

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA-BOUMERDES



Faculté des Sciences de l'Ingénieur

Résumé de Mémoire de Magister

Présenté par :

M^r AOUADI ABDELHAK.

En vue de l'obtention du diplôme de **MAGISTER** en :

Filière : Génie Civil

Option : SOL – STRUCTURE – MATERIAUX

THEME

**ADAPTATION DES SOLS COMPRESSIBLES EN UTILISANT LE CONCEPT DE
L'ETAT CARACTERISTIQUE**

Devant le jury composé de :

Mr. KADRI Mohamed	Professeur	UMB Boumerdes	Président
Mr. MEHADDENE Rachid	Professeur	UMM Tizi-Ouzou	Examineur
Mr. DRIZI Saïd	MCA	UMM Tizi-Ouzou	Examineur
Mr. HAMADOUCHE Ameziane	MCA	UMB Boumerdes	Directeur

Année universitaire 2013/2014

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, Je voudrais exprimer ma sincère gratitude et ma vive reconnaissance à mon directeur de mémoire Monsieur HAMADOUCHE Mohand Ameziane, maitre de conférences (A) à l'Université de Boumerdes. Je lui adresse mes plus vifs remerciements pour l'aide et l'attention qu'il a porté à ce travail et pour la confiance qu'il m'a accordée en me laissant un large champ d'initiative.

Je remercie très sincèrement Monsieur KADRI MOHAMED, professeur à l'Université de Boumerdes, d'avoir accepté de présider mon jury de soutenance.

Je tiens également à remercier Monsieur MEHADDENE Rachid, professeur à l'Université de Tizi Ouzou, d'avoir accepté d'examiner ce mémoire. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Je remercie vivement Monsieur DRIZI Saïd, maitre de conférences (A) à l'Université de Tizi Ouzou, d'avoir accepté d'examiner ce mémoire. Je lui suis très reconnaissant de faire partie du jury.

En dernier lieu, je tiens à remercier tous mes proches, parents et amis et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

DEDICACE

A MES PARENTS,

A MES FRERES, A MA SŒUR,

ET A MES AMIS.

المخلص

المنشآت المعرضة لأحمال متغيرة مع الوقت أو الخاضعة لأحمال دورية ضمن حدود معروفة, حد السلامة المحدد بنظريات تحليل حد الحمل لا يضمن امن المنشآت المعرضة لهذه الاحمال، ويمكن أن تنهار هاذه المنشآت حتى لتحميل دون الحد الأقصى للحمولة. نظرية التكييف البلاستيكية تعتبر أفضل بديل لتصميم المنشآت المعرضة لأحمال دورية. إذا تكييف المنشأ مع حالة التحميل ، التشوهات البلاستيكية تميل إلى حد ولا تزيد عنه وتصبح استجابة المنشأ مرنة بحتة بعد سلوك إلتوبلاستيكي. إذ لم يتكيف المنشأ مع حالة التحميل. طريقتان من الانهيار يمكن أن تحدث للمنشأ:

- انهيار المنشأ عن طريق تراكم التشوهات البلاستيكية، روشي

- انهيار المنشأ عن طريق تناوب التشوهات ، تعب اوليقوسكلينك

تعتبر نظريات التكييف امتداد لنظريات تحليل حد الحمل الستاتيكي و الحركي. نظريات التكييف تعلمنا إذ المنشأ تكييف مع حالة التحميل أو لا تحت أحمال دورية معرفة, أما نظريات تحليل حد الحمل تعلمنا عن دخول المنشأ في الحالة الخطرة تحت تأثير الحملات النسبية او المتصاعدة. عنصر أساسي في إثبات هذه النظريات ألا وهو قانون الاستقرار لدراكر ومفهوم التعامد أو ما يسمى قانون السريان المرتبط. مواد التربة و المواد الاحتكاكية ينتمون إلي صنف المواد الغير العادية ، لهاد الصنف من المواد لا نستطيع تطبيق قانون الاستقرار لدراكر. في دراستنا هاته، نقترح تطبيق نظرية التكييف الستاتيكي لوصف سلوك التربة المضغوطة وهاذ باستخدام مفهوم الحالة الخاصة.

الطريقة الرقمية لحساب حد حمل التكييف تعتمد علي الممازجة بين طريقة العناصر المنتهية و البرمجة الرياضية الغير الخطية. لتحسين الحل استعملنا طريقة لاغرانج المطورة.

المصطلحات:

التكييف, مفهوم الحالة الخاصة, اللدونة, التربة المضغوطة(الرمل, الطين), طريقة العناصر المنتهية, تحسين الحل

RESUME

Pour les structures soumises aux chargements variables dans le temps ou simplement cycliques dans des limites prescrites, la charge limite de sécurité déterminée par les théorèmes d'analyse limite ne garantit pas la fiabilité de la structure, et la rupture peut avoir lieu même pour une charge bien inférieure à la charge limite de sécurité. La méthode de l'adaptation plastique présente une alternative pour le dimensionnement des structures sous chargement cyclique. Si la structure s'adapte les déformations plastiques tendent vers une limite et la réponse deviendra purement élastique après un comportement élastoplastique. Si la structure ne s'adapte pas deux modes de ruine sont alors possible :

- la ruine par accumulation des déformations plastiques (le rochet) ;
- la ruine par déformations alternées (fatigue oligocyclique ou accommodation).

Les théorèmes d'adaptations sont des généralisations des théorèmes d'analyse limite statique et cinématique. Ils nous informent si le matériau s'adapte ou non sous un chargement cyclique donné, tandis que les théorèmes d'analyse limites prédisent l'écoulement du matériau sous un chargement proportionnel ou monotone. Un point essentiel dans la démonstration de ces théorèmes est le postulat de stabilité de Drucker et le concept de la normalité ou la règle d'écoulement associée. Les sols et les matériaux frottants appartiennent à la classe des matériaux non standards pour lesquels le postulat de Drucker n'est pas vérifié. Dans cette étude, nous proposons l'application du théorème statique d'adaptation aux cas des sols compressibles en utilisant le concept de l'état caractéristique.

La procédure numérique pour le calcul de la charge limite d'adaptation repose sur le couplage de la méthode des éléments finis avec la programmation mathématique non-linéaire. Le problème d'optimisation sans contraintes est solutionné par la méthode du Lagrangien augmenté.

Mots Clés : Adaptation, Etat caractéristique, Plasticité, Matériaux compressibles (sables, argiles), Eléments finis statiquement admissible, Optimisation.

ABSTRACT

Structures subjected to loads varying in times in a cyclic manner within prescribed limits, the classical limit theorems can give unsafe estimates of the collapse loads, as a failure can occur at loads well below the static collapse condition by other forms of collapse. If the strain increments change sign in every cycle, with yielding on both sides of the cycle, then alternating plasticity is said to occur; the net plastic deformation may remain small, but weakening of the material may occur nevertheless - a phenomenon called low cycle fatigue - leading to breaking of the most highly stressed points after a certain number of cycles. It May also happen that plastic deformation in each cycle accumulates so that after enough cycles, the displacements are large enough to be equivalent to collapse; this is called incremental collapse. On the other hand, it may happen that no further plastic deformation occurs after one or a few cycles, that is all subsequent loading reloading cycles are elastic. In that case the body is said to have experienced shakedown.

The shakedown theorems are generalizations of the limit theorems in the sense that they provide static and kinematic approaches to the question of whether or not shakedown will occur for a given structure under given cyclic loading. Whereas the limit theorems provide static and kinematic approaches to the question of whether or not flow will occur in a given structure under given loads.

An essential point in the proof of these theorems is the Druker's stability postulate and the concept of normality condition or associated flow rule. Soils and frictional materials belong to the class of non standard materials which have non associated flow rule, for which Druker's postulate of positive work dissipation in a loading cycle does not apply.

This work deals with the application of the static shakedown theorem for compressible materials (non standard materials) by using the characteristic state concept.

The numerical method used for computation of the best shakedown load estimate is based on the equilibrated finite element formulation coupled with a nonlinear programming. The unconstrained optimization problem is solved by the augmented Lagrangian method.

Key Words: Shakedown, Characteristic state, Plasticity, Compressible materials (sand, clay), Equilibrium finite element method, Optimization.

PRINCIPALES NOTATIONS

ϕ	angle de frottement interne
ϕ_c	angle de frottement caractéristique
ψ	angle de dilatance
ν	coefficient de Poisson
μ	coefficient de frottement
C	cohésion
σ^a	contrainte admissible
σ^e	contrainte élastique
p	contrainte moyenne
q	contrainte déviatorique
σ_1	contrainte principale majeure
σ_2	contrainte principale intermédiaire
σ_3	contrainte principale mineure
ρ	contrainte résiduelle
$\bar{\rho}$	contrainte résiduelle indépendante du temps
σ^s	contrainte de sécurité
ε^e	déformation élastique
ε^{er}	déformation élastique résiduelle
$\bar{\varepsilon}^{er}$	déformation élastique résiduelle indépendante du temps
ε^p	déformation plastique
ε^r	déformation résiduelle

$\boldsymbol{\varepsilon}$	déformation totale
$\boldsymbol{\varepsilon}_v$	déformation volumique totale
\boldsymbol{u}_i	déplacement
\boldsymbol{u}_i^e	déplacement qui résulte des forces de volume
\boldsymbol{u}_i^r	déplacement qui résulte des déformations plastiques
\boldsymbol{U}_i	déplacements imposés
\boldsymbol{D}	domaine de chargement
U_C	énergie complémentaire
U^*	énergie complémentaire de déformation
W	énergie de déformation élastique fictive
$\tilde{\boldsymbol{D}}$	enveloppe convexe du domaine \boldsymbol{D}
\boldsymbol{K}	état d'écrouissage
α_{AD}	facteur de charge d'adaptation
α_{AL}	facteur de charge d'analyse limite
Φ	fonction de contrainte D'Airy
N_i	fonctions de forme
F_i	forces de volume
T_i	forces de surface
e_{cri}	indice des vides à l'état critique
L	Lagrangien
f^e	matrice de flexibilité élémentaire
H	module d'écrouissage
E	module d'Young

$\dot{\lambda}$	multiplicateur de plasticité
μ_i	multiplicateurs de charges
w	paramètres de pénalité
V^*	potentiel des forces extérieures
F	surface de charge ou critère d'écoulement
G	surface potentielle
Q	surface caractéristique ou critère caractéristique
σ_{ij}	tenseur des contraintes
E_{ijkl}	tenseur d'élasticité
E_{ijkl}^p	tenseur d'élastoplasticité
$\dot{\epsilon}_{ij}$	vitesse de déformation totale
$\dot{\epsilon}_{ij}^e$	vitesse de déformation élastique
$\dot{\epsilon}_{ij}^p$	vitesse de déformation plastique

Un être mathématique, avec un indice représente un vecteur (par exemple u_i), avec deux indices ou plus représente un tenseur (par exemple σ_{ij} tenseur d'ordre 2, E_{ijkl} tenseur d'ordre 4).

LISTE DES FIGURES

Chapitre I

Figure I.1 : Représentation de l'écrouissage (a) isotrope (b) cinématique dans le plan des contraintes principales	5
Figure I.2.a : Cas de chargement	6
Figure I.2.b : Cas de déchargement	6
Figure I.3 : Principe de travail maximal de Hill (1950)	10
Figure I.4 : Représentation du critère de Mohr-Coulomb	14
Figure I.5 : Modélisation d'un essai triaxial de compression par la loi de Mohr-Coulomb	14
Figure I.6 : Représentation du critère de Tresca	15
Figure I.7 : Représentation du critère de Von Mises	16
Figure I.8 : Représentation du critère de Drucker-Prager	17
Figure I.9 : Modélisation d'un essai triaxial de compression par la loi de Drucker-Prager	18

Chapitre II

Figure II.1 : Résultats typique pour un sol pulvérulent : essai de compression en conditions drainée et non drainée	21
Figure II.2 : Exemple d'enveloppe de rupture pour un sol pulvérulent	22
Figure II.3.a : Représentation de l'état critique	23
Figure II.3.b : Courbes représentant le déviateur et la déformation volumique en fonction de la déformation axiale lors d'essais drainés effectués sur des sables lâches et denses	24
Figure II.4 : Notion de contractance et de dilatance sous cisaillement	26
Figure II.5.a : Variation de volume sous chargement monotone	27
Figure II.5.b : Critère caractéristique « LUONG »	27
Figure II.6 : Différents types de comportement observés sous chargement cyclique a) à pression contrôlée ; b) à déformation contrôlée ; c) cycles alternés et non alternés (d'après Loret. 1987)	29
Figure II.7 : Essais de compression triaxiale sur le sable de « FONTAINEBLEAU »	31

Figure II.8 : Essais d'extension triaxiale sur le sable de « FONTAINEBLEAU »	32
Figure II.9 : Critère caractéristique (le double trait représente le seuil caractéristique)	33
Figure II.10.a : Compression triaxiale à $p = 0.2MPa = Cte$	34
Figure II.10.b : Extension triaxiale à $p = 0.2MPa = Cte$	34
Figure II.11 : Chargement drainé à déviateur constant	35
Figure II.12 : Compressibilité du sable de Fontainebleau sous contrainte isotrope	36
Figure II.13 : Chargement radial en condition drainée (compression et extension triaxiales)	37
Figure II.14 : Cisaillement drainé sur un trajet sphérique	38
Figure II.15 : Cisaillement drainé sur un trajet sphérique	39
Figure II.16 : Chargement hydrostatique cyclique ($\eta = 0$)	40
Figure II.17 : Chargement radial à ($\eta < \eta_c$)	41
Figure II.18 : Chargement radial à ($\eta > \eta_c$)	41
Figure II.19.a : Chargements cycliques sur du sable de « FONTAINEBLEAU »	43
Figure II.19.b : Chargements cycliques sur du sable de « FONTAINEBLEAU »	44
Figure II.20 : Cisaillement drainé sur un trajet sphérique	45
 <u>Chapitre III</u>	
Figure III.1 : milieu continu et sollicitations	49
Figure III.2 : Adaptation et rupture incrémentale	55
Figure III.3 : Surface de charge F et Surface potentielle G	58
Figure III.4 : Ligne caractéristique et ligne d'instabilité (d'après <i>IBSEN & Lade</i> [13])	59
Figure III.5 : Surface potentielle et Surface de charge pour (a) sables lâches (b) sables denses (d'après <i>Zienkiewicz & al</i> [32])	59
 <u>Chapitre IV</u>	
Figure IV.1 : Domaine de variation des charges	63
Figure IV.2 : Continuité des contraintes	66
Figure IV.3 : Cas d'un chargement appliqué sur la frontière	69

Chapitre V

Figure V.1 : Massif de sol sous chargement cyclique	75
Figure V.2 : Conditions aux limites et chargement	76
Figure V.3 : Répartition des points test	76
Figure V.4.a : Influence de la cohésion sur le facteur de charge (Adaptation)	77
Figure V.4.b : Influence de la cohésion sur le facteur de charge (Analyse limite)	77
Figure V.5 : Influence de la cohésion sur le facteur de charge (Analyse limite ; adaptation)	78
Figure V.6.a : Influence de l'angle de frottement interne sur le facteur de charge ($C = 35Kpa$)	79
Figure V.6.b : Influence de l'angle de frottement interne sur le facteur de charge ($C = 70Kpa$)	79
Figure V.7.a : Influence du coefficient de frottement μ sur le facteur de charge ($C = 35Kpa$, $\phi = 0^0$, $\phi = 15^0$, $\phi = 30^0$)	80
Figure V.7.b : Influence du coefficient de frottement μ sur le facteur de charge ($C = 70Kpa$, $\phi = 0^0$, $\phi = 15^0$, $\phi = 30^0$)	81
Figure V.8.a : détermination du facteur de charge d'adaptation, ($C = 35Kpa$) pour : i) sol incompressible, ii) sol contractant, iii) sol dilatant	83
Figure V.8.b : détermination du facteur de charge d'adaptation, ($C = 70Kpa$) pour : i) sol incompressible, ii) sol contractant, iii) sol dilatant	83
Figure V.9.a : détermination du facteur de charge d'analyse limite, ($C = 35Kpa$) pour : i) sol incompressible, ii) sol contractant, iii) sol dilatant	83
Figure V.9.b : détermination du facteur de charge d'analyse limite, ($C = 70Kpa$) pour : i) sol incompressible, ii) sol contractant, iii) sol dilatant	84

LISTE DES TABLEAUX

Chapitre II

Tableau II.1 : Différences entre les deux concepts	46
---	----

Chapitre V

Tableau V.1 : Propriété matérielles et chargement	75
--	----

SOMMAIRE

SOMMAIRE**ABSTRACT****RESUME****NOTATIONS*****INTRODUCTION GENERAL***

1. INTRODUCTION	1
2. CONTENU DU RAPPORT	2

CHAPITRE I***THEORIE ELASTOPLASTIQUE DES SOLS***

I.1. INTRODUCTION	3
I.2. EQUATIONS DES MODELES ELASTOPLASTIQUES	3
I.2.1. Notions fondamentales	3
I.2.2. Déformations élastoplastiques	4
I.2.3. Surface de charge et domaine d'élasticité	4
I.2.4. Écrouissage	5
I.2.5. Règle d'écoulement plastique	7
I.2.6. Hypothèse de travail plastique maximal	9
I.3. MATERIAUX STANDARDS (REGLE D'ECOULEMENT ASSOCIEE)	11
I.4. MATERIAUX NON STANDARDS (REGLE D'ECOULEMENT NON ASSOCIEE)	11
I.5. COMPORTEMENT NON STANDARDS DES SOLS	12
I.6. MODELES ELASTIQUES PARFAITEMENT PLASTIQUES POUR LES SOLS	13
I.6.1. Critère de Mohr-Coulomb	13
I.6.2. Critère de Tresca	15
I.6.3. Critère de Von Mises	16
I.6.4. Critère de Drücker-Prager	17
I.7. CONCLUSION	19

CHAPITRE II**LE CONCEPT DE L'ETAT CRITIQUE ET D'ETAT CARACTERISTIQUE**

II.1. INTRODUCTION	20
II.2. COMPORTEMENT MECANIQUE DES SABLES EN CISAILLEMENT	20
II.2.1. Comportement mécanique sous cisaillement monotone	20
II.2.1.1. Principaux concepts rhéologiques des matériaux granulaires	23
- Etat critique	23
- Etat caractéristique	25
II.2.2. Comportement mécanique sous cisaillement cyclique	28
II.2.2.1. Introduction	28
II.2.2.2. Principaux types de comportement cyclique	28
II.3. CONSTATATIONS EXPERIMENTALES DU COMPORTEMENT RHEOLOGIQUE DES SOLS (CAS DU SABLE DE FONTAINEBLEAU)	30
II.3.1. Introduction	30
II.3.2. Constatations expérimentales sous chargement monotone	30
II.3.2.1. Essais de compression triaxiale	30
II.3.2.2. Essais d'extension triaxiale	32
II.3.2.3. Comparaison des deux types d'essai	33
II.3.2.4. Cisaillement drainé à contrainte moyenne p constante	34
II.3.2.5. Chargement drainé à déviateur q constant	35
II.3.2.6. Caractéristique contraintes-déformations sous trajet de charge radial en condition drainé	36
II.3.2.7. Chargement drainé à obliquité de contrainte variable	38
II.3.3. Constatations expérimentales sous chargement cyclique	40
II.3.3.1. Déformations sous des cycles de chargements radiaux	40
II.3.3.2. Déformations sous des cycles de charges déviatoriques au triaxial conventionnel	42
II.4. PROPRIETES COMPAREES DES ETATS CARACTERISTIQUE ET CRITIQUE	46
II.5. CONCLUSION	47

CHAPITRE III**THEORIE DE L'ADAPTATION APPLIQUEE AUX SOLS COMPRESSIBLES**

III.1. INTRODUCTION	48
III.2. THEORIE D'ADAPTATION	48
III.3. THEOREME D'ADAPTATION STATIQUE DE MELAN	53
III.4. COEFFICIENT DE SECURITE A L'ADAPTATION	55
III.5. THEOREME CINEMATIQUE DE KOITER	57
III.6. ADAPTATION DES SOLS COMPRESSIBLES	58
III.7. GENERALISATION DU THEOREME STATIQUE D'ADAPTATION AUX CAS DES SOLS	60
II.7.1. Surface caractéristique	60
II.7.2. Condition suffisante d'adaptation	60
II.8. CONCLUSION	61

CHAPITRE IV**FORMULATION DU PROBLEME D'ADAPTATION PAR MEF**

IV.1. INTRODUCTION	62
IV.2. DOMAINE DE CHARGEMENT	62
IV.3. FORMULATION ELEMENT FINIS	64
IV.3.1. Principe du minimum de l'énergie complémentaire totale	64
IV.3.2. Fonction de contrainte d'Airy	65
IV.3.3. Continuité des contraintes inter-éléments	66
IV.3.4. Approximation de la fonction d'Airy par les polynômes d'Hermite	67
IV.3.5. Prise en compte des conditions aux limites par les multiplicateurs de Lagrange	68
IV.3.6. Calcul de la réponse purement élastique	70
IV.3.7. Calcul de la réponse plastique : Détermination du champ de contrainte résiduelle	71
IV.3.8. Facteur de charge à l'adaptation	72
IV.4. CONCLUSION	73

CHAPITRE V

APPLICATION NUMERIQUE

V.1. INTRODUCTION	74
V.2. EXPLOITATION NUMERIQUE	74
V.3. INFLUENCE DE LA COHESION SUR LA CHARGE LIMITE	77
V.4. INFLUENCE DE L'ANGLE DE FROTTEMENT INTERNE SUR LA CHARGE LIMITE	79
V.5. ETUDE DE L'INFLUENCE DES CONTRAINTES DE CISAILLEMENT	80
V.6. INFLUENCE DE L'ANGLE DE FROTTEMENT CARACTERISTIQUE SUR LA NATURE DES DEFORMATIONS VOLUMIQUES	82

CONCLUSION GENERALE

REFERENCES

ANNEXES

***INTRODUCTION
GENERALE***

INTRODUCTION GENERALE

1. INTRODUCTION

Les théorèmes statique et cinématique de la théorie de l'adaptation sont basés sur le postulat de Drucker (ou le principe du travail plastique maximal de Hill) valable pour les matériaux standards (incompressibles) dont la loi d'écoulement est de type associée, pour ces matériaux, l'incrément de déformation plastique est perpendiculaire à la surface de charge.

Les géo-matériaux en général et les sols en particulier sont des matériaux non standards (compressibles). La déformation plastique est accompagnée d'une variation de volume, et la règle de normalité donne une indication non réaliste sur la direction de la déformation plastique. C'est la raison pour laquelle l'utilisation d'une loi d'écoulement associée conduit à une dilataance excessive qui est contraire à la réalité expérimentale.

L'approche souvent utilisée pour orienter correctement cette déformation consiste en la donnée d'une surface potentielle appelée aussi (G-surface), en plus de la surface de charge (loi d'écoulement non associée). La surface potentielle est utilisée comme un critère pour la détermination de la charge limite d'adaptation des sols. Cependant cette approche présente des inconvénients majeurs, en effet :

- elle est incapable de capturer le type de variations de volume qui se produisent dans le Sol. Ces dernières (variations de volume) jouent un rôle important dans la stabilité ou l'instabilité de tels matériaux ;
- des études expérimentales montrent qu'on peut avoir une rupture par instabilité (bifurcation) à l'intérieure même de la surface potentielle.

Dans cette étude on propose une autre alternative plus commode qui consiste à remplacer le potentiel plastique par la surface caractéristique, basée essentiellement sur le concept de l'état caractéristique. La surface caractéristique marque une limite entre le comportement contractant et le comportement dilatant du sol. A cette limite le sol devient plastiquement incompressible ce qui entraîne la validation de la règle de normalité. La surface caractéristique est déterminée à partir des constatations expérimentales, donc plus réaliste et plus fiable que l'approche basée sur l'existence d'une fonction potentielle à l'intérieure de la surface de charge introduite juste pour la validation de la règle de normalité.

2. CONTENU DU RAPPORT

Dans le **premier chapitre** nous donnons un aperçu sur l'élastoplasticité des sols: le modèle de comportement élastoplastique et ses aspects, les schémas d'évolution comme l'érouissage (isotrope et cinématique), les matériaux standards et non standards ainsi que les différents critères de plasticité usuelles en mécanique des sols.

Dans le **deuxième chapitre** nous présentons le concept de l'état caractéristique et l'état critique et la comparaison entre les deux concepts, ainsi que les constatations expérimentales sur le sable sous chargement cyclique.

Nous exposons dans le **troisième chapitre** l'application du théorème statique d'adaptation aux cas des sols compressibles en utilisant le concept de l'état caractéristique.

Nous présentons dans **Le quatrième chapitre** la formulation numérique de la méthode de l'adaptation. Elle est basée sur le principe du minimum de l'énergie complémentaire totale. Les contraintes dérivent des fonctions de contrainte d'Airy ce qui garantit l'équilibre. Ces fonctions sont construites à partir des polynômes bi-cubique d'Hermite, ce qui assurent la continuité inter-éléments et conduit à une meilleure estimation de la charge limite d'adaptation. L'algorithme numérique est basé sur le couplage de la méthode des éléments finis et la méthode du Lagrangien augmenté.

Le cinquième chapitre est consacré aux applications numériques. L'approche développée est appliquée pour l'étude d'un massif de sol sous condition de déformation plane. Le sol est modélisé comme un matériau élastique parfaitement plastique obéissant au critère de Mohr Coulomb. Nous examinons en particulier l'influence des paramètres suivants sur la charge limite d'adaptation :

- influence de la cohésion ;
- influence de l'angle de frottement interne ;
- influence des contraintes de cisaillement ;
- influence de l'angle de frottement caractéristique sur la nature des déformations volumiques.

La validation est faite par rapport aux résultats d'analyse limite.

CHAPITRE I

***THEORIE ELASTOPLASTIQUE DES
SOLS***

I.1. INTRODUCTION

La connaissance du comportement d'un sol soumis à des efforts constitue un enjeu important puisqu'elle permet d'estimer les déformations résultant des contraintes appliquées et de prévoir en particulier la rupture du massif. Le comportement des sols est très complexe. En effet, il est essentiellement irréversible, non linéaire, dilatant et dépendant de l'histoire et de la direction des sollicitations.

Les modèles élasto-plastiques permettent de décrire un comportement non linéaire avec une déformation irréversible des matériaux. Ces modèles de comportement écartent tout effet de vieillissement du matériau et de viscosité. Le schéma des modèles élastoplastiques intègre l'existence d'un palier d'écoulement sur la courbe contrainte déformation et de déformations irréversibles. Cette application permet de décrire de façon relativement satisfaisante les principaux aspects du comportement mécanique des sols, en conservant néanmoins un domaine de réversibilité. Par ailleurs, ce schéma est bien adapté à une implantation dans les logiciels de calcul par éléments finis.

I.2. EQUATIONS DES MODELES ELASTOPLASTIQUES

I.2.1. Notions fondamentales

Le modèle élastoplastique à un mécanisme est caractérisé par les concepts fondamentaux suivants :

- la partition des déformations, qui décompose le tenseur des déformations totales ($\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$) en la somme du tenseur des déformations élastiques ($\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e$) et du tenseur des déformations plastiques ($\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p$) ;
- la surface de charge, qui définit le seuil de contrainte au-delà duquel le comportement d'un matériau est irréversible (plastique) ;
- le domaine d'élasticité, qui correspond à l'intérieur de la surface de charge et dans lequel les déformations sont réversibles ;
- l'écrouissage, qui permet de faire évoluer la surface de charge dans l'espace des contraintes en fonction de l'intensité des sollicitations. Dans ce cas, le domaine d'élasticité varie également ;
- la règle d'écoulement plastique, qui décrit la manière dont évoluent les déformations plastiques;
- le critère de plasticité parfaite, qui caractérise la rupture du matériau. Lorsque le seuil de contrainte n'évolue pas, ce critère est confondu avec la surface de charge.

I.2.2. Déformations élastoplastiques

La plasticité se caractérise par la présence de déformations irréversibles au déchargement. Les déformations se décomposent en une partie élastique et une partie plastique. La partition des taux de déformations donne la relation suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^p \quad (\text{I.1})$$

Les taux de déformation élastique $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^e$ et de contrainte $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}$ sont liés par l'intermédiaire du tenseur d'élasticité E_{ijkl} :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} = E_{ijkl} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kl}^e \quad (\text{I.2})$$

Avec :

- $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^e$: le taux de déformation élastique.
- $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^p$: le taux de déformation plastique.

I.2.3. Surface de charge et domaine d'élasticité

Le deuxième concept fondamental est celui de domaine d'élasticité. Le domaine initial d'élasticité définit l'ensemble des trajets de chargement le long desquels le comportement du matériau est continuellement élastique. Lorsque le trajet de chargement sort de ce domaine, un phénomène physique supplémentaire se superpose à celui de la déformation élastique. Ce phénomène, qui correspond à la déformation plastique, est irréversible.

Le domaine d'élasticité est donc défini par une fonction scalaire F du tenseur de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$, appelée fonction de charge du matériau et telle que :

- $F(\boldsymbol{\sigma}_{ij}) < 0$ correspond à l'intérieur du domaine, les déformations sont uniquement élastiques ;
- $F(\boldsymbol{\sigma}_{ij}) = 0$ correspond à la frontière du domaine, les déformations élastiques peuvent être éventuellement accompagnées de déformations plastiques.
- $F(\boldsymbol{\sigma}_{ij}) > 0$ correspond à l'extérieur du domaine. Cette partie du domaine est impossible à atteindre.

La condition $F(\boldsymbol{\sigma}_{ij}) < 0$ est nommée critère d'élasticité et la condition $F(\boldsymbol{\sigma}_{ij}) = 0$ est nommée critère de plasticité.

La surface de charge peut dépendre de l'état de contrainte seul : il s'agit alors du cas particulier de la plasticité parfaite. Elle peut également dépendre du trajet de déformation plastique ou d'une autre variable interne : il s'agit alors d'un modèle élasto-plastique avec écrouissage.

I.2.4. Écrouissage

Pour un matériau écrouissable, le domaine d'élasticité actuel n'est pas fixé une fois pour toutes. Mais dépend de l'état d'écrouissage, que l'on représente par une variable \mathbf{K} introduite dans l'expression de la surface de charge, notée désormais $F(\sigma_{ij}, \mathbf{K})$. L'état d'écrouissage \mathbf{K} n'évolue que lorsqu'il y a évolution de la déformation plastique. L'équation $F(\sigma_{ij}, \mathbf{K}) = 0$ définit la surface de charge. Diverses théories ont été construites pour représenter l'écrouissage, les trois principales sont :

- **La théorie de l'écrouissage isotrope de Taylor et Quincey**, qui fait dépendre l'écrouissage d'un paramètre scalaire unique (K). Le domaine d'élasticité se transforme par homothétie de centre O (origine de l'espace) au fur et à mesure de l'écrouissage (fig.I.1-a).
- **La théorie de l'écrouissage cinématique de Prager**, pour laquelle les frontières d'élasticité successives se déduisent de la frontière initiale par translation dans l'espace des contraintes. L'écrouissage dépend alors d'un paramètre tensoriel du second ordre (K devient \mathbf{K}_{ij}), très utilisée pour modéliser le comportement cyclique des sols (fig.I.1-b).
- **La théorie de l'écrouissage mixte**, la combinaison des deux cas précédents conduit à un schéma plus complet. La surface de charge se translate et se dilate uniformément dans toutes les directions.

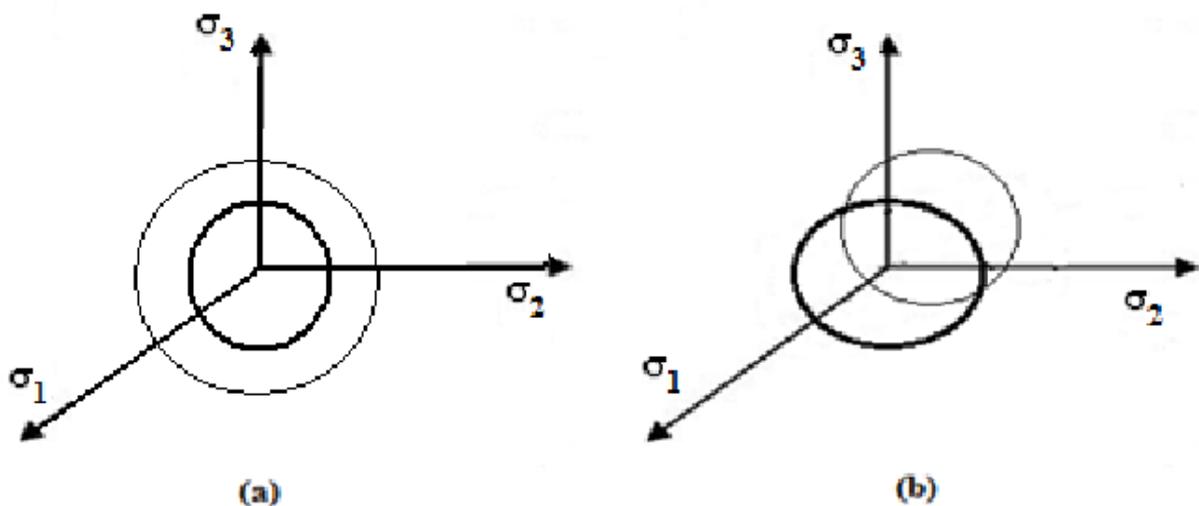


Figure I.1 – Représentation de l'écrouissage (a) isotrope (b) cinématique dans le plan des contraintes principales.

Soit $(\sigma_{ij}, \mathbf{K})$ un état de contrainte et d'écrouissage correspondant à une étape de chargement donnée. Si cet état est tel que $F(\sigma_{ij}, \mathbf{K}) < 0$, le tenseur (σ_{ij}) est intérieur au domaine d'élasticité actuel, la variation de déformation est donc élastique :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e \tag{I.3}$$

Si cet état est tel que $F(\sigma_{ij}, \mathbf{K}) = 0$, le tenseur (σ_{ij}) se trouve sur la frontière du domaine. Pour décrire le comportement, il convient de distinguer selon que le point matériel est en chargement (tendance à sortir du domaine d'élasticité) ou en déchargement (retour dans le domaine d'élasticité).

Il y a chargement si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\sigma_{ij}, \mathbf{K}) = \dot{F}(\sigma_{ij}, \mathbf{K}) = 0 \\ \text{et} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} > 0 \end{array} \right. \tag{I.4a}$$

$$\text{Donc } \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \tag{I.4b}$$

Il y a déchargement si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\sigma_{ij}, \mathbf{K}) = 0 \\ \text{et} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0 \end{array} \right. \tag{I.5a}$$

$$\text{Donc } \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e \tag{I.5b}$$

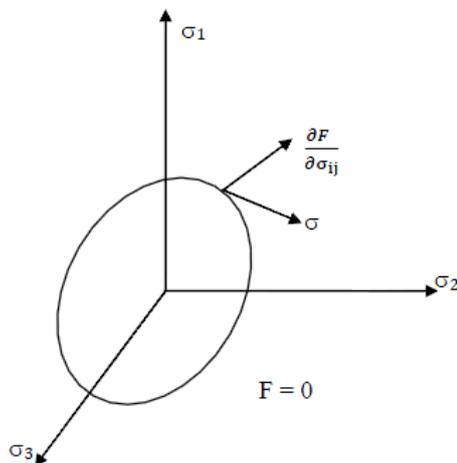


Figure I.2.a – Cas de chargement

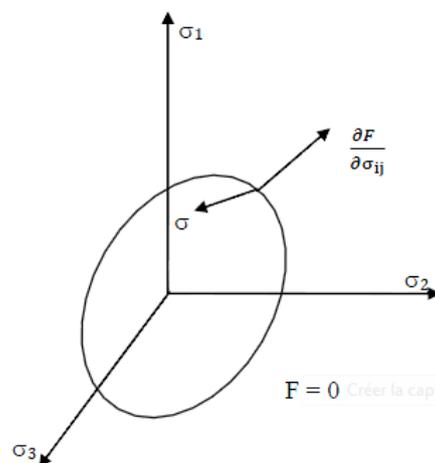


Figure I.2.b – Cas de déchargement

I.2.5. Règle d'écoulement plastique

La règle d'écoulement plastique exprime l'accroissement de déformation plastique en fonction des états de contrainte σ_{ij} et $\dot{\sigma}_{ij}$, et d'écrouissage K par l'intermédiaire d'un potentiel plastique G qui peut être différent de la fonction de charge F . L'expression générale de l'écoulement plastique prend la forme suivante :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \quad (I.6)$$

Avec :

$$\dot{\lambda} = 0 \text{ si } F < 0 \text{ ou si } F = 0 \text{ et } \dot{F} < 0$$

$$\dot{\lambda} \geq 0 \text{ si } F = \dot{F} = 0$$

où $\dot{\lambda}$ est le multiplicateur de plasticité et le point ($\dot{\cdot}$) exprime la dérivée temporelle des quantités considérées.

Lorsque les fonctions F et G diffèrent, la règle d'écoulement est dite non associée.

On introduit également, lorsqu'il y a écrouissage, la variable $H(\sigma_{ij}, K)$, appelée module d'écrouissage et définie par la relation :

$$H \dot{\lambda} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \quad (I.7)$$

En considérant (σ_{ij}, K) l'état de contrainte et d'écrouissage sur la frontière du domaine d'élasticité actuel, les relations suivantes sont vérifiées :

$$F(\sigma_{ij}, K) = 0$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \quad (I.8)$$

Le multiplicateur plastique doit à son tour être déterminé pour définir complètement la relation de comportement. Il faut utiliser la condition de consistance $\dot{F}(\sigma_{ij}, K) = 0$, qui indique que l'état de contrainte doit rester sur la surface de charge au cours du chargement $F = 0$ et $\dot{\lambda} > 0$. Cette condition s'écrit :

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial K} \dot{K} = 0 \quad (I.9)$$

D'où

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = - \frac{\partial F}{\partial K} \dot{K} \quad (I.10)$$

La variable K est une fonction scalaire de la déformation plastique (ε_{ij}^p). On peut supposer que K représente un écrouissage isotrope de la forme suivante :

$$K = K(\varepsilon_{ij}^p) \quad (\text{I.11})$$

Les relations précédentes permettent d'établir l'expression du module d'écrouissage H

$$\dot{\lambda}H = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = -\frac{\partial F}{\partial K} \dot{K} = -\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right) \left(\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_{ij}^p}\right) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (\text{I.12})$$

En tenant compte de la règle d'écoulement, si $\dot{\lambda} \neq 0$

$$H = -\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right) \left(\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_{ij}^p}\right) \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{I.13})$$

D'autre part les incréments de déformation élastique $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ et de contrainte sont liés par l'intermédiaire du tenseur d'élasticité E_{ijkl} ou son inverse S_{ijkl} :

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^e \quad \text{ou} \quad \dot{\varepsilon}_{kl}^e = S_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (\text{I.14.a})$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^e = E_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p) = E_{ijkl} \left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \right) \quad (\text{I.14.b})$$

En multipliant chaque membre de (1.14.b) par $\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\right)$, il vient :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\right) \dot{\sigma}_{ij} = \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\right) E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\right) E_{ijkl} \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}\right) = \dot{\lambda}H \quad (\text{I.15})$$

Le multiplicateur de plasticité s'écrit donc :

$$\dot{\lambda} = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\right) E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}}{H + \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\right) E_{ijkl} \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}\right)} \quad (\text{I.16})$$

On peut dès lors établir la relation incrémentale liant les incréments de déformations à ceux de contraintes :

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left\{ E_{ijkl} - \frac{\left(E_{ijnm} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{nm}} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{rs}} E_{rskl} \right)}{H + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{nm}} E_{nmrs} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}}} \right\} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (\text{I.17.a})$$

Que l'on peut encore réécrire sous la forme :

$$\dot{\sigma}_{ij} = (E_{ijkl} - E_{ijkl}^p) \dot{\epsilon}_{kl} \quad (\text{I.17.b})$$

Avec :

$$E_{ijkl}^p = \frac{\left(E_{ijnm} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{nm}} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{rs}} E_{rskl} \right)}{H + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{nm}} E_{nmrs} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}}} \quad (\text{I.18})$$

Le tenseur de comportement (E_{ijkl}^p) ainsi défini appelé tenseur d'élastoplasticité. La relation de comportement est également valable pour un matériau élastique parfaitement plastique (sans écrouissage). C'est -à-dire pour $H = 0$ [11].

I.2.6. Hypothèse de travail plastique maximal

Cette hypothèse a été formulée par Hill [12] (1950), on l'appelle souvent principe du travail plastique maximal et s'énonce comme suit :

- Le tenseur des contraintes (σ_{ij}) non extérieur au domaine d'élasticité actuel tel que $F(\sigma_{ij}, \mathbf{K}) = 0$

- ($\dot{\epsilon}_{ij}^p$) le tenseur de vitesse des déformations plastiques correspondant
- (σ_{ij}^s) le tenseur des contraintes vérifiant $F(\sigma_{ij}^s, \mathbf{K}) \leq 0$ (fig.I.3)

Si

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad \forall \sigma_{ij}^s \quad (\text{I.19})$$

Alors le matériau obéit au principe du travail plastique maximal.

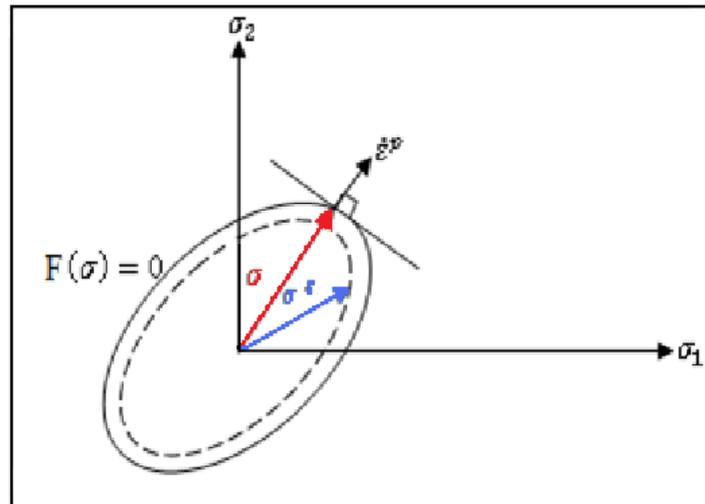


Figure I.3 – Principe de travail maximal de Hill (1950).

La validité du principe du travail plastique maximal (I.19) implique que :

- La surface d'écoulement portée dans l'espace des contraintes est convexe.
- En un point régulier de la surface de charge, l'unique orientation possible pour $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^p$ de façon à respecter (I.19) n'est autre que la normale extérieure à la surface de charge.
- En un point singulier, la convexité implique l'existence d'un cône convexe des normales extérieurs à $F(\boldsymbol{\sigma}_{ij}, \mathbf{K})$ en a tel que : $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^p$ appartient à ce cône.

En relation étroite avec ce principe, on peut énoncer également le postulat de DRUCKER :

$$d^2W = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (\text{I.20})$$

où $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}$ est l'incrément de contrainte sur la surface de charge causant l'écoulement plastique. La relation (I.20) définit la condition de stabilité.

- Si la loi d'écoulement est associée, la condition $d^2W \geq 0$ est satisfaite quelle que soit la direction $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}$ et le matériau est *inconditionnellement stable*.
- Sinon, le matériau est *stable* pour $d^2W \geq 0$ et *instable* pour $d^2W < 0$.

I.3. MATERIAUX STANDARDS (REGLE D'ÉCOULEMENT ASSOCIEE)

La loi d'écoulement est dite associée à la surface de charge quand cette dernière est confondue avec la surface représentative du potentiel plastique. Ce qui revient naturellement à considérer $F = G$.

La direction du vecteur déformation plastique dans l'espace des déformations principales (confondu avec celui des contraintes principales) est ainsi perpendiculaire à la surface de charge. $F = 0$, c'est-à-dire au vecteur gradient, normal à cette surface. Cela conduit à une loi d'écoulement de la forme.

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{I.21})$$

Les matériaux correspondants sont dits « **standards** », s'ils satisfont le principe de travail plastique maximal de Hill. Ce qui se traduit par la condition de normalité de l'incrément de déformation en tout point sur la frontière convexe de la surface de charge.

I.4. MATERIAUX NON STANDARDS (REGLE D'ÉCOULEMENT NON ASSOCIEE)

La règle d'écoulement est dite non associée lorsque la direction du vecteur déformation plastique est perpendiculaire à la surface représentative du potentiel plastique $G(\sigma_{ij})$ qui est distincte de celle représentative de la fonction de charge $F(\sigma_{ij})$. La règle d'écoulement plastique s'écrit alors :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{I.22})$$

Les matériaux correspondants sont dits « **non standards** », le principe du travail plastique maximal n'est en générale pas considéré comme valable pour ces matériaux.

Dans le cas des sols et des roches, l'utilisation d'une loi d'écoulement non associée s'avère souvent nécessaire, par ce que l'utilisation d'une loi d'écoulement associée avec $\psi = \phi$ conduit à une dilatance excessive pour les géo-matériaux.

I.5. COMPORTEMENT NON STANDARDS DES SOLS

La convexité des domaines d'élasticité étant validée expérimentalement c'est sur la règle de normalité que portent les vérifications de pertinence du principe du travail plastique maximal. Le principe du travail plastique maximal est en général admis pour les métaux et autres matériaux dont le critère de plasticité est indépendant de la contrainte moyenne $\sigma_m = \text{tr } \sigma_{ij} / 3$. En particulier la conclusion indiquée plus haut concernant l'invariance de volume lors de la déformation plastique correspond bien aux constatations expérimentales. Pour les matériaux dont la fonction de charge dépend de la contrainte moyenne, le principe du travail plastique maximal n'est en général pas considéré comme valable.

Prenons le cas du critère de Mohr-Coulomb pour un matériau parfaitement plastique la règle d'écoulement associée à ce critère distingue trois régimes [26], citons à titre d'exemple le régime de face dans lequel :

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda}(1 + \sin \phi) \\ \dot{\epsilon}_{ij}^p = 0 \\ \dot{\epsilon}_{ij}^p = -\dot{\lambda}(1 - \sin \phi) \end{array} \right\} \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (\text{I.23})$$

D'où une variation de volume dans la déformation plastique égale à :

$$\dot{\epsilon}_v^p = \dot{\epsilon}_1^p + \dot{\epsilon}_2^p + \dot{\epsilon}_3^p \quad (\text{I.24})$$

$$\dot{\epsilon}_v^p = \dot{\lambda}(1 + \sin \phi) - \dot{\lambda}(1 - \sin \phi) = 2\dot{\lambda} \sin \phi \quad (\text{I.25})$$

$$\frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\epsilon}_1^p} = \frac{2\dot{\lambda} \sin \phi}{\dot{\lambda}(1 + \sin \phi)} = 1 - \text{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \quad (\text{I.26})$$

$$\dot{\epsilon}_v^p = \left[1 - \text{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \right] \dot{\epsilon}_1^p \quad (\text{I.27})$$

$$\dot{\epsilon}_v^p = \sin \phi (\dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}_3^p) \quad (\text{I.28})$$

$$\dot{\epsilon}_v^p = 2\dot{\lambda} \sin \phi = \left[1 - \text{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \right] \dot{\epsilon}_1^p = \sin \phi (\dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}_3^p) \quad (\text{I.29})$$

Une telle variation de volume en phase plastique est jugée excessive par de nombreux auteurs qui rejettent donc le principe du travail maximal pour ces matériaux, et proposent d'utiliser le critère de Coulomb avec une règle d'écoulement **non associée** (Brinch Hansen, 1953 ; Bent Hansen, 1958 ; Janike et Shield, 1959 ; Radenkovic, 1961). C'est apparemment le cas des sols où il a été observé expérimentalement que les règles d'écoulement plastique associées ne prédisent pas avec précision certaines caractéristiques essentielles de la réponse mécanique.

I.6. MODELES ELASTIQUES PARFAITEMENT PLASTIQUES POUR LES SOLS

Les modèles élastiques parfaitement plastiques sont les plus simples des modèles pour décrire le comportement des sols en prédisant des déformations permanentes sur le palier de la courbe contraintes-déformations. De manière générale pour ces modèles parfaitement plastiques, la surface de charge est confondue avec la surface de rupture du matériau. La loi élastique est de type linéaire. Sur la surface de rupture l'état de contrainte atteint sa valeur limite correspondant à la résistance maximale du matériau.

I.6.1. Critère de Mohr-Coulomb (1773)

Cette loi élastique parfaitement plastique est utilisée pour décrire de manière approchée le comportement des sols pulvérulents (sables) et des sols cohérents à court et long terme (argile et limons). Il caractérise la rupture du matériau à l'aide de trois paramètres : l'angle de frottement interne ϕ , la cohésion C , et l'angle de dilatance ψ . Dans l'espace des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, la surface de rupture est une pyramide de section hexagonale d'équation :

$$F(\sigma_{ij}) = (\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - 2C \cos \phi = 0 \quad (\text{I.30})$$

où σ_1 et σ_3 représentent les contraintes principales extrêmes ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) avec la convention de signe suivante : les compressions sont comptées positivement. Lorsque $\phi = 0^\circ$, la loi est appelée loi de Tresca

Le modèle de Moh-Coulomb associé prédit une déformation volumique excessive par rapport à celle donnée par l'expérimentale, l'utilisation du modèle Moh-Coulomb non associé prévoit des résultats acceptables.

Dans le cas d'une loi non associée, on utilise un potentiel plastique G , qui s'écrit à l'aide de l'angle de dilatance ψ

$$G(\sigma_{ij}) = (\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \psi = 0 \quad (\text{I.31})$$

La figure (I.4) donne des présentations du critère de Moh-Coulomb dans le plan déviatorique et dans celui des contraintes principales.

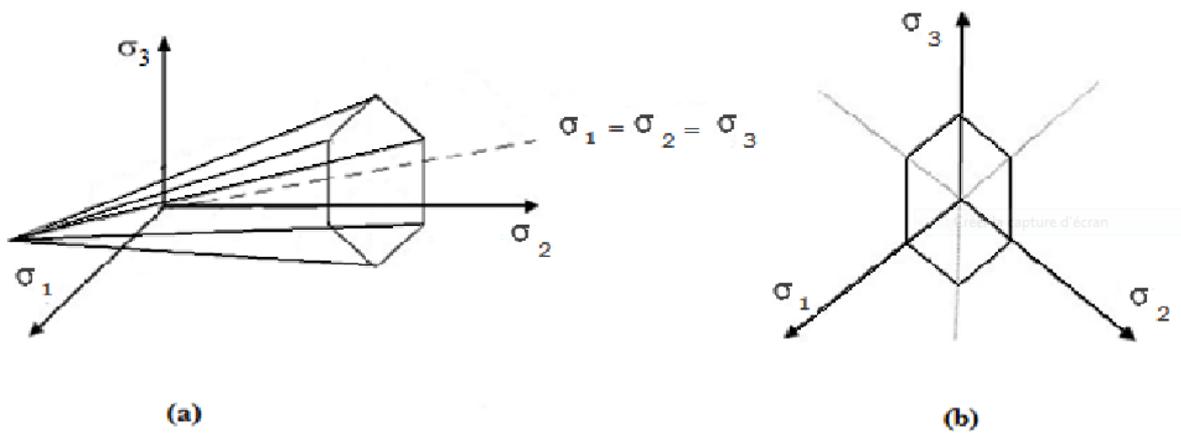


Figure I.4 – Représentation du critère de Mohr-Coulomb : (a) dans l’espace des contraintes principales et (b) dans le plan déviatorique.

La partie élastique du comportement est définie par l’élasticité linéaire isotrope de Hooke. Au total la loi de Mohr-Coulomb comprend cinq paramètres mécaniques : E (module d’Young), ν (coefficient de Poisson), C (cohésion), ϕ (angle de frottement) et ψ (angle de dilatance). Ces paramètres sont déterminés couramment à partir des résultats d’essais de laboratoire (oedomètre et appareil triaxial). La figure (I.5) représente la modélisation d’un essai triaxial de compression par la loi de Mohr-Coulomb. Un calcul simple montre que les déformations plastiques vérifient la relation suivante :

$$\frac{d\varepsilon_{vol}^p}{d\varepsilon_a^p} = -\frac{2 \sin \psi}{1 - \sin \psi} \tag{I.32}$$

La quantité $\frac{2 \sin \psi}{1 - \sin \psi}$ caractérise la variation de volume au cours de la phase plastique ; pour cette raison, l’angle ψ est appelé angle de dilatance. D’une manière général, l’angle de frottement est pratiquement toujours supérieur à l’angle de dilatance.

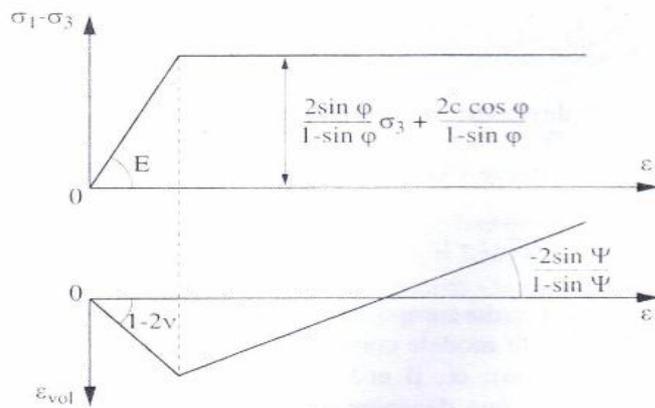


Figure I.5 – Modélisation d’un essai triaxial de compression par la loi de Mohr-Coulomb

I.6.2. Critère de Tresca (1870)

Le critère de Tresca est utilisé pour l'étude des sols incompressibles saturés, non drainés, en contraintes totales à court terme, durant lesquelles la variation de volume est nulle. La surface de charge F est donnée par la relation :

$$F(\sigma_{ij}) = (\sigma_1 - \sigma_3) - 2K = 0 \quad (\text{I.33})$$

où σ_1 et σ_3 représentent les contraintes principales extrêmes ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) et K une constante correspondant à la contrainte maximum de cisaillement à la rupture (pour les sols cohérents, ce paramètre correspond à la cohésion non drainée C_u).

Dans l'espace des contraintes principales ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) la surface de charge est un prisme hexagonal régulier dont la génératrice est parallèle à l'axe hydrostatique. La figure (I.6) donne des représentations du critère de Tresca dans le plan déviatorique et dans celui des contraintes principales.

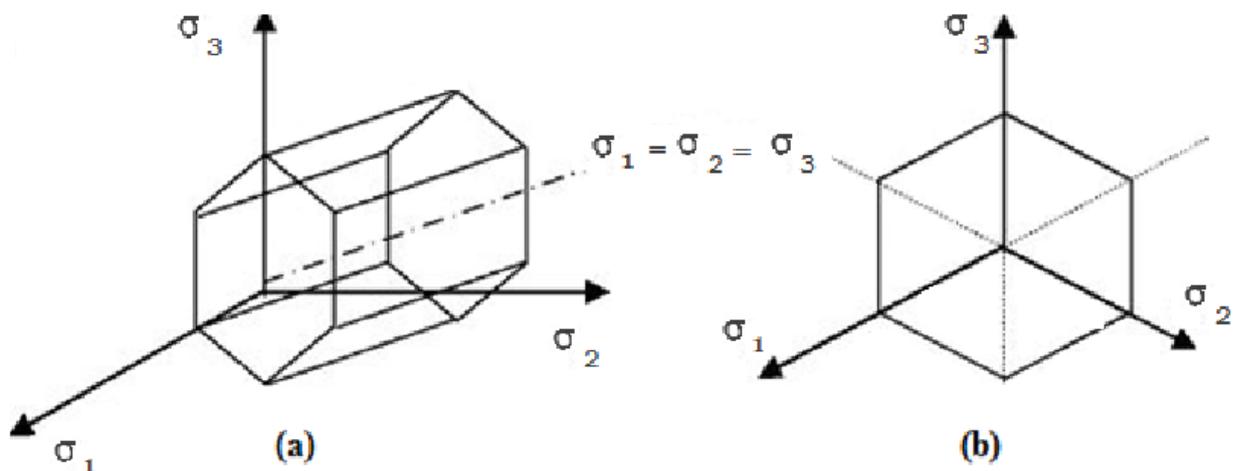


Figure I.6 – Représentation du critère de Tresca: (a) dans l'espace des contraintes principales et (b) dans le plan déviatorique.

I.6.3. Critère de Von Mises (1913)

Afin de prendre en compte l'influence de la contrainte intermédiaire. Von Mises a proposé que la surface de charge dépende du deuxième invariant du tenseur des contraintes déviatoriques J_2 . Dans l'espace des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ la surface de charge est un cylindre de révolution passant par l'axe hydrostatique et d'équation :

$$F(\sigma_{ij}) = \sqrt{J_2} - K = 0 \quad (\text{I.34})$$

où K est un paramètre de la loi de comportement. Il représente la résistance maximale du matériau au cisaillement simple.

Ce critère comme celui de Tresca, peut être appliqué pour l'étude des sols incompressibles, il est bien adapté pour l'étude du comportement des argiles saturées.

La figure (I.7) donne des représentations du critère de Von Mises dans le plan déviatorique et dans celui des contraintes principales.

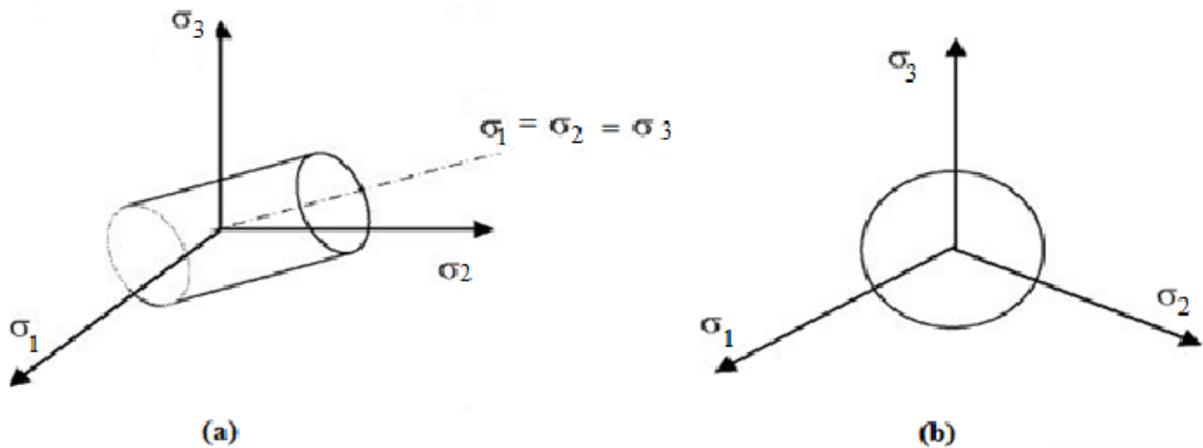


Figure I.7 – Représentation du critère de Von Mises: (a) dans l'espace des contraintes principales et (b) dans le plan déviatorique.

I.6.4. Critère de Drucker-Prager (1952)

Le critère de Drucker-Prager constitue une généralisation du critère de Von Mises aux cas des sols compressibles. Dans l'espace des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ la surface de charge est un cône à base circulaire d'équation:

$$F(\sigma_{ij}) = \sqrt{J_2} - \alpha I_1 - K = 0 \quad (\text{I.35})$$

où α et K sont deux paramètres qui peuvent être déterminés à partir de résultats d'essais, I_1 est le premier invariant du tenseur de contraintes, J_2 et le deuxième invariant du tenseur des contraintes déviatoriques. Si le paramètre α est nul, la loi se réduit à celle de Von Mises.

La figure (I.8) donne des représentations du critère de Drucker-Prager dans le plan déviatorique et dans celui des contraintes principales.

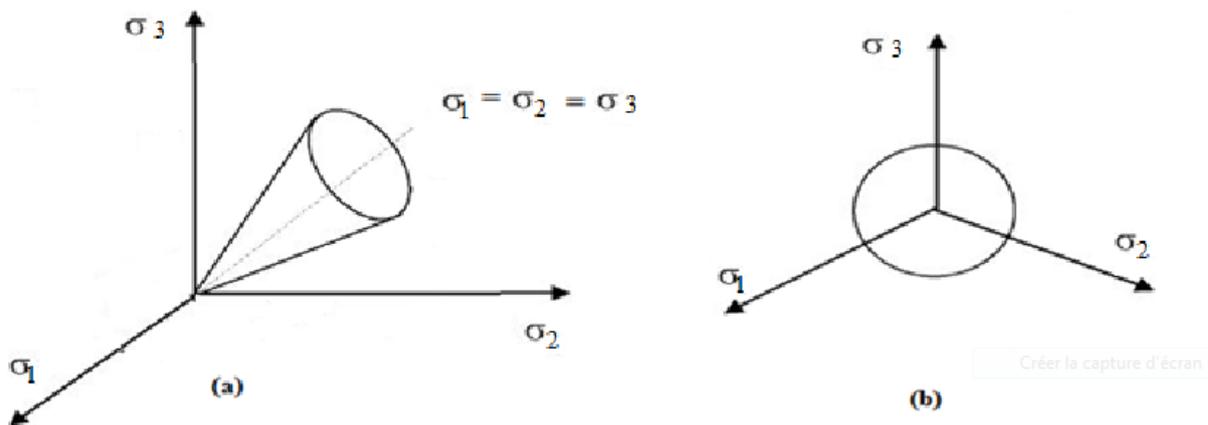


Figure I.8 – Représentation du critère de Drucker-Prager: (a) dans l'espace des contraintes principales et (b) dans le plan déviatorique.

Si on considère une loi non associée, le potentiel plastique s'écrit :

$$G(\sigma_{ij}) = \sqrt{J_2} - \beta I_1 = 0 \quad (\text{I.36})$$

La partie élastique du comportement est définie par l'élasticité linéaire isotrope de Hooke. Au total la loi de comportement comprend cinq paramètres : E (module d'Young), ν (coefficient de Poisson), α , β , K . Ces paramètres sont déterminés couramment à partir des résultats d'essais de laboratoire (oedomètre et appareil triaxial). La figure (I.9) représente la modélisation d'un essai triaxial de compression par la loi de Drucker-Prager.

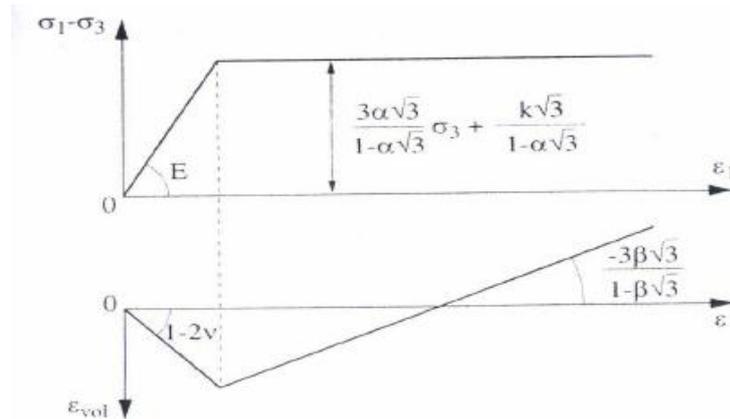


Figure I.9 – Modélisation d'un essai triaxial de compression par la loi de Drucker-Prager

Il est fréquent d'exprimer les paramètres de Drucker Prager α , β et K en fonction de ceux de Mohr coulomb C , ϕ et ψ . Des relations différentes sont obtenues selon l'essai considéré.

Prenons le cas d'une compression triaxiale ($\sigma_2 = \sigma_3$ et $(\sigma_1 \succ \sigma_3)$) :

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (\text{I.37.a})$$

$$K = \frac{2C \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (\text{I.37.b})$$

$$\beta = \frac{2 \sin \psi}{\sqrt{3}(3 - \sin \psi)} \quad (\text{I.37.c})$$

I.7. CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons présenté les principales notions fondamentales pour décrire les équations de modèles élastoplastiques à savoir ; la surface de charge, la règle d'écrouissage et la règle d'écoulement, puis nous avons passé en revue les différents types de modèles existants pour la simulation du comportement des sols. La validation de ces modèles passant nécessairement par la justification de leurs capacités à rendre compte des phénomènes observés, les modèles performants sont ceux définis par un nombre restreint de paramètres facilement identifiables en laboratoire sur des essais classique.

L'expérience montre que le sol est un matériau non standard pour lequel le postulat de stabilité de Drucker n'est pas valide, et qu'une règle d'écoulement associée conduit à une dilatance excessive due à la variation de volume durant le cisaillement, à cet effet le critère de Mohr-Coulomb avec une règle d'écoulement non associée est le mieux adapté pour le cas des sols et notamment les sols compressibles, il donne des résultats acceptables proches de l'expérimentale.

CHAPITRE II

***LE CONCEPT DE L'ETAT CRITIQUE ET
D'ETAT CARACTERISTIQUE***

II.1. INTRODUCTION

La connaissance des sols commence toujours par des observations et des mesures, lors d'essais in situ et d'essais de laboratoire. Les essais in situ, comme le pressiomètre ou le pénétromètre, testent le matériau dans son état naturel mais dans des conditions de déformation et de drainage complexes qui rendent l'interprétation difficile. Les essais de laboratoire offrent une meilleure maîtrise des conditions de drainage et de chargement et permettent d'explorer plus largement les lois de comportement des sols. L'essai de laboratoire le plus utilisé est l'essai triaxial. Cet essai a permis d'établir des concepts importants tels que *le concept d'état critique* (Roscoe et al., 1958 ; Schofield et Wroth, 1968) ou *le concept d'état caractéristique* (Luong, 1978). Il fournit aussi les données expérimentales qui servent de base aux lois de comportement dont la formulation mathématique est utilisée pour prédire la réponse du sol à des sollicitations plus complexes.

II.2. COMPORTEMENT MECANIQUE DES SABLES EN CISAILLEMENT

II.2.1 Comportement mécanique sous cisaillement monotone

L'interprétation des essais en sollicitations monotones réalisés sur des sols pulvérulents à l'appareil triaxial (essai CU + u et CD) a conduit aux observations suivantes :

- dès l'apparition de faibles déformations, le chemin « contrainte-déformation » suivi en déchargement est différent du chemin de chargement. En effet, les déformations macroscopiques, produites principalement par les déplacements relatifs des particules, ne sont pas réversibles. Les sols pulvérulents n'ont pas à proprement parler de domaine de déformation réversible que pour les très faibles déformations (inférieures à 10^{-5}). Toutefois, comme les argiles naturelles, les sables « naturels » (en place) ont des déformations d'ampleur limitée dans un certain domaine de chargement entourant leur état initial. Ce domaine de faibles déformations traduit leur histoire géologique et l'influence des chargements qu'ils ont subis dans le passé ;

- d'une manière générale, le comportement drainé d'un sol pulvérulent est analogue à celui d'un sol cohérent : les sables denses présentent un pic de résistance comme les argiles surconsolidées avant un radoucissement progressif, et le cisaillement est accompagné d'une diminution de volume (effet de serrage des grains) suivie d'une augmentation de volume (effet de désenchevêtrement des grains). En revanche, les sables lâches ont un comportement asymptotique et diminuent de volume comme les argiles normalement consolidées ou reconstituées en laboratoire (figure II.1) ;

- dans le cas des essais non drainés, la densité a une influence considérable sur le comportement. Pour les sables denses, le déviateur des contraintes augmente continuellement avec les déformations, et la pression interstitielle passe par un maximum puis décroît. En revanche pour les sables lâches, le déviateur passe par un pic, puis chute de manière plus ou moins brutale vers une valeur asymptotique faible ; la pression interstitielle augmente puis se stabilise autour de la valeur de la pression de consolidation (figure II.1). Le sable lâche perd

ainsi la majeure partie de sa résistance ; ce phénomène est appelé *liquéfaction statique* ;

- l'enveloppe des points de rupture ou de résistances maximales dans le plan de Mohr (σ, τ) est une droite passant par l'origine, tant pour un sable lâche que pour un sable dense. La résistance au cisaillement dépend de la nature et de l'état du sol (contraintes initiales et densité), mais aussi de l'intensité des sollicitations et de la manière dont elles sont appliquées ;

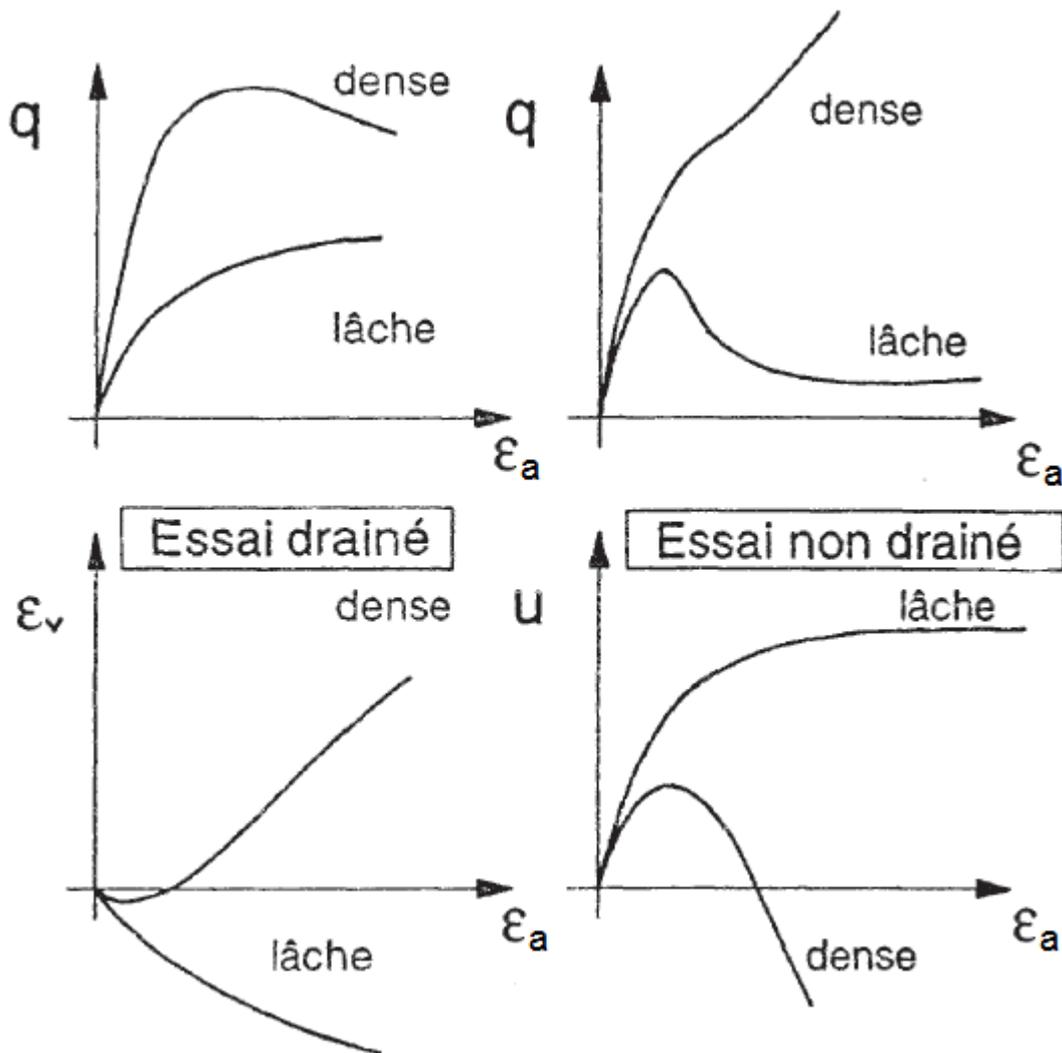


Figure II.1 – Résultats typique pour un sol pulvérulent :
essai de compression en conditions drainée et non drainée

- pour les très grandes déformations, la déformation volumique tend vers une limite, appelée « état critique » (correspondant à la condition $\dot{\epsilon}_v = 0$) ;
- l'état du sol correspondant à l'extremum de déformation volumique ($\dot{\epsilon}_v = 0$) et au changement de sens de variation de $\dot{\epsilon}_v$ est appelé « état caractéristique ». Le phénomène mécanique, lié à l'apparition de déformations volumiques irréversibles au cours du cisaillement, est nommé « dilatance ». Dans le cas des sables *moyennement denses ou denses*, la déformation volumique augmente avec la déformation axiale d'une manière pratiquement linéaire, après l'état caractéristique jusqu'à une asymptote horizontale correspondant à l'état critique ;
- pour les fortes pressions, on note une certaine courbure de l'enveloppe de rupture vers l'axe des compressions isotropes (figure II.2). En effet, le comportement d'une éprouvette de sable sous fortes contraintes diffère beaucoup de celui sous faibles contraintes. La résistance maximale décroît avec la pression appliquée. Cette décroissance s'effectue de plus en plus lentement au fur et à mesure que la pression augmente et l'on tend vers une limite.

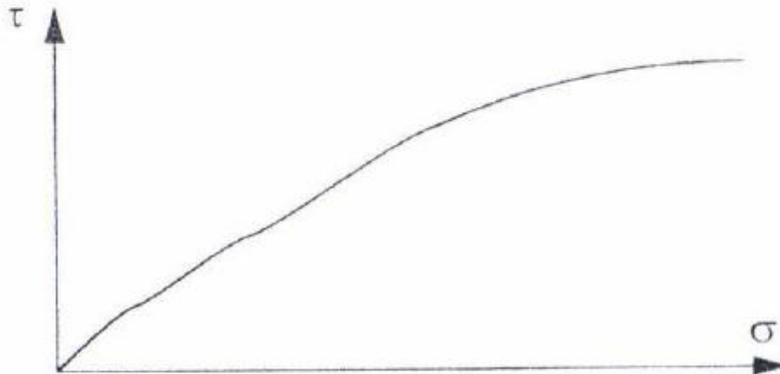


Figure II.2 – Exemple d'enveloppe de rupture pour un sol pulvérulent

II.2.1.1. Principaux concepts rhéologiques des matériaux granulaires

- Etat critique

Casagrande (1936) fut le premier à introduire la notion d'indice des vides critique. Il correspond à l'état où le sol se déforme d'une façon continue sous une contrainte de cisaillement constante en condition drainée. Cette approche n'était appliquée qu'aux sables, c'est pourquoi la vitesse de déformation n'intervenait pas. *Casagrande* (1936) ne prenait pas encore en considération l'existence d'une structure d'écoulement. *Roscoe et al.* (1958) définissaient l'état critique, pour les argiles en condition drainée, comme étant l'état où le sol continue à se déformer sous une contrainte de cisaillement et un indice des vides constants. Dans le plan $(e, \ln p')$, l'ensemble des points d'état critique est une ligne unique parallèle à la ligne de consolidation isotrope : c'est la **ligne d'état critique** (ou *Critical State Line*, CSL en anglais).

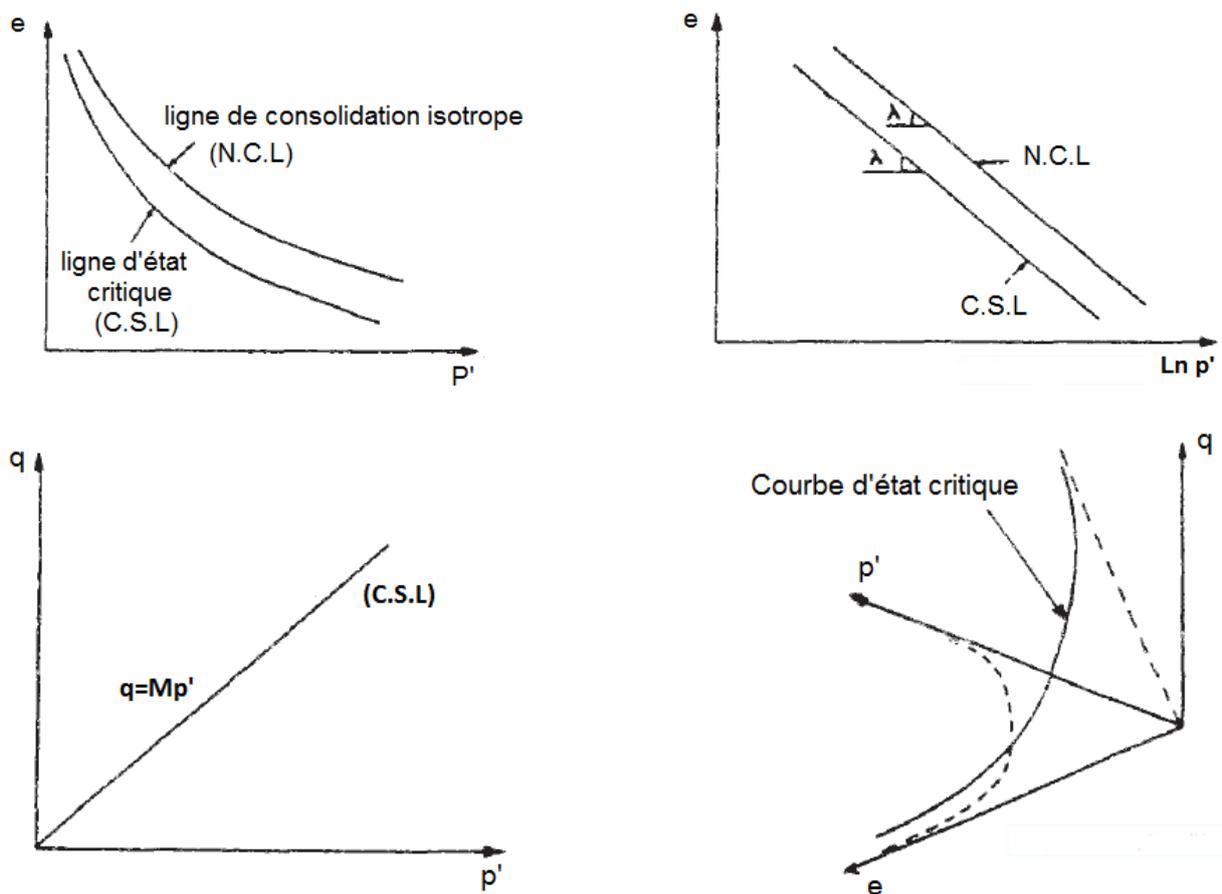


Figure II.3.a – Représentation de l'état critique.

La figure (II.3a) représente cette ligne (notée *C.S.L.* sur la figure) dans différents plans de l'essai triaxial. Selon *Schofield* et *Wroth* (1968), l'état critique est un état dans lequel le sol s'écoule comme un fluide visqueux s'il est continuellement cisailé (grande déformation) il atteint asymptotiquement un état privilégié pour lequel il se déforme à volume constant. Par exemple pour un sable, quel que soit le niveau de densité initial, après un certain niveau de déformation, on atteint le même niveau de contrainte pour des déformations volumiques nulles. Dans le plan contrainte-déformation, l'état critique ainsi défini correspond à un point situé entre le pic et la valeur résiduelle de la contrainte de cisaillement, la réorientation ou la dégradation des grains est ignorée.

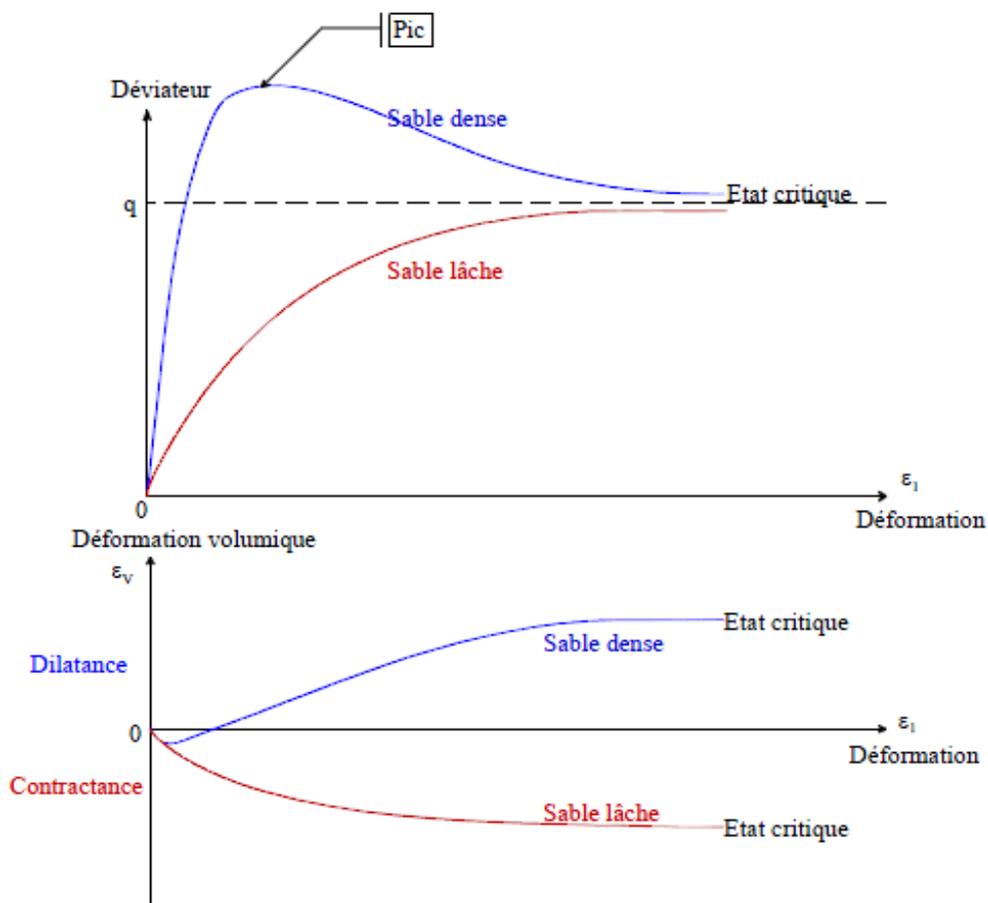


Figure II.3.b – Courbes représentant le déviateur et la déformation volumique en fonction de la déformation axiale lors d'essais drainés effectués sur des sables lâches et denses.

L'état critique est caractérisé par quelques propriétés essentielles, que nous rappelons ici brièvement.

- L'écoulement plastique du matériau s'effectue à vitesse de déformation volumique totale nulle ($\dot{\epsilon}_v = 0$, le matériau devient incompressible),
- L'indice des vides du matériau est lié à la contrainte moyenne supportée par celui-ci. indépendamment de tout autre facteur ($e_{cri} = e_0 - \lambda \ln p$),
- la contrainte déviatorique q est proportionnelle à la contrainte moyenne p ($q = Mp$). où, M , λ et e_0 sont des constantes caractérisant le matériau, $q = \sigma_1 - \sigma_3$ le déviateur des contraintes, $p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_2)$ la contrainte moyenne ; pour un essai triaxial de compression,

M est défini par : $M = \frac{6 \sin \phi}{3 - \sin \phi}$ ou ϕ l'angle de frottement.

- Etat caractéristique

a- Notions de contractance et de dilatance

La notion de *contractance-dilatance* est directement liée à la structure granulaire. La contractance est une densification du matériau sous un chargement de cisaillement en condition drainée. Le phénomène est d'autant plus prononcé que le sable est *lâche* initialement. La dilatance correspond au phénomène inverse, observable dans les sables *denses*. Par analogie au comportement drainé, la contractance (resp. la dilatance), dans un essai de cisaillement non drainé, est définie par une génération positive (resp. négative) de surpression interstitielle.

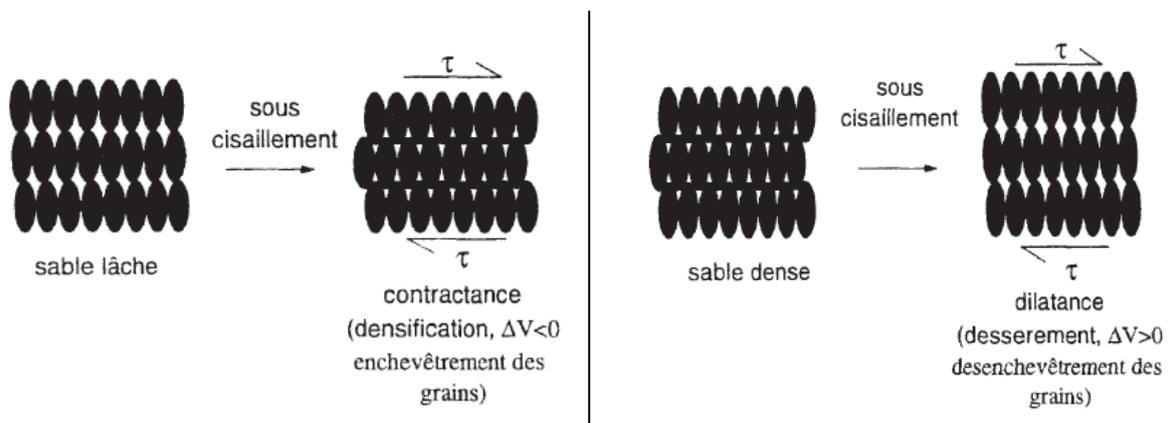


Figure II.4 – Notion de contractance et de dilatance sous cisaillement

b- Etat caractéristique

L'état critique traduit un comportement asymptotique du sol dans le domaine des grandes déformations à la rupture où l'écoulement se produit sans variation de volume. Il ne permet donc pas de suivre l'évolution de la déformation irréversible, et s'avère par conséquent, inadéquat à l'étude du comportement des sols sous sollicitations non monotones.

Pour rendre compte du comportement des sols sous chargement cyclique et transitoire, il est nécessaire d'étudier les mécanismes de déformation du matériau tout au long du chargement, et non plus seulement à la rupture, en grandes déformations. En effet, au cours de ces chargements cycliques, les déformations instantanées restent de faible importance : la rupture du matériau peut être le plus souvent caractérisée par une accumulation progressive et continue de petites déformations.

Ainsi défini par Luong (1978), Habib et Luong (1978) et Sidaner (1981), l'état caractéristique correspond à l'état du matériau à son passage d'un *comportement contractant* à un *comportement dilatant* lors d'un chargement de cisaillement en condition drainée ou non drainée. Dans le plan des contraintes (p, q') , cet état est défini par une droite passant par l'origine et de pente $\eta_c = (q/p)_c$. Elle sépare l'espace des contraintes admissibles en un domaine *subcaractéristique contractant* et un domaine *surcaractéristique dilatant* comme le montre la figure (II-5b). Elle a été aussi qualifiée de ligne de transformation de phase par Ishihara et al. (1975). Le point de changement de comportement ($\dot{\epsilon}_v = 0$) qui correspond au passage d'un phénomène d'enchevêtrement des grains (serrage=contractance) à celui de désenchevêtrement des grains (desserrage=dilatance) est intéressant pour caractériser le comportement volumique d'un sol.

Dans le cas des sables lâches, les droites caractéristiques sont confondues avec les droites de rupture. L'état caractéristique se confond avec l'état critique *SCHOFIELD & WROTH* [29].

En effet, Cet état caractéristique est associé à :

- Un taux de variation de volume nul $\dot{\epsilon}_v = 0$;
- Un seuil de changement de comportement, le processus d'enchevêtrement des grains se termine pour laisser place au désenchevêtrement. A ce seuil correspond un angle de frottement caractéristique ϕ_c donné par la relation :

$$\phi_c = \text{Arc sin}(3\eta_c/6 + \eta_c) ;$$

- Une déformation du sol relativement faible ;
- Une indépendance vis-à-vis de la porosité initiale ;
- Un rapport de contraintes $\eta_c = (\sigma_1/\sigma_3) = \text{tg}^2(\pi/4 + \phi_c/2)$.

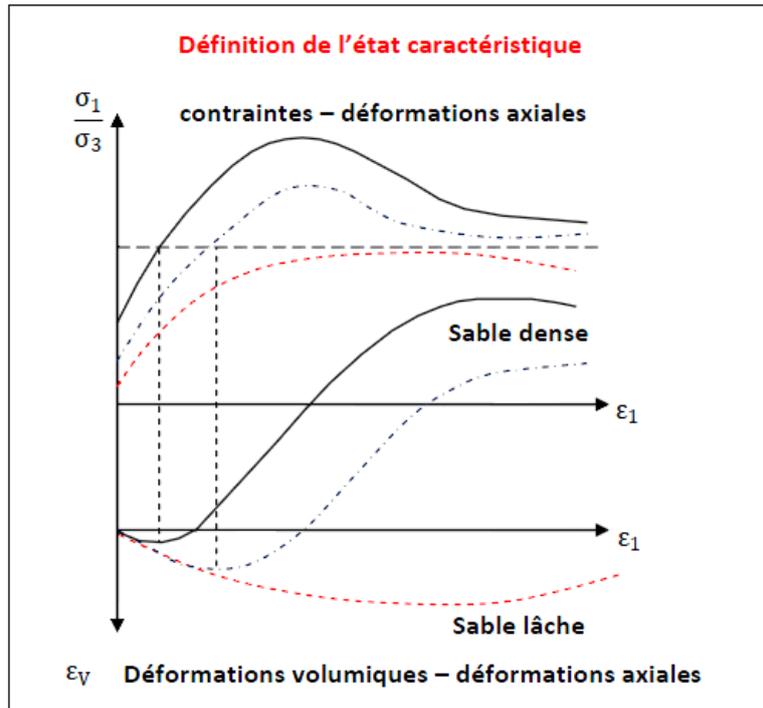


Figure II.5.a – Variation de volume sous chargement monotone

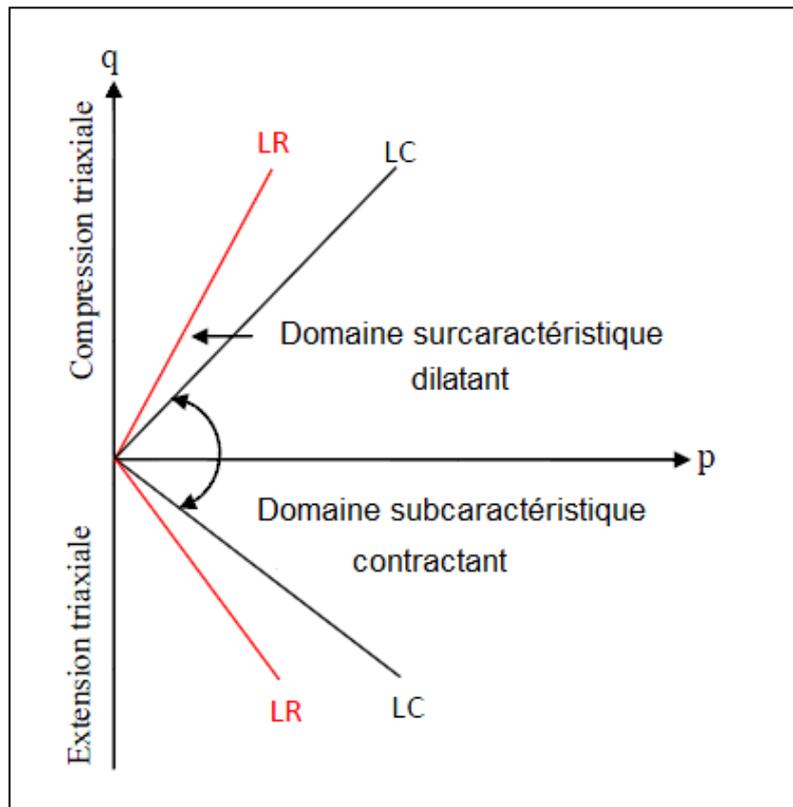


Figure II.5.b – Critère caractéristique « LUONG » ; LC : ligne caractéristique
LR : ligne de rupture

II.2.2 Comportement mécanique sous cisaillement cyclique

II.2.2.1. Introduction

Les sollicitations cycliques appliquées aux sols peuvent être d'origine et de nature différentes. Elles peuvent être volontairement appliquées, comme dans le cas du compactage et correspondent alors à un souci d'amélioration du comportement mécanique : structures routières, remblais...etc. Elles peuvent être accidentelles : actions du vent sur les structures, de la houle, sollicitations sismiques. L'étude du comportement du sol en régime cyclique correspond donc à un besoin de l'ingénieur de disposer d'outils de modélisation adaptés pour le dimensionnement des ouvrages de génie civil.

II.2.2.2. Principaux types de comportement cyclique

Sous une sollicitation à amplitude de contrainte contrôlée, on distingue trois types de phénomènes, schématisés sur la figure (II-6a), à savoir :

- Le rocher : au cours de la sollicitation, la déformation augmente de façon continue et l'on arrive assez rapidement à la rupture du matériau ;
- L'accommodation : l'amplitude des déformations se réduit au cours de chaque cycle pour finalement se stabiliser sur une boucle, qui rend compte d'un comportement dissipatif sans accumulation ultérieure de déformations ;
- L'adaptation : le comportement est sensiblement identique au précédent, mais se stabilise sur une droite qui rend compte d'un comportement élastique, non dissipatif.

Dans le cas des essais cycliques à déformation contrôlée, on peut définir deux types de comportements ; figure (II-6b) ;

- Durcissement cyclique : correspond à une augmentation de l'amplitude des contraintes au cours des cycles (exemple de chargement cyclique drainé avec augmentation progressive de la densité)
- Adoucissement cyclique : correspond au phénomène inverse (essai cyclique non drainé avec augmentation de pression interstitielle).

Les essais cycliques présentés ci-dessus sont des essais alternés, c'est-à-dire que dans le cas des essais à contrainte contrôlée, le déviateur change de signe (compression-extension). Pour les essais à déformation contrôlée, c'est la déformation axiale qui change de signe. Si la grandeur asservie ne change pas de signe au cours de la sollicitation cyclique, on dit que l'essai est non alterné ; figure (II-6c).

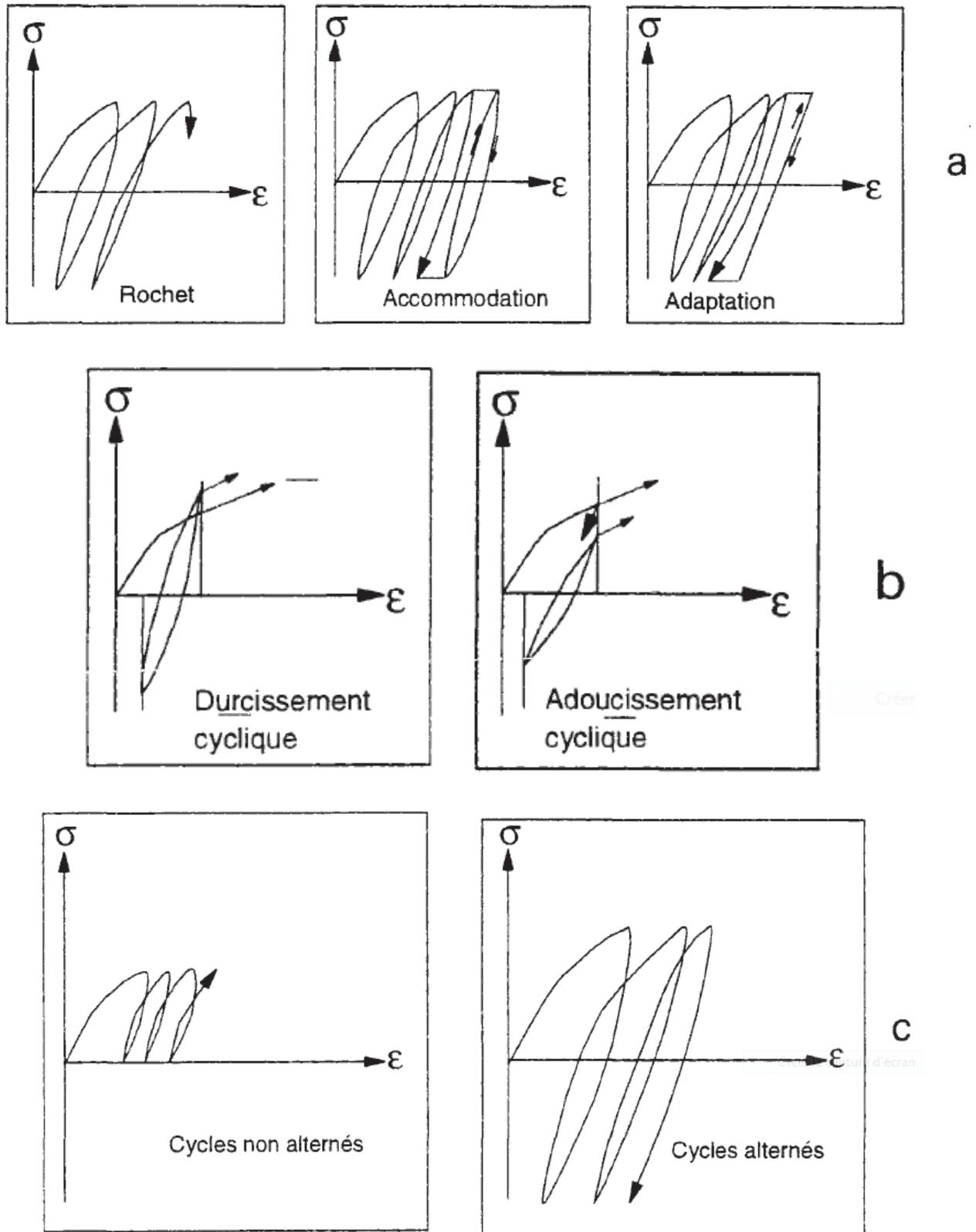


Figure II.6 – Différents types de comportement observés sous chargement cyclique
 a) à pression contrôlée ; b) à déformation contrôlée ; c) cycles alternés et non alternés
 (d'après Loret. 1987).

II.3. CONSTATATIONS EXPERIMENTALES DU COMPORTEMENT RHEOLOGIQUE DES SOLS (CAS DU SABLE DE FONTAINEBLEAU)

II.3.1 Introduction

Le comportement mécanique d'un élément de sol dépend de son état initial (défini par l'indice des vides e , le degré de saturation S_r , la structure et l'état de contrainte) et du mode de sollicitation appliquée (caractérisé par le trajet de chargement, la vitesse de charge et les conditions de drainage).

Les déformations induites sont essentiellement les conséquences de trois mécanismes :

- La compressibilité et les changements de forme du squelette ;
- Les glissements et les rotations des particules ;
- La rupture et l'attrition des grains élémentaires modifiant la texture du matériau.

Les variations volumétriques résultent principalement de deux mécanismes :

- Une contraction ou une dilatation générale du squelette solide sans modification de l'architecture générale des grains ;
- Des variations de l'enchevêtrement des grains. Elles sont surtout sensibles dans les essais de cisaillement, mais elles peuvent aussi se produire lors du premier chargement hydrostatique d'un sable lâche.

II.3.2 Constatations expérimentales sous chargement monotone

II.3.2.1 Essais de compression triaxiale ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$)

A partir d'un état de contrainte isotrope σ_3 de confinement, en augmentant la contrainte déviatorique $q = \sigma_1 - \sigma_3$, on observe une déformation volumétrique qui est d'abord une contraction, puis qui ralentit, s'annule (sable lâche) ou s'inverse (sable dense) pour permettre un désenchevêtrement des grains avant les grands déplacements relatifs. Le coefficient de Poisson indiqué par le rapport ϵ_3/ϵ_1 , d'abord négligeable, croît régulièrement de zéro à une valeur dépassant largement la valeur **0,5**. Le foisonnement constaté, appelé dilatance, est d'autant plus important que l'arrangement initial du sable était compact ; il diminue lorsque la pression de confinement σ_3 augmente (Fig.II.7).

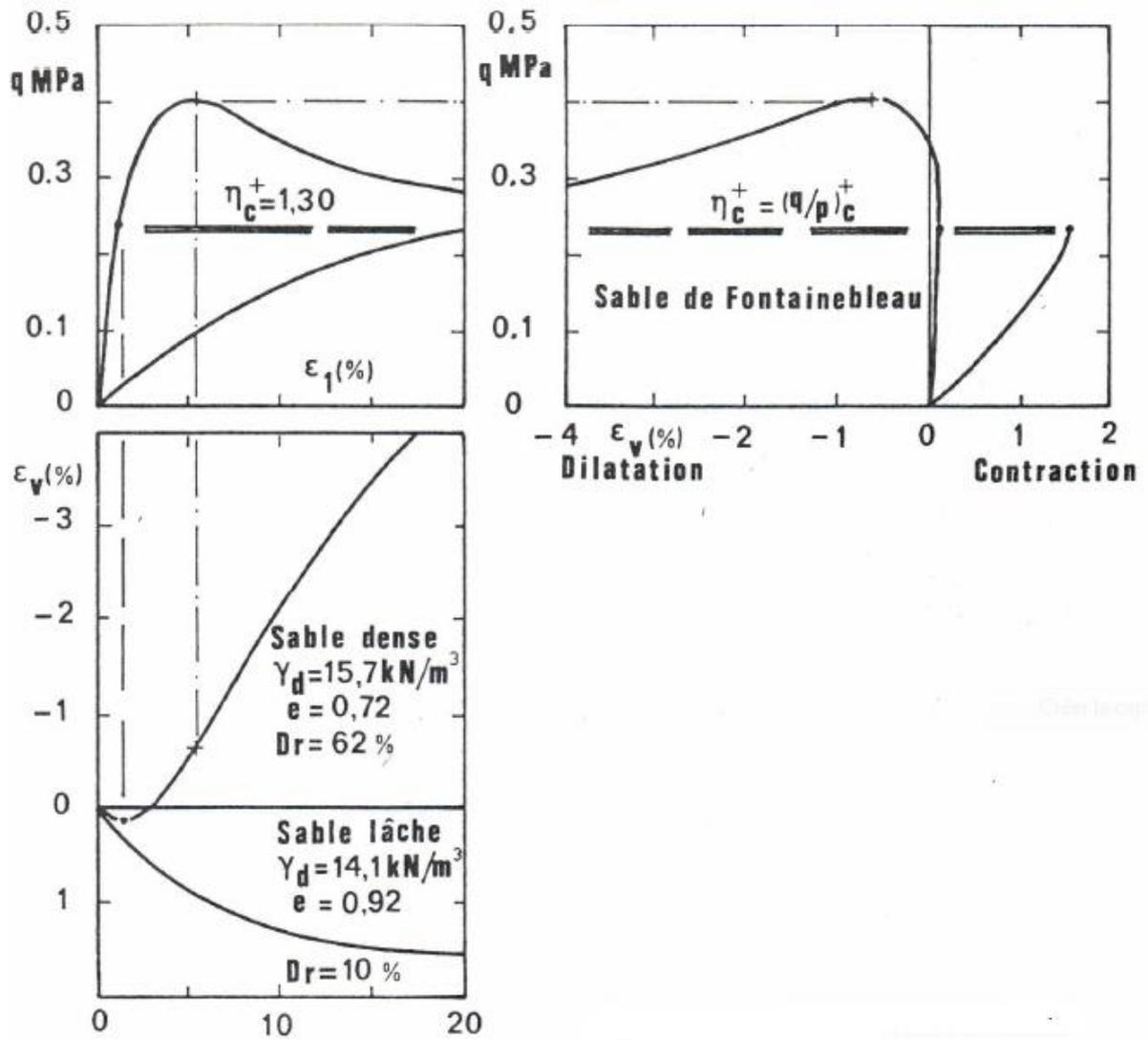


Figure II.7 – Essais de compression triaxiale sur le sable de « FONTAINEBLEAU »

II.3.2.2 Essais d'extension triaxiale ($\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$)

En diminuant algébriquement la contrainte déviatorique q , on réalise très aisément un essai triaxial cylindrique en extension (Fig.II.8). La contrainte principale intermédiaire, au lieu d'être égale à la contrainte principale mineure dans le cas précédent, a la même valeur que la contrainte principale majeure. On constate une contraction de volume malgré une diminution de la contrainte moyenne p , suivie comme dans le cas précédent d'une dilatance. Cette variation du volume initial dans le sens inverse de la contrainte moyenne p appliquée, montre que le coefficient de Poisson est initialement plus grand que **0,5**. Aucune réversibilité, même approchée, n'est évidemment possible pour ce trajet de chargement (Luong [17]).

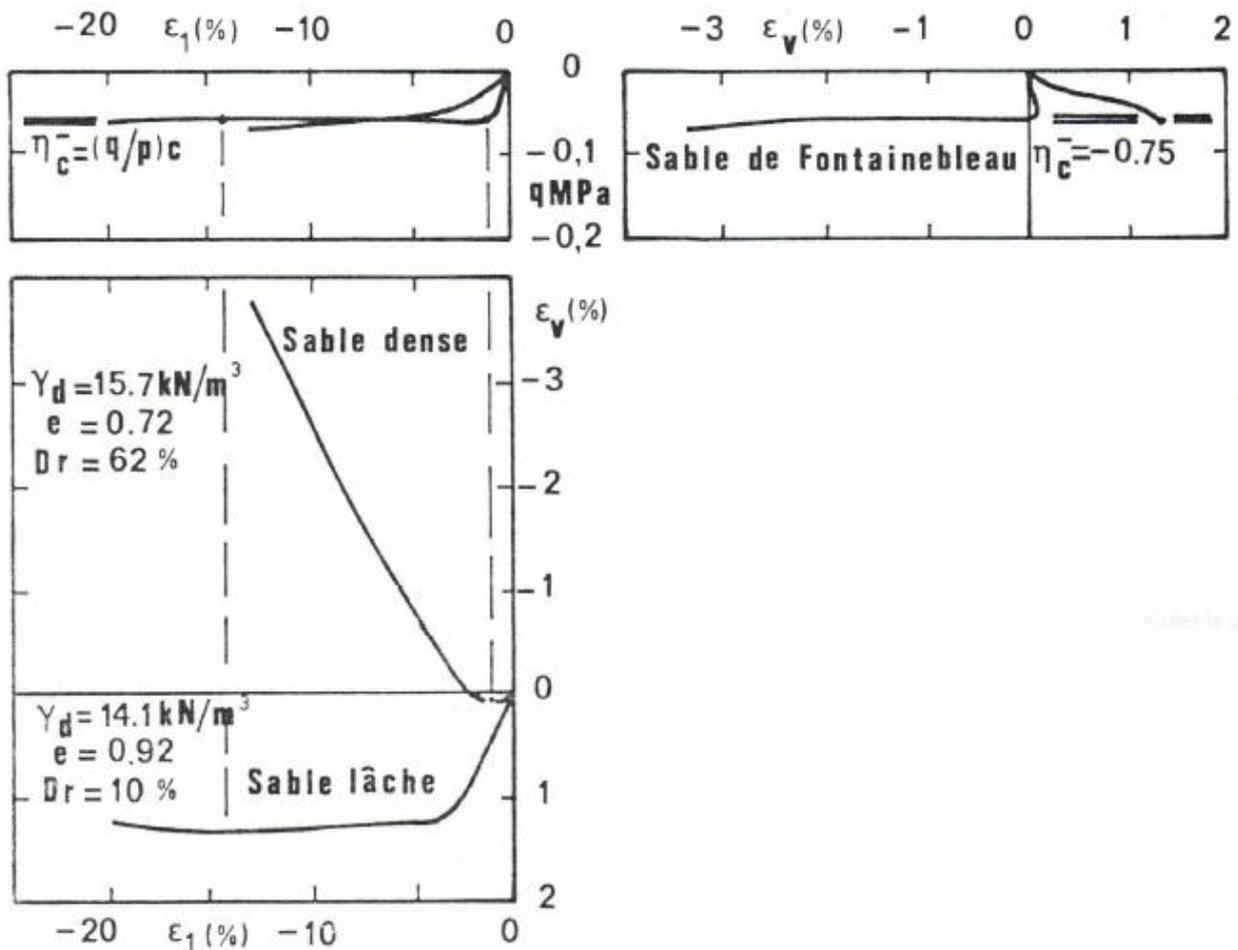


Figure II.8 – Essais d'extension triaxiale sur le sable de « FONTAINEBLEAU »

II.3.2.3 Comparaison des deux types d'essai

L'analogie de l'évolution de la déformation volumétrique masque des grandes différences de comportement rhéologique entre les deux types d'essais :

- La déformabilité du sol est plus grande en compression triaxiale ; le matériau apparaît plus raide en extension triaxiale ;
- Le coefficient de Poisson au début du chargement est plus faible en compression ($< 0,5$) qu'en extension triaxiale ($> 0,5$) ;
- La résistance au cisaillement selon la représentation de Mohr, est plus importante en compression qu'en extension triaxiale ($\phi_{CT} > \phi_{ET}$), figure (II-9) ;
- Le désenchevêtrement à partir du seuil caractéristique en compression triaxiale se traduit par une dilatance importante en volume. En extension triaxial, on constate au contraire des déformations distorsionnelles prépondérantes pour une dilatance relativement plus limitée ;
- Le trajet de charge dans le diagramme (p, q) lors d'un essai couplé de compression-extension triaxiales suit une droite de pente 3, la compression triaxiale correspond à la partie positive de q et l'extension triaxiale à la partie négative.

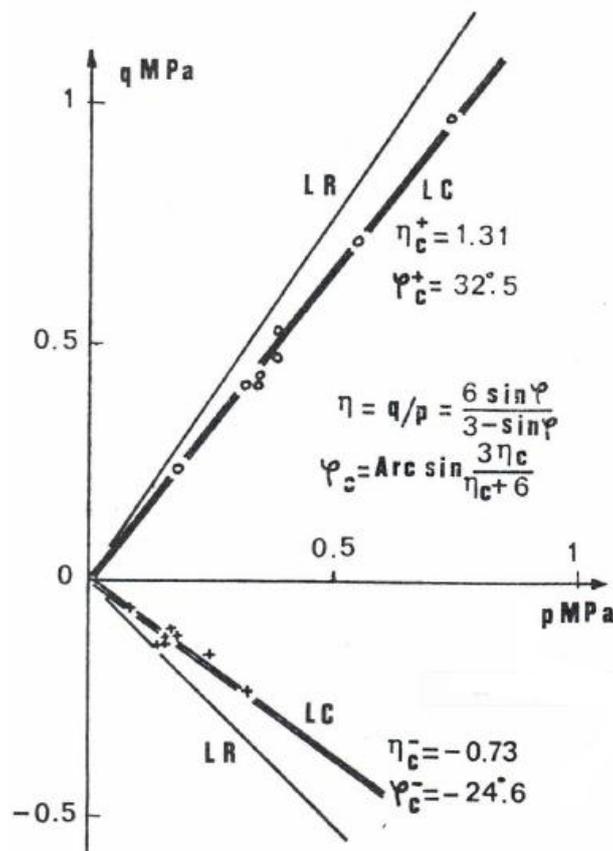


Figure II.9 – Critère caractéristique (le double trait représente le seuil caractéristique)

II.3.2.4 Cisaillement drainé à contrainte moyenne p constante

Les essais en condition drainée à contrainte moyenne p constante à l'appareil de révolution donnent des résultats analogues à ceux obtenus sur le trajet rectiligne de pente 3 dans le diagramme (p, q) .

Les figures (II-10a et b) représentent respectivement un essai de compression triaxiale et un essai en extension triaxiale à $p = Cte$, les seuils caractéristique déterminés sur les courbes (q, ε_v) à $p = Cte$, concordent bien avec les valeurs trouvées suivant les trajets de confinement constant.

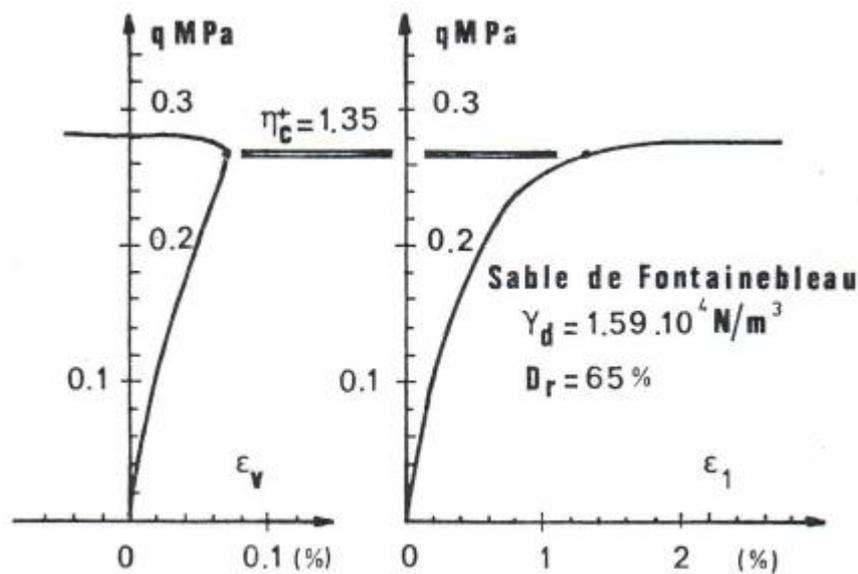


Figure II.10a – Compression triaxiale à $p = 0.2 \text{ MPa} = Cte$

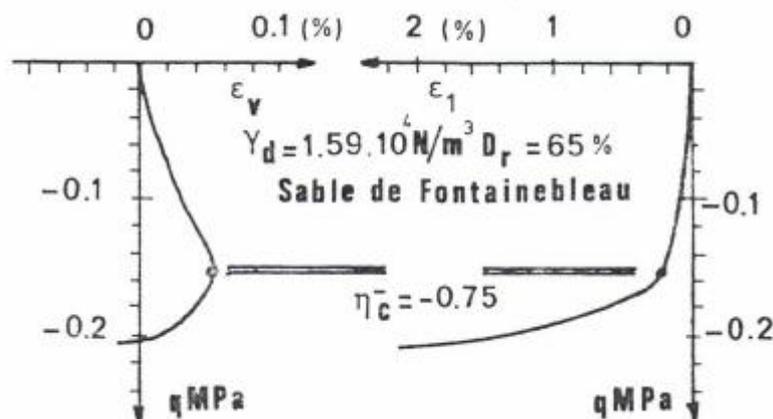


Figure II.10b – Extension triaxiale à $p = 0.2 \text{ MPa} = Cte$

II.3.2.5 Chargement drainé à déviateur q constant

A partir d'une pression de confinement constante $\sigma_1 = \sigma_3 = 0.2 \text{ MPa}$, on augmente progressivement la contrainte déviatorique $q = \sigma_1 - \sigma_3$ jusqu'à la valeur 0.2 MPa . Sous ce déviateur maintenu constant, on diminue ensuite la pression de confinement pour réaliser un essai drainé à déviateur constant.

La figure (II-11a) montre, par une ligne fléchée, le trajet de charge dans le diagramme (p, q) , la figure (II-11b) donne la variation de la déformation volumétrique ε_v en fonction de l'allongement ε_1 . A l'intérieure de la frontière caractéristique LC , ε_1 varie très peu avec ε_v . Dès que le seuil caractéristique est atteint, la distorsion augmente rapidement avec la déformation volumétrique. La figure (II-11c) décrit l'évolution de ε_v avec le niveau de contrainte $\eta = q/p$. Dès que η atteint le niveau caractéristique η_c , la déformation volumétrique s'amplifie pour traduire le phénomène de dilatance.

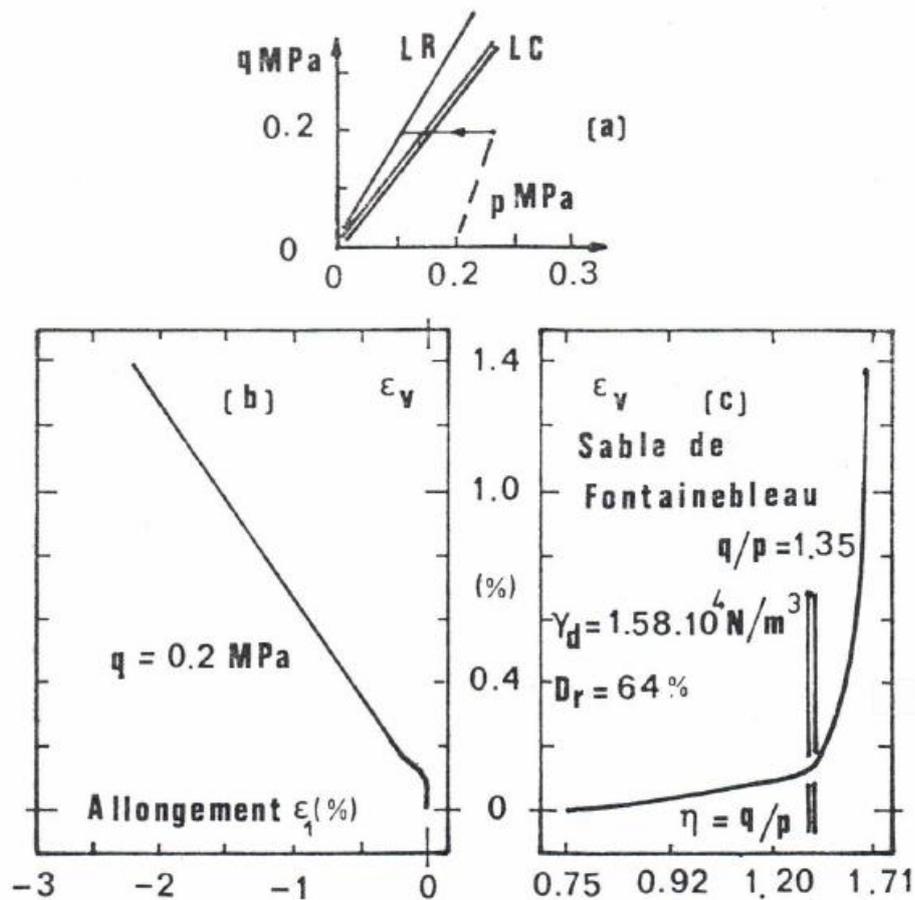


Figure II.11 – Chargement drainé à déviateur constant

II.3.2.6 Caractéristique contraintes-déformations sous trajet de charge radial en condition drainé

Les trajets de charge à rapport $\eta = q/p$ constant sont des chemins radiaux dans l'espace des contraintes ; l'obliquité moyenne de la contrainte appliquée sur une facette ainsi que celle des forces de contacts intergranulaires est maintenue constante au cours du chargement (El-Sohby, 1969).

i. Sous contrainte isotrope où $\eta = 0$ (fig.II-12), les caractéristiques contraintes-déformations dépendent de la densité initiale et de la pression de confinement (ou de la pression moyenne p au cours du chargement). Plus le matériau est lâche, plus la variation de volume est grande, et plus cette variation contient une grande partie irréversible lors du premier chargement. Ceci est dû au mécanisme de serrage.

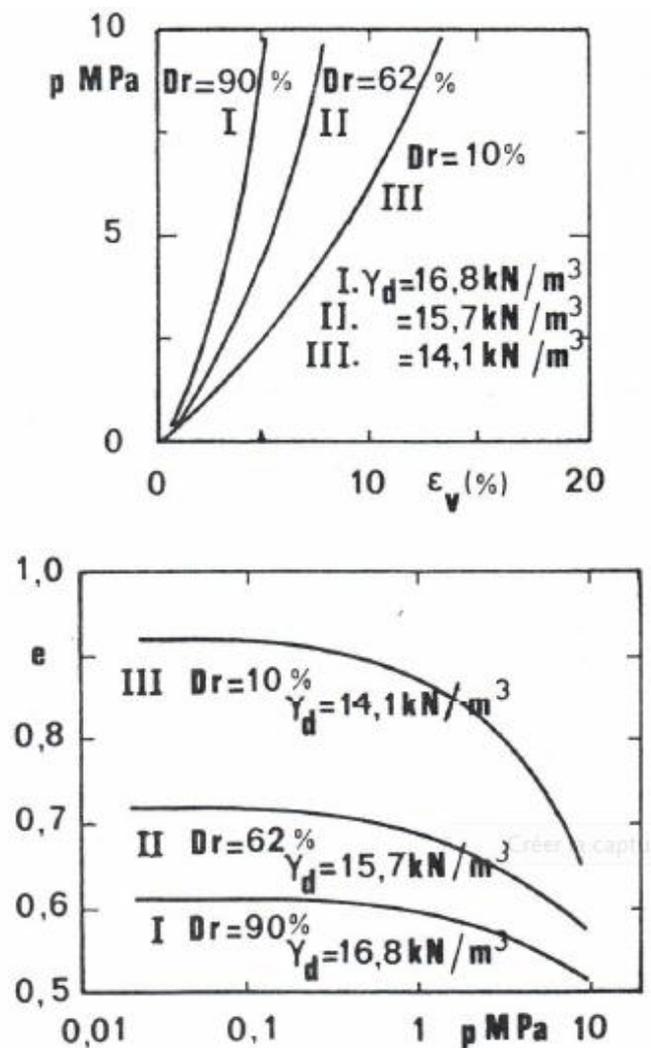


Figure II.12 – Compressibilité du sable de Fontainebleau sous contrainte isotrope

ii. Pour les valeurs de η inférieures au seuil d'enchevêtrement η_c correspondant à l'état caractéristique, le changement de géométrie de la structure des grains est relativement faible. Le sol se contracte en s'enchevêtrant lors de la charge et se dilate par relâchement des forces de contact au cours de la décharge (fig. II-13a et b).

iii. Lorsque le rapport η dépasse la valeur η_c du seuil caractéristique, un grand nombre de particules se mettent à glisser à cause de la forte obliquité moyenne des forces de contact intergranulaire ou des contraintes sur leur facette. On constate aisément un phénomène de dilatance et de foisonnement aussi bien en charge qu'en décharge. La dilatance volumique est prépondérante dans le cas de l'essai en compression triaxiale ; par contre, le cas en extension triaxiale est surtout marqué par des déformations distortionnelles irréversible très importante.

Ce type d'essais à trajet radial de charge met clairement en évidence l'importance du concept de l'état caractéristique qui délimite un domaine subcaractéristique des contacts intergranulaires stables. Au-delà, dans le domaine surcaractéristique, la forte obliquité des forces de contacts intergranulaires facilite des glissements de forte amplitude entraînant le désenchevêtrement de la structure des grains, ou une distorsion importante de la structure.

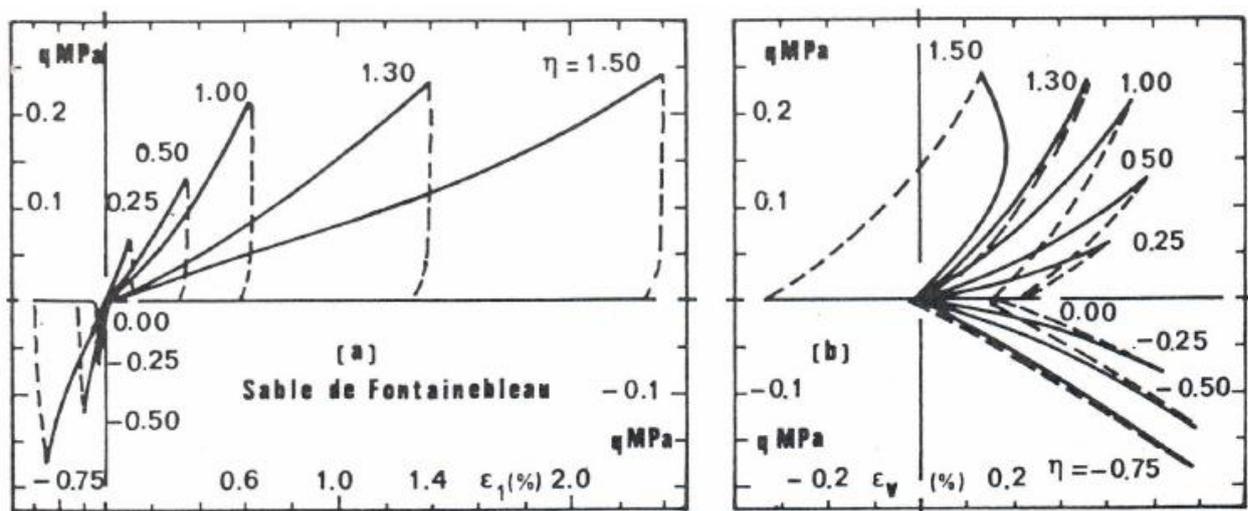


Figure II.13 – Chargement radial en condition drainée (compression et extension triaxiales)

II.3.2.7 Chargement drainé à obliquité de contrainte variable

Le chargement radial maintient constante l'obliquité moyenne de la contrainte. Par contre, le trajet sphérique dans l'espace des contraintes principales ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) ou circulaire dans le diagramme (p, q) de l'essai triaxial (fig.II-14a) permet de caractériser l'influence de l'inclinaison de la contrainte sur le comportement rhéologique du matériau en fonction du module de contrainte maintenu constant au cours du chargement.

i. Trajet sphérique

Les figures (II-14b et c) montrent respectivement l'évolution de ε_1 et ε_v en fonction du déviateur q ou du niveau de contrainte $\eta = q/p$. Sur le diagramme (q, ε_v), on n'observe pas de boucle d'hystérésis à la recharge si le seuil caractéristique n'a pas été atteint. Lorsqu'il est dépassé, une boucle de dilatance apparaît distinctement lors de la décharge (fig.II-14c).

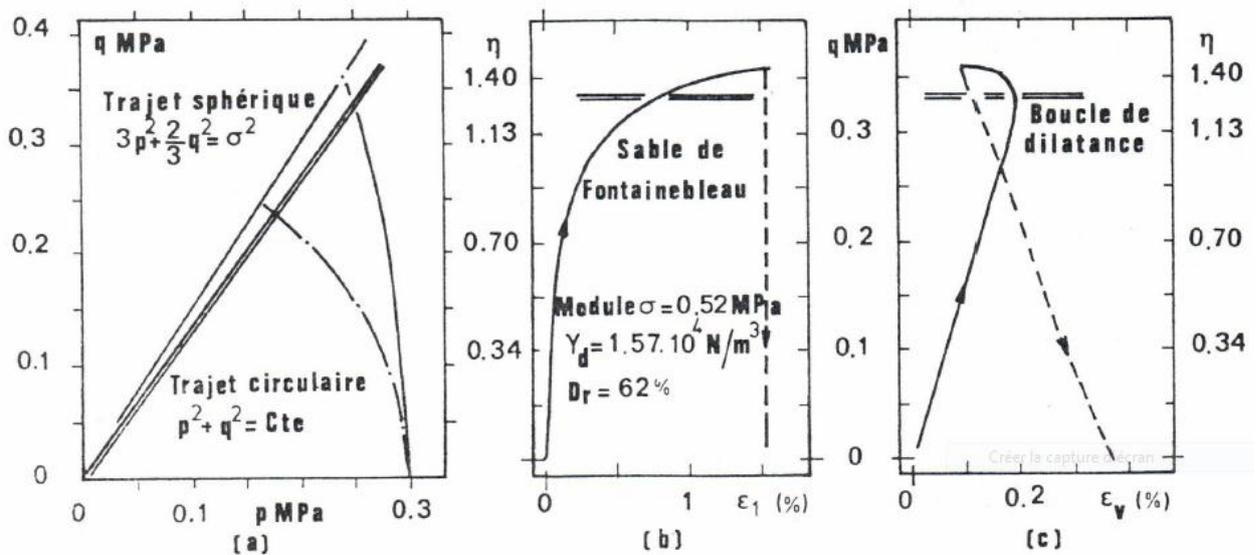


Figure II.14 – Cisaillement drainé sur un trajet sphérique

ii. Trajet circulaire

Les figures (II-15a.b.c.d) indiquent respectivement l'allure de la variation des déformations axiale ε_1 et volumétrique ε_v avec q en compression triaxiale et en extension triaxiale lors d'un essai de cisaillement en condition drainée à module (p, q) constant. D'une manière analogue au cas sphérique, on n'observe pas de boucle d'hystérésis pour la variation de volume dans le domaine subcaractéristique. La boucle de dilatance n'apparaît que lorsque le seuil caractéristique est franchi. Dans les deux cas, sphérique ou circulaire, on peut constater facilement que lorsque le seuil caractéristique η_c est atteint, le niveau distorsionnel β augmente brusquement indiquant le début d'une phase de désenchevêtrement de la structure granulaire. La décharge fait apparaître une contraction volumétrique ε_v , appréciable, alors que la déformation axiale ε_1 reste beaucoup plus limitée. L'état caractéristique peut être repéré suivant ces deux trajets de charge par l'existence ou non d'une boucle de dilatance lors de la décharge.

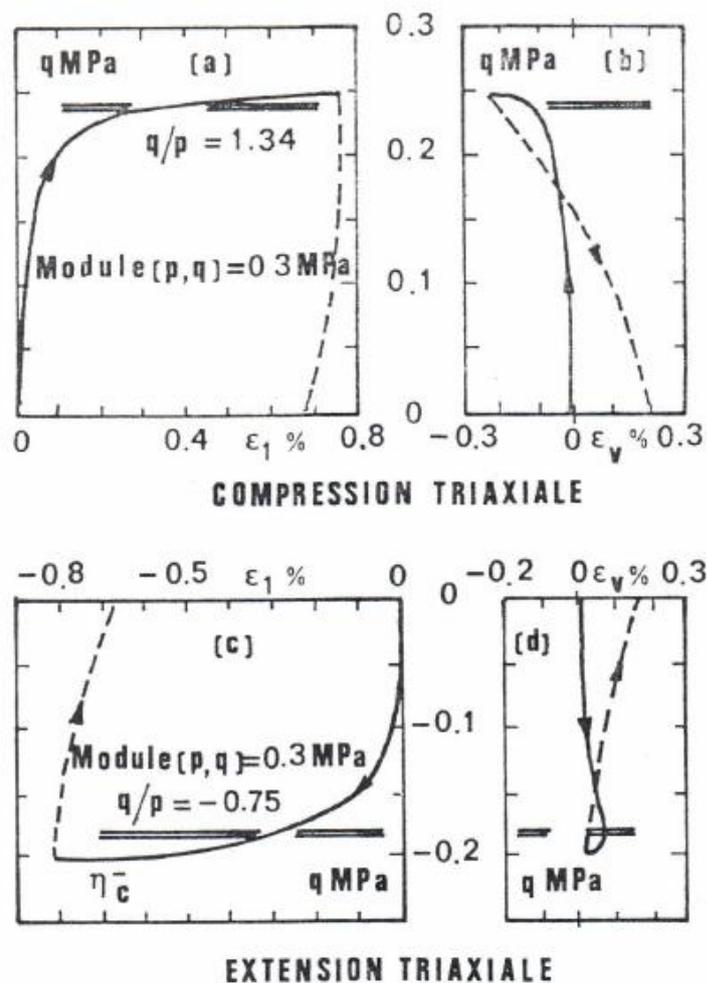


Figure II.15 – Cisaillement drainé à trajet circulaire dans le diagramme (p, q)

II.3.3 Constatations expérimentales sous chargement cyclique

II.3.3.1 Déformations sous des cycles de chargements radiaux

La figure (II-16) montre la déformation volumétrique totale ϵ_v , et la partie irréversible ϵ_v^p sous chargement hydrostatique ($\eta = 0$) en condition drainée après 1 cycle, après 10 cycles, et enfin après un grand nombre de cycles de façon à atteindre la valeur asymptotique de ϵ_v^p . Le sol présente alors un comportement quasi-élastique non linéaire. L'adaptation peut être considérée comme obtenue pour un nombre fini de cycles de chargement isotrope.

Sous chargements radiaux de rapports ($\eta = q/p$) différents de zéro, mais inférieurs en valeur absolue aux seuils caractéristiques en compression et extension triaxiales, le sol présente une faible hystérésis, pouvant devenir négligeable lorsque le nombre de cycles de chargement augmente (fig. II-17). Lorsque le rapport η est supérieur à η_c , l'hystérésis disparaît. Le chargement cyclique a pour effet une augmentation de volume traduisant le phénomène de dilatance du squelette granulaire (fig. II-18).

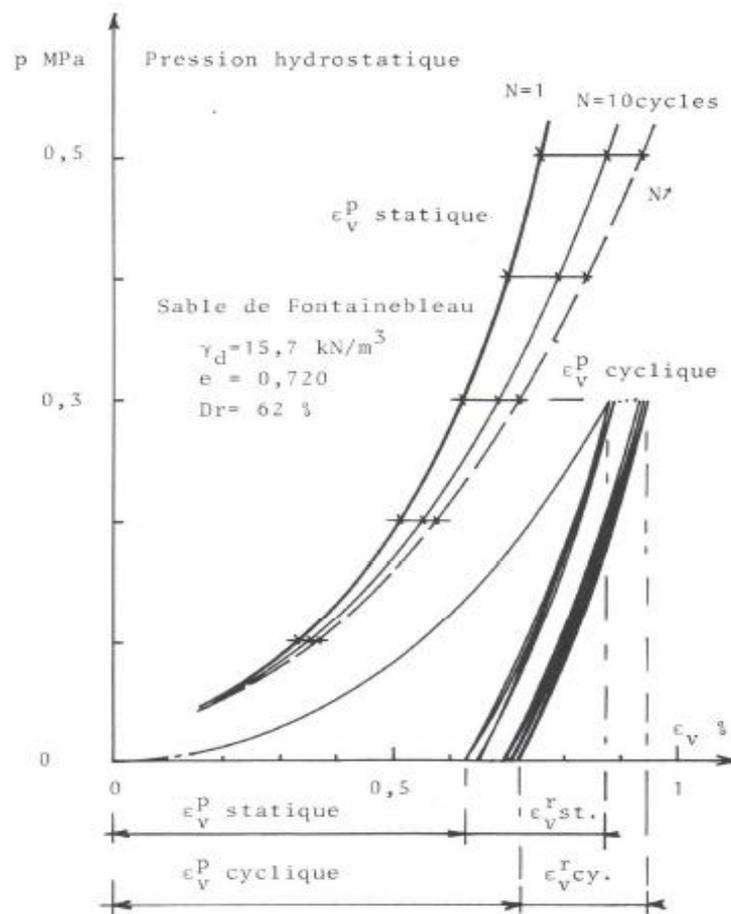


Figure II.16 – Chargement hydrostatique cyclique ($\eta = 0$)

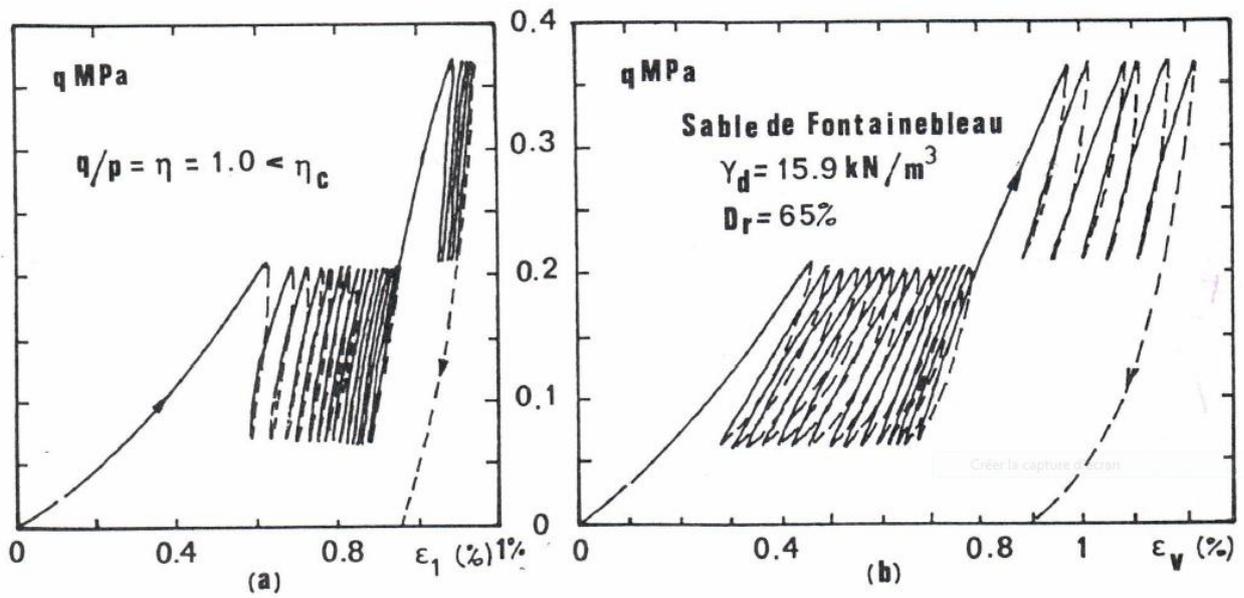


Figure II.17 – Chargement radial à ($\eta < \eta_c$)

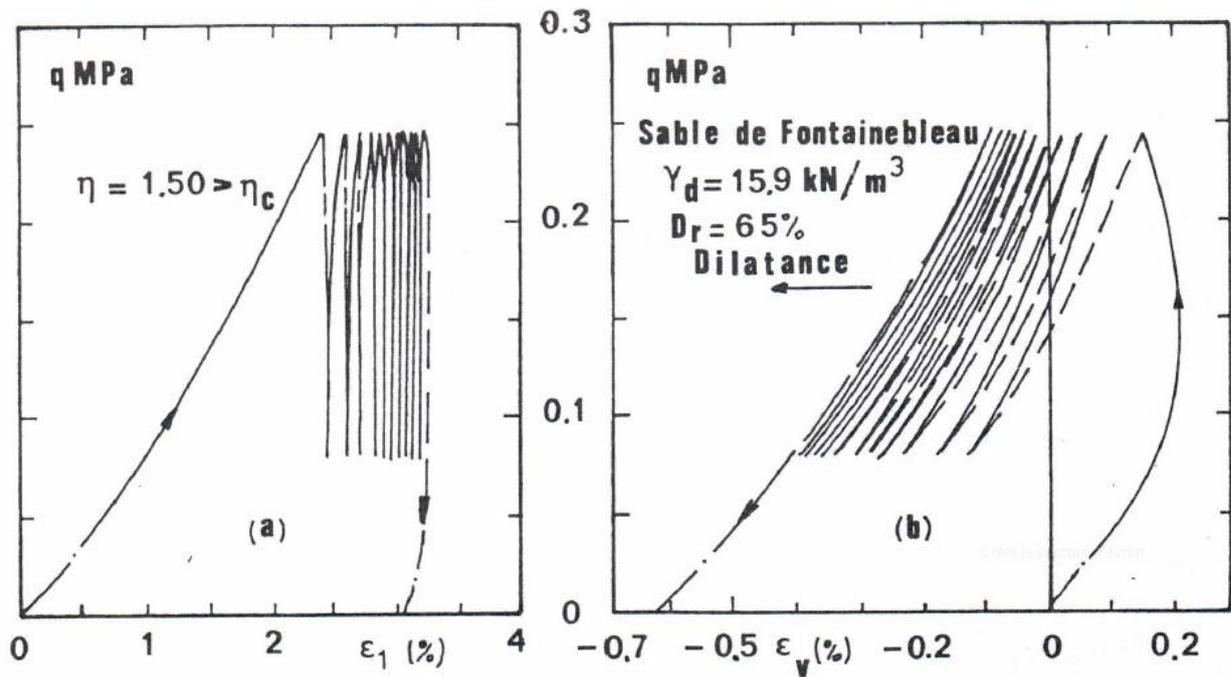


Figure II.18 – Chargement radial à ($\eta > \eta_c$)

II.3.3.2 Déformations sous des cycles de charges déviatoriques au triaxial conventionnel

Sur du sable de Fontainebleau à une contrainte de confinement de 0.2 MPa , nous avons effectué, à chaque niveau du déviateur appliqué, 20 cycles de chargement en contrainte déviatorique $\Delta q = 0.2 \text{ MPa}$.

La figure (II-19.a) montre que :

- Les déformations axiales ε_1^p irréversibles augmentent lorsque la contrainte déviatorique moyenne augmente.
- Pour un chargement en extension avec q négatif, le raidissement de la pente de la courbe q, ε_1 est important.
- Le cycle d'hystérésis dans le diagramme, (q, ε_1) se stabilise si le sol a été chargé juste précédemment à un niveau de contrainte plus élevé.

La figure (II-19.b) est particulièrement démonstrative et indique que :

- Le comportement contractant du sol est obtenu lorsque la contrainte déviatorique moyenne est inférieure au seuil de l'état caractéristique.
- Le comportement dilatant au cours des cycles de chargement ne se manifeste que si la contrainte déviatorique moyenne est supérieure au seuil caractéristique.
- Si la contrainte maximale est plus faible que le seuil caractéristique, on obtient l'accommodation pour les cycles lorsque le nombre N des cycles augmente. Si le seuil caractéristique est dépassé, le rochet apparait, figure (II-20).
- La contraction diminue lorsqu'on s'approche du seuil caractéristique ; la dilatation augmente lorsqu'on s'en éloigne vers les fortes contraintes déviatoriques.
- L'effet contractant est plus significatif pour un chargement en extension avec $q < 0$ ($\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$)
- L'effet dilatant est d'autant plus fort que le milieu devient plus dense.

Pour cet essai sur du sable de Fontainebleau, l'état caractéristique à déformation volumétrique nulle se manifeste lorsque $q/p = 1.26 = M^+$ en compression triaxiale, et $q/p = -0.75 = M^-$ en extension triaxiale.

La représentation de Mohr donne les valeurs suivantes de l'angle de frottement interne caractéristique :

$$\phi_c = \text{Arc sin}(3M/6 + M) = 31.4^\circ \quad \text{en compression triaxial}$$

$$\phi_c = \text{Arc sin}(3M/6 + M) = 25.4^\circ \quad \text{en extension triaxial}$$

On remarque que la valeur de ϕ_c est plus faible en extension qu'en compression triaxiale (Habib, 1952).

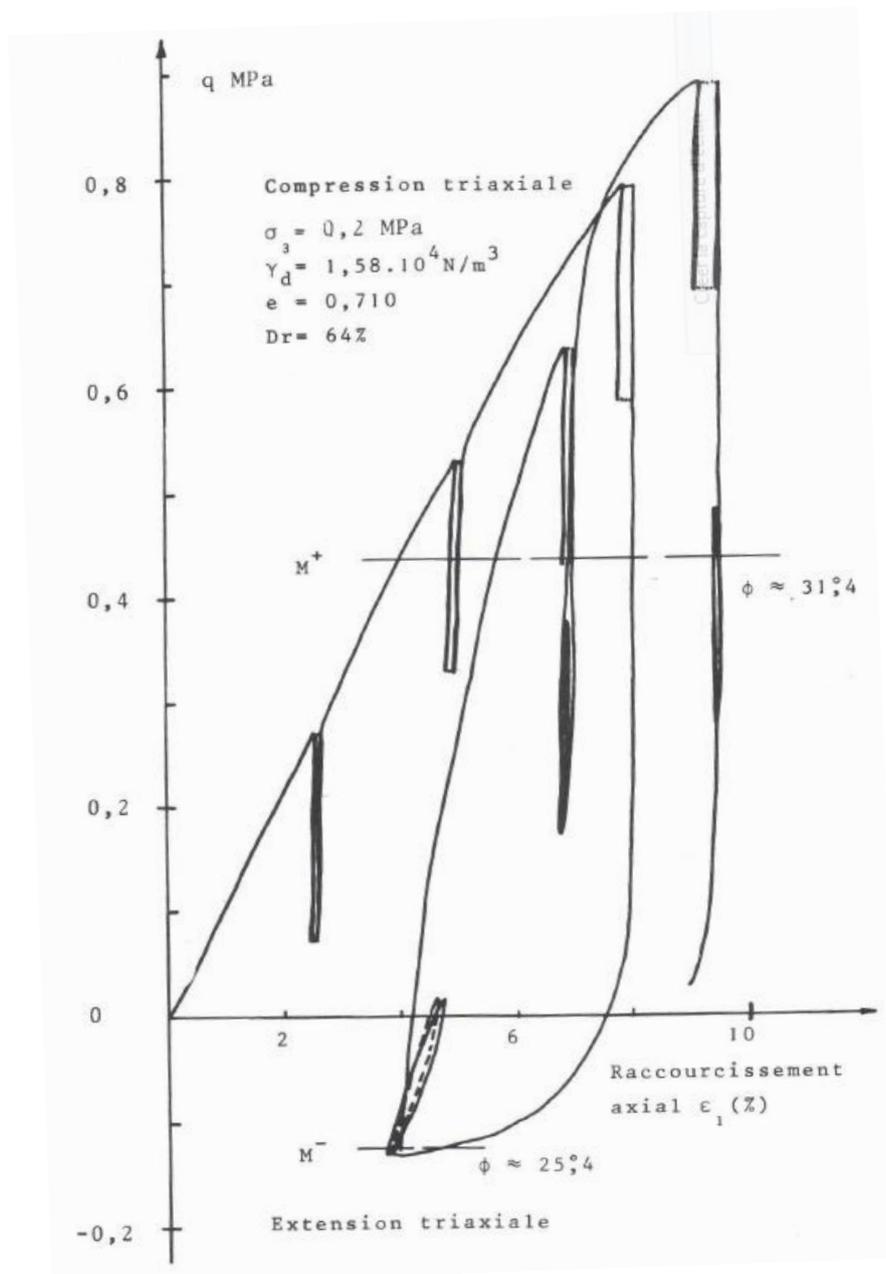


Figure II.19.a – Chargements cycliques sur du sable de « FONTAINEBLEAU »

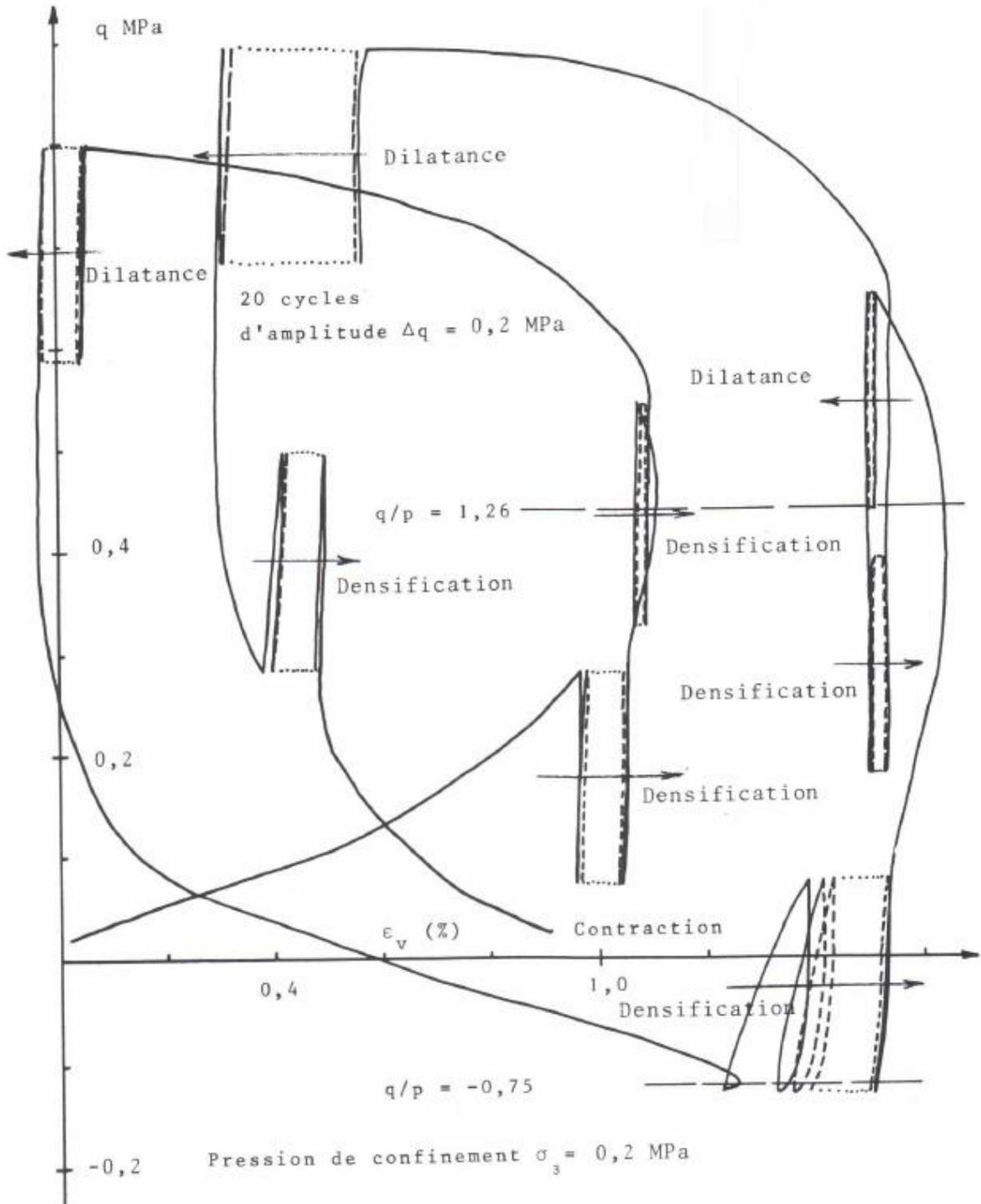


Figure II.19.b – Chargements cycliques sur du sable de « FONTAINEBLEAU »

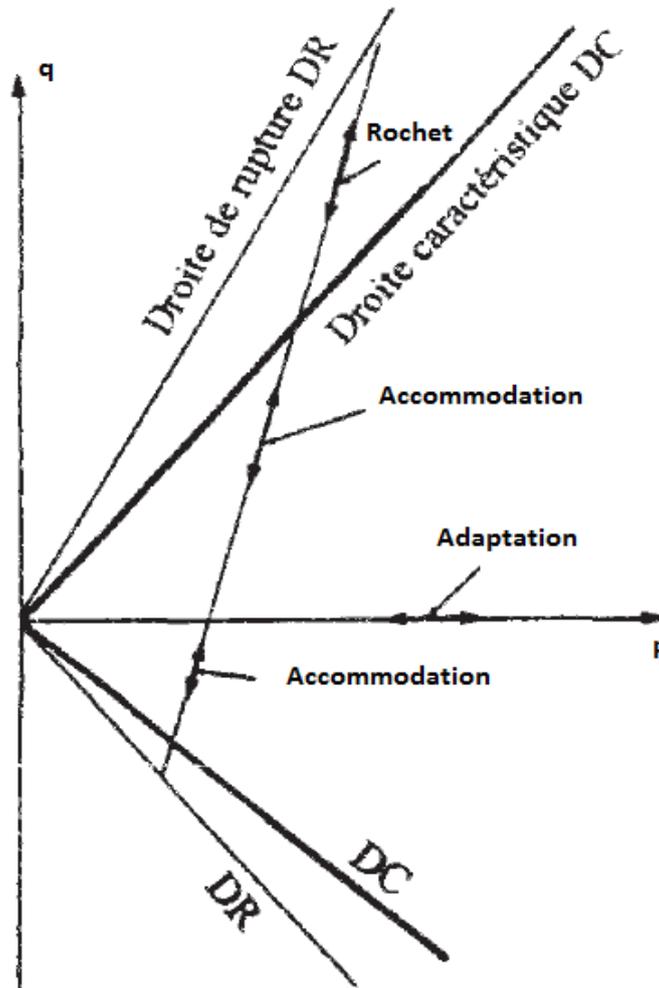


Figure II.20 – Zone des différents comportements cycliques drainés du sable d'après Luong (1980)

II.4. PROPRIETES COMPAREES DES ETATS CARACTERISTIQUE ET CRITIQUE

Le tableau (II.1) permet de comparer les deux concepts caractéristique et critique. On constate que les propriétés de l'état caractéristique le rendent plus apte à l'étude des sols sous chargement cyclique.

Propriétés	Etat caractéristique	Etat critique
1- variation de volume	$\dot{\epsilon}_v = 0$ à \dot{q} quelconque	$\dot{\epsilon}_v = 0$ à $\dot{q} = 0$
2- Distorsions ϵ_q	faible avant la rupture	Indéterminées à la rupture
3- Déformations	petites	grandes
4- Indice des vides	e quelconque	e critique
5- Structure des grains	enchevêtrement maximal	imprécise
6- Chargement	monotone ou cyclique	monotone, asymptotique
7- Comportement	transitoire	asymptotique
8- Définition	seuil de changement des phases contractante → dilatante	concept idéalisé du sol
9- Détermination expérimentale	directe donc facile	par extrapolation donc délicate

Tableau II.1 – Différences entre les deux concepts

II.5. CONCLUSION

Cette étude du comportement des matériaux pulvérulents sous chargement cyclique nous a permis de définir le concept d'état caractéristique de ces matériaux, introduit par Habib et Luong (1978), comme l'état de contraintes correspondant à une vitesse de génération des déformations volumiques irréversibles nulle indépendamment du trajet de chargement appliqué.

Cet état de contrainte peut être défini par une valeur de l'inclinaison des contraintes constante, selon la répartition des contraintes principales : la valeur retenue en extension triaxiale est plus faible qu'en compression triaxiale.

La ligne caractéristique déterminée par cette valeur de l'inclinaison des contraintes correspond à une vitesse de déformation volumique totale nulle ($\dot{\epsilon}_v = 0$). Elle sépare le domaine des contraintes admissibles pour le matériau en deux régions parfaitement distinctes ;

- Le domaine subcaractéristique, où tout chargement cyclique induit une contractance du matériau, et à une densification.
- Le domaine surcaractéristique, où le désenchevêtrement des grains formant la structure du sable se traduit par une dilatance.

Cette séparation entre les comportements contractant et dilatant du matériau est très importante pour l'étude du comportement sous chargement cyclique et transitoire.

En condition drainée, le seuil caractéristique représente la limite du domaine de comportement stable du matériau ; le franchissement du seuil lors d'un chargement cyclique entraînera des grandes déformations et la rupture se produira par dilatance progressive. La dilatance peut être systématiquement associée à un comportement instable dangereux du matériau ; le seuil caractéristique apparaît dans ces conditions comme une limite naturelle pour le praticien qui recherche un comportement fondamentalement stable du matériau sous chargement cyclique. A l'opposé, le seuil caractéristique représente la limite qu'il faudra dépasser quand il sera nécessaire de provoquer des déformations importantes ; le concept d'état caractéristique peut s'avérer fructueux pour traiter les problèmes de densification des matériaux pulvérulents.

L'angle de frottement caractéristique ϕ_c semble être un facteur intrinsèque du matériau, est une limite facile à déterminer qu'il n'est prudent de franchir qu'en parfaite connaissance que ceci peut entraîner par la suite.

CHAPITRE III

***THEORIE DE L'ADAPTATION
APPLIQUEE AUX SOLS
COMPRESSIBLES***

III.1. INTRODUCTION

L'expérience montre que les structures élastoplastique soumises à des chargements cycliques peuvent évoluer vers trois types d'états limites, dont deux conduisent à la ruine. Le premier d'entre eux, désigné par le terme *rochet*, conduit à la ruine de la structure par excès de déformations plastiques accumulées. La structure peut aussi périr par formation d'un cycle plastique stabilisé qui conduit par fatigue à faible nombre de cycles à la rupture, ce phénomène est appelé *accommodation* ou *fatigue plastique*. Toutefois, il peut arriver que après un grand nombre de cycle les déformations plastiques se stabilisent et le comportement cyclique redevient purement élastique ce phénomène est appelé *adaptation*.

III.2. THEORIE D'ADAPTATION

La théorie de l'adaptation plastique (mieux connue sous le terme anglais de "shakedown") étudie les conditions de ruine d'une structure élastoplastique soumise à des charges variables entre des bornes qui sont fixes, d'une manière indépendante les unes des autres. La théorie de l'adaptation plastique est un outil puissant pour évaluer le facteur de sécurité contre l'effondrement par excès de déformations plastiques accumulées et la rupture par fatigue plastique dans les structures soumises à des chargements cycliques, l'intérêt de la théorie de l'adaptation est de trouver le facteur de charge α_{sd} à l'adaptation en dessous duquel le comportement de la structure est purement élastique.

La Théorie de l'adaptation statique a été introduite par *Melan* (1936,1938) pour les structures sous sollicitations statiques. *Koiter* (1960) a développé la théorie de l'adaptation cinématique pour un chargement statique. Les deux théorèmes donnent respectivement la borne inférieure et supérieure de la charge limite d'adaptation. Les applications de la théorie d'adaptation dans le domaine de la géotechnique ont été limitées à quelques études depuis des années. Les premiers travaux intéressants ont été réalisés par *Sharp* et *Booker* (1984), ils sont arrivés à déterminer sous des charges de trafic les charges limites d'adaptation des chaussées, *Bottero* et al. (1980) ont développé une méthode numérique efficace pour déterminé la capacité portante des fondations superficielles par la méthode d'analyse limite. Par la suite *Hossain* et *Yu* (1996, 1998) ont proposé la généralisation de la méthode de (*Bottero* et al) aux problèmes d'adaptation des chaussées routières.

Dans ce qui suit nous rappelons le théorème statique et cinématique de la théorie d'adaptation, puis nous proposons l'application du théorème statique d'adaptation aux cas des sols compressibles en utilisant le concept de l'état caractéristique.

La théorie d'adaptation est basée sur les hypothèses suivantes :

Évolution quasi-statique

L'application des charges s'effectue dans des conditions quasi-statiques de telle sorte que les effets dynamiques sont négligeables.

Matériau élastique parfaitement plastique

Considérons un corps B constitué d'un matériau élastique parfaitement plastique standard, de volume V et de surface $S = S_U \cup S_T$, $S_U \cap S_T = \emptyset$ soumis à des sollicitations extérieures qui varient d'une façon quelconque et indépendamment l'une de l'autre, entre des limites prescrites :

- des forces de volume : F_i dans V ,
- des forces de surface : T_i sur S_T ,
- des déplacements imposés : U_i sur S_U .

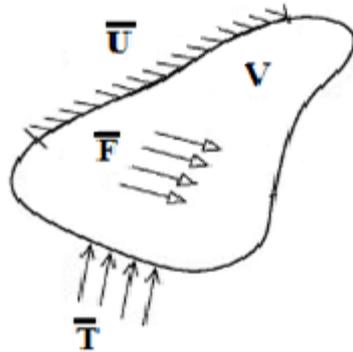


Figure III.1 – milieu continu et sollicitations

En appliquant le principe des travaux virtuels qui énonce : « pour tous les champs cinématiquement admissibles, le travail virtuel des actions extérieures est égale au travail des actions intérieures » nous obtiendrons :

$$\int_V F_i u_i dV + \int_{S_T} T_i u_i dS = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (\text{III.1})$$

Les déplacements dans le corps réel peuvent être exprimés comme la somme de deux contributions:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^e + \mathbf{u}_i^r \quad (\text{III.2})$$

où \mathbf{u}_i^e est la réponse en déplacement qui résulte des forces de volume, des tractions de surface et des déplacements imposés et \mathbf{u}_i^r est la réponse en déplacement qui résulte des déformations plastiques. Il vient donc :

$$\mathbf{u}_i^e = \mathbf{U}_i \quad \text{sur } S_U \quad (\text{III.3a})$$

$$\mathbf{u}_i^r = 0 \quad \text{sur } S_U \quad (\text{III.3b})$$

Hypothèses des petites transformations

Sous l'hypothèse des petites déformations, un champ de déformation compatible peut être dérivé de la relation linéaire suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i}) \quad (\text{III.4})$$

En tenant compte de l'équation (III.2), on peut écrire :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^r \quad (\text{III.5a})$$

avec

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{i,j}^e + \mathbf{u}_{j,i}^e) \quad (\text{III.5b})$$

$$\varepsilon_{ij}^r = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{i,j}^r + \mathbf{u}_{j,i}^r) \quad (\text{III.5c})$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e$ est le champ de déformations élastiques qui résulte des forces de volume, des tractions de surface et des déplacements imposés et $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^r$ est le champ de déformations résiduelles qui résulte des déformations plastiques, défini par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^r = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p + \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{er} \quad (\text{III.6})$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{er}$ sont, respectivement, les champs de déformations plastiques et élastiques résiduelles. Finalement la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ a pour expression :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e + \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^r = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e + \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p + \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{er} \quad (\text{III.7})$$

La part élastique de la déformation est liée aux contraintes par la loi de Hooke :

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}^e = E_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^e \quad (\text{III.8a})$$

$$\boldsymbol{\rho}_{ij} = E_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^{er} \quad (\text{III.8b})$$

Le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ qui a pour expression,

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \boldsymbol{\sigma}_{ij}^e + \boldsymbol{\rho}_{ij} \quad (\text{III.9})$$

doit satisfaire les équations d'équilibre suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij,j} + F_i = 0 \quad \text{dans } V \quad (\text{III.10a})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} n_j - T_i = 0 \quad \text{dans } S_T \quad (\text{III.10b})$$

Comme le champ de contraintes résiduelles est un champ d'auto-contraintes, le système d'équations suivant est vérifié :

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij,j}^e + F_i = 0 \quad \text{dans } V \quad (\text{III.11a})$$

$$\sigma_{ij}^e n_j - T_i = 0 \quad \text{dans } S_T \quad (\text{III.11b})$$

$$\rho_{ij,j} = 0 \quad \text{dans } V \quad (\text{III.11c})$$

$$\rho_{ij} n_j = 0 \quad \text{dans } S_T \quad (\text{III.11d})$$

Convexité du domaine élastique

On suppose que le matériau obéit au principe du travail maximal de Hill [11] :

Pour tout σ_{ij}^s appartenant au domaine défini par l'inégalité $F(\sigma_{ij}^s) < 0$:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \dot{\varepsilon}_{ij}^p > 0 \quad (\text{III.12a})$$

Pour un état de contraintes admissibles σ_{ij}^a défini par $F(\sigma_{ij}^a) \leq 0$:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^a) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (\text{III.12b})$$

Loi d'écoulement associée

La déformation plastique est donnée par la loi de normalité :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{III.13})$$

III.3. THEOREME D'ADAPTATION STATIQUE DE MELAN

Le théorème de *Melan* [21] (1936) ou théorème d'adaptation statique de *Melan* peut être énoncé sous la forme suivante :

Une structure élastoplastique **s'adapte** sous des sollicitations variables répétées, c'est-à-dire que son comportement, après un certain nombre de cycles de charges initiales, devient purement élastique s'il existe un champ de contraintes résiduelles $\bar{\rho}$ indépendant du temps et tel que sa superposition avec le champ de contraintes purement élastiques constitue un état de contrainte sur (un état de contrainte strictement inclus dans le domaine élastique) et ne viole pas le critère d'écoulement en tout point \mathbf{x} de la structure, sous les différentes combinaisons possibles de charges à l'intérieur des limites prescrites :

$$F \left[\sigma_{ij}^e(\mathbf{x}, t) + \bar{\rho}_{ij}(\mathbf{x}) \right] < 0 \quad (\text{III.14a})$$

avec

$$\sigma_{ij}^e + \bar{\rho}_{ij} = \sigma_{ij}^s \quad (\text{III.14b})$$

Par contre, si on ne peut trouver une distribution de contraintes résiduelles indépendante du temps, constituant avec les contraintes élastiques un état de contraintes admissibles (σ^a), sous la combinaison de charges possibles, alors la structure ne **s'adapte** pas.

Pour la démonstration de ce théorème (critère de Melan), On considère l'énergie de déformation élastique fictive W correspondant aux contraintes auto-équilibrées $(\rho - \bar{\rho})$, où ρ est le champ de contraintes résiduelles actuelles à chaque étape du programme de chargement et $\bar{\rho}$ est un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps pour lequel le critère de Melan est satisfait.

L'énergie de déformation élastique fictive W de forme quadratique est définie par :

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) E_{ijkl}^{-1} (\rho_{kl} - \bar{\rho}_{kl}) dV \quad (\text{III.15})$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) (\varepsilon_{ij}^{er} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{er}) dV \quad (\text{III.16})$$

La dérivée de W par rapport au temps donne :

$$\dot{W} = \int_V (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) E_{ijkl}^{-1} \dot{\rho}_{kl} dV = \int_V (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^{er} dV \quad (\text{III.17})$$

En tenant compte de l'équation (III.7) l'équation (III.18) devient :

$$\dot{W} = \int_V (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^e - \dot{\epsilon}_{ij}^p) dV \quad (\text{III.18})$$

Le champ de contraintes résiduelles $(\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij})$ est auto - équilibré et la vitesse de déformations $(\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^e)$ est cinématiquement admissible, car elle est la différence entre deux vitesses de déformations cinématiquement admissible. Le principe des travaux virtuels permet alors d'écrire

$$\dot{W} = \int_V (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^e) dV = 0 \quad (\text{III.19})$$

et l'équation (III.18) devient :

$$\dot{W} = - \int_V (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^p dV \quad (\text{III.20})$$

En tenant compte que $\rho_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^e$ et que $\bar{\rho}_{ij} = \sigma_{ij}^s - \sigma_{ij}^e$ avec σ_{ij} l'état de contraintes actuelles et σ_{ij}^s l'état de contraintes de sécurité. On obtient finalement :

$$\dot{W} = - \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \dot{\epsilon}_{ij}^p dV \leq 0 \quad (\text{III.21})$$

La quantité W est une fonctionnelle positive et toujours décroissante en raison de l'inégalité (III.12a). Pour qu'elle ne devienne pas négative, il faut qu'à un moment donné :

$$\dot{W} = - \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \dot{\epsilon}_{ij}^p dV = 0 \quad (\text{III.22})$$

La dernière équation est satisfaite si l'une des deux alternatives suivantes a lieu :

- (a) Soit $(\sigma_{ij} \rightarrow \sigma_{ij}^s)$, c'est-à-dire $(\rho_{ij} \rightarrow \bar{\rho}_{ij})$ pour $t \succ t_\infty$;
- (b) Soit $\dot{\epsilon}_{ij}^p \rightarrow 0$ $t \succ t_\infty$.

Le cas où $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s$ est orthogonal à $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ est exclu car σ_{ij}^s est supposé strictement à l'intérieur du domaine élastique convexe. Comme $F(\sigma_{ij}) \rightarrow F(\sigma_{ij}^s) < 0$ implique que $\dot{\epsilon}_{ij}^p \rightarrow 0$, on constate que les deux alternatives (a) et (b) entraînent le comportement élastique de la structure quand $t > t_\infty$, ce qui est appelé *adaptation*.

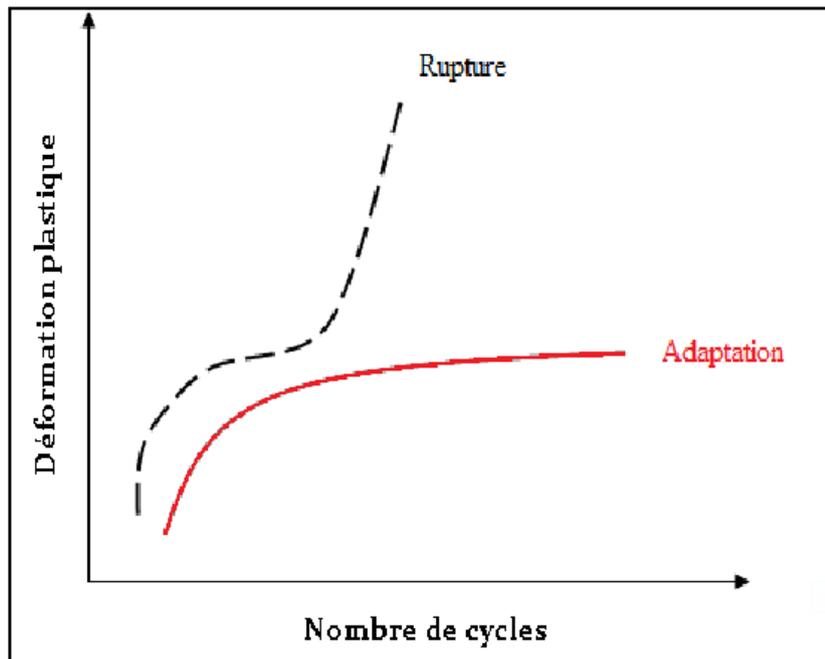


Figure III.2 – Adaptation et rupture incrémentale

III.4. COEFFICIENT DE SECURITE A L'ADAPTATION

La valeur de la déformation plastique totale qui peut apparaître avant que la structure atteigne son état d'adaptation, n'a pas été donnée par le critère et la démonstration de Melan. Le coefficient de sécurité introduit par *Koiter* [16] (1960) permet de préciser de manière décisive que les déformations plastiques cessent d'évoluer après une durée déterminée, puisqu'il permet de borner l'énergie dissipée plastiquement durant le trajet de chargement. On considère un coefficient de sécurité $\alpha > 1$ contre la défaillance de la structure due à l'inadaptation, tel que l'état de contrainte $\alpha\sigma_{ij}^s$ soit à l'intérieur du domaine élastique et constitue un état admissible, c'est-à-dire que :

$$F(\alpha\sigma_{ij}^s) \leq 0 \quad (\text{III.23})$$

avec $\alpha(\sigma_{ij}^s + \rho_{ij}) = \sigma_{ij}^a$ comme un état de contrainte admissible. Le principe du travail plastique maximal montre que :

$$(\sigma_{ij} - \alpha\sigma_{ij}^s) \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (\text{III.24})$$

$$(\alpha\sigma_{ij} - (\alpha\sigma_{ij} - \sigma_{ij}) - \alpha\sigma_{ij}^s) \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (\text{III.25})$$

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (\text{III.26})$$

D'où l'on déduit :

$$\dot{W}_p = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p dV \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \dot{\epsilon}_{ij}^p dV \quad (\text{III.27})$$

Le travail plastique s'écrit :

$$W_p = \int_0^{t=T} \dot{W}_p dt \leq -\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) \int_0^T \dot{W}(t) dt \quad (\text{III.28})$$

à $t = 0$, le corps n'est soumis à aucune distribution de contraintes résiduelles

à $t = T$ (adaptation) le travail plastique est nul

$$W_p = \int_0^{t=T} \dot{W}_p dt \leq -\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) [W(T) - W(0)] \quad (\text{III.29})$$

$$W_p \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} [W(0)] \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} \int_V \frac{1}{2} \bar{\rho}_{ij} E_{ijkl}^{-1} \bar{\rho}_{kl} dV \quad (\text{III.30})$$

Cette inégalité implique que l'énergie dissipé plastiquement est bornée pour tout ($\alpha > 1$).

III.5. THEOREME CINEMATIQUE DE KOITER

Le deuxième théorème cinématique d'adaptation est attribué à *Koiter* [16]. Il repose sur la définition d'une vitesse de déformation plastique admissible $\dot{\epsilon}_{ij}^p(\mathbf{x}, t)$ sur un cycle d'intervalle $0 \leq t \leq T$. Elle est caractérisée par l'intégration suivante :

$$\Delta \epsilon_{ij}^p = \int_0^T \dot{\epsilon}_{ij}^p(t) dt = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i})$$

$$\Delta u_i = \int_0^T \dot{u}_i(t) dt \quad (III.31)$$

$$\Delta u_i = 0 \quad \text{sur } S_u$$

qui constitue un champ de déformation cinématiquement admissible.

1. Une structure élastoplastique ne s'adapte pas s'il existe une vitesse de déformation plastique admissible $\dot{\epsilon}_{ij}^p(\mathbf{x}, t)$ dans l'intervalle du temps $0 \leq t \leq T$ et pour toute combinaison de charges extérieures $F_i(\mathbf{x}, t)$, $T_i(\mathbf{x}, t)$ à l'intérieur des limites prescrites l'intégralité suivante est strictement vérifiée :

$$\int_0^T \int_V F_i(\mathbf{x}, t) \dot{u}_i(\mathbf{x}, t) dV dt + \int_0^T \int_{S_T} T_i(\mathbf{x}, t) \dot{u}_i(\mathbf{x}, t) dS dt > \int_0^T \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) \dot{\epsilon}_{ij}^p(\mathbf{x}, t) dV dt$$

$$= \int_0^T \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}^p) dV dt \quad (III.32)$$

2. Autrement, l'adaptation aura lieu si pour toutes vitesses de déformations plastiques admissibles possibles $\dot{\epsilon}_{ij}^p(\mathbf{x}, t)$ durant le programme du chargement dans l'intervalle du temps $0 \leq t \leq T$ l'intégralité suivante est satisfaite :

$$\int_0^T \int_V F_i(\mathbf{x}, t) \dot{u}_i(\mathbf{x}, t) dV dt + \int_0^T \int_{S_T} T_i(\mathbf{x}, t) \dot{u}_i(\mathbf{x}, t) dS dt \leq \int_0^T \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) \dot{\epsilon}_{ij}^p(\mathbf{x}, t) dV dt$$

$$= \int_0^T \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}^p) dV dt \quad (III.33)$$

où $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ est le tenseur de contraintes associé à la déformation plastique.

III.6. ADAPTATION DES SOLS COMPRESSIBLES

Les théorèmes statique et cinématique de la théorie de l'adaptation sont basés sur le postulat de Drucker (ou le principe du travail plastique maximal de Hill) valable pour les matériaux standards (incompressibles) qui vérifient la règle de normalité.

Les géo-matériaux en général et les sols en particulier sont des matériaux compressibles. La déformation plastique est accompagnée d'une variation de volume, et la règle de normalité donne une indication non réaliste sur la direction de la déformation plastique. C'est la raison pour laquelle la modélisation des sols avec une loi d'écoulement associée conduit à une dilatance excessive qui est contraire à la réalité expérimentale.

L'approche la plus souvent utilisée pour orienter correctement cette déformation consiste en la donnée d'une surface potentielle appelée aussi potentiel plastique, en plus de la surface de charge comme il est montré sur la figure (III.3). Les deux surfaces sont décrites par des fonctions différentes et la loi d'écoulement est dite non associée. La surface de charge ou la surface d'écoulement délimite le domaine des contraintes admissibles, et contrôle l'apparition des déformations plastiques (écoulement plastique). Par contre la surface potentielle, caractérisée par un incrément de déformation volumique plastique nul ($\dot{\epsilon}_v^p = 0$), contrôle l'orientation de la déformation plastique.

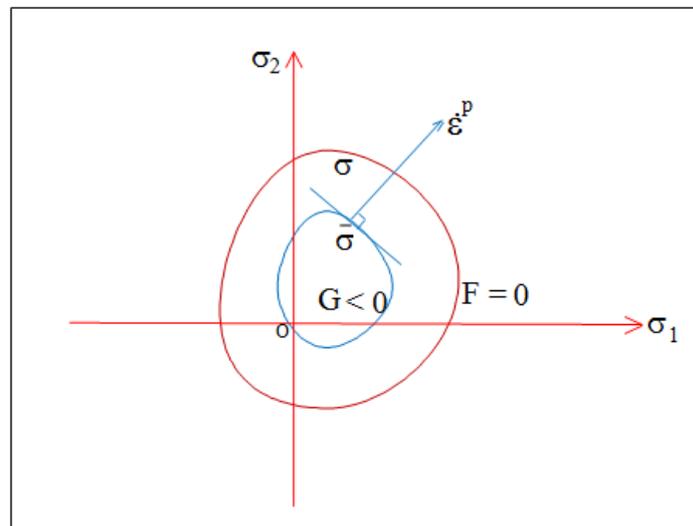


Figure III.3 – Surface de charge F et Surface potentielle G

L'extension du théorème statique de *Melan* [21] aux cas des matériaux frottants dont la loi d'écoulement est non associée est donnée par *Maier* [20]. Cette extension est basée principalement sur la définition d'une surface potentielle à l'intérieur de la surface de charge. Il a démontré qu'à l'adaptation l'état de contrainte est toujours à l'intérieur de la surface potentielle et non pas à l'intérieur de la surface de charge (pour la démonstration voir

Maier [20]). Cependant cette approche ne peut pas être appliquée pour le cas des sols pour les raisons suivantes :

- elle est incapable de prédire l'adaptation ou la non-adaptation des sols compressibles. La stabilité des sols est gouverné par la nature des déformations volumiques engendrées (comportement contractant ou dilatant) ;
- une instabilité peut avoir lieu à l'intérieure même de la surface potentielle au-delà de la ligne caractéristique comme il est montré dans la figure (III.4) ;
- pour les sols (sables lâches ou sables denses) on peut avoir un chevauchement entre la surface potentielle et la surface de charge (figure III.5). La validité du théorème de *Maier* [20] exige que la surface potentielle doit être à l'intérieur de la surface de charge. Sans cette hypothèse le théorème ne peut être prouvé.

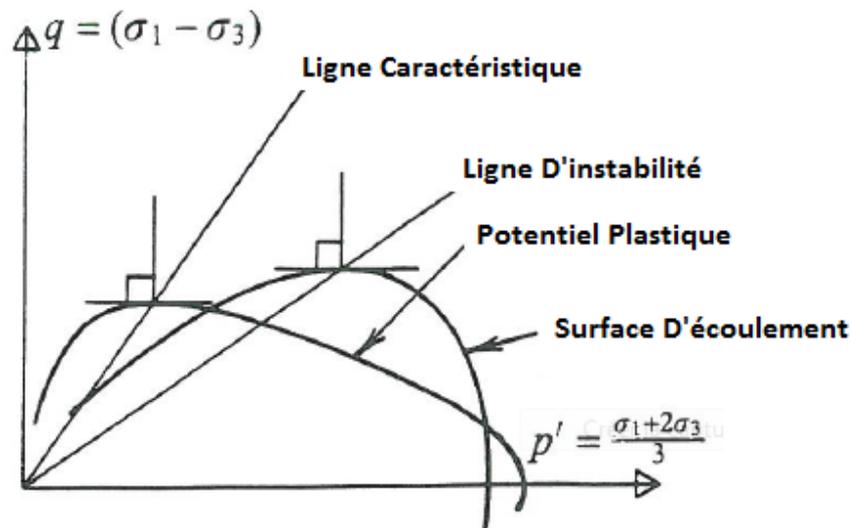


Figure III.4 – Ligne caractéristique et ligne d'instabilité (d'après *IBSEN & Lade* [13])

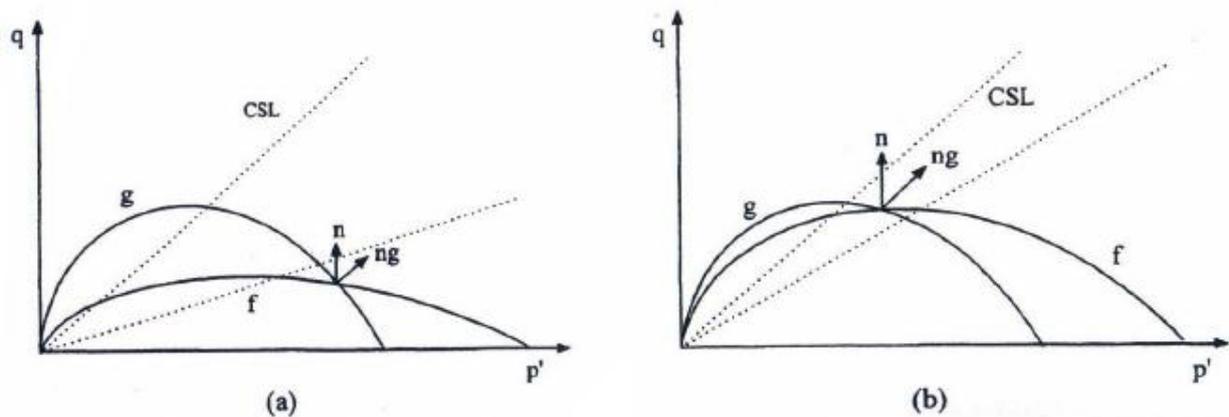


Figure III.5 – Surface potentielle et Surface de charge pour (a) sables lâches (b) sables denses (d'après *Zienkiewicz & al* [32])

III.7. GENERALISATION DU THEOREME STATIQUE D'ADAPTATION AUX CAS DES SOLS

III.7.1. Surface caractéristique

Pour la généralisation du théorème statique d'adaptation pour le cas des sols, on introduit la notion de surface caractéristique basée essentiellement sur le concept de l'état caractéristique. La surface caractéristique est définie comme la généralisation de la ligne caractéristique dans l'espace des contraintes, elle peut être représentée par une surface de type Mohr Coulomb :

$$Q(\sigma_{ij}) = (\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi_c - 2C \cos \phi_c = 0 \quad (\text{III.34})$$

où σ_1 et σ_3 sont les contraintes principales majeur et mineur, C et ϕ_c sont la cohésion et l'angle de frottement caractéristique. Les points clés servants à la généralisation du théorème sont les suivants :

- la surface caractéristique joue un double rôle. En effet elle est utilisée à la fois comme un critère de rupture et aussi comme un critère en déformation. En conséquence elle délimite le domaine des contraintes admissibles qui aussi le domaine des déformations volumiques contractives.

- la perte de normalité d'un matériau granulaire est due aux déformations volumiques qui se produisent durant le cisaillement. La surface caractéristique marque une limite entre le comportement contractant et le comportement dilatant du matériau. A cette limite le sol devient plastiquement incompressible ce qui entraîne la validation de la règle de normalité. En conséquence le postulat de stabilité de Drucker s'applique indispensable pour la démonstration du théorème et pour l'unicité de la solution.

- les déformations qui se développent avant l'adaptation du sol sont inconnues et on ne peut pas les calculer directement. Cependant la surface caractéristique est associée aux petites déformations dans le cas des sables denses. Ce qui garantit la validation de l'hypothèse des petites déformations à l'adaptation et garantit que la déformation plastique reste bornée.

II.7.2 Condition suffisante d'adaptation

Le théorème statique d'adaptation statique peut être généralisé pour le cas des sols compressibles.

Enoncé : l'adaptation se produit s'il existe un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps $\bar{\rho}$ tel que sa superposition avec le champ de contraintes purement élastiques constitue un état de contrainte intérieure à la surface caractéristique Q pour toutes les combinaisons

possibles des sollicitations. Pour la démonstration voir (*Hamadouche & benssediq* [10]) :

$$Q[\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^e + \bar{\rho}_{ij}] < 0 \quad (\text{III.35})$$

III.8. CONCLUSION

La surface caractéristique représente le meilleur critère pour l'analyse de l'adaptation des sols. Parce que la surface caractéristique :

- est basée sur le concept de l'état caractéristique déterminé à partir des constatations expérimentales. Donc plus réaliste et plus fiable que l'approche de *Maier* [20] basée sur l'existence d'une fonction potentielle à l'intérieure de la surface de charge introduite juste pour la validation de la règle de normalité.
- satisfait la règle de normalité et le postulat de Drucker indispensables pour la démonstration des théorèmes d'adaptations et l'unicité de la solution qui se traduit par un comportement stable du matériau.
- capture la condition d'adaptation (respectivement de non adaptation) quand le comportement du sol est contractant (respectivement dilatant)

CHAPITRE IV

***FORMULATION DU PROBLEME
D'ADAPTATION PAR MEF***

IV.1. INTRODUCTION

La mise en œuvre du théorème statique d'adaptation repose sur la méthode des éléments finis statiquement admissibles en jonction avec un processus d'optimisation non linéaire. Cette dernière consiste à maximiser le facteur de charge α tout en veillant à ce que le critère d'écoulement soit respecté en tout point de la structure. Le nombre de contraintes d'optimisation est proportionnel au nombre de points-test pour lesquels on souhaite évaluer le critère d'écoulement. La résolution du problème de l'analyse à l'adaptation sous contraintes utilise la méthode du Lagrangien augmenté [24], et nécessite :

- La solution du problème du corps de référence purement élastique correspondant aux mêmes conditions aux limites et mêmes sollicitations que le problème posé ;
- La construction d'un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps.

IV.2. DOMAINE DE CHARGEMENT

On suppose que chaque charge, symboliquement notée P_i , peut varier à l'intérieur d'un intervalle donné:

$$\begin{aligned}
 P_1 \in I_1 &= [P_1^-, P_1^+] = [\mu_1^-, \mu_1^+] P_1 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 P_n \in I_n &= [P_n^-, P_n^+] = [\mu_n^-, \mu_n^+] P_n
 \end{aligned} \tag{IV.1}$$

On note le domaine de toutes les charges extérieures possibles par D défini par :

$$D = \left\{ P / P = \sum_{i=1}^n \mu_i P_i, \mu_i \in [\mu_i^-, \mu_i^+] \right\} \tag{IV.2}$$

où les P_i ($i=1, \dots, n$) sont les n charges généralisées indépendantes (ex. : les forces de volume, les tractions de surface, les déplacements imposés, variation de température ou la combinaison de ces charges) et les μ_i sont les multiplicateurs de charges avec respectivement μ_i^- et μ_i^+ , les bornes supérieure et inférieure correspondantes.

Le domaine D a la propriété de convexité c'est-à-dire que pour tous P_1 et P_2 appartenant à D , toutes les valeurs de P définies par :

$$P = \theta P_1 + (1-\theta)P_2, \quad \theta \in [0,1] \quad (\text{IV.3})$$

appartiennent aussi à D . L'enveloppe convexe du domaine D est définie par

$$\tilde{D} = \left\{ P = \sum_{i=1}^m \mu_i P_i, \quad \mu_i = \mu_i^- \text{ ou } \mu_i^+ \right\} \quad (\text{IV.4})$$

Chaque élément P de \tilde{D} peut s'écrire comme :

$$P = \sum_{i=1}^m \theta_i P_i \quad (\text{IV.5})$$

où

$$\sum_{i=1}^m \theta_i = 1, \quad \theta_i \geq 0 \quad \forall i \quad (\text{IV.6})$$

avec $m = 2^n$ et les P_i , les points de \tilde{D} , sont les points anguleux de D . Le cas bidimensionnel est montré sur la figure (IV.1).

Théorème : L'adaptation peut avoir lieu dans le domaine de chargement D si et seulement si on a adaptation dans son enveloppe convexe \tilde{D} . Sa conséquence est que, pour un domaine de variation de charges donné, s'il y a adaptation pour les points anguleux du domaine P_i , alors il y a adaptation pour tous les points du domaine [23].

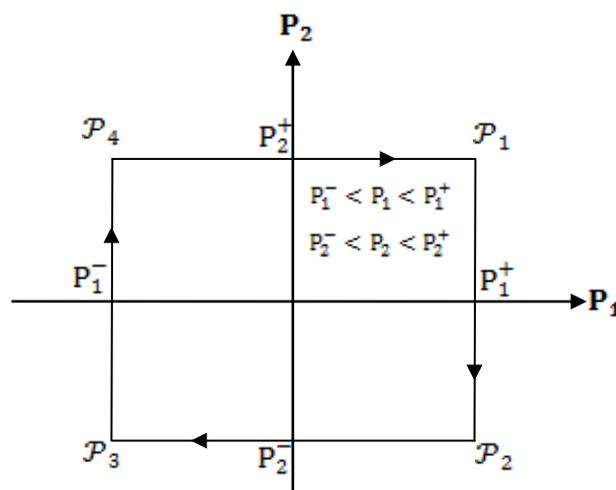


Figure IV.1 – Domaine de variation des charges

IV.3. FORMULATION ELEMENT FINIS

IV.3.1 Principe du minimum de l'énergie complémentaire totale

Pour le calcul de la réponse élastique on utilise la méthode des éléments finis statiquement admissible, basée sur le principe du minimum de l'énergie complémentaire. L'énergie complémentaire U_C d'une structure est donnée par la somme de l'énergie complémentaire de déformation (U^*) et du potentiel des forces extérieures (V^*). En négligeant les forces de volume U_C est définie par :

$$U_C = U^* + V^* \quad (IV.7)$$

$$U_C = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} dV - \int_{S_u} \bar{T}_i \bar{u}_i dS \quad (IV.8)$$

où S_u est la frontière sur laquelle les déplacements \bar{u}_i sont imposés, et \bar{T}_i représente les tractions de surface correspondantes. Cette fonctionnelle est minimale à l'équilibre, c'est-à-dire que :

$$\delta U_C = \delta U^* + \delta V^* = 0 \quad (IV.9)$$

et

$$\delta^2 U_C = \delta^2 U^* + \delta^2 V^* \geq 0 \quad (IV.10)$$

Dans ce qui suit on considère que les déplacements \bar{u}_i imposés sur la frontières S_u sont nuls et l'expression de U_C se réduit à :

$$U_C = U^* = \frac{1}{2} \int_{(V)} \sigma_{ij} E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} dV \quad (IV.11)$$

Dans le cas des problèmes plans le champ de contrainte dépend uniquement de x et y , l'intégration sur le volume peut être remplacée par une intégration sur la surface S dans le plan $x - y$, on obtient alors :

$$U_C = U^* = \frac{1}{2} \int_{(S)} \sigma_{ij} E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} t dS \quad (IV.12)$$

où t représente l'épaisseur ($dV = t dS$).

IV.3.2 Fonction de contrainte d'Airy

La formulation des éléments s'effectue à partir d'hypothèses sur les champs de contraintes. Il est nécessaire de choisir ces champs de manière à ce qu'ils vérifient les équations différentielles d'équilibre. Une solution pratique pour définir des champs de contraintes admissibles consiste en l'utilisation de fonctions potentielles, ou fonctions de contraintes. Ces fonctions sont des expressions qui dérivées selon certaines règles, donnent des composantes de contraintes qui vérifient automatiquement les conditions d'équilibre. L'état de contrainte plane ou de déformation plane n'admet qu'une seule de ces fonctions, appelée fonction de contrainte d'Airy notée $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, dont la définition est la suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}] = [\Phi_{,22}, \Phi_{,11}, -\Phi_{,12}] \quad (\text{IV.13})$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{11} &= (\partial^2 \Phi / \partial y^2) = \Phi_{,22} \\ \sigma_{yy} = \sigma_{22} &= (\partial^2 \Phi / \partial x^2) = \Phi_{,11} \\ \tau_{xy} = \sigma_{12} &= (\partial^2 \Phi / \partial x \partial y) = -\Phi_{,12} \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

La discrétisation consiste à découper la structure (domaine V) en éléments finis (sous domaines V^e) de forme géométrique simple. Dans chaque élément, on définit une approximation de la fonction de contrainte d'Airy par :

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = N^T \Phi^e \quad (\text{IV.15})$$

où N et Φ^e désignent respectivement les vecteurs de fonctions de forme et les fonctions de contraintes aux nœuds de l'élément. Le vecteur contrainte donné par l'équation (IV.13) peut s'écrire :

$$\boldsymbol{\sigma}^{eT} = [N_{,22}^T, N_{,11}^T, -N_{,12}^T] \Phi^e = (N'')^T \Phi^e \quad (\text{IV.16})$$

où N'' représente le vecteur des dérivées secondes de N . En tenant compte de l'équation (IV.16) l'expression de l'énergie complémentaire (IV.12) devient :

$$U_c^e = \frac{1}{2} (\Phi^e)^T f^e \Phi^e \quad (\text{IV.17})$$

avec

$$f^e = \int_{(S)} (N'')^T E_{ijkl}^{-1} N'' t dS \quad (\text{IV.18})$$

Avec f^e matrice de flexibilité élémentaire. L'énergie complémentaire totale U_c est donnée par :

$$U_c = \sum_{e=1}^n U_c^e = \frac{1}{2} \Phi^T f \Phi \quad (\text{IV.19})$$

où la matrice de flexibilité f et le vecteur Φ sont obtenus par la superposition de toutes les matrices de flexibilités élémentaire f^e et de tous les vecteurs élémentaires Φ^e .

IV.3.3 Continuité des contraintes inter-éléments

La continuité des contraintes normales et de cisaillement inter-éléments doit être assurée pour que le principe du minimum de l'énergie complémentaire totale soit valide.

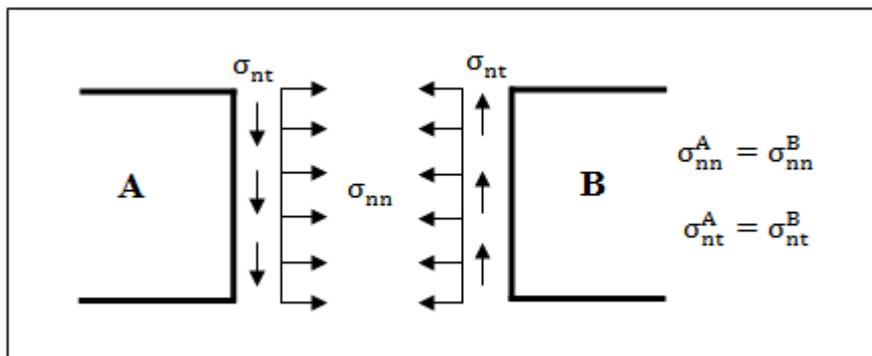


Figure IV.2 – Continuité des contraintes

$$\sigma_{nn}^A = \sigma_{nn}^B \Rightarrow (\partial^2 \Phi / \partial t^2)^A = (\partial^2 \Phi / \partial t^2)^B \quad (\text{IV.20})$$

$$\sigma_{nt}^A = \sigma_{nt}^B \Rightarrow (\partial^2 \Phi / \partial t \partial n)^A = (\partial^2 \Phi / \partial t \partial n)^B \quad (\text{IV.21})$$

La nécessité de satisfaire les conditions d'équilibre inter-élément qui exigent la continuité de Φ et de ses dérivées d'un élément à l'autre, est assurée par l'utilisation des polynômes d'interpolation bicubique d'Hermite.

IV.3.4 Approximation de la fonction d'Airy par les polynômes d'Hermite

L'approximation de la fonction de contrainte d'Airy $\Phi(x, y)$ est de la forme (GALLAGHER & DHALLA [6]) :

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i x^j \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \quad (\text{IV.22})$$

où, les paramètres inconnus a_{ij} sont au nombre de 16. Ces derniers sont remplacés par les paramètres Φ_{ij} . Lesquels permettent une identification mécanique. Ils sont donnés par la valeur de la fonction Φ , sa dérivée première, $\Phi_{,x}$ et $\Phi_{,y}$ et sa dérivée seconde $\Phi_{,xy}$ aux points nodaux de chaque élément.

$$\Phi(x, y) = \left[[N\Phi]^T, [N\Phi_{,x}]^T, [N\Phi_{,y}]^T, [N\Phi_{,xy}]^T \right] \{\Phi\} \quad (\text{IV.23})$$

avec

$$[N\Phi]^T = [N_1(x)N_1(y), N_2(x)N_1(y), N_2(x)N_2(y), N_1(x)N_2(y)]$$

$$[N\Phi_{,x}]^T = [N_3(x)N_1(y), N_4(x)N_1(y), N_4(x)N_2(y), N_3(x)N_2(y)]$$

$$[N\Phi_{,y}]^T = [N_1(x)N_3(y), N_2(x)N_3(y), N_2(x)N_4(y), N_1(x)N_4(y)]$$

$$[N\Phi_{,xy}]^T = [N_3(x)N_3(y), N_4(x)N_3(y), N_4(x)N_4(y), N_3(x)N_4(y)]$$

Les fonctions de forme N_i sont données par les polynômes d'Hermite suivants:

$$\begin{aligned}
 N_1(x) &= (1 - 3S^2 + 2S^3) & N_1(y) &= (1 - 3t^2 + 2t^3) \\
 N_2(x) &= (3S^2 - 2S^3) & N_2(y) &= (3t^2 - 2t^3) \\
 N_3(x) &= aS(S-1)^2 & N_3(y) &= bt(t-1)^2 \\
 N_4(x) &= aS(S^2 - S) & N_3(y) &= bt(t^2 - t)^2 \\
 S &= \frac{x}{a} & t &= \frac{y}{b}
 \end{aligned}$$

Le vecteur Φ contient tous les paramètres de fonctions de contraintes aux nœuds :

$$\begin{aligned}
 \{\Phi\} &= \{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_{,x1}, \Phi_{,x2}, \Phi_{,x3}, \Phi_{,x4}, \Phi_{,y1}, \Phi_{,y2}, \Phi_{,y3}, \Phi_{,y4}, \\
 &\quad \Phi_{,xy1}, \Phi_{,xy2}, \Phi_{,xy3}, \Phi_{,xy4}\}^T \quad (IV.24)
 \end{aligned}$$

Les nombres 1, 2, 3, 4, sont relatifs aux nœuds i, j, k et l respectivement (voir figure IV.3).

IV.3.5 Prise en compte des conditions aux limites par les multiplicateurs de lagrange

En tenant compte de (IV.13) et (IV.14), les équations d'équilibre sur la frontières où sont imposées les forces de surface sont données par :

$$\begin{aligned}
 \Phi_{,22}n_1 - \Phi_{,12}n_2 &= T_1 \\
 -\Phi_{,12}n_1 + \Phi_{,11}n_2 &= T_2
 \end{aligned} \quad \text{sur } S_T^e \quad (IV.25)$$

On va expliquer l'implémentation des conditions aux limites statique sur un exemple. Considérons un élément $(i-j-k-l)$ lequel est soumis le long de son côté $(i-j)$ à une contrainte normale $\sigma_y(x)$ et à une contrainte de cisaillement $\sigma_{xy}(x)$, comme il est montré sur la (figure IV.3). En tout point de ce côté on a :

$$\Phi_{,11} = \Phi_{,xx} = \sigma_{yy}(x) \quad (IV.26)$$

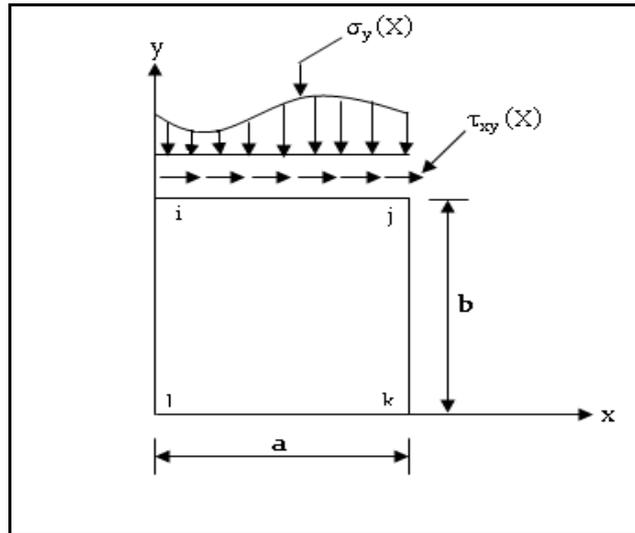


Figure IV.3 – Cas d'un chargement appliqué sur la frontière

En intégrons deux fois l'équation (IV.26) et en évaluant les constantes d'intégration en fonctions des valeurs de Φ et $\Phi_{,x}$ aux extrémités du côté ($i-j$) (c'est-à-dire $\Phi(i)$, $\Phi(j)$, $\Phi_{,x}(i)$, $\Phi_{,x}(j)$), il résulte :

$$\int_0^a \sigma_{yy}(x) dx = -\Phi_{,x}(i) + \Phi_{,x}(j) \quad (\text{IV.27})$$

$$\int_0^a \int_0^x \sigma_{yy}(S) dS dx = -\Phi(i) + \Phi(j) - a\Phi_{,x}(i)$$

L'évaluation des contraintes de cisaillements aux extrémités du côté ($i-j$) donne les deux conditions de contraintes suivantes :

$$\sigma_{xy}(i) = -\Phi_{,xy}(i) \quad (\text{IV.28})$$

$$\sigma_{xy}(j) = -\Phi_{,xy}(j) \quad (\text{IV.29})$$

Une troisième condition s'ajoute en intégrant la contrainte de cisaillement le long du côté ($i-j$) :

$$\Phi_{,y}(i) - \Phi_{,y}(j) = \int_0^a \sigma_{xy}(x) dx \quad (\text{IV.30})$$

L'ensemble des équations qui proviennent des conditions aux limites constituent un système d'équations de contraintes, qui peut se mettre sous forme matricielle suivante :

$$C_{n \times n} \Phi_{n \times 1} = P_{m \times n} \quad (\text{IV.31})$$

avec m = nombre d'équations de contraintes, n = le nombre de paramètres inconnus (degrés de liberté), et P le vecteur des charges extérieures résultant à partir de l'intégration des tractions de surface.

IV.3.6 Calcul de la réponse purement élastique

L'addition des contraintes d'optimisation avec les multiplicateurs de Lagrange $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, m)$ à la fonctionnelle de l'énergie complémentaire totale donne une fonction de Φ_i, λ_i à optimiser :

$$F(\Phi, \lambda) = \frac{1}{2} \Phi f \Phi^T + \lambda (C \Phi^T - P^T) \quad (\text{IV.32})$$

La variation de l'équation. (IV.32) par rapport à Φ et λ conduit à un système d'équations linéaires :

$$\begin{pmatrix} f & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix} \quad (\text{IV.33})$$

On remarque que la partition inférieure est tout simplement constituée des équations de contraintes. Si f n'est pas singulière, on pourra résoudre ces équations directement par partition. La partition supérieure nous donne :

$$\{\Phi\} = -[f]^{-1} [C]^T \{\lambda\} \quad (\text{IV.34})$$

et de la partition inférieure on obtient :

$$\{\Phi\} = [C]^{-1} \{P\} \quad (\text{IV.35})$$

En réarrangeant les équations (IV.34) et (IV.35) on obtient

$$\{\Phi\} = -[f]^{-1} [C]^T \{\lambda\} = [C]^{-1} \{P\} \quad (\text{IV.36})$$

$$\{\lambda\} = -\left([C][f]^{-1}[C]^T\right)^{-1} (\{P\}) \quad (\text{IV.37})$$

La substitution de $\{\lambda\}$ dans l'équation (IV.34) nous permet de déterminer les paramètres de la solution purement élastique $\{\Phi^0\}$. Ces paramètres sont utilisés par la suite pour la détermination des contraintes purement élastique.

IV.3.7 Calcul de la réponse plastique : Détermination du champ de contrainte résiduelle

Le champ de contraintes résiduelles vérifié les équations d'équilibre homogènes :

$$\bar{\rho}_{ij,j} = 0 \quad \text{dans } V \quad (\text{IV.38})$$

$$n_j \bar{\rho}_{ij} = 0 \quad \text{dans } S_T \quad (\text{IV.39})$$

En tenant compte de l'équation (IV.25) l'équation (IV.39) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \Phi_{,22} n_1 - \Phi_{,12} n_2 &= 0 \\ -\Phi_{,12} n_1 + \Phi_{,11} n_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{sur } S_T^e \quad (\text{IV.40})$$

En rapprochant (IV.16) et (IV.40), il résulte :

$$\left[\begin{pmatrix} N^T_{*22} \\ -N^T_{*12} \end{pmatrix} n_1 + \begin{pmatrix} -N^T_{*12} \\ N^T_{*11} \end{pmatrix} n_2 \right] \Phi^e = 0 \quad (\text{IV.41})$$

Par sommation sur tous les éléments, on obtient un système d'équations de contraintes :

$$C \bar{\Phi} = 0 \quad (\text{IV.42})$$

Les éléments du vecteur $\bar{\Phi}$ ne sont pas linéairement indépendants. On applique alors une procédure d'élimination de Gauss-Jordan pour déterminer le vecteur Φ^r dont les éléments sont linéairement indépendants. L'équation (IV.42) est alors équivalente à :

$$C\bar{\Phi} = CX\Phi^r \quad \text{avec } CX = 0 \quad (\text{IV.43})$$

Le vecteur Φ^r représente les paramètres de la solution plastique, qui sont utilisés pour le calcul des contraintes résiduelles.

IV.3.8 Facteur de charge à l'adaptation

Le facteur de charge à l'adaptation α_{sd} , est déterminé par la solution du problème d'optimisation

$$\alpha_{sd} = \max \alpha \quad (\text{IV.44})$$

avec α comme fonction objective soumise aux contraintes d'inégalités :

$$F(\sigma_{ij}) = F(\alpha\sigma_{ij}^e(P) + \bar{\rho}_{ij}) < 0 \quad \forall P \in D \quad (\text{IV.45})$$

représentés par le critère de plasticité $F(\sigma_{ij})$ testé en différents points. Le lagrangien associé en absence de contraintes d'égalités est donnée par :

$$L(x, \mu) = f(x) + \sum_{j=1}^m \mu_j (b_j(x) - q_j(x)) \quad (\text{IV.46})$$

où $f(x)$ représente la fonction objective, $b_j - q_j$ les contraintes d'inégalité et les μ_j sont les multiplicateurs de Kuhn Tucker (pour plus de détails voir annexe C).

Pour combler les carences de la méthode de Lagrange, et pour avoir une meilleure convergence on a utilisé la méthode du Lagrangien augmenté. Cette technique combine l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange μ_j généralisés et des paramètres de pénalité ($w_i > 0$). Le Lagrangien augmenté est donné par :

$$L_a(x, \mu, w) = L(x, \mu) - w_2 \sum_{j=1}^r (b_j - q_j(x))^2 - w_3 \sum_{j=1}^n (b_k - q_k(x))^2 \quad (\text{IV.47})$$

qui dans nôtre cas prendra la forme suivante :

$$L_a(\Phi, \mu, \alpha) = \alpha - \sum_{i=1}^m \mu_i Q_i(\alpha, \Phi) - w_2 \sum_{j=1}^r (Q_j(\alpha, \Phi))^2 - w_3 \sum_{k=1}^n (Q_k(\alpha, \Phi))^2 \quad (\text{IV.48})$$

avec m le nombre de contrainte d'inégalité égale au nombre de points tests, r le nombre de contraintes active $Q_i(\alpha, \Phi) \geq 0$ et n le nombre de contrainte non active $Q_k(\alpha, \Phi) < 0$.

Pour le calcul de la charge limite d'adaptation on a utilisé le critère de Mohr- Coulomb, qui est le mieux adapté pour l'étude du comportement rhéologique des sols. La contrainte d'inégalité est donnée par :

$$Q_i(\alpha, \Phi) = \sigma_1(\alpha, \Phi) - \sigma_3(\alpha, \Phi) - (\sigma_1(\alpha, \Phi) + \sigma_3(\alpha, \Phi)) \sin \phi_c - 2C \cos \phi_c \quad (\text{IV.49})$$

où ϕ_c est l'angle de frottement caractéristique et C la cohésion.

IV.4. CONCLUSION

Pour l'étude de l'adaptation on a utilisé des éléments finis statiquement admissible en couplage avec la programmation mathématique non-linéaire. L'utilisation de la méthode des pénalités seule présente des difficultés numériques ainsi que l'utilisation de la méthode de Lagrangien seule présente des problèmes de convergence. Pour combler cette carence on a utilisé la méthode du lagrangien augmenté qui combine l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange et des coefficients de pénalité.

La nécessité de satisfaire les conditions d'équilibre inter-élément qui exige la continuité de la fonction d'Airy $\Phi(x, y)$ et de ses dérivées d'un élément à l'autre, est assurée par l'utilisation des polynômes d'interpolation bicubique d'Hermite.

CHAPITRE V

APPLICATION NUMERIQUE

V.1. INTRODUCTION

La mise en œuvre numérique a été réalisée dans un code de calcul par éléments finis, développé initialement par *Weichert & Gross-Weeg* [30] pour l'étude des plaques et coques, puis modifié par *GIESE HANS* [7] pour l'étude des sols sous chargement statique, et par *Hamadouche* [9] pour le calcul des sols sous sollicitations dynamiques. Dans ce qui suit nous considérons le problème de la capacité portante d'un massif de sol. Ce problème même dans le cas le plus simple est intéressant à plusieurs titres. En effet, c'est un problème pratique, il se pose lorsqu'il s'agit de réaliser des ouvrages de natures différentes telles que les routes et les voies ferrées. Notre application consiste en particulier à examiner l'influence des paramètres suivants sur le facteur de charge de l'adaptation et d'analyse limite:

- influence de la cohésion ;
- influence de l'angle de frottement interne ;
- influence des contraintes de cisaillement ;
- influence de l'angle de frottement caractéristique sur la nature des déformations volumiques.

V.2. EXPLOITATION NUMERIQUE

Le problème considéré est une chaussée soumise à une charge verticale répartie uniformément et aux contraintes de cisaillement, sous condition de déformation plane, figure (V.1). Le sol est modélisé comme un matériau élastique parfaitement plastique obéissant au critère de Mohr-Coulomb avec une loi d'écoulement associée ou non associée. Les paramètres élastiques sont définis par le module de Young E et le coefficient de Poisson ν , tandis que les paramètres qui définissent la résistance du matériau sont la cohésion C et l'angle de frottement interne ϕ .

Dans ce qui suit nous calculons le facteur de charge α ($\alpha = P/P_0$) pour une charge qui varie entre 0 et une charge maximale fixe (calcul d'adaptation) par un processus d'optimisation. Où α est la fonction objective à optimiser sous contraintes qui dérivent du critère d'écoulement, ces dernières doivent être vérifiées en des points tests pour notre cas, nous avons considéré 45 points tests, figure (V.3). Le nombre de points tests doit être minimisé étant donné que les contraintes d'optimisation sont proportionnelles au nombre de points tests et que le coût de calcul augmente en conséquence. Par la suite afin de valider nos résultats nous comparons les facteurs de charge obtenus par la théorie d'adaptation à ceux obtenus par la théorie d'analyse limite.

Les propriétés matérielles ainsi que le chargement appliqué sont résumés dans le tableau (V.1).

Matériau	Module Elastique (Kpa)	Coefficient de Poisson	Cohésion (kPa)	Angle de Frottement (°)	Chargement (kPa)
Argile ou Sable	6894.76	0.47	35 70	0 5 10 15 20 25 30	35

Tableau V.1 - Propriété matérielles et chargement

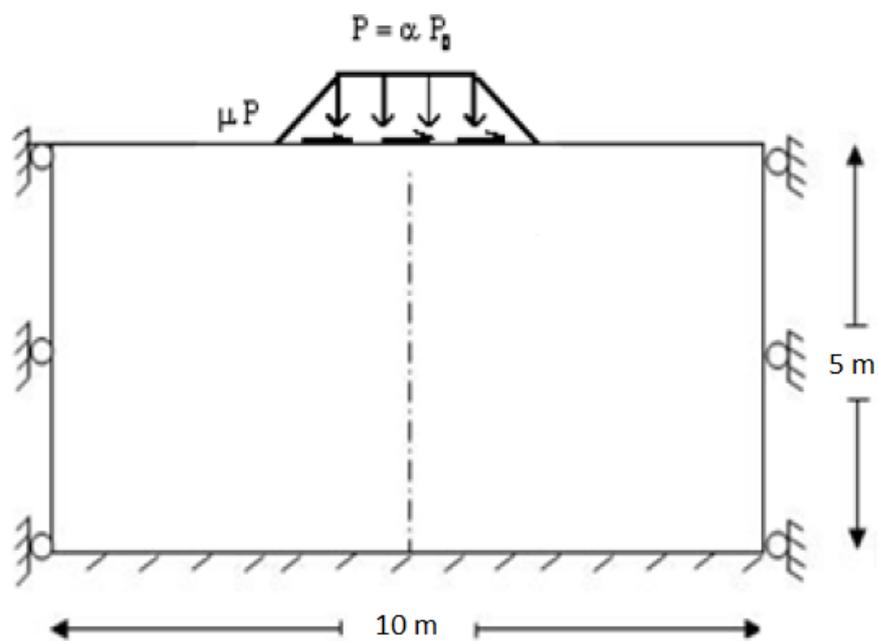


Figure V.1 - Massif de sol sous chargement cyclique

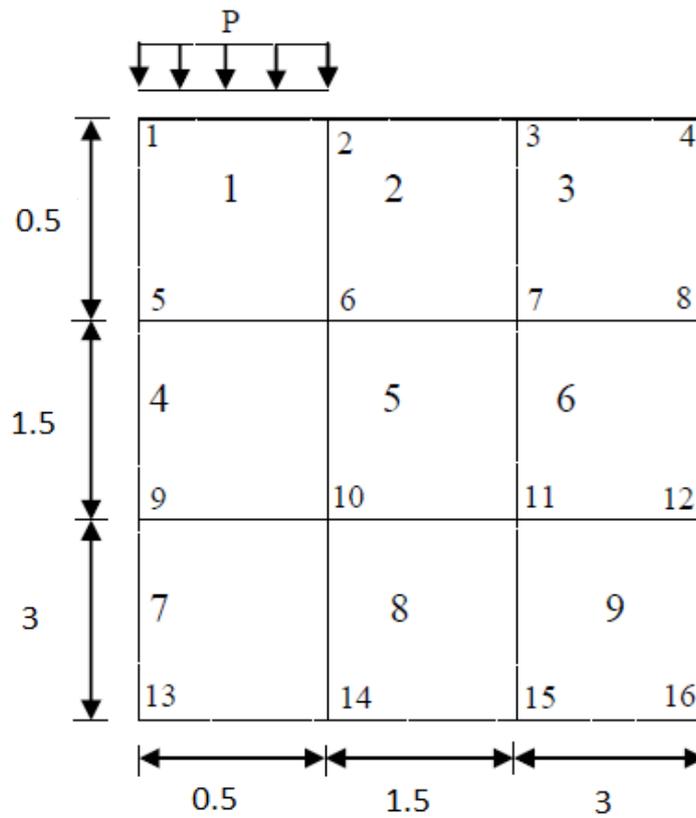


Figure V.2 – Conditions aux limites et chargement

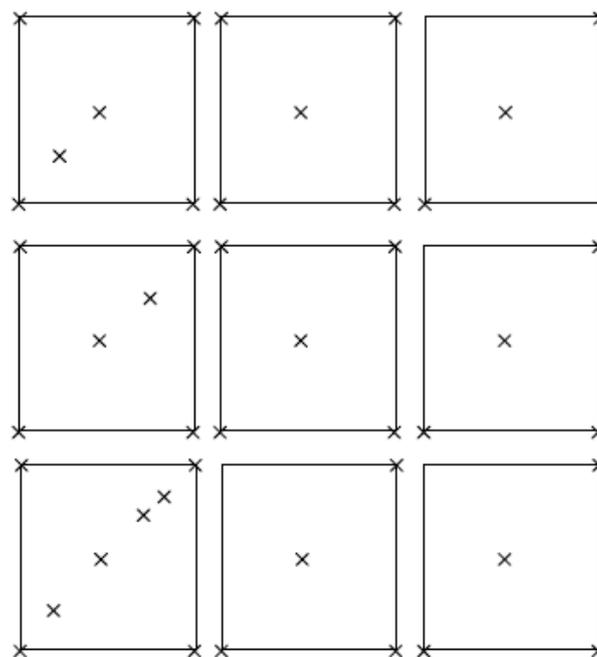


Figure V.3 – Répartition des points test

V.3. INFLUENCE DE LA COHESION SUR LA CHARGE LIMITE

Dans cette étude on garde l'angle de frottement interne ϕ constant et on fait varier la cohésion C . Les résultats obtenus sont montrés sur les figures (V.4.a et b) et figure (V.5).

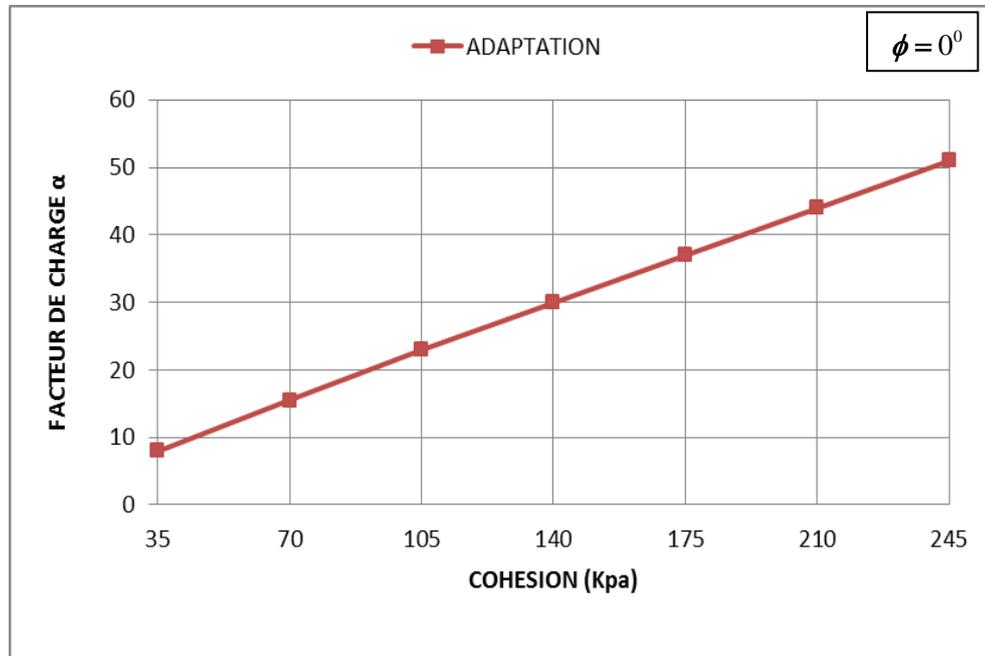


Figure V.4.a - Influence de la cohésion sur le facteur de charge (Adaptation)

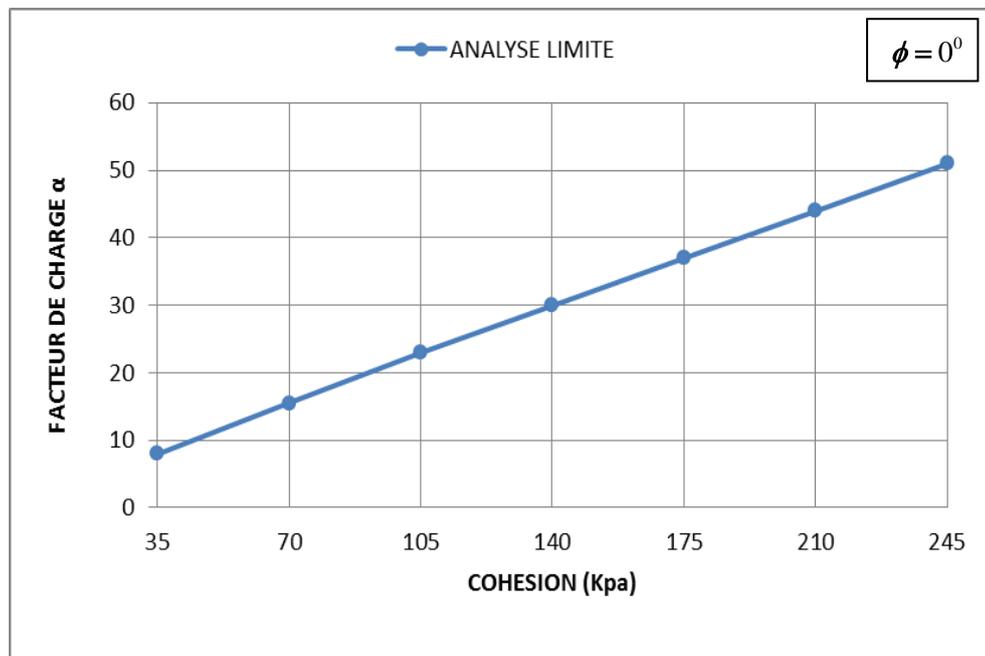


Figure V.4.b - Influence de la cohésion sur le facteur de charge (Analyse limite)

L'analyse des résultats montre que :

- Pour $\phi = 0^\circ$, on trouve pratiquement les mêmes résultats pour le cas d'un chargement monotone et cyclique. On déduit alors que la nature de chargement n'as pas dans ce cas une influence sur le mode de rupture.

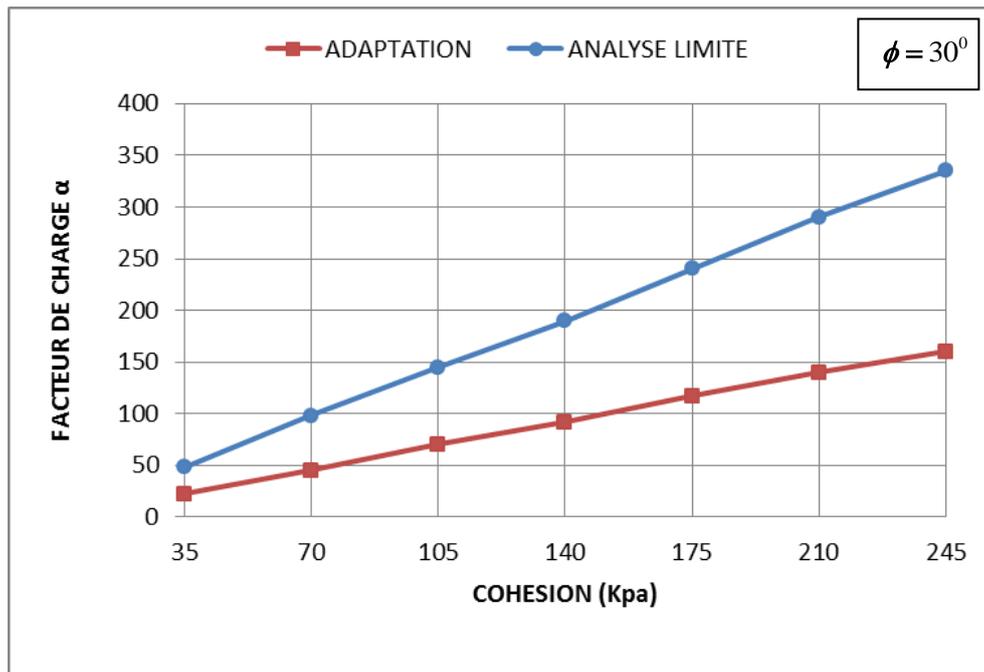


Figure V.5 - Influence de la cohésion sur le facteur de charge (Analyse limite ; adaptation)

L'analyse des résultats montre que :

- Une augmentation significative de la charge limite (facteur de charge) sous chargement proportionnel (Analyse limite) et sous chargement variable (Adaptation) résulte de l'accroissement de la cohésion.
- La relation entre le facteur de charge α_{AD} (Adaptation) et α_{AL} (Analyse limite) avec la cohésion est linéaire.
- La résistance du sol à la rupture est liée non seulement à la valeur maximale des charges statiques susceptibles d'être appliquées, mais aussi à la manière dont elles sont appliquées. Il découle à partir des résultats obtenus qu'un dimensionnement basé sur l'analyse limite ne garantit pas la sécurité des structures si la charges sont variables ou simplement cycliques.

V.4. INFLUENCE DE L'ANGLE DE FROTTEMENT INTERNE SUR LA CHARGE LIMITE

Dans cette étude on garde la cohésion C constante et on fait varier l'angle de frottement interne ϕ de 0 à 30°. Les résultats obtenus sont montrés sur les figures (V.6.a et b).

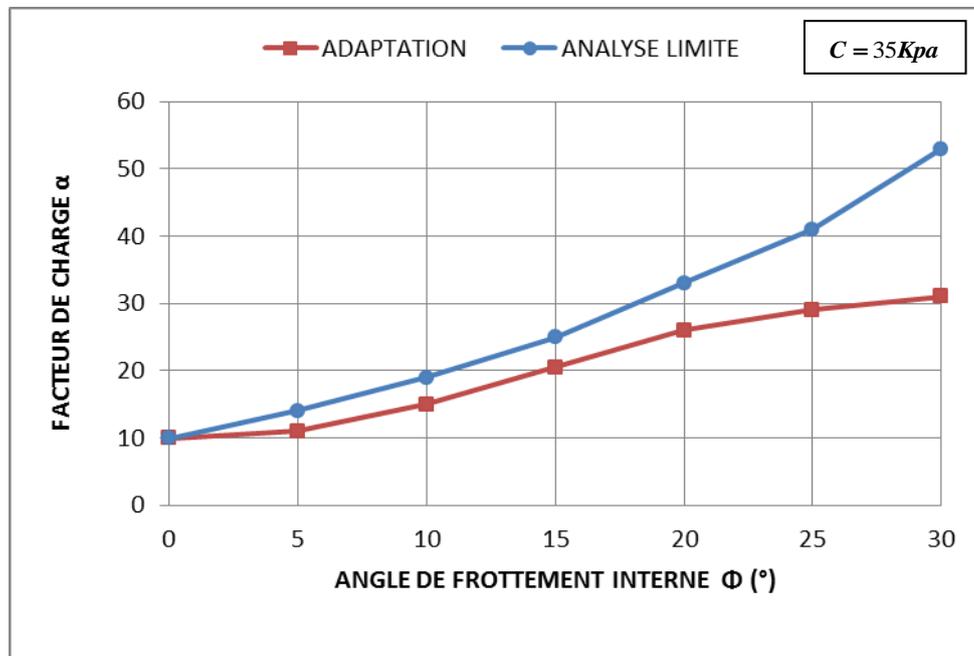


Figure V.6.a - Influence de l'angle de frottement interne sur le facteur de charge ($C = 35Kpa$)

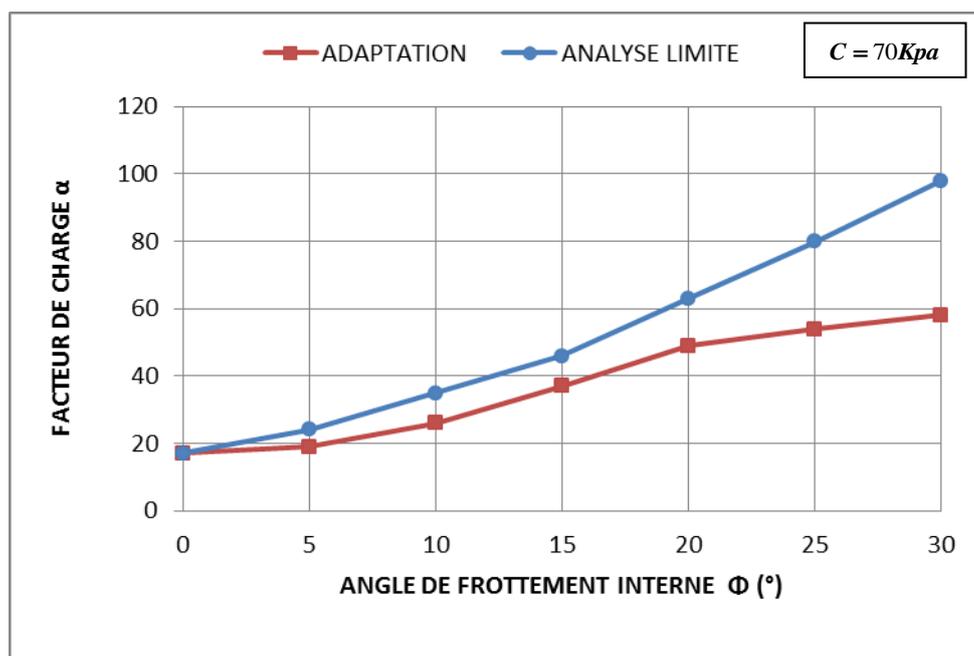


Figure V.6.b - Influence de l'angle de frottement interne sur le facteur de charge ($C = 70Kpa$)

L'analyse des résultats montre que :

- Une augmentation significative de la charge limite (facteur de charge) sous chargement proportionnel (Analyse limite) et sous chargement variable (Adaptation) résulte de l'accroissement de la valeur de l'angle de frottement interne ϕ .
- La relation entre le facteur de charge α_{AD} (Adaptation) et α_{AL} (Analyse limite) avec l'angle de frottement interne n'est pas linéaire.
- On constate qu'il y a un changement de comportement dans l'intervalle ϕ $[21^0, 22.5^0]$. Dans l'intervalle $[0^0, 21.0^0]$, la courbe a le même comportement dans le cas d'analyse limite et d'adaptation, ce qui implique un même mécanisme de rupture déterminant le facteur de charge (α_{AD} et α_{AL}). Pour $\phi > 21^0$, le mécanisme de rupture dans le cas d'adaptation n'est pas le même que celui qui se produit dans l'analyse limite.

V.5. ETUDE DE L'INFLUENCE DES CONTRAINTES DE CISAILLEMENT

Dans cette partie nous allons étudier l'influence du coefficient de frottement μ ($\mu =$ charge axiale / charge tangentielle) sur le facteur de charge d'adaptation et d'analyse limite pour différentes valeurs de l'angle de frottement interne ($\phi = 0^0, 15^0$ et 30^0) avec une cohésion ($C = 35$ et 70Kpa). Les résultats obtenus sont montrés sur les figures (V.7.a et b).

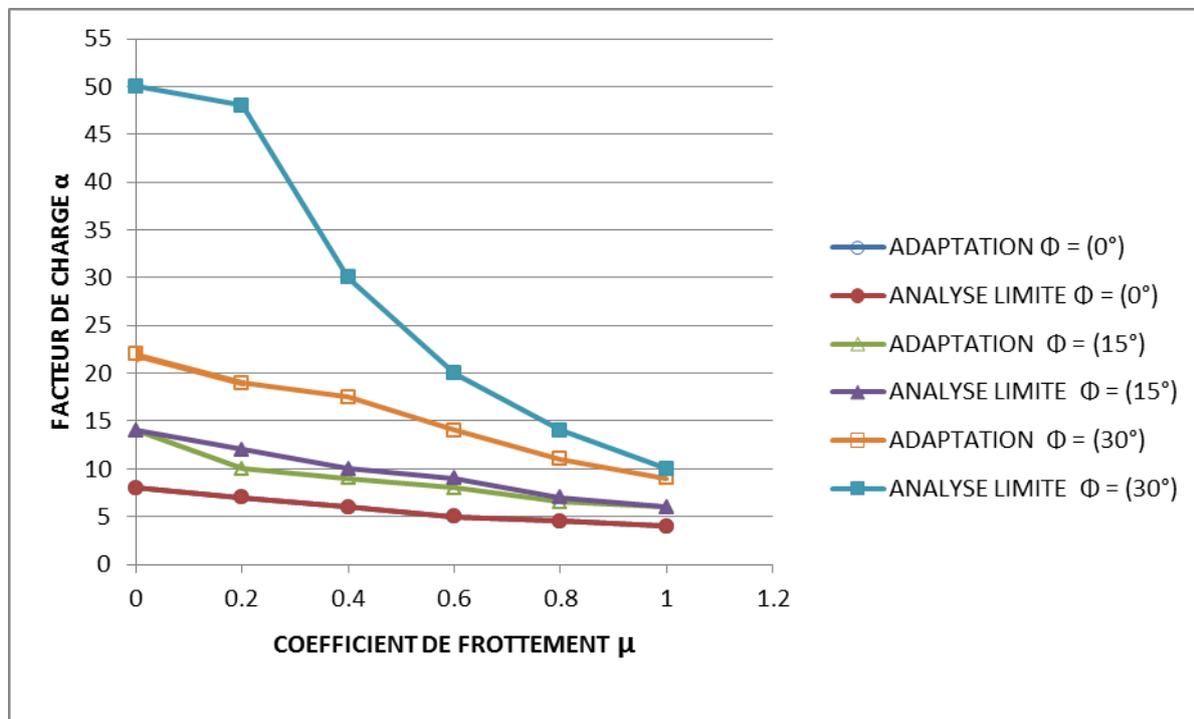


Figure V.7.a - Influence du coefficient de frottement μ sur le facteur de charge ($C = 35\text{Kpa}$, $\phi = 0^0, \phi = 15^0, \phi = 30^0$)

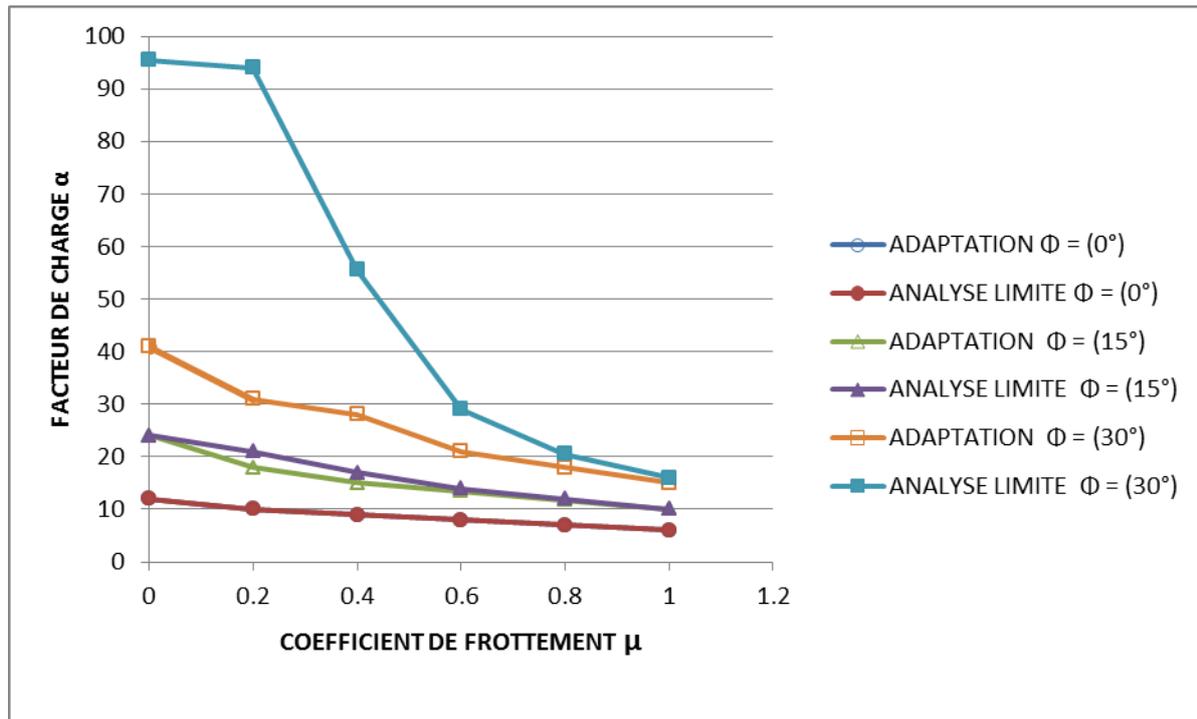


Figure V.7.b - Influence du coefficient de frottement μ sur le facteur de charge
($C = 70\text{Kpa}$, $\phi = 0^\circ$, $\phi = 15^\circ$, $\phi = 30^\circ$)

Les contraintes de cisaillement représenté par le coefficient de frottement μ ont une influence considérable sur la charge limite et la charge d'adaptation comme il est montré sur les figures (V.7.a et b). Le risque de la rupture par fatigue, par accumulation des déformations plastique, et par atteinte de la limite de résistance augmente avec l'augmentation du coefficient de frottement. Pour les petites valeurs de μ la rupture se produit à l'intérieur du terrain (à une certaine profondeur en dessous de la surface). Pour des valeurs plus grandes de μ , la rupture s'initialise en surface, ce qui justifie la décroissance de la charge limite quand le coefficient de frottement μ croit.

V.6. INFLUENCE DE L'ANGLE DE FROTTEMENT CARACTERISTIQUE SUR LA NATURE DES DEFORMATIONS VOLUMIQUES

Dans cette partie nous allons étudier l'influence des déformations volumiques sur le facteur de charge d'adaptation et d'analyse limite pour différentes valeurs de l'angle de frottement interne ($\phi = 0^0$, $\phi_c = 15^0$ et $\phi = 30^0$) en utilisant trois types de critère d'écoulement (loi d'écoulement associée, non associée, et le critère caractéristique).

La déformation plastique d'un matériau obéit au critère de Mohr-Coulomb est toujours accompagnée d'une variation de volume plastique si ($\phi \neq 0$). Cette propriété est appelée dilatance, qui est la principale raison de perte de normalité des matériaux compressibles. En ajustant la valeur de l'angle de frottement interne ϕ , le changement de volume du matériau peut être contrôlé à partir du comportement contractant ($0 < \phi < \phi_c$) jusqu'au comportement dilatant ($\phi > \phi_c$). Pour étudier l'effet des déformations volumétriques sur la charge limite, on considère les trois cas suivants :

i) Un critère d'écoulement de Tresca, utilisé comme une surface potentielle. Il correspond au cas particulier du critère d'écoulement de Mohr- Coulomb quand l'angle de frottement interne ($\phi = 0$). La règle d'écoulement est non associée ;

ii) Le critère caractéristique ($\phi = \phi_c$), où ϕ_c est l'angle de frottement caractéristique, utilisée comme un critère d'écoulement avec une loi d'écoulement associée ;

iii) Un critère d'écoulement de type Mohr-Coulomb avec une loi d'écoulement associée ($\phi > \phi_c$) ou non associée ($\psi > \phi_c$), où ψ est l'angle de dilatance. Dans ce dernier cas la prise en compte d'une loi d'écoulement associée ou non associée n'a aucune influence sur la nature des résultats.

Les résultats obtenus selon ces trois critères sont montrés sur les figures (V.8.a et b) et (V.9.a et b).

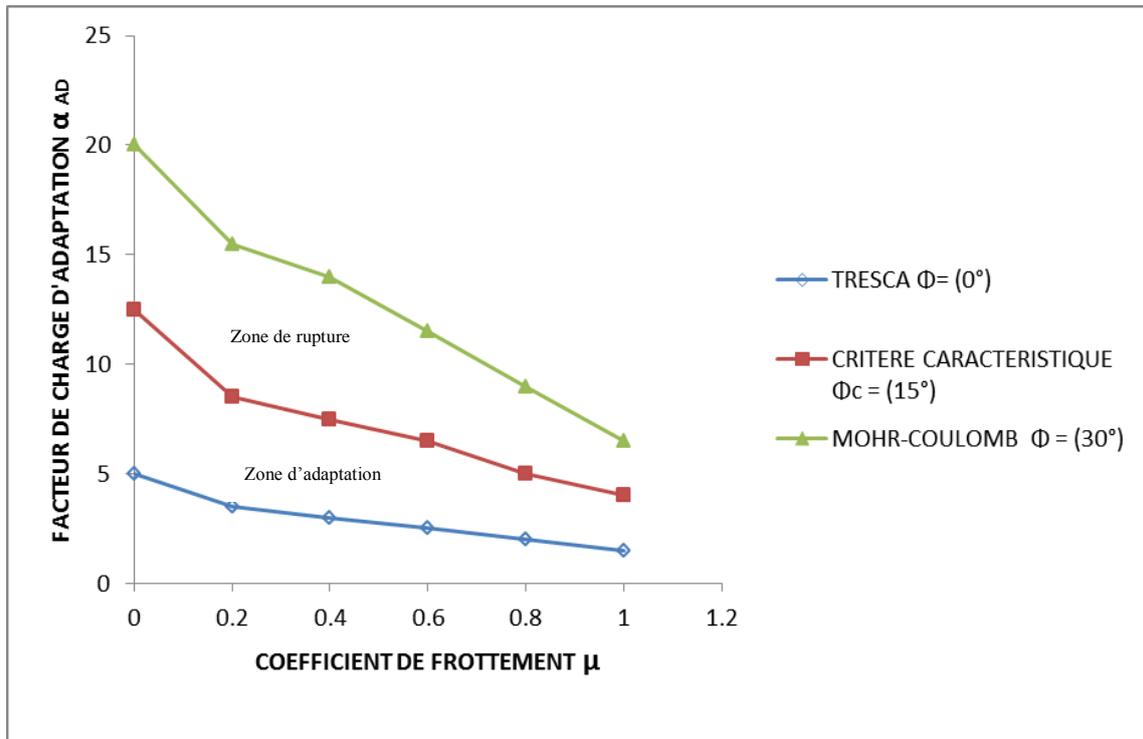


Figure V.8.a – détermination du facteur de charge d’adaptation, ($C = 35Kpa$) pour : i) sol incompressible, ii) sol contractant, iii) sol dilatant

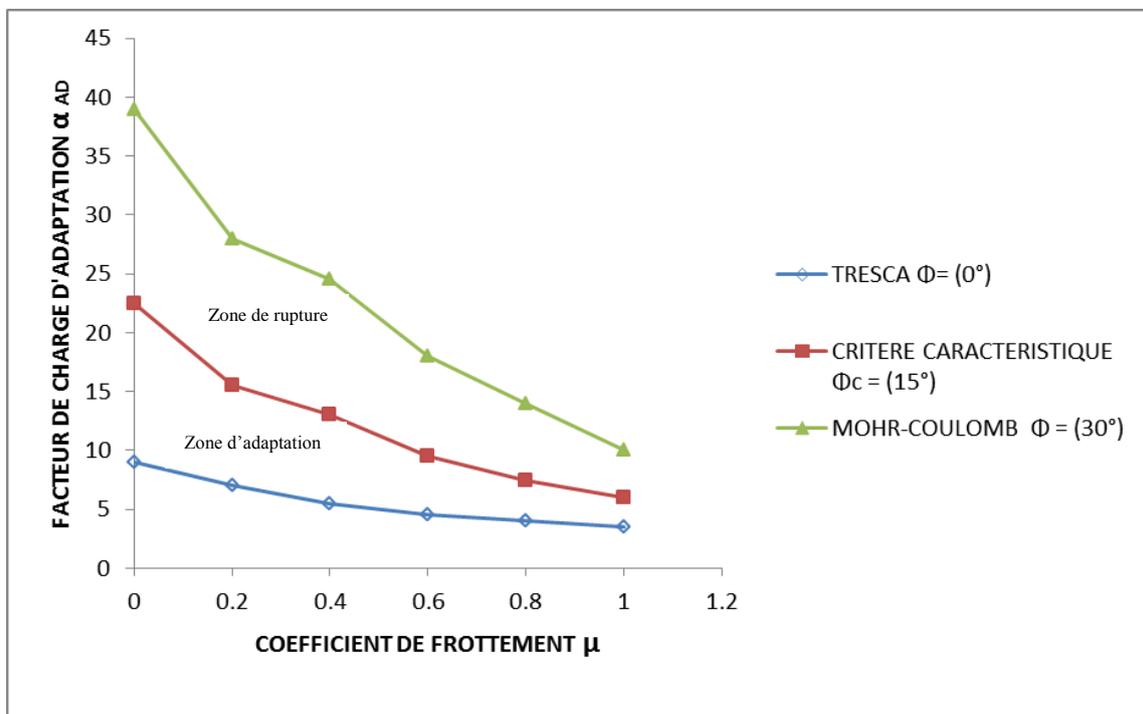


Figure V.8.b – détermination du facteur de charge d’adaptation, ($C = 70Kpa$) pour : i) sol incompressible, ii) sol contractant, iii) sol dilatant

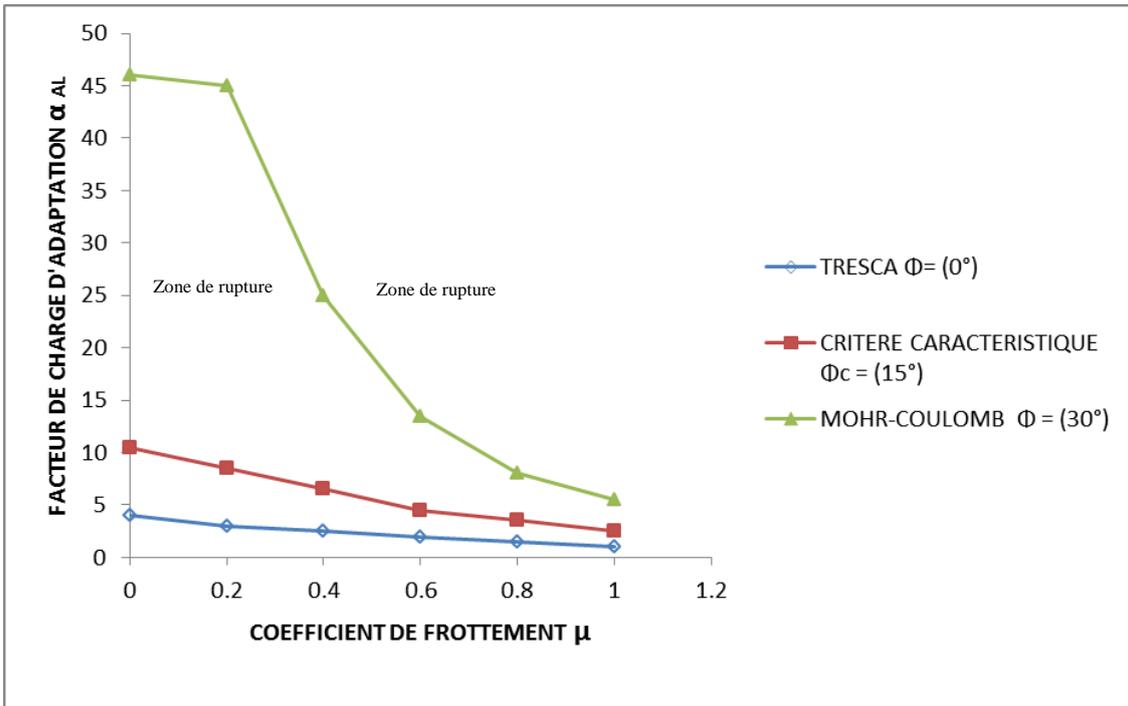


Figure V.9.a – détermination du facteur de charge d’analyse limite, ($C = 35Kpa$) pour : i) sol incompressible, ii) sol contractant, iii) sol dilatant

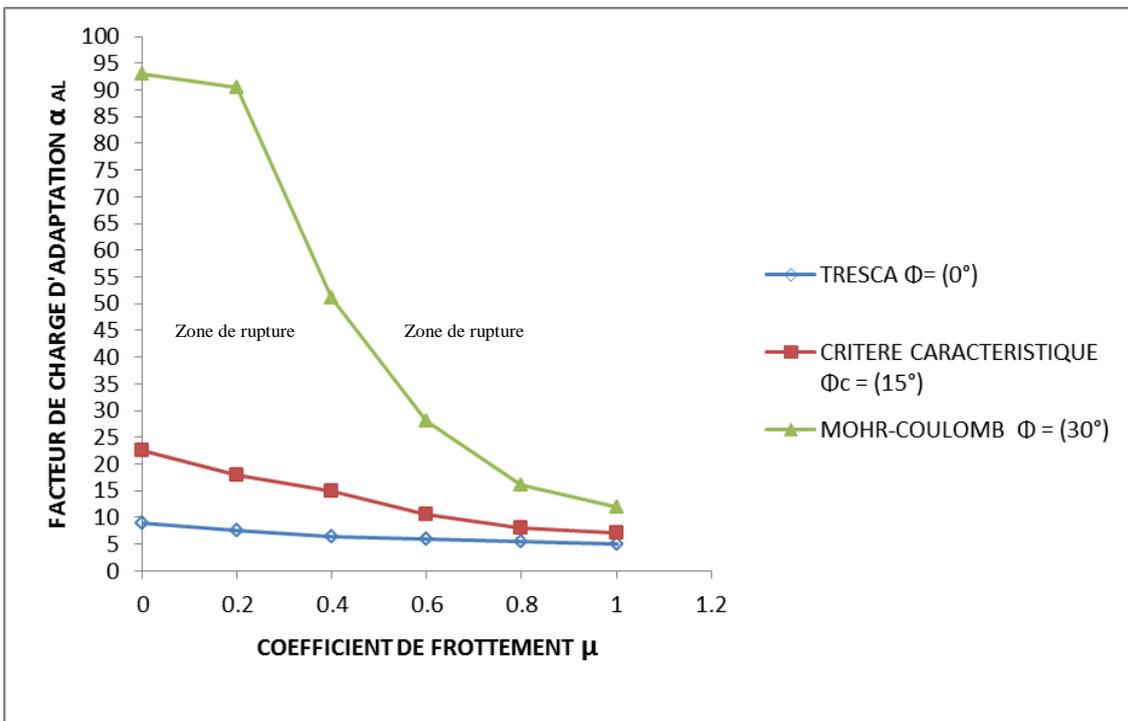


Figure V.9.b – détermination du facteur de charge d’analyse limite, ($C = 70Kpa$) pour : i) sol incompressible, ii) sol contractant, iii) sol dilatant

L'analyse des résultats des figures montre que :

- i)* Pour ($\phi = 0$), le sol est plastiquement incompressible. L'utilisation de la surface potentielle qui est insensible aux changements de volume sous-estime le facteur de charge d'adaptation et d'analyse limite.
- ii)* Pour ($0 < \phi < \phi_c$), le sol présente des déformations volumiques plastiques positives, son comportement est toujours contractant, les cycles de chargement dans le domaine contractant entraîne une densification du matériau avec augmentation progressive de la densité. Ceci est accompagné par une augmentation de la résistance du matériau et donc par une augmentation du facteur de charge d'adaptation et analyse limite.
- iii)* Pour ($\phi > \phi_c$) où ($\psi > \phi_c$), le sol présente des déformations volumiques plastiques négatives, son comportement est toujours dilatant. L'utilisation d'une surface potentielle de type Mohr-Coulomb ne garantit pas la sécurité. Elle prédit l'adaptation dans le domaine dilatant alors que l'expérience montre clairement que l'effondrement se produit. Cela découle du fait que la surface potentielle ne peut pas capturer correctement les variations de volume.

Le type de variation de volume présenté par l'élément de sol est d'une grande importance en termes de stabilité. En dessous de la surface caractéristique ($\phi < \phi_c$), les déformations volumiques plastiques sont positives, conduisent à l'adaptation du matériau. Au-delà de la surface caractéristique ($\phi > \phi_c$), les déformations volumiques plastiques sont négatives qui conduisent à la rupture. L'état caractéristique marque une frontière entre l'adaptation et la rupture incrémentale des matériaux.

***CONCLUSION
GENERALE***

CONCLUSION GENERALE

Les théorèmes de l'adaptation, statique et cinématique, s'appliquent pour le cas des matériaux standards dont la loi d'écoulement est associée et dérive de la règle de normalité. La démonstration de ces théorèmes se base principalement sur cette règle de normalité, conséquence de la validité du postulat de stabilité de Drucker.

Les sols sont des matériaux non standards, dont la règle d'écoulement est non associée et le postulat de stabilité de Drucker n'est pas valide.

L'approche souvent utilisée pour l'application du théorème statique d'adaptation pour le cas des sols est l'introduction d'une surface potentielle, qui se trouve entièrement à l'intérieur de la surface de charge, et qui vérifie la règle de normalité.

La surface potentielle, appelée aussi G-surface, est ensuite utilisée comme un critère pour la détermination de la charge limite d'adaptation. Cette approche présente des inconvénients majeurs, à sa voir :

- Sa détermination est basée sur des considérations théoriques ;
- La stabilité des sols est gouvernée par la nature des déformations volumiques engendrées (comportement contractant ou dilatant). La surface potentielle vérifie la règle de normalité mais elle est incapable de capturer ces variations de volumes, nécessaire pour prédire l'adaptation ou la non adaptation du sol. Un chargement cyclique prolongé dans le domaine de contractance conduit à la densification du sol et à l'adaptation. Par contre un chargement cyclique prolongé dans le domaine de dilatance conduit à la rupture ;
- Des instabilités peuvent se produire à l'intérieur de la surface potentielle.

Dans notre étude on a présenté une alternative, basée sur l'utilisation d'une surface appelée surface caractéristique. Elle comble les carences de l'approche classique (G-surface) et conduit à des résultats en accord avec la réalité expérimentale.

La surface caractéristique représente le meilleur critère pour l'étude de l'adaptation des sols, en effet :

- elle est basée sur le concept de l'état caractéristique déterminé à partir des constatations expérimentales. Donc plus réaliste et plus fiable que l'approche basée sur l'existence d'une fonction potentielle à l'intérieure de la surface de charge introduite juste pour la validation de la règle de normalité ;

- la surface caractéristique joue un double rôle. En effet elle est utilisée à la fois comme un critère de rupture et aussi comme un critère en déformation. En conséquence elle délimite le domaine des contraintes admissibles qui est aussi le domaine des déformations volumiques de compression ;
- elle capture la condition d'adaptation (respectivement de non adaptation) quand le comportement du sol est contractant (respectivement dilatant) ;
- la surface caractéristique marque une limite entre le comportement contractant et le comportement dilatant du matériau. A cette limite le matériau devient plastiquement incompressible ce qui entraîne la validation de la règle de normalité. En conséquence le postulat de stabilité de Drucker s'applique, indispensable pour la démonstration du théorème et pour l'unicité de la solution qui se traduit par un comportement stable du matériau ;
- la surface caractéristique est associée aux petites déformations dans le cas des sables denses. Ce qui garantit la validation de l'hypothèse des petites déformations et que la déformation plastique reste bornée.

Nous avons utilisé des éléments finis statiquement admissibles pour le calcul de la réponse purement élastique ainsi que pour la construction du champ de contrainte résiduelle. L'utilisation des fonctions de contrainte d'Airy assurent automatiquement l'équilibre et l'utilisation des polynômes d'Hermite assurent la continuité inter-éléments ce qui conduit à une meilleure estimation de la charge limite d'adaptation.

La procédure numérique est basée sur le couplage de la méthode des éléments finis avec la programmation mathématique non-linéaire. L'utilisation de la méthode des pénalités seule présente des difficultés numériques et l'utilisation de la méthode de Lagrangien seule présente des problèmes de convergence. Pour combler cette carence on a utilisé la méthode de Lagrangien augmenté qui combine l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange et des coefficients de pénalité.

L'approche développée est appliquée à l'étude de l'adaptation des sols sous chargements cycliques. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus par la théorie d'analyse limite. La résolution numérique d'un problème d'adaptation nécessite :

- la solution du problème du corps de référence purement élastique correspondant au même chargement et aux mêmes conditions aux limites que le problème réel posé ;
- la construction d'un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps ;
- la détermination du multiplicateur de charge à l'adaptation par un processus d'optimisation.

L'approche proposée présente plusieurs points positifs :

- simple dans son utilisation ;
- permettant des calculs peu coûteux ;
- pouvant convenir à toutes sortes de géométries de la structure et à n'importe quel type de chargement (arbitraire ou simplement cyclique) ;
- traitant les matériaux non linéaire couramment utilisés par l'ingénieur ;
- facilité d'analyser les résultats puisqu'elle présente un paramètre de sécurité unique : le multiplicateur des charges appliquées.

Cependant pour les perspectives de recherches nous proposons :

- Application de la méthode de l'adaptation pour le cas des sols saturés ;
- Adaptation des matériaux à matrice compressible (milieu poreux).

REFERENCES

REFERENCES

- [1] **BAHDA, F.**, "Etude du Comportement du Sable à L'appareil Triaxial ; Expérience et Modélisation", Thèse de doctorat, Ecole National Des Ponts et Chaussées - E.N.P.C (1997).
- [2] **CHEN, W.F.**, "Limit Analysis and Soil Plasticity", Elsevier, 1975.
- [3] **DE JOSSELINE DE JONG, G.**, "Lower bound collapse theorem and lack of normality of strain rate to yield surface for soils ".proc .I.U.T.A.M. Symp. On Rheology and soil Mechanics, Grenoble, 1964, Springer, Berlin, (1966).
- [4] **DRUCKER, D.C.**, "On the Postulate of Stability of Materials in the Mechanics of Continua", J. Mechanic, 3, pp.235-249, 1964.
- [5] **FOUCAULT, A.**, "Modélisation du comportement cyclique des ouvrages en terre intégrant des techniques de régularisation", Thèse de doctorat, Ecole National Des Ponts et Chaussées - E.N.P.C (1981).
- [6] **GALLAGHER, R. H. & DHALLA, A. K.**, "Direct Flexibility Finite Element Elastoplastic Analysis", Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A, (1975).
- [7] **GIESE, H.**, "On The application of shakedown theory in soil Mechanics", Institut fur Mechanik, Ruhr-Universitat Bochum, 1988.
- [8] **HABIB, P. & LUONG, M. P.**, "Sols pulvérulents sous chargement cycliques", Séminaire Matériaux et Structures Sous Chargement Cycliques, 28-29 septembre 1978, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau.
- [9] **HAMADOUCHE, M. A .,** "Analyse dynamique des structures inélastiques par la théorie de l'adaptation", Thèse de doctorat, Université de Lille (1997).
- [10] **HAMADOUCHE, & BENSEDDIQ.N, 2013** "Characteristic state concept and shakedown of granular materials. International Journal of analytical and Numerical Methods in Geomechanics (soumis).
- [11] **HICHER, P.Y. &SHAO, J.F.**, "Elastoplasticité des sols et des roches", modèles de Comportement des sols et des roches 1, Paris, Hermès science publications, 2002.

- [12] **HILL, R** "The mathematical theory of plasticity", Oxford eds., (1950).
- [13] **IBSEN, L.B & Lade, P.V.**, "The Role of Characteristic Line in Static Soil Behavior", Geotechnical Engineering Group, AALBORG University Denmark, Soil Mechanics Paper N°22, (1998).
- [14] **IBSEN, L.B & Lade, P.V.**, "A study of the Phase Transformation and the Characteristic lines of sand Behavior", Geotechnical Engineering Group, AALBORG University Denmark, Soil Mechanics Paper N°12, October (1997).
- [15] **JAKOBSEN, K.P., PRAATRUP, U. & IBSEN, L.B.** "The influence of stress path on the characteristic stress state", Geotechnical Engineering Group, AALBORG University Denmark, Soil Mechanics Paper N°32, September (1999).
- [16] **KOITER, W. T.**, "A new general theorem on shakedown of elastic-plastic structures", Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wet. B59 (1956), 24 - 34.
- [17] **LUONG, M. P.**, "Phénomènes cycliques dans les sols pulvérulents", Revue Française de Géotechnique, Vol. 10, pp. 39-53, (1980).
- [18] **LUONG, M. P.**, " Etat caractéristique du sol", C.R. Ac. Sc., Paris, t. 287, série B, 305 (1978).
- [19] **LUONG, M. P.**, "Comportements cycliques des sols pulvérulents", C.R. Ac. Sc., Paris, t. 287, série B, 313 (1978).
- [20] **MAIER ,G.**, "Shakedown theory in perfect elastoplasticity with associated and non-associated flow-laws", *Mecanica*, 6, 250-260, (1969).
- [21] **MELAN, E.**, "Theorie statisch unbestimmter Tragwerke aus ideal-plastischem Baustoff", Sitzungsbericht der Akademie der Wissenschaften (Wien) Abt. IIA, 145, 195-218, (1936).
- [22] **MELAN, E.**, "Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums", *Ing. Arch.*, 8, 116-126, (1938).
- [23] **MORELLE, P. & NGUYEN DANG HUNG**, "Etude numérique de l'adaptation plastique des plaques et coques de révolution par les éléments finis d'équilibre", *J. Méc. Théor. Appl.*, 2, 567-599, (1983).

- [24] **PIERRE, D. A. & LOWE, M. J.**, "Mathematical programming via augmented Lagrangians", London, Addison-Wesley, (1975).
- [25] **ROSCOE, J. & BURLAND, B.**, "Stress-strain behavior of wet clay engineering plasticity", Ed. Heyman J. et Leckie F. A., Cambridge, 1968.
- [26] **SALENCON, J.**, " De l'élastoplasticité au calcul à la rupture", Palaiseau, École Polytechnique, France, 2002.
- [27] **SALENCON, J.**, " Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols ",Eyrolles, Paris,1974.
- [28] **SAÏTTA, A.**, "Modélisation Elastoplastique du comportement mécanique des sols. application à la liquéfaction des sables et à la sollicitation d'expansion de cavité", Thèse de doctorat, Ecole National Des Ponts et Chaussées – E.N.P.C (1994).
- [29] **SCHOFIELD, A. N. & WROTH, C. P.**, "Critical state soil mechanics. Mac Graw Hill, G. (1968).
- [30] **SIDANER, J. F.**, "Comportement cyclique et transitoire des milieux pulvérulents", Thèse de doctorat, Ecole National Des Ponts et Chaussées - E.N.P.C (1981).
- [31] **WEICHERT, D. & GROSS-WEEGE, J.**, "The numerical assessment of elastic-plastic sheets under variable mechanical and thermal loads using a simplified tow surface yield condition", Int. J. Mech. Sci., 30,757-767,(1988).
- [32] **Zienkiewicz, O. C., Chan, A H C, Pastor, M., Scherfler, B A & Shiomi T**
"Computational Geomechanics ", JON WILEY & SONS. Chichester. New York. Weinheim. Brisbane. Singapore. Toronto.

ANNEXES

ANNEXE A

L'approximation de la fonction de contrainte d'Airy $\Phi(x, y)$ est de la forme :

$$\Phi(S, t) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[N_{0i}(S) N_{0j}(t) \Phi_{ij} + N_{1i}(S) N_{0j}(t) \Phi_{,xij} + N_{0i}(S) N_{1j}(t) \Phi_{,yij} + N_{1i}(S) N_{1j}(t) \Phi_{,xyij} \right] \quad (\text{A.1})$$

avec

$$\begin{aligned} N_{01}(S) &= (1 - 3S^2 + 2S^3) & N_{01}(t) &= (1 - 3t^2 + 2t^3) \\ N_{02}(S) &= (3S^2 - 2S^3) & N_{02}(t) &= (3t^2 - 2t^3) \\ N_{03}(S) &= a(S - 2S^2 + S^3) & N_{03}(t) &= a(t - 2t^2 + t^3) \\ N_{04}(S) &= a(-S^2 + S^3) & N_{04}(t) &= a(-t^2 + t^3) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

où $S = \frac{x}{a}$ et $t = \frac{y}{b}$. Les N_i représentent les fonctions d'interpolations d'Hermite.

Détermination des équations de contraintes

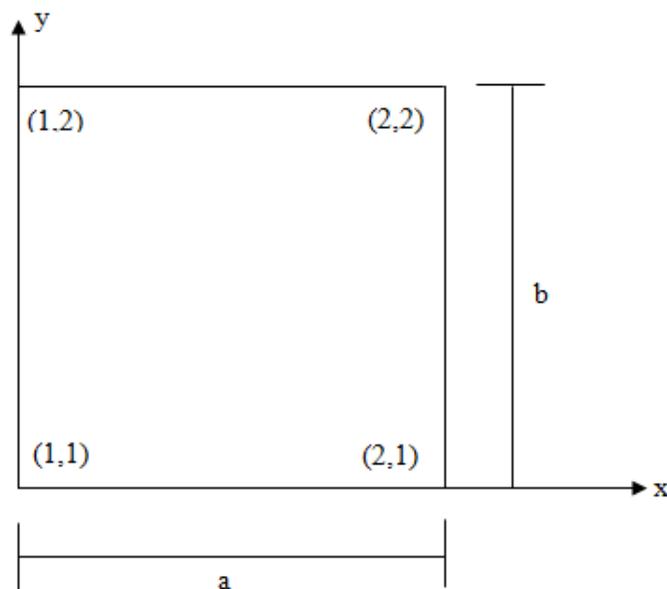


Figure A.1

Côté 11 – 21:

$$\int_0^a \sigma_y(x) dx = -\Phi_{,x}^{11} + \Phi_{,x}^{21}$$

$$\int_0^a \int_0^x \sigma_y(x) dx = -\Phi^{11} - a\Phi_{,x}^{11} + \Phi^{21} \quad (\text{A.3})$$

$$\int_0^a \tau_{xy}(x) dx = \Phi_{,y}^{11} - \Phi_{,y}^{21}$$

Côté 21 – 22:

$$\int_0^b \sigma_x(y) dy = -\Phi_{,y}^{21} + \Phi_{,y}^{22}$$

$$\int_0^b \int_0^y \sigma_x(y) dy = -\Phi^{21} - b\Phi_{,y}^{21} + \Phi^{22} \quad (\text{A.4})$$

$$\int_0^b \tau_{xy}(y) dy = \Phi_{,x}^{21} - \Phi_{,x}^{22}$$

La répétition de cette opération pour l'ensemble des côtés de l'élément, nous permet ainsi de déterminer toutes les équations de contraintes.

Dans ce qui suit, on donne les expressions de la fonction d'Airy et des contraintes

σ_x , σ_y et τ_{xy}

$$\begin{aligned}
\Phi &= (1 - 3S^2 - 3t^2 + 2S^3 + 2t^3 + 9S^2t^2 - 6S^3t^2 - 6S^2t^3 + 4S^3t^3)\Phi^{11} \\
&+ (S - 2S^2 + S^3 - 3St^2 + 2St^3 + 6S^2t^2 - 4S^2t^3 - 3S^3t^2 + 2S^3t^3)a\Phi_{,x}^{11} \\
&+ (t - 2t^2 + t^3 - 3S^2t + 2S^3t + 6S^2t^2 - 3S^2t^3 - 4S^3t^2 + 2S^3t^3)b\Phi_{,y}^{11} \\
&+ (St - 2St^2 - 2S^2t + St^3 + S^3t + 4S^2t^2 - 2S^2t^3 - 2S^3t^2 + S^3t^3)ab\Phi_{,xy}^{11} \\
\\
&+ (3S^2 - 2S^3 - 9S^2t^2 + 6S^2t^3 + 6S^3t^2 - 4S^3t^3)\Phi^{21} \\
&+ (-S^2 + S^3 + 3S^2t^2 - 2S^2t^3 - 3S^3t^2 + 2S^3t^3)a\Phi_{,x}^{21} \\
&+ (3S^2t - 2S^3t - 6S^2t^2 + 3S^2t^3 + 4S^3t^2 - 2S^3t^3)b\Phi_{,y}^{21} \\
&+ (-S^2t + S^3t + 2S^2t^2 - S^2t^3 - 2S^3t^2 + S^3t^3)ab\Phi_{,xy}^{21} \\
\\
&+ (9S^2t^2 - 6S^2t^3 - 6S^3t^2 + 4S^3t^3)\Phi^{22} \\
&+ (-3S^2t^2 + 2S^2t^3 + 3S^3t^2 - 2S^3t^3)a\Phi_{,x}^{22} \\
&+ (-3S^2t^2 + 3S^2t^3 + 2S^3t^2 - 2S^3t^3)b\Phi_{,y}^{22} \\
&+ (S^2t^2 - S^2t^3 - S^3t^2 + S^3t^3)ab\Phi_{,xy}^{22} \\
\\
&+ (3t^2 - 2t^3 - 9S^2t^2 + 6S^2t^3 + 6S^3t^2 - 4S^3t^3)\Phi^{12} \\
&+ (3St^2 - 2St^3 - 6S^2t^2 + 4S^2t^3 + 3S^3t^2 - 2S^3t^3)a\Phi_{,x}^{12} \\
&+ (-t^2 + t^3 + 3S^2t^2 - 3S^2t^3 - 2S^3t^2 + 2S^3t^3)b\Phi_{,y}^{12} \\
&+ (-St^2 + St^3 + 2S^2t^2 - 2S^2t^3 - S^3t^2 + S^3t^3)ab\Phi_{,xy}^{12}
\end{aligned}$$

(A.5)

$$\begin{aligned}
\sigma_x = \Phi_{,yy} = & \frac{1}{b^2} \left(-6 + 12t + 18S^2 - 36S^2t - 12S^3 + 24S^3t \right) \Phi^{11} \\
& + \left(-4 + 6t + 12S^2 - 8S^3 - 18S^2t + 12S^3t \right) a \Phi_{,x}^{11} \\
& + \left(-6S + 12St + 12S^2 - 6S^3 - 24S^2t + 12S^3t \right) b \Phi_{,y}^{11} \\
& + \left(-4S + 6St + 8S^2 - 4S^3 - 12S^2t + 6S^3t \right) ab \Phi_{,xy}^{11} \\
\\
& + \left(-6 + 12t - 18S^2 + 12S^3 + 36S^2t - 24S^3t \right) \Phi^{21} \\
& + \left(-2 + 6t + 6S^2 - 4S^3 - 18S^2t + 12S^3t \right) a \Phi_{,x}^{21} \\
& + \left(6S - 12St - 12S^2 + 6S^3 + 24S^2t - 12S^3t \right) b \Phi_{,y}^{21} \\
& + \left(-2S + 6St + 4S^2 - 2S^3 - 12S^2t + 6S^3t \right) ab \Phi_{,xy}^{21} \\
\\
& + \left(18S^2 - 12S^3 - 36S^2t + 24S^3t \right) \Phi^{22} \\
& + \left(-6S^2 + 4S^3 + 18S^2t - 12S^3t \right) a \Phi_{,x}^{22} \\
& + \left(-6S^2 + 6S^3 + 12S^2t - 12S^3t \right) b \Phi_{,y}^{22} \\
& + \left(2S^2 - 2S^3 - 6S^2t + 6S^3t \right) ab \Phi_{,xy}^{22} \\
\\
& + \left(-18S^2 + 12S^3 + 36S^2t - 24S^3t \right) \Phi^{12} \\
& + \left(-12S^2 + 8S^3 + 18S^2t - 12S^3t \right) a \Phi_{,x}^{12} \\
& + \left(6S^2 - 6S^3 - 12S^2t + 12S^3t \right) b \Phi_{,y}^{12} \\
& + \left(4S^2 - 4S^3 - 6S^2t + 6S^3t \right) ab \Phi_{,xy}^{12}
\end{aligned}$$

(A.6)

$$\begin{aligned}
\sigma_y = \Phi_{,xx} = & \frac{1}{a^2} \left(-6 + 12S + 18t^2 - 36St^2 - 12t^3 + 24St^3 \right) \Phi^{11} \\
& + \left(-4 + 6S + 12t^2 - 8t^3 - 18St^2 + 12St^3 \right) a \Phi_{,x}^{11} \\
& + \left(-6t + 12St + 12t^2 - 6t^3 - 24St^2 + 12St^3 \right) b \Phi_{,y}^{11} \\
& + \left(-4t + 6St + 8t^2 - 4t^3 - 12St^2 + 6St^3 \right) ab \Phi_{,xy}^{11} \\
\\
& + \left(6 + 12S + 18t^2 + 12t^3 + 36St^2 - 24St^3 \right) \Phi^{21} \\
& + \left(-2 + 6S + 6t^2 - 4t^3 - 18St^2 + 12St^3 \right) a \Phi_{,x}^{21} \\
& + \left(6t - 12St - 12t^2 + 6t^3 + 24St^2 - 12St^3 \right) b \Phi_{,y}^{21} \\
& + \left(-2t + 6St + 4t^2 - 2t^3 - 12St^2 + 6St^3 \right) ab \Phi_{,xy}^{21} \\
\\
& + \left(18t^2 - 12S^3 - 36St^2 + 24St^3 \right) \Phi^{22} \\
& + \left(-6t^2 + 4t^3 + 18St^2 - 12St^3 \right) a \Phi_{,x}^{22} \\
& + \left(-6t^2 + 6t^3 + 12St^2 - 12St^3 \right) b \Phi_{,y}^{22} \\
& + \left(2t^2 - 2t^3 - 6St^2 + 6St^3 \right) ab \Phi_{,xy}^{22} \\
\\
& + \left(-18t^2 + 12t^3 + 36St^2 - 24St^3 \right) \Phi^{12} \\
& + \left(-12t^2 + 8t^3 + 18St^2 - 12St^3 \right) a \Phi_{,x}^{12} \\
& + \left(6t^2 - 6t^3 - 12St^2 + 12St^3 \right) b \Phi_{,y}^{12} \\
& + \left(4t^2 - 4t^3 - 6St^2 + 6St^3 \right) ab \Phi_{,xy}^{12}
\end{aligned}$$

(A.7)

$$\begin{aligned}
\tau_{.xy} = -\Phi_{.xy} = & -\frac{1}{ab} \left(36St - 36S^2t - 36St^2 + 36S^2t^2 \right) \Phi^{11} \\
& + \left(-6t + 6t^2 + 24St - 24St^2 - 18S^2t + 18S^2t^2 \right) a\Phi_{.x}^{11} \\
& + \left(-6S + 6S^2 + 24St - 18St^3 - 24S^2t + 18S^2t^2 \right) b\Phi_{.y}^{11} \\
& + \left(1 - 4t - 4S + 3t^2 + 3S^2 + 16St - 12St^2 - 12S^2t + 9S^2t^2 \right) ab\Phi_{.xy}^{11} \\
& + \left(-36St + 36St^2 + 36St^2 - 36S^2t^2 \right) \Phi^{21} \\
& + \left(12St - 12St^2 - 18S^2t + 18S^2t^2 \right) a\Phi_{.x}^{21} \\
& + \left(6S - 24St - 6S^2 + 18St^2 + 24S^2t - 18S^2t^2 \right) b\Phi_{.y}^{21} \\
& + \left(-2S + 8St + 3S^2 - 6St^2 - 12S^2t + 9S^2t^2 \right) ab\Phi_{.xy}^{21} \\
& + \left(36St - 36St^2 - 36St^2 + 36S^2t^2 \right) \Phi^{22} \\
& + \left(-12St - 12St^2 + 18S^2t - 18S^2t^2 \right) a\Phi_{.x}^{22} \\
& + \left(-12St + 18St^2 + 12S^2t - 18S^2t^2 \right) b\Phi_{.y}^{22} \\
& + \left(4St - 6St^2 - 6S^2t + 9S^2t^2 \right) ab\Phi_{.xy}^{22} \\
& + \left(-36St + 36St^2 + 36S^2t - 36S^2t^2 \right) \Phi^{12} \\
& + \left(6t - 6t^2 - 24St + 24St^2 + 18S^2t - 18S^2t^2 \right) a\Phi_{.x}^{12} \\
& + \left(12St - 18St^2 - 12S^2t + 18S^2t^2 \right) b\Phi_{.y}^{12} \\
& + \left(-2t + 3t^2 + 8St - 12St^2 - 6S^2t + 9S^2t^2 \right) ab\Phi_{.xy}^{12}
\end{aligned}$$

(A.8)

ANNEXE B

1. Présentation du programme de calcul

Le programme est un logiciel de calcul des massifs de sols sous sollicitations statiques et dynamiques écrit avec le langage fortrant 90. Ce programme est composé en trois parties, (**ELESP**) utilisé pour le calcul de la réponse purement élastique, (**STRASSE**) utilisé pour le calcul de la réponse plastique, (**LPNLP**) est un programme d'optimisation.

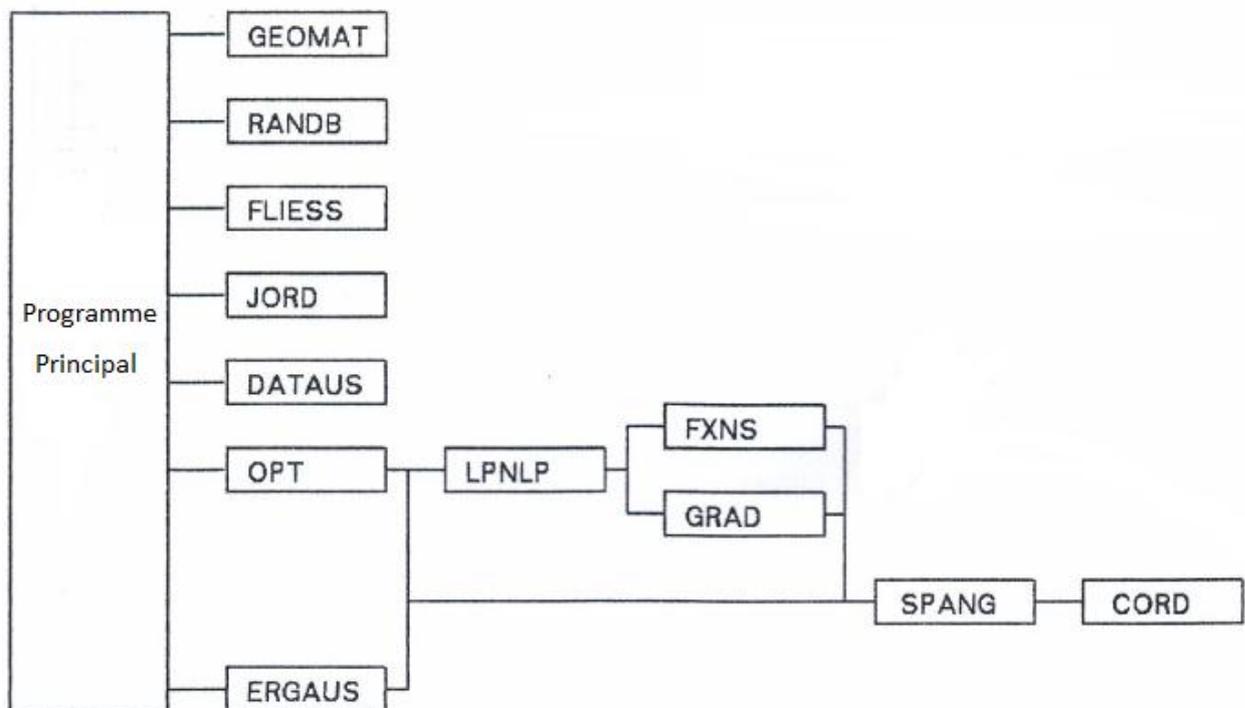
Le programme **ELESP** calcul les contraintes élastiques en des points test on utilisant la méthode des éléments finis statiquement admissible, basée sur le principe du minimum de l'énergie complémentaire. Le programme **STRASSE** calcul les contraintes résiduels et le programme **LPNLP** calcul le facteur de charge d'analyse limite et d'adaptation par un processus d'optimisation en utilisant la méthode de Lagrangien augmenté.

2. Principales sousroutines utilisées par le programme

N°	Non	Fonction
1	GEOMAT	Pour introduire la géométrie et les constantes matérielles
2	EFLEX	Pour calculer la matrice de flexibilité élémentaire
3	NEBEN	Pour tenir compte des conditions aux limites
4	IFLEX	Pour calculer les contraintes élastiques dans les points test
5	RANDB	Pour calculer la matrice de connexion locale et globale
6	FLIESS	Pour lire les points test
7	JORD	Résolution de système d'équation par la méthode de GAUSS-JORDAN
8	DATAUS	Paramètre de contrôle (nombre de nœuds, d'élément, domaine matériel...)
9	OPT	Initialisation des paramètres pour le programme d'optimisation LPNLP
10	ERGAUS	Pour calculer les contraintes principales $\sigma_{1,2}$
11	GRAD	Détermine les gradients de la fonction d'écoulement

12	FXNS	Détermine les valeurs du facteur de charge α
13	SPANG	Pour calculer les contraintes $\sigma_{x,y}$ et τ dans les points x et y dans l'élément
14	CORD	

3. Organigramme de calcul



4. Soubroutine FXNS

L'introduction de la fonction d'écoulement dans cette soubroutine du programme d'optimisation LPNLP, exprimée en terme de contraintes principales, représente une condition de contrainte d'inégalité non linéaire. En effet, cette soubroutine calcul les valeurs actuelles de la fonction d'écoulement $Q_i(I)$ pour chaque point-test.

Connaissant la relation entre les contraintes et le facteur de charge α

$$\sigma_x = \alpha\sigma_x^e + \rho_x \quad , \quad \sigma_y = \alpha\sigma_y^e + \rho_y \quad , \quad \tau_{xy} = \alpha\tau_{xy}^e + \rho_{xy} \quad (B.1)$$

où σ_x^e , σ_y^e , τ_{xy}^e sont les contraintes élastiques calculées en Annexe A.

Les contraintes principales (max et min) sont calculées par l'expression suivante :

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (B.2)$$

5. Soubroutine GRAD

Dans cette soubroutine les gradients de la fonction d'écoulement sont calculés analytiquement par l'intermédiaire des dérivées partielles. Les fonctions d'écoulement $Q_i(I)$ sont données en termes des contraintes principales σ_1 et σ_3 , lesquelles sont fonction de σ_x , σ_y et τ_{xy} . Ces contraintes dépendent à leurs tours des paramètres de fonction de contraintes $XG(J)$ pour la structure chargé et $XA(J)$ pour les contraintes résiduelles dans la structure non chargé. La matrice CC calculée par la procédure d'élimination de Gauss-Jordan est multipliée par les paramètres indépendants $X(J)$.

$$GI(I,K) = \frac{\partial QI(I)}{\partial Q(K)} = \frac{\partial QI(I)}{\partial \sigma_1} * \frac{\partial \sigma_1}{\partial XA(J)} * \frac{\partial XA(J)}{\partial X(K)} + \frac{\partial QI(I)}{\partial \sigma_3} * \frac{\partial \sigma_3}{\partial XA(J)} * \frac{\partial XA(J)}{\partial X(K)} \quad (B.3)$$

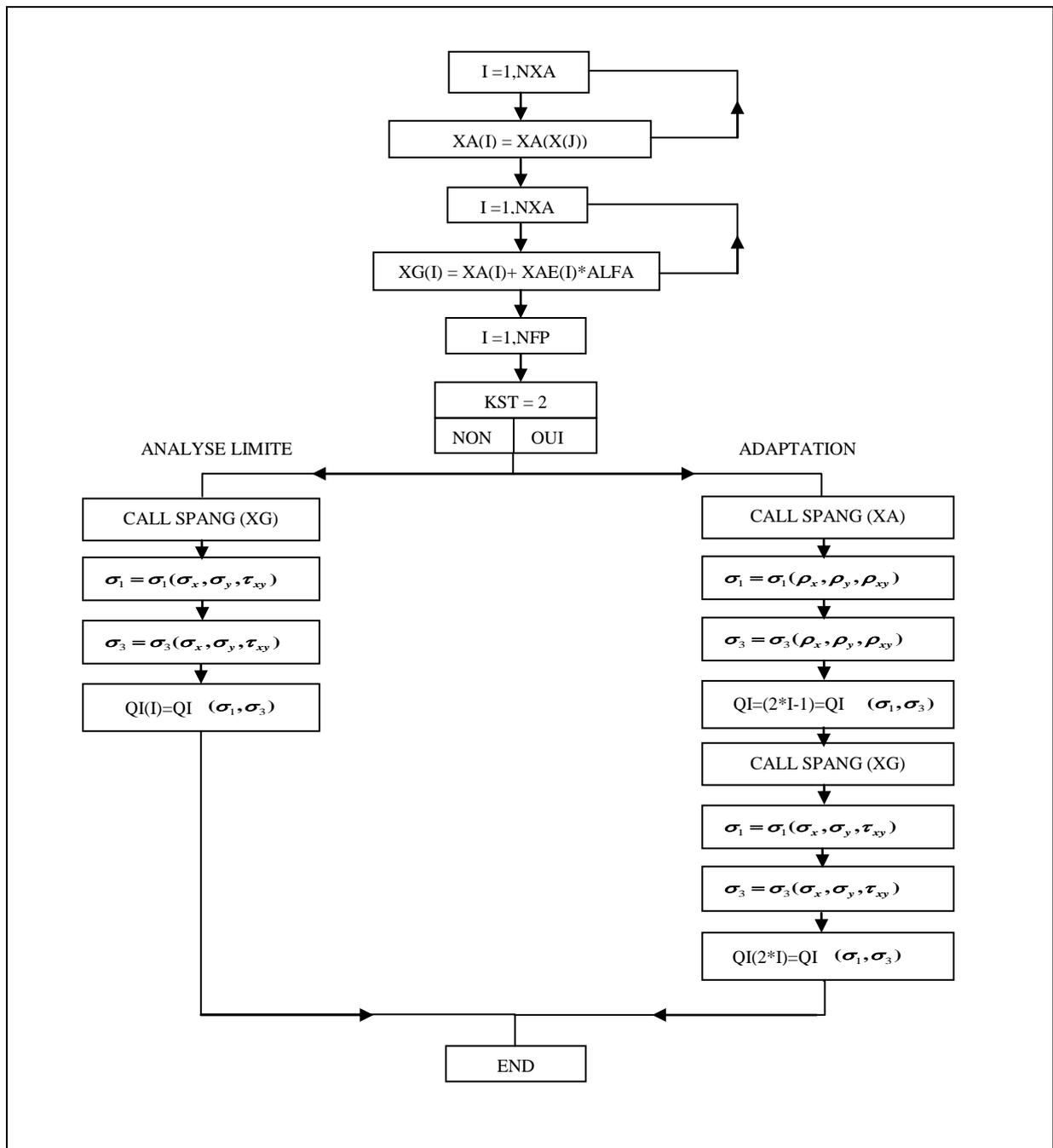
$$\text{avec } \frac{\partial XA(J)}{\partial X(K)} = CC(J, NNB + K) \quad (B.4)$$

Connaissant σ_x , σ_y et τ_{xy} (voir Annexe A), les dérivées $\frac{\partial \sigma_1}{\partial XA(J)}$ peuvent être exprimées comme suit :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial XA(J)} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_x} * \frac{\partial \sigma_x}{\partial XA(J)} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_y} * \frac{\partial \sigma_y}{\partial XA(J)} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \tau_{xy}} * \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial XA(J)} \quad (B.5)$$

$$\frac{\partial \sigma_3}{\partial XA(J)} = \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_x} * \frac{\partial \sigma_x}{\partial XA(J)} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_y} * \frac{\partial \sigma_y}{\partial XA(J)} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial \tau_{xy}} * \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial XA(J)} \quad (B.6)$$

6. Description de la sousroutine FXNS

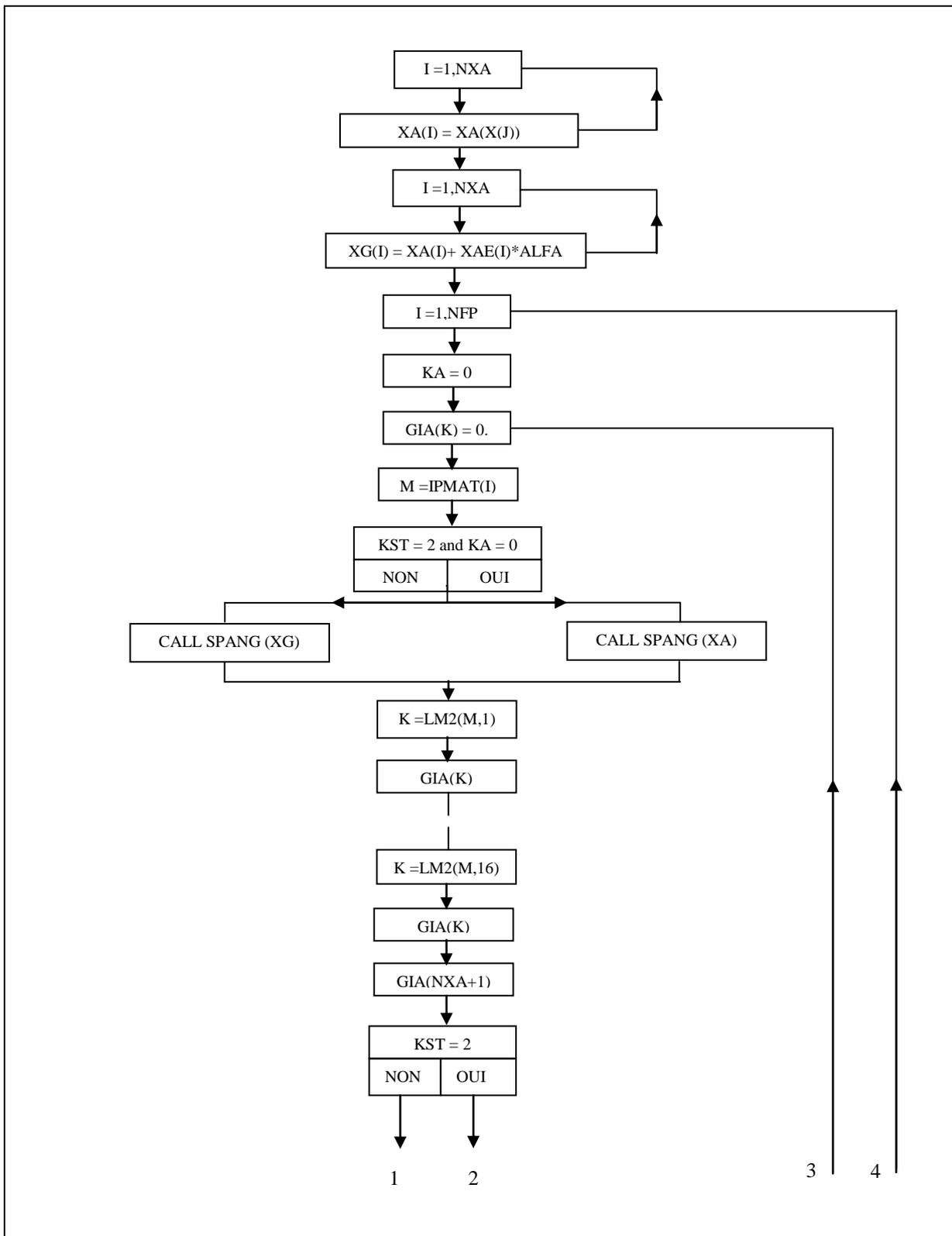


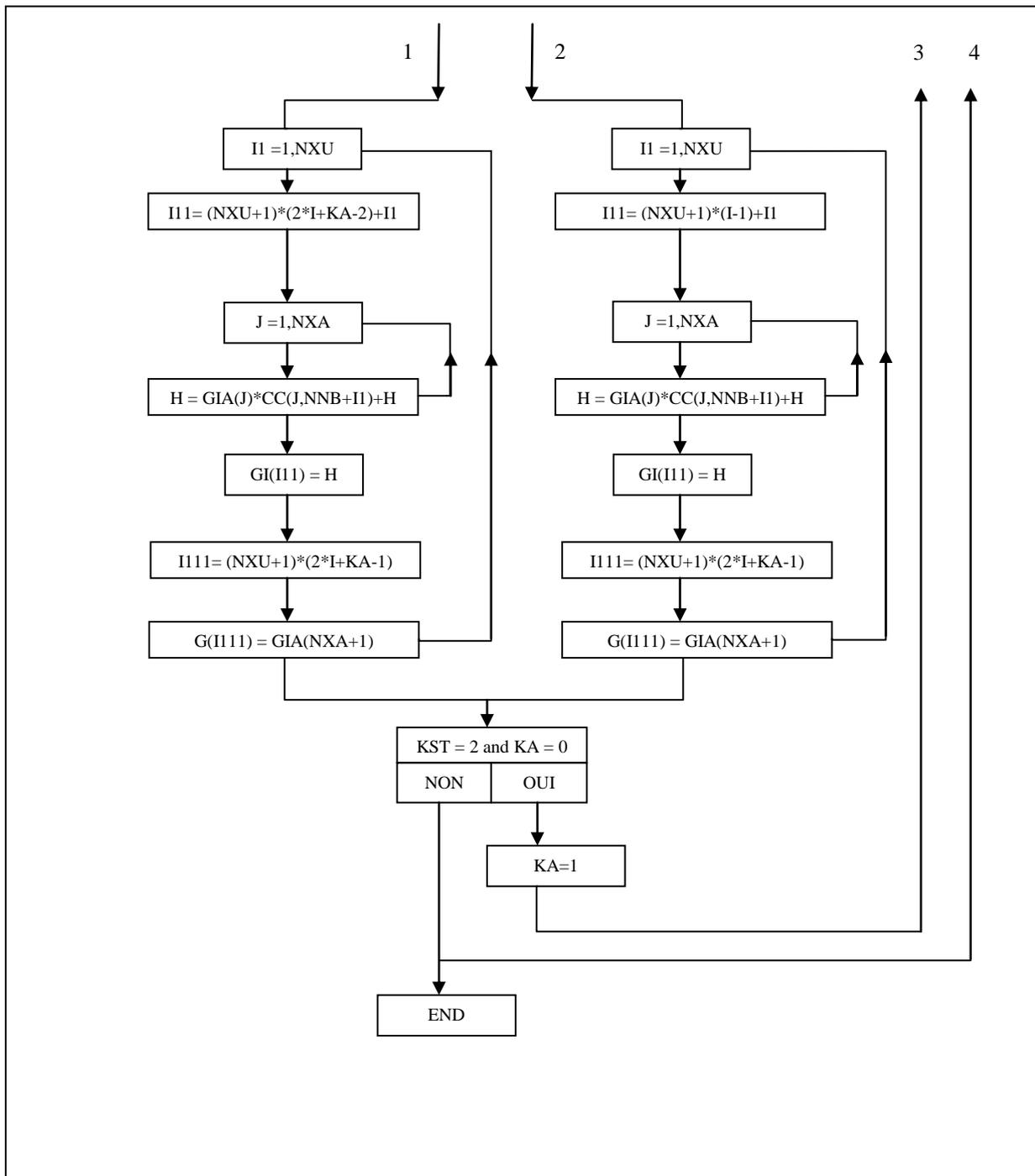
Nombre de contrainte d'inégalité $QI(I)$ pour une structure testée en 45 point-testes :

En analyse limite =45

En adaptation = 90

7. Description de la sousroutine GRAD





La sous-routine (SPANG) est appelée pour calculer les contraintes (σ_x , σ_y et τ_{xy}) en utilisant les expressions des dérivées de la fonction de contraintes d'Airy données en (A6,A7,A8). Les paramètres de contraintes (XG) sont déterminés pour une structure chargée et (XA) pour une structure non chargée.

CC : Matrice calculée par la procédure d'élimination de Gauss-Jordan.

GIA : Gradient analytique globale.

GI : Gradient analytique élémentaire.

NFP : Nombre de points-tests dans la structure.

NNB : Nombre de condition aux limites.

NXA : Nombre de variables.

NXU : Nombre de variables indépendantes.

XG : vecteur contenant les paramètres de contraintes totales.

XA : vecteur contenant les paramètres de contraintes résiduelles.

XAE : vecteur contenant les paramètres de contraintes élastiques.

NPMAT : Nombre d'ensembles de propriétés matérielles (l'angle de frottement φ et la cohésion C).

K : numéro du nœud actuel.

ANNEXE C

Nous présentons dans cette partie l'algorithme d'optimisation, développé par PIERRE & LOWE [24] (1975) et utilisé dans notre étude. Cet algorithme est basé sur les techniques fondamentales suivantes :

- la technique des multiplicateurs de Lagrange, qui permet de transformer le problème d'optimisation avec contraintes en un problème sans contraintes,
- les conditions de Kuhn-Tucker, qui permettent de vérifier si un point proposé est effectivement un point optimal,
- la technique de descente (Line search), qui permet de trouver la plus grande pente.

Le problème d'optimisation consiste à trouver le point optimal x^* , qui maximise la fonction objective f . Il peut être énoncé comme suit :

Trouver

$$f(x^*) = \max_x f(x) \quad (\text{C.1})$$

sous les contraintes

$$p_i(x) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1 < n \quad (\text{C.2a})$$

$$q_j(x) \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m_2 < n \quad (\text{C.2b})$$

et tel que

$$c_k < x_k < d_k \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (\text{C.2c})$$

où, le vecteur $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ est un élément de l'espace Euclidien à n dimensions $x \in E^n$. Les a_i , b_j , c_k , et d_k sont des constantes réelles. La fonction objective f et les contraintes p_i et q_j peuvent être des fonctions linéaires ou non-linéaires.

Le problème peut être transformé en utilisant la fonction de Lagrange, définie par :

$$L(x, \alpha, \beta) = f(x) + \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i (a_i - p_i) + \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j (b_j - q_j) \quad (\text{C.3})$$

où α_i et β_j sont respectivement, les vecteurs multiplicateurs de Lagrange de dimension m_1 et m_2 .

Le gradient de L par rapport à \mathbf{x} , s'exprime par :

$$\nabla_{\mathbf{x}} L = \nabla_{\mathbf{x}} f - \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i \nabla_{\mathbf{x}} p_i - \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \nabla_{\mathbf{x}} q_j \quad (\text{C.4})$$

Au point optimal \mathbf{x}^* , le développement en série de Taylor de chaque terme de contrainte d'inégalité $q_j(\mathbf{x})$, s'exprime par :

$$q_j(\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x}) = q_j^* + \Delta\mathbf{x} \nabla_{\mathbf{x}} q_j^* + \dots, \quad j \in S_a \quad (\text{C.5})$$

où

$$S_a = \{j / q_j^* = b_j\} \quad (\text{C.6a})$$

et

$$q_j(\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x}) \leq b_j \quad \forall j \quad (\text{C.6b})$$

Des équations (C.5) et (C.6), $\Delta\mathbf{x}$ doit satisfaire :

$$\Delta\mathbf{x} \nabla_{\mathbf{x}} q_j^* \leq 0, \quad j \in S_a \quad (\text{C.7})$$

De même, au voisinage de \mathbf{x}^* :

$$p_i^* = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \quad (\text{C.8a})$$

et

$$p_i(\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x}) = a_i \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \quad (\text{C.8b})$$

Le développement en série de Taylor de $p_i(\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x})$, s'exprime par :

$$p_i(\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x}) = p_i^* + \Delta\mathbf{x} \nabla_{\mathbf{x}} p_i^* + \dots \quad (\text{C.9})$$

et en se basant sur les équations (C.8), cette série donne, en tenant compte du terme de premier ordre :

$$\Delta \mathbf{x} \nabla_{\mathbf{x}} p_i^* = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \quad (\text{C.10})$$

D'une manière équivalente, les deux inégalités :

$$\Delta \mathbf{x} \nabla_{\mathbf{x}} p_i^* \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \quad (\text{C.11a})$$

et

$$-\Delta \mathbf{x} \nabla_{\mathbf{x}} p_i^* \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \quad (\text{C.11b})$$

sont les conditions pour lesquelles $\Delta \mathbf{x}$ admissible est satisfait.

En se limitant aux termes en $\Delta \mathbf{x}$, f^* est optimale si :

$$f(\mathbf{x}^* + \Delta \mathbf{x}) - f^* \approx \Delta \mathbf{x} \nabla_{\mathbf{x}} f^* \leq 0 \quad (\text{C.12})$$

pour tout $\Delta \mathbf{x}$ suffisamment petit et satisfaisant les équations (C.6b) et (C.8b).

Dans ce qui suit, on développe le Lagrangien Augmenté $L_a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ en additionnant les termes de pénalité à L , avec \mathbf{w} comme ensemble de facteurs de pondération. L_a est développé afin d'obtenir une relation directe entre un maximum local sous contraintes de $f(\mathbf{x})$ et un maximum local sans contraintes de $L_a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*, \mathbf{w})$ en respectant \mathbf{x} .

Le Lagrangien Augmenté est exprimé par :

$$L_a = L - w_1 P_1 - w_2 P_2 - w_3 P_3 \quad (\text{C.13})$$

où, L est le Lagrangien de l'équation (C.3) et $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]$ est l'ensemble de facteurs de pondération ($w_i > 0$), avec :

$$P_1 = \sum_{i=1}^{m_1} (a_i - p_i)^2 \quad (\text{C.14a})$$

$$P_2 = \sum_{j \in C_b} (b_j - q_j)^2, \quad C_a = \{j / \beta_j > 0\} \quad (\text{C.14b})$$

et

$$P_3 = \sum_{j \in C_b} (b_j - q_j)^2, \quad C_a = \{j / \beta_j = 0 \text{ et } q_j \geq b_j\} \quad (\text{C.14c})$$

Le gradient du Lagrangien Augmenté (L_a), en respectant \mathbf{x} , est exprimé par :

$$\nabla_x L_a = \nabla_x f - \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i^+ \nabla_x p_i - \sum_{j \in C_a} \beta_j^+ \nabla_x q_j + \sum_{j \in C_a} 2w_3 (b_j - q_j) \nabla_x q_j \quad (\text{C.15})$$

où

$$\alpha_i^+ = \alpha_i - 2w_1 (a_i - p_i) \quad (\text{C.16a})$$

et

$$\beta_j^+ = \beta_j - 2w_2 (b_j - q_j) \quad (\text{C.16b})$$

Si $L_a(\mathbf{x}^*, \alpha^*, \beta^*, \mathbf{w})$ est un maximum local pour le problème sans contraintes, en respectant \mathbf{x} , pour les valeurs finis de $w_i > 0$, alors $f(\mathbf{x}^*)$ est un maximum local pour le problème avec contraintes de $f(\mathbf{x})$, tel que $(\mathbf{x}^*, \alpha^*, \beta^*, \mathbf{w})$ satisfait les conditions de Kuhn-Tucker :

$$p_i(\mathbf{x}^*) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \quad (\text{C.17a})$$

$$q_j(\mathbf{x}^*) \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m_2 \quad (\text{C.17b})$$

$$\beta_j^* (b_j - q_j(\mathbf{x}^*)) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_2 \quad (\text{C.17c})$$

$$\beta_j^* \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_2 \quad (\text{C.17d})$$

et

$$\nabla_x L_a(\mathbf{x}^*, \alpha^*, \beta^*, \mathbf{w}) = 0 \quad (\text{C.17e})$$

La recherche du point maximal est basée sur la technique de "line search", exprimée par:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \delta \mathbf{x}^k \quad (\text{C.18})$$

avec

$$\mathbf{r}^k = \mathbf{H}^k \mathbf{g}^k \quad (\text{C.19})$$

où, \mathbf{x}^{k+1} est la nouvelle valeur de \mathbf{x} obtenue pour une variation de δ selon la direction $\mathbf{H}^k \mathbf{g}^k$. \mathbf{H}^k est une matrice de dimension $n \times n$, \mathbf{g}^k est le gradient de L_a , calculé en \mathbf{x}^k et δ est un scalaire positif.

L'idée de base de la technique de descente "line search" est de choisir une direction de descente \mathbf{r}^k en \mathbf{x}^k à chaque itération, de telle façon qu'à l'itération suivante, on choisisse un point \mathbf{x}^{k+1} diminuant $f(\mathbf{x})$, (voir fig. C.1), c'est-à-dire qu'il faut :

- choisir \mathbf{r}^k pour lequel, $\nabla_x f(\mathbf{x}^k) \mathbf{r}^k < 0$, $\mathbf{r}^k < 0$,
- choisir $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \delta \mathbf{r}^k$,

de sorte que $f(\mathbf{x}^{k+1}) < f(\mathbf{x}^k)$.

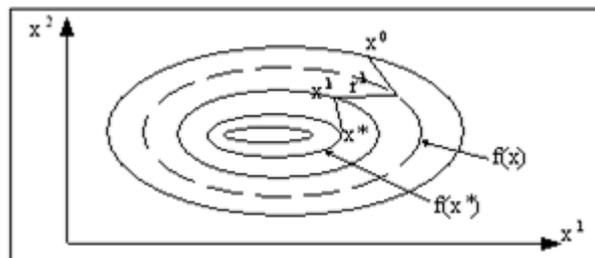
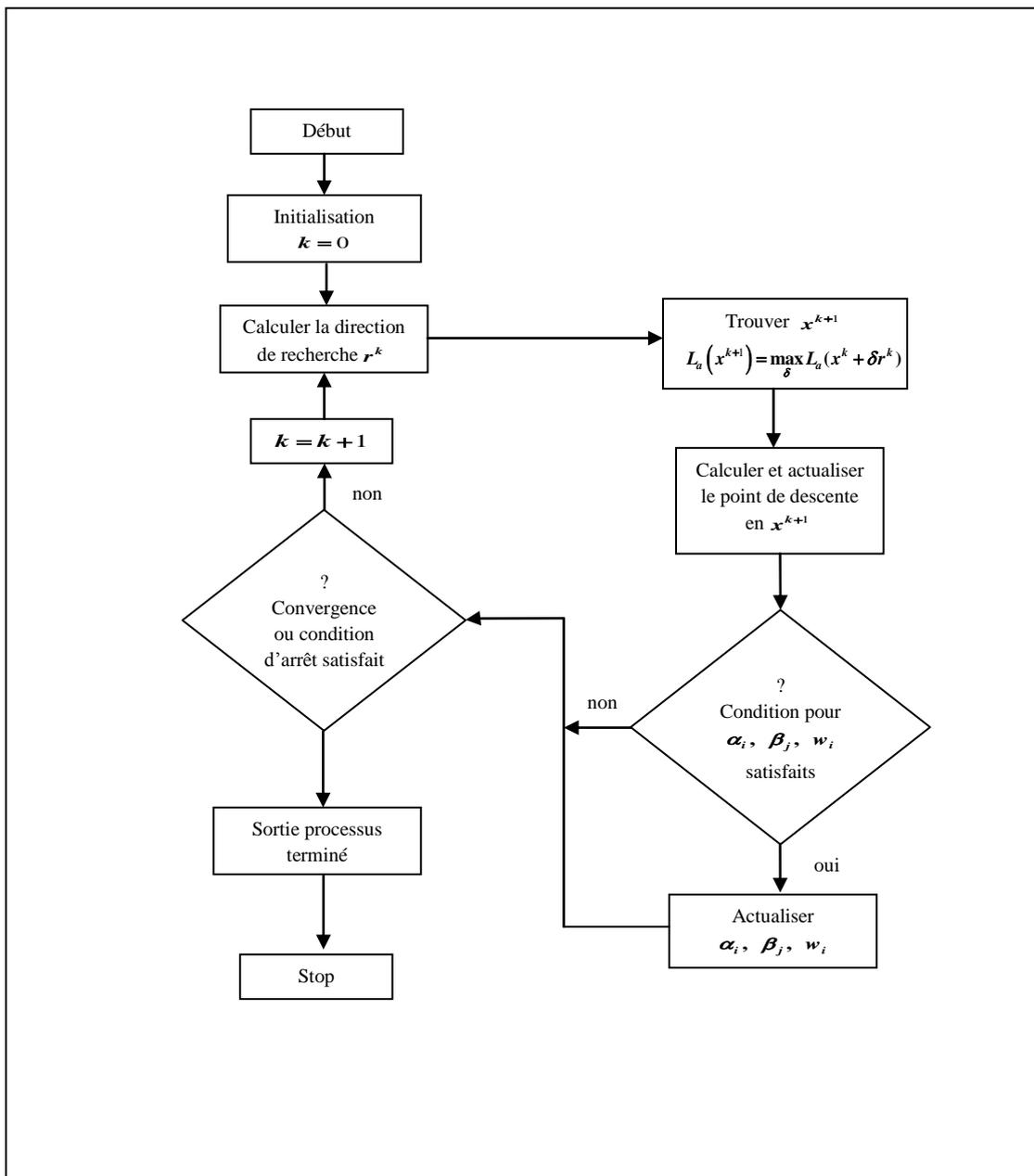


Figure C.1- Technique de descente

**Figure C.2-** Algorithme de recherche du point optimal