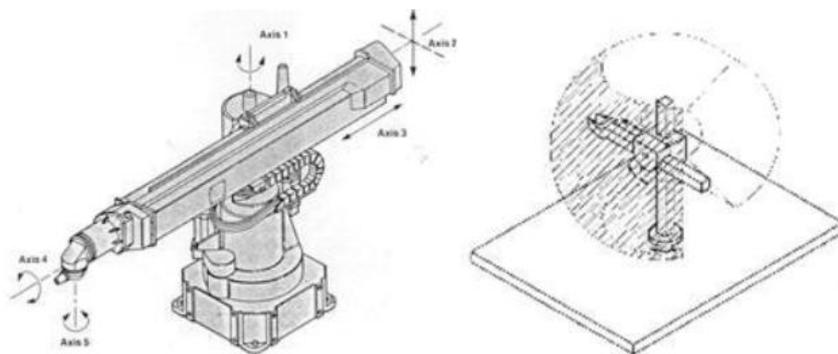


**Figure 1.26** Structure cartésienne (robot Gantry) [22].

#### b- Robot sphérique :

Les robots sphériques sont des robots de type RRP ; 3DDL. Ce type de robots assurant :

- Une liberté dans le mouvement de l'effecteur.
- Une précision et rigidité moins que les robots cartésiens et cylindriques.



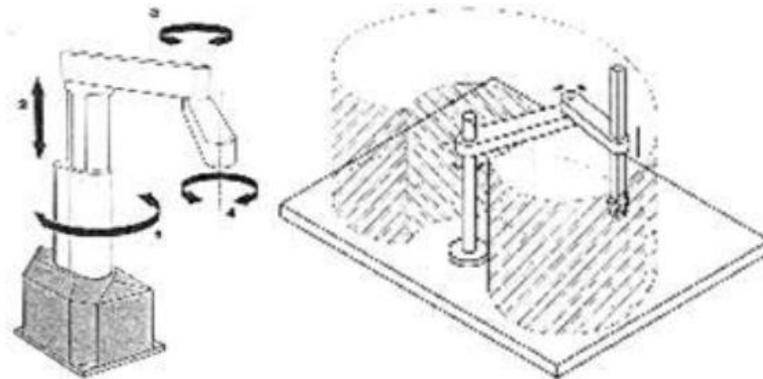
**Figure 1.27** Structure sphérique [22].

#### c- Robot SCARA :

SCARA ou bien « Selective Compliance Assembly Robot Arme » qui signifie un bras robotisé d'assemblage de conformité sélective.

Le robot SCARA présent deux articulations rotoïdes parallèles dans l'axe Z et une articulation prismatique qui fournis un déplacement horizontale de l'effecteur. Ces types des robots assurant :

- Une bonne précision et une rigidité mécanique.
- Une complexité moins que les robots sphériques.
- Une grande durabilité pour l'utilisation et sont parfait pour les applications d'assemblage.

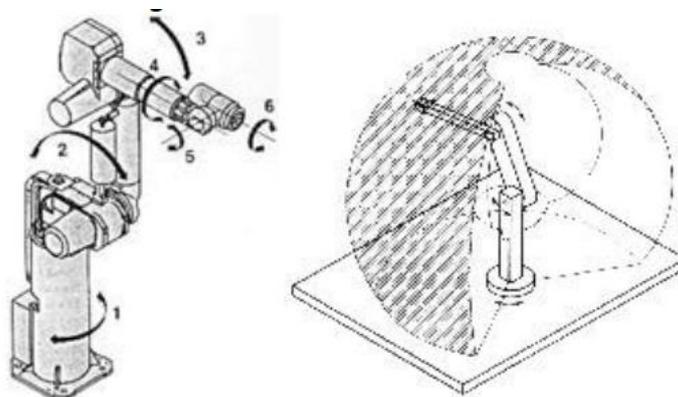


**Figure 1.28** Structure dite SCARA [22].

#### d- Robot anthropomorphe :

Les robots anthropomorphes ou les robots polaires sont des robots ayant uniquement des articulations rotoïdes (RRR, 3DDL). Les robots polaires assurant :

- Une liberté dans le mouvement de l'effecteur qui assuré le traitement des choses dans différent angle.
- Une structure mécanique complexe.
- Une difficulté dans la modalisation de robot.



**Figure 1.29** Structure anthropomorphe [22].

**e- Robot cylindrique :**

Les robots cylindriques ayant une articulation rotoïde et deux autre articulations prismatiques (RPP ; 3DDL). Les robots cylindriques assurant :

- Une bonne précision de l'effecteur.
- Facilité à commander et fabriquer le robot.
- Une très bonne dureté et rigidité mécanique.

**7-2- Les robots mobiles :**

Les robots mobiles sont les robots qui ont la capacité de se déplacer, l'avantage des robots mobiles est d'augmenter l'espace de travail et de considérer le problème de déplacement autonome. Généralement le problème de la robotique mobile est basé sur l'architecture matérielle comme le choix de dimensions et la structure mécanique, de moteurs et de l'architecture informatique pour contrôler le système.

Contrairement aux robots manipulateurs, les robots mobiles peuvent travailler dans un grand espace mais avec une seule mission qui est juste le déplacement. Ces robots mobiles ont la capacité de perception dans l'environnement à l'aide des capteurs et de s'adapter aux changements de terrain. Il existe plusieurs types de robots mobiles :

**7-2-1- Les robots mobiles à roues :**

Ce type est le plus utilisé, le mécanisme de travail est la rotation des roues qui est générée par la force de moteur avec considération de l'environnement et la structure de véhicule (gravité, topologie de terrain, géométrie et dynamique de véhicule et les frottements). L'utilisation des roues est généralement dans les terrains qui sont faciles à marcher dessus (terrain lisse).



**Figure 1.30** Robot mobile à roues [23].

**7-2-2- Les robots mobiles à pattes :**

Les robots mobiles à pattes comme son nom indique utilisent des pattes dans leur mouvement, il existe plusieurs modèles selon le nombre de pattes utilisés.



**Figure 1.31** Robot mobile à patte.

### 7-2-3- Les robots mobiles à chenilles :

Ce type est utilisé où il y a des perturbations dans le sol grâce à la forme de sa structure et sa propriété de se déplacer comme une chenille. La commande de ce robot est de type différentiel.



**Figure 1.32** Robot à chenilles.

### 7-2-4- Les robots volants (drones) :

Les drones sont des robots qui ont la liberté de voler dans l'espace, ces robots ont 3 degrés de liberté de plus par rapport aux autres, ce type est plus utilisé dans le domaine militaire, la commande de ce système doit être difficile à cause de sa stabilité. On trouve plusieurs classes de drones chacune est utilisée dans différentes tâches.



**Figure 1.33** Robot volant [24].

### 7-3- Les robots manipulateurs mobiles :

Le besoin d'avoir des robots capable à manipuler, effectuer des taches en se déplaçant, a conduit à fabriquer ce type des robots.

Le robot manipulateur mobile est un chariot porte un bras manipulateur. On peut citer trois grandes familles des manipulateurs mobiles :

#### 7-3-1- Les humanoïdes :

Un humanoïde est un robot ressemble au corps humain. Les développeurs créer des humanoïde traités par l'intelligence artificielle pour identifier les mouvements de l'homme, mais ce qu'il semble être facile à faire par l'être humain tel que marcher et sauter, est très difficile à applique par l'humanoïde, il est fait par le robot après des mesures, des traitements et des calculs très complexes.



**Figure 1.34** Robot Nao (Aldebaran Robotics) 2006 [25].

#### 7-3-2- Les manipulateurs mobiles sous-marins :

Dans les zones non accessibles aux plongeurs ou difficile à établir des manipulations, la sous-marine est l'alternative. La sous-marine peut aller à plus de profondeurs, pour plus de Temps, et réduire les risques.



**Figure 1.35** Robot sous-marin Bathy Boi [26].

### 7-3-3- Les manipulateurs mobiles à roues :

Ils sont les plus célèbres et les plus couramment utilisés, ceci est dû à la facilité de la fabrication et de leur commande. Il existe plusieurs types des manipulateurs mobiles à roues, on cite :

#### a- Robot omnidirectionnel :

Ce type des plates formes a une structure mécanique complexe qui permet du robot de se déplacer dans toutes les directions indépendamment.

#### b- Robot uni-cycle :

Ce robot est placé sur deux roues indépendantes et possède une forme mécanique spéciale pour maintenir sa stabilité.

#### c- Robot tricycle :

Ce robot est stabilisé sur trois roues, deux fixées dans le même axe et une autre roue au milieu pour contrôler la direction de robot dans l'espace.



Figure 1.36 Robot omnidirectionnel.



Figure 1.37 Robot tricycle.

#### d- Robot de type voiture :

C'est un robot à quatre roues, chaque deux roue sont fixées dans le même axe pour avoir une bonne stabilité de ce robot.



Figure 1.38 Robot de type voiture [27].

## 8- La redondance :

On dit qu'un robot est redondant si le nombre de degré de liberté du mécanisme est inférieur au nombre d'articulation indépendant. D'autre définition, un robot est dit redondant si la dimension de l'espace opérationnel est inférieur au nombre de variables de l'espace articulaire.

Les cas où on trouve une redondance :

- Plus de 6 articulations.
- Plus de trois articulations rotoïdes d'axes concourants ou d'axes parallèles.
- Plus de trois articulations prismatiques.
- Deux axes d'articulation prismatiques parallèles ou rotoïdes confondus.

## 9- Conception de système :

Dans ce qui suit on va faire une description hardware et software de système ; dans la partie hardware on va parler sur les composants électriques et mécaniques de robot et dans la partie software on doit faire un algorithme (code d'Arduino) pour la commande du robot.

### 9-1- Partie électrique :

#### 9-1-1- Carte arduino :

Les cartes arduino sont des circuits électriques ont un environnement de programmation permet de l'utilisateur d'établir les projets expérimentalement. L'arduino est un projet en source ouvert, chaque utilisateur peut adapter éventuellement à leur besoin particuliers.

**Carte arduino Mega 2560 :** La carte arduino Mega 2560 est une carte avec un microcontrôleur basée sur un Atmega 2560. L'arduino mega 2560 contient [28] :

- 54 bronches numériques d'entrées/sorties.
- 16 entrées analogiques (peuvent utiliser comme entrée/sorties numériques).
- 14 bronches peuvent utiliser comme des sorties PWM (largeur d'impulsion modulée).
- 4 UART (port séries matériel).
- Une connexion USB.
- Un connecteur d'aliment Jack.
- Un connecteur ICSP (programmation "in-circuit").
- Un quartz 16MHz.
- Un bouton de réinitialisation (reset).

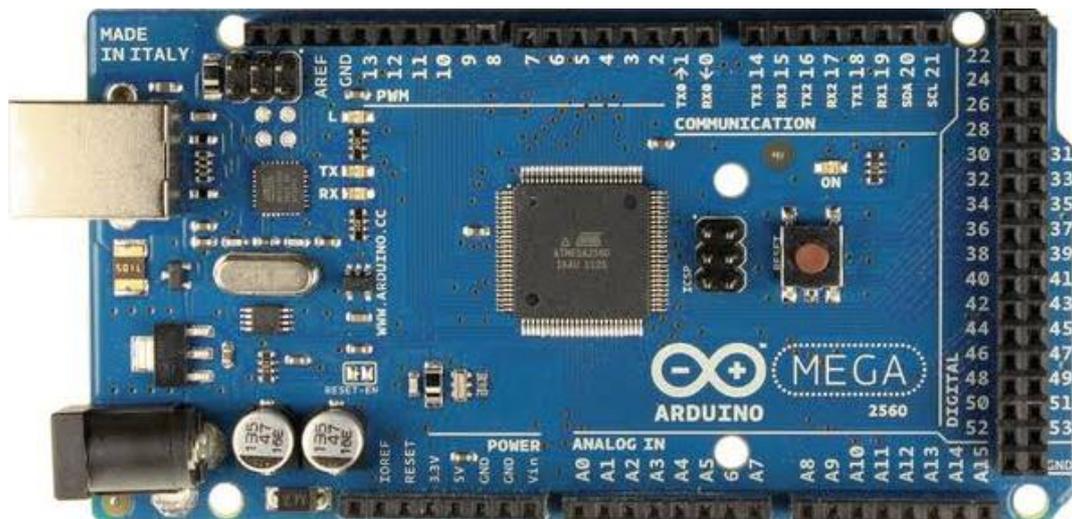


Figure 1.39 Carte Arduino Mega 2560.

Les caractéristiques de la carte sont regroupées dans le tableau ci-dessous :

Tableau 1.1 Synthèse des caractéristiques d'Arduino [29].

Microcontrôleur	ATmega2560
Tension de fonctionnement	5V
Tension d'alimentation (recommandée)	7-12V
Tension d'alimentation (limites)	6-20V
Broches E/S numériques	54 (dont 14 disposent d'une sortie PWM)
Broches d'entrées analogiques	16 (utilisables en broches E/S numériques)
Intensité maxi disponible par broche E/S (5v)	40 mA (ATTENTION : 200mA cumulé pour l'ensemble des broches E/S)
Intensité maxi disponible pour la sortie 3.3v	50 mA
Intensité maxi disponible pour la sortie 5v	Fonction de l'alimentation utilisée - 500 mA max si port USB utilisé seul
Mémoire programme Flash	256 KB dont 8 KB sont utilisés par le boot Loader
Mémoire SRAM (mémoire volatile)	8 KB
Mémoire EEPROM (mémoire non volatile)	4 KB
Vitesse d'horloge	16 MHz
Longueur	101.52 mm
Largeur	53.3 mm
Poids	37 g

### 9-1-2- Moteur à courant continu :

Le moteur à courant continu est un composant électromécanique travail comme un convertisseur d'énergie. Dans la transformation d'énergie électrique vers une énergie mécanique on dit qu'il y a un fonctionnement en moteur, dans ce cas il est capable de fournir une puissance mécanique ou entraîner une charge en mouvement. Si on donne une énergie mécanique il doit fonctionner en générateur pour donner une énergie électrique, le fonctionnement en générateur peut comporter comme un frein.

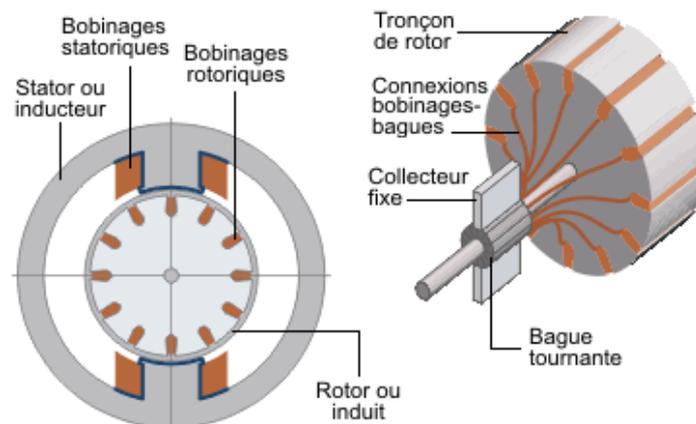


**Figure 1.40** Moteur à courant continu.

Le moteur à courant continu se compose de :

- Une partie inductrice (stator).
- Une partie induit (rotor).

La vitesse de rotation d'un moteur à courant continu étant varier par la tension appliquée et leur couple étant déterminer par le courant qui circuler dans le moteur.



**Figure 1.41** Principe d'un moteur à courant continu [30].

### 9-1-3- Servomoteur :

Le servomoteur et un actionneur produit des mouvements précis en réponse à une commande. Le servomoteur généralement est un moteur à courant continu asservi par un

potentiomètre et un circuit électronique interne. Ce type de moteur est commandé par un signal de commande PWM, la modification dans ce signal indique au moteur de changer la position désirée.



**Figure 1.42** Servomoteurs.

#### **9-1-4- Potentiomètre :**

Le potentiomètre est un composant électronique connue avec le nom « Résistance variable », on peut dire que il est considère comme un résistance ou on peut changes la valeur ohmique entre deux point. Il existe plusieurs types de potentiomètre mais on peut citer deux grandes familles : potentiomètres ajustables et potentiomètres de tableau.

On doit utiliser les potentiomètres dans ce montage pour varier la valeur de vitesse des roues de chariot mobile et pour varier la position des bras manipulateur.



**Figure 1.43** Potentiomètre.

#### **9-1-5- Alimentation :**

On va utiliser une carte de puissance qui doit gérer les tensions : une tension d'alimentation stabilisée (0/5V) pour les cartes électronique et une tension pour alimenter les moteurs pour faire les mouvements de robot (entre -12V et +12V). Ensuite, on va utiliser deux batteries pour fournir les tensions d'alimentation. Un circuit de charge doit être pour charger les batteries avec un chargeur (12V).

### 9-1-6- Files de connexion :

Les files de connexion pour relier le montage.



Figure 1.44 Batterie 12V.

Figure 1.45 Chargeur 12V.

Figure 1.46 Files de connexion.

### 9-2- Partie mécanique :

La structure mécanique est pour but de construire le robot manipulateur mobile pour être capable de se déplacer et de faire des mouvements dans l'espace. Le choix de matériels pour construire le robot se réserve de plusieurs propriétés tel que :

- La solidité des pièces
- Le poids des pièces.
- La puissance de moteur.
- La précision dans les mouvements.

## 10- Conclusion :

Dans ce premier chapitre nous avons donné des notions de base sur les robots et la robotique ainsi une bref historique. Ensuite, nous avons donné une classification des robots avec l'aide des exemples sur chaque type. Enfin, nous avons expliqué les termes principaux et importants liées à ce domaine.

---

# **Chapitre 2**

---

**Modélisation d'un robot manipulateur mobile**

## 1- Introduction :

La modélisation est une étape nécessaire avant de faire commander un système complexe. La modélisation d'un système permet de considérer les relations entre les grandeurs de ce système ou la relation entre les entrées et les sorties sous forme des équations mathématiques. En robotique, la modélisation d'un système robotisé peut donner une vue globale sur le comportement de robot pour pouvoir le commander.

Le système étudié est un robot manipulateur mobile (un chariot mobile à trois roues doté d'un bras manipulateur), la commande de ce système exige de développer un modèle mathématique qui le décrit, dans ce chapitre nous allons faire un modèle géométrique pour voir la relation entre les coordonnées articulaires et la position où l'orientation de l'organe terminal. Après nous allons établir les relations entre les forces qui affectent le système, ses vitesses et ses accélérations pour faire sa modélisation dynamique.

## 2- Positionnement :

### 2-1- Les coordonnées opérationnelles :

Les coordonnées opérationnelles sont des coordonnées indépendantes qui décrivent la position et l'orientation (la situation) de l'organe terminal. On peut définir un vecteur  $\xi$ , vecteur des coordonnées opérationnelles, les paramètres de ce vecteur sont choisis après la translation et l'orientation de l'organe terminal et peut être au minimum six paramètres indépendantes.

$$\xi = \begin{bmatrix} X_{OT} \\ Y_{OT} \\ Z_{OT} \\ \psi_{OT} \\ \theta_{OT} \\ \phi_{OT} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

La première et la deuxième dérivée temporelle du vecteur de coordonnées opérationnelles donne le vecteur de vitesses opérationnelles et le vecteur des accélérations opérationnelles respectivement.

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{X}_{OT} \\ \dot{Y}_{OT} \\ \dot{Z}_{OT} \\ \dot{\psi}_{OT} \\ \dot{\theta}_{OT} \\ \dot{\phi}_{OT} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\xi = \begin{bmatrix} \ddot{X}_{OT} \\ \ddot{Y}_{OT} \\ \ddot{Z}_{OT} \\ \ddot{\psi}_{OT} \\ \ddot{\theta}_{OT} \\ \ddot{\phi}_{OT} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

### 2-2- Les coordonnées généralisées :

Pour décrire la situation d'un système robotique dans une chaîne des corps il faut définir le vecteur  $q$  vecteur des coordonnées généralisées. Pour un système de 3 dimensions, il est nécessaire de déclarer 6 paramètres primitifs, ces paramètres sont noté  $P_1, P_2, \dots, P_{6nc}$ .

On définit  $hp$  le nombre d'équations de liaisons qui permet de réduire le nombre de paramètres pour faire une description du système. Le nombre des variables articulaires  $n$  de vecteur des coordonnées généralisées définie donc  $n=6nc -hp$ .

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Donc ces coordonnées décrivent la situation de chacun des corps, c'est-à-dire les paramètres nécessaires pour configurer le système.

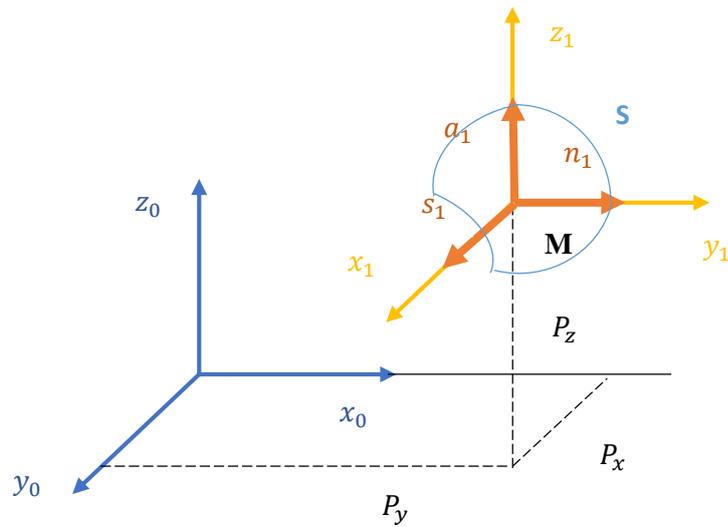
## 3- Matrice de transformation homogène :

### 3-1- Les coordonnées homogènes :

Dans la géométrie, les coordonnées homogènes comme les coordonnées cartésiennes rendent les calculs d'un point dans l'espace projectif.

Pour un point  $P$  représenté par les coordonnées cartésiennes  $P_x, P_y, P_z$  et 1 avec une représentation d'une direction  $u$  nous avons :

$$P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5), (2.6)$$



**Figure 2.1** Positionnement d'un point.

La représentation d'un plan :

Le vecteur  $Q = [\alpha, \beta, \gamma, \delta]$  représente le plan  $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ , pour tout point appartenant à Q on  $Q.P=0$  :

$$Q.P = [\alpha, \beta, \gamma, \delta] \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{2.7}$$

**3-2- Transformation de vecteur :**

On définit  ${}^i s_j, {}^i n_j$  et  ${}^i a_j$  les vecteurs unitaires des axes  $X_j, Y_j$  et  $Z_j$  du repère  $R_j$  et le point  $P_1$  définie dans  ${}^i P_j$  le vecteur expriment l'origine du repère  $R_j$  dans le repère  $R_i$ .

D'après le calcul des coordonnées homogènes de point  $P_1$  dans le repère  $R_i$  avec la relation [31] :

$${}^j P_1 {}^i P_j = {}^i(O_i P_1) = {}^i s_j {}^j P_{1x} + {}^i n_j {}^j P_{1y} + {}^i a_j {}^j P_{1z} = {}^i T_j {}^j P_1 \tag{2.8}$$

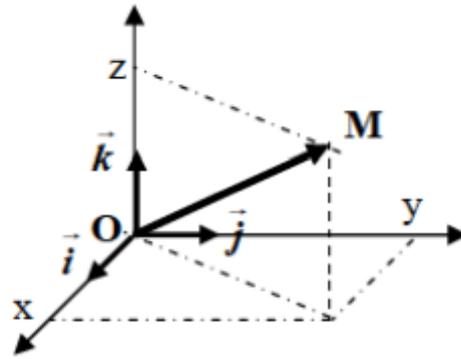


Figure 2.2 Positionnement d'un vecteur.

Avec  ${}^i T_j$  la matrice transformation homogène qui définit par [31] :

$${}^i T_j = [{}^i s_j, {}^i n_j, {}^i a_j, {}^i P_j] = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$${}^i T_j = \begin{bmatrix} {}^i R_j & {}^i P_j \\ 000 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$${}^i T_j = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & r_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & r_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

### 3-3- Matrice de translation homogène :

La transformation des translations a, b et c dans les axes x, y et z respectivement ;

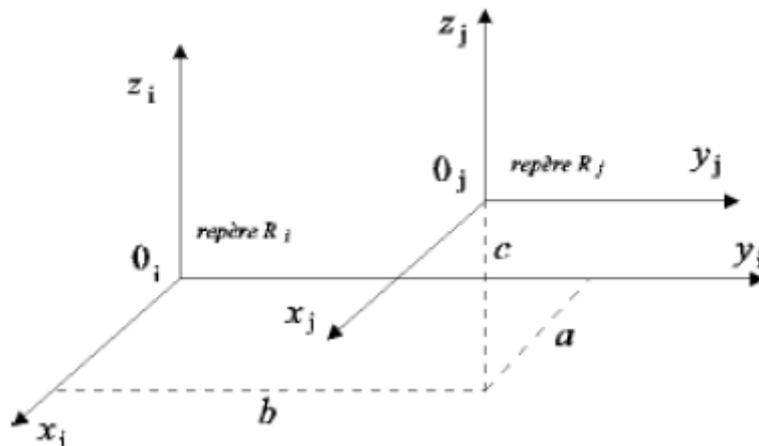


Figure 2.3 Représentation d'une translation homogène.

On note cette transformation  $T_r(a, b, c)$ . Dans ce cas la matrice de transformation donnée par [31] :

$${}^i T_j = T_r(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

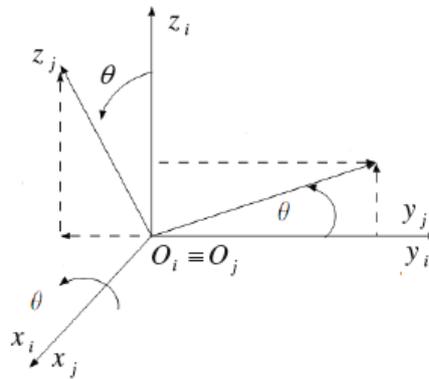
Avec :

$$T_r(a, b, c) = T_r(x, a) * T_r(y, b) * T_r(z, c) \quad (2.13)$$

**3-4- Matrice de rotation homogène :**

C'est l'orientation de repère  $R_i$  d'un angle  $\theta$  autour des axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  [31].

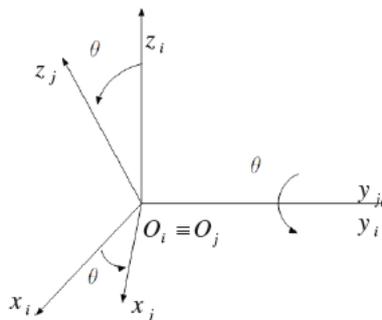
La rotation autour de  $x$  :



**Figure 2.4** Représentation d'une rotation autour de  $x$ .

$${}^i T_j = \text{Rot}(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

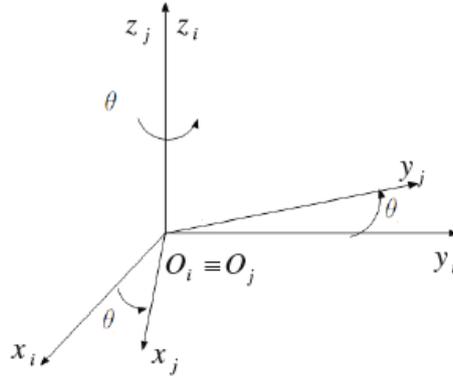
La rotation autour de  $y$  :



**Figure 2.5** Représentation d'une rotation autour de  $y$ .

$${}^i T_j = \text{Rot}(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

La rotation autour de z :



**Figure 2.6** Représentation d'une rotation autour de z.

$${}^i T_j = \text{Rot}(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

#### 4- Méthodologies de modélisation des robots :

Pour le développement des systèmes robotiques, on prend toujours en compte les modèles de système. La modélisation est une expression mathématique qui représente la simulation numérique de la structure mécanique de système.

Afin d'avoir l'étude des lois de commandes et la planification de trajectoire, il est nécessaire de passer d'abord par la modélisation. En outre, la modélisation est considérée comme un plan qui assure la fiabilité de système avant le démarrage de fabrication.

La méthodologie de modélisation consiste à analyser d'abord la nature du système, mécanique, électrique, hydraulique ... etc, pour déterminer ses entrées et ses sorties, ensuite il faut savoir le domaine de fonctionnement du système pour simplifier son modèle et d'ignorer les paramètres négligeables. Enfin, établir les formules mathématiques et les lois physiques pour réduire la modèle.

Il existe plusieurs modèles chacun sa perspective et méthode pour analyser le système, on site : le modèle géométrique, le modèle cinématique, le modèle dynamique.

### 5- Description de système :

Notre robot est un manipulateur mobile qui est composé d'une plateforme mobile et un bras manipulateur disposé sur la plateforme dans le centre de gravité. La plateforme mobile est de type uni-cycle avec deux roues à 3 ddl ( $x$ ,  $y$  et  $\theta$ ) et le manipulateur composé de deux bras à 2 ddl ( $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ).

Les paramètres de système sont regroupés dans le tableau suivant :

**Tableau 2.1** Les paramètres de système [32].

	Symbol	Valeur	Unité
<b>La masse de plateforme</b>	$M_p$	10	[kg]
<b>La masse de 1<sup>er</sup> bras</b>	$m_1$	2	[kg]
<b>La masse de 2<sup>ème</sup> bras</b>	$m_2$	1	[kg]
<b>La longueur de 1<sup>er</sup> bras</b>	$l_1$	0.4	[m]
<b>La longueur de 2<sup>ème</sup> bras</b>	$l_2$	0.3	[m]
<b>Le rayon de roues</b>	$r$	0.1	[m]
<b>La distance entre la roue et centre de gravité</b>	$R$	0.4	[m]
<b>L'inerte de plateforme</b>	$I$	2	[kg.m <sup>2</sup> ]
<b>L'inerte de 1<sup>er</sup> bras dans y</b>	$I_{y1}$	0.05	[kg.m <sup>2</sup> ]
<b>L'inerte de 2<sup>ème</sup> bras dans y</b>	$I_{y2}$	0.05	[kg.m <sup>2</sup> ]
<b>L'inerte de 1<sup>er</sup> bras dans z</b>	$I_{z1}$	0.05	[kg.m <sup>2</sup> ]
<b>L'inerte de 2<sup>ème</sup> bras dans z</b>	$I_{z2}$	0.05	[kg.m <sup>2</sup> ]
<b>La gravité</b>	$g$	9.8	[m/s <sup>2</sup> ]

### 6- Le modèle géométrique du manipulateur mobile :

Le modèle géométrique consiste à étudier l'évolution de système à partir de trouver la relation entre la position de l'organe terminale et les variables articulaires de robot.



Figure 2.7 Modèle géométrique.

### 6-1- Principe [33]

Afin de déterminer la méthodologie de la modélisation géométrique, plusieurs méthodes ont été proposées, la convention de Denavit-Hartenberg est la méthode la plus répandue pour étudier le robot manipulateur à structure ouverte simple.

Pour avoir le modèle géométrique de façon systématique, les robots qui ont une morphologie complexe, tel que les robots parallèles où les robots avec une structure fermée où arborescente, nécessitent des modèles développées comme la notion de Khalil et Kleinfinger et les travaux de Paul et de Craig.

### 6-2- Modèle de Denavit-Hartenberg DH :

La proposition de Denavit et Hartenberg donne la transformation homogène entre deux solides à partir de la position et l'orientation des repères.

#### Principe

Pour une structure ouverte simple consiste à  $n$  articulations (rotoïde et prismatique) qui lie  $n+1$  corps avec eux.

On place d'abord les repères dans chaque corps du robot, et on les numérote de 0 à  $n$  ( $R_0, R_1, \dots, R_i, \dots, R_n$ ) avec  $R_i$  présente la repère de la  $i^{\text{ème}}$  corps.

Le placement des repères suit certaines étapes :

L'axe  $Z_i$  est fixé à la même direction de l'axe de l'articulation.

L'axe  $X_j$  est fixé à la manière perpendiculaire avec l'axe  $Z_i$ .

L'axe  $Y_i$  vérifié la condition  $Y_i = Z_i \wedge X_i$ .

Ensuite, on déduit les paramètres de Denavit-Hartenberg qui définit le passage du repère  $R_i$  vers le repère  $R_j$  ; Le passage du repère  $R_i$  au repère  $R_j$  s'exprime en fonction des quatre paramètres géométriques suivants [33] :

- $\alpha_j$  : angle entre les axes  $z_i$  et  $z_j$  correspondant à une rotation autour de  $x_i$  ;

- $d_j$  : distance entre  $z_i$  et  $z_j$  le long de  $x_i$  ;
- $\theta_j$  : angle entre les axes  $x_i$  et  $x_j$  correspondant à une rotation autour de  $z_j$  ;
- $r_j$  : distance entre  $x_i$  et  $x_j$  le long de  $z_j$ .

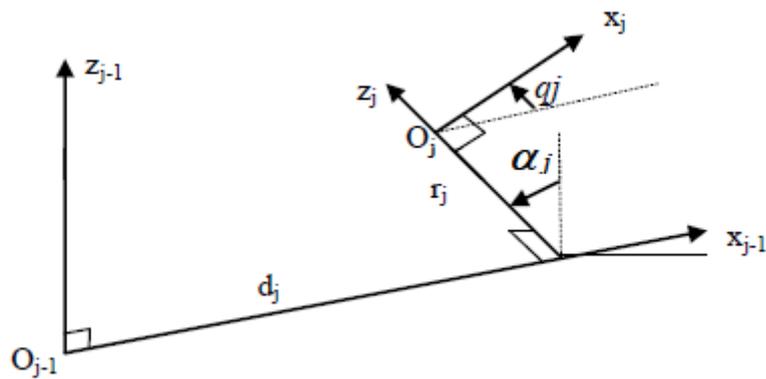


Figure 2.8 Paramètre géométrique de passage.

On définit le paramètre  $\sigma$  qui note le type de l'articulation  $\sigma=0$  pour l'articulation rotoïde et  $\sigma=1$  pour l'articulation prismatique.

**6-3- Modèle géométrique direct MGD :**

Le modèle géométrique direct permet de déduire les positions  $(x, y, z)$  et l'orientation  $(R_x, R_y, R_z)$  de l'organe dans l'espace de travail en fonction des variables articulaires.

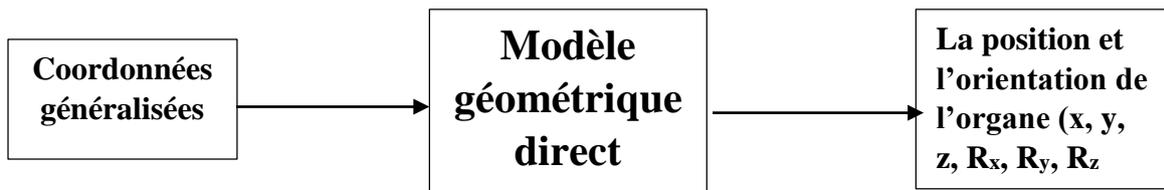


Figure 2.9 Modèle géométrique direct.

On va modéliser le bras et le chariot chacun séparément.

**6-3-1- Modèle géométrique du bras manipulateur :**

Le modèle géométrique d'un bras manipulateur permet de représenter les positions et les orientations de l'organe terminal.

Pour un bras manipulateur de 2ddl de type RR, il faut trouver la matrice de transformation homogène  ${}^0T_2$ .

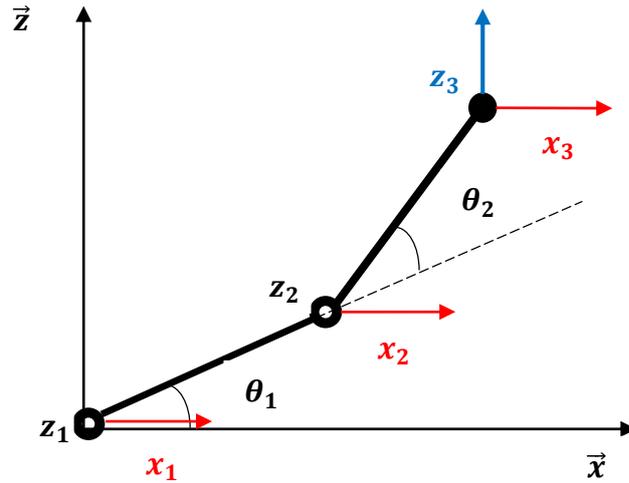


Figure 2.10 Modèle géométrique d'un bras manipulateur.

On établit le repère de base  $R_1 (O_1, x_1, y_1, z_1)$ , l'origine  $O_1$  est porté sur la première articulation et la direction de l'axe  $x_0$  est choisie complètement arbitraire. Une fois le repère de base établie, les repères  $R_2 (x_2, y_2, z_2)$  et  $R_3 (x_3, y_3, z_3)$  sont fixé comme indiqué par la convention DH.

Le vecteur du variable articulaire  $q = [q_1, q_2]$  qui définit les variables coordonnées généralisé de système donnée par  $q = [\theta_1, \theta_2]$ .

Les paramètres de liaison de Denavit-Hartenberg sont affichés dans le tableau 2.2 :

Tableau 2.2 Les paramètres de Denavit-Hartenberg.

	$s_i$	$\alpha_i$	$\theta_i$	$d_i$	$r_i$
1	0	0	$\theta_1^*$	0	$l_1$
2	0	0	$\theta_2^*$	0	$l_2$

Les matrices de transformation homogène des deux corps sont donné par :

$${}^1T_2 = \text{Rot}(Z_1, \theta_1) * \text{Tras}(Z_1, d_1) * \text{Tras}(X_1, r_1) * \text{Rot}(X_1, \alpha_1) \tag{2.17}$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & -\sin \theta_1 & l_1 \cos \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 & l_1 \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

$${}^2T_3 = \text{Rot}(Z_2, \theta_2) * \text{Tras}(Z_2, d_1) * \text{Tras}(X_2, r_2) * \text{Rot}(X_2, \alpha_2) \tag{2.19}$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 & l_2 \cos \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 & l_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

On définit la matrice de transformation homogène  ${}^0T_2$  qui indique l'évolution de l'organe terminal.

$${}^1T_3 = {}^1T_2 * {}^2T_3 \quad (2.21)$$

$${}^1T_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Notez que les paramètres de dernière colonne de la matrice de transformation  ${}^0T_2$  sont les positions de l'effecteur par rapport au repère  $O_0$  :

$$X = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (2.23)$$

$$Y = 0 \quad (2.24)$$

$$Z = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (2.25)$$

**6-3-2- Modèle géométrique direct d'une plateforme mobile (les roues sont négligeables) :**

Les propriétés des plateformes à roues sont définies par G.Campion et al dans [34], la notion consiste à connaître la position et l'orientation initiales de la plateforme pour trouver les nouvelles coordonnées. Dans ce cas, quand on néglige les roues, on peut représenter notre système par les 3 variations fait par le mobile suivant la figure (2.11) :

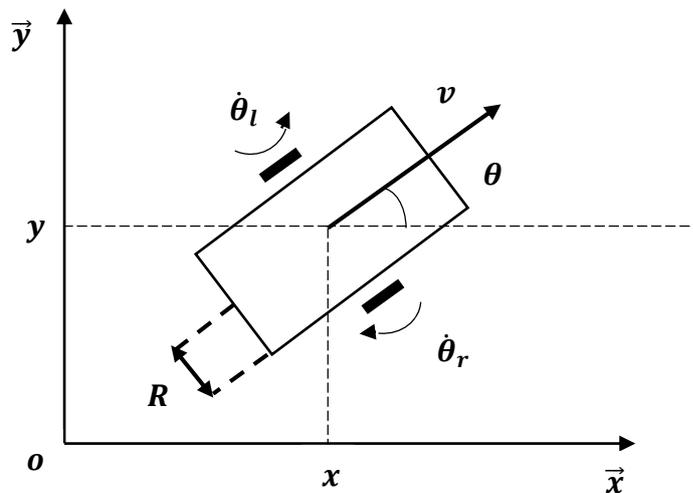


Figure 2.11 Changement de repaire de plateforme.

Le vecteur des coordonnées donné par  $q = [x \quad y \quad \theta]^T$ .

Les paramètres D-H de mobile sont présentés dans le tableau (2.3)

**Tableau 2.3** Les paramètres D-H de mobile

	$\alpha_i$	$\theta_i$	$d_i$	$r_i$
<b>0</b>	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$y_p$	0
<b>1</b>	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$x_p$	0
<b>2</b>	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} + \theta$	0	0

Les matrices de transformation homogène de la rotation et de déplacement de mobile :

$${}^0T_1 = \text{Rot}(Z_0, \theta_0) * \text{Tras}(Z_0, d_0) * \text{Tras}(X_0, r_0) * \text{Rot}(X_0, \alpha_0) \quad (2.26)$$

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y_p \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$${}^1T_2 = \text{Rot}(Z_1, \theta_1) * \text{Tras}(Z_1, d_1) * \text{Tras}(X_1, r_1) * \text{Rot}(X_1, \alpha_1) \quad (2.28)$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_p \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$${}^2T_3 = \text{Rot}(Z_2, \theta_2) * \text{Tras}(Z_2, d_2) * \text{Tras}(X_2, r_2) * \text{Rot}(X_2, \alpha_2) \quad (2.30)$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

On définit la matrice  ${}^0T_2$  la matrice de transformation homogène de mobile tel que :

$${}^0T_2 = {}^0T_1 * {}^1T_2 * {}^2T_3 \quad (2.32)$$

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & x_p \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & y_p \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

**6-3-3- Modèle géométrique direct de robot manipulateur-mobile :**

On définit le vecteur  $q$  qui présente les coordonnées opérationnels de la combinaison manipulateur-mobile tel que :

$$q = \begin{bmatrix} q_b \\ q_p \end{bmatrix} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad x_p \quad y_p \quad \theta] \tag{2.34}$$

La matrice de transformation homogène de manipulateur-mobile  ${}^pT_0$  qui définit le développement de l'organe terminale de manipulateur par rapport à la plateforme mobile est donnée suivant la relation :

$${}^pT_0 = {}^pT_b * {}^bT_0 \tag{2.35}$$

Avec  ${}^pT_b$  et  ${}^bT_0$  sont les matrices de transformation homogène de la plateforme et le bras manipulateur respectivement :

$${}^pT_0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta & -\sin \theta & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta & l_1 \cos \theta_1 \cos \theta + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta + x_p \\ \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta & \cos \theta & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta & l_1 \cos \theta_1 \sin \theta + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta + y_p \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

D'après  ${}^pT_0$  on peut déduire la position de l'organe terminale ( $P_x, P_y, P_z$ ) :

$$P_x = l_1 \cos \theta_1 \cos \theta + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta + x_p \tag{2.37}$$

$$P_y = l_1 \cos \theta_1 \sin \theta + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta + y_p \tag{2.38}$$

$$P_z = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \tag{2.39}$$

**6-4- Le modèle géométrique inverse MGI du système :**

Le modèle géométrique inverse est comme le titre indique le sens opposé de modèle géométrique direct. L'utilisation de ce modèle permet à déterminer les coordonnées articulaires de robot afin d'avoir une position et orientation données.



Figure2.12 Modèle géométrique inverse.

Le principe de modèle géométrique inverse est d'avoir les coordonnées articulaires à partir de l'inverse du système des équations non linéaires du modèle géométrique direct ; on écrit :

$$q = f^{-1}(x) \quad (2.40)$$

Il existe des méthodes pour résoudre le MGI. La méthode de Paul est la plus répandue, qui permet de traiter chaque cas individuellement. Il existe aussi la méthode de Pieper et la méthode de Raghavan et Roth. Le modèle géométrique inverse n'a pas une forme précise, donc on fait appel à des méthodes numériques telles que dans [33]. Ces méthodes permettent de calculer une solution particulière dépendant sur certaines conditions initiales.

## 7- Modèle cinématique :

### 7-1- Modèle cinématique direct :

Le modèle cinématique direct (le modèle différentiel direct MDD) consiste à trouver la relation entre les vitesses des coordonnées opérationnelles et les vitesses articulaires à partir de MGD :

$$\dot{X} = J(q)\dot{q} \quad (2.41)$$

$J(q)$  est la matrice Jacobéenne, cette matrice de dimension  $m \times n$  ( $m$  : nombre des coordonnées articulaires et  $n$  : nombre des coordonnées opérationnelles) donne la variation élémentaire  $\dot{X}$  des coordonnées opérationnelles en fonction des variables élémentaires des coordonnées articulaires  $\dot{q}$  [35] :

$$\dot{X} = \left( \frac{df(q)}{dq} \right) \left( \frac{dq}{dt} \right) \quad (2.42)$$

$$\dot{X} = J(q)\dot{q} \quad (2.43)$$

### 7-2- Calcul de la matrice Jacobéenne :

On peut calculer la matrice Jacobéenne par la dérivation du modèle géométrique direct on utilise la relation suivante :

$$J_{ij} = \frac{df_i(q)}{dq_j} \quad \begin{cases} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (2.44)$$

Avec  $J_{ij}$  est l'élément de la matrice Jacobien :

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dq_1} & \dots & \frac{df_1}{dq_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n}{dq_1} & \dots & \frac{df_n}{dq_m} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

### 7-3- Jacobéenne inverse :

On définit  $dY = J dX$

$$\frac{dY}{dt} = J(X) \frac{dX}{dt} \quad \rightarrow \quad \dot{Y} = J(X)\dot{X} \quad (2.46)$$

La Jacobéenne comme citée dans la définition, donne la vitesse Y en fonction de la vitesse X ; d'après l'équation (2.3.3) le Jacobien inverse est donnée par la relation :

$$\dot{X} = J^{-1}(X)\dot{Y} \quad (2.47)$$

#### 7-4- Modèle cinématique d'un robot manipulateur mobile :

D'après le modèle géométrique direct (équation 2.37, 2.38, 2.39), le modèle cinématique direct de notre système est :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & J_{13} & J_{14} & J_{15} \\ 0 & 1 & J_{23} & J_{24} & J_{25} \\ 0 & 0 & 0 & J_{34} & J_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\theta} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$J_{13} = -(l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2)) \sin \theta \quad (2.49)$$

$$J_{23} = (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)) \cos \theta \quad (2.50)$$

$$J_{14} = -l_1 \cos \theta \sin \theta_1 - l_2 \cos \theta \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (2.51)$$

$$J_{24} = -l_1 \sin \theta \sin \theta_1 - l_2 \sin \theta \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (2.52)$$

$$J_{34} = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (2.53)$$

$$J_{15} = -l_2 \cos \theta \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (2.54)$$

$$J_{25} = -l_2 \sin \theta \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (2.55)$$

$$J_{35} = l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (2.56)$$

### 8- Modèle dynamique d'un manipulateur-mobile :

#### 8-1- Modèle dynamique :

Le modèle dynamique consiste à trouver les équations dynamiques des forces exercées sur le système en fonction de ses vitesses et ses accélérations ; d'autre terme, le modèle dynamique est la relation entre les forces et les coordonnées cinématiques de système.

La modélisation dynamique permet de donner un schéma mathématique du robot et elle est nécessaire avant de faire la commande du robot puisque la loi de commande soit appliquée sur ce modèle.

Le modèle dynamique d'un robot permet d'avoir l'évolution des mouvements de robot dans le temps avec la relation force\couple ; on peut représenter le modèle dynamique par la relation suivant [31] :

$$\Gamma = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, f_e) \tag{2.57}$$

Avec :

$\Gamma$  : Vecteur des couples\forces des actionneurs.

$q$  : Vecteur des positions articulaires.

$\dot{q}$  : Vecteur des vitesses articulaires.

$\ddot{q}$  : Vecteur des accélérations articulaires.

$f_e$  : Vecteur représente l'effort extérieur établi par le robot.

Il existe plusieurs méthodes pour obtenir le modèle dynamique, une de ces méthodes est la formulation de Lagrange.

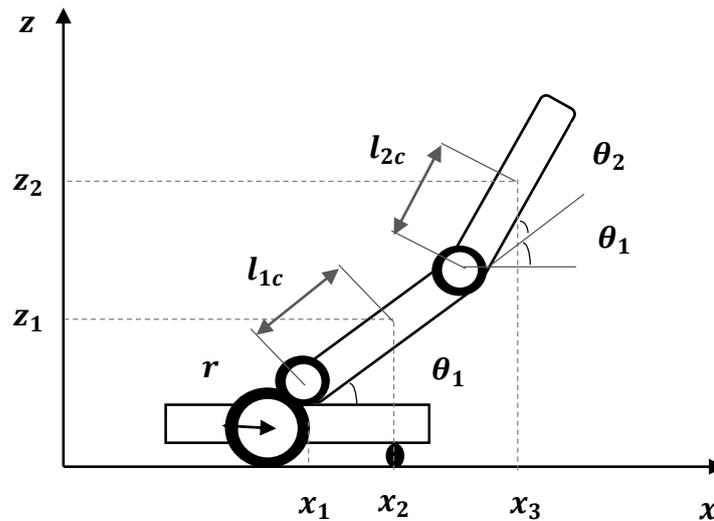


Figure 2.13 Schéma de manipulateur mobile dans le plan X-Z

**8-2- Formulation de Lagrange :**

Cette méthode mathématique est une reformulation de la mécanique classique ; en général la relation de Lagrange donné comme suivant [36] :

$$\sum f_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} \tag{2.58}$$

Avec :

$$L = T - U \tag{2.59}$$

L : Lagrangien du système.

T : Energie cinétique totale de système.

U : Energie potentiel totale de système.

q : Vecteur des variables généralisées.

$f_i$  : Les forces externes agissent sur le système.

### 8-3- Forme générale de modèle dynamique :

Le résultat de calcul des équations dynamiques donne la forme de modèle dynamique [32] :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + \tau_d(t) = J^T(q)\lambda + D(q)\tau(t) \quad (2.60)$$

Avec :

La matrice  $M(q)$  matrice d'inertie peut s'écrire sous la forme :

$$M(q) = \begin{pmatrix} M_p(q) + M_{bp}(q) & M_{b/p}(q) \\ M_{p/b}(q) & M_b(q) \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

Où

- $M_p(q)$  la matrice d'inertie de la plateforme seule,
- $M_{bp}(q)$  une matrice permettant de tenir compte de la présence de la charge du manipulateur sur la plateforme.
- $M_{b/p}(q)$  permet de tenir compte des efforts d'accélération du bras manipulateur agissant sur la plateforme.
- $M_b(q)$  la matrice d'inertie du bras manipulateur seul où la base est considérée immobile.
- $M_{p/b}(q)$  une matrice dont les termes sont liés aux efforts d'accélération de la plateforme agissant sur le bras manipulateur.

$$C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} C_p(q, \dot{q}) & C_{b/p}(q, \dot{q}) \\ C_{p/b}(q, \dot{q}) & C_b(q, \dot{q}) \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

Avec

- $C_p(q, \dot{q})$  la matrice de Coriolis et centrifuge de la plateforme seul.
- $C_b(q, \dot{q})$  la matrice Coriolis et centrifuge de manipulateur seule.
- $C_{p/b}(q, \dot{q})$  la matrice d'efforts de la plateforme agissant sur le bras manipulateur.

–  $C_{b/p}(q, \dot{q})$  la matrice d'efforts du bras manipulateur agissant sur la plateforme.

$G(q)$  Vecteur des forces de gravité associé au manipulateur.

$\tau_d(t)$  Vecteur regroupe tout dynamique non modélisée inconnue ou négligée (ex : frottements secs, dynamique des réducteurs... etc.) et éventuelles perturbations externes.

$J^T(q)\lambda$  Vecteur des forces correspond à la prise en compte des contraintes non holonome à avec  $J^T(q)$  la matrice des contraintes cinématique et  $\lambda$  multiplicateurs de Lagrange.

$D(q)$  Matrice de transformation.

$\tau(t)$  Vecteur regroupant l'ensemble des couples engendrés par les actionneurs.

Les détails de calcul du modèle dynamique sont donnés dans l'annexe A.

#### 8-4- Les contraintes non holonomes :

Les systèmes non-holonomes sont caractérisés par des équations de contraintes non-intégrables. L'existence de ces contraintes non-holonomes permet que certains mouvements instantanés soient interdits. En général, quand on trouve dans la modélisation d'un système que le nombre des variables directement contrôlable (les coordonnées articulaires) est défèrent ou nombre des variables de configuration du système, on peut dire que le système est non-holonome et il exige d'ajouter les contraintes non-holonomes.

Pour mettre le système holonome on doit éliminer la matrice des contraintes non-holonomes [37]

$$J(q) \cdot \dot{q} = 0 \quad (2.63)$$

On multiplie le modèle dynamique avec la matrice  $S(q)$ , cette matrice doit éliminer les contraintes non-holonomes tel que :

$$S(q) \cdot J(q) = S(q)^T \cdot J(q)^T = 0 \quad (2.64)$$

$$S(q) = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \theta & \frac{r}{2} \cos \theta & 0 & 0 \\ \frac{r}{2} \sin \theta & \frac{r}{2} \sin \theta & 0 & 0 \\ \frac{r}{2} & -\frac{r}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Les nouveaux vecteurs des coordonnées de système sont comme suivant :

$$q = S(q) \cdot q_a ; \quad \dot{q} = S(q) \cdot \dot{q}_a ; \quad \ddot{q} = S(q) \cdot \ddot{q}_a + \dot{S}(q) \cdot \dot{q}_a \quad (2.66)$$

Avec : 
$$q_a = [\theta_r, \theta_l, \theta_1, \theta_2]^T \quad (2.67)$$

$$\dot{q}_a = [\dot{\theta}_r, \dot{\theta}_l, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^T \quad (2.68)$$

Le changement des coordonnées généralisé  $[\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}]^T$  vers  $[\dot{\theta}_r, \dot{\theta}_l]^T$  est donner par la matrice suivant [36] :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r/2 \cos \theta & r/2 \cos \theta \\ r/2 \sin \theta & r/2 \sin \theta \\ r/2 & -r/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

D'où :

$$\begin{cases} \dot{\theta}_r = \frac{1}{r} (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta + R \dot{\theta}) \\ \dot{\theta}_l = \frac{1}{r} (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta - R \dot{\theta}) \end{cases} \quad (2.70)$$

$r$ : Le rayon de la roue.

$R$  : La distance entre la roue et le centre de gravité.

Le modèle dynamique doit être :

$$\bar{M}(q)\ddot{q}_a + \bar{C}(q, \dot{q})\dot{q}_a + \bar{G}(q) = \bar{D}(q) \cdot \tau \quad (2.71)$$

Avec :

$$\bar{M}(q) = S(q)^T \cdot M(q) \cdot S(q) \quad (2.72)$$

$$\bar{C}(q, \dot{q}) = S(q)^T (C(q, \dot{q}) \cdot S(q) + M(q) \cdot \dot{S}(q)) \quad (2.73)$$

$$\bar{G}(q) = S(q)^T \cdot G(q) \quad (2.74)$$

$$\bar{D}(q) = S(q)^T \cdot D(q) \quad (2.75)$$

### 9- Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons fait une modélisation du robot, on a commencé avec le modèle géométrique qui permet de déterminer la position de l'organe terminal par rapport aux coordonnées de système. Ensuite nous avons établi le modèle cinématique pour avoir le changement des vitesses et des accélérations du robot. Après nous avons calculé le modèle dynamique qui sera utilisé par la suite pour synthétiser la commandé du système.

---

# **Chapitre 3**

---

**Commande d'un robot manipulateur mobile**

## 1- Introduction :

Le but de l'automatique dans la robotique est de faire une commande permet que le système soit dans un état stable. La commande est une étape nécessaire pour avoir la stabilité du robot. Cela vaut dire qu'il existe une loi de commande  $u(t)$  qui peut ramener le robot de son état initial à un état final. Cette commande va être appliquée sur le modèle dynamique de robot.

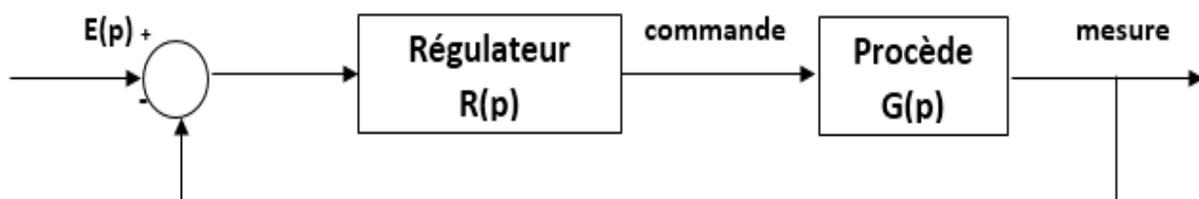
Les systèmes robotiques non-linéaires peut être commandés de plusieurs manière comme :

- La commande classique de type PID.
- La commande par découplage non linéaire.
- La commande passive.
- La commande fondée sur une fonction de Lyapunov.
- La commande adaptative.
- La commande à structure variable (modes glissants).

Nous allons travailler dans ce chapitre sur la synthèse d'une commande linéaire (la commande classique PID) et d'une commande non linéaire (la commande robuste à structure variable qui le mode glissant).

## 2- Régulation :

La régulation d'un système est pour réduire l'erreur d'après la comparaisant entre le signal d'entrée et le signal de sortie de système. D'autre terme un régulateur est composé d'un comparateur qui élabore en permanence le signal d'erreur  $\varepsilon(t) = t_e - t_s$  et d'un correcteur qui élabore à partir du signal d'erreur  $\varepsilon(t)$  la grandeur de commande  $t_u$ .



**Figure 3.1** Schéma bloc de régulation.

### 3- Commande linéaire classique PID :

#### 3-1-Définition :

La commande classique est une commande linéaire avec un gain constant permet de réguler le système automatiquement d'après le signal d'erreur. Un contrôleur PID (proportionnel-intégral-dérivé) est un mécanisme appliqué sur les systèmes à boucle fermée qui doit réduire l'erreur de système (l'erreur entre la consigne et la mesure). Ce régulateur permet de minimiser les perturbations de système. Il est très utilisable dans l'industrie grâce à la facilité de sa programmation et son faible coût.

Le contrôleur PID composé d'un proportionnel qui doit se multiplier avec le signal d'erreur, d'un intégrateur et un dérivateur qui doivent intégrer et dériver le signal d'erreur respectivement.

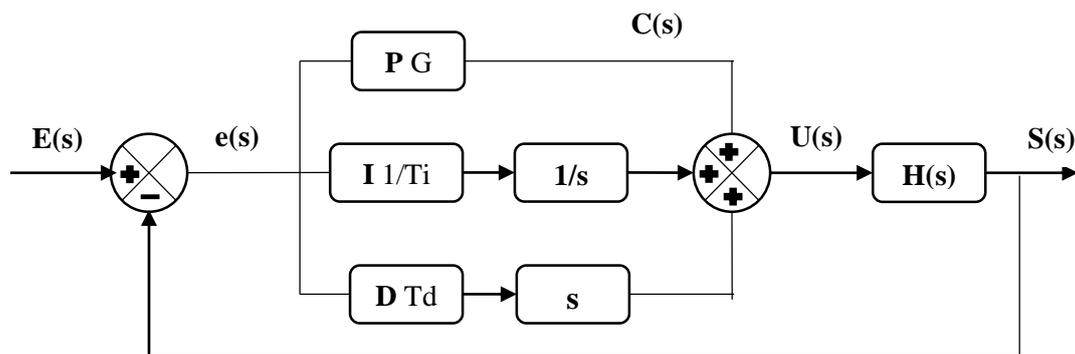


Figure 3.2 Modèle générale d'un régulateur PID.

#### 3-2- Proportionnel :

C'est une constante  $K_p$  multipliée avec le signal d'erreur, lorsque  $K_p$  augmente, le temps de montée (Rise time) est plus court mais il y a un dépassement plus important. Le temps d'établissement varie peu et l'erreur statique se trouve améliorée.

$$u(t) = k_p \times e(t) \rightarrow u(p) = k_p \times e(p) \quad (3.1)$$

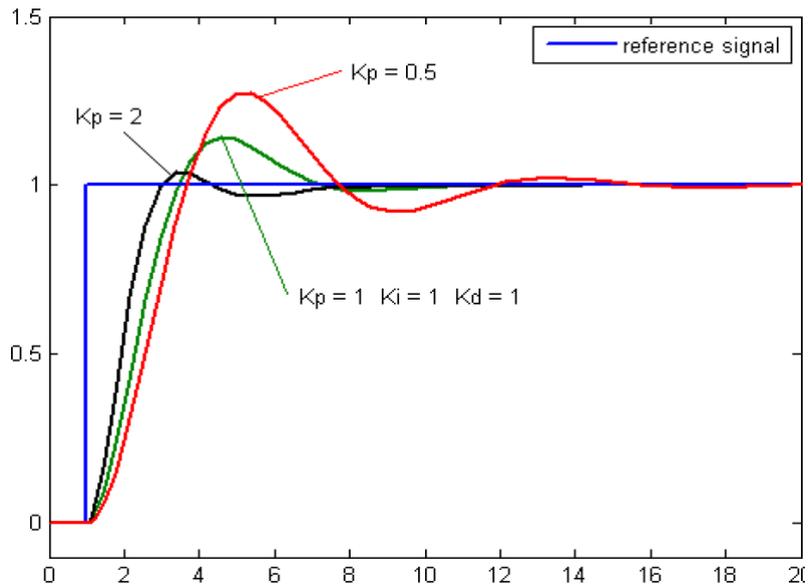


Figure 3.3 Proportionnel [38].

**3-3- Intégral :**

Cette action permet d'intégrer l'erreur dans un intervalle de temps, elle est multipliée par une constant  $K_I$ . Lorsque  $K_I$  est élevée l'erreur statique est plus corrigée.

$$u(t) = K_I \times \int_0^t e(\tau) d\tau \rightarrow u(p) = K_I \times e(p)/p \tag{3.2}$$

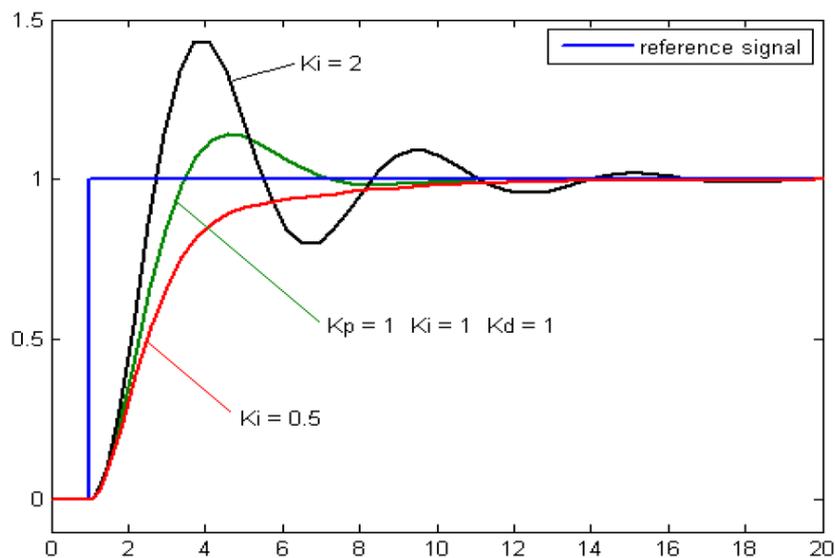


Figure 3.4 Intégrateur [38].

**3-4- Dérivateur :**

Comme l'intégrateur, le dérivateur dérive l'erreur puis la multiplie par une constant  $K_D$ , cette action réduit le dépassement et le temps de stabilisation.

$$u(t) = K_D \times \frac{\partial e(t)}{\partial t} \rightarrow u(p) = K_D \times e(p) \times p \quad (3.3)$$

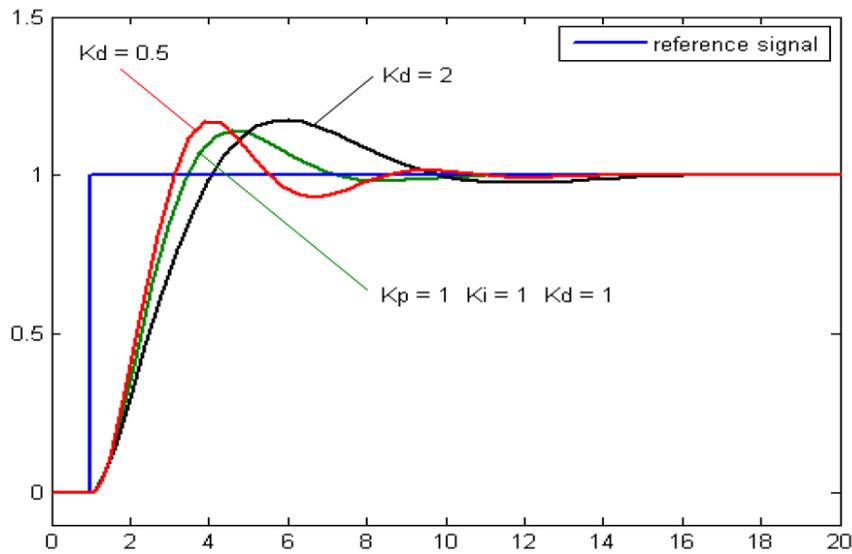


Figure 3.5 Dérivateur [38].

### 3-5- Loi de commande classique :

La loi de commande PID est donné par :

$$u(t) = K_P \times e(t) + K_I \times \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \times \frac{\partial e(t)}{\partial t} \quad (3.4)$$

$$u(p) = e(p) \times (k_p + K_I/p + K_D \times p) \quad (3.5)$$

Avec :  $e(t) = (q_d - q)$

$u(t)$  : La commande.

$e(t)$  : L'erreur statique.

$q$  : Position, angle courante.

$q_d$  : Position, angle désirée.

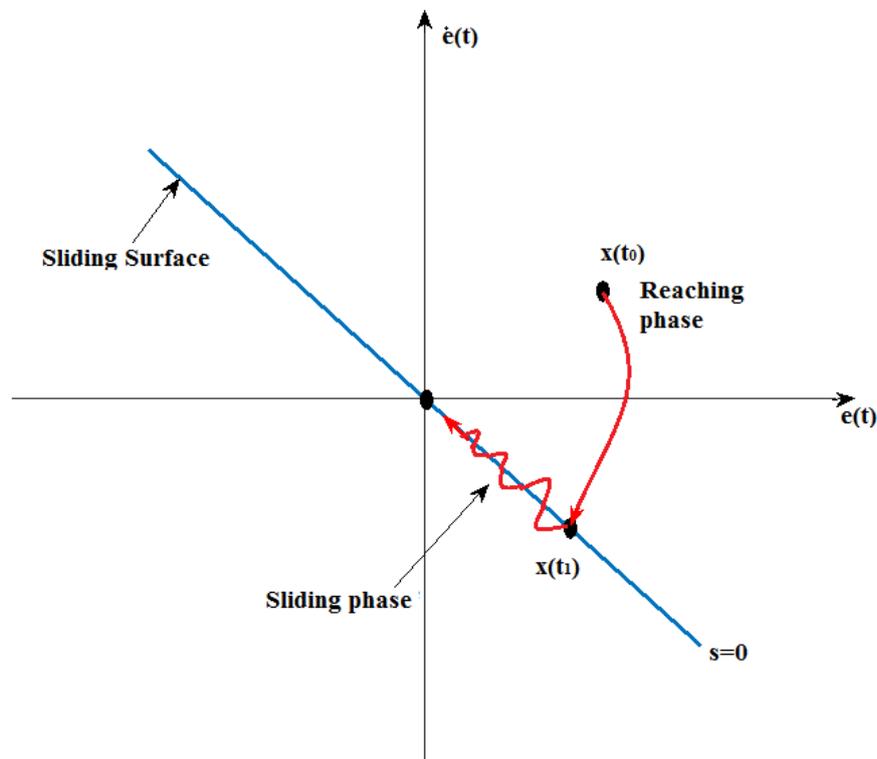
$K_P, K_I, K_D$  : Des gains.

**Tableau 3.1** Tableau de résumé de PID.

	Temps de montée	Temps de stabilisation	dépassement	Erreur statique
$K_P$	Diminue	Augmente	Augmente	Diminue
$K_I$	Diminue	Augmente	Augmente	Annule
$K_D$	-	Diminue	Diminue	-

#### 4- La commande par Mode Glissant classique :

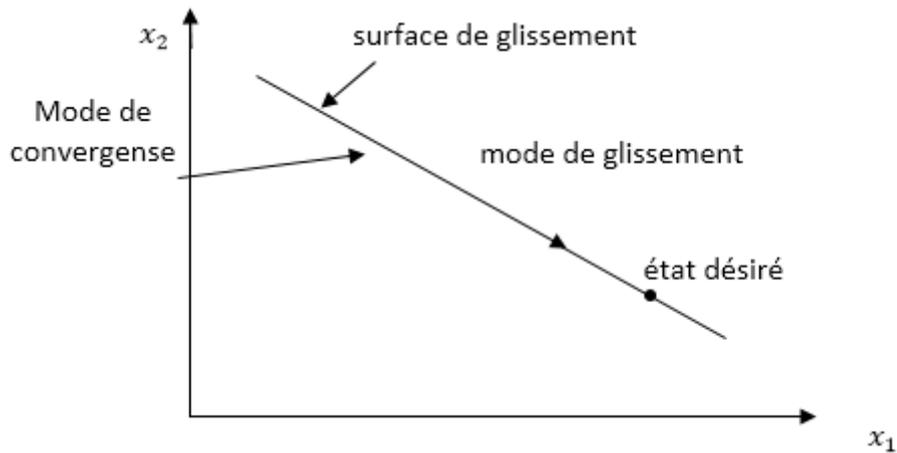
La commande par mode glissant (SMC : Sliding Mode Controller) consiste à concevoir une loi de commande, qui amène ou bien guide le vecteur d'état d'un système bouclée vers une surface donnée appelée surface de glissement. Cette commande est une commande à structure variable, c'est-à-dire elle peut changer sa structure et commuter entre deux valeurs à l'aide d'une logique de commutation autour de la surface de glissement  $S(q)$  jusqu'au point d'équilibre. Voir Fig 3.6-a- .



**Figure 3.6-a-** Convergence de la trajectoire du système du point initial  $x(t_0)$  vers l'origine du plan de phase.

Cette commande se fait en deux étapes :

Une première étape consiste à prendre le système vers le surface de glissement appelée le mode de convergence et une deuxième étape qui fait le glissement de système sur cette surface suivent la Fig 3.6-b- .



**Figure 3.6 -b-** Principe de la convergence de système vers la surface de glissement.

#### 4-1- Propriétés de mode glissant :

- Le vecteur d'état de système en mode glissant ayant une dimension inférieure à celle de l'espace d'état.
- La détermination de la dynamique de système en mode glissant est en relation avec le choix des coefficients de surface de glissement.
- La théorie de mode glissant fonctionne mieux avec des commandes discontinues.
- La commande par mode glissant est une commande robuste par rapport aux variations de certains paramètres.
- La commande par mode glissant est une commande simple et robuste qui peut avoir une haute précision et une bonne stabilité.

#### 4-2- Conception de la commande par mode glissant :

La structure de la commande par mode glissant est composée de deux parties, l'une dit continue, présente la dynamique de système durant le mode de convergence qui a le rôle d'éliminer les perturbations de système non linéaire.

On peut citer trois étapes principales pour déterminer la commande par mode glissant [39] :

- Choix de la surface de glissement.
- Etablissement des conditions d'existence de convergence.

- Détermination de la loi de commande.

#### 4-3- Choix de la surface de glissement :

Pour un système non linéaire défini avec une représentation d'état de la forme :

$$\dot{q} = f(q) + g(q).u \quad (3.6)$$

Avec  $q \in \mathbb{R}^n$  et  $u \in \mathbb{R}^m$

Le nombre des surfaces dépend avec m le nombre des entrées de système.

Pour le choix de la forme de surface de glissement, deux méthodes sont proposées. La première dans le plan d'état qui offre une réponse transitoire lente. La deuxième dans le plan de phase qui est la forme d'un scalaire extrait de la dynamique désirée.

On définit la forme suivante qui assure la détermination de la surface de glissement tel que : si  $x_i$  est une sortie de système, le surface  $S_i(q)$  donnée par :

$$S_i(q) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} e_i \quad (3.7)$$

Avec  $e_i = q_i - q_{id}$  n est le degré relatif associé à  $q_i$  qui reprisant le nombre minimum de fois qu'il faut dériver la sortie et  $q_{id}$  est la valeur désirée de  $q_i$ .

#### 4-4- Etablissement de condition d'existence de convergence :

Cette étape assure la convergence de vecteur d'état vers les surfaces de glissement choisis. On présente un critère conçu autour de la fonction de Lyapunov.

Donc, il s'agit de définir une fonction scalaire  $V(q)$  positive pour chaque sortie tel que :

$$V(q) = \frac{1}{2} S^2(q) \quad (3.8)$$

(3.8) est une condition nécessaire et suffisante, appelée la condition d'attractivité.

Pour que la variable de glissement  $S_i(q)$  tende vers 0 la dérive temporelle de  $V(q)$  doit être négative :

$$\dot{V}(q) < 0 \quad (3.9)$$

C'est-à-dire pour le carrée de la distance  $S^2(q)$  vers la surface de commutation associée diminue dans le temps et obliger les trajectoires du système à commuter autour de cette surface, il faut que :

$$\dot{S}(q) \cdot S(q) < 0 \tag{3.10}$$

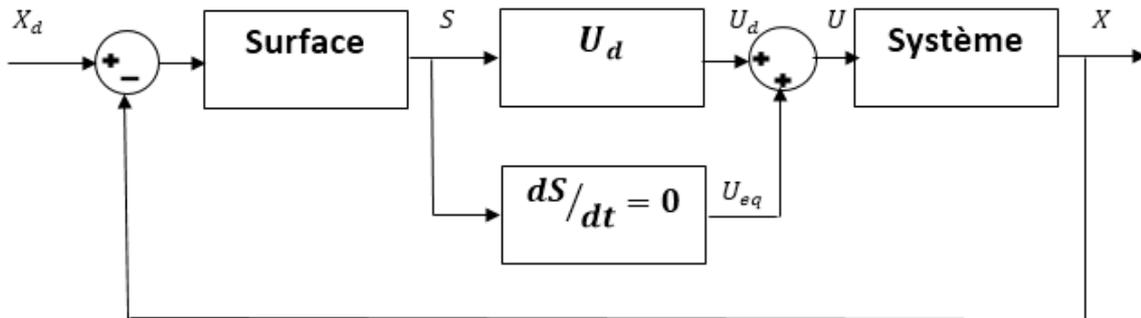
**4-5- Le calcul de la loi de commande :**

Après la surface de glissement est choisi, ainsi que le critère de convergence, on doit déterminer la commande pour amener la variable vers le surface, en présente la condition d'existence du mode glissant.

Lorsqu'il y a un régime glissant, la dynamique du système est indépendante de la loi de commande qu'il est comporte deux composantes, l'une concernant la linéarisation exacte  $U_{eq}$  appelé équivalente et l'autre stabilisante  $U_d$  utilisée pour éliminer les effets d'imprécision de modèle et de diminuer les perturbations extérieures.

On définit la loi de commande par la formule suivant :

$$U = U_{eq} + U_d \tag{3.11}$$



**Figure 3.7** Schéma bloc de la commande par mode glissant.

**4-6- La commande équivalente :**

La commande équivalente est une fonction continue qui présente physiquement la valeur moyenne de la commande  $U$  qui est-elle obtenue grâce aux conditions d'invariance de la surface.

$$\begin{cases} S = 0 \\ \dot{S} = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

$U_{eq}$  est déduite de cette dernière relation.

Si on considéré le système de 2<sup>ème</sup> ordre :

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, t) + U(t) \tag{3.13}$$

On définit la surface de glissement :

$$S(q) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{2-1} \cdot e \quad (3.14)$$

$$S(q) = \dot{e} + \lambda e \quad (3.15)$$

La loi de la commande équivalente :

$$\ddot{S}(q) = \ddot{e} + \lambda \dot{e} \quad (3.16)$$

$$\ddot{S}(q) = \ddot{q} - \ddot{q}_d + \lambda \dot{e} \quad (3.17)$$

D'après (3.17) et (3.18)

$$\ddot{q} = \ddot{q}_d - \lambda \dot{e} \quad (3.18)$$

$$f + U(t) = \ddot{q}_d - \lambda \dot{e} \quad (3.19)$$

Donc pour  $S = 0$  il doit choisir :

$$U_{eq}(t) = -f + \ddot{q}_d - \lambda \dot{e} \quad (3.20)$$

#### 4-7- La commande discontinue :

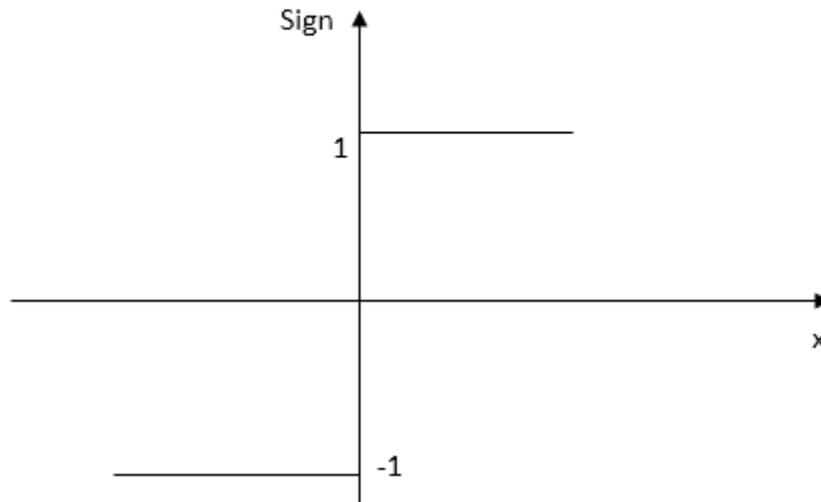
La commande discontinue est une composante non linéaire force les variables a contrôler vers la surface de glissement pour assurer une convergence et un régime glissant.

On prend :

$$U_d = -k \cdot \text{sign}(S(q)) \quad (3.21)$$

Ou  $k = \text{diag}(k_1, \dots, k_m)$  qui est la forme d'un relais.

$$\text{sign}(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S > 0 \\ -1 & \text{si } S < 0 \end{cases} \quad (3.22)$$



**Figure 3.8** Fonction Sign.

D'après (3.16), on définit la loi de la commande :

$$U = -f + \ddot{q}_d - \lambda \dot{e} - k \cdot \text{sign}(S) \quad (3.23)$$

#### 4-8- La stabilité de système :

Pour avoir la stabilité de système robot manipulateur mobile, on a appelé les conditions de convergence du système.

On définit la fonction de Lyapunov suivante ; elle est toujours positive :

$$V = \frac{1}{2} S^2 \quad (3.24)$$

Avec :

S est la surface de glissement :

$$S = \dot{e} + \lambda e \quad \text{et son dérivé } \dot{S} = \ddot{e} + \lambda \dot{e}$$

$e$  : L'erreur de système donné par.

$$e = q_a - q_{ad} \quad (3.25)$$

$$\ddot{e} = \ddot{q}_a - \ddot{q}_{ad} \quad (3.26)$$

La condition de la stabilité du système donne par l'inégalité suivant :

$$\dot{V} \leq 0 \quad (3.27)$$

Avec  $\dot{V}$  est la premier dérivée de la fonction du Lyapunov on déduire :

$$S \cdot \dot{S} \leq 0 \quad (3.28)$$

On présente l'étude de la sige de  $\dot{V}$  :

$$\dot{V} = S \cdot \dot{S} \quad (3.29)$$

$$\dot{V} = S(\ddot{e} + \lambda\dot{e}) \quad (3.30)$$

$$\dot{V} = S(\ddot{q}_a - \ddot{q}_{ad} + \lambda\dot{e}) \quad (3.31)$$

D'après le modèle dynamique du système :

$$\dot{V} = S(\bar{M}^{-1}(-\bar{C} \cdot \dot{q}_a - \bar{G}) + \bar{M}^{-1} \cdot U - \ddot{q}_{ad} + \lambda\dot{e}) \quad (3.32)$$

$$\dot{V} = S(\bar{M}^{-1}(-\bar{C} \cdot \dot{q}_a - \bar{G}) + \bar{M}^{-1} \cdot (U_{eq} + U_d) - \ddot{q}_{ad} + \lambda\dot{e}) \quad (3.33)$$

$$\dot{V} = S(\bar{M}^{-1}(-\bar{C} \cdot \dot{q}_a - \bar{G}) + \bar{M}^{-1} \cdot (\bar{C} \cdot \dot{q}_a + \bar{G} + \bar{M}(\ddot{q}_{ad} - \lambda\dot{e}) - k \cdot \text{sign}(S)) - \ddot{q}_{ad} + \lambda\dot{e}) \quad (3.34)$$

$$\dot{V} = S(-\bar{M}^{-1} \cdot k \cdot \text{sign}(S)) \quad (3.35)$$

$$\dot{V} = -K \cdot \bar{M}^{-1} \cdot |S| \quad (3.36)$$

$\bar{M}^{-1}$  est symétrique et défini positive.

D'où :  $\dot{V} \leq 0 ; \forall k \geq 0$ .

#### 4-9- Le broutement (chattering) :

Dans un mode glissant idéal, la commande commute à une haute fréquence. L'effet des termes discontinus appliqués à la commande peuvent entrainer un phénomène de broutement appelé en anglais « chattering ». Le phénomène de broutement est dû aux fortes oscillations des trajectoires autour de la surface de glissement choisie.

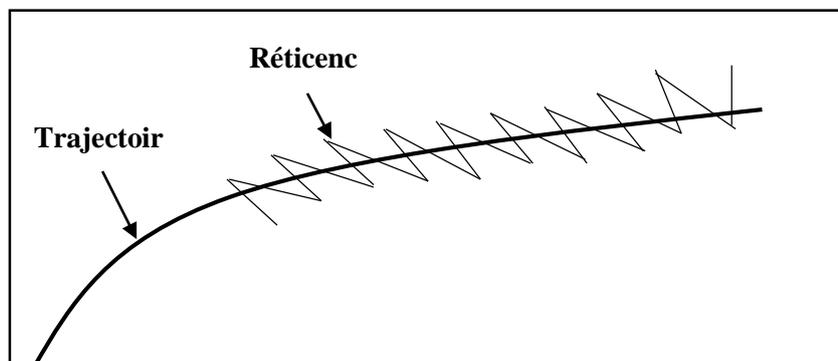


Figure 3.9 Phénomène de broutement.

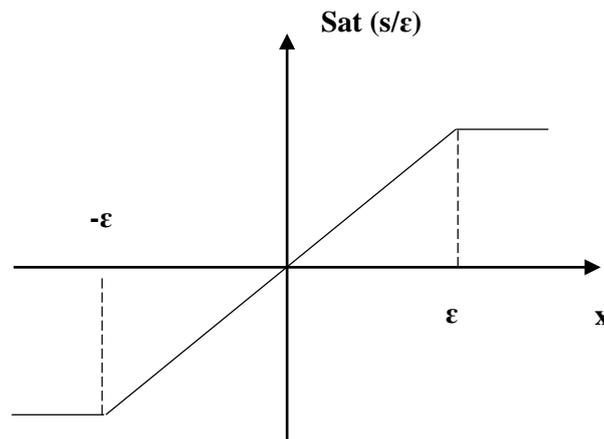
#### 4-10- Solution pour atténuer le phénomène de broutement :

Pour éliminer le phénomène de broutement des nombreuses solutions ont été proposées dont on cite :

- La solution de couche limite.
- Fuzzy sliding mode.
- Mode glissant d'ordre supérieur.
- Les lois d'approche.

##### 4-10-1- Solution de couche limite :

Cette solution est l'une des méthodes les plus connu pour éliminer le phénomène de broutement. Elle s'agit de remplacer la fonction Sign de la commande discontinu par une approximation continue tel que la fonction de saturation [40] :



**Figure 3.10** Fonction de saturation.

$$sat(s) = \begin{cases} \frac{s}{\varepsilon} & si \left| \frac{s}{\varepsilon} \right| \leq 1 \\ sign(s) & si \left| \frac{s}{\varepsilon} \right| > 1 \end{cases} \quad (3.37)$$

Avec  $\varepsilon$  est la longueur du seuil de la fonction de saturation.

##### 4-10-2- Solution par lois d'approche :

Dans le domaine d'élimination de phénomène de broutement, Gao et Hung ont proposé deux lois pour réduire les commutations. La première loi contient un terme proportionnel pour que le système atteigne rapidement la surface de glissement ; ce terme proportionnel annule l'effet de la partie discontinu Sign (s) [41].

La loi est donnée par :

$$\dot{s} = -k \operatorname{sign}(s) - Q \cdot s \quad (3.38)$$

La deuxième loi contient une puissance fractionnaire multipliée avec le Sign (s) tel que :

$$\dot{s} = -k|s|^\rho \operatorname{sign}(s) \quad (3.39)$$

Avec  $\rho$  est un réel strictement entre 0 et 1.

#### 4-10-3- Solution par mode glissante d'ordre supérieur :

Nous faisons appel aux modes glissantes d'ordre supérieur pour réduire la commutation de la commande en gardant les propriétés de convergence et de robustesse de commande par mode glissant classique.

Ces méthodes consistent d'avoir les gains et des dérivés de la surface avec le terme discontinu pour réduire le chattering.

On considère le système non linéaire

$$\ddot{x} = f(t, x) + g(t, x) \cdot u \quad (3.40)$$

L'établissement d'un régime glissant d'ordre deux par rapport à S consiste à réaliser une commande basée sur la deuxième dérivée de la surface de glissement qui, de manière générale, peut s'écrire sous la forme [41] :

$$\ddot{s} = \varphi(x, t) + \phi(x, t)v \quad (3.41)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} v = \dot{u} & \text{si } \frac{d}{dx} \dot{s} \neq 0 \\ v = u & \text{si } \frac{d}{dx} \ddot{s} \neq 0 \end{cases}$$

On considère les variables positives  $S_0, K_m, K_M, C_0$  on impose les conditions suivants [42] :

- Les fonctions  $\phi(x, t)$  et  $\varphi(x, t)$  sont bornées.
- Si  $|S(x, t)| < S_0$  donc  $0 < K_m \leq \frac{d}{dt} \dot{S} \leq K_M$  et  $\left| \frac{d\dot{S}}{dt} \right| < C_0$ .

Il existe plusieurs algorithmes du mode glissant d'ordre deux. Dans ce qui suit, nous présentons ceux qui sont les plus utilisés en vue d'étudier leurs faisabilités pour la commande du système manipulateur mobile.

#### a- Prescribed convergence law (PCL) :

C'est un algorithme qui a été définie par Emelyanov et Al on 1986 de la forme [42] :

$$\dot{u} = \begin{cases} -u & , |u| > 1 \\ -\alpha \operatorname{sign}(\dot{s} + g(s)) & , |u| \leq 1 \end{cases} \quad (3.42)$$

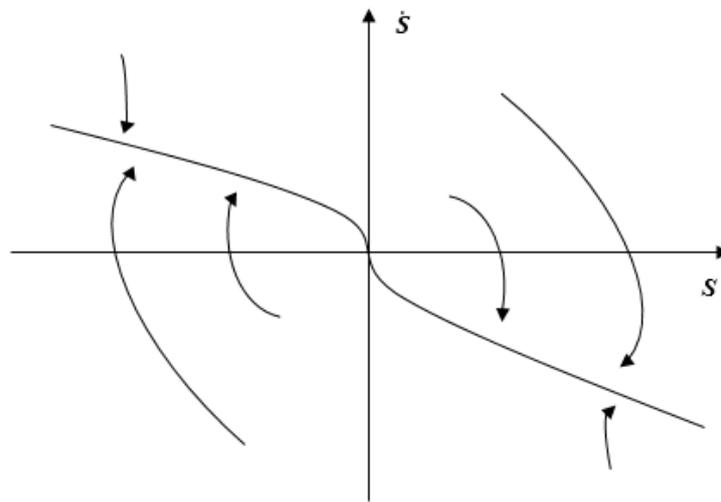
Avec  $\alpha > 0$  et la fonction  $g(s)$  est toujours continu à part on  $S=0$  qu'elle donner par :

$$g = -\lambda \cdot |s|^\gamma \operatorname{sign}(s)$$

Avec  $\lambda > 0$  et  $0.5 \leq \gamma < 1$

La condition suffisante pour une convergence en temps fini vers la surface  $S$  est définie par la relation suivant :

$$\alpha K_m - C_0 > \frac{\lambda^2}{2} \quad (3.43)$$



**Figure 3.11** La convergence de l'algorithme PCL dans le plan de phase.

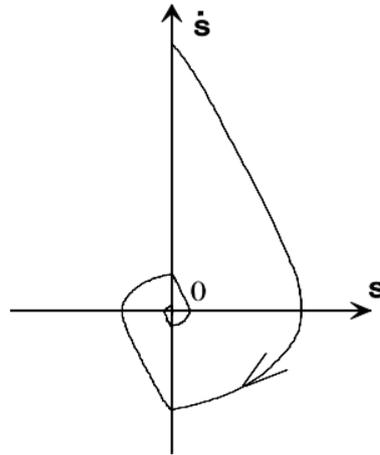
**b- Algorithme de Twisting :**

L'algorithme de Twisting publié par Levantovsky, 1985 ; Emelyanov et Al, 1986 qui consiste la tourne de la trajectoire du système autour de l'origine dans le plans de phase [42].

On définit la forme de commande :

$$\dot{u} = \begin{cases} -u & , |u| > 1 \\ -r_1 \operatorname{sign}(s) & , s \cdot \dot{s} \leq 0 , |u| \leq 1 \\ -r_2 \operatorname{sign}(\dot{s}) & , s \cdot \dot{s} > 0 , |u| \leq 1 \end{cases} \quad (3.44)$$

Avec  $r_1$  et  $r_2$  sont des entiers tel que  $r_2 > r_1 > 0$  et  $\begin{cases} r_1 > \frac{4K_M}{s_0} , & r_1 > C_0/K_m \\ K_m r_2 - C_0 > K_M r_1 + C_0 \end{cases}$



**Figure 3.12** La convergence de l'algorithme Twisting dans le plan de phase.

**c- Algorithme de Super Twisting :**

L'algorithme est proposé par Emelyanov en 1990. Il est composé de deux parties continues  $u_1$  et  $u_2$ .

On définit la forme de la commande [42] :

$$u = u_1(t) + u_2(t) \quad (3.45)$$

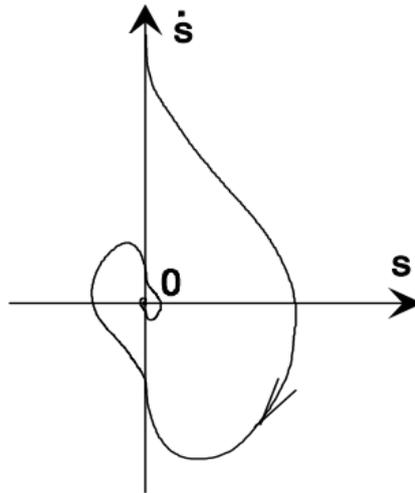
$$\dot{u}_1 = \begin{cases} -u, & |u| > 1 \\ -\alpha \text{sign}(s), & |u| \leq 1 \end{cases} \quad (3.46)$$

$$u_2 = \begin{cases} -\lambda |S_0|^\rho \text{sign}(s), & |s| > S_0 \\ -\lambda |s|^\rho \text{sign}(s), & |s| \leq S_0 \end{cases} \quad (3.47)$$

Avec :  $\alpha, \lambda > 0$  et  $0 < \rho \leq 1/2$ .

Pour la condition de la convergence de l'état du système vers l'origine en temps fini :

$$\begin{cases} \alpha > \frac{4K_M}{S_0}, \quad \alpha > C_0/K_m \\ \rho(\lambda K_m)^{1/\rho} > (K_M \alpha + C_0)(2K_M)^{\frac{1}{\rho}-2} \end{cases}$$



**Figure 3.13** La convergence de l'algorithme super Twisting dans le plan de phase.

**d- La commande Quasi-continue (QC) :**

L'algorithme de la commande Quasi-continue est développé par Levant [43], basée sur la théorie des systèmes à structure variable.

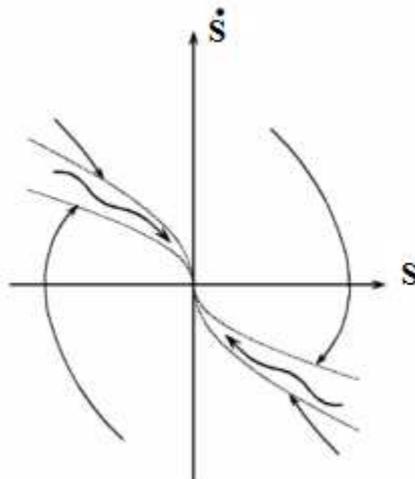
La commande d'ordre 2 est définie par :

$$u = -\alpha \frac{\dot{s} + |s|^{1/2} \text{sign}(s)}{|\dot{s}| + |s|^{1/2}} \quad (3.48)$$

Avec  $\alpha > 0$ .

La condition de la convergence de l'état du système vers l'origine en temps fini est :

$$\alpha K_m - C_0 > 0$$



**Figure 3.14** La convergence de l'algorithme QC dans le plan de phase.

## 5- Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux méthodes de commande : l'une est linéaire avec PID et l'autre non linéaire avec le mode glissant. D'abord, nous avons défini la loi de commande classique linéaire PID. Ensuite, nous avons défini la commande par mode glissant classique et présenter quelque solutions pour diminuer les commutations de cette commande.

Les résultats de la simulation de ces commandes appliquées sur le modèle dynamique de manipulateur mobile seront présentés dans le chapitre suivant.

---

# Chapitre 4

---

Simulation et résultats

## 1- Introduction :

Dans ce chapitre on va appliquer les lois de commandes étudié dans le chapitre 3 sur le modèle dynamique de robot développé dans le chapitre 2.

Après, on va faire des tests de simulation sur MATLAB/SIMULINK discuter et comparer les résultats obtenus.

## 2- Génération de trajectoire :

Dans le système de manipulateur mobile, on savoir quatre valeurs qui définies les trajectoires désirées  $(\theta_{1d}, \theta_{rd}, \theta_{2d}, \theta_{3d})$ .

On considère l'erreur de position de la plateforme mobile et le changement des coordonnées suivant :

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \theta_d - \theta \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

On considère d'aborde une variation très petite de  $\theta$  ( $\theta \simeq 0$ ) c'est-à-dire on va avoir juste un changement dans la position x de la plateforme mobile.

D'où l'erreur de position de la plateforme mobile va être reformulée comme suivant :

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \theta_d - \theta \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

On présente la matrice cinématique de la plateforme mobile suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r}{2} \cos \theta & \frac{r}{2} \cos \theta \\ \frac{r}{2} \sin \theta & \frac{r}{2} \sin \theta \\ \frac{r}{2R} & -\frac{r}{2R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

qui implique donc :

$$\dot{\theta} = \frac{(\dot{\theta}_r - \dot{\theta}_l) \times r}{2R} \Rightarrow \theta = \frac{\theta_r - \theta_l}{2R} \times r \quad (4.5)$$

Pour avoir la petite variation de  $\theta$ , les angles  $\theta_r$  et  $\theta_l$  doit être égaux, ce qui donne la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r}{2} \cos \theta & \frac{r}{2} \cos \theta \\ 0 & 0 \\ \frac{r}{2R} & -\frac{r}{2R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

### 3- Commande de manipulateur mobile par la commande classique PID :

On a appliqué la commande classique PID que nous avons cité dans le chapitre 3 sur le modèle dynamique développé dans le 2<sup>ème</sup> chapitre.

On présente le schéma bloc suivant qui convient à la commande PID appliquée au modèle dynamique de robot manipulateur mobile, le schéma bloc est simulé par Simulink sous l'environnement MATLAB, pour un temps de 10 secondes.

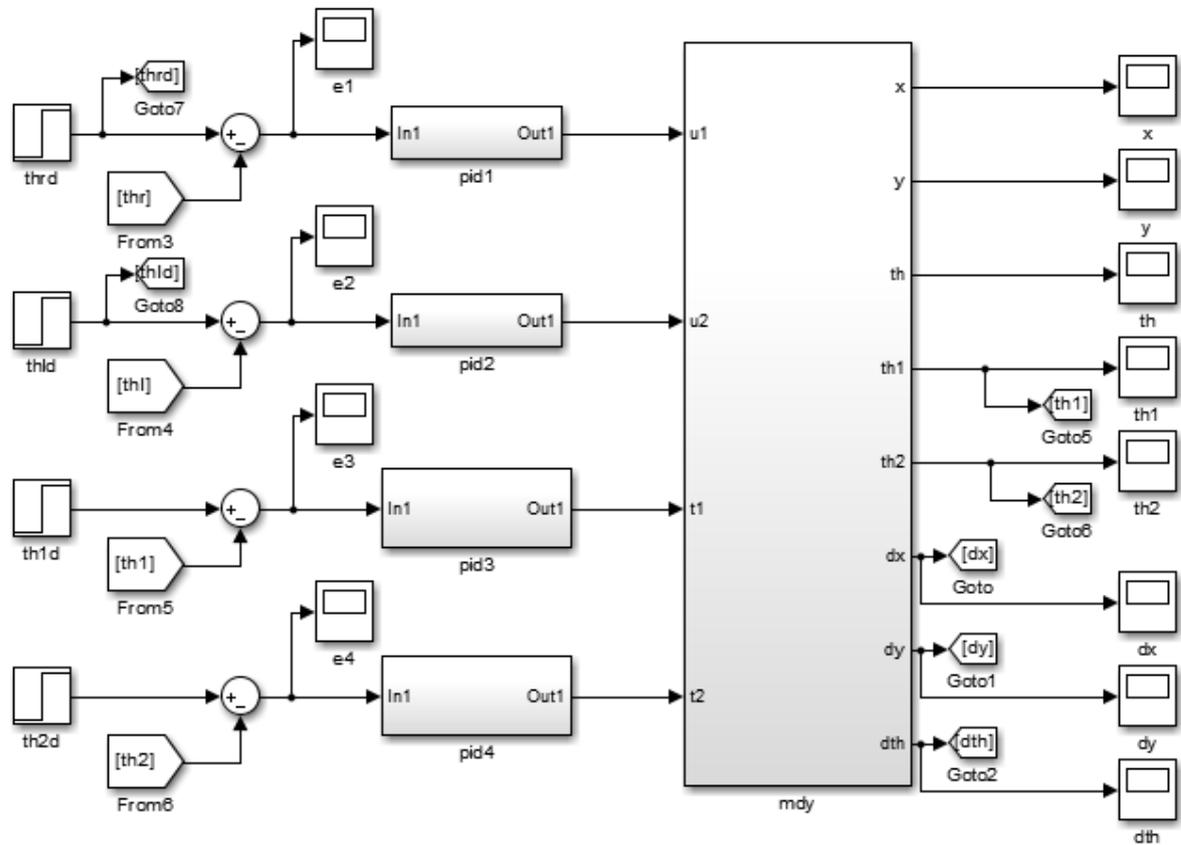


Figure 4.1 Schéma bloc de modèle dynamique avec contrôleur PID.

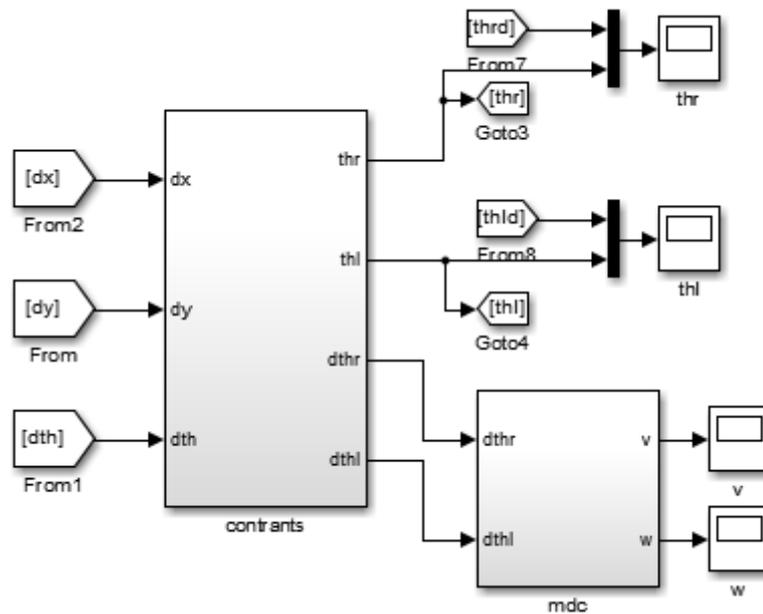


Figure 4.2 Schéma bloc des contraintes non holonome

**3-1- Résultats de simulation :**

Les valeurs initiales des variables articulaires sont données par :

$[\theta_r; \theta_l; \theta_1; \theta_2] = [0; 0; 0,1; 1]$ , la trajectoire désirée est un déplacement de 0 à 0.2m de la plateforme le long de l'axe x, aucun changement dans y et  $\theta$ .

Pour le bras manipulateur, on a fait une régulation pendant le mouvement du chariot mobile, lorsque la plateforme atteindra le point  $(x, y)=(1,0)$ , le 1<sup>er</sup> bras manipulateur déplace suivant une trajectoire désirée  $\theta_{1d} = t$  jusqu'à  $\theta_1 = 1rad$  après le 2<sup>ème</sup> bras change sa position jusqu'à  $\theta_2 = 1$  avec une trajectoire désirée  $\theta_{2d} = t$ .

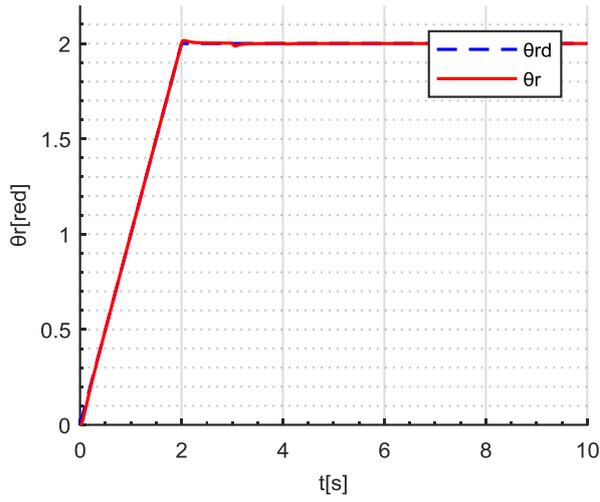
Les paramètres de commande sont :

$$k_{p1} = 20 , k_{p2} = 20 , k_{p3} = 100 , k_{p4} = 10$$

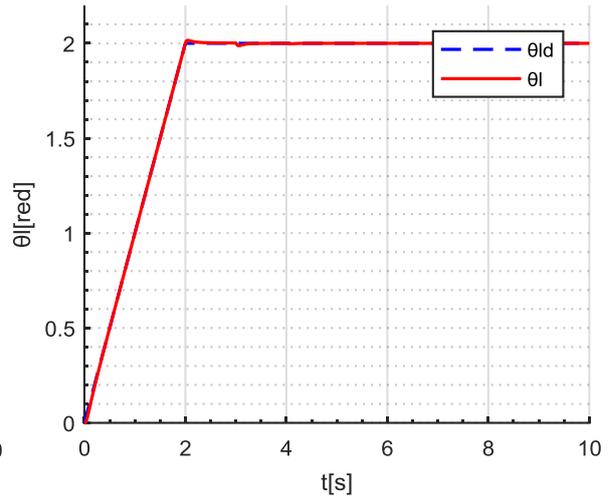
$$k_{d1} = 0.1 , k_{d2} = 0.1 , k_{d3} = 0.1 , k_{d4} = 0.1$$

$$k_{I1} = 3 , k_{I2} = 3 , k_{I3} = 5 , k_{I4} = 2$$

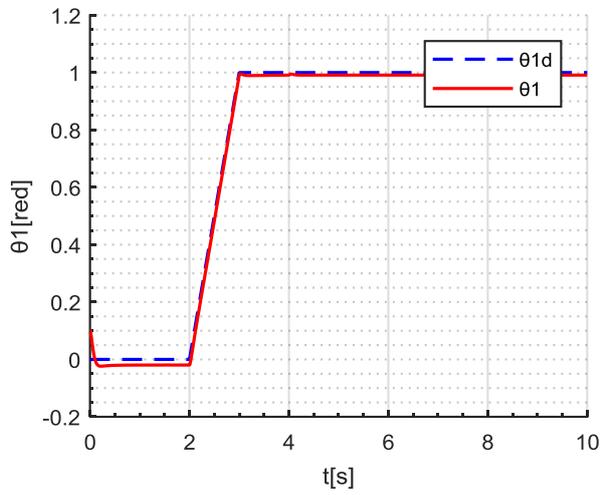
Les résultats de simulation sont présentés dans la figures 4.3-4.8, Elles incluent les sorties du système, les erreurs, les dérivée des trajectoires  $\frac{d\theta_r}{dt}, \frac{d\theta_l}{dt}, \frac{d\theta_1}{dt}$  et  $\frac{d\theta_2}{dt}$  de  $\theta_r, \theta_l, \theta_1$  et  $\theta_2$  ; la vitesse et la vitesse angulaire v [m/s] et w [rad/s] de plateforme.



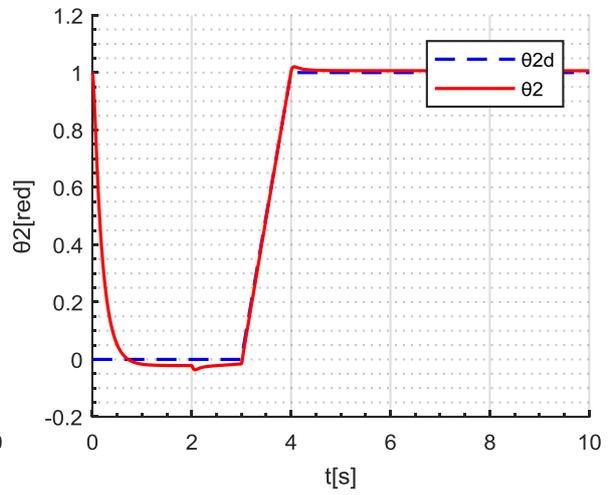
(a) Les trajectoires de  $\theta_r$  et  $\theta_{rd}$



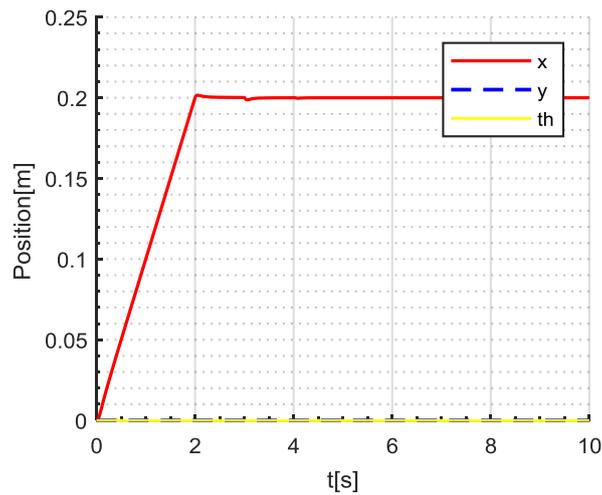
(b) Les trajectoires de  $\theta_l$  et  $\theta_{ld}$



(c) Trajectoire de  $\theta_1$  et  $\theta_{1d}$



(d) Trajectoire de  $\theta_2$  et  $\theta_{2d}$



(e) trajectoire de plateforme

**Figure 4.3** : les trajectoires avec PID

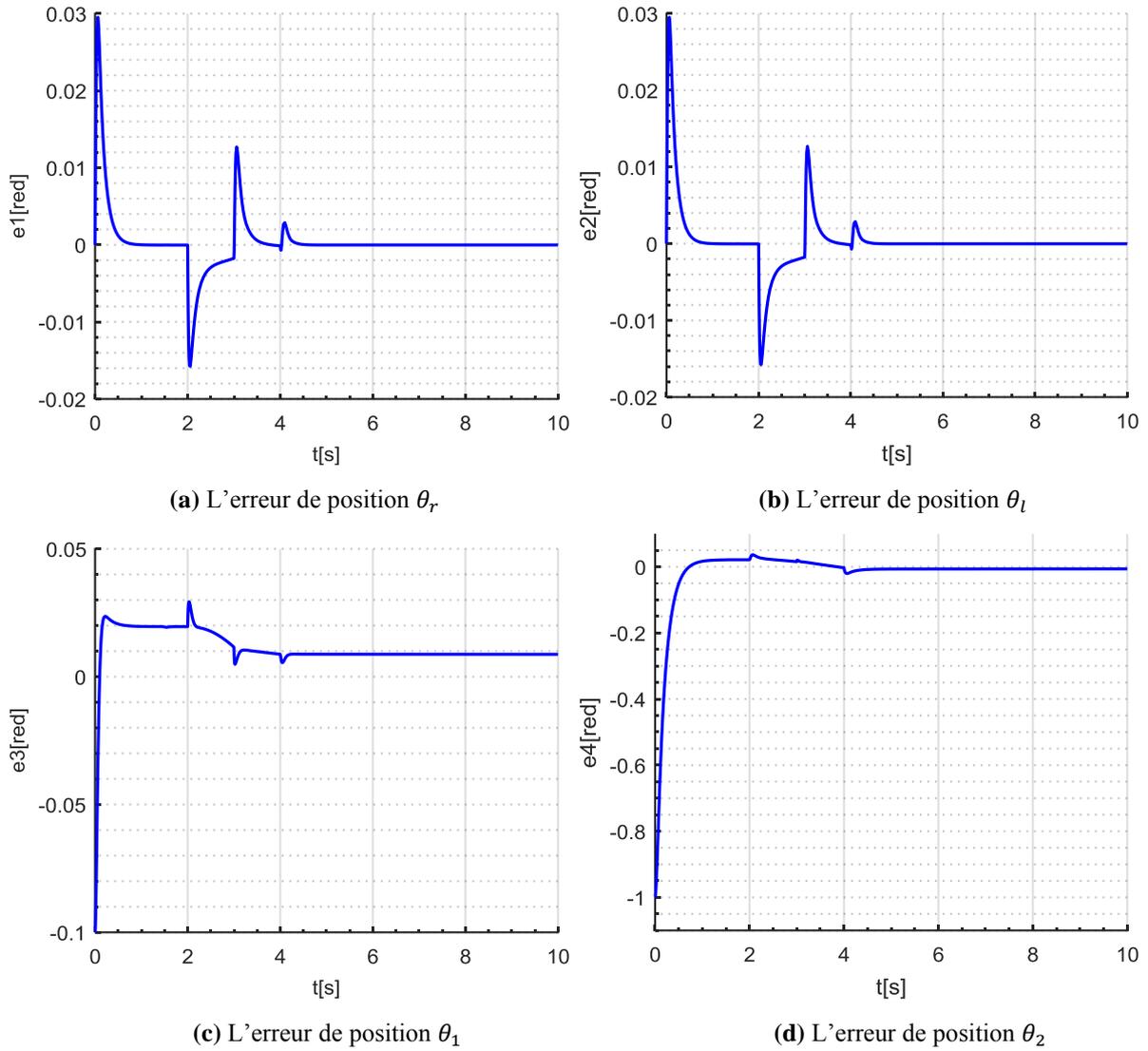
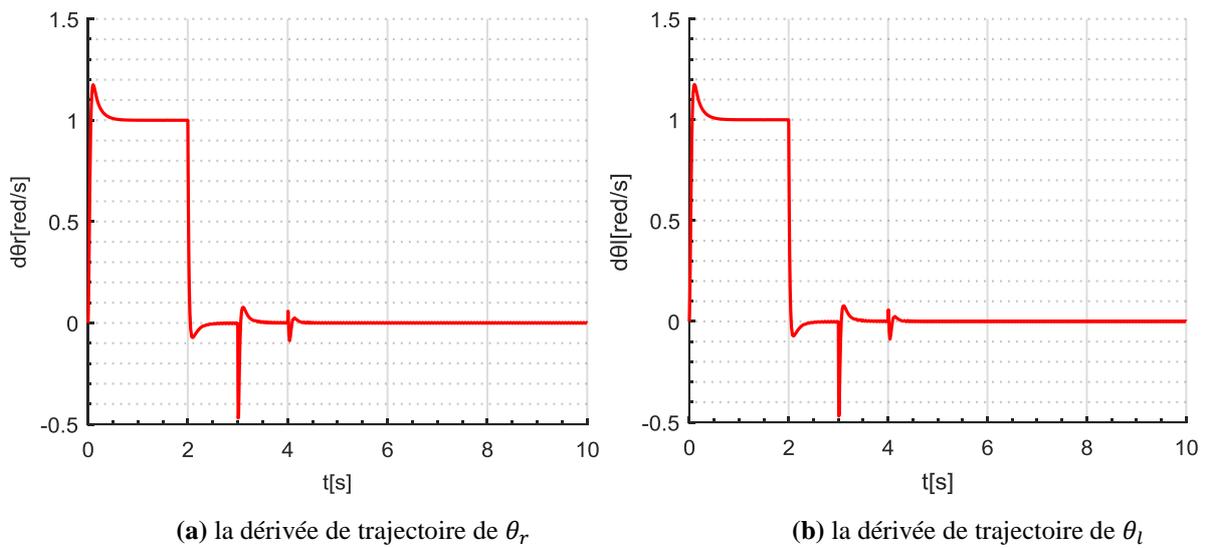
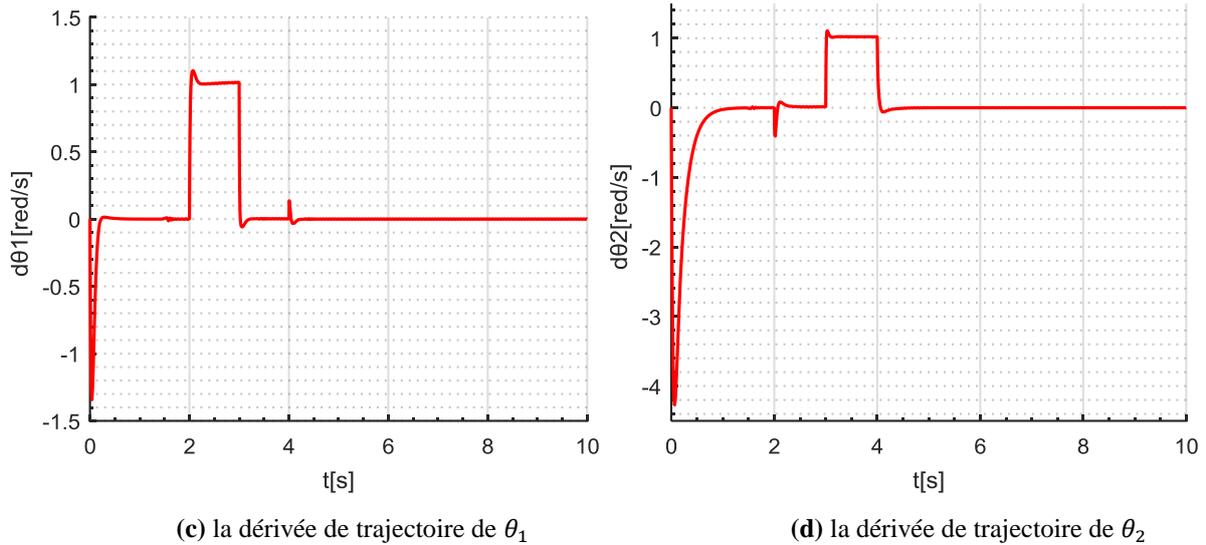
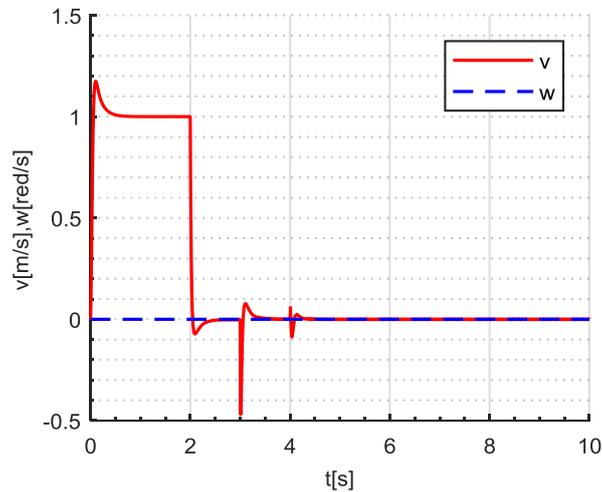


Figure 4.4 : Les erreurs avec PID





**Figure 4.5 :** Les dérivées de trajectoire (vitesses) avec PID



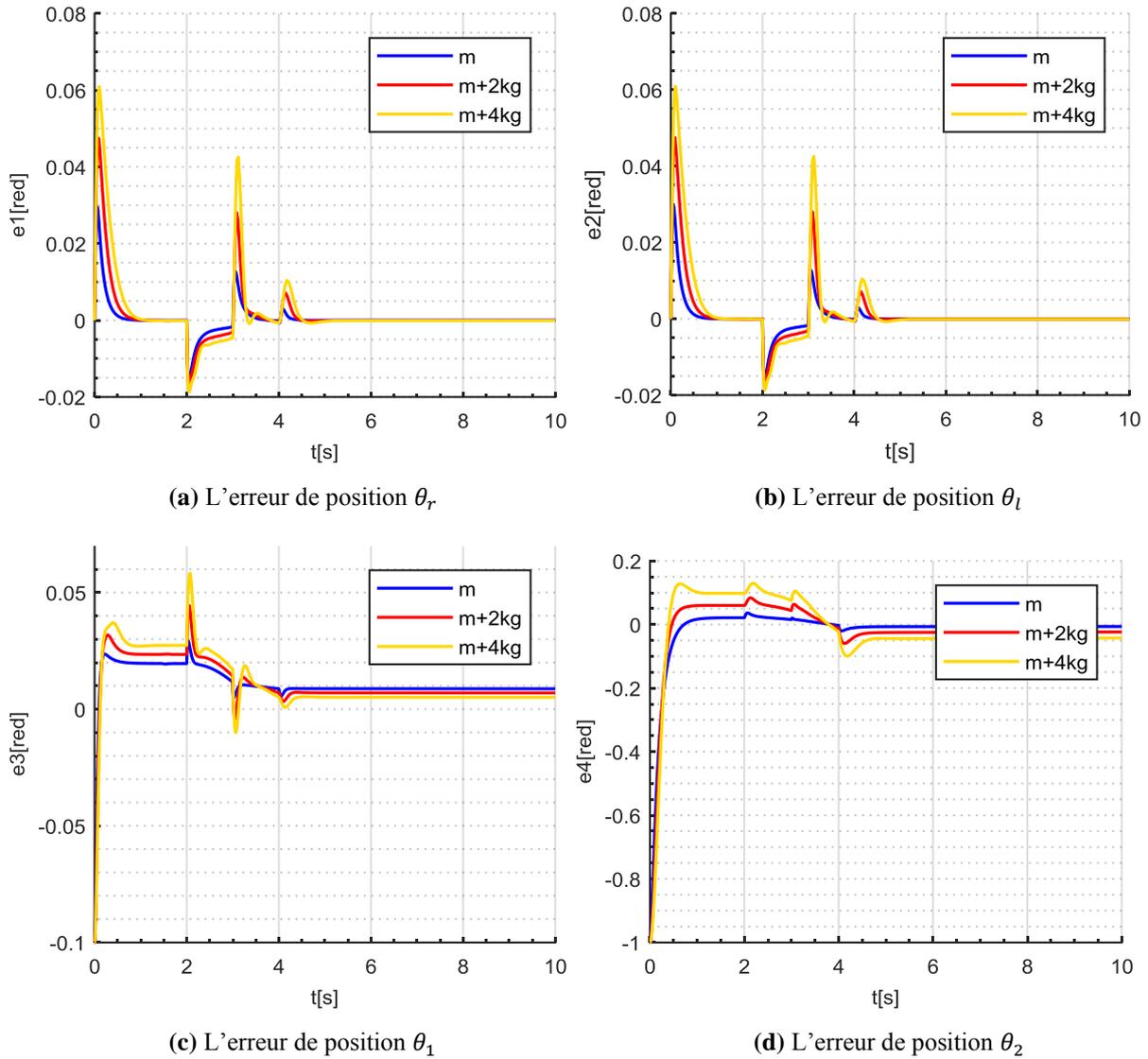
**Figure 4.6** Vitesse linéaire et angulaire de plateforme avec PID.

La figure 4.3 montre un bon suivi des trajectoires  $\theta_r, \theta_l, \theta_1$  et  $\theta_2$  avec une erreur très petite de  $\theta_r, \theta_l, \theta_1$  et  $\theta_2$  figure (4.4). On voit que  $x$  a pu suivre les trajectoires de  $\theta_r$  et  $\theta_l$  donné par la relation (4.6) avec des valeurs nulles pour  $\theta$  et  $y$  figure (4.3.e).

On note que pour avoir la variation de la position  $y$  et l'orientation  $\theta$  de la plateforme, il faut avoir des valeurs différents de  $\theta_r$  et  $\theta_l$ .

### 3-2- Test de robustesse :

Pour tester la robustesse de robot on va changer un paramètre de système et étudier l'erreur, nous avons changé la masse de deuxième bras de manipulateur, les valeurs des erreurs sont présentés dans la figure 4.7.



**Figure 4.7 :** Test de robustesse avec PID.

Les résultats d'application de la commande linéaire classique PID montre des bons résultats même en termes de robustesse, mais il y a des limites d'utilisation de ce type de commande surtout en éloignant des points d'équilibre stable, ce qu'il demande à utiliser des commandes non linéaire pour traiter ces systèmes avec des trajectoires plus complexe, et avoir la stabilité et la robustesse.

#### 4- Commande par mode glissant :

On passe maintenant à appliquer une commande non linéaire, la commande par mode de glissement, sur le modèle dynamique de robot. La synthèse de cette commande nécessite de choisir les surface de glissement et le calcul de la commande équivalente.

**4-1- les surfaces de glissement :**

Pour le système de manipulateur mobile on définit quatre surfaces de glissement :

$$S_1(t) = \dot{e}_1(t) + \lambda e_1(t) \quad (4.7)$$

$$S_2(t) = \dot{e}_2(t) + \lambda e_2(t) \quad (4.8)$$

$$S_3(t) = \dot{e}_3(t) + \lambda e_3(t) \quad (4.9)$$

$$S_4(t) = \dot{e}_4(t) + \lambda e_4(t) \quad (4.10)$$

Avec :

$$e_1(t) = \theta_r(t) - \theta_{rd}(t) \quad (4.11)$$

$$e_2(t) = \theta_l(t) - \theta_{ld}(t) \quad (4.12)$$

$$e_3(t) = \theta_1(t) - \theta_{1d}(t) \quad (4.13)$$

$$e_4(t) = \theta_2(t) - \theta_{2d}(t) \quad (4.14)$$

Et  $\theta_{rd}$ ,  $\theta_{ld}$ ,  $\theta_{1d}$  et  $\theta_{2d}$  sont les trajectoires désirées.

**4-2- La commande équivalente :**

On considère le modèle dynamique de manipulateur mobile :

$$\bar{M}\ddot{q}_a + \bar{C}\dot{q}_a + \bar{G} = \bar{B}.U \quad (4.15)$$

Où  $q_a$  est le vecteur des coordonnées :

$$q_a = [\theta_r, \theta_l, \theta_1, \theta_2]^T \quad (4.16)$$

Donc, on définit le système non linéaire :

$$\ddot{q}_a = f(\dot{q}_a, q_a, t) + g(q_a, t).U \quad (4.17)$$

Avec :

$f$  et  $g$  des fonctions non linéaire du vecteur d'état tel que :

$$f = \bar{M}^{-1}(-\bar{C}.\dot{q}_a - \bar{G}) \quad (4.18)$$

$$g = \bar{M}^{-1}.\bar{B} \quad (4.19)$$

On définit l'erreur de poursuite par :

$$e(t) = q_a(t) - q_{ad}(t) \quad (4.20)$$

La surface de glissement :

$$S(t) = \dot{e}(t) + \lambda e(t) \quad (4.21)$$

Avec :  $\lambda > 0$

On déduit la commande équivalente  $U_{eq}$  d'après l'état du système comme suit :

$$\dot{S} = 0 \quad (4.22)$$

$$\ddot{e}(t) + \lambda \dot{e}(t) = 0 \quad (4.23)$$

$$\ddot{q}_a(t) - \ddot{q}_{ad}(t) + \lambda \dot{e}(t) = 0 \quad (4.24)$$

$$f(\dot{q}_a, q_a, t) + g(q_a, t).U_{eq} - \ddot{q}_{ad}(t) + \lambda \dot{e}(t) = 0 \quad (4.25)$$

$$U_{eq} = g(q_a, t)^{-1}[-f(\dot{q}_a, q_a, t) - \ddot{q}_{ad}(t) + \lambda \dot{e}(t)] \quad (4.26)$$

La commande discontinue est donnée par :

$$U_d = -k.sign(S) \quad (4.27)$$

Donc on définit la commande par mode glissant qui vérifie la stabilité et la commande de système robot manipulateur mobile :

$$U = U_{eq} + U_d \quad (4.28)$$

$$U = g(q_a, t)^{-1}[-f(\dot{q}_a, q_a, t) - \ddot{q}_{ad}(t) + \lambda \dot{e}(t)] - k.sign(S) \quad (4.29)$$

Les paramètres de la commande sont présentés sur une forme matricielle :

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

$$k = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

#### 4-3- Résultats de simulation :

Les valeurs initiales des variables articulaires sont donné par :  $[\theta_r ; \theta_l ; \theta_1 ; \theta_2] = [0 ; 0 ; 0,1 ; 1]$ , la trajectoire désirée est un déplacement de 0 à 0.2m de la plateforme le long de l'axe x aucun changement dans y et  $\theta$ .

Pour le bras manipulateur, on a fait une régulation pendant le mouvement de chariot mobile, lorsque la plateforme atteindre le point (x, y)=(1,0), le 1<sup>er</sup> bras manipulateur va déplacer en suivant une trajectoire désirée  $\theta_{1d} = t$  jusqu'à  $\theta_1 = 1red$  après le 2<sup>ème</sup> bras va changer sa position jusqu'à  $\theta_2 = 1$  avec une trajectoire désirée  $\theta_{2d} = t$ .

Les paramètres de commande sont :

Pour la surface de glissement :  $\lambda = (15, 15, 10, 10)$  ;

Pour le SMC :  $k = (15, 15, 40, 30)$  ;

Les résultats de l'application de la commande par mode glissant sur le système manipulateur mobile sont obtenus en faisant une série des simulations sous l'environnement MATLAB/Simulink dans un temps de 10 secondes. La figure (4.9) présente les résultats de la simulation de commande :

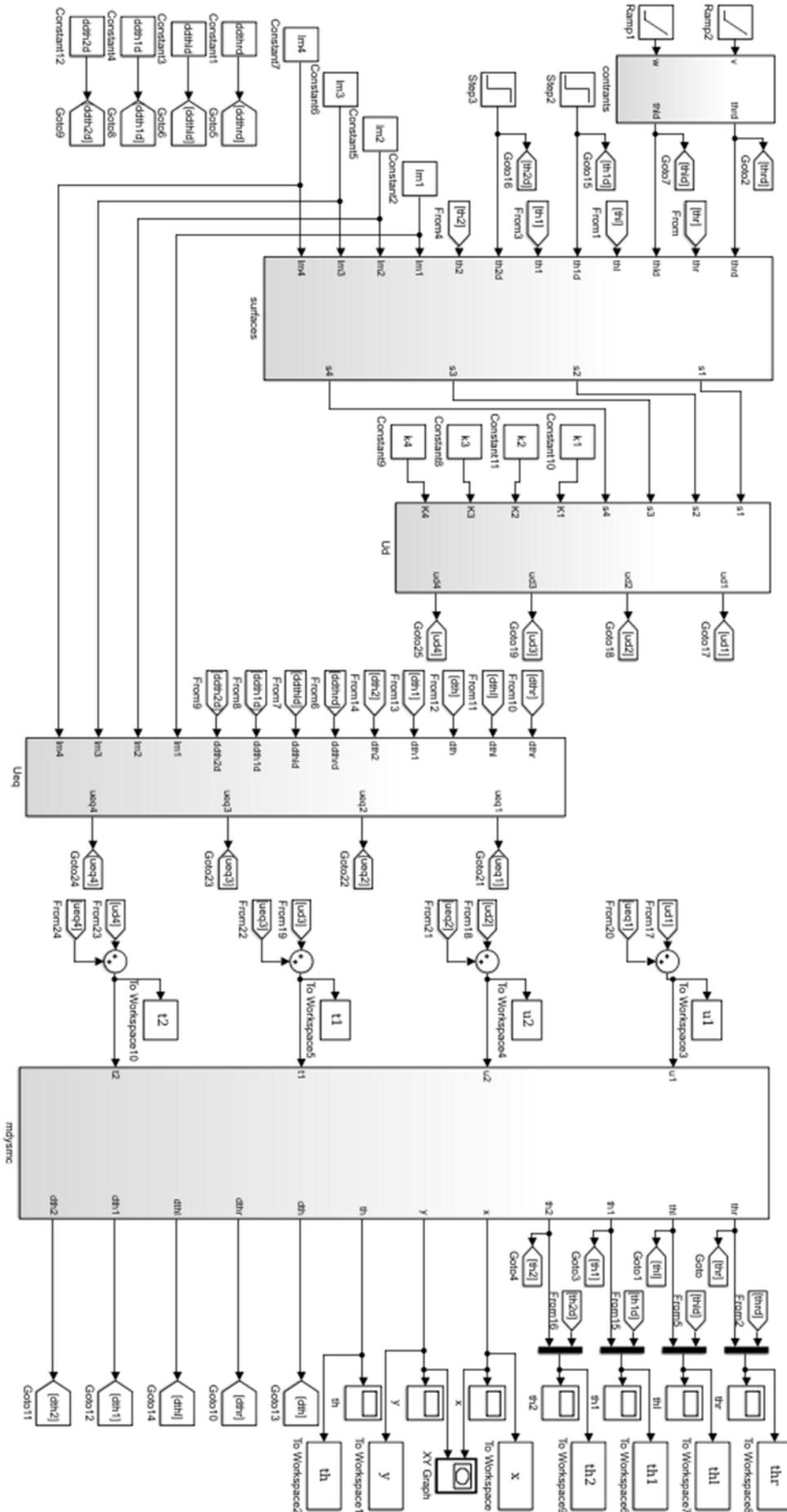
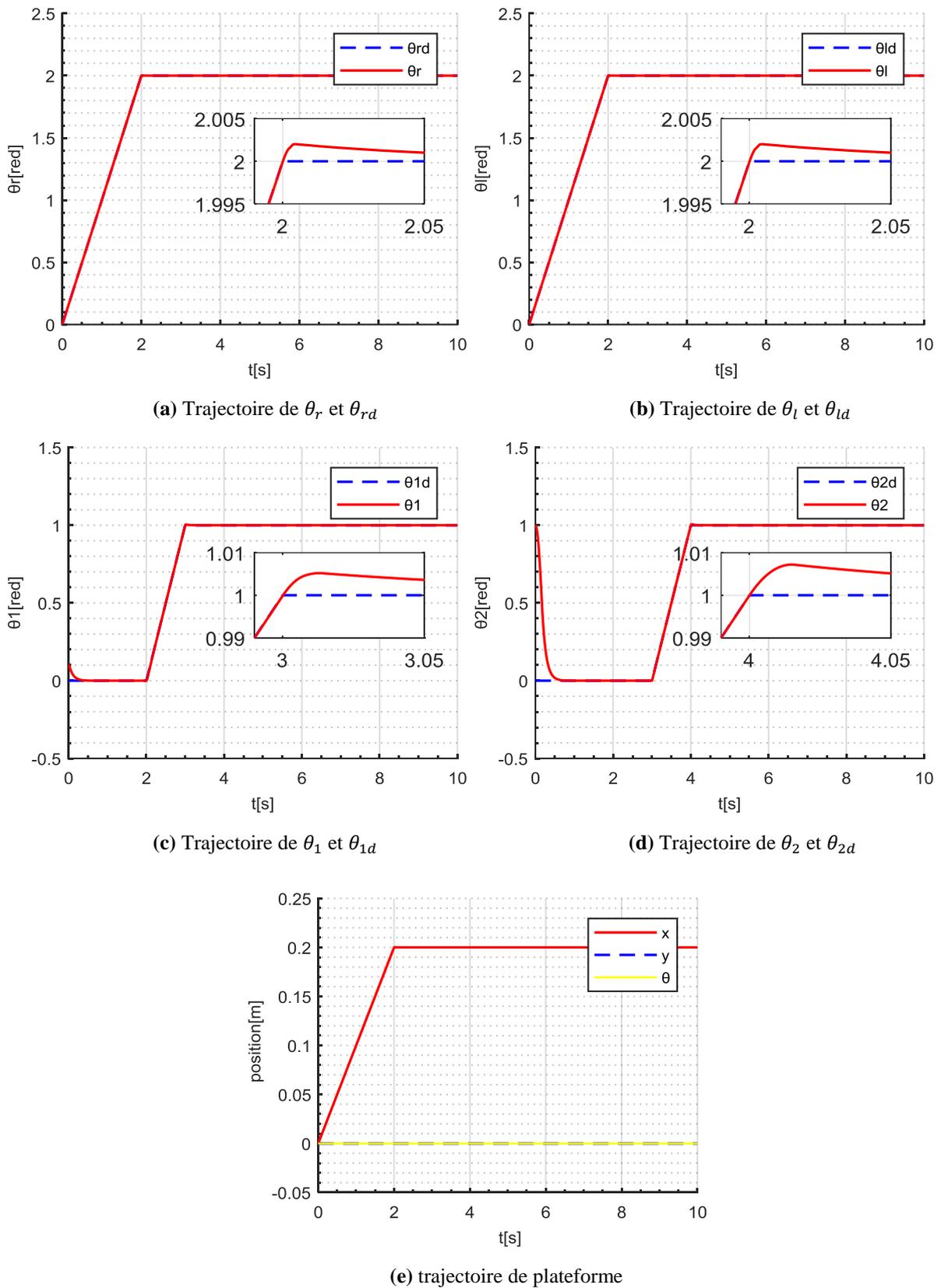


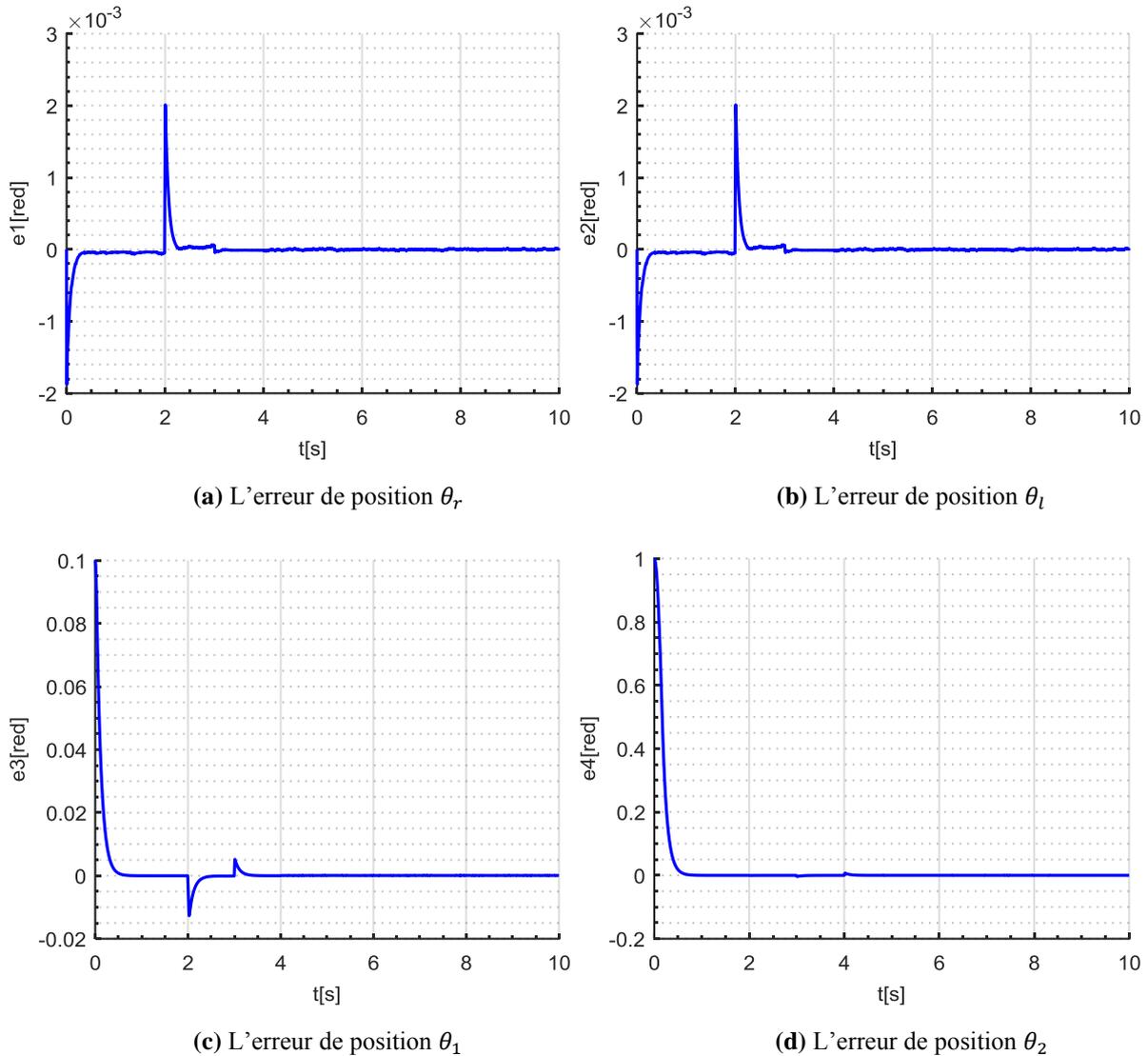
Figure 4.8 Schéma bloc de modèle dynamique de robot



**Figure 4.9** : Les trajectoires et les positions avec SMC.

Les figures 4.9 a et b présentent les trajectoires des roues droite et gauche, et les figures c et d présentent les trajectoires des angles de la rotation des deux bras manipulateurs, la figure e

présente les positions  $x$ ,  $y$  et  $\theta$  de la plateforme mobile. On remarque une bonne poursuite de trajectoire désirée avec un très bon temps de réponse sans dépassement, spécialement aux instants 2s et 3s qui correspondent au changement des trajectoires pour la plateforme et le bras respectivement.



**Figure 4.10** : Les erreurs avec SMC.

La figure (4.10) présente les erreurs entre les trajectoires et les trajectoires de références, la figure montre des erreurs de poursuites tendent vers une valeur nulle.

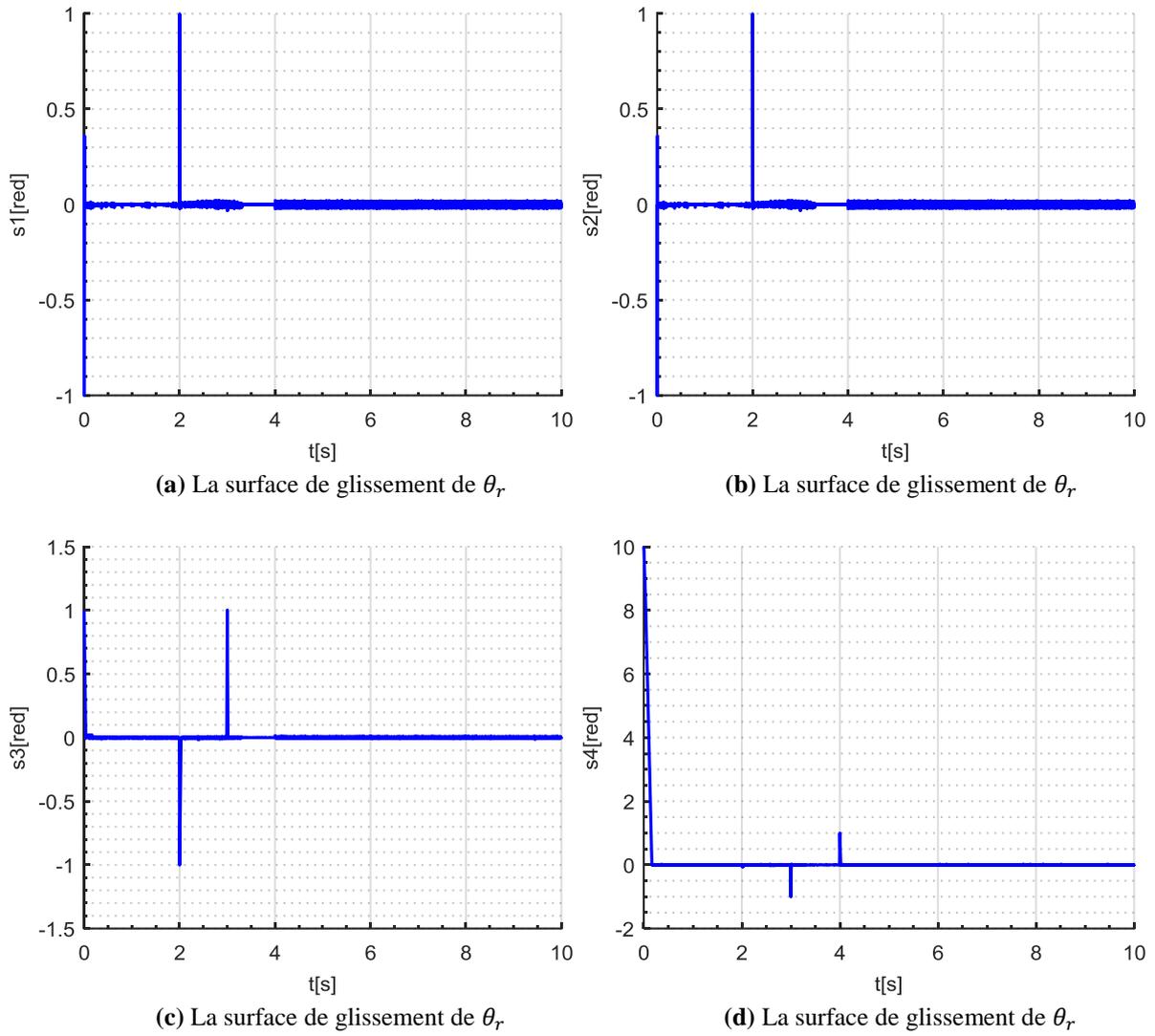
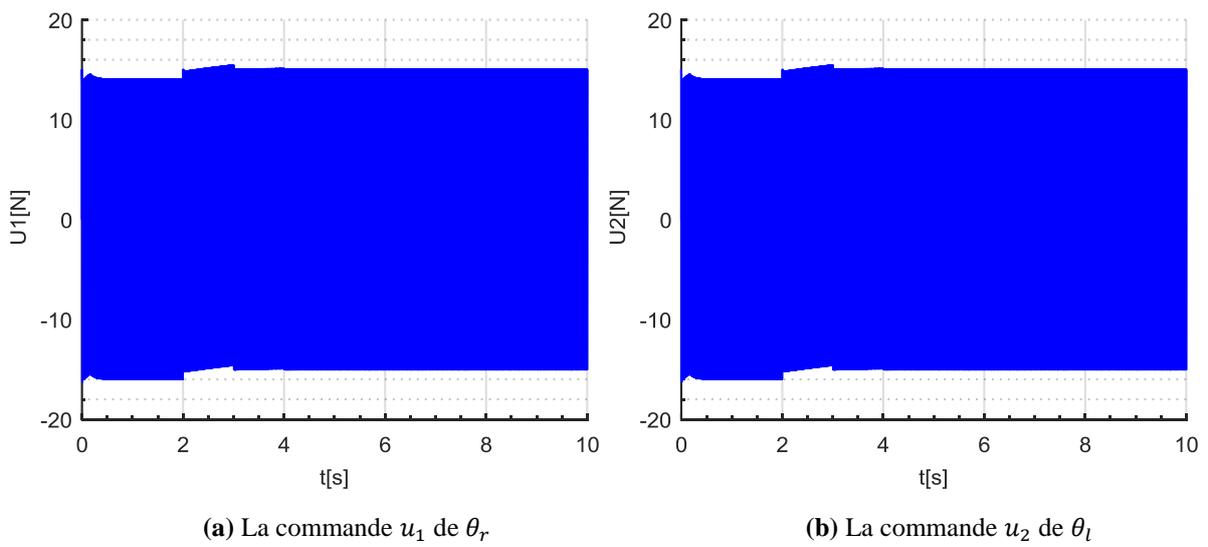
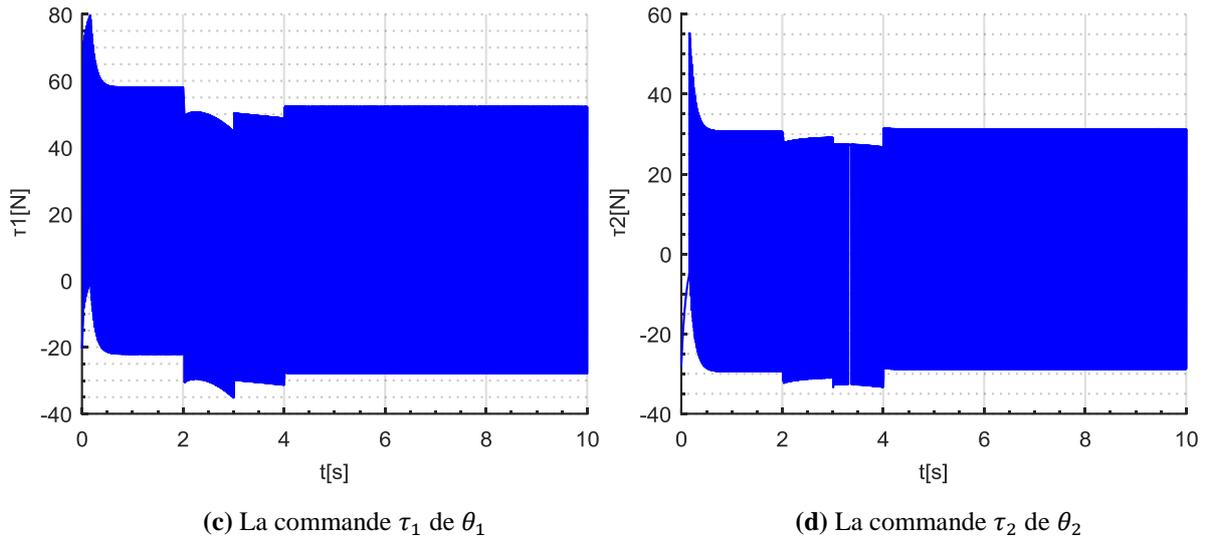


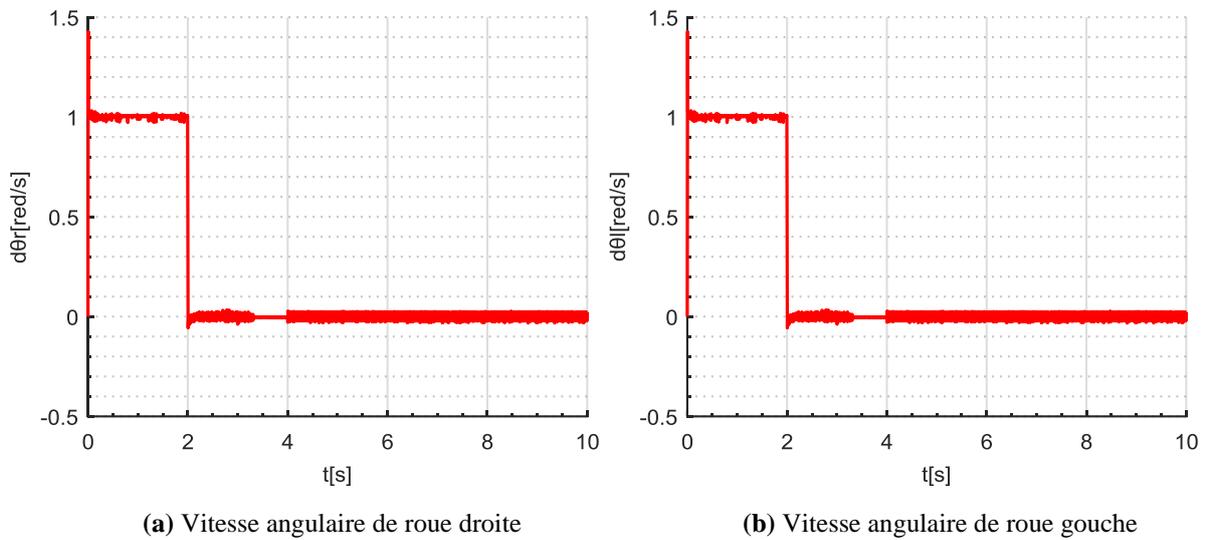
Figure 4.11 : Les surfaces de glissement.

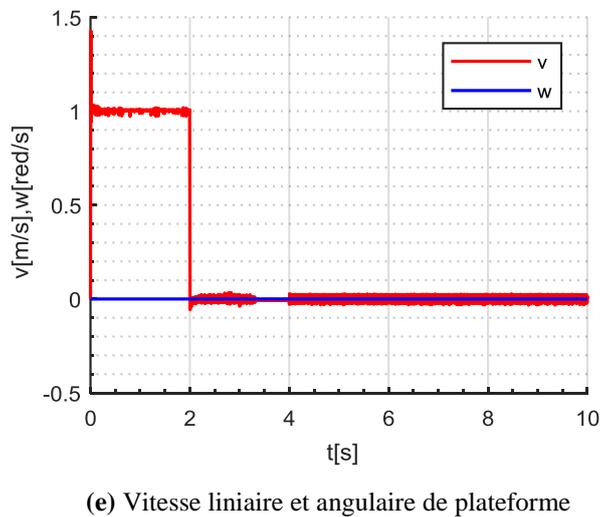
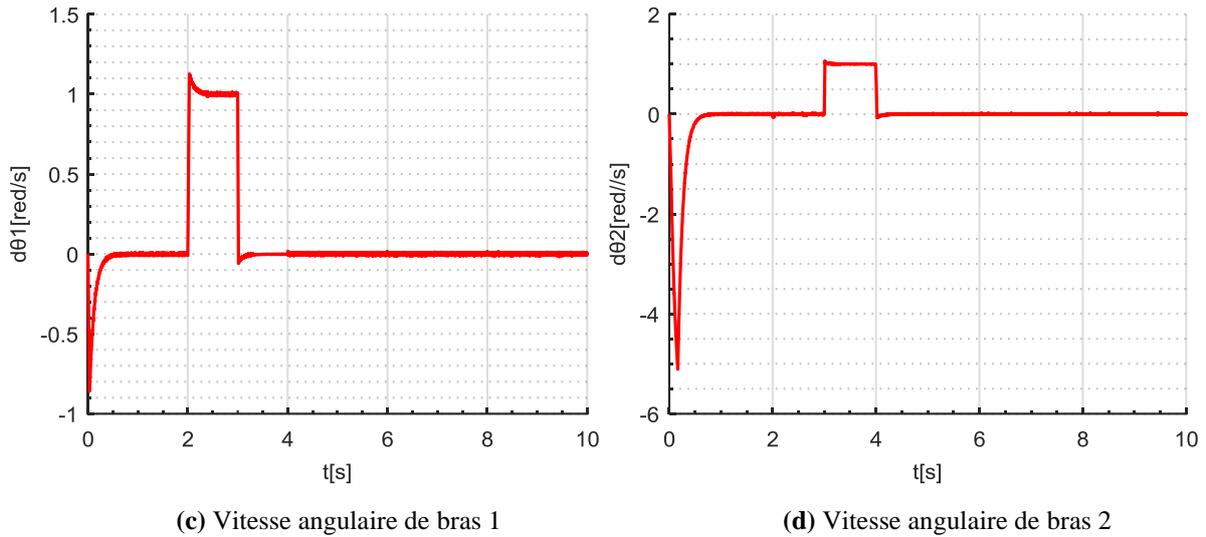




**Figure 4.12 :** Les commandes par SMC

La figure (4.12) présente les commandes des entrées du système. On constate des commutations hautes fréquence sur les commandes, dont la cause est la présence de terme discontinu, et qu'il est le responsable de phénomène de broutement (chattering) dans les trajectoires des positions et des vitesses figure (4.13).





**Figure 4.13** : Les vitesses avec SMC.

**4-4- Solutions pour le broutement :**

**4-4-1- Solution de couche limite :**

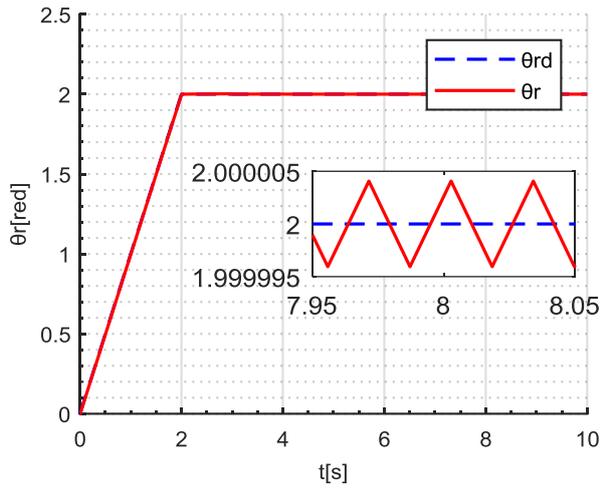
Pour cette solution, on change la fonction sign par la fonction de saturation telle que les paramètres de la commande sont :

Pour la surface de glissement :  $\lambda = (15, 15, 10, 10)$  ;

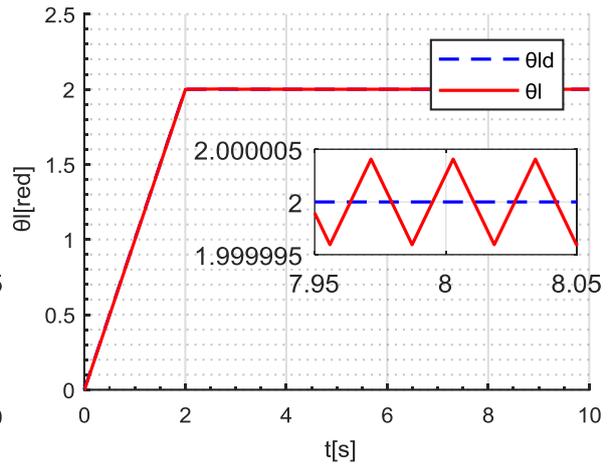
Pour le SMC :  $k = (15, 15, 40, 30)$  ;

Pour la longueur de seuil de la fonction de saturation :  $\epsilon = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$  ;

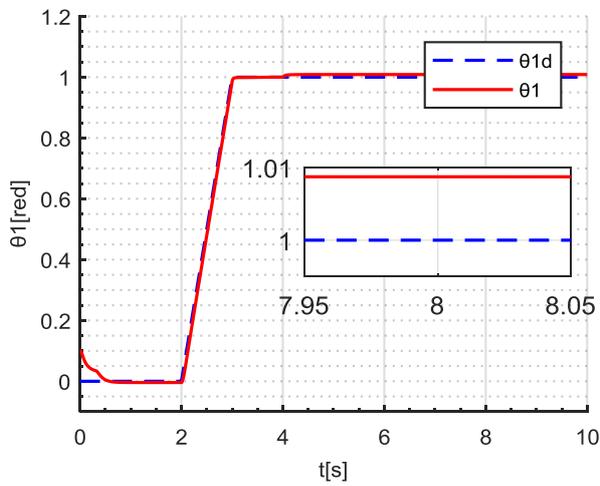
Les résultats de simulation avec la fonction de saturation sont donnés comme suit :



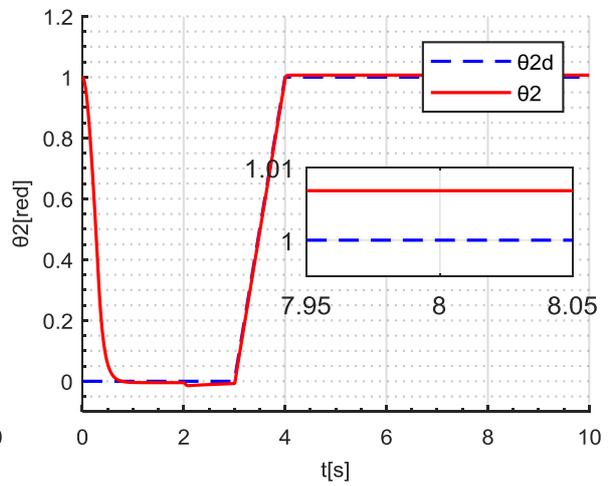
(a) Trajectoire de  $\theta_r$  et  $\theta_{rd}$



(b) Trajectoire de  $\theta_l$  et  $\theta_{ld}$

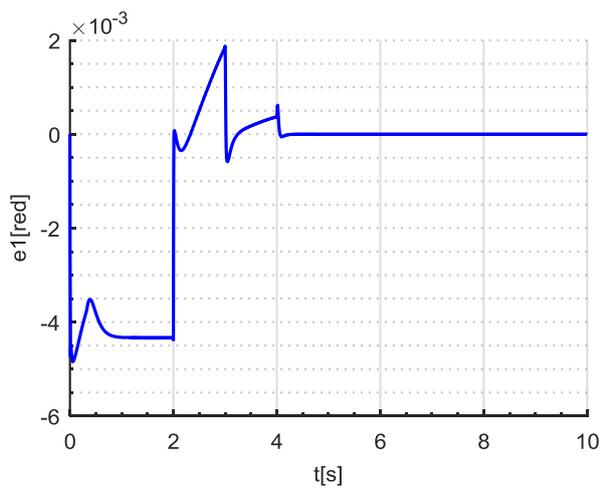


(c) Trajectoire de  $\theta_1$  et  $\theta_{1d}$

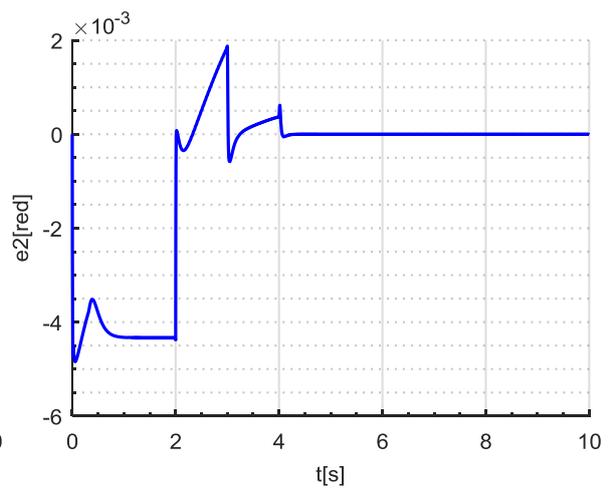


(d) Trajectoire de  $\theta_2$  et  $\theta_{2d}$

**Figure 4.14** : Les trajectoires par méthode de saturation.



(a) L'erreur de position  $\theta_r$



(b) L'erreur de position  $\theta_l$

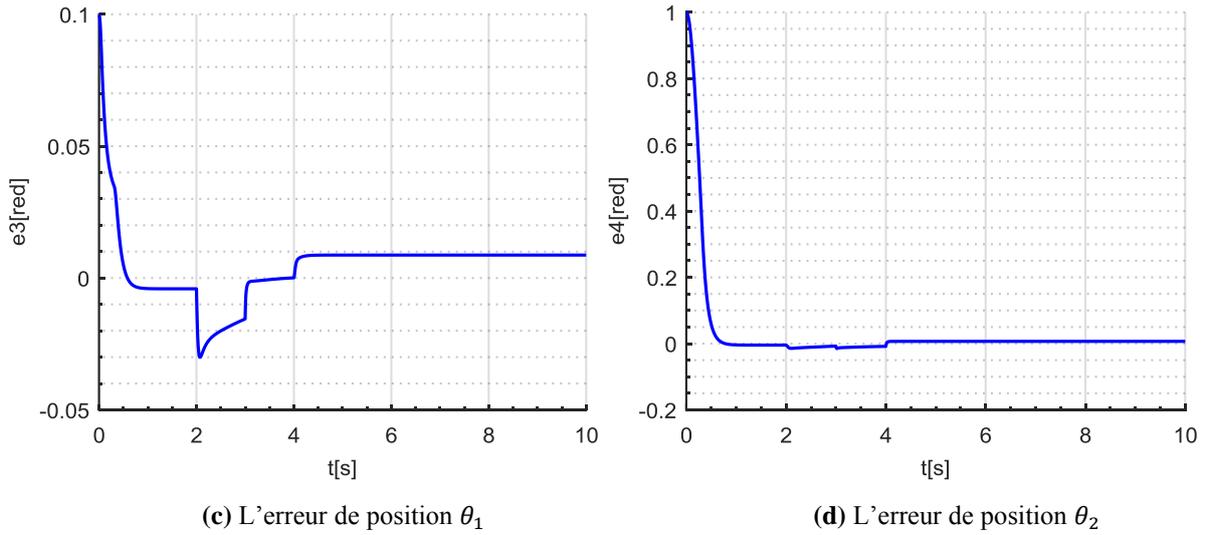


Figure 4.15 : Les erreurs par méthode de saturation.

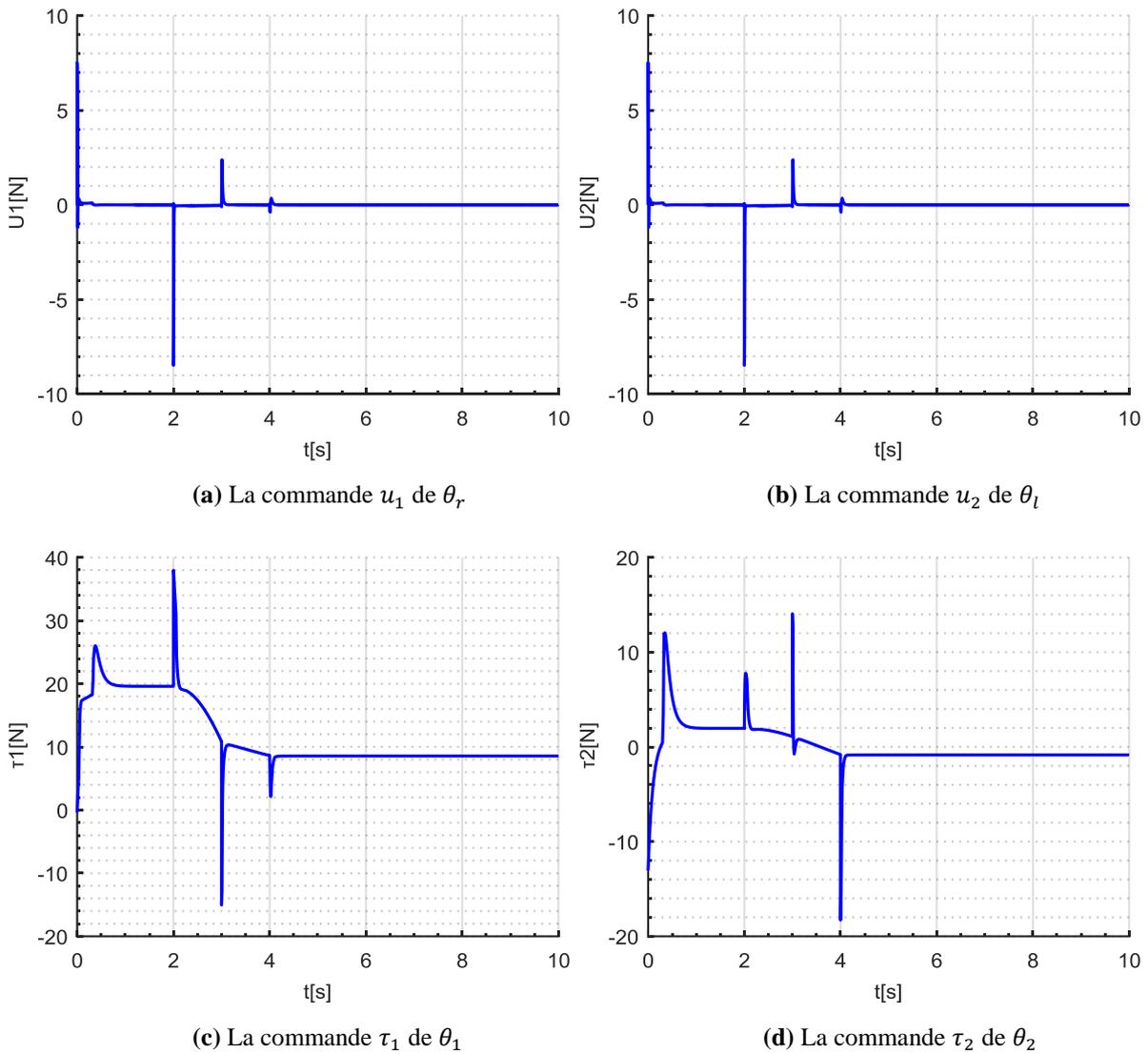


Figure 4.16 : Les commandes par méthode de saturation.

La figure 4.14 montre des bonnes poursuites des trajectoires avec des valeurs d'erreur très petites qui sont illustrés dans la figure 4.15. La figure 4.16 montre que la fonction de saturation minimise les commutations des commandes de système ; les pics remarquables sont dus aux moments de changement des trajectoires.

**4-4-2- Solution par les lois d'approche :**

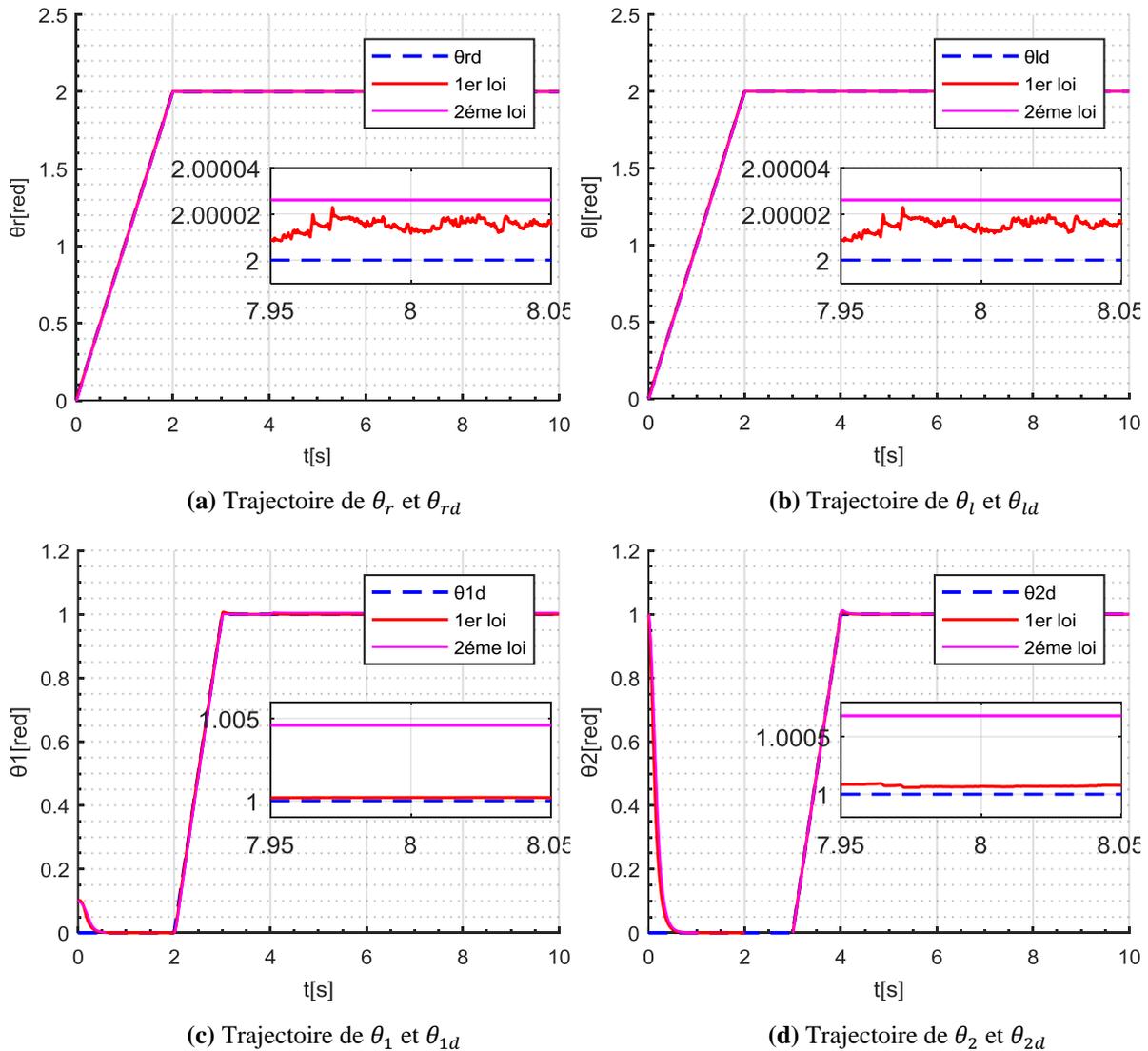
Pour cette solution, nous avons appliqué les lois (3.38) et (3.39) dans la commande discontinue. On présente les paramètres de la commande comme suite :

Pour la surface de glissement :  $\lambda = (15, 15, 10, 10)$  ;

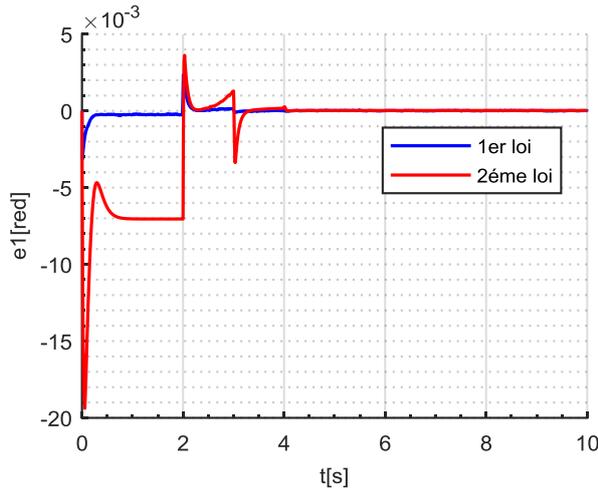
Pour la 1<sup>ère</sup> loi :  $k = (5, 5, 10, 20)$  ;  $Q = (10, 10, 30, 5)$  ;

Pour la 2<sup>ème</sup> loi :  $k = (3, 3, 30, 15)$  ;  $\rho = (0.5, 0.5, 0.7, 0.4)$  ;

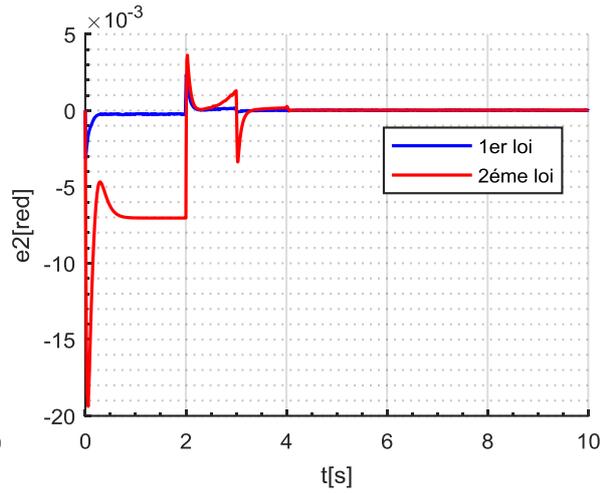
Les résultats de simulation de ces lois d'approche sont données par :



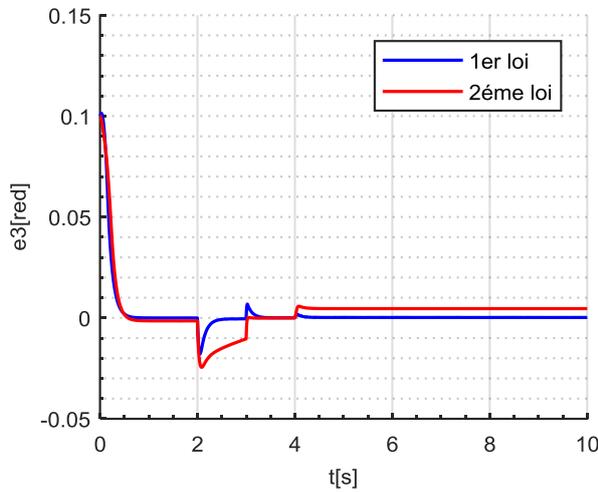
**Figure 4.17 :** Les trajectoires par méthode des lois d'approche.



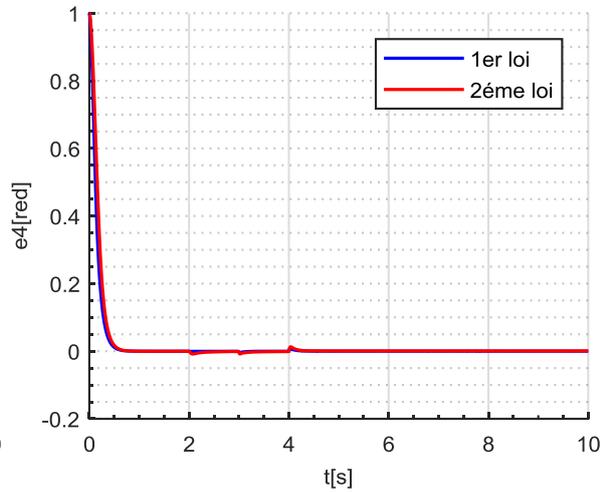
(a) L'erreur de position  $\theta_r$



(b) L'erreur de position  $\theta_l$

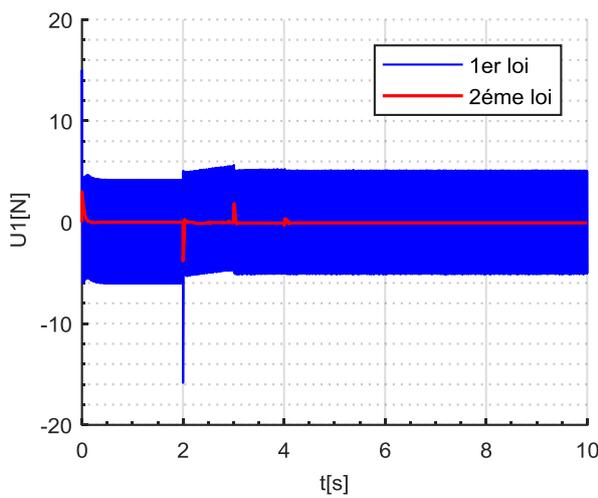


(c) L'erreur de position  $\theta_1$

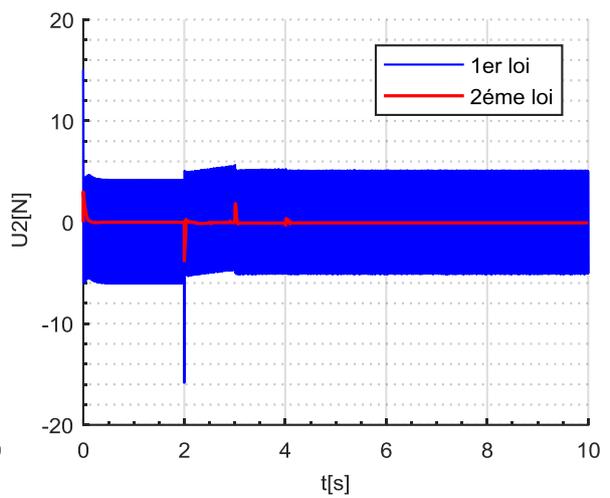


(d) L'erreur de position  $\theta_2$

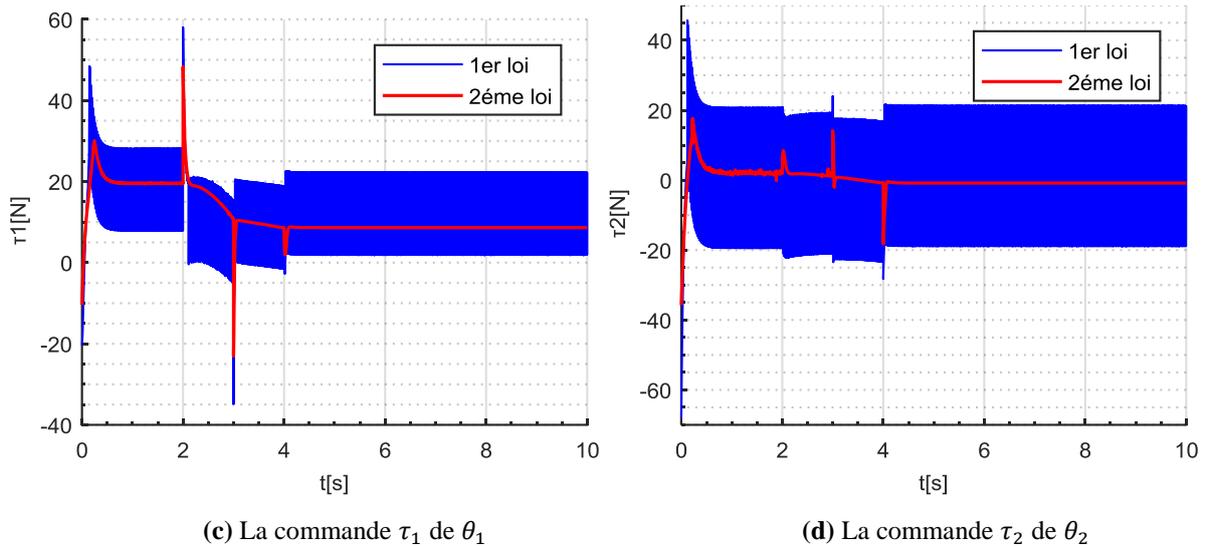
**Figure 4.18** : Les erreurs par méthode des lois d'approche



(a) La commande  $u_1$  de  $\theta_r$



(b) La commande  $u_2$  de  $\theta_l$



**Figure 4.19** : Les commandes par méthode des lois d’approche

La figure 4.17 présente une bonne poursuite des trajectoires des sorties du système avec des valeurs d’erreur tendent à des valeurs nulles figure 4.18 ; la figure 4.19 montre que la solution par les lois d’approche minimise les broutements de la commande spécialement avec la 2<sup>ème</sup> loi.

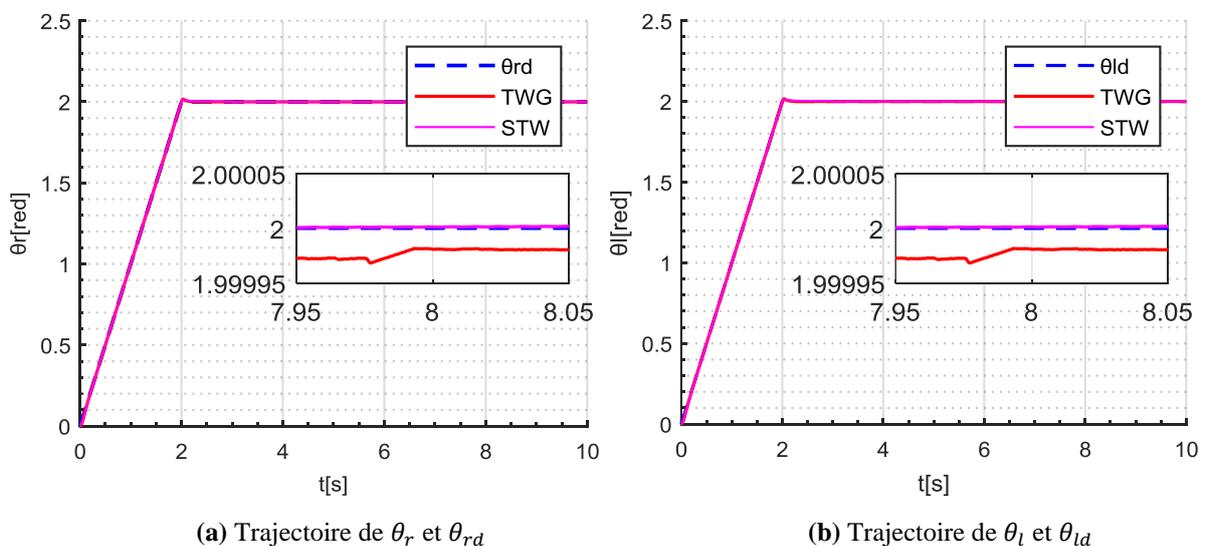
**4-4-3- Solution par le mode glissant d’ordre 2 :**

Dans cette solution, nous avons appliqué les algorithmes de Twisting (TWG) et super Twisting (STW) ; les paramètres de la commande sont :

Pour la surface de glissement :  $\lambda = (15, 15, 10, 10)$  ;

Pour l’algorithme de Twisting :  $r_1 = (4, 4, 12, 9)$  ;  $r_2 = (5, 5, 15, 11)$  ;

Pour l’algorithme de super Twisting :  $\alpha = (1, 1, 2, 1)$  ;  $\lambda = (3, 3, 25, 15)$  ;  $\rho = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$  ; Les résultats de simulation sont comme suit :



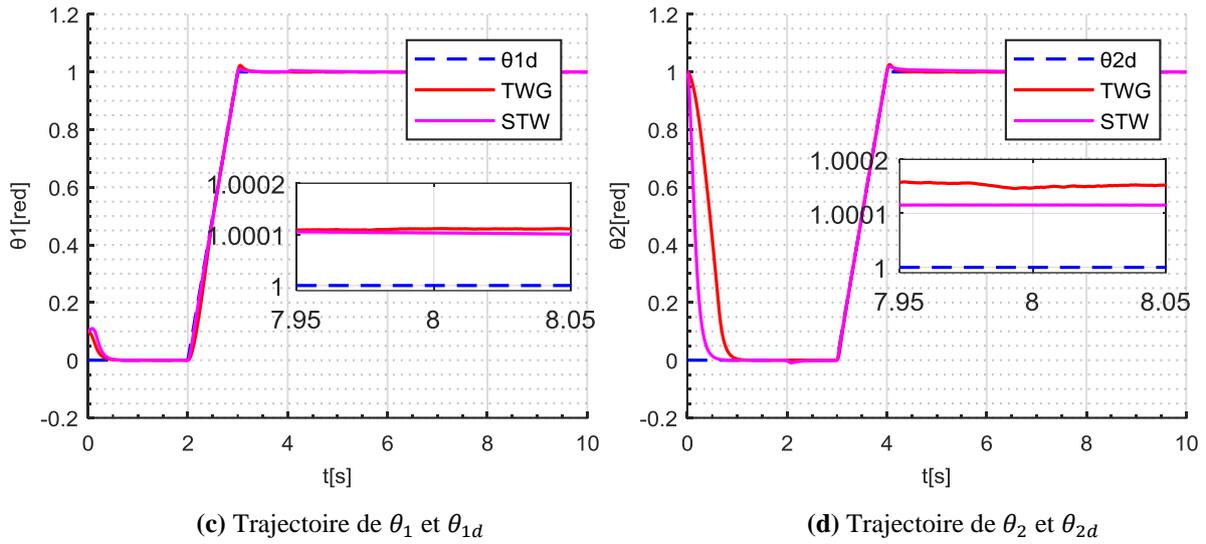


Figure 4.20 : Les trajectoires par méthode de Twisting et Super-Twisting.

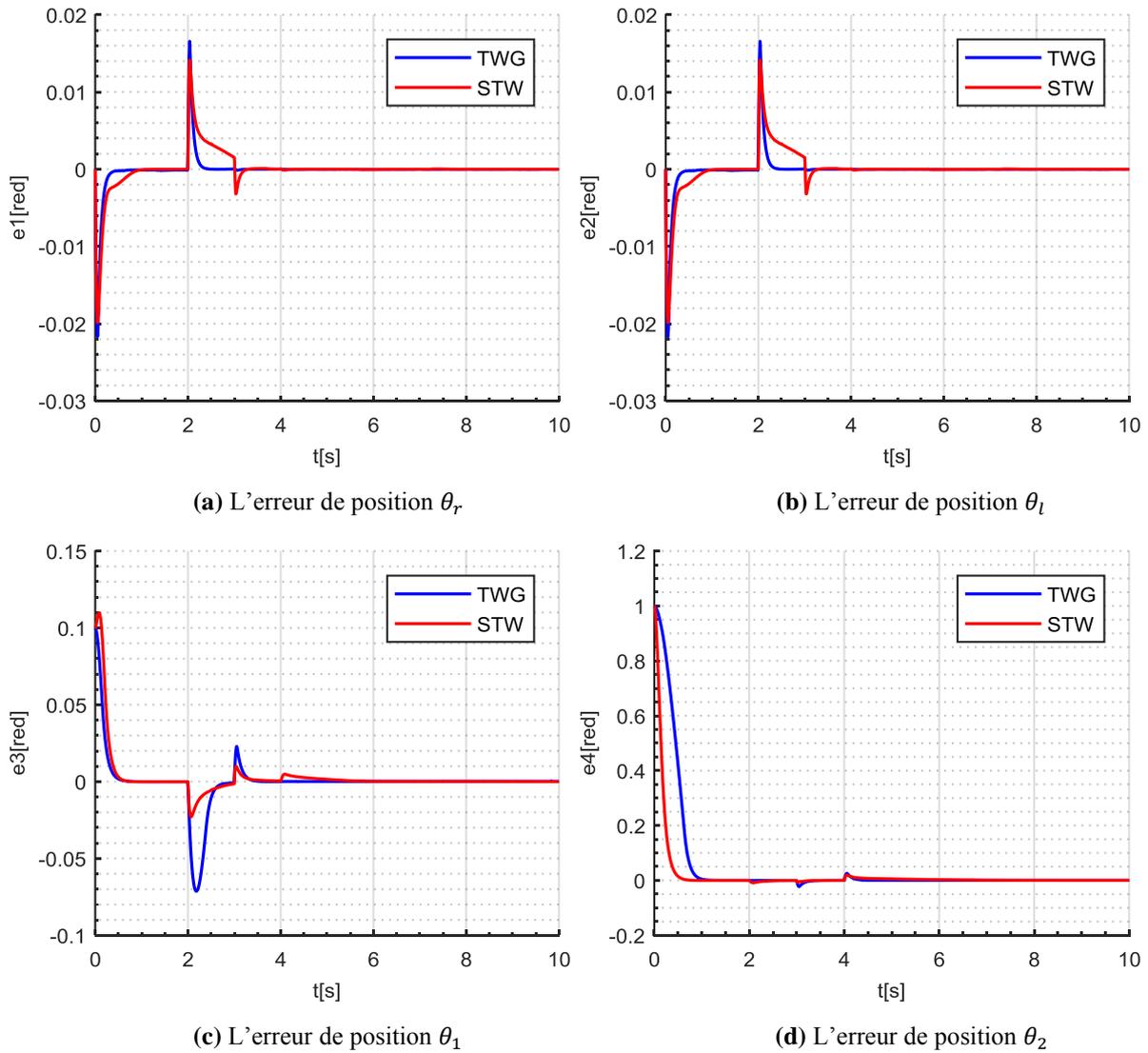
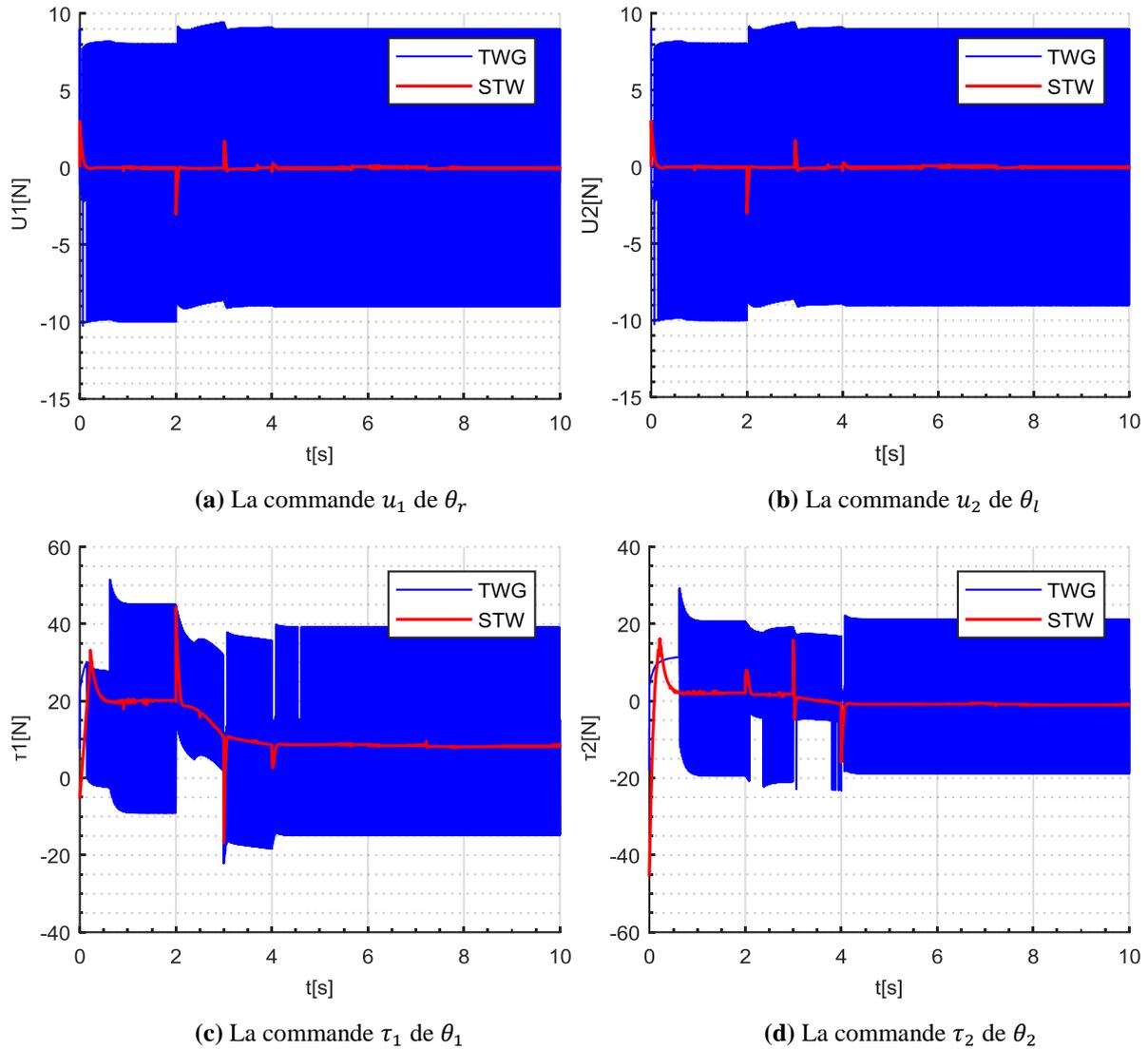


Figure 4.21 : Les erreurs par méthode de Twisting et super Twisting.



**Figure 4.22** : les commandes par méthode Twisting et super Twisting.

La figure 4.20 présente une bonne poursuite des trajectoires grâce aux contrôleurs TWG et STW qu'ils assurent une bonne précision figure 4.21 ; l'algorithme STW atténue le broutement parfaitement et de manière significative figure 4.22 en gardant les meilleures performances de système.

**4-5- Etude comparative :**

Pour faire une comparaison entre les différentes lois de commande, on présente une étude comparative entre ces commandes ; pour cela, on définit un critère en fonction de la commande appliquée (Sum of square control : SSE), on peut le considérer comme un critère énergétique :

$$J_{SSE} = \sum |u|^2 \tag{4.32}$$

Pour bien examiner ces commandes, les résultats ont été pris dans les mêmes conditions.

**Tableau 4.1** Résultats en utilisant SSE.

	SMC	Sat	Loi 1	Loi 2	TWG	STW
$\theta_r$	2249	0.6698	252.2	0.5402	735.3	0.5163
$\theta_l$	2249	0.6697	252.2	0.5402	735.3	0.5163
$\theta_1$	$1.74 \cdot 10^4$	1636	2584	1670	7531	1677
$\theta_2$	8894	45.75	4062	88.7	3117	102.6

D'après ce tableau, on peut remarquer que les commandes par loi2 et par STW présentent des valeurs minimales de l'énergie par rapport aux autres.

**4-6-Tests de robustesse :**

Pour prouver l'efficacité de la commande par mode glissant, on propose une trajectoire de référence plus compliqué ; ensuite on ajoute des masses au deuxième bras manipulateur. D'après l'étude comparative, on a choisi de faire le test par la méthode de deuxième loi d'approche.

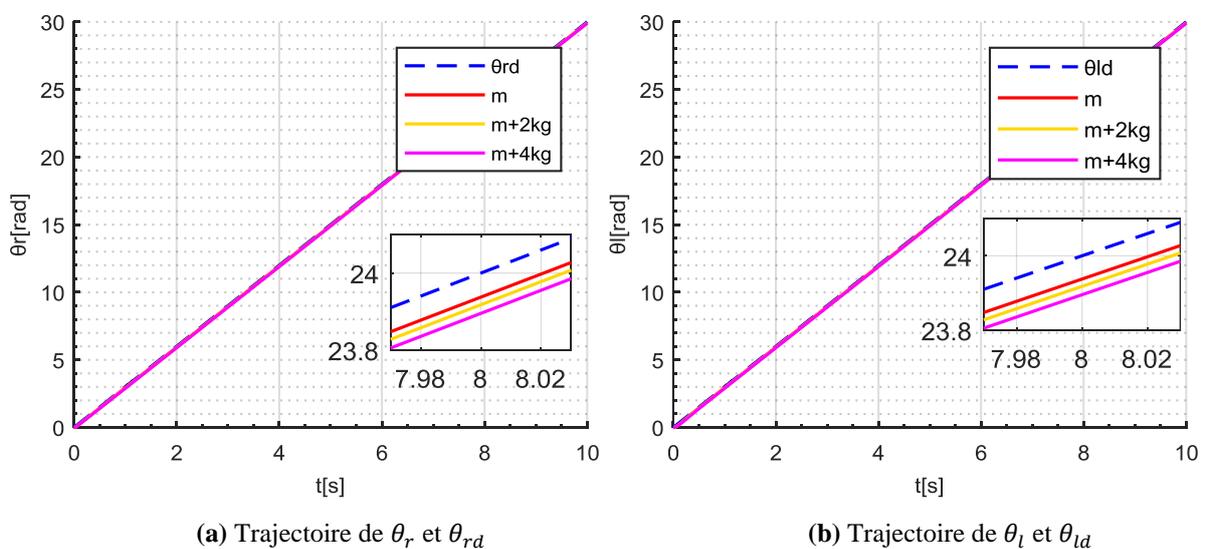
La trajectoire désirée est donnée par les fonctions de temps suivantes [44] :

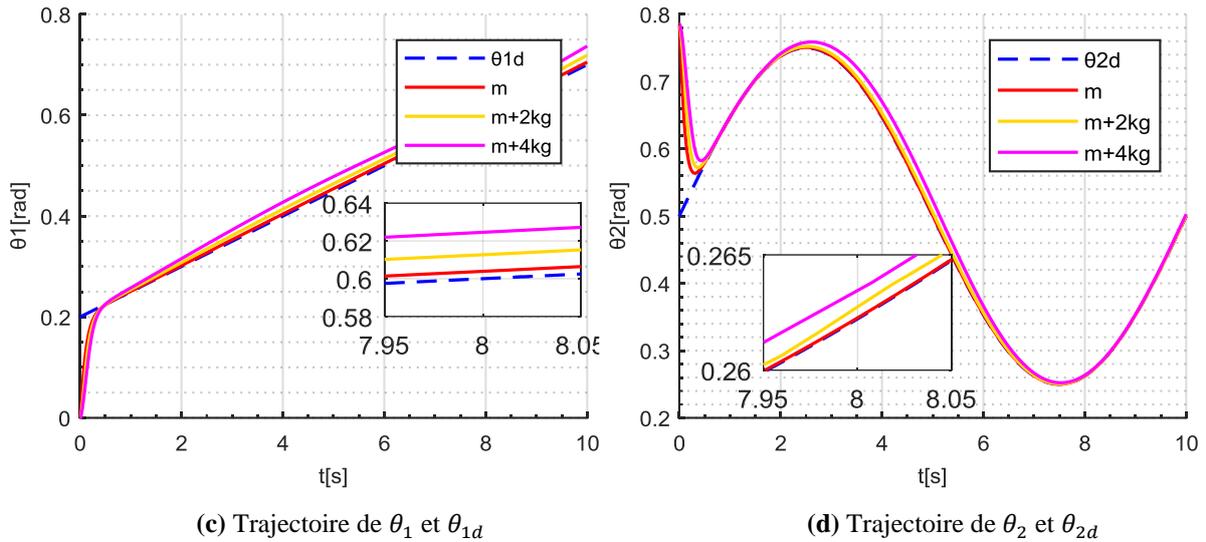
$$q_d(t) = \begin{bmatrix} \theta_r \\ \theta_l \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t \\ 3t \\ 0.2 + 0.05t \\ 0.5 + 0.25\sin(0.2\pi t) \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

On définit le vecteur d'état initial des coordonnées généralisées tel que :

$$[x_0; y_0; \theta; \theta_r; \theta_l; \theta_1; \theta_2] = \left[ 0; 0; \frac{\pi}{4}; 0; 0; 0; \frac{\pi}{4} \right]$$

Les résultats de simulation sont illustrés dans les figures 4.23 :





**Figure 4.23 :** test de robustesse de SMC avec 2<sup>ème</sup> loi d'approche.

**5- Conclusion :**

Le but de ce travail est d'avoir une commande robuste pour le control d'un système robotique non linéaire (robot manipulateur mobile). Nous avons proposé des commandes linéaires (PID) et non linéaire avec le mode glissant. Ces commandes ont été appliquées sur le modèle dynamique de manipulateur mobile via SIMULINK/Matlab

Dans ce chapitre nous avons présenté et interprété les résultats de simulation d'où on a pu conclure que :

La commande par mode glissant est une commande robuste elle donne des bons résultats mais présente un inconvénient majeur qui est le broutement ; pour le remédier nous avons proposé des méthodes, et on a trouvé après une étude comparative que l'algorithme de STW est meilleur en terme d'énergie, et de précession.

---

# **CONCLUSION GENERALE**

---

## Conclusion générale

---

Le travail réalisé dans ce mémoire répond à la volonté d'évoluer une modélisation d'un robot manipulateur mobile non holonome à roues puis avoir l'application des commandes sur le modèle développé. En terme générale, les systèmes robotiques présentent des difficultés pour les modéliser ou les commander à cause de la complexité, la non linéarité et le problème de fidélité de la dynamique de ces systèmes. Notre travail était l'étude des commandes robustes pour avoir la stabilité et la précision du manipulateur mobile.

Dans le premier chapitre, nous avons défini des termes reliées à la robotique avec un bref historique sur ce domaine. Ensuite, nous avons situé les différents types des robots. En fin, nous avons présenté les composantes électrique et mécanique pour la réalisation des robots.

Le première objectif de ce travail est de modéliser le robot manipulateur mobile à roues non holonome, nous avons achevé l'objectif dans le deuxième chapitre. Nous avons commencé d'abord par une description du modèle de robot. Ensuite, nous avons calculé le modèle géométrique, cinématique et dynamique du manipulateur mobile. L'une des difficultés que nous avons rencontrée est **les contraintes non holonomes**. Ce type des robots introduire des contraintes non holonomes dans l'équation dynamique du système quand les roues sont négligeables ; pour résoudre ce problème, nous avons proposé une méthode permettant à avoir un modèle dynamique sans les contraintes non holonomes.

Le deuxième objectif de ce travail est de trouver une commande robuste pour le système. D'où dans le troisième chapitre nous avons présenté une commande classique linéaire PID qui fait une régulation de signal de commande du système ; et une autre commande non linéaire : le mode glissant qui est composé de deux parties : la première est continu dite la commande équivalente et l'autre discontinu responsable à la commutation de haute fréquence 'broutement' ; pour remédier ce problème nous avons passé au mode glissant d'ordre supérieur.

Dans le quatrième chapitre, nous avons testé les commandes développées sur le modèle de système manipulateur mobile. Les résultats de simulation sont obtenus à l'aide de MATLAB/Simulink. Enfin, nous avons terminé avec une étude comparative au niveau de l'énergie entre les commandes proposées.

Au point d'amélioration de ce travail, nous proposons en perspectives :

- Afin d'avoir une simulation plus proche à la réalité, nous suggérons un modèle dynamique exact avec la considération des frottements, les couples de distribution et les effets de robot sur l'environnement.

## **Conclusion générale**

---

- Afin de voir la validation en temps réel des commandes développées, nous projetons l'implémentation de ces techniques sur un prototype réel du système.
- Pour avoir des résultats plus rapide et plus précise, nous suggérons des applications des commandes avancées tel que la commande par mode glissant avec des surfaces de glissement non linéaire ; l'ajute des lois adaptatives ; la commande par Backstepping et la logique floue.

### *Bibliographie*

- [1] LAROUSSE, Dictionnaire du français contemporain, ISBN 2-03-029321-0, 1989.
- [7] Abderrahim BELLOUFI, « Cours de robotique », UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA, 2015.
- [8] M.Zine Elabidine CHEBAB, « Conception et commande collaborative de manipulateurs mobiles modulaires(C<sup>3</sup>M<sup>3</sup>) », UNIVERSITE Clermont Auvergne, Thèse de Doctorat, 2018
- [17] Vincent PADOIS, « Enchainements dynamique de taches pour des manipulateur mobile à roues », Institut National Polytechnique de Toulouse, Thèse de doctorat, 2005.
- [22] Ali ELOUAFIQ, « Design and engineering of a robot arm », AL AKHAWAYN UNIVERSITE IN IFRANE.
- [24] Bernard BAYLE, « Robotique mobile », Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg, Cours, 2006.
- [28] Mohamed Amine KLAAI, « Conception, modélisation et contrôle d'un bras a trois degrés de liberté », UNIVERSITE SAAD DAHLAB BLIDA, Mémoire de master, 2019.
- [29] Rosa FODIL, KENZA SAYAH, « Réalisation et commande d'un bras manipulateur à quatre degrés de liberté », UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA BOUMERDES, Mémoire de master, 2017.
- [31] S.BORSSALI, « Modélisation des robots », UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID TLEMCE, 2012.
- [32] Mohamed BOUKENS, « Contribution à la commande des robots manipulateurs mobiles », UNIVERSITE DE PICARDIE JULLES VERNE, Thèse de doctorat, 2017.
- [33] Wisama KHALIL, Etienne DOMBRE, « Bases de la modélisation et de la commande des robots-manipulateurs de type série », Ecole Centrale de Nantes, Support de cours, 8 mai 2012.
- [34] Guy CAMPION, Georges BASTIN, Brigitte D'ANDREA-NOVEL, « Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots », IEEE TRANSACTION ON ROBOTICS AND AUTOMATION, VOL. 12, NO. 1, Février 1996.
- [35] Jacques Gangloff, « Cours de robotique », ENSPS 3A.
- [36] Fateh MAKHLOUFI, « Modélisation et commande des robots manipulateurs par les outils de l'intelligence artificielle », UNIVERCITE BADJI-MOKHAR ANNABA, Thèse de doctorat, 2015.
- [37] Ph. BIDAUD, « cours de robotique avancée redondance et optimisation », UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE PARIS 6.
- [38] Saad Eddine BENYGZER, Ahmed Cherif MOULANA, « Etude et simulation d'un manipulateur mobile à roue », UNIVERSITE GILALI BOUNAAMA KHEMIS MILIANA, Mémoire de master, 2018.

- [39] Taha BAHRIZ, Mahfoud AMROUCHE, « Contrôle d'un système multi-robot par mode glissant », UNIVERSITE SAAD DAHLAB BLIDA, Mémoire de master, 2019.
- [40] Vincent BRÉGEAULT, « Quelques contributions à la théorie de la mode glissant », ECOLE CENTRALE DE NANTES, Thèse de doctorat, 3 décembre 2010.
- [41] Imen DEGHOUDJ, « Commande des systèmes non linéaires par mode glissant d'ordre supérieure », UNIVERSITE CONSTANTINE 1, Mémoire de master, 21 novembre 2013.
- [42] Arie LEVANT, « Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control », INT.J.COTROL, 1993, VOL 58 NO.6, 1247-1263.
- [43] Arie LEVANT, « Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers », IEEE TRANSACTION ON AUTOMATIC CONTROL, VOL 50, NO.11, Novembre 2005.
- [44] Mohamed BOUKATTAYA, Tarak DAMAK, Mohamed JALLOULI, « On trajectory tracking control for nonholonomic mobile manipulators with dynamic uncertainties and external torque disturbances », Robotics and Autonomous Systems, Article, Décembre 2012.

### *Webographie*

- [2] Clepsydre. <https://c8.alamy.com/compfr/g38fa4/la-clepsydre-egyptienne-ou-horloge-a-eau-mesure-le-temps-par-le-temps-qu-il-faut-un-vase-a-remplir-avec-de-l-eau-sur-un-cadran-a-mesure-que-l-eau-monte-date-vers-300-av-g38fa4.jpg>
- [3] Blaise Pascal. [https://cdn.futura-sciences.com/buildsv6/images/profilehero/3/c/a/3ca0bef4e2\\_50173922\\_blaise-pascal.jpg](https://cdn.futura-sciences.com/buildsv6/images/profilehero/3/c/a/3ca0bef4e2_50173922_blaise-pascal.jpg)
- [4] Chien électrique. <https://www.gotronic.fr/blog/wp-content/uploads/2016/10/Chien-electrique-1915.jpg>
- [5] Philidog. <http://cyberneticzoo.com/wp-content/uploads/2009/09/138587658-philidog-gettyima-.jpg>
- [6] Tortue cybernétique. <https://media.lesechos.com/api/v1/images/view/5d42d49f3e45466a7669bd87/1280x720/ech22259036-1.jpg>
- [9] LUNOKHOD1. <https://pic.clubic.com/v1/images/1856599/raw>
- [10] Shakey. [https://mind.ilstu.edu/curriculum/medical\\_robotics/images/shakey\\_sm\\_1967.jpg](https://mind.ilstu.edu/curriculum/medical_robotics/images/shakey_sm_1967.jpg)
- [11] Robot humanoïde Wabot-1. <https://www.hcube-conseil.fr/wp-content/uploads/2019/02/Photo-robotic-2-700x667.jpg>
- [12] Robot puma. <https://www.logicbus.com.mx/blog/wp-content/uploads/2021/01/brazo-robot-puma.jpg>
- [13] Robodoc. [https://img.medicaexpo.fr/images\\_me/photo-g/102760-13082223.jpg](https://img.medicaexpo.fr/images_me/photo-g/102760-13082223.jpg)
- [14] Robot Cog. <https://www.researchgate.net/profile/Brian-Scassellati/publication/2563596/figure/fig4/AS:668356852068355@1536360099121/Cog-an-upper-torso-humanoid-robot-Cog-has-twenty-one-degrees-of-freedom-to-approximate.ppm>

- [15] Robot AIBO-ERS-110 Sony. <https://www.researchgate.net/profile/Masahiro-Fujita-3/publication/220122289/figure/fig3/AS:393958116085768@1470938342431/A-digital-creature-AIBO-ERS-110.png>
- [16] Robot Sojourner. <https://www.researchgate.net/profile/Alexander-Ceron/publication/28168349/figure/fig1/AS:394153067335683@1470984822310/Figura-4-Robot-Sojourner-Rover.png>
- [18] Robot Curiosity. [https://www.usinenouvelle.com/mediatheque/4/1/7/000153714\\_896x598\\_c.jpg](https://www.usinenouvelle.com/mediatheque/4/1/7/000153714_896x598_c.jpg)
- [19] Robot chien Aibo. [https://www.usinenouvelle.com/mediatheque/3/1/2/000616213\\_624x337\\_c.png](https://www.usinenouvelle.com/mediatheque/3/1/2/000616213_624x337_c.png)
- [20] Robot EffiBOT. <https://www.efdence.com/wp-content/uploads/2020/05/EffiBOT-presentation.png>
- [21] Robot Ameca. [https://cdn.futura-sciences.com/buildsv6/images/largeoriginal/a/f/1/af1b612bf4\\_50184119\\_ameca.jpg](https://cdn.futura-sciences.com/buildsv6/images/largeoriginal/a/f/1/af1b612bf4_50184119_ameca.jpg)
- [23] Robot mobile à roues. <https://image.tubefr.com/upload/9/16/916eafa02fc245c7be1de02a9cd4c989.jpg>
- [25] Robot Nao (Aldebaran Robotics). <https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcTYwhACEoehFRyg6C9jrjtqz0Fzh9RqDnq6ZDMcQuJgsizJVkWcji15HfLQNKBPGB8Wo4c&usqp=CAU>
- [26] Robot sous-marin Bathy Boi. [https://img.20mn.fr/nl0yYg9EQyWsWM2wamlsJck/1200x768\\_bathybot-restera-minimum-cinq-ans-2400-profondeur-large-toulon-rover-etudiera-particulier-bioluminescence-organismes-vivent-profondeurs](https://img.20mn.fr/nl0yYg9EQyWsWM2wamlsJck/1200x768_bathybot-restera-minimum-cinq-ans-2400-profondeur-large-toulon-rover-etudiera-particulier-bioluminescence-organismes-vivent-profondeurs)
- [27] Robot de type voiture. <https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcR77B84PNLkHgoEmZxceFOSJyWQ4UgEBB3Cmw&usqp=CAU>
- [30] Principe d'un moteur à courant continu. <https://energieplus-lesite.be/wp-content/uploads/2019/03/moteurprincipe1.GIF>

---

# **Annexe**

---

## Annexe A

Modèle dynamique d'un robot manipulateur-mobile :

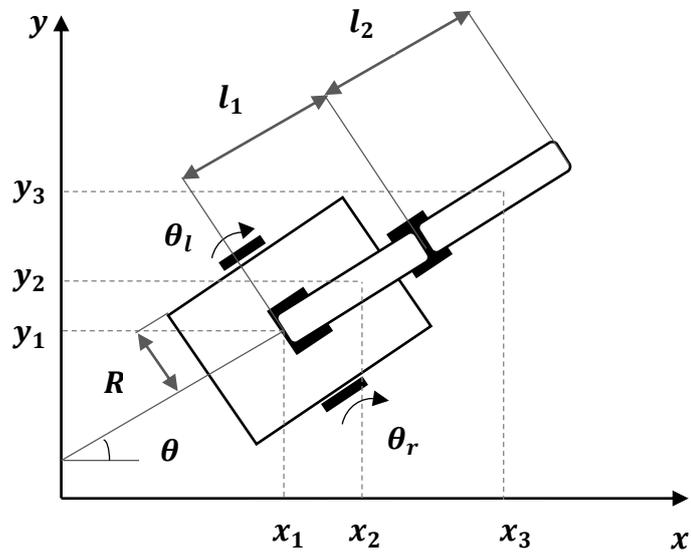


Figure I.1 Schéma de manipulateur mobile dans le plan X-Y

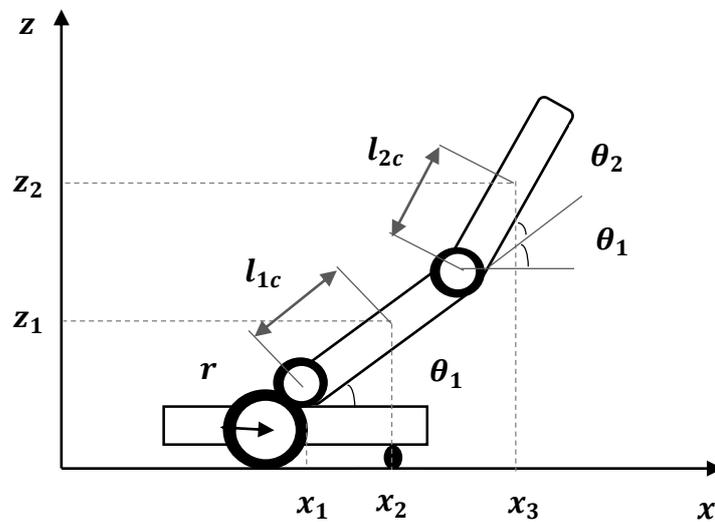


Figure I.2 Schéma de manipulateur mobile dans le plan X-Z

Pour calculer les énergies on doit d'abord avoir les expressions des positions et des vitesses le calcul est comme suit :

Les positions (dans le centre de gravité) :

$$x_1 = x \quad (\text{I.1})$$

$$y_1 = y \quad (\text{I.2})$$

$$x_2 = l_{1c} \cos \theta_1 \cos \theta + x \quad (\text{I.3})$$

$$y_2 = l_{1c} \cos \theta_1 \sin \theta + y \quad (\text{I.4})$$

$$z_2 = l_{1c} \sin \theta_1 \quad (\text{I.5})$$

$$x_3 = l_1 \cos \theta_1 \cos \theta + l_{2c} \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta + x \quad (\text{I.6})$$

$$y_3 = l_1 \cos \theta_1 \sin \theta + l_{2c} \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta + y \quad (\text{I.7})$$

$$z_3 = l_1 \sin \theta_1 + l_{2c} \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{I.8})$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x} \quad (\text{I.9})$$

$$\dot{y}_1 = \dot{y} \quad (\text{I.10})$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x} + l_{1c}(-\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \cos \theta - \dot{\theta} \cos \theta_1 \sin \theta) \quad (\text{I.11})$$

$$\dot{y}_2 = \dot{y} + l_{1c}(-\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \sin \theta - \dot{\theta} \cos \theta_1 \cos \theta) \quad (\text{I.12})$$

$$\dot{z}_2 = l_{1c} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \quad (\text{I.13})$$

$$\dot{x}_3 = \dot{x} + l_{1c}(-\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \cos \theta - \dot{\theta} \cos \theta_1 \sin \theta) + l_{2c}(-(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta - \dot{\theta} \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta) \quad (\text{I.14})$$

$$\dot{y}_3 = \dot{y} + l_{1c}(-\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \sin \theta - \dot{\theta} \cos \theta_1 \cos \theta) + l_{2c}(-(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta + \dot{\theta} \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta) \quad (\text{I.15})$$

$$\dot{z}_3 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_{2c}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{I.16})$$

Les énergies cinétiques et potentielles :

$$T_1 = \frac{1}{2}M(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \quad (\text{I.17})$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \frac{1}{2}I_{z_1}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_{y_1}\dot{\theta}_1^2 \quad (\text{I.18})$$

$$T_3 = \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2) + \frac{1}{2}I_{z_2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_{y_2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \quad (\text{I.19})$$

$$U_1 = 0 \quad (\text{I.20})$$

$$U_2 = m_1 g l_1 \sin \theta_1 \quad (\text{I.21})$$

$$U_3 = m_2 g (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)) \quad (\text{I.22})$$

Formulation de Lagrange :

$$L = \Sigma T - \Sigma U \quad (\text{I.23})$$

$$L = \left[ \frac{1}{2} M (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \frac{1}{2} I_{z_1} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{y_1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2) + \frac{1}{2} I_{z_2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{y_2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \right] - [m_1 g l_1 \sin \theta_1 + m_2 g (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2))] \quad (\text{I.24})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial x} = (m_1 + m_2 + M) \ddot{x} - (m_1 l_{1c} + m_2 l_1) [\ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 \cos \theta + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_1 \cos \theta - 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta} \sin \theta_1 \sin \theta + \ddot{\theta} \cos \theta_1 \sin \theta] - m_2 l_{2c} [(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta + (\dot{\theta}^2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta - 2 \dot{\theta} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta + \ddot{\theta} \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta] \quad (\text{I.25})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial y} = (m_1 + m_2 + M) \ddot{y} + (m_1 l_{1c} + m_2 l_1) [-\ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 \sin \theta - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_1 \sin \theta - 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta} \sin \theta_1 \cos \theta + \ddot{\theta} \cos \theta_1 \cos \theta] + m_2 l_{2c} [-(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta - (\dot{\theta}^2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta - 2 \dot{\theta} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta + \ddot{\theta} \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta] \quad (\text{I.26})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \theta} = -m_2 l_1 \ddot{x} \cos \theta_1 \sin \theta - m_2 l_{2c} \ddot{x} \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta + m_2 l_1 \ddot{y} \cos \theta_1 \cos \theta + m_2 l_{2c} \ddot{y} \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta + m_2 l_1^2 \ddot{\theta} \cos^2 \theta_1 + m_2 l_{2c}^2 \ddot{\theta} \cos^2(\theta_1 + \theta_2) + 2 m_2 l_1 l_{2c} \ddot{\theta} \cos \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + m_1 l_{1c}^2 \ddot{\theta} \cos^2 \theta_1 - m_1 l_{1c} \ddot{x} \cos \theta_1 \sin \theta + m_1 l_{1c} \ddot{y} \cos \theta_1 \cos \theta + (I + I_{z_1} + I_{z_1}) \ddot{\theta} - (m_1 l_{1c}^2 + m_2 l_1^2) [2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta} \sin \theta_1 \cos \theta_1] - 2 m_2 l_1 l_{2c} [\dot{\theta}_1 \dot{\theta} \sin \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \dot{\theta} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2)] - 2 m_2 l_{2c}^2 \dot{\theta} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{I.27})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \theta_1} = -m_2 l_1 \ddot{x} \sin \theta_1 \cos \theta - m_2 l_{2c} \ddot{x} \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta - m_1 l_{1c} \ddot{x} \sin \theta_1 \cos \theta - (m_1 l_{1c} + m_2 l_1) \ddot{y} \sin \theta_1 \sin \theta - m_2 l_{2c} \ddot{y} \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta + m_2 l_1 l_{2c} (2 \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos \theta_2 + (m_2 l_1^2 + m_2 l_{2c}^2 + m_1 l_{1c}^2 + I_{y_1} + I_{y_2}) \ddot{\theta}_1 + (I_{y_2} + m_2 l_1^2) \ddot{\theta}_2 + (m_1 l_{1c}^2 + m_2 l_1^2) \dot{\theta}^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + m_2 l_1 l_{2c} \dot{\theta}^2 [\sin \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \cos \theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\theta_2)] + m_2 l_{2c}^2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) - m_2 l_1 l_{2c} (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin \theta_2 + m_1 g (l_{1c} + l_1) \cos \theta_1 + m_2 g l_{2c} \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (I.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \theta_2} = & -m_2 l_{2c} \ddot{x} \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta - m_2 l_{2c} \ddot{y} \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta + \\ & [m_2 l_{2c}^2 + m_2 l_1 l_{2c} (\sin \theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) + \cos \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)) + I_{y_2}] \ddot{\theta}_1 + (m_2 l_2 + I_{y_2}) \ddot{\theta}_2 + \\ & m_2 l_{2c}^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) + m_2 l_1 l_{2c} \dot{\theta}^2 \cos \theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) - m_2 l_1 l_{2c} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \\ & \dot{\theta}_2) \sin \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) - m_2 l_1 l_{2c} \dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_1 + \theta_2) + m_2 g l_{2c} \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (I.29)$$

Le modèle dynamique :

Matrice d'inertie  $M(q)$  :

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & M_{13} & M_{14} & M_{15} \\ 0 & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & 0 & 0 \\ M_{41} & M_{42} & 0 & M_{44} & M_{45} \\ M_{51} & M_{52} & 0 & M_{54} & M_{55} \end{bmatrix} \quad (I.30)$$

$$M_{11} = M_{22} = m_1 + m_2 + M \quad (I.31)$$

$$M_{13} = M_{31} = [-(m_1 l_{1c} + m_2 l_1) \cos \theta_1 - m_2 l_{2c} \cos(\theta_1 + \theta_2)] \sin \theta \quad (I.32)$$

$$M_{14} = M_{41} = [-(m_1 l_{1c} + m_2 l_1) \sin \theta_1 - m_2 l_{2c} \sin(\theta_1 + \theta_2)] \cos \theta \quad (I.33)$$

$$M_{15} = M_{51} = -m_2 l_{2c} \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta \quad (I.34)$$

$$M_{23} = M_{32} = [(m_1 l_{1c} + m_2 l_1) \cos \theta_1 + m_2 l_{2c} \cos(\theta_1 + \theta_2)] \cos \theta \quad (I.35)$$

$$M_{24} = M_{42} = [(m_1 l_{1c} + m_2 l_1) \sin \theta_1 + m_2 l_{2c} \sin(\theta_1 + \theta_2)] \sin \theta \quad (I.36)$$

$$M_{25} = M_{52} = -m_2 l_{2c} \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta \quad (I.37)$$

$$M_{33} = [(m_2 l_1^2 + m_1 l_{1c}^2) \cos^2 \theta_1 + m_2 l_{2c}^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2) + 2l_1 l_{2c} m_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + I + I_{z_1} + I_{z_2}] \quad (I.38)$$

$$M_{44} = [2m_2 l_1 l_{2c} \cos \theta_2 + m_2 (l_1^2 + l_{2c}^2) + m_1 l_{1c}^2 + I_{y_1} + I_{y_2}] \quad (I.39)$$

$$M_{45} = M_{54} = [m_2 l_1 l_{2c} \cos \theta_2 + m_1 l_{1c}^2 + I_{y_2}] \quad (I.40)$$

$$M_{55} = m_2 l_2 + I_{y_2} \quad (I.41)$$

La matrice de Coriolis  $C(q, \dot{q})$  :

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ 0 & 0 & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ 0 & 0 & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ 0 & 0 & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ 0 & 0 & C_{53} & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix} \quad (\text{I.42})$$

$$C_{13} = -(m_1 l_{1c} + m_2 l_1) [\dot{\theta} \cos \theta_1 \cos \theta - \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \sin \theta] - m_2 l_{2c} [\dot{\theta} \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta] \quad (\text{I.43})$$

$$C_{14} = -(m_1 l_{1c} + m_2 l_1) [\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \cos \theta - \dot{\theta} \sin \theta_1 \sin \theta] - m_2 l_{2c} [\dot{\theta} \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta] \quad (\text{I.44})$$

$$C_{15} = -m_2 l_{2c} [\dot{\theta} \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta] \quad (\text{I.45})$$

$$C_{23} = -(m_1 l_{1c} + m_2 l_1) [\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \cos \theta + \dot{\theta} \cos \theta_1 \sin \theta] - m_2 l_{2c} [\dot{\theta} \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta] \quad (\text{I.46})$$

$$C_{24} = -(m_1 l_{1c} + m_2 l_1) [-\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin \theta - \dot{\theta} \sin \theta_1 \cos \theta] - m_2 l_{2c} [\dot{\theta} \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta] \quad (\text{I.47})$$

$$C_{25} = -m_2 l_{2c} [\dot{\theta} \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta] \quad (\text{I.48})$$

$$C_{33} = -(m_2 l_1^2 + m_1 l_{2c}^2) [\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1] - m_2 l_1 l_{2c} [\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta] - m_2 l_{2c}^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{I.49})$$

$$C_{34} = -(m_2 l_1^2 + m_1 l_{2c}^2) [\dot{\theta} \sin \theta_1 \cos \theta_1] - m_2 l_1 l_{2c} [\dot{\theta} \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta_1 + \dot{\theta} \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta] - m_2 l_{2c}^2 \dot{\theta} \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{I.50})$$

$$C_{35} = -m_2 l_1 l_{2c} [\dot{\theta} \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta_1] - m_2 l_{2c}^2 \dot{\theta} \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{I.51})$$

$$C_{43} = (m_2 l_1^2 + m_1 l_{2c}^2) [\dot{\theta} \sin \theta_1 \cos \theta_1] + m_2 l_1 l_{2c} [\dot{\theta} (\sin \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta_1)] + m_2 l_{2c}^2 \dot{\theta} \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) = -C_{34} \quad (\text{I.52})$$

$$C_{44} = -m_2 l_1 l_{2c} \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \quad (\text{I.53})$$

$$C_{45} = -m_2 l_1 l_{2c} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin \theta_2 \quad (\text{I.54})$$

$$C_{53} = m_2 l_1 l_{2c} \dot{\theta} \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta_1 + m_2 l_{2c}^2 \dot{\theta} \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) = -C_{35} \quad (\text{I.55})$$

$$C_{54} = -m_2 l_1 l_{2c} [\dot{\theta}_1 \sin(2\theta_1 + \theta_2) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)] \quad (\text{I.56})$$

$$C_{55} = -m_2 l_1 l_{2c} [\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)] \quad (\text{I.57})$$

Vecteur de gravité  $G(q)$  :

$$G(q) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad G_4 \quad G_5]^T \quad (\text{I.58})$$

$$G_4 = m_1 g (l_{1c} + l_1) \cos \theta_1 + m_2 g l_{2c} \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{I.59})$$

$$G_5 = m_2 g l_{2c} \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{I.60})$$

Matrice de transformation  $D(q)$  :

$$D(q) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ R & -R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.61})$$

Vecteur des contraintes cinématique  $J(q)$  :

$$J(q) = [-\sin \theta \quad \cos \theta \quad -d \quad 0 \quad 0] \quad (\text{I.62})$$

### Vérification de modèle :

Le modèle dynamique a des propriétés :

- 1-  $M(q)$  est une matrice définie positive et symétrique
- 2-  $\dot{M} - 2C$  est une matrice antisymétrique.

$$\dot{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{M}_{13} & \dot{M}_{14} & \dot{M}_{15} \\ 0 & 0 & \dot{M}_{23} & \dot{M}_{24} & \dot{M}_{25} \\ \dot{M}_{31} & \dot{M}_{32} & \dot{M}_{33} & 0 & 0 \\ \dot{M}_{41} & \dot{M}_{42} & 0 & \dot{M}_{44} & \dot{M}_{45} \\ \dot{M}_{51} & \dot{M}_{52} & 0 & \dot{M}_{54} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.63})$$

$$\dot{M}_{13} = \dot{M}_{31} = C_{13} = -(m_1 l_{1c} + m_2 l_1) [\dot{\theta} \cos \theta_1 \cos \theta - \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \sin \theta] - m_2 l_{2c} [\dot{\theta} \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta] \quad (\text{I.64})$$

$$\dot{M}_{14} = \dot{M}_{41} = C_{14} = -(m_1 l_{1c} + m_2 l_1) [\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \cos \theta - \dot{\theta} \sin \theta_1 \sin \theta] - m_2 l_{2c} [\dot{\theta} \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta] \quad (\text{I.65})$$

$$\dot{M}_{15} = \dot{M}_{51} = C_{15} = -m_2 l_{2c} [\dot{\theta} \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta] \quad (\text{I.66})$$

$$\dot{M}_{23} = \dot{M}_{32} = C_{23} = -(m_1 l_{1c} + m_2 l_1) [\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \cos \theta + \dot{\theta} \cos \theta_1 \sin \theta] - m_2 l_{2c} [\dot{\theta} \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta] \quad (\text{I.67})$$

$$\dot{M}_{24} = \dot{M}_{42} = C_{24} = -(m_1 l_{1c} + m_2 l_1) [-\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin \theta - \dot{\theta} \sin \theta_1 \cos \theta] - m_2 l_{2c} [\dot{\theta} \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta] \quad (\text{I.68})$$

$$\dot{M}_{25} = \dot{M}_{52} = C_{25} = -m_2 l_{2c} [\dot{\theta} \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta] \quad (\text{I.69})$$

$$\dot{M}_{33} = 2C_{33} = 2[-(m_2 l_1^2 + m_1 l_{2c}^2) [\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1] - m_2 l_1 l_{2c} [\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta] - m_2 l_{2c}^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)] \quad (\text{I.70})$$

$$\dot{M}_{44} = 2C_{44} = -2m_2 l_1 l_{2c} \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \quad (\text{I.71})$$

$$\dot{M}_{45} = \dot{M}_{54} = -m_2 l_1 l_{2c} \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \quad (\text{I.72})$$

$$N = \dot{M} - 2C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{13} & N_{14} & N_{15} \\ 0 & 0 & N_{23} & N_{24} & N_{25} \\ N_{31} & N_{32} & 0 & N_{34} & N_{35} \\ N_{41} & N_{42} & N_{43} & 0 & N_{45} \\ N_{51} & N_{52} & N_{53} & N_{54} & N_{55} \end{bmatrix} \quad (\text{I.73})$$

$$N_{13} = -N_{31} = \dot{M}_{13} - 2C_{13} = -\dot{M}_{13} \quad (\text{I.74})$$

$$N_{14} = -N_{41} = \dot{M}_{14} - 2C_{14} = -\dot{M}_{14} \quad (\text{I.75})$$

$$N_{15} = -N_{51} = \dot{M}_{15} - 2C_{15} = -\dot{M}_{15} \quad (\text{I.76})$$

$$N_{23} = -N_{32} = \dot{M}_{23} - 2C_{23} = -\dot{M}_{23} \quad (\text{I.77})$$

$$N_{24} = -N_{42} = \dot{M}_{24} - 2C_{24} = -\dot{M}_{24} \quad (\text{I.78})$$

$$N_{25} = -N_{52} = \dot{M}_{25} - 2C_{25} = -\dot{M}_{25} \quad (\text{I.79})$$

$$N_{34} = -N_{43} = \dot{M}_{34} - 2C_{34} = -2C_{34} \quad (\text{I.80})$$

$$N_{35} = -N_{53} = \dot{M}_{35} - 2C_{35} = -2C_{35} \quad (\text{I.81})$$

$$N_{45} = -N_{54} = \dot{M}_{45} - 2C_{45} = -\dot{M}_{45} \quad (\text{I.82})$$

### Annexe B

#### Conception mécanique et schéma électrique

##### Conception mécanique :

La conception physique doit être sur l'environnement de SolidWorks pour avoir la représentation de structure de robot. Le chariot mobile et le bras manipulateur ont été travaillant séparément après on a connecte les pièces les unes avec les autres.

##### a- La plateforme :

C'est la base mobile de robot qui doit supporter le bras manipulateur, elle se tenir sur trois roues, une passive roue et deux motorisé.

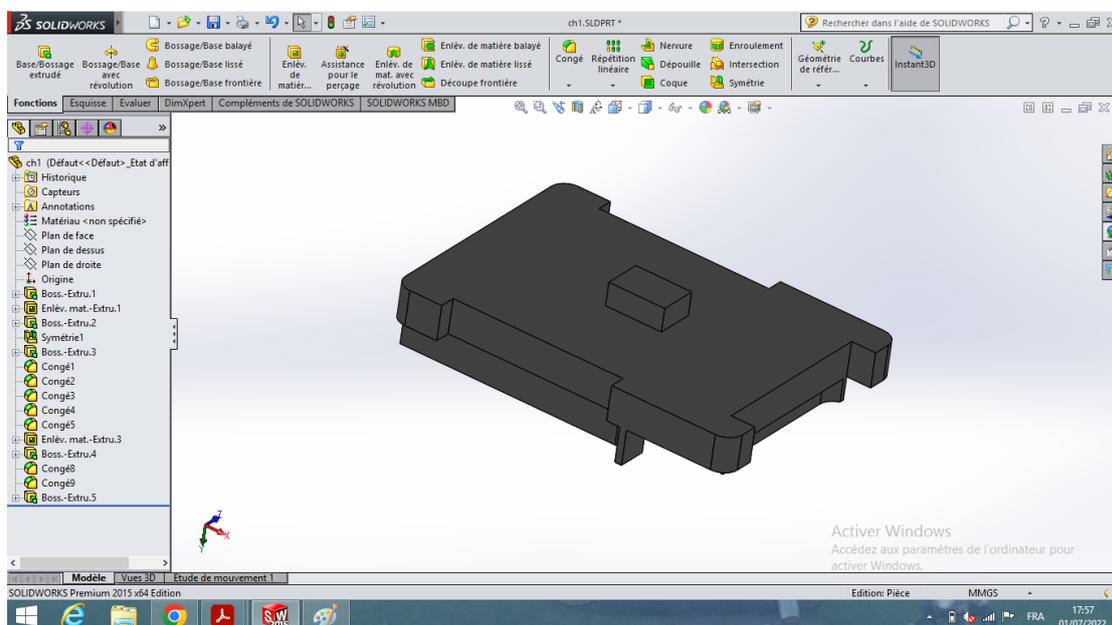


Figure II.1 Structure mécanique de plateforme avec SolidWorks.

##### b- Les roues :

Le manipulateur mobile a trois roues, la première roue est à l'avant pour avoir la stabilité de robot et deux autres roues motorisé par des moteurs à vitesse pour avoir le déplacement de robot.

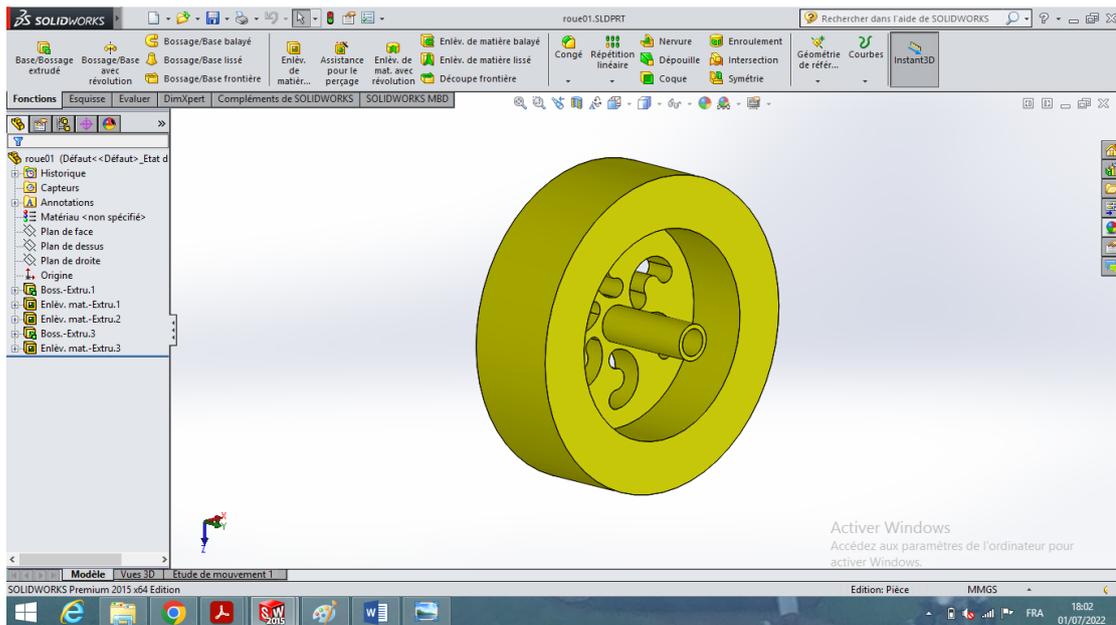


Figure II.2 Structure mécanique de roue avec SolidWorks.

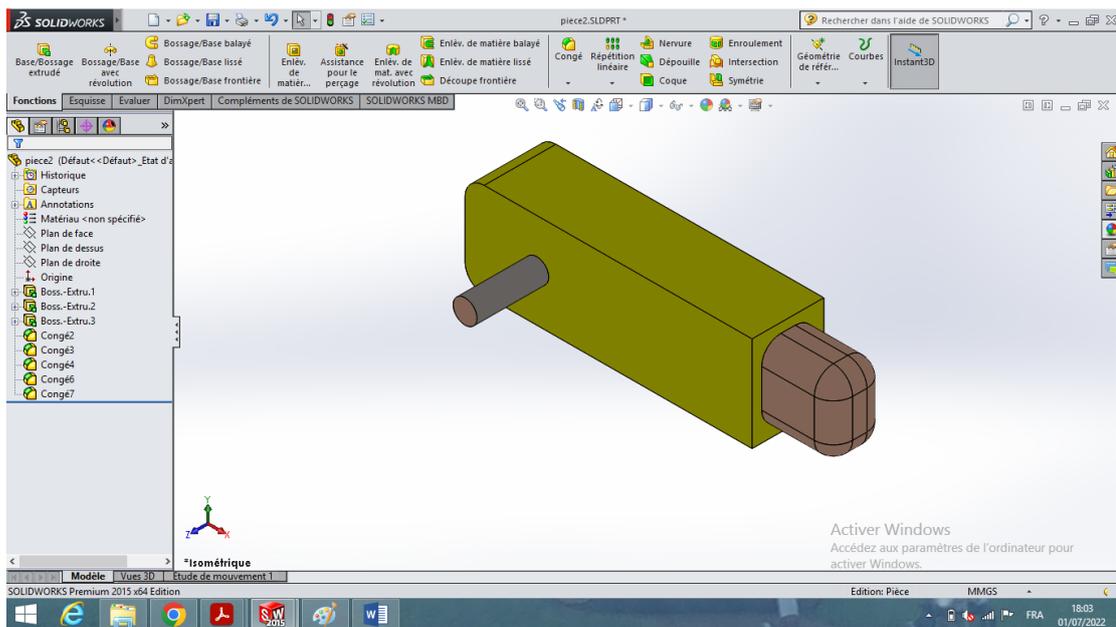


Figure II.3 Structure mécanique de moteur a vitesse avec SolidWorks.

### c- Bras manipulateur :

Il est la partie responsable de faire les taches et les manipulations, il est composé de deux corps motorisé par des servomoteurs.

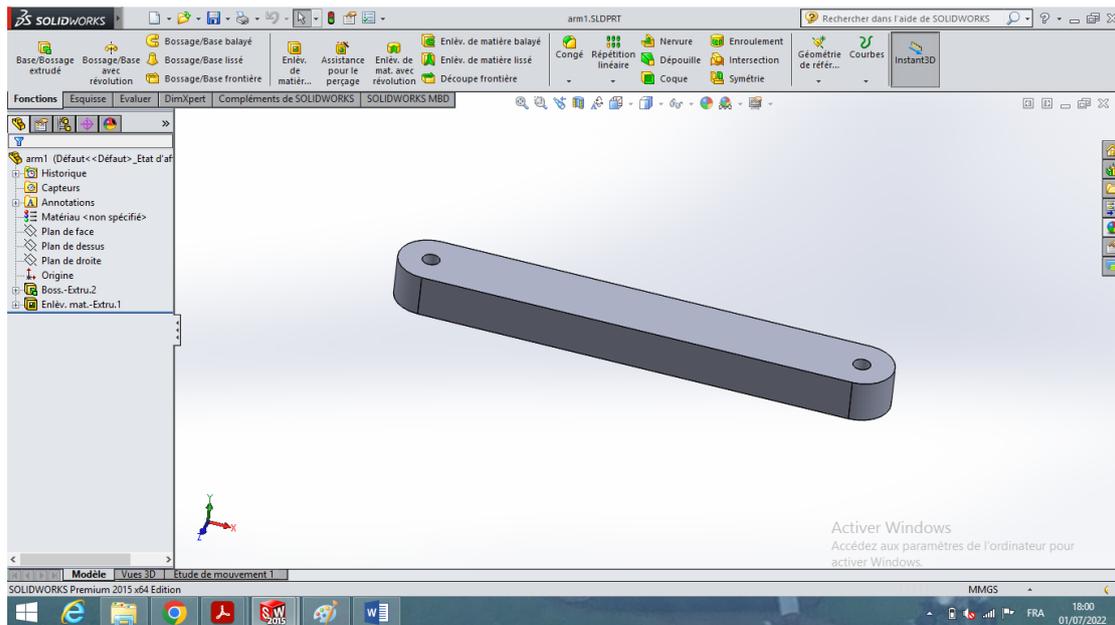


Figure II.4 Structure mécanique de bras manipulateur avec SolidWorks.

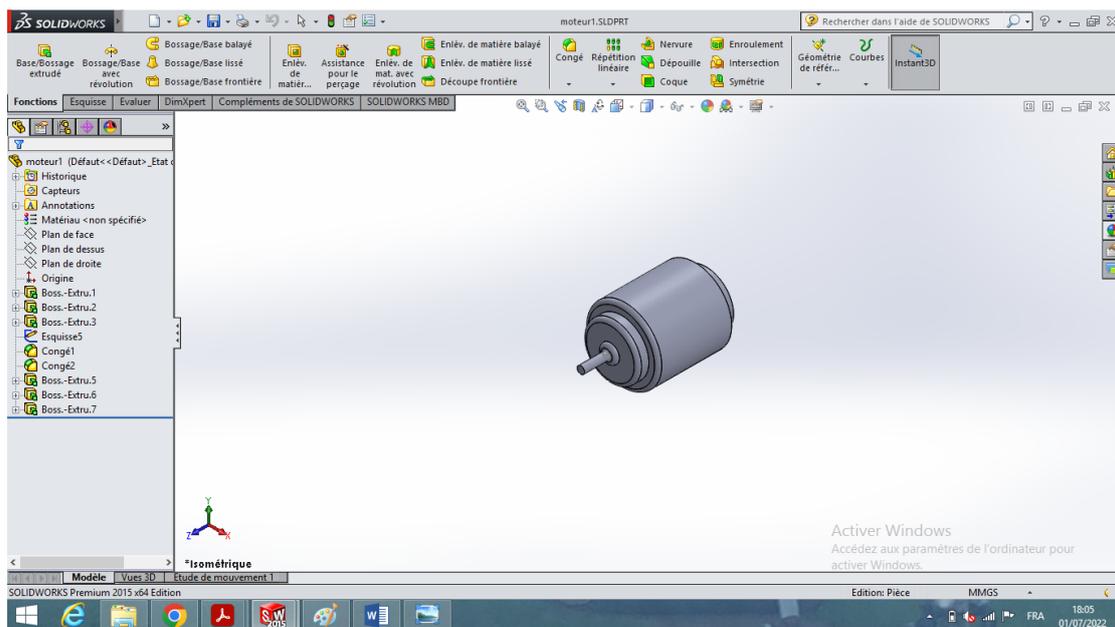


Figure II.5 Structure mécanique de servomoteur avec SolidWorks.

L'assemblage de ces pièces donne la forme de robot manipulateur mobile.

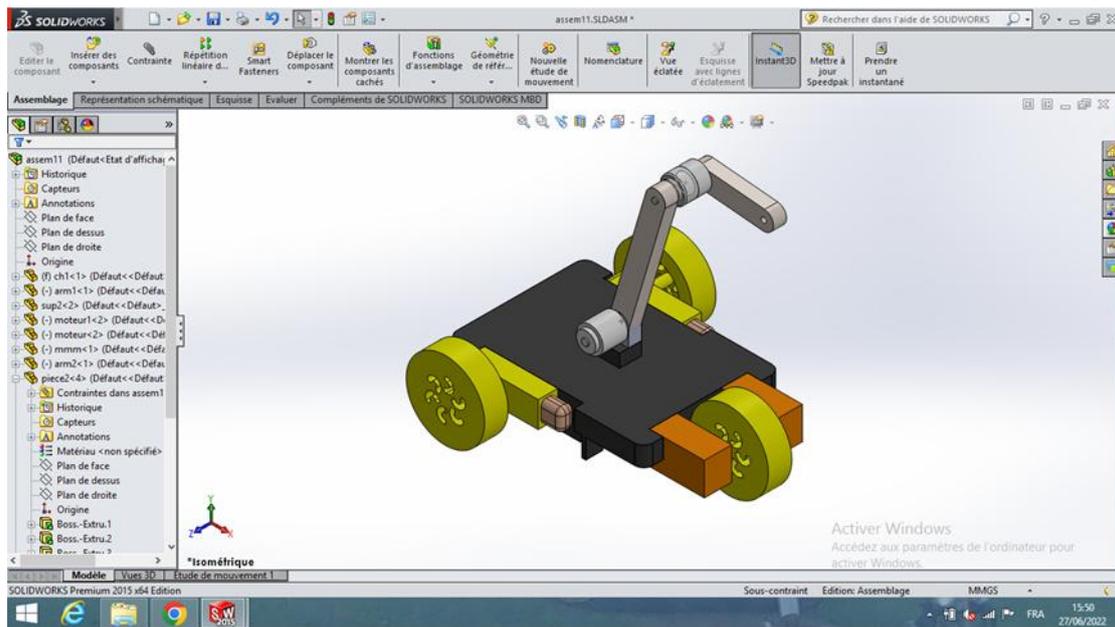


Figure II.6 Structure mécanique de manipulateur mobile avec SolidWorks.

**Simulation de manipulateur mobile avec MATLAB :**

Pour avoir les mouvements de robot, on a fait une simulation sur MATLAB à l'aide du modèle géométrique. La trajectoire désirée est donné par :

$$q_d(t) = \begin{bmatrix} \theta_r \\ \theta_l \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t \\ 2t \\ 0.005t \\ 0.5 + 0.25\sin(0.2\pi t) \end{bmatrix} \quad (II.1)$$

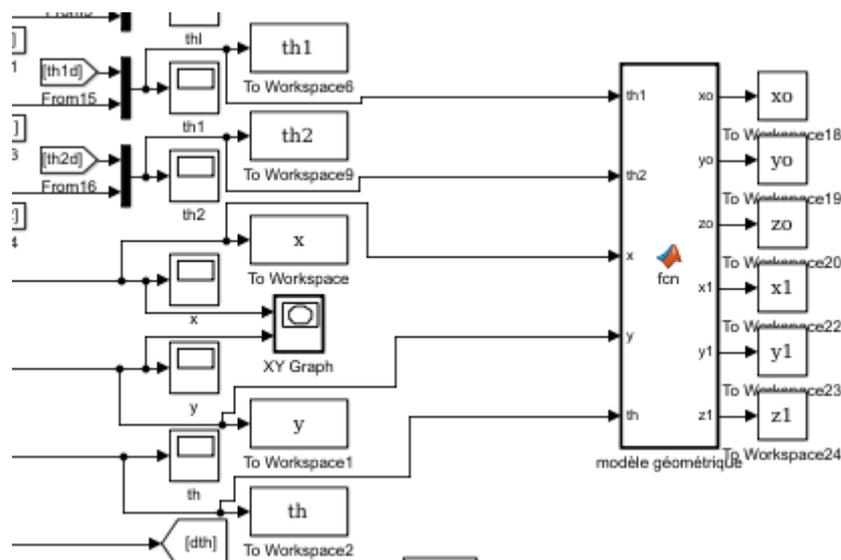


Figure II.7 Schéma bloc de modèle géométrique.

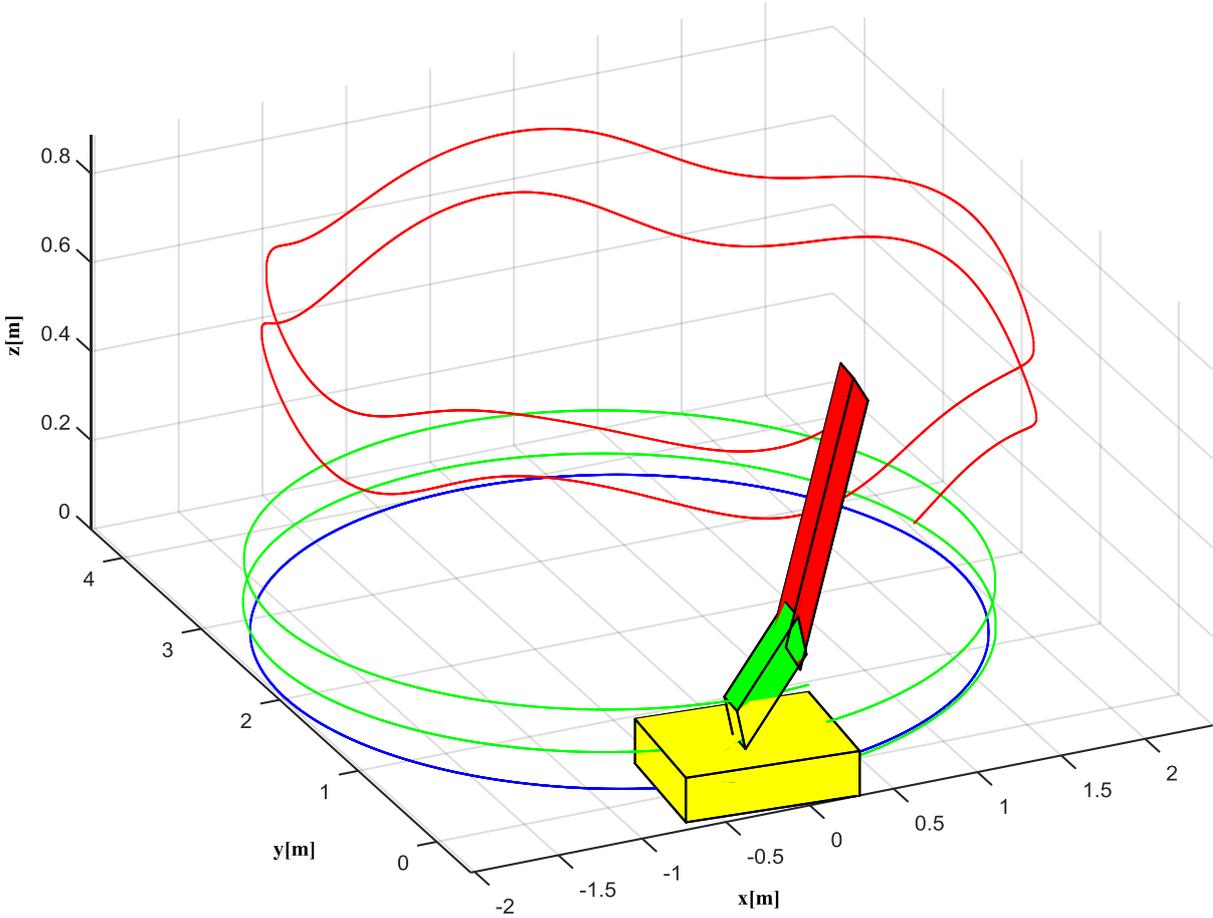


Figure II.8 Simulation de manipulateur mobile avec MATLAB.