REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA-BOUMERDES

Faculté des sciences

Département des Mathématiques

Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques Financières

Sous le thème

Tarification des produits d'assurance

Etude de cas : Inondation dans la branche IARD(Incendie, Accidents et Risque Divers) à la SAA

Elaboré par :

Ladari Besma Yaker Nassrine

Encadré par :

Dr Guenane Brahim

Devant le jury composé de :

Présidente	Mme Ikhlef Massika	M.A.B	UMBB
Examinatrice	Mme Drici Wassila	M.C.A	UMBB
Encadreur	Mr Guenane Brahim	M.C.A	UMBB
Représentant de la SAA	Mr Tagadirt Toufik	Directeur D'agence	

Année universitaire 2020 - 2021

Remerciement

Nous remercions avant tout dieu qui nous a guidés vers la lumière du savoir, sans lui nous n'en arriverons pas jusque là.

Un grand merci à M^{r} Guenane notre encadreur qui a accepté de nous encadrer, encore merci pour sa disponibilité totale, son aide et ses conseils précieux pour améliorer le travail.

Nous remercions également M^{r} Aziz Belmokhtar , Mme Nacima Oumsalem et nabile khamoum notre promoteur au niveau lien de stage : la société national des assurances SAA.

Sans oublier de remercier les membres du jury qui nous ont fait l'honneur d'évaluer et de juger notre travail.

Enfin, nous remercions toute personne parmi nos camarades ou autres qui nous ont aidés de prés ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

A toutes ces personnes, nous leurs disant merci infiniment.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que dieu te garde dans son vaste paradis, à toi mon père.

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur, maman que j'adore.

Je dédie également à :

A mon mari qui m'a soutenu et a été mon soutien dans mon travail, que Dieu vous protège.

Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence, à tous mes frères (Khaled et merzak) et mes sœurs (Bahia, ikram et safia), je dédie ce travail dont le grand plaisir leurs revient en premier lieu pour leurs conseils, aides, et encouragements.

A mon oncle (Amar) qui ne m'a pas oublié de ses prières, que Dieu prolonge sa vie.

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côté, et qui m'ont accompagnaient durant mon chemin d'études, mes aimables amis, collègues d'étude, et frère de cœur.

NASSRINE

Dédicaces

A la femme qui souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences et qui n'a épargné aucun efforts pour me rendre heureuse : mon adorable mère.

Une profonde pensé à mon cher papa que dieux l'accueille dans son vaste paradis

A mes très chers frères Yacine et Abderrahmane et à mes belles sœurs Amina et Sarah qui not pas cessée de me conseiller, encourager et soutenue tout au long mes études. Que dieu les protège et leurs offre la chance et le bonheur.

A mes grands-mères et grand père, mes oncles et mes tantes. Que dieu leur donne une longue et joyeuse vie.

A tous les cousins, les amis que j'ai connu jusqu'à maintenant. Merci pour leurs amours et leurs encouragements.

BESMA

Résumé :

Ce mémoire a pour objet l'étude de la tarification en assurance dommages. Nous allons ainsi nous intéresser à l'assurance en générale

Nous détaillons ainsi les principes théoriques de différents méthodes utilisée dans la tarification des risques en assurance non-vie telles que GLM, bonus-malus, crédibilité, avant de nous intéresser à a théorie de la modélisation linéaire généralisée du cout et de la fréquence.

On conclut sorte le de la tarification dans la société nationale d'assurance SAA que la présence variable zonage d'après la méthode de classification hiérarchique a comme avantage, une lecture de l'arbre qui permet de déterminer le nombre de optimal des classes.

Après à modélisé le nombre de sinistre et le montant de sinistre pour calculer la prime pure.

Mots clés :

Assurance, tarification, sinistralité, modèles linéaire généralisés, bonus malus, gamma-lindley, classification

Abstract:

The purpose of this thesis is to study damage insurance pricing. We will thus be interested in insurance in general.

We thus detail the theoretical principles of different principles of different methods used in the pricing of risks in non-life insurance such as GLM, bonus malus, credibility, before focusing on the theory of generalized linear modelling of cost and frequency.

We conclude from the pricing in the SAA national insurance company that the presence of variable zoning according to the hierarchical classification method has the advantage, a reading of the tree which makes it possible to determine the optimal number of classes.

After modeled the number of claims and the amount of claims to calculate the pure premium.

Keywords:

non-life insurance, pricing, generalized linear models, bonus-malus, gamma-lindley Sinister, risk, contract, insurance company.

Liste des Tableaux :

Liste des figures :

Liste Abréviation :

SAA : Société Algérienne d'assurance

CAT- NET : catastrophe-naturelle

IARD : Incendie, Accidents et Risque Divers

RC : Responsabilité Civile

FCN : Fond d'indemnisation des Victimes des Calamités Naturelles

AH : Arbre Hiérarchique

Table des matières

Introduction générale

L'être humain a toujours été exposé à différents risques, ce qui a fait naitre en lui le besoin d'être en sécurité. Dès l'antiquité, différente institutions qui jouait le rôle des assurances sont apparus et ces règles se développaient progressivement.

Le but essentiel de l'assurance consiste dans la formation d'une communauté dans laquelle les assurés mettent leurs risques en commun. L'assurance telle qu'elle est présentée et pratiquée par les sociétés commerciales n'est équitable que si la prime réclamée à chaque assuré correspond le plus exactement possible au risque réel que celui-ci fait peser sur le portefeuille.

Le principe de l'assurance est le partage d'un danger, appelé un risque, parmi un collectif le même danger peut toucher les individus d'un groupe et causer un grand dégât.Pour un individu tout seul, le dégât est souvent trop grand pour être supporté sans la perte du niveau de la vie. Par contre, si le danger est partagé parmi tous les individus du collectif, le sinistre devient supportable pour chacun. Ce principe d'assurance nécessite que chaque membre du collectif soit concerné par le risque de la mêmefaçon. Sinon, les membres du collectif qui ne sont pas du tout ou seulement très partiellement concernés par le risque ne sont, à priori, pas prêts de porter la même part du dégât que les autres (en tout cas, s'ils ne sont pas forcés par la loi, comme dans l'assurance de responsabilité civile des voitures), le principe d'une assurance (facultative) exige donc que le risque soit distribué dans le collectif d'une façon homogène.

Le principe essentiel de la tarification est la neutralité actuarielle (idéalement la prime pure doit couvrir le risque exact garanti par l'assureur), ce fonctionnement est altéré par des positions stratégiques et concurrentielles qui modulent le monde de l'assurance. Chaque compagnie s'intéresse à une clientèle spécifique qu'elle cherche à attirer, et cette clientèle ne correspond pas toujours à ce que l'on puisse appeler un bon risque. Les cible visées par les assureurs sont bien souvent des populations importantes en besoin d'assurances et qui représentent par conséquent d'éventuelles parts de marché à conquérir.

En réalité, le risque est rarement distribué d'une façon homogène dans le collectif. Les assurances ont par conséquent la tendance à sélectionner dans le groupe les individus avec un ''bon'' risque. Si la sélection est efficace, l'assurance aura moins de sinistres à payer et peut donc offrir un meilleur tarif à ses assurés. Les autres assurances, par contre, restées avec les ''moins bons'' risques sont obligées d'augmenter leurs tarifs. Pour éviter ce clivage du marché d'assurance, les autres assureurs doivent suivre le premier assureur ou pour ne pas perdre leur clientèle antérieure, ils sont obligés d'offrir des tarifs différents entre les bons risques et les mauvais risque. Le marché d'assurance a donc une tendance à la différenciation des tarifs selon le degré des risques. La tendance inhérente de l'assurance a comme effet que les actuaires sont tenus d'inventer et de développer des méthodes de différenciation assez fines pour le calcul des tarifs.

Dans ce contexte, notre problématique se décline à travers une question principale qui consiste à savoir, **Comment sont établis les tarifs des produits d'assurance dommages?**

Et des questions secondaires qui sont les suivantes :

- Qu'est-ce que l'assurance, comment est-elle née ?
- Qu'est que la tarification en assurance dommages et ses objectifs ?
- Quels sont les méthodes de tarification en assurance dommages ?
- Commentse fixent les tarifs du produit « inondation » à la société nationale d'assurance (SAA) ?

Pour répondre à notre problématique, nous avons adopté une démarche qui est à la fois théorique et pratique. Nous avons réalisé une recherche documentaire et bibliographique relative au thème.

Pour ce qui est de l'étude pratique, nous avons effectué un stage pratique au niveau l'agence de Bordj MENAIEL -2009- direction régionale de TIZI-OUZOU.

Ainsi, Nous allons subdiviser notre mémoire en trois chapitres :

- Le premier chapitre est consacré pour les concepts généraux sur l'assurance
- Le deuxième chapitre nous expliquons les différentes méthodes classiques de tarification des risques en assurance non-vie.
- Et le troisième chapitre, on va essayer de présenter le cas pratique sur la tarification du produit « inondation », la première section sera consacrée pour la présentation de la société nationale des assurances (SAA), dans la deuxième section on va voir la méthode statistique de classification, cette méthode est utilisée dans le but de segmenter le risque inondation selon la zone communale ou par wilaya. La troisième section est consacrée à la tarification où nous présentons une modélisation

actuarielle du risque inondation (fréquence et coût). Nous déterminons notre chapitre par le calcul de la prime pure en prenant en considération la variable zone.

Chapitre 1 : concepts généraux en assurance dommages

Introduction du 1er chapitre

L'analyse économique s'attache aujourd'hui à l'interprétation du rôle de l'assurance comme technique de couverture des risques et sa pertinence face à l'incertitude[1].

L'assurance est un service qui fournit une prestation lors de la survenance d'un risque. La présentation, généralement financière, peut être destinée à un individu, une association ou une entreprise, en échange de la perception d'une cotisation ou prime.[2]

Dans ce premier chapitre, nous tacherons d'apporter un éclaircissement sur le champ de l'étude par une présentation des fondements techniques sur lesquels se base l'assurance.

L'analyse de cette discipline passera par une définition assez large de l'opération d'assurance, incluant les éléments expliquant l'origine du développement de l'assurance et le rôle dont elle est tributaire, sur le plan économique et social comme moyen de protection et outil de prévention contre le hasard et l'incertitude.

Nous poursuivrons par un second intitulé la tarification en assurance dommages, qui passera tout d'abord par la définition de la tarification, ensuite les primes et enfin les objectifs de la tarification.

La troisième section, nous la consacrerons pour présenter les produits d'assurance dommages.

Section 1 : Concept généraux sur l'assurance

L'assurance est aussi ancienne que le besoin que prouvent les individus de se prémunir des risques auxquels ils sont exposés.

Dans cette section nous nous intéressons d'abord, à donner un aperçu historique, avec toutes les évolutions à travers le monde, ensuite on définira les différents concepts de l'assurance.

1.1. Histoire et évolution de l'assurance

Il Ya un désaccord sur l'histoire de l'émergence de l'idée d'assurance en général, il y a ceux qui la retracent aux temps anciens, où elle s'incarne dans la vision de joseph(prophète Yousef), pendant la civilisation pharaonique en Egypte, sur le stockage du blé dans les années de prospérité pour faire face aux années de crise suivantes, cette vision exprime la prudence et

[1] Lambert DENIS-CLAIR, « économie des assurances », éd Armand Colin/Masson, paris, 1996,p.21.
[2] Ali HASSID, « Introduction à l'étude des assurances », éd ENAL, Alger, 1988, p, 84.

le plan contre des risques qui pourraient arriver plus tard[1],et il y a ceux dont l'apparition remonte au moyen âge, représentée par ce qu'on appelle prêt à la grosse aventure pour le transport maritime dans le bassin méditerranéen, ce type de prêt adapté au commerce maritime était déjà pratiqué par les grecs et les romains, les marchands faisaient appel aux banquiers pour financier leurs expédition maritime qui coûtaient sauvent très cher si le bateau faisaient naufrage, les marchands n'avaient rien à rembourser aux banques, par contre s'il arrivant à Bon port, le banquier étaient remboursé et pourrait recevoir une compensation financière très élevée. Repris à partir du XII[ème], le prêt à grosse, connut plusieurs abus sur les taux d'intérêt qui encouragèrent le pape Grégoire IX à interdire le prêt usuraire en 1234.

Dès lors, il fallut trouver un système permettant au préteur d'être certain du remboursement de son prêt. Des banquiers et d'autres commerçants acceptèrent de garantir la valeur du navire et de ses marchandises en échange d'une somme d'argent fournie au préalable. L'assurance maritime étaient née et continua à se développer dans les ports de la méditerranée puis l'atlantique.

Le plus ancien contrat d'assurance a été souscrit à Gène en Italie en 1347 et c'est également à Gène que fut fondée la première société d'assurance en 1424.

Quant à l'émergence de l'assurance avec son image moderne, c'est au XVIIe siècle à l'apparence des grandes villes et l'avènement de nouveaux type de risque, ainsi que des fondements du calcul des probabilités qui ont donné une forte impulsion à la mise en place d'un système d'assurance précis et contemporain, où il a été possible de maitriser la mesure précise des risque et la présentation correcte de la valeur de ce qui précède, il apparait que les premiers contrats d'assurance relevaient du domaine maritime. Depuis lors, l'utilisation des contrats d'assurance s'est développée et s'est étendue, de sorte que l'application de ces contrats s'est déplacée vers la garantie d'autres risques tels que l'assurance-vie, l'assurance des biens et l'assurance de la responsabilité civile.

1.2. Définition

Le mot assurance est d'origine latine : securus qui veut dire sûr, d'ou émane le terme Assecuratio (sécurité, garantie, certitude, assurance…). Dès lors, l'ancien français méridional adopta le terme assurance, tout en conservant les mêmes consonances retrouvées dans les termes : sécurité, sûreté, secours.[2]

[1] ''Conférences sur le droit algérien des assurances'' bureau des publications universitaires, Algérie, 2008, p.6
[2] L MEZDAD : « essai d'analyse du secteur des assurances et de sa contribution dans l'intermédiation financier

D'une manière générale, l'assurance se définit comme une réunion de personnes, redoutant l'arrivée d'un événement préjudiciable, se cotisent pour permettre à ceux qui sont touchés par cet événement de faire face aux dommages résultant[1].

Sur le plan économique, l'assurance est définie comme étant « un service qui fournit une prestation lors de la survenance d'un risque »[2]. La prestation, généralement financière, peut être destinée à un individu, une association ou une entreprise, en échange de la perception d'une cotisation ou prime.

Sur le plan juridique l'assurance est définie selon l'article 02 de l'ordonnance 95/07 (modifié par l'art.2 L 06-04),et l'art 619du code civil algérien comme « un contrat par lequel l'assureur s'oblige moyennant des primes ou autres versements pécuniaires, à fournir à l'assuré, ou au tiers bénéficiaire au profit duquel l'assurance est souscrite, une somme d'argent, une rente ou une autre prestation pécuniaire, en cas de réalisation du risque prévu au contrat »[3].

L'assurance d'un point de vue technique est définie comme étant « une opération par laquelle un assureur organise en mutualité un ensemble d'assurés exposés à la réalisation d'un risque de même nature, et indemnise ceux d'entre eux ayant subi un dommage et ce grâce à la masse des primes collectées »[4].

Par ailleurs, plusieurs auteurs ont donné des définitions plus précises au concept d'assurance. Par exemple selon M.Joseph Hémard : « l'assurance est une opération par laquelle une partie (l'assuré), se fait promettre, moyennant une rémunération(la prime), pour lui ou pour un tiers, en cas de réalisation d'un risque, une prestation par une autre partie (l'assureur), qui prenant en charge un ensemble de risques, les compense conformément aux lois de la statistique »[5].

Malgré la diversité des définitions de l'assurance, cette dernière nous conduit à comprendre un seul principe. Il s'agit de celui de garantie la personne exposée au risque (assuré) par une autre personne (assureur) moyennant le versement d'une somme d'argent dite prime d'assurance.

De ces définition, il apparait que le processus d'assurance est le remplacement des pertes probables par certaines, la perte confirmée résultant du contrat d'assurance représenté dans la prime est toujours bien inférieure à la perte potentielle si elle est réalisée.

---

[1] F CUILBAULT, ELIASHBERG C, LATRASSE M, op. cit, p. 49.
[2] http://www.univchlef.dz/LABORATOIRES/LSFBPM/seminaires_2012/intervention_BOUTALEB_Kouider_2012
[3] Art.2 de l'ordonnance n° 95-07 du 25 janvier 1995 relative aux assurances, p. 170.
[4] Y LAMBERT-FAIVER, « droit des assurances », 11eme édition Dalloz, paris, 2001, p. 38.
[5] Françoise CHAPUISAT, « le droit des assurances » 1ére édition presses universitaires de Frances, paris, p.7.

A travers cet ensemble de définitions, il apparait que l'assurance est un processus qui se déroule entre deux ou plusieurs parties, par lequel l'assureur s'engage à indemniser en cas de réalisation du risque impliqué dans l'assurance en échange d'une prime payée par le souscripteur dans un cadre organisé par des règles techniques.

1.3Typologie des contrats d'assurance

Un contrat d'assurance : « est la convention par laquelle une entreprise d'assurance au assureur s'engage, en cas de réalisation du risque au terme fixé au contrat, à fournir à une autre personne appelé « assuré » une prestation pécuniaire en contrepartie d'une rémunération appelée prime ou cotisation »[1].

On distingue deux types de contrats d'assurance : assurances dommages et assurances de personnes.

1.3.1 Les assurances de personnes

Les assurances de personnes sont des assurances qui ont pour objet la personne de l'assuré. Elles le garantissent contre les risques qui le menacent ou l'atteignent dans son existence, son intégrité, sa santé ou sa vigueur. L'assurance de personne regroupe l'assurance vie au sens strict ainsi que les assurances relatives aux atteintes corporelles

- **Assurance vie au sens strict :**Elle couvre la vie de la personne ; en cas de vie l'assuré bénéficiera d'une rente ou d'un capital, c'est le cas de l'assurance retraite par contre en cas de décès, l'assureur garantie une prestation à l'assuré qui sera versée aux bénéficiaires choisi à la date de souscription du contrat.

- **Assurance atteinte corporelle :**Indemnisation versée en cas de maladie, invalidité due par exemple aux accidents de travail.

Elles sont souscrites soit à titre individuel, soit à titre collectif (assurance de groupe), comme elles sont régies par un principe fondamental dit forfaitaire. Ce caractère stipule que

[1] République Tunisienne. « Code des assurances ». Publication de l'imprimerie officielle de la république Tunisienne, 2008, p.9. Disponible sur http://www.finances.gov.tn/domaines/assurance/cadre%20legal/codes%20des%assurance.pdf(consulté le 13/06/2021)

dès la souscription du contrat, l'assuré et l'assureur se mettent d'accord sur le montant de l'indemnité en cas de réalisation du risque.

1.3.2 Les assurances dommages : Elles ont pour but d'indemniser l'assuré contre les conséquences d'un événement accidentel affectant son patrimoine. L'assureur de dommage garantit, sous les conditions du contrat, qu'après survenance d'un sinistre, le patrimoine de l'assuré sera reconstitué en valeur comme si ce sinistre n'avait pas eu lieu[1].

- **Assurances de biens :** Elles couvrent les biens appartenant directement à la personne (l'assuré) c'est-à-dire tous ses actifs réels. L'assurance doit remettre le bien de l'assuré dans sa situation avant sinistre.

- **Les assurances de responsabilités :** elles garantissent les dommages que l'assuré pourrait causer à d'autres personnes. Il s'agit d'une garantie indirecte du patrimoine de l'assuré puisque l'assureur s'engage à payer à sa place les sommes nécessaires à la réparation des dommages causés. Ces sommes peuvent être considérables si les dommages sont importants, même supérieures au patrimoine total de l'assuré[2].

Ces derniers sont fondés sur le principe indemnitaire selon lequel le bénéficiaire de l'assurance ne doit en aucun cas s'enrichir en recevant des indemnités supérieures à son préjudice. On distingue plusieurs types d'assurance dommages dont l'assurance automobile, l'assurance incendie, l'assurance responsabilité civile, l'assurance multirisque habitation et l'assurance transport (marchandise), l'assurance agricole et assurance-crédit.

1.3.2.1 l'assurance automobile

L'assurance automobile a pour objectif principal de garantir le conducteur d'un véhicule automobile contre les conséquences des dommages matériels ou corporels causés par son véhicule à des tiers (responsabilité civile). C'est une assurance obligatoire.

[1] YEATMAN, Jerome. Op. cit. p.123.
[2] Idem.

L'assurance automobile peut inclure également, selon les modalités du contrat d'assurance souscrit, des garanties complémentaires facultatives couvrant par exemple les dommages matériels pour les véhicules assurés comme vol, bris de glace, incendie et les dommages corporels du conducteur.[1]

1.3.2.2 la responsabilité civile

L'assurance dite RC qui est l'abréviation de Responsabilité Civile, ce contrat a pour objet de garantir à toutes assuré une indemnisation pécuniaires conformément à l'article 124, 136, 138 et 140 du code civil algérien, en raison des dommages corporels, matériels et immatériels que l'assuré pourrait causer à d'autres personnes, c'est donc une garantie indirecte du patrimoine de l'assuré puisque l'assureur s'engage à indemniser tout sinistre causé aux autres parties[2].

1.3.2.3 l'assurance incendie

Cette assurance a pour objectif de garantir l'assuré contre les dommages causés par le feu conformément aux clauses du contrat et la couverture est stipulée aux conditions particulières et qui englobe tout matériel quel que soit sa nature, comme les biens immobiliers, mobiliers, matériel industriel, marchandises…etc.

1.3.2.4 Assurance multirisque habitation

Le contrat multirisque habitation regroupe plusieurs garanties citées ci-dessus avec les mêmes règles d'acceptation. Les risques garantis sont les dommages aux biens (incendie, dégât des eaux, bris de glaces, vol, réquisition des locaux contenant, les biens assurés évacuation) et les assurances de responsabilités (responsabilité civile du chef de famille)[3].

On notera aussi que la tarification dans ce type d'assurance est en fonction de plusieurs paramètres liés à l'objet de la garantie qui est le mode d'habitation, avec un calcul

[1] CCSF, Glossaire des assurances, juin 2010, p. 24.
[2] OUBAZIZ, p. 37.
[3] Idem.

de prime basant sur les antécédents de l'immeuble ou de la maison ainsi que l'année de construction du bien, la situation géographique et les zones de risque comportant les facteurs aggravants la survenance de sinistre.

1.3.2.5 L'assurance transport

Il s'agit en premier lieu de la faculté maritime assurant le transport par voie marine, et elle est régi par le droit commercial international. En deuxième lieu la faculté aérienne et terrestre assurant le transport de la marchandise par voie aérienne ou par voie terrestre (routes ou trains).

1.3.2.6 Assurance catastrophe naturelle

« Une autre forme de garantie introduire dans les années 80 pour les contrats incendie est la garantie CAT-NAT (catastrophe naturelle) qui a été étendue ensuite à l'ensemble des contrats d'assurance dommages par l'ordonnance 95-07 et la création du fond d'indemnisation des victimes des calamités naturelles (FCN) »[1] .

1.3.2.7Assurance-crédit et caution

Selon l'article 59 (ajouté par l'article 8 L 06-04) « l'assurance caution est un contrat par lequel l'assureur garantit, moyennant prime d'assurance, l'établissement financier ou bancaire, le remboursement de la créance sur une opération commerciale ou financière, en cas d'insolvabilité du débiteur »[2].

1.3.2.7 Assurance agricole

[1] Ibid. p. 38.
[2] CNA, ordonnance n° 95-07 du chaabane 1415 correspondant au 25 janvier 1995 relative aux assurances et ses textes d'application. [En ligne] . p. 16. Format PDF. Disponible sur : http://www.cna.dz/content/dowload/110/562/version/file/1+-+Oce+95-07-Mode+et+compl+%26+TXT+SUSQ.pdf (consulter le 13/06/2021)

L'assurance agricole est une ligne spéciale d'assurance appliquée aux entreprises agricoles. Elle n'est pas limitée à l'assurance des récoltes, elle inclut également le bétail, les animaux de race, la sylviculture, l'aquaculture et les serres.

1.4 Fonction d'assurance

L'assurance remplit plusieurs fonctions différentes dont la fonction sociale, la fonction économique et la fonction psychologique.

1. **La fonction sociale** : La fonction sociale de l'assurance s'explique par les éléments suivants :
   - Coopération entre les personnes dans le but d'assureur un certain risque, afin que chacune d'elles paie une prime ou une cotisation pour couvrir les pertes auxquelles l'une d'entre elles pourrait être exposée. La fonction sociale apparait également dans la législation du travail, les assurances sociales et la mise en place conséquente d'institutions d'indemnisation des maladies, des accidents du travail et de la vieillesse chômage et autres fonds crées à cet effet.
   - Parmi les bénéfices découlant de l'accumulation de sommes colossales avec les institutions de sécurité sociale et sanitaire, cette dernière joue un rôle important dans la réalisation de la solidarité sociale pour faire face au chômage, à la mort et à d'autres situations d'urgence auxquelles les familles doivent faire face[2].

1. **La fonction économique :** Le rôle économique de l'assurance se résume en les points ci-après :

- Réduire l'impact des sinistres et préserver le pouvoir d'achat en compensant les pertes résultant de la réalisation des risques assurés.
- La possibilité de conclure des affaires commerciales à grande échelle en raison de la protection et de la préservation de l'élément capital et travail fournis par l'assurance.
- La disponibilité des informations par le biais des compagnies d'assurance conduit à réduire ou à éviter certains risques, ce qui est évident grâce aux déductions des primes d'assurance.
- Accumulation de capital : L'assurance est un type d'entrée où les primes accumulées sont collectées auprès des compagnies d'assurance.

- Activer le crédit et cela se manifeste en renforçant l'assuré devant son créancier qui lui prête de l'argent.
- La fonction économique de l'assurance au niveau international est de soutenir le commerce en couvrant les risques potentiels lors des échanges internationaux, la possibilité de transfert direct d'assurance par l'ouverture de succursales à l'étranger, ainsi que la technique de réassurance qui conduit à la répartition des dommages économiques de plusieurs pays, ce qui constitue en soi un facteur d'équilibre et de stabilité.
- Bénéfices indirects obtenus par les opérations d'assurance internationales, comme si les compagnies d'assurance résidant dans un pays étaient en mesure d'étendre leurs activités d'assurance pour inclure des résidents fors de ce pays, les primes payées par l'assureur résidant à l'étranger constituent un élément de recette important payé par les compagnies d'assurance. Les risques assurés surviennent, ils ont une composante importante des paiements dans ce solde.

2. **Fonction psychologique :** Il est représenté en sécurité, de sorte que le croyant se sent à l'aise face à l'avenir, ce qui le manifeste dans l'esprit d'initiative, ainsi que la sécurité et le réconfort de toutes les coïncidences et surprises quotidiennes.

Le bénéfice de l'assurance établie peut dépasser à d'autres, comme c'est le cas pour les accidents de la route, grâce à l'élargissement du périmètre de responsabilité, qui comprend désormais de nombreux domaines.

Sur la base de toutes ces fonctions qui caractérisent l'assurance, il est évident pour nous la grande importance et la raison de son expansion et de son développement, car elle touche presque tous les aspects de ce qui est lié à l'assuré et à son argent, dans sa communauté par la coopération. Et même au niveau international.

1.5. Contrat d'assurance

1.5.1 Définition d'un contrat d'assurance

Un contrat d'assurance est défini comme un accord entre deux parties, par lequel la première partie s'engage à payer à la seconde partie ou à quiconque une somme d'argent en cas de risque spécifique dans un délai déterminé.

Il est également défini comme un accord entre deux ou plusieurs personnes visant à établir une relation juridique, et se concentre sur un problème potentiel, qui est le risque, par lequel l'assuré est obligé de payer une prime ou une souscription en échange de l'engagement de l'assureur à payer une somme d'argent au moment du risque assuré.

A travers ces définitions, il apparaît que le contrat d'assurance est un contrat de probabilité, obligatoire, d'opposition, de continuité, ainsi qu'un contrat de conformité. En conséquence, les caractéristiques du contrat d'assurance peuvent être formulées comme suit :

- Un contrat d'assurance est un contrat probable : c'est-à-dire qu'il est basé sur un risque probable.
- Le contrat d'assurance est un contrat de compensation en ce sens que les deux parties reçoivent une compensation pour ce qu'il a fourni.
- Le contrat d'assurance est un contrat bilatéral obligatoire, l'assureur est donc obligé de verser une indemnité à l'assuré en cas de réalisation de risque, et ce dernier est obligé de payer les primes d'assurance.
- Un contrat d'assurance est un contrat continu, et cela se manifeste par la mise en œuvre d'obligations sur des périodes multiples ou périodiques.
- Le contrat d'assurance est un contrat de conformité, car la compagnie d'assurance impose des conditions qui sont acceptées par l'assuré sans discussion.

1.5.2 Les Parties du contrat d'assurance

- **L'assureur :** Le principal intervenant dans le contrat d'assurance est généralement l'assureur, une société par actions d'assurances dont l'objet est de réaliser des profits. L'assureur conclut le contrat soit par lui-même, soit par le biais de ses mandataires, délégués ou courtiers [1].
- **L'assuré :** l'assuré présente souvent trois caractéristiques :
  - La partie contractante (souscripteur) de la police d'assurance.
  - La personne exposée au risque objet de l'assurance.
  - La personne qui reçoit une indemnité de la part de la compagnie d'assurance en cas de survenance du risque, objet de l'assurance, et dans ce cas, il est appelé le bénéficiaire.

Cependant, ces trois caractéristiques peuvent ne pas être disponible ensemble chez la personne de l'assuré, le bénéficiaire peut différer de l'assuré, ce qui est évident dans l'assurance responsabilité civile.

1.7 Les éléments de l'assurance : Les éléments de l'assurance sont représentés en trois éléments : le risque, la prime et le montant de l'assurance.

- **Le risque :** il est considéré comme l'un des piliers les plus importants de l'assurance, qui est un accident probable dont la survenance ne dépend pas de la volonté de l'une des parties du contrat d'assurance ou du bénéficiaire du contrat d'assurance. Il peut également être défini comme un futur accident potentiel qui n'implique pas la volonté de l'une des parties à sa survenance.[1]

A partir de ces définitions, on peut tirer la définition suivante : un risque est un accident futur, qui est susceptible de se produire, et sa survenue est indépendante de la volonté des parties au contrat d'assurance, et a un emplacement de projet assurable.

- **La prime :** signifie que « la contribution que l'assuré verse à l'assureur en échange de la garantie qui lui a été accordée, payée au début de la période d'assurance »[2], et la prime est également le montant d'argent que l'assuré en échange de la couverture des risques assurés, donc la prime est toujours la base. pour estimer la valeur du risque, si le risque change, la prime évaluera avec lui, avec augmentation ou diminution.

La prime comprend les éléments suivants : la tranche nette, les bénéfices, les frais, et dans certains cas le législateur décide d'ajouter un certain pourcentage sous forme de contribution à certains fonds d'indemnisation des dommages corporels d'accidents de la circulation qui ont été établis en vertu de la loi de finances de 1971.[3]

- **Montant de la garantie :** Par montant d'assurance, nous entendons le montant que les parties conviennent de garantir au titre du contrat d'assurance.

---

[1] François couilbault et Constant eliashberg, op.cit. p. 54.
[2] Ibid., p. 55.
[3] Introduction à l'étude du droit algérien des assurances .p 51-52

L'engagement que l'assureur a pris sur lui-même en cas de réalisation du risque est fondé sur un paiement, et il est généralement exprimé en un montant d'argent, qui peut être une indemnité ou un paiement forfaitaire comme dans le cas d'une assurance-vie[1].

Section 2 : La tarification en assurance dommages

2.1. Définition de la tarification

C'est le processus par lequel la prime d'assurance ou taux de prime est déterminé, et le prix de l'assurance est fonction des coûts de production est donc similaire à d'autres produits, sauf que la tarification de l'assurance diffère de la tarification des produits, dans le domaine des produits, l'entreprise connaît bien le coût de production de ces produits à l'avance, de sorte que les prix de ces produits sont déterminés pour couvrir tous les coûts, ainsi que pour maximiser la marge bénéficiaire, mais dans le domaine de l'assurance à l'avance, il est possible que la prime d'assurance ne soit pas suffisante pour payer toutes les indemnités et dépenses pendant la période d'assurances, et la raison en est que les pertes et dépenses réelles ne peuvent être déterminées qu'après la fin de la période de la police d'assurance.

2.2 La prime (cotisation)

La prime est l'un des piliers de l'assurance et c'est le montant que l'assuré paie à l'assureur en échange de la promesse de ce dernier de couvrir le risque soumis à l'assurance en cas de survenance. La prime représente le prix d'une unité d'assurance, car c'est comme tout autre prix de produit qui est fonction des coûts. Donc En générale on peut définir la prime d'assurance :C'est le prix que le preneur d'assurance (assuré) doit payer pour bénéficier de la couverture d'assurance en cas de sinistre.

2.2.1. La prime pure : C'est le montant que la compagnie d'assurance est tenue de verser à l'assuré en réparation des pertes résultant de la réalisation de risques sans augmentation ni diminution[2], obtenu en calculant l'espérance mathématique du total des

[1]François couilbault et Constant eliashberg, op.cit. p. 55.
[2]Michel Denuit, Arthur Charpentier, " *Mathématiques de l'assurance non vie (Principes fondamentaux de théorie du risque)* ", tome 1, ECONOMICA, 2004,P.110.

sinistres[1], car il reflète le minimum requis par l'assureur pour sa sécurité contre la faillite. La prime d'équilibre qui couvre les pertes résultant de la réalisation du risque quelles que soient les dépenses engagées par l'assureur et les bénéfices, ce qui signifie que la prime de risque doit être égale au coût attendu des catastrophes, qui est estimé sur la base de deux composantes :

- Montant moyen de l'indemnisation à verser.
- La probabilité de l'accident.

Soit S la variable aléatoire des montants totaux des pertes enregistrées pendant une année, et soit N la variable aléatoire du nombre de pertes enregistrées cette année-là. Et X_i le montant de perte, où i=1,…, N. en conséquence, nous écrivons :

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad (2.1)$$

Comme nous l'avons mentionné, la prime de risque est représentée dans l'espérance mathématique des pertes totales, c'est-à-dire en supposant les deux hypothèses, la première étant que $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ est indépendant et suivant une distribution similaire, et la seconde est l'indépendance entre les sommes $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ et le nombre de pertes n puis[2] :

$$E(S) = E(N)E(X_1) \qquad (2.2)$$

2.2.2 La prime d'inventaire : l'article 80 de la loi 95-07 sur les assurances définit la prime d'inventaire comme la prime pure correspondant au coût du risque augmenté des frais de gestion. supportés par l'assuré [4], et en conséquence :

$$\prod_{inv}(S) = E(S) + frais\ de\ gestion \qquad (2.3)$$

2.2.3 La prime nette : Comprend la prime pure plus les frais de recouvrement, et sur celui-ci :

$$\prod(S) = \prod_{inv}(S) + frais\ d'acquisition \qquad (2.4)$$

En combinant le coût de fonctionnement et de collecte nous obtenons le chargement de sécurité, donc :

[1] Christian Partrat, Jean-Luc Besson, op.cit, p.62.
[2] David C. M. Dickson, "*Insurance Risk and Ruin*", International Series on Actuarial Science, Cambridge University Press, 2006,p.53-55.

$$\prod(S) = E(S) + chargement\ de\ sécurité. \qquad (2.5)$$

La prime commerciale : est la prime nette plus les frais, et c'est là :

$$\prod_{com}(S) = \prod(S) + Taxes\ et\ chargement\ fiscaux \qquad (2.6)$$

2.2.4 La prime totale : il est représenté par le coût total du service en ajoutant la marge bénéficiaire à l'acompte commercial, on obtient le montant effectivement payé par l'abonné ou ce qu'on appelle aussi le prix de l'assurance :

$$\prod_{tot}(S) = \prod_{com}(S) + Marge\ de\ profit \qquad (2.7)$$

2.3 Méthode de tarification en assurance des biens et responsabilité

Il existe trois méthodes de base de tarification en ce qui concerne la propriété et La responsabilité :

2.3.1 Tarification individuelle

Cette méthode signifie que le détenteur du risque supportera une prime d'assurance et dépend dans une large mesure de l'équité de la personne en charge du processus de tarification. La tarification selon cette méthode est généralement basée sur des données statistiques relatives à un groupe similaire.

2.3.2 Tarification de la notation

Dans cette méthode, les unités de risque sont classées en groupes homogènes, et chaque classe a son propre prix et est égale à toutes les unités de risque appartenant à la même catégorie. Le prix est calculé de cette manière soit par la méthode de la prime nette,soit par la méthode de la perte.

2.3.3 Tarification cumulative

Selon cette méthode, le prix varie entre les unités de risque appartenant à la même catégorie de prix en fonction de la différence des nombres attendus pour chaque unité exposée au risque. Cette différence de prix peut être basée ou la taille de l'unité à risque ou selon le chargement détaillé de la période de qualité de l'unité à risque. Par conséquent, il ya quatre tarification cumulative qui sont : tarification de barème, tarification d'expérience, programmes de remise futurs et de prime.

2.4 **Objectifs tarifaires :** La tarification en assurance vise à atteindre les objectifs suivants :

- Que la prime est suffisante pour couvrir toutes les pertes attendues, les dépenses et les commissions supportées par la compagnie d'assurance, ainsi que pour obtenir un rendement des bénéfices afin qu'elle continue dans sans travail est ne soit pas exposée à des difficultés financières, car connaître avec précision la prime d'assurance n'est pas facile car elle est payée à l'avance mais elle est connue après à la fin de la période de couverture d'assurance.
- Que la prime d'assurance est cohérente avec la couverture d'assurance accordée, c'est-à-dire qu'elle ne dépasse pas une très forte augmentation par rapport au coût réel car cela est contraire à l'intérêt public, car l'assuré paie des primes injustifiée à l'assureur.
- La prime d'assurance doit être compétitive car elle aide à l'entreprise à attirer des clients et à obtenir un avantage tarifaire compétitif.
- Pour que la prime d'assurance soit équitable, les taux pour les risques similaires doivent être uniformes autant que possible.

Section 3: Produits d'assurance dommages

2.1. Définition d'un produit d'assurance dommages

Un produit d'assurance dommages est un produit commercialisé par un assureur en agence ou en ligne à destination des personnes physiques ou morales dans le but de protéger et de garantir financièrement et juridiquement contre des risques inhérents à l'utilisation d'un bien ou d'un service.

Ce type d'assurance est divisé en deux parties principales, qui sont l'assurance sur les objets ou l'assurance des biens et de la responsabilité civile.

2.2. La première branche : l'assurance des biens

Le but de ce type d'assurance est de garantir l'assuré contre les dangers qui l'affectent directement et endommagent son argent et ses biens, en fournissant un ensemble des produits d'assurance pour réparer les dommages causés à l'assuré du fait de la réalisation d'un risque assuré parmi les produits d'assurance, on trouve :

3.2.1. Assurance contre les risques d'incendie

Ce produit d'assurance couvre le risque d'incendie qui affecte les particuliers dans leurs maisons ou leur biens mobiliers et leur avoirs en mobilier, outils et appareils, et la police d'assurance incendie couvre les matières convenues à la date de souscription dans le contrat d'assurance incendie, sachant que la prime d'assurance dépend d'un ensemble de facteurs tels que le type de bâtiment et sa proximité avec les casernes de pompiers et autres.

3.2.2. Assurance maritime

Elle est considérée comme l'un des types les plus anciens d'assurance commerciale, car ce type d'assurance comprend un groupe de garanties, que nous énumèrerons comme suit :

- Sécurisation de la coque et de l'équipement du navire contre les risques collision, de noyade et de dommages, avec indemnité versée à son propriétaire.
- L'assurance des matériaux transportés à bord de navire et ici la valeur des pertes subies par les marchandises à la suite de dommages, de naufrage ou pertes sont couvertes.
- Assurance du capitaine et des marins et du frais.
- L'assurance responsabilité civile de l'armateur contre les tiers pour tout dommage qu'il pourrait causer à autrui, et c'est ce qui est inclus dans l'assurance responsabilité civile.

3.2.3. Assurance aérienne

Les contrats de ce type d'assurance couvrent les risques liés au fret aérien et comprennent :

- Les dangers de l'aéronef lui-même, qui sont liés à sa coque, son équipement.
- Les dangers des marchandises et des matériaux expédiés contre les dommages, la perte et autres.
- Dangers liés au capitaine et à l'équipage.
- Dangers de la responsabilité civile envers autrui.

3.2.4. Assurance Terrestre

Ce type d'assurance comprend :

- Transport ferroviaire, qui comprend la couverture des dangers pour la carrosserie des véhicules, la cargaison, l'équipage et les passagers.
- Voitures de toutes sortes, et comprend la couverture des dangers qui infligent la voiture, le conducteur et les marchandises expédiées.
- L'assurance vol couvre les risques découlant de l'appropriation illégale d'argent et de biens par la violence et la force, ainsi que par l'intrusion et la prise secrètes.

3.3 La deuxième branche : l'assurance responsabilité civile envers autrui

L'assurance responsabilité civile est l'assurance de l'assuré contre la récurrence d'autrui avec la responsabilité, le dommage affecte ici son argent indirectement, et c'est un dommage qui résulte de la réalisation de la responsabilité, et souvent la source de ce dommage est la responsabilité délictuelle comme c'est le cas des accidents de voiture, quand on cause des dégâts à autrui.

Conclusion

Nous avons consacré ce chapitre à l'étude du cadre générale et théorique de l'assurance et les lois fondamentales de l'assurance. Cette étude nous permet de faire la synthèse suivant :

L'assurance est une activité économique indispensable au bon fonctionnement et au développement de l'environnement économique du pays. Ce secteur permet aussi aux particuliers de protéger leur patrimoine, c'est ce qui est impossible d'obtenir à l'échelle individuelle.

Le secteur de l'assurance à une capacité de mobilisation de l'épargne assez conséquente grâce à l'inversion de son cycle production et à la connaissance de mécanisme de l'assurance.

Le produit d'assurance est vendu par les entreprises d'assurances sous forme d'un contrat, passé généralement entre l'assureur et l'assuré. Il est le plus souvent diffusé par des intermédiaires. Il s'agit d'un produit complexe, qui repose sur la promesse faite par l'assureur d'accomplir les prestations prévues par la Police en cas de réalisation d'un risque déterminé. Toutefois, une telle garantie est assortie de conditions et de restrictions qu'il appartient à l'assuré de bien connaître.

L’objectif principal de la tarification est que la prime soit suffisante pour payer tous sinistre et dépenses future reliés au produit d’assurance tout en atteignant un profit ciblé.

Chapitre 2 : Les méthodes de tarification en assurance dommages

Introduction du deuxième chapitre

Le chapitre s'articule autour de trois sections, la première section aborde d'un point de vue plus précis la notion de tarification (dite à priori) pour des risques de mase. Nous présentons ainsi en détails l'utilisation des modèles linéaires généralisés. La deuxième section est consacrée à la tarification par expérience (ou à posteriori) très utile (bonus-malus). La troisième section est concentrée sur le calcul de prime dans la théorie de crédibilité.

Section1 : Tarification à priori

La tarification à priori est une méthode de tarification utilisée par les actuaires afin de mieux segmenter les portefeuilles d'assurance. Cette méthode consiste à prédire le nombre espéré de réclamations en fonction des caractéristiques observables des assurés tels que l'âge, le sexe, le kilométrage, l'utilisation du véhicule, l'occupation, etc. Le but de la tarification à priori est de construire des classes de risque homogènes où les assurés appartenant à une même classe de risque paient la même prime. Une classe de risque peut être vue comme un ensemble de caractéristiques, où les assurés appartenant à une même classe de risque ont des caractéristiques observables identiques.

1 .Modèles linéaires généralisés

1.1 Petit historique des applications actuarielles des modèles de régression

Afin de bien comprendre les généralisations du modèle linéaire gaussien dont il est question dans cette section, rappelons que dans le cadre de ce modèle, on suppose que l'on cherche à modéliser une variable Y à l'aide d'un certain nombre de variables explicatives

$X = (X_1, \dots, X_p)^t$. De façon naturelle, la régression linéaire revient à supposer que

$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ Où $\mu = X^t\beta$.

Ce modèle proposé par Legendre et Gauss au début du 19ème siècle, et étudié en détails par Fisher dans les années 20, s'est imposé en économétrie, mais s'avère difficilement utilisable en assurance.[1]

Les variables que l'on cherche à modéliser en assurance sont des coûts (à valeur dans$\mathbb{R}^+$), des nombres de sinistres (à valeur dans$\mathbb{N}$) ou des indicatrices du fait d'être sinistré dans l'année (à valeur dans $\{0,1\}$). Dans ce dernier cas, nous avions vu que les variables

[1] Legendre, A. Nouvelles methods pour la détermination des orbites des comètes, courcly, city paris, 1805.

latentes pouvaient être une solution intéressante. Plus particulièrement, on considérait des modèles de la forme

$Y \sim Bin(1, \mu)$ *où* $\mu = E[Y] = F[X^t\beta]$, [1]

Où F désigne la fonction de répartition associée à la loi logistique (pour les modèles LOGIT) ou à la loi gaussienne centrée et réduite (pour les modèle PROBIT).

De façon générale, on souhaite garder la structure linéaire du score en β, et considérer que l'espérance de Y est une transformation de cette combinaison linéaire. Plus précisément, on voudrait passer à des modèles de régression du type

$Y \sim Loi(\mu)$*où* $\mu = E[Y] = g^{-1}(X^t\beta)$,[2]

Où g^{-1} est une fonction ''bien choisie'', et où Loi désigne une loi paramétrique permettant de modéliser correctement notre variable d'intérêt.

Ce type d'approche est à la base des modèles dits ''linéaires généralises'', qui étendent le modèle gaussien à une famille de lois particulière, appelée famille exponentielle (naturelle).

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la famille des modèles linéaires généralisés. Font partie de cette classe, en plus de la loi normale, les lois de probabilité à deux paramètres θ *et* $\emptyset$dont la densité peut se mettre sous la forme

$$f(y\backslash\theta, \emptyset) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{\emptyset} + c(y, \emptyset)\right), y \in S. \quad (1.1)$$ [3]

Où le support S est un sous-ensemble de$\mathbb{N}$ *ou de* $\mathbb{R}$. Le paramètre θest appelé paramètre naturel et $\emptyset$ est le paramètre de dispersion.

Souvent, une pondération est nécessaire, et on remplace $\emptyset$ par $\emptyset/\omega$, où ω est un poids connu à priori.

Examinons quelques exemples de lois usuelles dont la densité peut se mettre sous la forme (1.1).

Exemple1.1 (loi de poisson). Si on considère la loi de poisson poi(λ), on a $f(y|\lambda) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^y}{y!} = \exp(y\ln\lambda - \lambda - \ln y!)$, $y \in \mathbb{N}$,

D'où $S = \mathbb{N}, \theta = \ln\lambda, \emptyset = 1, b(\theta) = exp\theta = \lambda$ et $c(y, \emptyset) = -\ln y!$

---

[1] Ahn, S.E., C.S., Park, H.M., Kim. Hazard rate estimation of a mixture model with censored lifetimes, Stoch. Environ. Res. Asses.21 (2007), 711-716

[2] Ahn, S.E., C.S., Park, H.M., Kim. Hazard rate estimation of a mixture model with censored lifetimes, Stoch. Environ. Res. Asses.21 (2007),op. cit., 711-716

[3] Kudryavtsev, A.,2009. Using quantile regression for rate- making. Inserance: mathematics and Economics 45, 296-304.

1.2 Moyenne et variance

Pour une variable aléatoire Y dont la densité peut se mettre sous la forme (1.1), on peut Exprimer les deux premiers moments de Y à l'aide des fonctions b et c. Pour ce faire, notons

$U = \frac{\partial}{\partial \theta} lnf(y|\theta, \emptyset)$.[1]

Et

$U' = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} lnf(Y|\theta, \emptyset)$. [2]

De sorte que l'information de Fisher vaut V [U] = -E [U'].

Proposition1. Pour une variable aléatoire Y dont la densité est de la forme (1.1), on a E [Y] = b' (θ) et V [Y] = b''($\theta)\emptyset/\omega$.[3]

Où b' et b'' d´désignent respectivement les dérivées premières et secondes par rapport àθ.

1.3 Modèle de régression

Considérons des variables aléatoires indépendantes mais non identiquement distribuées $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ dont la densité est de la forme (1.1).Plus précisément, supposons que la densité de probabilité de y_i est

$$f(Y_i|\theta_i, \emptyset) = \exp\left(\frac{y_i\theta_i - b(\theta_i)}{\emptyset|\omega_i} + c(y_i, \emptyset)\right), y_i \in S. \quad (1.2).$$ [4]

Dès lors, la densité jointe de $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ est $f(Y|\theta, \emptyset) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i|\theta_i, \emptyset) =$ *expi=1nyiθi−i=1nb(θi)∅/ωi+i=1nc(yi,∅)*

Bien entendu, la vraisemblance vaut $L(\theta, \emptyset|y) = f(y|\theta, \emptyset)$. On suppose que les$\theta_i$sont fonction d'un ensemble de *p*+1 paramètres$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$, disons. Plus précisément, notant μ_i la moyenne dey_i, on suppose

$g(\mu_i) = \beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij} = x_i^t \beta = \eta_i$ [1].

---

[1] Antoniadis, A., J, Berruyer, et R. Carmona (1992). Régression non linéaire et applications. Economica.
[2] Antoniadis, A., J, Berruyer, et R. Carmona (1992). Régression non linéaire et applications. Economica. Op. cit.
[3] Bailey, A. L., credibility procedures, Laplace's generalization of bayes' rule and the combination of collateral knowledge with observed data, proceedings of the casualty Actuarial Society, vol.37,7-23,1950.
[4] Basu, A.P., and Ebrahimi, N. Bayesian approach to life testing and reliability estimation using asymmetric loss function, J. Statist. Plan. Infer., 29, 21-31, 1991.

Où la fonction monotone et dérivable g est appelée fonction de lien, le vecteur $x_i$contient des variables explicatives relatives à l'individu i et le vecteur β contient les p+1 paramètres.

Ainsi, un modèle linéaire généralisé est composé de trois éléments, à savoir

(i) de variables à expliquer $y_1, y_2, \dots, y_2$dont les densités sont de la forme (1.2).

(ii) d'un ensemble de paramètres $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)^t$appartenant à un ouvert non vide de R^{p+1}et des variables explicatives $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ la matrice X de dimension n×(p+1) est supposée être de rang p+1, i.e.la matrice carrée X^tXde dimension(p+1) ×(p + 1) est inversible.

(iii) d'une fonction de lien g telle que qui lie le prédicateur linéaire $\eta_i = x_i^t\beta$ à la moyenne μ_i dey_i.

La plupart du temps, les variables explicatives sont toutes catégorielles dans un tarif commercial. Une compagnie segmentant selon le sexe, le caractère sportif du véhicule et l'âge de l'assuré. Un assuré sera représenté par un vecteur binaire donnant les valeurs des variables ayant servi à coder les caractéristiques de l'individu.

On choisit comme niveau de référence (i.e. celui pour lequel tous les X_i valent 0) les modalités les plus représentées dans le portefeuille. Les résultats s'interpréteront ensuite comme une sur ou sous-sinistralité par rapport à cette classe de référence. Ainsi, le vecteur

(0, 1, 1, 0) Représente un assuré masculin de moins de 30 ans conduisant un véhiculé sportif. Le prédicateur linéaire sera de la forme $\beta_0 + \sum_j^p \beta_j X_j$ et le nombre ou le coût moyen de sinistre est en général une fonction non-d´ecroissante du score. L'ordonnée à l'origine, ou intercepte, $\beta_0$représente donc le score associé à la classe de référence, si $\beta_j > 0$, cela indique que le fait de présenter la modalité traduite par $X_j$est un facteur aggravant la sinistralité par rapport à celle de l'individu de référence, au contraire $\beta_j < 0$ indiquera les classes d'assurés moins risqués que les individus de référence.

Exemple : *(Régression de poisson). La régression log-linéaire de poisson est obtenue en considérant Y_i~ Poi (λ_i), la fonction de lien étant celle induite par le paramètre naturel,*

i.e.

Inλ_i=$X_i^t\beta \leftrightarrow \lambda_i$ exp($X_i^t\beta$).

---

[1] Basu, A.P., and Ebrahimi, N. Bayesian approach to life testing and reliability estimation using asymmetric loss function, J. Statist. Plan. Infer., 29, op.cit. 21-31, 1991.

Le plus souvent, on dispose d'une mesure de l'exposition au risque et on considère $Y_i \sim Poi\ (d_i \lambda_i)$ où d; est la durée de la couverture octroyée à l'assuré i (cette durée multiplie la fréquence annuelle 1; sous l'hypothèse d'un processus de Poisson gouvernant la survenance des sinistres).

1.4 Fonction de lien canonique

Chacune des lois de probabilité de la famille exponentielle linéaire possède une fonction de lien spécifique, dite fonction de lien canonique, définie par $\theta = \eta$, où e est le paramètre naturel. Le lien canonique est tel que g(μ_i)= θ_i li, or, $\mu_i = b'(\theta_i)$ d'où $g^{-1} = b'$. Les fonctions de lien canoniques sont reprises au Tableau 1.2. [1]

Table. N°1 : Liens canoniques associés aux lois de probabilité usuelles dont la densité est de la forme (1.1)

Loi de probabilité	fonction de lien canonique
Normale	η = μ
Poisson	η = In μ
Gamma	η = $\frac{1}{\mu}$
Binomiale	η =ln $\mu - \ln(1-\mu)$

Source: Buchinsky, M., 1998. Recent advances in regression models: a practical guideline for empirical research. The Journal of Human Resources 33 (1), 88-126.

1.5 Equations de vraisemblance

En pratique, les coefficients de régression $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ et le paramètre de dispersion sont inconnus et doivent donc être estimés sur la base des données. Dans cette subsection, nous nous concentrons sur l'estimation des coefficients de régression par la méthode du maximum de vraisemblance. Il s'agit donc de maximiser la log-vraisemblance

$$L\ (\theta(\beta)|y, \emptyset) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(y_i|\theta_i, \emptyset) = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i\theta_i - b(\theta_i)}{\emptyset/\theta_i} + \sum_{i=1}^{n} c(y_i, \emptyset)$$ [2]

Où E $[y_i] = b^{'}(\theta_i) = \mu_i$ et $g(\mu_i) = X_i^t\beta = \eta_i$ avec g monotone et dérivable. Rechercher les estimateurs du maximum de vraisemblance revient à rechercher les $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ qui vérifient les équations

$U_j = 0$ pour j = 0,1,…,p.

---

[1] Buchinsky, M., 1998. Recent advances in regression models: a practical guideline for empirical research. The Journal of Human Resources 33 (1), 88-126.

[2] Dean, C., J. Lawless et G. Willmot. 1989." A mixed poisson-inverse Gaussian regression model". Canadian Journal of Statistics 17. P. 171-182.

$$U_j = \frac{\partial L(\theta(\beta)\backslash y,\emptyset)}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f(y_i \backslash \theta_i,\emptyset)}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left(\frac{y_i\theta_i - b(\theta_i)}{\emptyset/\omega_i}\right) + c(y_i,\emptyset).$$ [1]

A fin d'obtenir U_j, on se sert de la formule

$\frac{\partial \ln f(y_i|\theta_i,\emptyset)}{\partial \beta_j} = \frac{\partial \ln f(y_i|\theta_i,\emptyset)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_i}.$

Comme $\mu_i = b^{'}(\theta_i)$, il vient

$$\frac{\partial \ln f(y_i|\theta_i,\emptyset)}{\partial \theta_i} = \frac{y_i - b^{'}(\theta_i)}{\emptyset/\omega_i} = \frac{y_i - \mu_i}{\emptyset/\omega_i}$$

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial \theta_i} = b^{''}(\theta_i),$$

Et

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_j} = \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j} = X_{ij} \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i}.$$

On obtient

$$\frac{\partial \ln f(y_i|\theta_i,\emptyset)}{\partial \beta_j} = \frac{\frac{\partial \ln f(y_i|\theta_i,\emptyset)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_j}}{\frac{\partial \mu_i}{\partial \theta_i}}$$

$$= \frac{(y_i-\mu_i)X_{ij}\frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i}}{\emptyset/\omega_i b^{''}(\theta_i)}$$

$$= \frac{(y_i-\mu_i)X_{ij}}{V[Y_i]} \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i},$$

Et finalement $U_j = \sum_{i)1}^{n} \frac{(y_i-\mu_i)X_{ij}}{V[Y_i]} \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i-\mu_i)X_{ij}}{V[Y_i]g^{'}(\mu_i)}.$

Comme V $[Y_i]$= $b^{''}(\theta_i)\emptyset/\omega_i$

$$U_j = 0 \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \omega_i (y_i - \mu_i) \frac{X_{ij}}{b^{''}(\theta_i) g^{'}(\mu_i)} = 0,$$

Où le paramètre $\emptyset$ n'apparaît plus. Les équations de vraisemblance relatives à β peuvent donc être résolues sans se préoccuper de $\emptyset$ .notez que si on choisit la fonction de lien canonique, les équations de vraisemblance deviennent

$\sum_{i=1}^{n} \omega_i (y_i - \mu_i) X_{ij} = 0$ Pour j=0, 1, …, p.

1.6 Résolution des équations de vraisemblance

[1] Calabria, R. and G. Pulcini, 1969. Point estimation under asymmetric loss functions for left truncated expontial samples. Comm. Statist. Theory Methods, 25 :585-590.

Les estimateurs du maximum de vraisemblance $\widehat{\beta_J}$ des paramètres $\beta_j$sont solution du système (1.3). Les équations composant ce système ne possèdent en général pas de solution explicite et doivent dès lors être résolues numériquement. On peut par exemple utiliser la méthode de Newton-Raphson, que nous rappelons brièvement ci-dessous.

Notons $U(\beta)$ le vecteur gradient de la log-vraisemblance, dont la composante j est $U_j(\beta) = \frac{\partial}{\partial \beta_j} L(\beta \backslash y)$ [1]

Et notons H (β) la matrice hessienne de $L(\beta \backslash y), i.e.$ celle dont l'élément (j, k) est $\frac{\partial^2}{\partial \beta_j \partial \beta_k} L(\beta \backslash y)$.

Pour β^* proche de$\hat{\beta}$, un développement limité de Taylor donne

$$0 = U(\hat{\beta}) \approx U(\beta^*) + H(\beta^*)(\hat{\beta} - \beta^*),$$

Qui permet d'écrire

$U(\beta^*) + H(\beta^*)(\hat{\beta} - \beta^*) \approx 0,$

Ou encore

$$\hat{\beta} \approx \beta^* - H^{-1}(\beta^*)U(\beta^*).$$

Ceci suggère une procédure itérative pour obtenir l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\beta}$ de β, partant d'une valeur initiale $\hat{\beta}^{(0)}$ que l'on espère proche de $\hat{\beta}$, on définit la (r + 1)-ème valeur approchée $\hat{\beta}^{(r+1)}$ de $\hat{\beta}$ à partir de la r-ème $\hat{\beta}^{(r)}$ par

$$\hat{\beta}^{(r+1)} \approx \hat{\beta}^{(r)} - H^{-1}(\hat{\beta}^{(r)})U(\hat{\beta}^{(r)}).$$

Cette procédure itérative pour obtenir l'estimateur du maximum de vraisemblance correspond à la méthode de Newton-Raphson.

Remarque : signalons une méthode astucieuse de résolution itérative des équations de vraisemblance. A l'étape r, il suffit de minimiser un critère des moindres carrés pondérés du type

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k (z_k - x_k^t \beta)^2$$

[1] Calabria, R. and G. Pulcini, 1969. Point estimation under asymmetric loss functions for left truncated expontial samples. Comm. Statist. Theory Methods, op. cit. 25 :595-600.

Où les pseudo-réponses sont données par

$$z_k = x_k^t \beta^{(r)} + (y_k - \mu_k)\frac{\partial \eta_k}{\partial \mu_k}$$

Les poids

$$\omega_k^{-1} = \frac{\partial \eta_k}{\partial \mu_k} V(\mu_k)$$

Dans ces formules, μ_i et η_i sont calculées pour les valeurs courantes $\beta^{(r)}$ du paramètre β .on stoppera la procédure lorsque la différence entre $\beta^{(r)}$ et $\beta^{(r-1)}$ est suffisamment petite.

1.7 Intervalle de confiance pour les paramètres

Méthode du rapport de vraisemblance

La méthode du rapport de vraisemblance est basée sur le profil de vraisemblance, défini pour le paramètre β_j comme la fonction

$$£_j(\beta_j \backslash y) = \max_{\beta_0, \dots,\ \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_p} £(\beta \backslash y)$$ [1]

Si $\hat{\beta}_{MV}$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance de β , $2\{L(\beta_{MV} \backslash y) - L_j(\beta_j \backslash y)\}$ est approximativement de loi du khi-deux à un degré de liberté, pour autant que β_j soit la vraie valeur du paramètre, où$L_j(\beta_j \backslash y) = \ln £_j(\beta_j \backslash y)$. Dés lors, un intervalle de confiance au niveau $1 - \alpha\ pour\ \beta_j$ est fourni par l'ensemble des valeurs ζ telles que la différence est suffisamment petite, ou encore telles que $L(\hat{\beta}_{MV} \backslash y) - L_j(\zeta \backslash y)$ est suffisamment petite, ou encore telles que $2\{L(\hat{\beta}_{MV} \backslash y) - L_j(\zeta \backslash y)\} \leq x^2_{1-\alpha,1}, i.e.$

$$IC = \{\zeta \in \mathbb{R} | L_j(\zeta \backslash y) \geq L(\hat{\beta}_{MV} \backslash y) - \tfrac{1}{2} x^2_{1-\alpha,1}\}.$$

Les extrémités de cet intervalle sont obtenues numériquement en approximant la fonction de vraisemblance par une surface de degré 2. Spécifiquement, nous recourons à l'approximation

$$L\left(\frac{\beta}{y}\right) \approx L\left(\frac{\beta_0}{y}\right) + (\beta - \beta_0)^t U(\beta) + \frac{1}{2}(\beta - \beta_0)^t H(\beta)(\beta - \beta_0)$$

[1] Calabria, R. and G. Pulcini, 1969. Point estimation under asymmetric loss functions for left truncated expontial samples. Comm. Statist. Theory Methods, op. cit. 25 :600-605.

Qui devrait être de bonne qualité pour β_0 suffisamment proche deβ . en approximant $H(\beta)$ par son espérance mathématique $-\tau$ on obtient encore

$$L\left(\frac{\beta}{y}\right) \approx L\left(\frac{\beta_0}{y}\right) + (\beta-\beta_0)^t U(\beta) + \frac{1}{2}(\beta-\beta_0)^t \tau(\beta-\beta_0)$$

Méthode de Wald

Grâce à l'approximation normale pour$\hat{\beta}$, un intervalle de confiance au niveau de confiance $1-\alpha$ pour β_j est donné par

$$[\hat{\beta}_j \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{v_{ij}}]$$ [1]

Où v_{ij} est l'élément diagonal (jj) deτ^{-1}. Cet intervalle de confiance est souvent appelé intervalle de Wald. Les éléments de la diagonale de τ^{-1} traduisent donc la précision des estimations ponctuelles$\hat{\beta}_j$, tandis que les éléments hors diagonale estiment les covariances existant entre les estimateurs desβ_j.

1.8 Tests d'hypothèse sur les paramètres

On désire tester l'hypothèse $H_0: \beta = \beta_0 = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q)^t$ contre $H_1: \beta = \beta_1 = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_Q)^t$ où $q < p < n.$ ceci revient donc à tester la nullité simultanée de $\beta_{q+1}, \dots, \beta_p$.

On utilise alors la statistique Δ qui vaut la différence entre les déviances des deux modèles, à savoir

$\Delta = D_0 - D_1 = 2(\ln L_{\hat{\beta}_1}(y) - \ln L_{\hat{\beta}_0}(y)) \geq 0.$ [2]

On peut montrer que Δ est approximativement de loi x^2_{p-q}. On rejette H_0 au profit de H_1 lorsque

$$\Delta_{obs} > X^2_{p-q;1-\alpha},$$

Où $X^2_{p-q;1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi X^2_{P-Q} .

L'intérêt de ce type de test apparait lorsque l'actuaire se demande s'il convient de grouper certains niveaux des variables catégorielles. En effet, le test de nullité des coefficients de régression indique seulement si le niveau de référence.il se pourrait cependant que deux niveau de référence. On s'intéressera alors à un test de type $H_0: \beta_1 = \beta_2$. on pourrait tester$H_0: \beta_3 = 0$ et $H_0: \beta_4 = 0$, qui nous indiqueraient si les moins de 30 ans ou les plus 60

[1] Dean, C., J. Lawless et G. Willmot. 1989." A mixed poisson-inverse Gaussian regression model". Canadian Journal of Statistics 17. op. Cit. P. 175-186.

[2] Calabria, R. and G. Pulcini, 1969. Point estimation under asymmetric loss functions for left truncated exponentiel samples. Comm. Statist. Theory Methods.OP. cit,25:595-600.

ans différent des $30 - 65$ ans, mais aussi $H_0 : \beta_3 = \beta_4$qui nous indiquera s'il convient de grouper les moins de 30 ans avec les plus de 65 ans.

Section 2 : Tarification à posteriori

1 Systèmes bonus-malus

1.1 Description d'un système bonus-malus

Un système bonus-malus est un système de tarification où en début de période un risque classé dans la classe de tarif C_t. En fin de période, le risque est classé dans la classeC_{t+1}, d'après la règle de décision u. La règle de décision u détermine la classe de tarif C_{t+1} en fonction de la classe de tarif $C_t$et du nombre d'accidents responsable observé Y_{t+1} de la période précédente

$C_{t+1} = u(C_t, Y_{t+1})$ [1]

A $t = 0$, la valeur de C_0 et fixé à i_0 .

1.2 Analyse d'un système bonus-malus

Structure markovienne :

Il est généralement supposé que $(Y_t)_{t \epsilon \mathbb{N}}$forme une suite de variable aléatoire indépendante et identiquement distribuées. Ceci revient à assumer que les habiletés de conduite d'un assuré ne changent pas dans le temps, i.e. que les conducteurs n'apprennent pas de leurs expériences.

Proposition 1 : (Chaine de Markov de la classe de tarif)

Le processus de classe de tarif $(C_t)_{t \epsilon \mathbb{N}}$forme une chaine de Markov homogène.

Preuve : Soit $i_t$la valeur prise par la classe de tarif au temps t. Avec (2.1) nous obtenons

$$P\big(C_{t+1} = i_{t+1} \big| C_t = i_t, \dots, C_0 = i_0 \big)$$ [2]

$$= P(u(i_t, Y_{t+1}) = i_{t+1} | \, u(i_{t-1}, Y_t) = i_t , \dots, C_0 = i_0)$$

$$= P(u(i_t, Y_{t+1}) = i_{t+1})$$

$$= P(u(i_t, Y_{t+1}) \mid C_t = i_t) = P(C_{t+1} = i_{t+1} | \, C_t = i_t).$$

Mesures d'efficacité (système bonus-malus)

Dans cette partie nous précision la définition des éléments sur lesquels reposent l'efficacité d'un système de tarification proposé par Lemaire pour analyser l'efficacité d'un système bonus-malus Lemaire (1995, 2004), et donnent les mesures

---

[1] Denuit, M., Pitrebios, S., Walhin,J.-F., Marketing et Systèmes Bonus-Malus, Actu-L3,89-100,2003

[2] Denuit, M., Pitrebios, S., Walhin,J.-F., Marketing et Systèmes Bonus-Malus, Actu-L3, op. cit. p. 100-105,2003.

applicables dans le contexte d'un système bonus-malus. Pour ce faire, nous utiliserons le processus de surplus $(U_t)_{t\epsilon\mathbb{N}}$dont voici la définition rigoureuse.

Définition :(Surplus dans un système bonus-malus) soit X_{t+1} le montant des réclamations dans la période$[t, t+1]$, π(C_t) la prime chargée en début de période pour la classe C_t et u le niveau de réserve initial. Avec le niveau de surplus U_{t+1}, évalué en fin de période, nous définissons le processus de surplus $(U_t)_{t\epsilon\mathbb{N}}$ par

$$U_{t+1} = u + \sum_{s=0}^{t} \pi(C_s) - \sum_{s=1}^{t+1} X_s = u + \sum_{s=0}^{t} \pi(u(C_{s-1}, Y_s)) - \sum_{s=1}^{t+1} X_s$$

Stabilité financière

Un bon système de tarification doit induire une structure de primes qui apporte une stabilité financière à l'assureur. Les bonus attribués par le système ne doivent pas ultimement causer insuffisance des tarifs.

Définition : Pour les systèmes bonus-malus, la stabilité financière est analysée à partir du pourcentage stationnaire espéré de la prime de base que noterons par

$$b' = \sum_{j=1}^{l} a_j b_j.$$

Transfert adéquat du risque

Un système de tarification vise à faire contribuer équitablement assuré au financement des réclamations. Cependant, si les malus sont trop élevés, le système n'encourage pas les assurés à faire une réclamation et les empêche ainsi de bénéficier de la couverture à laquelle ils ont droit. Pire, il peut encourager les assurés à s'enfuir après avoir causé des dommages à des tiers. Pour éviter ces problèmes, les changements de prime entrainés par les bonus et les malus doivent être raisonnables, sans quoi le système ne transfère pas adéquatement le risque. La définition suivante présente des mesures permettant de quantifier l'ampleur des changements de prime induits par le système.

Définition : Pour les systèmes bonus-malus, l'ampleur des changements de prime induits par le système est analysée à partir du coefficient de variation de la prime

$$\rho_{t} = \frac{\sqrt{Var(\pi(C_t))}}{E(\pi(C_t))}$$ [1]

[1] Bühlman,H., Exprerience rating and credibility, Astin Bulletin, Vol. 4,p.199-207,1967.

2. Théorie de la crédibilité

2.1 Petit historique sur la théorie de crédibilité

Au sien d'un problème d'assurance hétérogène, les assurés ne sont pas tous égaux devant le risque, certains présentant un profil plus dangereux que d'autre. Réclamer une prime de montant identique pour tous pourrait donc paraitre inéquitable, car cela induirait nécessairement la sur tarification de certains assurés, et l'utilisation de ces surcroîts de prime pour dédommager les sinistres causés par les individus plus risqués.

L'idée fondamentale de la théorie de la crédibilité peut se résumer comme suit. Supposons avoir observé une police durant n années, et enregistre les montant annuels de sinistre $X_1, X_2, \dots, X_n$; X_i est le montant de sinistre généré par cette police durant $i^{ème}$ année d'observation. La prime pure "observée'' est donc.

$$\bar{p}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

2.2. Approche bayésienne crédibilité

L'ensemble des caractéristiques de risque d'un contrat est appelé niveau de risque, intuitivement, on serait porté à croire qu'il appelé à varier tout au long des différentes périodes d'observation.

On désigne par θ la variable aléatoire représentant le risque d'un assuré.

Le choix de la fonction de structure $U(\theta)$dépend de l'approche utilisée. Selon une approche bayé sienne pure. $U(\theta)$ Représente la perception à priori de l'assureur concernant le risque.

La prime bayésienne sera par$E[\mu(\theta)|X]$. Son expression est obtenue par un processus à [1]deux étapes. On doit d'abord obtenir la fonction de densité à posteriori du paramètre de risque, soit$p(\theta|x_1, \dots, x_n)$, pour ensuite en évaluer l'espérance. L'obtention de la fonction de densité à posteriori nécessite la formule de Bayes. Il en découle

$$p(\theta|x_1, \dots, x_t) = \frac{\prod_{j=1}^{t^2} f(x_j|\theta)u(\theta)}{\int \prod_{j=1}^{t} f(x_j|\theta)u(\theta)d\theta}.$$

L'espérance de la prime de risque conditionnelle aux observations est donc

$$E[\mu(\theta)|X_1 = x_1, \dots, X_T = x_t] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\theta)p(\theta|x_1, \dots, x_t)d\theta.$$

2.3 Modèle de Bühlmann :

Le calcul de la prime, selon une approche bayé sienne, nécessite la connaissance les fonction de densité $u(\theta)$ et $f(x|\theta)$.

Notation et relation de covariance :

On définit la notation suivante :

$s^2 = E\big[Var\ [X_{it}|\theta_i]\big] = E[\sigma^2(\theta_i)]$.

$a = Var\big[E[X_{it}|\theta_i]\big] = Var[\mu(\theta_i)]$.

Interprétation :

- s^2est une mesure de la non-homogénéité des périodes.
- a est une mesure de la non-homogénéité du collectif.

Modèle et prévision :

Le modèle original de Bühlmann (1969) suppose un portefeuille composé d'un i contrat, dont l'expérience est observée pendant t périodes. L'approximation linéaire $\pi_{i,n+1}$ de la prime de risque ne nécessite plus la connaissance des paramètres $m, s^2\ et\ a$ car il est possible de les estimer à partir des observations des différents contrats. Le calcul de la prime est donc développé sons une approche bayésienne empirique.

Les hypothèses du modèle de Bühlmann sont les suivantes (version la moins restrictive).

(B1) Les contrats $(\theta_i, X_i), i = 1, \dots., k$ sont indépendants, les variables aléatoires $\theta_1, \dots., \theta_I$ sont identiquement distribuées et les variables aléatoires X_{ij}ont une variance finie.

(B2) Les variables aléatoiresX_{it}, sont telles que

$$E\big[X_{ij}\big|\theta_i\big] = \mu(\theta_i), i = 1, \dots.., k, j = 1, \dots., t$$

$$Cov\big(X_{ij}, X_{jr}\big|\theta_{\Delta i}\big) = \delta_{jr}\sigma^2(\theta_i), i = 1, \dots, k, j\ r = 1, \dots, t$$

Calcul de la prime :

Le modèle classique de Bühlmann (1969) permet d'obtenir une approximation de prime risque par des fonctions linéaires homogènes et non homogènes des observations. Com dans le modèle original, cette combinaison linéaire de la forme

$$c_0^i + \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=1}^{t} c_{rj}^i X_{rj}$$

Notons que l'expression i désigne le contrat pour lequel on cherche à obtenir la prime de crédibilité. Le théorème suivant présente la prime de crédibilité non homogène du modèle classique de Bühlmann (1969).

Théorème : Pour un portefeuille tel qu'illustré précédemment et sous les hypothèses (B1) et (B2), la meilleure approximation linéaire non homogène de la prime de risque $\mu(\theta_i)$ est

$$\pi_{i,n+1}^{B} = z\bar{X}_i + (1-z)m$$

Ou

$$\bar{X}_{\boldsymbol{i}} = \frac{1}{t}\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{t}} \mathrm{X_{ij}}$$

$$z = \frac{t}{t+\frac{s^2}{a}}$$

Equilibre financier :

- Tout système de tarification à posteriori doit jouir de la propriété d'équilibre financier.
- Ceci se justifie par le fait qu'un mécanisme de tarification à posteriori n'entraîne pas de modification de la sinistralité (le cas de l'aléa excepté).
- Dans le cas du modèle de Bühlmann, ceci se traduit par $E\left[\pi_{i,n+1}^{B}\right] = zE[\bar{X}_i] + (1-z)m = m.$

Approche paramétrique :

Dans un premier temps, on peut considérer que les distributions de θ_i et $X_{ij}|\theta_i$ sont connues, comme en crédibilité bayésienne.

La notation de portefeuille n'est pas nécessaire puisque l'on détermine les distributions pour chaque contrat. On peut laisser tomber d'indice i dans les formules.

Il est maintenant très simple de calculer la prime de crédibilité de Bühlmann pour n'importe quelle combinaison de distributions.

Approche non paramétrique

Une pratique, l'approche paramétrique est d'un intérêt limité puisqu'elle nécessite toujours de déterminer les distributions de $X_{ij}|\theta_i$ etθ_i.

- Nous avons plusieurs réalisations de la variable aléatoire θ.
- $U(\theta)$ est la fonction de structure du portefeuille :

_ Avant : opinion à priori de l'assureur sur le niveau de risque d'un contrat.

_ maintenant : proportion de contrats avec un niveau de risque inférieur ou égal à θ, distribution des niveaux de risque entre les contrats.

- Homogénéité du portefeuille : à quel point les moyennes des contrats sont semblables.
- Nous devons estimer les paramètres de structure du portefeuille :

1. $m = E[\mu(\theta)]$, moyenne du portefeuille ;
2. $s^2 = E[\sigma^2(\theta)]$, variabilité moyenne du portefeuille, homogénéité temporelle.
3. $a = Var[\mu(\theta)]$, variance entre les moyennes des contrats, homogénéité du portefeuille.

- Nous développons des estimateurs sans biais des paramètres.

Estimation des paramètres du modèle de Bühlmann :

Estimation de m **:**

Intuitivement

$\widehat{m} = \bar{s} = \frac{1}{kt}\sum_{i=1}^{k}\sum_{t=1}^{t} X_{ij}.$

L'estimateur est effectivement sans biais :

$$E[\widehat{m}] = \frac{1}{kt}\sum_{i=1}^{k}\sum_{t=1}^{t} E[X_{ij}]$$

$$= \frac{1}{kt}\sum_{i=1}^{k}\sum_{t=1}^{t} m$$

$$= m.$$

Estimation de s²

Un estimateur sans biais de la variance du contrat $i = 1, \dots, n$, est

$$\frac{1}{t-1}\sum_{j=1}^{t}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2 , t \geq 2.$$

Pour obtenir un estimateur sans biais de s^2, on prend la moyenne de tous ces estimateurs :

$\hat{s}^2 = \frac{1}{k(t-1)}\sum_{i=1}^{k}\sum_{t=1}^{t}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2.$

Estimation de a

Un estimateur intuitif de $a = Var\,[\mu(\theta)]$est

$$\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(\bar{X}_i - \bar{X})^2.$$

Or, cet estimateur est biais. En effet,

On a

$$E[(\bar{X}_i - \bar{X})^2] = Var\,[\bar{X}_i - \bar{X}]$$
$$= Var\,[\bar{X}_i] + Var\,[\bar{X}] - 2Cov\,(\bar{X}_i, \bar{X}).$$

Par indépendance entre les contrats,

On a

$$Cov(\bar{X}_i, \bar{X}) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Cov(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$$
$$= \frac{1}{k} Var[\bar{X}_i]$$

Et

$Var[\bar{X}] = \frac{Var[\bar{X}_i]}{k}$,

D'où

$$E[(\bar{X}_i - \bar{X})^2] = \frac{1-k}{k} Var[\bar{X}_i].$$

Et

$$E[\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(\bar{X}_i - \bar{X})^2] = Var[\bar{X}_i].$$

Or,

$$Var[\bar{X}_i] = Var\,[E[\bar{X}_i/\theta_i]] + E[Var[\bar{X}_i/\theta_i]]$$
$$= Var\,[\mu(\theta_i)] + E[\frac{\sigma^2(\theta_i)}{t}]$$

$= a + \frac{s^2}{t}.$

Un estimateur sans biais de a est donc

$$\hat{a} = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(\bar{X}_i - \bar{X})^2 - \frac{1}{t}\hat{s}^2.$$

Estimateur de la prime de crédibilité $\hat{\pi}_{i,n+1}^{B}$

On estime la prime de crédibilité en remplaçant chaque paramètre inconnu par son estimateur :

$$\bar{\pi}_{i,n+1}^{B} = \hat{z}\bar{X}_i + (1-\hat{z})\hat{m}$$

Où

$\hat{z} = \frac{t}{t+\hat{s}^2/\hat{a}}.$

Bien que tous les estimateurs soient sans biais, on ne peut conclure que $E[\widehat{K}] = K$ et donc que $E[\widehat{z}] = z$. Par conséquent, l'estimateur de la prime de crédibilité est forte probablement biaisé.

Section 3 : Estimation de la prime pour le modèle Gamma-Lindley sous différentes fonctions de perte

1 Inférences bayé sienne pour les paramètres

1.1 Estimation des paramètres par maximum de vraisemblance

Dans cette partie, noud considérons l'estimation du maximum de vraisemblance des paramètres. Supposons un échantillon aléatoire $\{x_{1:n}, x_{2:n}, \ldots., x_{n:n}\}$ d'observation indépendantes et identiquement distribuées (IID) de taille n obtenu à partir de Gal (θ, γ). La vraisemblance pour des données complètes est :

$$(\theta,\gamma) = \frac{\theta^{2n}}{[\gamma(\theta+1)]^n} \prod_{i=1}^{n} [(\gamma + \gamma\theta - \theta)x_i + 1] e^{-\theta(\sum_{i=1}^{n} x_i)}, \qquad (3.1)$$ [1]

La Log vraisemblance peut être exprimé comme suit :

$$\log(x|\theta,\gamma) = 2n\, log\theta - n\, log\gamma - n\log(\theta+1) + \sum_{i=1}^{n} \log[(\gamma+\gamma\theta-\theta)x_i - 1] - \theta i{=}1nxi. \qquad (3.2)$$

Par conséquent, les MLE des paramètres $\theta\ et\ \gamma$ sont la solution simultanée des équations normales suivantes. Par conséquent, les MLE peuvent être obtenus par une procédure itérative. Ici, noud suggérons d'utiliser la méthode de Newton Rafeson (N-R).

$$\frac{2n}{\theta} - \frac{n}{\theta+1} - \sum_{i=1}^{n} x_i + (\gamma-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{[((\gamma-\gamma\theta-\theta)x_i+1]} = 0,$$

$$\frac{-n}{\gamma} + (\theta+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{[(\gamma+\gamma\theta-\theta)x_i+1]} = 0,$$

Dans certaines conditions de régularité, les $(\hat{\theta}, \hat{\gamma})$ sont approximation bi variés avec une moyenne $(\hat{\theta}, \hat{\gamma})$ et matrice de covariance

$$I^{-1}(\hat{\theta},\hat{\gamma}) i.e. (\hat{\theta},\hat{\gamma}) \sim N_2\left([\hat{\theta},\hat{\gamma}]', I^{-1}(\hat{\theta},\hat{\gamma})\right).$$

Où $I(\hat{\theta}, \hat{\gamma})$ est la matrice d'information de Fisher observée et définie comme

$$I(\hat{\theta},\hat{\gamma}) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \log L}{\partial\theta^2} & -\frac{\partial^2 \log L}{\partial\theta\partial\gamma} \\ -\frac{\partial^2 \log L}{\partial\theta\partial\gamma} & -\frac{\partial^2 logL}{\partial\gamma^2} \end{bmatrix}_{(\hat{\theta},\hat{\gamma})}$$

1.2. Estimateurs Bayé sienne des paramètres

[1] Soliman, A. Comparison of Linex and quadratic Bayes estimators for the Rayleigh distribution. Commun. Statist. Theor. Meth, 29(1), 95-107, 2000.

Dans cette partie, nous avons les estimateurs Bayé sienne des paramètres θ et γ. Dans l'analyse bayé sienne, noud devons spécifier une distribution préalable pour les paramètres, nous considérons que deux distributions à priori gamma indépendants tels que, Gamma (a, b) comme loi à priori sur θ et Gamma (c, d) comme loi à priori sur γ où a, b, c et d sont des hyper paramètres non négatifs.

$$g(\theta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta}; \theta, a, b > 0$$

$$g(\gamma) = \frac{d^c}{\Gamma(c)} \gamma^{c-1} e^{-d\gamma}; \gamma, c, d > 0$$

La distribution à priori conjointe pour θ et γ est donnée comme suit :

$$\pi(\theta, \gamma) \propto \theta^{a-1} \gamma^{c-1} e^{(-b\theta - d\gamma)}; a, b, c, d > 0. \qquad (3.3)$$

La distribution à postériori commune est donnée sous la forme

$$p\left(\theta, \gamma \middle| \underline{X}\right) = R^{-1} \theta^{2n+a-1} \gamma^{c-n-1} e^{-[d\gamma + \theta(\sum_{i=1}^{n} x_i + b)]} P(\theta, \gamma) d\theta d\gamma \qquad (3.4)$$

Où $R\ et\ P(\theta, \gamma)$ ont interprétés comme

$$R = \int_{\theta}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} \theta^{n+a-1} \gamma^{c-n-1} e^{-[d\gamma + \theta(\sum_{i=1}^{n} x_i + b)]} P(\theta, \gamma) d\theta d\gamma$$

$$P(\theta, \gamma) = \frac{\prod_{i=1}^{n} [(\gamma + \gamma\theta - \theta) x_i + 1]}{(\theta + 1)^n}.$$

Méthode d'approximation Lindley pour les estimateurs de Bayes :

On peut noter ici que la répartition à posteriori de $p\left(\theta, \gamma \middle| \underline{X}\right)$ prend une forme de ratio qui implique une intégration dans le dénominateur et ne peut être réduite à une forme simple. Par conséquent, l'évaluation des espérances à posteriori pour obtenir l'estimateur de Bayes de $\theta\ et\ \gamma$ sera fastidieuse.

Considérons les intégrales, de la forme suivante. Elles s'expriment sous forme de ration d'intégrales et correspondent aux estimateurs Bayé siens de $u(\theta, \gamma)$ sous une fonction de perte quadratique :

$$I(x) = E(u(\theta, \gamma)|\ ) = \frac{\int u(\gamma, \theta) e^{L(\gamma, \theta) + G(\gamma, \theta)} d(\gamma, \theta)}{\int e^{L(\gamma, \theta) + G(\gamma, \theta)} d(\gamma, \theta)}, \qquad (3.5)$$

Où

$u(\theta, \gamma) =$ est une fonction de $\theta\ et\ \gamma$ seulment

$L(\theta, \gamma) =$ Log-vraisemblance

$G(\theta, \gamma) =$ Log-densité commune

2. Estimation bayésienne de la prime :

Pour obtenir des estimateurs bayésiens, nous supposons que θ et γ sont des variables aléatoires à valeurs réelles avec une fonction de densité de probabilité $\pi(\theta,\gamma)$. Rappelons que la distribution conditionnelle de $X|\gamma,\theta$ est la distribution Gamma-Lindley et les distributions de θ et γ sont supposées être connues dans cette partie. $P(\theta,\gamma|\underline{X})$ est la distribution à postériori de θ et γ compte tenu des données.

Dans cette partie, nous considérons l'estimateur bayésienne de la prime $P_{\bullet}^{B}$ en utilisant les fonctions de perte et les lois à priori définies ci-dessous.

2.1 Estimateurs bayésiens de la prime sous la fonction de perte quadratique

La fonction de perte ''squared error'' et proposée par Legendree (1805) et Bühlmann straub (1996) pour développer le théorie des moindres carrés. Elle est donnée par

$$L(\hat{\beta},\beta) = (\hat{\beta}-\beta)^2. \quad (3.6)$$

Cette fonction de perte est de nature symétrique c'est-à-dire qu'elle donne une pondération égale à la fois sur et sous estimation. Dans la littérature actuarielle, nous écrivons

$$L(P_{SELF}^{B},\mu(\theta,\gamma))^2 , \quad (3.7)$$

Où est l'estimateur de, elle doit être choisie de telle sorte que l'espérance à postériori de la fonction de perte ''squared error''

$$E\left[L\left(P_{SELF}^{B},\mu(\theta,\gamma)\right)\right] = \int_0^\infty \int_0^\infty L\left(P_{SELF}^{B},\mu(\theta,\gamma)\right)P(\theta,\gamma|\underline{X})d\theta d\gamma, \quad (3.\ 8)$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty (P_{SELF}^{B}-\mu(\theta,\gamma))^2 p(\theta,\gamma|\underline{X})d\theta d\gamma$$

Est minimum

$$P_{SELF}^{B} = E[\mu(\theta,\mu|\underline{X}]\int_0^\infty \int_0^\infty \mu(\gamma,\theta)P\left(\gamma,\theta\middle|\underline{X}\right)d\theta d\gamma, \quad (3.9)$$

Distribution à posteriori en utilisant la loi Gamma à priori

Les lois informatives à priori sont celles qui insèrent délibérément des informations que les actuaires ont à portée de main. Cela semble être une approche raisonnable puisque les connaissances scientifiques à priori devraient jouer un rôle dans la statistique inférentielle. Un préalable informatif fournit plus d'informations que les lois a priori non informatives.

Cette loi est définie sur$\mathfrak{R}^+$. Elle est donnée par

$\pi(\theta,\gamma)\alpha\theta^{a-1}\gamma^{c-1}e^{(-b\theta-d\gamma)}$; a, b, c, d$>$ 0, (3.10)

Où, a, b, c et d sont les hyper-paramètres.

L'espérance de distribution Gamma-Lindleyet définie par

$$\mu(\theta,\gamma) = E[X|\theta,\gamma] = \mu(\theta,\gamma) = \frac{2\gamma(1+\theta)-\theta}{\theta\gamma(\theta+1)}, \tag{3.11}$$

Où $\mu(\theta,\gamma)$ est la prime individuelle.

Selon la fonction de perte d'erreur quadratique, l'estimateur bayésien de la prime $\mu(\theta,\gamma)$ est obtenu en substituant la distribution postérieure (3.11) dans (3.9), comme suit :

$$P^B_{SELF} = E\left[\mu(\theta,\gamma)\middle|\underline{X}\right] = \int_0^\infty\int_0^\infty \mu(\theta,\gamma)P\left(\theta,\gamma\middle|\underline{X}\right)d\theta d\gamma \tag{3.12}$$

Suivant la procédure décrite ci-dessus, nous avons

$$G(\theta,\gamma) = (a-1)\log\theta + (c-1)\log\beta - (b\theta + d\beta) \tag{3.13}$$

Et

$$L(\theta,\gamma) = 2n\log\theta - n\log\gamma - n\log\theta + \sum_{i=1}^n \log[(\gamma+\gamma\theta-\theta)x_i + 1] - \theta\sum_{i=1}^n x_i\,.$$
(3.14)

On peut facilement vérifier que

$$\hat{u}_\theta = \frac{-(2\gamma\theta^2+4\gamma\theta-\theta^2+2\gamma)}{\gamma(\theta+\theta^2)^2},\quad \hat{u}_{\theta\theta} = \frac{2(2\gamma\theta^3+6\gamma\theta^2+6\gamma\theta-\theta^3+2\gamma)}{\gamma(\theta+\theta^2)^3},\quad \hat{u}_{\theta\gamma} = \frac{-\theta^2}{(\gamma(\theta+\theta^2)^2},$$

$$\hat{u}_\gamma = \frac{1}{\gamma^2(1+\theta)},\qquad \hat{u}_{\gamma\gamma} = \frac{-2}{\gamma^3(1+\theta)},\qquad ,\ \hat{u}_{\gamma\theta} = \frac{-1}{(\gamma(1+\theta))^2}\,,$$

Qui sont remplacés dans l'équation suivante

$$P^B_{SELF} = E\left[\mu(\theta,\gamma)\middle|\underline{X}\right] = \hat{u}\left(\hat{\theta},\hat{\gamma}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\hat{u}_{\gamma\gamma} + 2\hat{u}_\gamma\hat{P}_\gamma\right)\hat{\sigma}_{\gamma\gamma} + \left(\hat{u}_{\theta\theta} + 2\hat{u}_\theta\hat{P}_\theta\right)\hat{\sigma}_{\theta\theta}\right] +$$
$$\frac{1}{2}\left[\left(\hat{u}_\gamma\hat{u}_{\gamma\gamma}\right)\left(\hat{L}_{\gamma\gamma\gamma}\hat{P}_{\gamma\gamma} + \hat{L}_{\theta\theta\gamma}\hat{\sigma}_{\theta\theta}\right) + \left(\hat{u}_\theta\hat{\sigma}_{\theta\theta}\right)\left(\hat{L}_{\theta\gamma\gamma}\hat{\sigma}_{\theta\theta} + \hat{L}_{\theta\theta\theta}\hat{\sigma}_{\theta\theta}\right)\right]. \tag{3.15}$$

2.2 Estimateurs bayésiens de la prime sous la fonction de perte LINEX

La fonction de perte LINEX (linéaire- exponentielle) (le nom LINEX est justifié par le fait que cette fonction de perte asymétrique augmente approximativement linéairement sur un côté de zéro et approximativement exponentiellement sur l'autre côté) qui est asymétrique.

Elle peut être exprimée comme suit :

$$L(\hat{\beta},\beta) = \exp\left(\alpha(\hat{\beta}-\beta)\right) - \alpha(\hat{\beta}-\beta) - 1,\ \alpha \neq 0. \qquad (3.16)$$

Le signe et la grandeur du paramètre de forme α reflètent respectivement la direction et le degré d'asymétrie. (Si $\alpha > 0$), la surestimation est plus grave que la sous-estimation, et vice-versa). Pour α proche de zéro, la perte LINEX est une perte d'erreur approximativement carrée et donc presque symétrique. L'attente postérieure de l'équation de la fonction de perte LINEX est :

$$E[L(\hat{\beta},\beta)]\alpha \exp(\alpha\hat{\beta})\, E[\exp(-\alpha\beta)] - \alpha\left(\hat{\beta} - E(\beta)\right) - 1. \qquad (3.17)$$

Selon le résultat de Zellner (1986), l'estimateur de β sous la fonction de perte LINEX est $\hat{\beta}$qui minimise l'équation ci-dessus, il est donné par :

$$\hat{\beta} = -\frac{1}{\alpha}\log\left[E\left[e^{-\alpha\theta}\right]\right]. \qquad (3.18)$$

Dans notre étude, l'objectif est de trouver l'estimateur bayésien de la prime P^B_{LIN} qui est la valeur qui minimise l'équation (3.16), elle est donnée par :

$$P^B_{LIN} = -\frac{1}{\alpha}\log\left[E\left[e^{-\alpha\mu(\theta,\gamma)}\right]\right]. \qquad (3.19)$$

Lorsque l'espérance $E[e^{-\alpha\mu(\theta,\gamma)}]$ existe et finie.

Thomson et Basu (1996) ont identifié une famille de fonctions de perte $L(\Delta)$où Δ est l'erreur d'estimation$(\hat{\beta},\beta)$, telle que

- $L(0) = 0.$
- $L(\Delta) > (<) L(-\Delta) > 0$ pour tout $\Delta > 0$.
- $L(.)$ est deux fois différentiable avec $L'(0) = 0\ et\ L''(\Delta) > 0$ pour tout $\Delta \neq 0$.

- $0 < L'(\Delta) > (<) - L'(-\Delta) > 0$ pour tout $\Delta > 0$.

L'estimateur bayésien de la prime correspondant sous la fonction de perte LINEX est :

$P_{LIN}^{B} = -\frac{1}{\alpha}\log E[h(\theta,\gamma)|\underline{X}],$ (3.20)

Où

$h(\theta,\gamma) = e^{-\alpha\mu(\theta,\gamma)}$ (3.21)

Selon la fonction de perte de LINEX, l'estimateur bayésien de la prime $\mu(\theta,\gamma)$ est obtenu en substituant la distribution postérieure (3.21) dans (3.20), comme suit :

$E\left[e^{-\alpha\mu(\theta,\gamma)}\middle|\underline{X}\right] = \int_0^{\infty} e^{-ti\theta} P(\theta,\gamma\,|\underline{X}) d\theta d\gamma$ (3.22)

$L(\theta,\gamma) et\ G(\theta,\gamma)$ Sont les mêmes que ceux indiqués dans (3.14) et (3.13). En suivant les mêmes étapes expliquées ci-dessus, on obtient :

$$\hat{h}_{\theta\theta} = -\alpha\left[u_{\theta} e^{(-\alpha u(\theta,\gamma))}\right], \quad \hat{h}_{\theta\theta} = -\alpha\left[(u_{\theta\theta} - \alpha u^2{}_{\theta}) e^{(-\alpha u(\theta,\gamma))}\right],$$

$$\hat{h}_{\theta\gamma} = -\alpha\left[\left(u_{\theta\gamma} - \alpha u_{\theta} u_{\gamma}\right) e^{(-\alpha u(\theta,\gamma))}\right], \hat{h}_{\gamma} = -\alpha\left(u_{\gamma} e^{(-\alpha u(\theta,\gamma))}\right),$$

$$\hat{h}_{\gamma\gamma} = -\alpha\left[\left(u_{\gamma\gamma} - \alpha u^2{}_{\gamma}\right) e^{-\alpha u(\theta,\gamma)}\right], \quad \hat{h}_{\gamma\theta} = -\alpha\left[\left(u_{\gamma\theta} - \alpha u_{\theta} u_{\gamma}\right) e^{-\alpha u(\theta,\gamma)}\right]$$

Qui sont remplacés dans l'équation suivante

$P_{LIN}^{B} = -\frac{1}{\alpha}\log E\left[e^{-ti\theta}\middle|\underline{X}\right] = -\frac{1}{\alpha}\log[e^{-\alpha u(\hat{\theta},\hat{\gamma})} + \frac{1}{2}\left[\left(\hat{h}_{\gamma\gamma} + 2\hat{h}_{\gamma}\hat{P}_{\gamma}\right)\hat{\sigma}_{\gamma\gamma} + \left(\hat{h}_{\theta\theta} +\right.\right.$

2hθPθσθθ+12[hγσγγLγγσγγ+Lθθγσθθ+hθσθθLθγγσθθ+Lθθθσθθ]]. (3.22)

3. Etude par simulation

Dans cette section, une étude de simulation de Monto-Carlo est effectuée pour comparer les méthodes d'estimation en utilisant les erreurs quadratique moyenne (MSE) comme suit :

$MSE\left(\hat{P}^{B}\bullet\right) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\hat{P}^{B}\bullet - \mu(\theta,\gamma))^2}{N}$.

Lorsque N est le nombre de réplication. Nous avons généré 100000 échantillons de tailles n=20, 40, 60, 80 pour représenter les petites, moyennes et importantes quantités d'observation de Gamma-Lindley avec trois valeurs de $\theta(\theta = 0.35425; 1; 9)$ avec $(\gamma = 1.5; 3)$.

Afin de comparer les estimateurs bayésiens de la prime obtenus dans partie ci-dessus sous deux fonctions de perte différentes, nous choisissons les valeurs de hyper paramètres

$a, b, c, et\ d$ comme suit $(a, b, c, d) = (1.2; 0.001; 1; 0.3)$, avec deux valeurs pour le paramètre de LINEX ($\alpha = -0.5$).

—résultats du modèle basés sur la distribution de Gamma Lindley sont résumés dans les tableaux suivants :

Table N°2 : estimateurs de la prime bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte d'erreur quadratique moyenne ($\gamma = 1.5, a = 1, b = 0.04, c = 1, d = 0.04$).

θ	0.35423	1	9.0
$\mu(\theta, \gamma)$	5.153765	1.666667	0.1555556
n	G.P		
20	4.997307 ($3.046348e - 0.5$)	1.614993 ($9.471975e - 05$)	0.1673283 ($3.786283e - 05$)
40	5.071424 ($9.809331e - 07$)	1.634784 ($3.478296e - 06$)	0.1566296 ($9.092648e - 06$)
60	5.098026 ($9.310077e - 08$)	1.644231 ($4.34702e - 07$)	0.154794 ($1.871041e - 06$)
80	5.111654 ($1.025272e - 08$)	1.649422 ($8.359941e - 08$)	0.1544417 ($5.764072e - 07$)

Source: Ghitany, M.E, Atieth, B., Nadarajah, S. Lindley distribution and its application. Mathematics and computers in simulation, 78: 493-506,2008

Table N°3 : estimateurs de la prime bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte LINEX ($\gamma = 1.5, a = 1, b = 0.04, c = 1, d = 0.04, \alpha = -0.5$).

θ	0.35423	1	9.0
$\mu(\theta, \gamma)$	5.153765	1.666667	0.1555556
n	G.P		
20	5.171916 (0.0003295484)	1.635624 (0.0009637486)	0.1675587 (0.0001440801)
40	5.163393 ($9.271661e - 05$)	1.64558 (0.0004446442)	0.1567301 ($1.379591e - 06$)
60	5.160425 ($4.435941e - 05$)	1.65154 (0.0002288093)	0.154794 ($4.804549e - 07$)
80	5.158868 ($2.604214e - 05$)	1.654946 (0.0001373635)	0.1544938 ($1.127355e - 06$)

Source: Ghitany, M.E, Atieth, B., Nadarajah, S. Lindley distribution and its application. Mathematics and computers in simulation, 78: 493-506,2008

Table N°4 : estimateurs de la prime bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte d'erreur quadratique moyenne ($\gamma = 3, a = 1, b = 0.04, c = 1, d = 0.04$).

θ	0.35423	1	9.0
$\mu(\theta, \gamma)$	5.399907	1.833333	0.1888889

n	G.P		
20	5.245517 $(3.464839e-0.8)$	1.771582 $(3.570231e-07)$	0.1832947 $(3.937284e-06)$
40	5.320573 $(3.330606e-07)$	1.800505 $(2.689541e-07)$	0.1849694 $(2.143201e-07)$
60	5.346562 $(2.715271e-07)$	1.816463 $(2.623254e-07)$	0.186032 $(3.817615e-08)$
80	5.359731 $(1.937792e-07)$	1.816463 $(1.975259e-07)$	0.1866555 $(1.096881e-08)$

Source: Ghitany, M.E, Atieth, B., Nadarajah, S. Lindley distribution and its application. Mathematics and computers in simulation, 78: 493-506,2008

Table N°5 : estimateurs de la prime bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte LINEX ($\gamma = 3, a = 1, b = 0.04, c = 1, d = 0.04, \alpha = -0.5$).

θ	0.35423	1	9.0
$\mu(\theta,\gamma)$	5.399907	1.833333	0.1888889
n	G.P		
20	5.427538 (0.0007634619)	1.79561 (0.001423049)	0.1886775 $(4.471239e-08)$
40	5.416159 (0.0002641203)	1.812972 (0.0004145909)	0.1878023 $(1.180747e-06)$
60	5.411364 (0.0001312618)	1.819455 (0.0001926006)	0.1879242 $(9.305554e-07)$
80	5.408745 $(7.811271e-05)$	1.822815 (0.0001106374)	0.1880724 $(6.667109e-07)$

Source: Ghitany, M.E, Atieth, B., Nadarajah, S. Lindley distribution and its application. Mathematics and computers in simulation, 78: 493-506,2008

4 Résultats et Discussion

La performance dépend de la forme de la distribution d'origine et la fonction de perte supposée. La plupart des auteurs ont utilisé une erreur quadratique comme fonction de perte symétrique. Cependant, en pratique, la fonction perte réelle n'est souvent pas symétrique. On peut noter pour la distribution de Gamma Lindley que lorsqueθaugmente, l'estimateur de la prime Bayésien $\mu(\theta,\gamma)$ diminue. De même, il est observé que l'estimateur de la prime Bayésiens donne la plus faible erreur absolue moyenne sur tous les autres estimateurs bayésiens dans la majorité des cas est l'estimateur bayésien de la prime sous la fonction de perte LINEX surtout lorsque la paramètre de perte est inférieur à zéro (0) c'est-à-dire $(\alpha = -0.5)$. Il est toujours suivi par l'efficacité par la perte d'erreur quadratique, comme le montrent les tableaux 1 et 2. Dans le tableau 3, on peut montrer que l'estimateur de la prime bayésien en fonction de la perte LINEX est également plus efficace que l'estimateur de Bayes sous la fonction se l'erreur quadratique uniquement dans le cas des valeurs élevées deθ. Au fur et à mesure que la taille de l'échantillon augmente, on constate que toutes le MDSE moyennes d'estimation convergent vers$\mu(\theta, \gamma)$. En outre, nous concluons que la performance est approximativement égale à un risque postérieur plus petit. En outre, les résultats de Gamma Lindley sous la fonction de l'erreur quadratique sont plus précis en général par rapport à ceux de LINEX($\alpha = -0.5$). A partir de la discussion susmentionnée, nous pouvons conclure que la procédure de Bayes discuté dans ce document peut être recommandée peur leur utilisation.

Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les méthodes de tarification des risques traditionnels, en particulier la théorie de crédibilité. Nous avons construit des estimateurs des primes bayé siennes suivant les techniques d'inférence bayé siennes concernant les paramètres des risques d'un assuré qui n'est jamais connu. En imposant une distribution à priori, nous sommes en mesure de décrire de manière probabiliste la structure de risque pour l'ensemble de la classe de notation. En pratique, le choix de cette distribution à priori est subjectif aux jugements personnels ou induit par les données historiques du groupe correspondant.

A l'aide de la simulation numérique, il semble que les primes bayésiennes sont cohérentes et vérifier la condition de convergence vers la prime individuelle.

Chapitre 3 : Etude de cas de tarification de produit : Inondation de la branche IARD à la SAA

Introduction

Le territoire national peut être touché par des inondations qui se manifestent de façon catastrophique pouvant mettre en péril, du jour au lendemain, l'économie de tout un territoire constituant ainsi une contrainte majeure pour le développement économique et social.

Rappelons qu'une inondation désigne un recouvrement d'eau qui déborde du lit mineur ou qui afflue dans les talwegs ou les dépressions lorsque le débit et volume d'eau d'une crue sont importants.

D'après le recensement effectué par les services de la protection civile, une commune sur trois (485 sur 1541) est susceptible d'être inondée en partie ou en totalité. Ces inondations sont les catastrophes naturelles les plus fréquentes et la plus destructrices, provoquant d'importants dégâts humains et matériels.

L'inventaire des inondations à travers le pays, pour la période allant de 1969 à 2008, révèle qu'il n'existe pas de régions prémunies contre ce risque et que ces évènements sont imprévisibles dans le temps et dans l'espace. Aussi, il ressort que de grands inondations engendrées par des pluies exceptionnelles généralisées sur de grand bassins versants et pouvant toucher plusieurs régions atteignant parfois l'ampleur d'une catastrophe nationale telle que : les inondations de l'automne 1968, celle de mars 1973 affectant l'Est du pays, les inondations 1974 des bassins versants de l'algérois et de la sebaou, celle de 1984 touchent tout l'Est du pays et les inondations par ruissellement urbain provoquées par des orges localisés d'automne et d'été affectant surtout les agglomérations et les villes (cas des inondations du 10 novembre 2001 qui furent les plus meurtrières de l'histoire des inondations en Algérie).

Face à ce risque, les compagnies d'assurance proposent un moyen de dédommagement des personnes physique ou morale touchées par des inondations. Cependant, ces personnes doivent être couvertes par un contrat d'assurance.

Section 1 : Présentation de la Société Nationale d'Assurance(SAA)[1]

1. Création de la SAA

La société algérienne d'assurance a été créée par l'ordonnance n° 66-127 du 27

[1] Document interne de la SAA

mai 1966, après qu'elle était une société mixte Algéro-Egyptienne fondée le 12 décembre 1963 (61% Algérie, 39% Égypte), dans son 1ier article, la loi précise le monopole de l'état sur les opérations d'assurance.

Le 27 mai 1975, le monopole d'exploitation de l'assurance automobile, des risques simples et des assurances de personnes a été destiné à la SAA en vertu de la spécialisation décidée par les pouvoirs publics.

À partir du 21 février 1987, passage à l'autonomie dans le cadre des réformes économiques, date à laquelle la SAA a été transformée en société publique par action. Elle s'oriente progressivement vers l'économie du marché, à partir de 1988, et par un acte notarié le 21 février 1989 la SAA régie par le droit privé dotée de 80 millions de dinars, par un acte notarié en 1991 la SAA couvre tous les risques de toutes les branches. En 2005 la SAA détient un capital social de 3,8 milliards de dinars.

Aujourd'hui la SAA détient la plus grande part du marché des assurances (22%) avec un chiffre d'affaires de 27,04 milliards de dinars en 2020[2] (Bilan annuel SAA 2020 : Division des Finances, comptabilité et Contrôle de gestion) dont la grande part est détenue par la branche automobile, soit un taux de 78% de la production globale.

2. Garanties offertes par la SAA

Il y a 50 produits répartis sur les 4 branches suivantes :

- **La branche automobile :**
  - **L'assurance obligatoire :** Comporte la garantie Responsabilité Civile.
  - **L'assurance non obligatoire :** Comprend les garanties : dommages collisions, bris de glaces, défense et recours, vol incendie et tous risques.
- **Les risques divers**
- **Les assurances agricoles**
- **Les assurances transport :** Sont répartis en deux catégories:

[2] Document interne de la SAA

- **Les assurances facultés** : Désigne les marchandises transportées par voie maritime, terrestre et aérien.
- **Les assurances Score :** Désigne les engins : l'avion, le bateau, camion…

3. Missions de la SAA

- Comme fonction sociale, Réparer les préjudices causés aux assurés.
- Comme rôle économique, la collecte de l'épargne qui va servir au financement de l'économie.
- Satisfaire les besoins de la clientèle.

4. Perspectives de la SAA

- Contribuer au développement des assurances t de l'économie nationale.
- Améliorer les conditions d'accueil des clients et les satisfaire.
- Etre rapide dans les règlements des sinistres.
- Moderniser la structure de la compagnie afin d'assurer l'efficacité et la rentabilité de la compagnie.

5. Objectifs de la SAA

Plusieurs objectifs cohérents et diverses actions ont été mis en œuvre par la SAA dans le cadre de stratégie de développement:

- Redynamiser la force de vente et l'adapter aux nouvelles données du marché national et international.
- Formation continue de l'encadrement par des programmes adaptés aux nouvelles exigences du marché.
- Recherche d'un meilleur équilibre du compte d'exploitation à partir d'une approche analytique des résultats techniques des risques et de la refonte nécessaire de certains tarifs, notamment automobile.

6. Organisation de la SAA

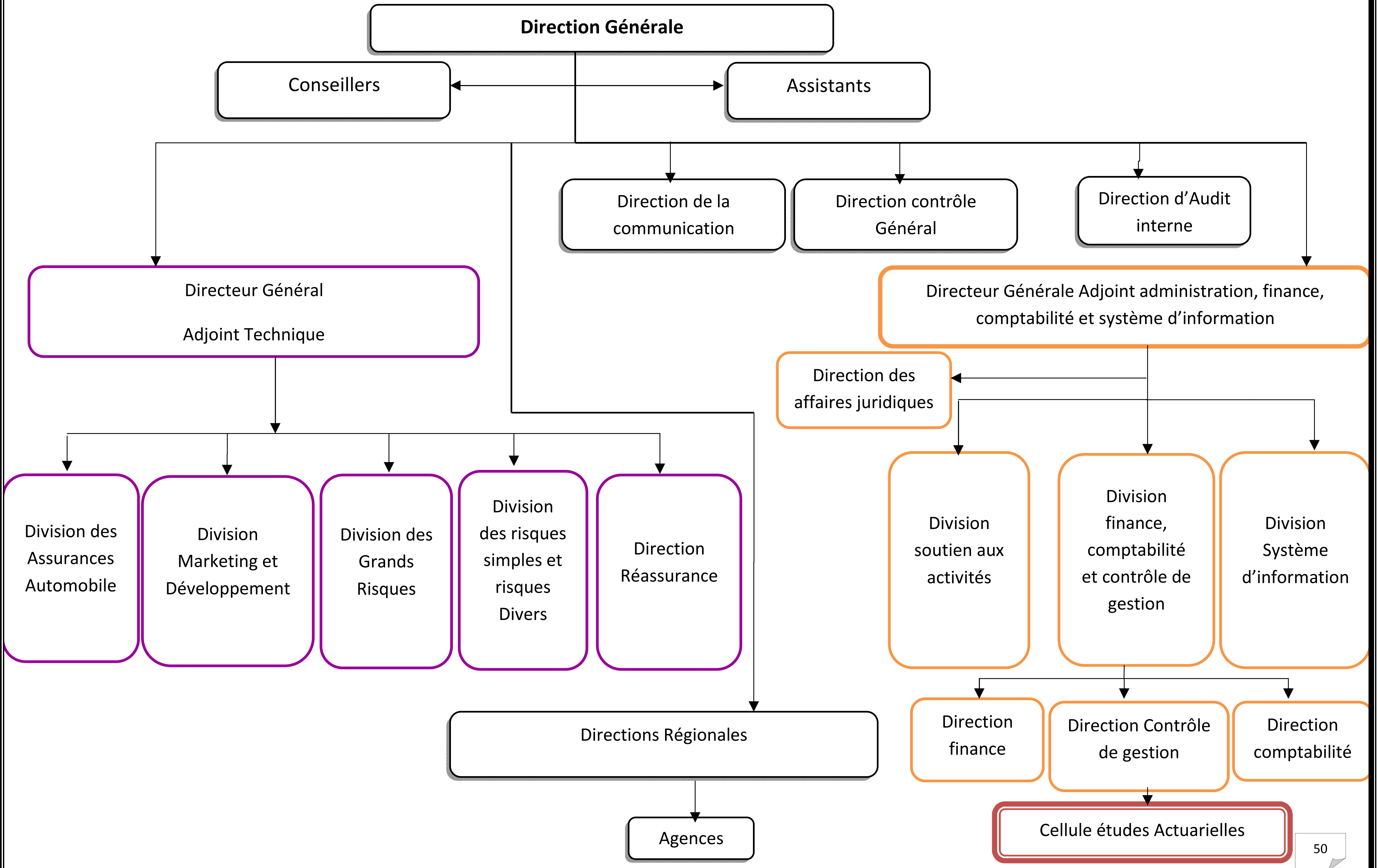
La SAA a opté pour une organisation décentralisée, pour répondre aux besoins du marché national de l'assurance en basant sa stratégie de développement sur un réseau d'agences commerciales aussi C'est ainsi que la SAA est représentée par (16) directions régionales avec une autonomie dans la gestion. Chaque direction régionale a sous son contrôle, des agences relevant de sa compétence territoriale.

Actuellement la SAA est riche d'un réseau de distribution de :

- 16 directions régionales
- 265 agences concédées
- 317 agences générales
- 12 courtiers d'assurances
- 03 filiales SAA (EPE / SPA EXACT et EXACTPLUS et ASG)
- 02 centres de formations

Ses effectifs au nombre de 3786 travailleurs

7. Organigramme général du Siège de la SAA



Section 2 : Classification

1. Définition :[1]

La classification automatique (appelée clustering en anglais) est une méthode mathématique d'analyse de données : pour faciliter l'étude d'une population d'effectif important (animaux, plantes, malades, gènes, etc.…), on regroupe les individus en plusieurs classes de telle sorte que les individus d'une même classe soient le plus semblables possible et que les classes soient le plus distinctes possibles les e unes des autres.

2. Classification hiérarchique

Elle consiste à fournir un ensemble de partitions de E classes de moins en moins fines obtenu par regroupement successifs de parties.

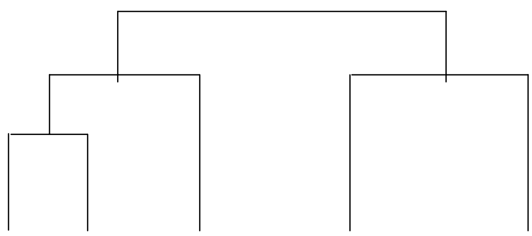


Figure N°1 : Arbre de classification

Démarche : cet arbre est obtenu dans la plupart des méthodes de manière ascendante :

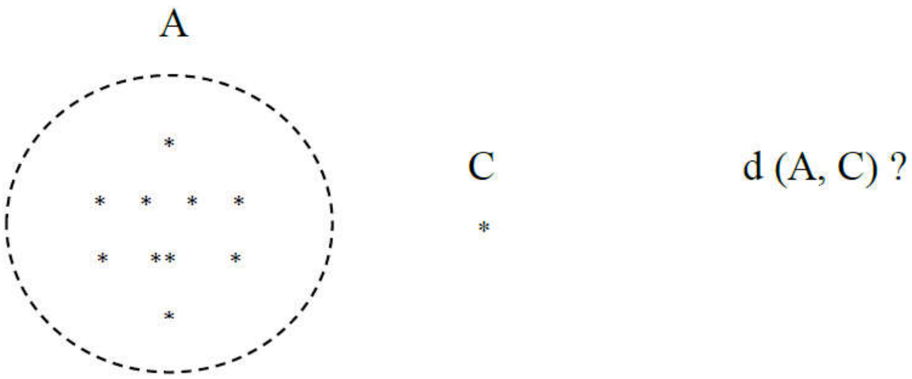
- On regroupe d'abord les deux individus les plus proches que forme un sommet
- Il ne reste plus que (n-1) objets et on itère le processus jusqu'à un regroupe complet.

Un des problèmes consiste à définir une mesure de dissimilarité entre classes.

2.1. Stratégies d'agrégation sur dissimilarités

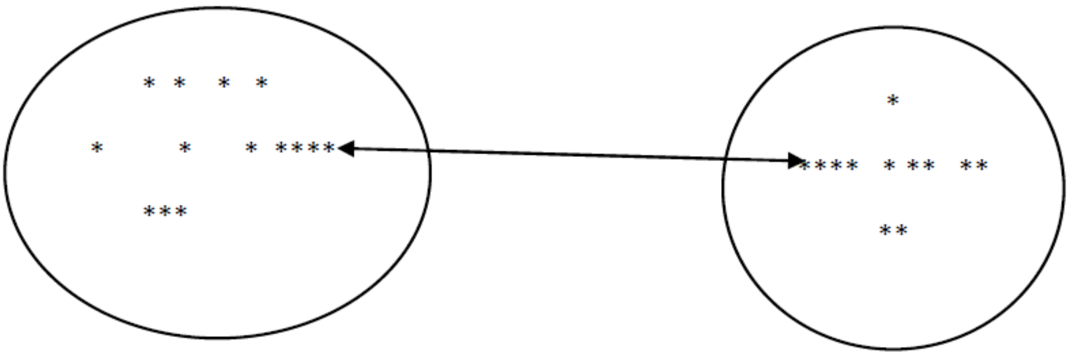
Le problème est de définir la dissimilarité entre la réunion de deux variables et un troisième : d (a-b, c).a chaque solution correspond une ultra métrique différente.

[1] Pierre-Louis GONZALEZ, METHODES DE CLASSIFICATION.



2.1.1. Saut minimum

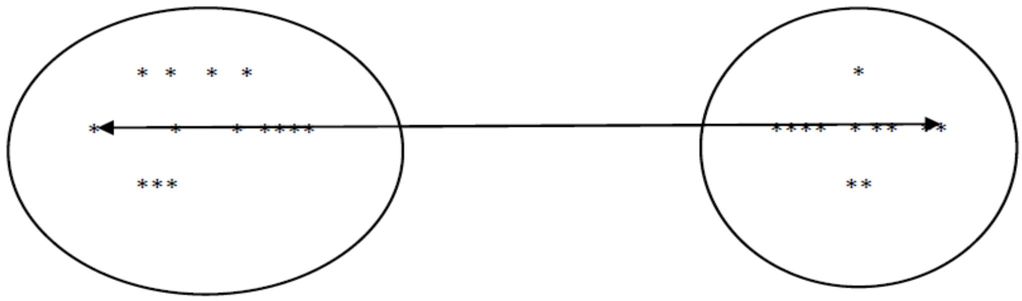
Cette méthode (connue sous le nom de < single linkage> en anglais) consiste à écrire que : $\mathbf{d(a-b,c)} = \ \mathbf{inf}\ \{\mathbf{d(a,c)}\ ;\mathbf{d(b,c)}\}$.



La distance entre parties est donc la plus petite distance éléments des deux parties.

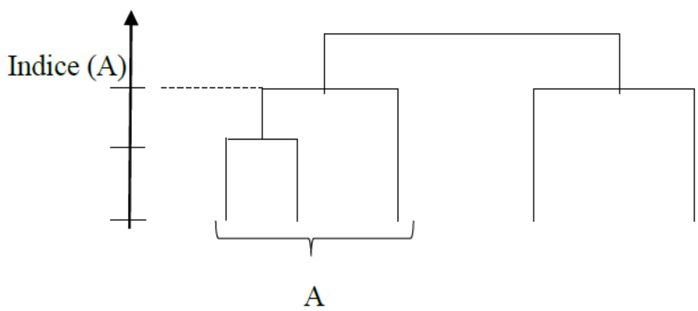
2.1.2. Diamètre (complète linkage) :

On prend ici comme distances entre parties la plus grande distance entre deux éléments.



2.2. Stratégies divers

- Saut minimum (plus proche)
- Diamètre
- Moyenne des distances
- Médiane des distances
- Distance au centre de gravité



L'indice au niveau d'agrégation est le niveau auquel on trouve agrégés pour la première
fois tous les constituants A.

2.3. Méthode de ward pour distance eucludienne

Si on peut considérer E comme un nuage d'un espace $\mathbb{R}^p$, on agrège les individus qui font varier la moins l'inertie intra classe.

A chaque pas, on cherche à obtenir un minimum local de l'inertie intra classe ou un maximum de l'inertie inter classe.

L'indice de dissimilarité entre deux classes (ou niveau d'agrégation de ces deux classes) est alors à la perte d'inertie inter classe résultant de leur regroupement.

Calcule cette perte d'inertie :

$\mathbf{g_A}$ = centre de gravité de la classe A (poids $\mathbf{P_A}$)

$\mathbf{g_B}$ = centre de gravité de la classe B (poids $\mathbf{P_B}$)

$\mathbf{g_{AB}}$ =centre de gravité de leur réunion

$$\mathbf{g_{AB}} = \frac{\mathbf{P_A g_A + P_B g_B}}{\mathbf{P_A + P_B}}$$

L'inertie inter classe étant la moyenne des carrés des distances des centres de gravité des classes au centre de gravité total, la variation d'inertie classes, lors su regroupement de A

et B est égales a :$\boldsymbol{P_A d^2(g_A, g) + P_B d^2(g_B, g) - (P_A + P_B) d^2(g_{AB}, g)}$

Elle vaut :$\boldsymbol{\delta}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \frac{\mathbf{P_A P_B}}{\mathbf{P_A + P_B}} \mathbf{d^2(g_A, g_B)}$.

Remarque : cette méthode entre dans le cadre de la forme de lance et williams généralisée :$\boldsymbol{\delta}[(\mathbf{A}, \mathbf{B}); \mathbf{C}] = \frac{\mathbf{(P_A+P_B)\delta(A,C)+(P_B+P_C)\delta(B,C)-P_C\delta(A,B)}}{\mathbf{P_A+P_B+P_C}}$

On peut donc utiliser l'algorithme général.

On notera que la somme des niveaux d'agréation des différents nœuds de l'arbre doit être égale à l'inertie totale du nuage, puisque la somme des pertes d'inertie est égale à l'inertie totale.

Cette méthode constitue à notre avis la meilleure méthode dans l'espace des individus conditionne également les résultats.

3. Application de la classification (AH)

Les résultats obtenus en sortie avec le logiciel XLSTAT 2020.

3.1. Description des données pour la classification :

La compagnie de SAA mis à notre disposition une base de données de la production de son réseau direct, repartie sur le territoire national de 2015 à 2019. Dans ce chapitre on s'intéresse au variable zone (communes, wilayas), c'est-à-dire les adresses du risque inondation, ainsi que les montants des sinistres et le nombre de survenance des sinistres.

Le tableau suivant représente la forme de nos données :

Tableau N° 6: forme générale des données

Commune, Wilaya	Montant	Nombre
Alger centre	1DA	5
Bab el oued		0
.	.	1
.	.	.

Source : Base de données Division système d'information SAA de la période 2015-2019.

Variable commune (qualitatif) : 240 communes disponible sur nos données de

Variable montants du sinistre (quantitatif) : exprimée en dinar algérien (DA), c'est le cout d'un sinistre.

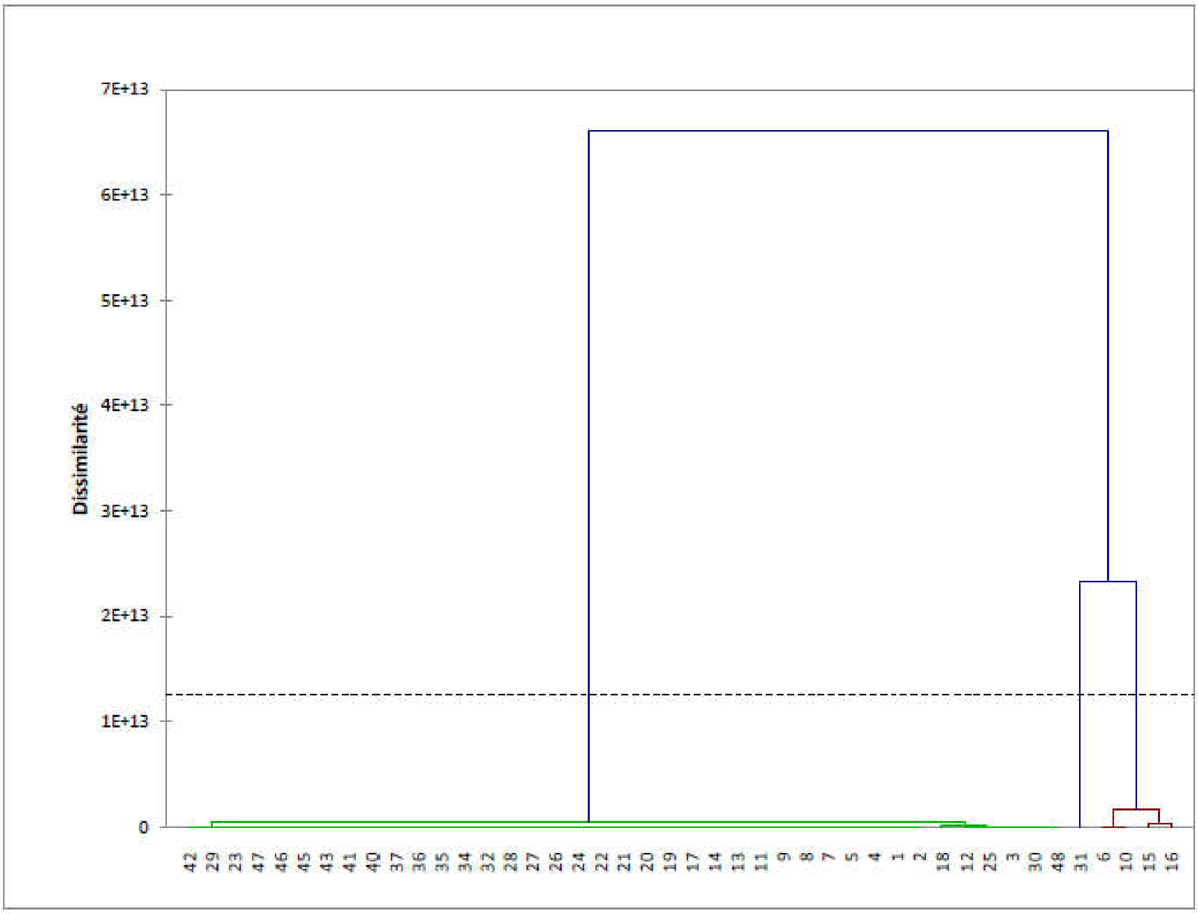
Variable wilaya (qualitatif) : 44 wilayas

Le nombre du sinistre (quantitatif) : c'est le nombre de fois ou les sinistre a touché une commune.

3.2. Application sur les wilayas

3.2.1. L'arbre hiérarchique ou dendrogramme

Figure N°2 : Dendrogramme wilaya



Source : fait par nous même sous XLSTAT 2020.

On coupe l'arbre hiérarchique au point A, ce que donnent trois (3) classes.

R^2 = 0,9 5763 Proche de 1 donc on a une représentation optimale des classes.

3.2.2 Les classes des wilayas

Tableau N°7 : classification des wilayas.

Classe 1				Classe 2	Classe 3
ADRAR	TLEMCEN	CONSTANTINE	TINDOUF	BIJAIA	ORAN
CHLEF	TIARET	MEDEA	KHENCHELA	BOUIRA	
LAGHOUAT	DJELFA	MOSTAGANEM	SOUK AHRAS	TIZI OUZOU	
OUMELBOUAGHI	JIJEL	M'SILA	TIPAZA	ALGER	
BATNA	SETIF	MASCARA	MILA		
BISKRA	SAIDA	OUARGLA	NAAMA		
BECHAR	SKIKDA	EL BAYEDH	AINTEMOUCHENT		
BLIDA	SIDIBELABBES	BOUDJ BOUARRERIDJ	GHARDAIA		
TAMANRASSET	ANNABA	BOUMERDES	RELIZANE		
TEBESSA	GEULMA	EL TARF			

Source : établi nous par nous même à partir de figure N°2

On distingue 3 trois groupe :

Classe 1 : comporte une seule wilaya (ORAN) cette willaya est la plus sinistrée.

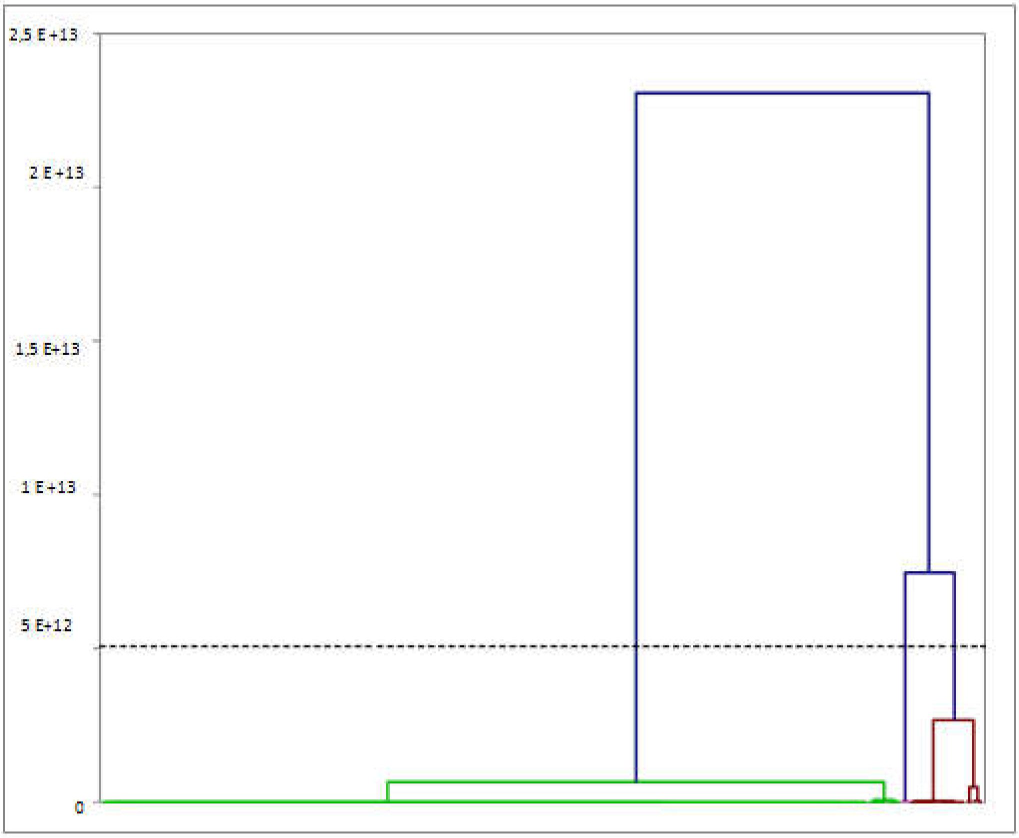
Classe 2 : cette classe comporte quatre (4) wilayas(BIJAIA, BOUIRA, TIZI OUZOU, ALGER).

Classe 3 : cette classe comporte le reste des autres wilayas elle est faiblement sinistrée.

3.3 Application sur les communes

3.3.1 L'arbre hiérarchique ou dendrogramme

Figure N°3 : Dendrogramme pour les communes



Source : sous XLSTAT 2020

On coupe l'arbre hiérarchique au point A, ce donnent trois (3) classes.

R^2 = 0,883 Proche de 1 donc on a une représentation optimale des classes.

3.3.2 Les classes des communes

Tableau N°8 : classification des communes.

Classe 1				Classe 2	Classe 3
ADRAR 01	BOUDOUAOU 16	HAMMA BOUZIANE25	RELIZANE48	AIN BESSAM 10	DRAA BEN KHED DA15
AHMED RACHEDI 43	BOUFATIS 31	HASSIBOUNIF31	ROUIBA16	ALGER CENTRE 16	
AINARNAT 19	BOUMERDES 35	HASSIMESSAOUD 30	SAIDA20	BAB EZZOUAR 16	
AINELBEIDA	BOUNOURA	H'RAOUA16	SALAHBEY19	BEJAIA 06	

04	47				
AIN EL KERMA 31	BOURKIKA 42	HUSSEINDEY16	SAOULA16	BIR MOURAD RAIS 16	
AINELTURCK31	BOUROUBA 16	HYDRA16	SEDDOUK06	BOUIRA 10	
AINKEBIRA19	BOUROUBA 16	IGHREM06	SEDRATA41	BOUZAREAH16	
AINMELLOUK 43	BOUSMAIL 42	KHEMISELKHECHNA35	SEMAOUN06	CASBAH 16	
AINMELLOUK 43	CHELGHOUM LAID43	KHEMISTI42	SETIF19	CHERAGA 16	
AINM'LILA04	CHERCHELL42	KHENCHELA40	SIMUSTAPHA 35	DOUERA 16	
AINNADJA16	CHLEF02	KHERRATA06	SIDIAICH06	EL ACHOUR 16	
AINOULMENE 19	CONSTANTINE25	KOUBA16	SIDIBELABBES 22	EL ANCOR 31	
AINOUSSARA17	DARELBAIDA16	LACDESOISEAUX36	SIDIBENYEBKA31	EI BIAR 16	
AIN SALAH 11	DELLYS 35	LAGHOUAT 03	SIDI CHAMI 31	JIJEL 18	
AINSMARA25	DELYIBRAHIM 16	LARBAANATHIRATHEN15	SIDICHEIKH32	MERS EL KEBIR 31	
AINSOLTANE41	DERGANA16	MAGHNIA13	SIDIKHELIFA43	ORAN31	
AINTEMOUCHENT46	DERGUINA06	MANSOURAH13	SIDILAKHDAR 27	SOUR ELGHOUZLANE10	
AINTINE43	DIDOUCHE MOURAD25	MASCARA29	SIDIM'HAMED 16	TAHER18	
AIT SMAIL06	DJELFA17	MECHERIA45	SIG29		
AKBOU06	DJEMILA19	MEDEA26	SKIKDA21		
ALANCOR31	DRAAELMIZAN15	MEDJANA34	SOUKAHRAS41		
AMIZOUR 06	DRARIA 16	MEFTAH 09	SOUKEL TENINE06		
ANNABA 23	DYLYI BRAHIM 16	MELBOU 06	SOUK NAAMANE 04		
AOKAS 06	ELAMIRIA46	MESSAOUD BOUDJRIO 25	SOUK TLETA 13		
ARZEW 31	ELANASSER34	MILA43	STAOUALI16		
AZZABA21	ELFEDJOUDJ24	MILA43	STIDIA 27		

BABELOUED16	ELAOUINET12	MINARZAREZA43	TAFRAOUI 31		
BACHDJERRAH16	ELHAMADIA34	MISSERGHIN31	TALAHAMZA 06		
BARAKI16	ELHAMIZ16	MOHAMMADIA16	TAMANRASSET 11		
BATNA05	ELHARRACH16	MOSTAGANEM27	TAREF 36		
BECHAR08	ELHARROUCH21	M'SILA 28	TASSADANEHADDAD43		
BEIDHABORDJ 19	ELKERMA31	NAAMA45	TAZMALT 06		
BELOUIZDAD16	ELKHROUB25	NACIRIA15	TAZOULT 05		
BENAKNOUN16	ELKSEUR06	OUARGLA30	TEBESSA12		
BENIMAOUCHE06	ELMADANIA16	OUDJANA18	TELEGHMA43		
BENIMESSOUS16	EİMARSA16	OUEDALLEUG09	TENIRA22		
BENIMESSOUS16	EİMARSA16	OUEDALLEUG09	TENIRA22		
BENIOUARTHILANE19	ELM'HIR34	OUEDATHMANIA43	TEXANNA18		
BENISAF46	ELMILIA18	OUEDENDJA43	THENIA35		
BENITAMOU 09	ELMOHAMMADIA16	OUEDKORICHE16	TIARET 14		
BEROUAGUIA 26	ELTAREF36	OUEDSMAR16	TICHY06		
BIRELARCH19	ELADJIBA10	OUEDTLELAT31	TIMEZRIT06		
BIRELDJIR31	ESSENIA31	OUELDRAHMOUNE25	TIMIMOUN01		
BIRKHADEM16	EUCALYPTUS16	OUENZA12	TINDOUF		
BIRTOUTA16	FELLAOUCENE13	OULEDBRAHAM34	TIPAZA42		
BISKRA07	FERDJIOUA43	OULEDFAYET 16	TIZIOUZOU15		
BLIDA09	GAREMGOUGA43	OULEDMIMOUN 13	TLEMCEN13		
BOLOGHINE16	GHARDAIA47	OULEDMOUSSA35	TOUDJA06		
BORDJBOUARRERIDJ34	GHAZAOUET13	OULEDYAHIAKHADROUCHE18	TOUGGOUR 30		
BORDJELBAHRI16	GHILASSA34	OULEDYAICH09	YELLEL48		

BORDJ ELKIFFAN16	GUEDECONST ANTINE16	OUMASSEL37	ZEGHAIA43		
BORDJMENAI EL35	GUELMA24	OUMELBOUAGHI 04	ZERALDA16		
BOUDERBALA 10	HAMADIKRO UMA21	OUZELLAGUEN06	ZIROUTYOUC EF25		
			ZAHANA29		

Source : établi nous par nous même à partir de figure N°3

Classe 1 : comporte une seule commune (DRAA BEN KHEDDA) cette commune est la plus sinistrée.

Classe 2 : cette classe comporte dix-huit (18) communes (AIN BESSAM, ALGER CENTRE, BAB EZOUAR, BEJAIA, BIR MOURAD RAIS, BOUIRA, BOUZAREAH, CASBAH, CHERAGA, DOUERA, EL ACHOUR, EL ANCOR EL BIAR, JIJEL, MERS EL KEBIR, ORAN, SOUR EL GHOUZLANE, TEHAR) elle est moyennement sinistrée.

Classe 3 : cette classe comporte le reste des autres communes elle est faiblement sinistrée.

Section 3 : Tarification

La prime pure = Fréquence*Cout moyen des sinistres

1. Modélisation de nombre de sinistre : [2]

Dans cette section en doit ajuster nos données à une loi de distribution de probabilité de nombre (N) de sinistre.

Les lois connais en domaine actuarielle pour modéliser la fréquence de sinistre sont : loi de poisson, loi binomiale négative.

1.1. Loi de poisson

On suppose que le nombre de sinistre N suit une loi de poisson de paramètreλ..

1.1.1. Estimation de paramètres par la méthode de maximum de vraisemblance :

La méthode du maximum de vraisemblance consiste à estimer le paramètre, en maximisant la fonction de vraisemblance qui s'écrit comme suit :

[2] Etienne Marceau, Modélisation et évaluation quantitative des risques en acturiat Modelés sur une période Springer-Verlag France, 2013

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} e^{-\lambda n_k} \frac{\lambda^{kn_k}}{(k!)^{n_k}}$$

$$\lambda = \frac{\sum_{k=1}^{n} kn_k}{\sum_{k=1}^{n} n_k} = \frac{\text{Nombre total de sinistres}}{\text{Nombre total de contrats}}$$

Application : $\hat{\lambda} = 0.0308$

1.1.2. Adéquation de loi aux données :

On utilise le test de khi deux pout tester l'adéquation des données à loi de poisson de paramètre $\hat{\lambda} = 0.0308$. Dans notre cas Tcal $= 65182548567.0022$ ce que est bien plus grand que $T_{tab} = 15.5073$ donc on rejette notre hypothèse de départ. La loi de poisson qui ne représente pas bien la distribution que l'on a.

1.2. Loi binomiale négative

On suppose maintenant que N suit la loi binomiale négative de paramètres r etβ.

1.2.1. Estimation des paramètres par la méthode des moments

$\beta = \frac{VAR(N)}{E(N)} - 1 , \quad r = \frac{E(N)}{\beta}$.

$$E(N) = \frac{\sum_{k=1}^{n} kn_k}{\sum_{k=1}^{n} n_k} = \frac{\text{Nombre total de sinistres}}{\text{Nombre total de contrats}}$$

Avec

$VAR(N) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k^2 n_k - (\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} kn_k)^2$.

Application : $\hat{\beta} = 3.094 , \hat{r} = 0.01$.

1.2.2. Adéquation de loi aux données

On utilise le test de khi deux pour tester l'adéquation des données à loi binomiale négative (0.01, 3.094). Dans notre cas Tcal = 13.67 ce que et bien petite que $T_{tab} = 15.50$donc on accepte notre hypothèse de départ. La loi binomiale négative représente bien la distribution que l'on a.

Donc pour la fréquence en retient la loi binomiale négative.

2. Modélisation du montant du sinistre

Dans cette section en doit ajuster nos données à une loi de distribution de probabilité de montant (S) de sinistres.

Les lois connues dans le domaine actuaire pour modéliser le cout de sinistres sont : la loi exponentielle, la loi log-normale, la loi gamma.

2.1. Loi exponentielle

On suppose que le montant de sinistre S suit une loi exponentielle de paramètre λ.

2.1.1. Estimation de paramètre par la méthode des moments

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{1}{n}\sum X_i \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{n}}{\sum \mathbf{X_i}}$$

Application : $\lambda = 6.45 * 10^{-6}$.

2.1.2. Adéquation de la loi aux données

On fait un test de Smirnov Kolmogorov pour savoir si la loi exponentielle de paramètre $(6.45 * 10^{-6})$ décrit bien les données. On a Tcal $= 0.409$ ce qui bien plus grand que Ttab $= 0.207$ donc on rejette notre hypothèse de départ la loi exponentielle ne représente pas bien la distribution que l'on a.

2.2. Loi log-normal

Nous faisons maintenant l'hypothèse que nos données suivent une loi log-normale.

2.2.1. Estimation de paramètre par la méthode des moments

$$E(X) = e^{\mu+\frac{\sigma}{2}} \text{ et } V(X) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right).$$

D'autre part on a $E(X) = \sum X_i$ et $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. on obtient :

$$\mu = \ln\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{1}{n}\sum(X_i)^2}{(\frac{1}{n}\sum X_i)^2} + 1\right) \text{et} \sigma = \sqrt{\ln\left(\frac{\frac{1}{n}\sum(X_i)^2}{(\frac{1}{n}\sum X_i)^2} + 1\right)}$$

Application : $\hat{\mu} = 10.152, \hat{\sigma} = 2.071$

2.2.2 Adéquation du la loi aux données

On fait un test de Smirnov Kolmogorov pour savoir si la loi log-normale de paramètre (10.152, 2.071) décrit bien les données. On a Tcal $= 0.082$, ce qui est bien plus petite que Tab $= 0.140$ donc on accepte notre hypothèse.

2.3 Loi Gamma

Nous faisons maintenant l'hypothèse que nos données suivant une loi Gamma.

2.3.1 Estimation des paramètres par la méthode de maximum de vraisemblance

On maximise la fonction de vraisemblance :$\prod(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} X_i{}^{\alpha-1} e^{\beta X_i})$

Application : $\hat{\alpha} = 0.04, \hat{\beta} = 7586658.734$

2.3.2 Adéquation du loi aux données

On fait un test de Smirnov Kolmogorov pour savoir si la loi Gamma de paramètres (0.04, 7586658.731) décrit bien les données. On a Tcal $= 0.696$ ce que est bien plus grande que Ttab $= 0.140$ donc on rejette notre hypothèse de d »part la loi Gamma ne représente pas bien la distribution que l'on a.

Donc pour le montant en retient la loi log-normale.

3. Calcule de la prime

3.1 Prime pure

On a vu que la prime pure est l'espérance mathématique de la charge de sinistre E(S) qui est égale à l'espérance de nombre de sinistre N *l'espérance du cout moyen de sinistre X.

$$E(S) = E(N)E(X).$$

Application numérique :

$$E(N) = 0.0308 \text{ et } E(X) = 64313.145$$

$E(S) = 1982.473DA$. C'est la prime pure de risque.

3.2 Détermination du taux globale

Le taux global ce dernier signifie la proportion de la valeur assurée. Pour le déterminer, on doit chercher la loi de l'échantillon $Z = z_1, z_2, \dots, z_{3017}$ ou les z_i représentent les proportions des contratsi.

On applique la même démarche que la modélisation de montant et la fréquence, on trouve que la loi Log-Normale de paramètre (-9.718, 20162), ajuste bien nos données d'où $E(Z) = 0.000197$.

Donc le taux de base est de 0.2%.

3.3. Prime avec le variable zone

Dans cette section on détermine la prime selon la zone géographique c'est-à-dire l'appartenance de l'assurée à une commune ou une wilaya.

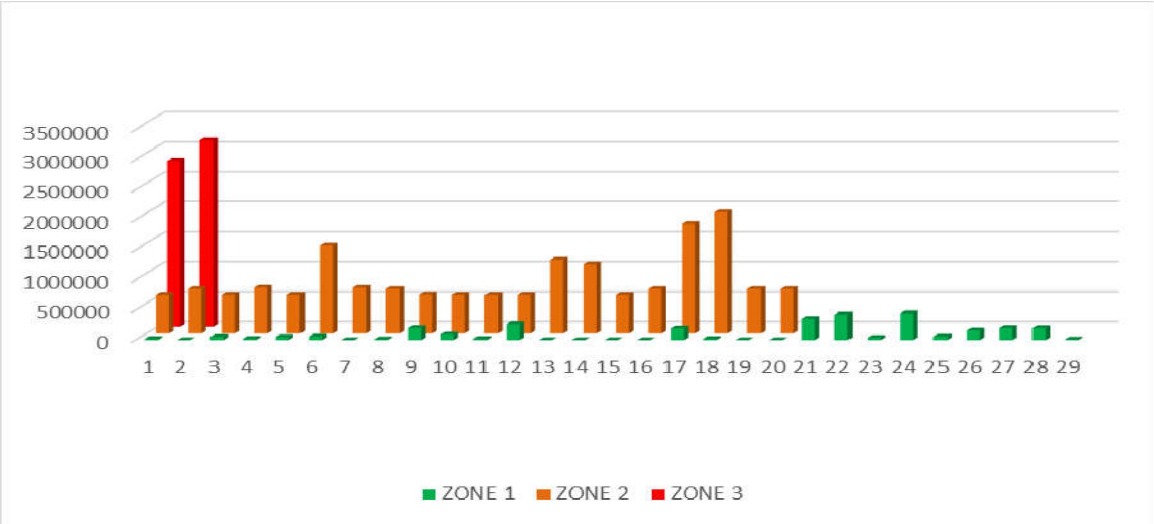
On note cette prime $\overline{\overline{P}} = (\text{taux de base} * \text{capital assurée}) + M(\text{une majoration})$

Où M une majoration selon la zone.

3.3.1 Calcule de M cas zonage par communes

D'après la classification, on a trois (03) zones de risque donc il va falloir calculer M pour chaque zone. La figure 2-1 nous montre la partition de risque selon les trois zones.

Figure N°4 : Repartions de risque selon les communes.



Source : fait par nous même sous XLSTAT

Les Barycentres des classes nous montrent la proposition du cout de sinistres de chaque zone.

Tableau N°9 : Barycentres des classes

Classe	Montant
ZONE1	13936.2327
ZONE2	904158.6855
ZONE3	2930259.5850

Source : fait par nous même sous XLSTAT 2020

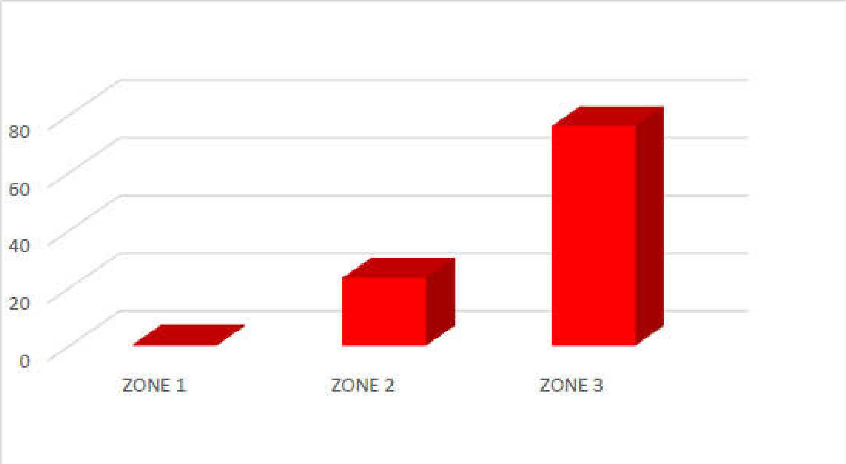
Et les proportions sont alors :

Zone 1 proportion et de 0%.

Zone 2 la proportion d et de 30%.

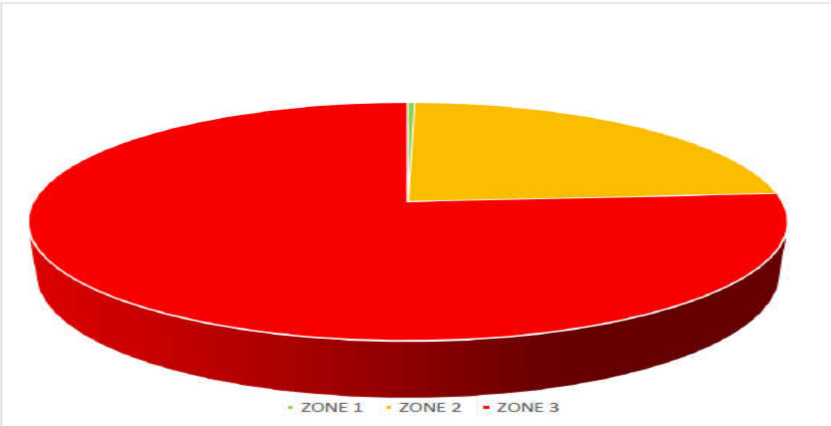
Zone 3 la proportion et de 70%.

Figure N°5 : Répartition des zones



Source : fait par nous même sous Excel 2016

Figure N°6 : Répartition des zones



Source : fait par nous même sous Excel 2016

On suppose que P=(taux de base*capital assuré)

M= 0.7 P (zone 3)

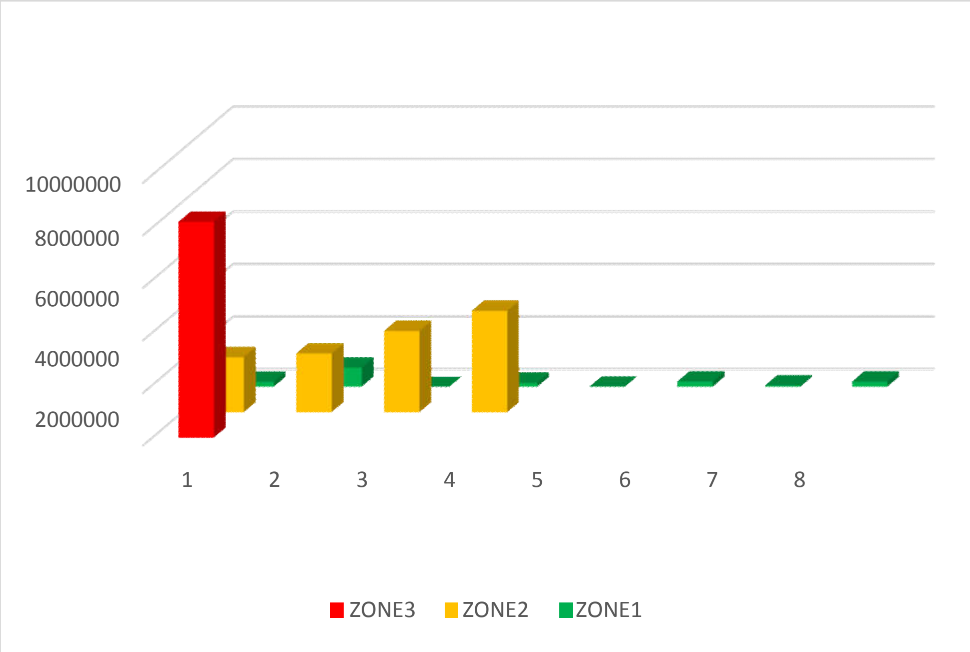
M=0.3 P (zone 2)

M= 0P (zone1).

3.3.2 Calcule de M cas zonage par wilayas

Donc il va falloir calculer M pour chaque zone. La figure 3-5 nous montre la partition de risque selon les trois zones.

Figure N°7 : Repartions de risque selon les wilayas



Source : fait par nous même sous XLSTAT

Les barycentres des classes nous montrent la proposition du coût de sinistres de chaque zone.

Tableau N°10 : Barycentres des classes

Classe	Montant
ZONE1	50318.90949
ZONE2	2834099.543
ZONE3	8228874.3

Source : fait par nous même sous XLSTAT 2020

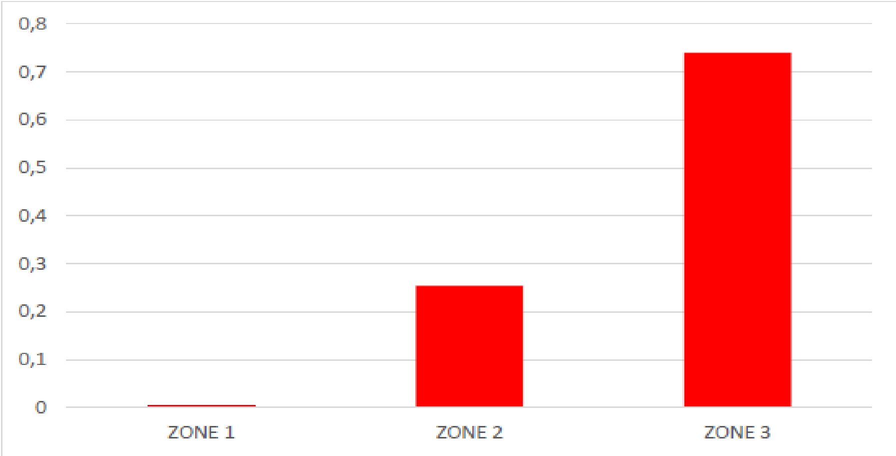
Et les proportions sont alors :

Zone 1 proportion et de 0%.

Zone 2 la proportion d et de 25%.

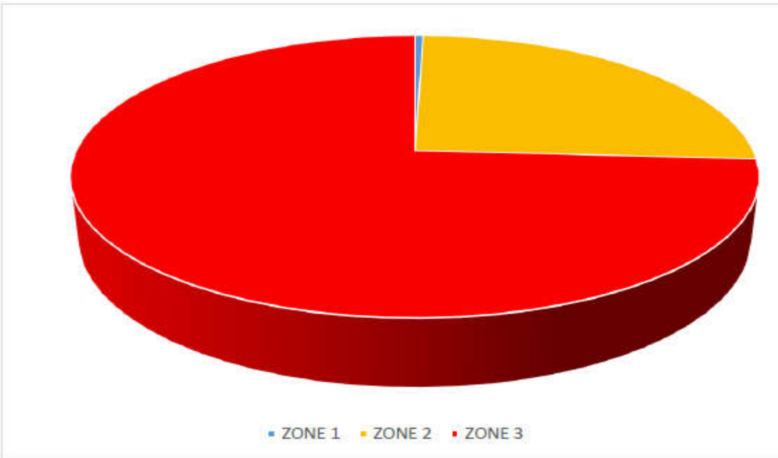
Zone 3 la proportion et de

Figure N°8 : Répartition des zones



Source : fait par nous même sous Excel 2016

Figure N°9 : Répartition des zones



Source : fait par nous même sous Excel 2016

On suppose que P=(taux de base*capital assurée)

M= 0.75P (zone 3)

M=0.25P (zone 2)

M= 0P (zone1).

Conclusion

Ce travail nous a permis de comprendre un principal pilier de l'actuariat : la tarification.

Lors de cette étude, nous avons rencontré des difficultés à récolte des données dues au système d'information. Il nous a fallu beaucoup de temps pour récolter une basse de données partielle, de plus une autre difficulté rencontrée réside dans la saisie incomplète des informations sur certains contrats ou la détermination de la commune par exemple fait défaut. Ce qui rend la classification des communes à risque difficile. Pour y remédier nous proposons l'utilisation d'un masque de saisie avec des champs obligatoire. Si ces derniers ne sont pas correctement remplis, la validation ne peut pas se faire.

Dans ce chapitre, nous avons réalisé une classification des communes et des wilayas selon le risque d'inondation. Ceci nous a permis de les classer en trois (03) zones (zone à risque faible, moyen et fort). Ces résultats ont été exploités dans la tarification des contrats.

Conclusion générale

Conclusion générale

L'assurance a pour rôle fondamentale de conférer aux assurés la sécurité dont ils ont besoin contre les risques du hasard qui menacent leurs intégrités physiques ou leurs patrimoines. Cette assurance a un coût dont l'évaluation nécessite l'utilisation de techniques plus ou moins complexes.

Notre étude a été réalisée dans l'objectif de connaitre le fonctionnement technique des compagnies d'assurance de dommages en matière de fixation des tarifs.

L'aspect théorique, nous a permis de mieux appréhender la théorie de l'assurance, et plus précisément la tarification en assurance dommages et ses différentes méthodesdes risques en assurance vie.

L'aspect pratique, nous a permis de segmenter le risque inondation selon la zone.

Cette études statistique est utile pour la tarification, car, nous disposons d'une autre variable c'est le zonage.

La méthode utilisée, nous a permis de nous approcherde la réalité à travers un produit d'assurance inondation de la branche IARD (Incendie et Accidents, Risques Divers) en assurance non-vie.

Nous avons noté que la tarification actuelle au niveau de la SAA ne prend pas en considération le risque de la zone. De ce fait, tous les assurés payent le même taux sans segmentation. Grace à notre étude de classification, on a calculé la majoration M pour les wilayas et pour les communes pour chaque zone de risque, ce M est égale a :

- 0P pour la zone 1, 0.25P pour la zone 2 et 0.75P pour la zone 3 (wilayas).
- 0P pour la zone 1, 0.3P pour la zone 2 et 0.7P pour la zone 3 (communes).

Nous proposons que chaque assuré paye une prime qui correspond à sa propre zone de risque. On a calculé aussi la prime ce risque P= 1982.473, après on a calculée le taux global de la prime qu'est égale à 0.2 pour mille.

Références bibliographies :

- Lambert DENIS-CLAIR, « économie des assurances », éd Armand Colin/Masson, paris, 1996, p.21.
- Ali HASSID, « Introduction à l'étude des assurances », éd ENAL, Alger, 1988, p, 84.
- ''Conférences sur le droit algérien des assurances'' bureau des publications universitaires, Algérie, 2008, p.6
- L MEZDAD : « essai d'analyse du secteur des assurances et de sa contribution dans l'intermédiation financier
- F CUILBAULT, ELIASHBERG C, LATRASSE M, p. 49.

- Art.2 de l'ordonnance n° 95-07 du 25 janvier 1995 relative aux assurances, p. 170.
- Y LAMBERT-FAIVER, « droit des assurances », 11eme édition Dalloz, paris, 2001, p. 38.
- Françoise CHAPUISAT, « le droit des assurances » 1ére édition presses universitaires de Frances, paris, p.7.
- YEATMAN, Jerome. p.123.
- Idem.
- CCSF, Glossaire des assurances, juin 2010, p. 24.
- OUBAZIZ, p. 37.
- François couilbault et Constant eliashberg, p. 54-55.
- Ibid., p.38, p. 55.
- Introduction à l'étude du droit algérien des assurances .p 51-52
- Michel Denuit, Arthur Charpentier, " *Mathématiques de l'assurance non vie (Principes fondamentaux de théorie du risque)* ", tome 1, ECONOMICA, 2004, P.110.

Christian Partrat, Jean-Luc Besson, op.cit, p.62.

- David C. M. Dickson, "*Insurance Risk and Ruin*", International Series on Actuarial Science, Cambridge University Press, 2006,p.53-55.

- Legendre, A. Nouvelles methods pour la determination des orbites des comètes, courcier, city paris, 1805.
- Ahn, S.E., C.S., Park, H.M., Kim. Hazard rate estimation of a mixture model with censored lifetimes, Stoch. Environ. Res. Asses.21 (2007), 711-716.

- Kudryavtsev, A.,2009. Using quantile regression for rate- making. Inserance: mathematics and Economics 45, 296-304.
- Antoniadis, A., J, Berruyer, et R. Carmona (1992). Régression non linéaire et applications. Economica.
- Bailey, A. L., credibility procedures, Laplace's generalization of bayes' rule and the combination of collateral knowledge with observed data, proceedings of the casualty Actuarial Society, vol.37,7-23,1950.
- Basu, A.P., and Ebrahimi, N. Bayesian approach to life testing and reliability estimation using asymmetric loss function, J. Statist. Plan. Infer., 29, 21-31, 1991.
- Buchinsky, M., 1998. Recent advances in regression models: a practical guideline for empirical research. The Journal of Human Resources 33 (1), 88-126.
- Dean, C., J. Lawless et G. Willmot. 1989." A mixed poisson-inverse Gaussian regression model". Canadian Journal of Statistics 17. P. 171-186.
- Calabria, R. and G. Pulcini, 1969. Point estimation under asymmetric loss functions for left truncated expontial samples. Comm. Statist. Theory Methods, 25:585-605.
- Denuit, M., Pitrebios, S., Walhin,J.-F., Marketing et Systèmes Bonus-Malus, Actu-L3,89-105,2003
- Soliman, A. Comparison of Linex and quadratic Bayes estimators for the Rayleigh distribution. Commun. Statist. Theor. Meth, 29(1), 95-107, 2000.
- Document interne de la SAA
- Pierre-Louis GONZALEZ, METHODES DE CLASSIFICATION.
- Etienne Marceau, Modélisation et évaluation quantitative des risques en acturiat Modelés sur une période Springer-Verlag France, 2013

Références sito-graphies :

- http://www.univchlef.dz/LABORATOIRES/LSFBPM/seminaires_2012/intervention_BOUTALEB_Kouider_2012.
- République Tunisienne. « Code des assurances ». Publication de l'imprimerie officielle de la république Tunisienne, 2008, p.9. Disponible sur

http://www.finances.gov.tn/domaines/assurance/cadre%20legal/codes%20des%assurance.pdf(consulté le 13/06/2021).

- CNA, ordonnance n° 95-07 du chaabane 1415 correspondant au 25 janvier 1995 relative aux assurances et ses textes d'application. [En ligne] . p. 16. Format PDF. Disponible sur : http://www.cna.dz/content/dowload/110/562/version/file/1+-+Oce+95-07-Mode+et+compl+%26+TXT+SUSQ.pdf (consulter le 13/06/2021).