وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة امحمد بوقرة - بومرداس
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

اليوم الدراسي بمناسبة اليوم العلمي للرياضيات: علاقة الرياضيات بالاقتصاد والمناجمت

مداخلة بعنوان: دور وأهمية تطبيق الرياضيات الاكتوارية في تأمينات الحياة

من أعداد:

د. العربي شريف هجيرة

د. بدر الدين أمينة

ملخص: تهدف هذه المداخلة إلى تعريف الباحثين والطلبة بأهمية الرياضيات في التأمين من خلال ما يطلق عليه اسم الاكتوارية (حسابات المخاطر)، حيث ركزنا على جانب اكتوارية تأمينات الحياة التي تتميز بأنها عمليات طويلة الأجل، فقمنا أولاً بالتعريف بمصطلح الاكتوارية ونبذة عن تطور تقنياتها وكذلك مفهوم تأمينات الحياة، ثم قمنا بإعطاء نبذة حول كيفية حساب الأقساط باستخدام العمليات الاكتوارية التي تجمع ما بين الرياضيات المالية (القيمة الحالية) والحسابات العشوائية (التصادفية) بالتعرف على جداول الحياة وطرق حساب احتمالات البقاء على قيد الحياة والوفاء، وتوقع الحياة، ثم طرق حساب القسط الوحيد والأقساط السنوية لمختلف أنواع التزامات تأمينات الحياة وطرق حساب الأرصدة الرياضية.

الكلمات الدالة: الرياضيات الاكتوارية، تأمينات الحياة، جدول الحياة، القيمة الحالية المحتملة

تمهيد:

ظهر مصطلح الإكتوارية لأول مرة في منتصف القرن 18 في المملكة المتحدة أي في الوقت الذي ظهرت فيه أول شركة تأمينات رسمية GEORGE سنة 1720 وأعمال Gauss-Gulton-Berneulli الإحصائية.

ولكن الاكتوارية بمفهومها الحديث ظهرت مع الثورة الصناعية في منتصف القرن 19 حيث ظهر معهد الاكتوارية في المملكة المتحدة والشركة الأمريكية للإكتوارية سنة 1889 ومعهد الاكتوارية الفرنسي في 1890 وفي سنة 1885 تم تنظيم وظيفة الاكتواري عالميا حيث أنشئت الشركة العالمية للإكتوارية في بروكسل وكان دورها الأساسي هو جمع الإحصائيين الذين أحرزوا تطورا في هذا المجال.

وكان ظهور التأمينات الجماعية وصناديق الأجر السبب الرئيسي وراء تطور الاكتوارية في بداية القرن العشرين وفي سنوات الخمسينات ومع تطور التأمينات المرضية أصبحت السبب الرئيسي وراء تطور الاكتوارية حيث حققت تأييد كبير من الرأي العام. وتطورت في سنوات الثمانينات لتتحول من النماذج التأكيدية (certitude) إلى النماذج اللاتأكيدية (الاحتمالية)(incertitude) .

نهدف من خلال هذه المداخلة إلى تسليط الضوء على أهمية وكيفية تطبيق أساليب الرياضيات في التأمين خاصة التأمين الاجتماعي من خلال ما يطلق عليه مصطلح الاكتوارية (حسابات المخاطر) من أجل تحديد مدى كفاءة الأقساط وكفايتها لتلبية المسؤوليات والالتزامات المستقبلية وأهمية عمل الاكتواري وواجباته في قطاع التأمين وتحديدًا في مجال تأمين الحياة ودوره في تطبيق المبادئ الإحصائية والرياضية لإعداد جداول الاحتمالات المتعلقة بالمخاطر والوفيات بهدف العمل على احتساب أقساط التأمين ومعدلات الإسهامات المالية المطلوبة استنادا إلى معدلات الفائدة والعمر.

المحور الأول: مفهوم الاكتوارية وتأمينات الحياة

1- تعريف الاكتوارية

الاكتوارية كلمة لاتينية تعني (محاسب، محرر كتب الحساب...) أما الاكتواري فهو المختص الذي يقوم بالحسابات الإحصائية للتأمينات أو بصفة أوسع هو المختص في تحليل ومعالجة الآثار المالية للخطر.

كما يمكننا تعريف الاكتوارية بأنها تطبيق لحساب الاحتمالات والإحصاءات لمسائل التأمين، المالية والحماية الاجتماعية ويقوم على الأثر المالي للخطر وتقدير التدفقات المستقبلية المجمعة حيث يتم استخدام تقنيات رياضية وإحصائية لتحديد ونمذجة بعض الحوادث المستقبلية بطريقة تنبؤية مثلاً: مدة حياة الإنسان، تكرار الحوادث... الخ.

الاكتواري هو مفكر متعدد المواصفات الإستراتيجية ويجب أن يكون متمرس في النظريات والتطبيقات في علوم الرياضيات والإحصاءات، والاقتصاد وحساب الاحتمالات والعلوم المالية لذلك يُقَبَّب الاكتواري بالمهندس المالي أو مهندس الرياضيات الاجتماعية.

فالعلوم الإكتوارية هي التقنيات الذي يتم فيها استخدام جميع مجالات الرياضيات للإجابة على الأسئلة التي يتم طرحها، حيث يندرج تحت العلوم الإكتوارية اثنين من التخصصات كما يأتي:

- **التقييم:** تحليل المخاطر المتوقَّع حدوثها للعميل.
- **التسعير:** إنشاء نموذج لكيفية مطابقة الحوادث لمطالبات التأمين وما الذي يجب على العملاء دفعه لشراء التأمين الخاص بهم.

وتقوم العلوم الاكتوارية على مجموعة من المبادئ منها:

- مبدأ التعامل مع أثر المتغيرات العشوائية (مدة الحياة المتبقية، تكرار الحوادث،...) على الأوضاع المالية المستقبلية.
- مبدأ القيمة الزمنية للنقود الذي يعطي أفضلية للزمن وإنتاجية رأس المال في ظل ظروف غير مؤكدة
- مبدأ النمذجة (ببناء نماذج فردية وجماعية)

2- تعريف التأمين

عرف البروفسير كالب Kulp التأمين بأنه عبارة عن نظام اجتماعي، والذي بمقتضاه تقوم مجموعة من الأفراد هم (المستأمنون) بتحويل الخطر لمجموعة أخرى أو جهة أخرى (المؤمن أو شركة التأمين) حتى تقوم بإدارة هذا الخطر باستخدام الأساليب الرياضية والإحصائية للتنبؤ بالخسائر المتوقعة وتقوم بتعويض الخسائر الفعلية لأفراد المجموعة الأولى عن طريق إدارة الأموال المجمعة في شكل أقساط من الأفراد الذين قاموا بتحويل الخطر لشركة التأمين¹.

¹ شريف محمد الغمري، محمد محمد عطا، الاصول العلمية والعملية للخطر والتأمين، الطبعة الأولى، السعودية، 2012، ص75.

كما يمكن تعريف التأمين عموماً "بأنه العملية التي من خلالها يقوم شخص "المؤمن" بالتكفل بإجراء قرض لفائدة شخص آخر "المؤمن له" في حالة حدوث حادثة عشوائية أو مخاطرة مقابل دفع "علاوة أو قسط التأمين"²، وهناك فرعان رئيسيان للتأمين:

- فرع الحياة: تأمين في حالة الحياة أو الموت وتأمين الأشخاص
- فرع غير الحياة: تأمين الخسارة مثل احتراق المركبات ومختلف الأخطار، تأمين السلع.

3- مفهوم العمليات الحيوية:

3-1- تعريف العمليات الحيوية: العمليات الحيوية يقصد بها العمليات التي من خلالها ترتبط مبالغ أو

تبادلات رأس المال بالحياة الباقية أو موت شخص أو عدة أشخاص³.

مثال: في مقابل قسط تأمين ثابت، شركة تأمين تدفع مبلغ في وقت وفاة شخص X لشخص مستفيد y.

في مقابل رأس مال مدفوع من y، X لديه الحق في الدخول للملكية في وقت وفاة y لعقار تابع لـ y.

3-2- تعريف التأمين على الحياة: هو عملية حيوية حيث تكون المخاطر مرتبطة بالمدة العشوائية

لحياة الإنسان تقوم بها شركة مختصة (شركة التأمين على الحياة) إذا مصطلح التأمين على الحياة يشمل مجموعة من العمليات المقيدة بالعمليات الحيوية.

3-3- تعريف عقد التأمين على الحياة: هو العقد الذي من خلاله في مقابل دفعات وحيدة أو دورية،

المؤمن يضمن الإقراض للمستفيد الذي تنفيذه مرتبط بالحياة المتبقية أو موت المؤمن له.

هناك ثلاث أنواع للتأمين على الحياة: التأمين في حالة الوفاة، التأمين في حالة الحياة والتأمين

المختلط.

ولحساب الأرصدة وأقساط التأمين يستعين الاكتواري بـ:

-الرياضيات المالية: لحساب الفائدة المركبة، التحيين والرسمة.

-الديموغرافيا: لحساب خطر الوفيات.

- المالية: (تسيير الأصول والخصوم، التحليل المالي الديناميكي...)

المحور الثاني: العمليات الحيوية وعقود التأمين على الحياة:

² Emmanuelle Scheid, théorie de l'assurance-vie, cours destinés au 2^e actuariat, université Dauphine, Paris.

³ Emmanuelle Scheid, théorie de l'assurance-vie, cours destinés au 2^e actuariat, université Dauphine, Paris.

ينقسم التأمين إلى تأمين غير الحياة (تجاري) وتأمين الحياة (اجتماعي) وفي كلا النوعين فلا بد من تقدير القيمة الاحتمالية لمبالغ التأمين وتعويضاته التي يلتزم بأدائها عند تحقق الخطر الاحتمالي للمؤمن له حتى يمكن تحديد ما يلتزم بأدائه المعرضين للخطر أي تدبير الموارد اللازمة لمواجهة مبالغ التأمين وتعويضاته.

التأمين على الحياة يقوم على مبدأ التكافؤ في الخطر لمجموعة متجانسة من الأشخاص (نفس السن، نفس الجنس،...) أي الأشخاص المعرضون لنفس الخطر تقريباً.

يتم تحديد الاشتراك "القسط" لكل فرد بحيث يكون إجمالي الاشتراكات المتساوية لكل فرد من المجموعة يغطي إجمالي التعويضات المفترضة، وهو مبدأ التكافؤ ما بين اشتراكات المؤمن لهم والتزامات المؤمن.

في العمليات الحيوية الوسائل الأساسية للحسابات المالية هي معدل الفائدة ومعدل الوفيات.

1- جدول الحياة

تكمن أهمية جدول الحياة في الدور الذي تمثله بالنسبة للمؤمن على الحياة في وضع القواعد اللازمة لحساب التسعيرة والقسط والاحتياطي لمختلف الوثائق التي تصدرها شركات التأمين ، ولإعداد جدول الحياة يجب قياس معدلات الوفاة، فإذا أردنا أن نتعرف على معدلات الوفاة في مجتمع ما بالإمكان الاعتماد على آخر تعداد عام للسكان بالإضافة إلى دفاتر الحالة المدنية، والمعطيات التي نحصل عليها للوفاة ترسم الصورة الأولية لمعطيات قابلة للتغيير، لذلك فهي أرقام لا بد من تعديلها باستخدام بعض الطرق الرياضية.

تعريف جدول الحياة :

يمكن تعريف جدول الوفاة في صورته العامة بأنه نموذج رياضي يبدأ بمجموعة من السكان في عمر معين ويتتبع حياتهم في تناقصهم التدريجي نتيجة حدوث الوفاة حتى وفاة آخر فرد منهم. إذن، جدول الوفاة هو جدول يعطينا صورة رقمية لوفيات السكان في مختلف الأعمار، ويستخدم جدول الوفاة لمعرفة احتمالات الحياة واحتمالات الوفاة بما يحتوي على أعداد الأحياء لكل سنة ابتداء من أول عمر حتى آخر عمر يتضمنه الجدول. ومن هذا يتضح مدى أهمية جدول الوفاة في عمليات التأمين على الحياة بالنسبة لحساب الأقساط والاحتياطيات وقيمة التصفية لوثيقة التأمين.

المبدأ: ابتداء من مجموعة أو زمرة ابتدائية من الولادة سنة بعد سنة يكون عدد الباقيون على قيد

الحياة l_x في العمر x قاعدة الجدول هي من قوى العدد 10.

l_x : عدد الباقون على قيد الحياة في السن x

آخر سن في الجدول هو w وهو السن الذي لا يبقى فيه أي شخص على قيد الحياة

$$l_w = 0$$

إذا الدالة l موجبة ومنتاقصة كما أن قيمها صحيحة

2- حساب احتمال البقاء على قيد الحياة واحتمال الوفاة

يمكن حساب احتمال البقاء على قيد الحياة واحتمال الوفاة كما هو موضح في الجدول التالي

السن x	عدد الباقون على قيد الحياة l_x	عدد الوفيات d_x	احتمال البقاء على قيد الحياة p_x	احتمال الوفاة q_x
0	10000	$d_x = l_x - l_{x+1}$	$P_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - q_x$	$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$
1				
.				
.				
w				

احتمال البقاء على قيد الحياة في n سنة:

وهو احتمال أن يبقى شخص في السن x على قيد الحياة عند بلوغه السن $x+n$

$${}_n P_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = P_x P_{x+1} P_{x+2} \dots P_{x+n-1}$$

احتمال الوفاة في n سنة:

وهو احتمال وفاة شخص في السن x قبل بلوغه السن $x+n$

$${}_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - {}_n P_x$$

احتمال الوفاة بعد n سنة:

وهو احتمال وفاة شخص في السن x بعد بلوغه السن $x+n$ أي احتمال الوفاة بين السن $x+n$ والسن

$x+n+1$.

$${}_n / q_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x} = {}_n p_x q_{x+n}$$

أ - احتمال الحياة لثنائي في السن x و y

لدينا (x,y) شخصان في السن على الترتيب x,y . نفرض أن احتمال البقاء على قيد الحياة للشخص الأول مستقل عن احتمال البقاء على قيد الحياة للشخص الثاني.

- احتمال أن يبقى الثنائي على قيد الحياة في n سنة

$${}_n P_{xy} = {}_n P_x {}_n P_y \quad (3.10)$$

- احتمال أن يبقى شخص على الأقل على قيد الحياة في n سنة:

$${}_n P_{\overline{xy}} = {}_n P_x + {}_n P_y - {}_n P_{xy} \quad (3.11)$$

- احتمال وفاة الثنائي في n سنة:

3- توقع الحياة:

توقع الحياة هو متوسط عدد سنوات البقاء على قيد الحياة في السن x . حيث لدينا صيغتان لتوقع الحياة: توقع الحياة المختصر (الوفاة بداية السنة) وتوقع الحياة الكامل (الوفاة في منتصف السنة)

- صيغة توقع الحياة المختصر:

$$e_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} t {}_t q_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} t \frac{d_{x+t}}{l_x}$$

- صيغة توقع الحياة الكامل:

$$e_x^\circ = e_x + \frac{1}{2}$$

أشكال أخرى لتوقع الحياة:

$$e_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} t p_x$$

4- المعدل الآتي للوفيات:

بما أن الوفاة ظاهرة مستمرة بدلالة الزمن نفرض أن l_x مستمرة وقابلة للاشتقاق حيث:

$$x \in [0, \omega] \subset R$$

لدينا حاصل قسمة الوفيات على المجال $(0 < h < 1)$

$${}_h q_x = \frac{l_x - l_{x+h}}{l_x} \rightarrow 0 \text{ si } h \rightarrow 0$$

نستعمل خواص الاشتقاق بالنسبة إلى h

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} {}_h q_x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{l_x} \frac{l_x - l_{x+h}}{h} \\ &= -\frac{1}{l_x} \frac{d}{dx} l_x = -\frac{d}{dx} \ln l_x \\ &= \mu_x \end{aligned}$$

μ_x المعدل الآني للوفيات وهو مشتق الدالة $-\ln l_x$

ومنه يمكننا إيجاد العلاقة بين المعدل الآني للوفيات واحتمال البقاء على قيد الحياة:

$$\begin{aligned} \mu_{x+t} &= -\frac{d}{dt} \ln l_{x+t} \Leftrightarrow \int_0^n \mu_{x+t} dt = -[\ln l_{x+t}]_0^n = -(\ln l_{x+n} - \ln l_x) \\ &= -\ln \frac{l_{x+n}}{l_x} = -\ln {}_n P_x \end{aligned}$$

$${}_n P_x = 1 - \exp\left(-\int_0^n \mu_{x+t} dt\right) \quad (3.9)$$

المحور الثالث: حساب القسط الوحيد الصافي والقسط السنوي لبعض عقود التأمين على الحياة

يرتكز المبدأ الأساسي لحساب أقساط التأمين على الحياة على المساواة في تاريخ الاكتتاب بين القيمة

الحالية المحتملة للالتزامات المؤمن والقيمة الحالية المحتملة للالتزامات المؤمن له. وحسابات اكتوارية

التأمين على الحياة تركز كذلك على تحديد القيم الحالية المحتملة للالتزامات التي تقوم على وفاة أو بقاء

شخص أو عدة أشخاص على قيد الحياة.

1- القسط الوحيد الصافي:

1-1- الالتزام في حالة البقاء على قيد الحياة:

في هذا النوع من العقود يضمن المؤمن دفع مبلغ مال أو معاش إلى مستفيد إذا بقي على قيد الحياة

إلى تاريخ معين، في هذه الحالة، الحدث العشوائي هو بقاء الشخص على قيد الحياة إلى سن معين أو

تاريخ معين⁴. وتتمثل أهم أنواع الالتزامات في حالة البقاء على قيد الحياة في : رأس المال المؤجل،

ودفعات المعاشات.

⁴ Saliou Bakayoko, fonctionnement technique et actuariat de l'assurance vie et capitalisation, siminaire conjoint FANAF/IIA, Bamaco, 26-30 novembre 2007, p11.

قبل أن نتعرض لأهم عقود الالتزام في حالة البقاء على قيد الحياة، نعرف العبارات التالية التي

تسمح لنا بتبسيط الحسابات وهي معرفة إلى معدل فائدة i :

$$v = \frac{1}{1+i}; \quad D_x = l_x v^x; \quad N_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} D_{x+k}; \quad S_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} N_{x+k}; \quad nE_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} v^n$$

أ- عقد رأس المال المؤجل بدون إعادة التأمين le capitale différé sans contr

: assurance

مؤمن له في السن x وفي زمن $t=0$ يرغب في الحصول على رأسمال S بعد n سنة إذا بقي على قيد الحياة في هذا الوقت. المؤمن يطلب من المؤمن له في مقابل هذا الالتزام قسط يساوي:

$$\Pi = \frac{l_{x+n}}{l_x} v^n \times S = nE_x S$$

القيمة: nE_x هي القيمة الحالية المحتملة لـ 1 وحدة نقدية لرأسمال مؤجل n سنة.

$$nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

ب- المعاش المؤقت:

القيمة الحالية المحتملة لهذه الالتزامات تمثل القسط الوحيد الصافي الذي يدفعه المؤمن له في السن

x مقابل وفاء المؤمن بالالتزام بدفع معاش سنوي للمؤمن له حتى بلوغه السن $x+n$:

$$|na_x = \sum_{k=1}^n \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \sum_{k=1}^n \frac{l_{x+k}}{l_x} \frac{v^{x+k}}{v^x} = \sum_{k=1}^n \frac{D_{x+k}}{D_x} = \sum_{k=1}^n kE_x$$

نكتب أيضا:

$$|na_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

أما إذا كان المعاش بدفع مسبق أي بداية السنة ($t=0, t=1, \dots, t=n-1$) المؤمن له يدفع:

$$|n\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l_{x+k}}{l_x} \frac{v^{x+k}}{v^x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \sum_{k=0}^{n-1} kE_x$$

$$|n\ddot{a}_x = 1 + |na_x - nE_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

ج- المعاش مدى الحياة:

في هذه الحالة يلتزم المؤمن بدفع معاش سنوي للمستفيد مدى الحياة ، في هذه الحالة نفرض أن n تؤول إلى مالا نهاية

القيمة الحالية المحتملة لمعاش سنوي 1 وحدة نقدية هي

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \sum_{k=1}^{\infty} kE_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

أما في حالة معاش سنوي لمدى الحياة وبدفع مسبق:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \sum_{k=0}^{\infty} kE_x = \frac{N_x}{D_x}$$

د- المعاش السنوي المؤقت والمؤجل:

في هذه الحالة يتعلق الأمر بمعاش مؤجل m سنة ومؤقت n سنة إذ يلتزم المؤمن بدفع معاش سنوي 1 وحدة نقدية بعد مرور m سنة من تاريخ الاكتتاب حيث تدفع أول دفعة في التاريخ $t=m+1$ وآخر دفعة في $t=m+n$ ، القيمة الحالية المحتملة في هذه الحالة هي:

$$m|na_x = \sum_{k=m+1}^{m+n} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \sum_{k=m+1}^{m+n} kE_x$$

$$m|na_x = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+n+m+1}}{D_x}$$

في حالة الدفع المسبق تكون أول دفعة في تاريخ $t=m$ وآخر دفعة في تاريخ $t=m+n-1$:

$$m|n\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \sum_{k=m}^{m+n-1} kE_x$$

$$m|n\ddot{a}_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+n+m}}{D_x}$$

1-2- الالتزامات في حالة الوفاة

وفقا لهذا النوع من العقود يلتزم المؤمن بأداء مبلغ التأمين للمستفيدين في حالة وفاة المؤمن له في أي وقت اعتبارا من تاريخ التعاقد . الحدث العشوائي في هذه الحالة هو وفاة المؤمن قبل تاريخ معين أو سن معين . سنتناول في هذه النقطة كيفية حساب القيمة الحالية المحتملة التي تمثل قسط التأمين الوحيد الصافي الذي يغطي خطر دفع 1 وحدة نقدية في حالة وفاة المؤمن له قبل بلوغه السن $x+n$.

نسمي:

$$C_x = d_x v^{x+\frac{1}{2}}; \quad M_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} C_{x+k}; \quad R_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} M_{x+k}$$

أ - عقد التأمين المؤقت (وقتي الوفاة):

المؤمن يأخذ التزام بدفع رأسمال S مهما كان تاريخ وفاة المؤمن له بين $t=0$ و $t=n$ للمستفيد.
القسط الوحيد الصافي الذي يدفعه المؤمن له للمؤمن مقابل هذا الالتزام هو:

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_{x+k}}{D_x} \right) S = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} S$$

القيمة الحالية المحتملة للالتزام بدفع 1 وحدة نقدية هي:

$$|nA_x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d_{x+k}}{l_x} v^{k+\frac{1}{2}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

ب- عقد التأمين لمدى الحياة

وفقا لهذا النوع من العقود يلتزم المؤمن بأن يؤدي مبلغ التأمين في حالة الوفاة في أي سن اعتبارا من

تاريخ الاكتتاب

المؤمن يأخذ التزام بدفع المبلغ S مهما كان تاريخ الوفاة

A_x هو التزام بدفع 1 وحدة نقدية في منتصف سنة التأمين:

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{x+k}}{l_x} v^{k+\frac{1}{2}} = \frac{M_x}{D_x}$$

ج- الالتزام في حالة الوفاة مع التأجيل

المؤمن يأخذ التزام بدفع 1 وحدة نقدية للمستفيد عند وفاة المؤمن له بين التاريخين $t=m$ و $t=m+n$

القيمة الحالية المحتملة لوقتي الوفاة n سنة والمؤجل m سنة لـ 1 وحدة نقدية هي:

$$m|nA_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{d_{x+k}}{l_x} v^{k+\frac{1}{2}} = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$$

في حالة عقد مدى الحياة:

$$m|nA_x = \frac{M_{x+m}}{D_x} \quad (3.32)$$

1-3 - عقد التأمين المختلط:

في عقود التأمين في حالة البقاء على قيد الحياة أو حالة الوفاة، هناك دائماً مشكل عدم ضمان الاشتراكات المؤكدة كما في حالة عقد رأس المال المؤجل إذا توفي المؤمن له خلال مدة العقد أو في حالة بقاء المؤمن له على قيد الحياة بعد نهاية مدة العقد في حالة عقد التأمين في حالة الوفاة المؤقت (وقتية الوفاة). لهذه الأسباب، يقتر المؤمنون وثائق أخرى من عقود تأمينات الحياة هي عقود التأمين المختلطة.

عقد التأمين المختلط هو عقد يتكون من عقدين:

1- عقد تأمين مدته n سنة ومبلغه 1 وحدة نقدية.

2- عقد وقفية بحتة مدته n سنة ومبلغه 1 وحدة نقدية.

ونرمز لها بالرمز: $A_{x:\bar{n}|}$

القيمة الحالية المحتملة للالتزام بعقد تأمين مختلط هي مجموع الالتزامات في حالة الحياة والوفاة.

$$A_{x:\bar{n}|} = |nA_x + nE_x \quad (3.33)$$

2- حساب الأقساط السنوية المتساوية

رأينا في السابق كيفية حساب القسط الوحيد الصافي لمختلف أنواع الالتزامات سواء في التأمين في

حالة الوفاة، في حالة الحياة أو التأمين المختلط، فإذا افترضنا أن المؤمن لهم لا يدفعون قسط وحيد

صافي وإنما يدفعون أقساط سنوية أو دورية متساوية حيث يمكن اعتبار الأقساط السنوية تجزئة للقسط

الوحيد الصافي وبمكنا حسابها كما يلي:

القيمة الحالية للأقساط السنوية المتوقع سدادها = مبلغ القسط الوحيد

2-1 - حساب الأقساط السنوية في حالة عقد تأمين في حالة الحياة:

قد تكون الأقساط السنوية طوال مدة العقد وتسمى الأقساط السنوية العادية وقد تكون خلال مدة

محددة فقط من العقد وتسمى الأقساط السنوية المحدودة ومن هنا نقول أن:

القسط الوحيد الصافي لعقد تأمين = قيمة القسط السنوي X قيمة مبلغ التأمين في حالة الدفع

المسبق لـ 1 وحدة نقدية لشخص في السن x .

$$\Pi = P \times n\ddot{a}_x$$

القسط السنوي الصافي لعقد تامين الوقفية البحتة:

إذا كانت الأقساط تسدد خلال مدة التامين بالكامل:

$$P = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

أما إذا كانت الأقساط تسدد خلال مدة محددة من العقد أسنة تقل عن مدى العقد:

$$P = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+r}}$$

القسط السنوي الصافي المتساوي لعقود الدفعات لمدى الحياة المؤجلة:

في حالة دفعات مدى الحياة المؤجلة العادية:

إذا كان التقسيط لمدة التأجيل بالكامل:

$$P = \frac{N_{x+m+1}}{N_x - N_{x+m}}$$

إذا كان التقسيط خلال مدة r من العقد تقل عن مدة التأجيل:

$$P = \frac{N_{x+m+1}}{N_x - N_{x+r}}$$

في حالة الدفع المسبق:

فإذا كان التقسيط خلال مدة التأجيل بالكامل:

$$P = \frac{N_{x+m+1}}{N_x - N_{x+m}}$$

وإذا كان التقسيط خلال مدة r أقل من مدة التأجيل:

$$P = \frac{N_{x+m}}{N_x - N_{x+r}}$$

القسط السنوي الصافي لعقود الدفعات المؤقتة المؤجلة:

ففي حالة الدفعات العادية وإذا كان دفع الأقساط خلال مدة التأجيل بالكامل:

$$P = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{N_x - N_{x+m}}$$

وفي حالة الدفعات العادية وكان دفع الأقساط خلال مدة r تقل عن مدة التأجيل :

$$P = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n+1}}{N_x - N_{x+r}}$$

وفي حالة الدفعات المسبقة إذا كان دفع الأقساط السنوية خلال مدة التأجيل بالكامل:

$$P = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

وإذا كان دفع الأقساط خلال مدة r تقل عن مدة التأجيل

$$P = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{N_x - N_{x+r}}$$

2-2 - حساب الأقساط السنوية في حالة الالتزام بعقد تأمين في حالة الوفاة:

القسط السنوي الصافي لعقد تأمين مدى الحياة

يؤدي هذا القسط في أول كل سنة اعتباراً من تاريخ التعاقد طالما ظل على قيد الحياة

$$P = \frac{M_x}{N_x}$$

يؤدي هذا القسط في أول كل سنة اعتباراً من تاريخ التعاقد ولمدة n من السنوات أو الوفاة أيهما سبق

$$P = \frac{M_x}{N_x - N_{x+n}}$$

القسط السنوي الصافي لعقد التأمين مدى الحياة المؤجل:

يؤدي هذا القسط السنوي في أول كل سنة اعتباراً من تاريخ التعاقد طالما ظل المؤمن له على قيد الحياة

$$P = \frac{M_{x+m}}{N_x}$$

يؤدي هذا القسط في أول كل سنة اعتباراً من تاريخ التعاقد ولمدة n من السنوات أو الوفاة أيهما سبق

$$P = \frac{M_{x+m}}{N_x - N_{x+n}}$$

القسط السنوي الصافي لعقد التأمين المؤقت:

القسط السنوي الذي يؤدي خلال مدة التأمين بالكامل

$$P = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

القسط السنوي الذي يؤدي خلال مدة r تقل عن مدة التأمين

$$P = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+r}}$$

2-3- القسط السنوي لعقود التأمين المختلطة:

إذا كان التقسيط خلال مدة العقد بالكامل

$$P = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

إذا كان التقسيط خلال مدة ٢ تقل عن مدة العقد

$$P = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+r}}$$

3- التسعير في التأمين على الحياة

عملية التأمين على الحياة هي التزام المؤمن بدفع دفعة للمستفيد في حالة تحقق الخطر مقابل دفع المؤمن له قسط مالي. إذا التسعير يركز على حساب أقساط صافية وتجارية وتدخل في هذه الحالة التكاليف الكافية التي تسمح للمؤمن بمواجهة مخرجات تسيير وتسويق العقود.

$$\text{التكاليف التسعير} = \frac{\text{القسط الصافي}}{\text{تكلفة الخطر}} + \frac{\text{التكاليف التسعير}}{\text{تكلفة}}$$

وهناك قيود تتحكم في التسعير هي:

1- قانون العرض والطلب: أي أن التسعيرة تتأثر بالمنافسة مع شركات التأمين الأخرى ويؤدي ذلك إلى خفض التكاليف.

2- القوانين: محددة في تاريخ الاكتتاب أي معالم الحساب المستخدمة إذا المؤمن يستطيع مقابل هذه الالتزامات اقتراح أسعار كافية قادرة على المنافسة.

ونميز نوعان من الأقساط التجارية القسط التجاري الوحيد "π" والأقساط التجارية السنوية "P"

أ- حالة القسط التجاري الوحيد:

في هذه الحالة لا توجد أقساط سنوية مرتبطة بحياة المؤمن له:

القسط الوحيد التجاري = القسط الوحيد الصافي + تكاليف الشراء + تكاليف التحصيل (طالما تدفع أقساط) + المصاريف التسيير الأخرى + رسوم تسوية العقد

$$\Pi'' = \Pi + f + \alpha\Pi'' + g_2\ddot{a}_G + r\Pi$$

ب- في حالة القسط التجاري السنوي:

$$\Pi = P\ddot{a}_H \quad \text{لدينا:}$$

والقسط السنوي التجاري = القسط الصافي السنوي + تكاليف الشراء + تكاليف التحصيل + تكاليف تسيير العقد + تكاليف أخرى + رسوم تسوية العقد.

$$P'' \cdot \ddot{a}_H = P\ddot{a}_H + f + \alpha P'' \ddot{a}_H + g_1\ddot{a}_H + g_2\ddot{a}_H + rP\ddot{a}_H$$

4- الاحتياطات الرياضية:

عند التعاقد بين مؤسسة تأمينات وأحد عملائها فإن مبدأ المعادلة الفردية ينص على وجوب معادلة القيمة الحالية للمستحقات (الخدمة المقدمة من المؤسسة) مع القيمة الحالية للمدفوعات (الأقساط التي يقدمها العميل للشركة)، ونفقد هذه العلاقة مباشرة مع دخول التأمين حيز التنفيذ. عندئذ لا يوجد تعادل بين الأقساط السنوية والخطورة السنوية، في هذه الحالة واعتباراً لهذا الفارق الذي يفصل بين المؤمن والمؤمن له فإن المؤمن مطالب بتكوين احتياطي رياضي يسمى أيضاً "كفالة التغطية"، ويسعى المؤمن إلى تنفيذ جميع التزاماته المستقبلية، وتوجد شروط في شركات التأمين تتعلق باستثمار الاحتياطي الرياضي مما يجعل هذه الاستثمارات وسيلة لضمان الملائمة (القدرة على الوفاء بالالتزامات).

تعريف الاحتياطات الرياضية:

الاحتياطات الرياضية provisions mathématiques تمثل الدين المحتمل للمؤمن مقابل المؤمن له حيث يكون في تاريخ الاكتتاب توازن بين التزامات المؤمن والمؤمن له وبعد الاكتتاب يصبح للمؤمن دين محتمل مقابل المؤمن له أكبر من الأقساط. يسجل إذا في الخصوم بالميزانية مبلغ إجمالي يمثل هذا الدين الصافي وهذا ما يسمى الاحتياطي الرياضي.

$$PM(k) = VAP^{assureur}(k) - VAP^{assuré}(k)$$

الخاتمة

أحد الفروع الاقتصادية التي تتقاطع مباشرة مع الرياضيات هو العلم الاكتواري فالالاكتوارية هي علم قائم على تطبيق الرياضيات والإحصاء على العلوم المالية أو ما يطلق عليه مصطلح الصناعة المالية بهدف التنبؤ بالمخاطر المالية المستقبلية الناتجة عن عمليات الاستثمار والتأمين والضمان الاجتماعي، هو ما ساهم في تحسين القرارات المالية الكبرى داخل الشركات وتحسين مستوى الخدمة المقدمة للأفراد والمجتمع ككل.

وتزداد أهمية الدراسة الاكتوارية في المدى الطويل كما هو الحال في تأمينات الحياة، حيث يسمح تطبيقها على العمليات التأمينية بحساب القيم الحالية والاحتياطات الرياضية ومختلف التسعيرات بالاعتماد على جداول الحياة ومعدلات الفائدة .

وفي الوقت الحاضر تقوم العديد من الجامعات ببرامج دراسية جامعية وعليا في العلم الاكتواري، خصوصاً وأن بعض الدراسات تشير إلى أهمية وظائف الاكتواريين وتزايد الطلب عليهم في المستقبل، حيث يوجد طلب على هذا التخصص سواء في شركات التأمين والبنوك والمؤسسات المالية ومؤسسات التأمين الاجتماعي والمعاشات وصناديق التقاعد وشركات الاستثمار .