



N° :
Département de Physique

Faculté des Sciences, Université M'hamed Bougara de Boumerdès

Mémoire

Pour obtenir le diplôme de :

Master en Physique

Spécialité : Physique des Rayonnements

Présenté par :

Haddadi Ratiba

Intitulé :

**APPLICATION DU FORMALISME DE LA RELATIVITE D'ECHELLE
AU PROBLEME D'UNE PARTICULE QUANTIQUE DANS UN
POTENTIEL D'OSCILLATEUR HARMONIQUE**

Soutenu le 15 /11 / 2020

le jury composé de :

Mlle Tinakiche Nouara

MCA (UMBB)

Présidente

Mme Benhabiles Hinda

MCB (UMBB)

Examinatrice

Mr Benyakhlef Mostafa

MAA (UMBB)

Encadreur

Département de Physique, Faculté des Sciences, Université de Boumerdès

1, Avenue de l'indépendance 35000 Boumerdès

Tel : +213 (0) 24 81 62 49 / Fax : +213 (0) 24 81 62

REMERCIEMENT

*Je remercie et je loue, d'abord dieu de m'avoir aidée à atteindre ce but, et de défier tous les obstacles
afin de compléter ce modeste mémoire*

Je remercie mes chers parents pour leurs soutiens et leurs patiences

Avec un immense plaisir que j'exprime mes remerciements les plus chaleureux mon encadreur

Mr BENYAKHLEF MOSTAFA, qui a toujours suivi ce travail avec intérêt et qui le témoigne par

Des encouragements de toutes sortes.

*Mes gratitudes et respects aux membres de jury : **Mlle TINA KICHE, Mme BENHABILES***

d'avoir bien voulu me faire l'honneur de juger et évaluer mon travail.

En fin pour tous ceux qui, de près ou de loin ont rendu ce travail possible.

Dédicace

Je dédie ce simple travail en témoignage de ma reconnaissance à :

Ma très chère mère et tout ce qu'elle présente pour moi un signe de reconnaissance à celle qui ma mise au monde et qui ma prodiguées toute l'affection et l'amour, qui n'a jamais cesser de me soutenir et me tenir la main dans les moments les plus dures, et qui n'a pas cessé de m'encourager dans mes études, et j'espère avoir été à son désir.

Mon très cher père, le repère et le symbole de tous mes progrès avec autant d'admiration pour ses sacrifices, son encouragement et son aide afin de poursuivre mes études.

A mes chers frères et sœurs.

A mes ami(e)s et camarades de la promotion 2020 du département de physique.

ملخص :

إن الهدف من هذه المذكرة هو تطبيق نظرية نسبية المقياس على جسيم كمي في كمون هزاز توافقى دون اللجوء إلى معادلة شرودنغر. يتم ذلك باستخدام رابط رياضي جديد بين مقارنة نسبية المقياس في ميكانيكا الكم ومعادلة ريكاتي. تمت كتابة المحاكاة العددية لسلوك الجسيم الكومومي بلغة برمجة البايثون باستخدام حلول المعادلات الكسورية للحركة التي تم حلها بواسطة طريقة هيرمان

الكلمات المفتاحية :

كسوريات ، هزاز توافقى ، بايثون، مقياس النسبية ، محاكاة عددية ، كسوري زمان مكان ، عدم تفاضل .

Abstract:

Our aim in this dissertation is to apply the theory of scale relativity to a quantum particle in an harmonic oscillator potential without resorting to the Schrödinger equation. This is done by using a new mathematical link between the approach of scale relativity in quantum mechanics and the Riccati equation. The numerical simulation of the behavior of the quantum particle is written in the python programming language using the solutions of the fractal equations of motion solved by the Hermann procedure.

Keywords: Harmonic oscillator, scale relativity, numerical simulations, fractal space-time, non-differentiability, fractality, python.

Résumé :

Notre but dans ce mémoire est d'appliquer la théorie de la relativité d'échelle à une particule quantique dans un potentiel d'oscillateur harmonique sans avoir recours à l'équation de Schrödinger. Cela se fait en utilisant un nouveau lien mathématique entre l'approche de la relativité d'échelle en mécanique quantique et l'équation de Riccati. La simulation numérique du comportement de la particule quantique s'écrit en langage de programmation python en utilisant les solutions des équations fractales du mouvement étudié par la procédure d'Hermann.

Mots-clés : Oscillateur harmonique, relativité d'échelle, simulations numériques, espace-temps fractale, non-différentiabilité, fractalité, python.

Table de matières	
INTRODUCTION GENERALE	
CHAPITRE 01 : Relativité et mécanique quantique	
1.1. Introduction	9
1 .2. La relativité en physique	9
1.3. Mécanique quantique	11
1.4. La nécessité d'un principe de relativité plus général	13
1.5. Conclusion	14
CHAPITRE 02 : L'espace-temps fractal, la relativité d'échelle et la mécanique quantique	
2.1. Introduction	16
2.2. Espace-temps fractal	16
2.3. Structure générale de la théorie de la relativité des échelles	28
2.4. Relativité à l'échelle quantique	30
2.5. L'approche fractale menant à la mécanique quantique	31
2.6. L'équation de Schrödinger dans une nouvelle perspective	38
CHAPITRE 03 : Application de la théorie de la relativité d'échelle au problème d'une particule quantique dans un potentiel d'Oscillateur Harmonique	
3.1-Introduction	41
3.2. Potentiel d'un simple Oscillateur Harmonique	41
3.3. Solution de l'équation du mouvement	42
3.4. Simulation numérique	44
3.5. Résultats obtenus	45
3.6. Conclusion	48
CONCLUSION GENERALE	
Références	51

INTRODUCTION GENERALE

La physique moderne a été construite sur deux piliers principaux, à savoir la théorie de la relativité d'Einstein, avec ses deux parties, restreinte et générale[1], et la physique quantique établie par Schrödinger, Heisenberg, Dirac et autres [2]. Ces deux branches de la physique moderne n'ont pas pu être unifiées à cause de leurs natures différentes, car la première repose sur le principe de la relativité du mouvement dans sa partie restreinte et sur le principe géométrique dans sa partie générale[1], alors que la seconde est fondée sur des postulats basés sur des règles purement mathématiques. Jusqu'à nos jours, il est difficile de comprendre le lien qui existe entre ses outils mathématiques employés et l'interprétation physique du monde microscopique [3]. En outre, l'apparition de la constante de Planck dans l'équation de Schrödinger est considérée comme l'un des mystères de la mécanique quantique [3]. Un autre mystère est celui de la nature des ondes de la solution de l'équation de Schrödinger et des autres équations relativistes. Cette nature d'onde est axiomatiquement liée au comportement probabiliste non classique des systèmes quantiques en analogie avec l'onde électromagnétique classique et sa connexion avec la nature probabiliste des photons dans les champs lumineux avec quelques différences [4]. L'introduction du principe de la relativité restreinte d'Einstein dans la mécanique quantique a donné lieu à des équations d'ondes pour des particules relativistes telles que l'équation de Klein-Gordon et l'équation de Dirac [5].

Des tentatives plus sérieuses de concilier le principe de la relativité avec la mécanique quantique ont rencontré de graves difficultés [6] même si des progrès réels ont été réalisés dans ce sens [3]. La raison de ces difficultés remonte généralement à la nature différente des deux domaines énoncés ci-dessus à savoir ; la nature géométrique de la théorie de la relativité et la nature axiomatique (non géométrique) de la mécanique quantique [7].

La géométrisation de la mécanique quantique pour faciliter son jumelage avec la théorie de la relativité dans une seule théorie plus générale a également été faite sur la base de plusieurs directions [3]. La première tentative est issue de Feynman [8] qui a étudié la structure géométrique des chemins quantiques et a montré que la trajectoire d'une particule

quantique est continue et non-différenciable [9]. À cette époque, le lien entre la non-différentiabilité et le concept de la géométrie fractale Mandelbrot [10] n'était pas bien établi. Après cela Nelson [11] a pu dériver l'équation de Schrödinger à partir de l'équation fondamentale de la mécanique de Newton sans passer par les postulats de la mécanique quantique, et la méthode utilisée était la mécanique stochastique où il considérait que la particule quantique suivait des chemins dont le comportement est brownien. Plus tard, Abbott et Wise [12] ont reconsidéré le problème de la structure géométrique des chemins quantiques en termes de concept de fractales et ils ont démontré que la trajectoire d'une particule quantique varie en fonction de la résolution. Par conséquent, ils ont montré que la dimension fractale D de cette trajectoire est 2 [13]. Allant plus loin dans cette direction, Ord [14] considérait l'espace-temps fractal comme un analogue géométrique de la mécanique quantique relativiste. Il a proposé deux équations pour la description de ce qu'il a appelé des fractalons basés sur un mouvement aléatoire dans les trajectoires de l'espace-temps et par la suite il a lié ces équations aux équations des particules libres de Klein-Gordon et Dirac [14].

S'appuyant sur ce concept géométrique, et prenant en considération le concept fractal de l'espace-temps plus au sérieux, Nottale [15] a introduit sa théorie de la relativité d'échelle pour reformuler la mécanique quantique à partir des principes premiers (principes de la relativité du mouvement en mécanique classique de Galilée et d'Einstein). La théorie de la relativité d'échelle fait étendre le principe de relativité du mouvement d'Einstein à l'échelle des transformations des résolutions (comme il y a des transformations de Galilée pour les vitesses dans la relativité de Galilée et des transformations de Lorentz pour les vitesses dans la relativité d'Einstein, il y a aussi des transformations de résolution dans la relativité d'échelle de Nottale). En d'autres termes, cette nouvelle théorie est basée sur l'abandon de l'axiome de la différentiabilité du continuum de l'espace-temps (la non-différentiabilité de l'espace-temps) [15]. Le nouveau cadre tel que formulé par Nottale généralise la théorie standard de la relativité et l'inclut comme un cas spécial [15]. Trois conséquences découlent de cet abandon de différentiabilité de l'espace - temps [15], à savoir :

- i) La géométrie de l'espace-temps doit être fractale, c'est-à-dire explicitement dépendante de la résolution. Cela conduit à un comportement non classique en conséquence.
- ii) Les géodésiques de cet espace-temps non différentiable sont elles-mêmes fractales et de nombre infini.
- iii) La réversibilité du temps est rompue au niveau infinitésimal. C'est encore une fois un comportement qui n'a pas d'analogue dans les systèmes classiques.

Selon Nottale [15], l'approche de la relativité d'échelle devrait s'appliquer non seulement à petites échelles (domaine quantique), mais aussi à de très grandes échelles de l'espace-temps (domaine cosmologique) mais avec une interprétation différente.

La plupart des travaux effectués sur la théorie de la relativité d'échelle par Nottale [15] et d'autres [16] dans le domaine quantique ont porté sur le côté formel du développement de cette théorie et son application pour mettre la mécanique quantique sur une base physique plus claire, c'est-à-dire en retrouvant le maximum de la théorie de la relativité d'échelle et de l'espace-temps fractal. La mécanique quantique masque la nature fractale de l'espace-temps. Pour cette raison, il semble nécessaire d'appliquer directement la théorie de la relativité d'échelle aux problèmes quantiques afin de révéler cette nature de manière claire. À cet égard, Hermann [17] a été le premier à appliquer directement les équations fractales de mouvement obtenues à partir de la théorie de la relativité d'échelle en termes d'un très grand nombre de trajectoires simulées numériquement pour le cas du problème quantique d'une particule libre dans une boîte unidimensionnelle infinie [2]. Il a construit une densité de probabilité à partir de ces trajectoires et a récupéré de cette façon la solution de l'équation de Schrödinger sans l'utiliser explicitement. Les résultats du travail obtenus à l'origine par Hermann [17] sont considérés comme pionniers, car ils montrent l'importance de l'application directe de la théorie de la relativité d'échelle aux systèmes quantiques pour révéler comment le comportement quantique probabiliste découle de la fractalité de l'espace-temps c'est-à-dire que le nombre infini de trajectoires qui nous donne l'aspect

probabiliste, découle cette fois ci d'un principe (extension du principe de la relativité du mouvement à la relativité d'échelle) et n'en pas d'un axiome.

Objectif du travail actuel:

Nous nous sommes motivés par Les travaux d'Hermann [17] qui a fait le premier pas en ce qui concerne la simulation numérique de l'équation du mouvement dans le cadre de la relativité d'échelle appliquée sur des particule quantiques dans un puits quantique unidimensionnel ainsi que les travaux d'Al-Rashid [18] qui a étudié le problème d'une particule quantique dans d'autres potentiels unidimensionnels. Ces deux chercheurs ont obtenu de bons résultats en conformité avec les résultats de mécanique quantique conventionnelle ce qui prouve la validité directe de la théorie de la relativité d'échelle dans les cas étudiés.

Pour cela, dans le présent mémoire, on va étudier le comportement quantique d'une particule dans un potentiel unidimensionnel d'oscillateur harmonique simple au moyen d'une simulation numérique de l'équation du mouvement de Nottale en utilisant le langage python sans passer par l'équation de Schrödinger ou tout axiome quantique conventionnel, à l'instar de Hermann[17]et d'Al-Rashid[18].Les résultats obtenus dans ce travail sont comparés aux résultats obtenus de la mécanique quantique conventionnelle [2].

À cette fin, ce mémoire est organisé comme suit :

Le **chapitre un** présente un contexte théorique de la théorie de la relativité et de la mécanique quantique, et traite de la nécessité d'étendre le principe de relativité du mouvement à la relativité d'échelle. Le **chapitre deux** introduit le concept de la géométrie fractale ainsi que le concept de l'espace-temps fractal qui donne un fond théorique pour la mécanique quantique non relativiste dans la nouvelle approche de la relativité d'échelle. Dans le **chapitre trois** on applique l'approche d'Hermann à une particule dans un simple potentiel d'oscillateur harmonique. Ce chapitre comporte une discussion, des conclusions et des suggestions pour d'éventuelles extensions du présent travail.

Chapitre 1 :
Relativité et Mécanique Quantique

1-1. INTRODUCTION :

Les lois de la physique peuvent être classées en deux théories principales, à savoir ; la théorie de la relativité et la mécanique quantique. La théorie de la relativité comprend les théories spéciales et générales de la relativité ainsi que la mécanique classique. Quant à la mécanique quantique, elle inclut la mécanique quantique non-relativiste, la mécanique quantique relativiste et la théorie quantique des champs. Avant de discuter le problème concernant l'application du formalisme de la relativité d'échelle au problème d'une particule quantique dans un potentiel d'oscillateur harmonique, on va faire un rappel sur l'histoire de la relativité et de la mécanique quantique, ce qui nous va permettre de conclure que pour réconcilier entre les deux théories d'établir une nouvelle théorie, le dégagement d'un principe de relativité plus général se révèle nécessaire.

1-2.LA RELATIVITE EN PHYSIQUE :

La relativité galiléenne dit que : « **Le mouvement n'est comme rien** » [1]. Bien qu'à première vue cela puisse sembler trivial, l'expression explicite de cela impose des contraintes universelles principales sur les formes possibles que prennent les lois physiques. En 1905, Einstein a introduit le principe de la relativité restreinte qui stipule que : « **Les lois de la physique doivent être de nature telle qu'elles s'appliquent aux systèmes de référence dans n'importe quel type de mouvement** » [1]. Sous cette forme, cette déclaration implique strictement la relativité du mouvement. La relativité restreinte conduit à la contrainte qu'aucune vitesse ne peut dépasser une certaine vitesse universelle (c) qui est la vitesse de la lumière égale à $\approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ dans le vide.

Poincaré en 1906 et Minkowski en 1909 [1] ont introduit l'espace abstrait à quatre dimensions qu'on appelle le continuum espace-temps ou simplement l'espace à quatre dimensions ou $(3 + 1)$. Ainsi, dans cet espace-temps, une transformation homogène de Lorentz [1]

$$x_i = \sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} x_j, i = 1, 2, 3, 4 \quad (1.1)$$

peut être interprétée comme une rotation du système de coordonnées dans l'espace-temps à quatre dimensions. L'espace-temps minkowskien est caractérisé par l'invariant [1]:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (1.2)$$

Sous toute transformation d'un système de coordonnées inertielle à un autre système inertielle. L'équation (1.1) peut être réécrite comme suit :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\sigma^2 \quad (1.3)$$

Où $d\sigma$ est la distance spatiale entre deux points de l'espace physique dans lequel deux événements se produisent, tandis que dt est la différence dans le temps d'occurrence des deux événements.

La relativité générale est une théorie basée sur des principes physiques fondamentaux, à savoir ; les principes de la covariance générale et de l'équivalence. Le principe de la covariance générale stipule que : « **Les lois générales de la nature doivent être exprimées par des équations qui sont valables pour tous les systèmes de coordonnées, c'est-à-dire qui sont covariantes par rapport à toute substitution quelconque** ». Alors que, le principe d'équivalence stipule que : « **À un moment donné, toutes les lois de la nature ont la même forme comme dans la relativité restreinte, lorsque le principe d'équivalence est exprimé en termes de coordonnées lorentziennes locale** » [1]. À partir de ces principes, Einstein a construit la théorie de la relativité générale, dont les équations sont des contraintes sur les courbes possibles de l'espace-temps. Les équations d'Einstein peuvent être écrites sous la forme [1]:

$$\mathfrak{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathfrak{R}g_{\mu\nu} - \lambda_g g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.4)$$

Où les $g_{\mu\nu}$ sont des potentiels métriques tensoriels qui généralisent le potentiel gravitationnel scalaire newtonien, $\mathfrak{R}_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci, \mathfrak{R} est la courbure scalaire, λ_g est la constante cosmologique, $T_{\mu\nu}$ est le tenseur de l'énergie-impulsion, G est la constante gravitationnelle universelle ($\approx 6.674210^{-11} N m^2 kg^{-2}$) et les indices μ, ν prennent les valeurs **0,1,2, 3...**

L'équation (1.4) est invariante dans toute transformation continue et différentiable des systèmes de coordonnées. L'invariant relativiste général est [1] :

$$ds^2 = g_{\nu\mu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.5)$$

Où la convention de somme d'Einstein sur les indices supérieurs et inférieurs répétés est implicite. La dérivé covariante D_{μ} peut être utilisé pour exprimer comment la courbure de l'espace-temps implique

que la variation des entités physiques (telles que les vecteurs et les tenseurs) en fonction de la variation de coordonnées infinitésimales dépend également de l'espace-temps lui-même, comme [1] :

$$D_{\mu}A^{\nu}=\partial_{\mu}A^{\nu} + \Gamma_{\rho\mu}^{\nu}A^{\rho} \quad (1.6)$$

qui généralise les dérivés partiels (∂_{μ}) où A^{ν} est un quadrivecteur. Dans cette expression, l'effet de la courbure de l'espace-temps (c.-à-d. la gravitation) est décrit par la forme des symboles de Christoffel [1]:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}=\frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\partial_{\nu}g_{\lambda\mu}+\partial_{\mu}g_{\lambda\nu}-\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}) \quad (1.7)$$

qui joue le rôle du champ gravitationnel.

1-3. LA MECANIQUE QUANTIQUE :

La physique classique traite des phénomènes macroscopiques. La plupart des effets qui concernent la théorie classique sont soit directement observables, soit ils peuvent être observables avec des instruments relativement simples. Lorsque les physiciens se tournent vers l'étude des systèmes atomiques, ils trouvent que les concepts et les méthodes de la physique macroscopique classique sont inapplicables directement aux phénomènes atomiques. Entre 1925 et 1930, une discipline théorique entièrement nouvelle, la mécanique quantique, a été développée par Schrödinger, Heisenberg, Dirac et d'autres [4], elle a pour objet d'étudier des phénomènes à l'échelle atomique et subatomique, comme l'expérience d'interférence de Young [2], les particules semblent se comporter dans certaines situations comme s'il s'agissait d'ondes. Cette expérience d'interférence a suggéré plusieurs nouvelles idées [4]:

- 1- La probabilité entre dans la mécanique quantique d'une manière fondamentale et non classique. Le fait de considérer la lumière comme un flux de photons révèle une onde associée dont l'amplitude joue le rôle d'une amplitude de probabilité. Le carré de l'amplitude (c'est-à-dire l'intensité des ondes) donne une mesure de la probabilité de trouver un photon en un point particulier.
- 2- Dans le cas du photon et, probablement pour d'autres particules aussi, l'amplitude de probabilité se propage comme une onde typique.
- 3- Pour les photons, l'amplitude des ondes contient toutes les informations disponibles sur la distribution des probabilités de photons, donc, la fonction d'onde d'une particule est parfois appelée fonction d'état de la particule pour cette raison.

Le paradoxe d'une particule qui se comporte parfois comme une onde ou d'une onde qui se comporte parfois comme une particule peut donc être résolu en notant que l'onde intervient dans la description probabiliste des particules à travers l'amplitude de probabilité [4].

Dans la mécanique quantique non relativiste, il y a six axiomes (postulats) qui sont donnés brièvement comme suit :

1. La connaissance de l'état du système quantique à l'instant t est complètement contenue dans un vecteur normalisable $|\psi(t)\rangle$ (ket ou fonction d'onde) de l'Espace des états (espace vectoriel de Hilbert).
2. On associe un opérateur hermitien linéaire à chaque quantité physique observable (position, énergie, impulsion ...).
3. La mesure d'une grandeur physique ne peut fournir que l'une des valeurs propres de l'opérateur associé.
4. La mesure d'une grandeur physique (observable) donne un résultat avec une probabilité égale au carré de la projection du ket sur le sous espace propre $|\phi(t)\rangle$ associé à cette valeur propre.
5. Si la mesure de la grandeur physique A à l'instant t sur un système représenté par le vecteur $|\psi(t)\rangle$ donne comme résultat la valeur propre α_n , alors l'état du système immédiatement après la mesure est projeté sur le sous-espace propre associé à α_n .

$$\psi = \hat{S}_n \psi / \sqrt{p(\alpha_n)} \quad (1.8)$$

$P(\alpha_n)$ est la probabilité de trouver comme valeur α_n , et \hat{S}_n est l'opérateur projecteur défini par :

$$\hat{S}_n = \sum_{k=1}^{g_n} |u_{n,k}\rangle \langle u_{n,k}| \quad (1.9)$$

où les $|u_{n,k}\rangle$ sont les vecteurs du sous-espace propre et g_n est le degré de dégénérescence de la valeur α_n

6. L'état $|\phi(t)\rangle$ de tout système quantique non-relativiste est une solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\phi, t\rangle = \hat{H} |\phi, t\rangle \quad (1.10)$$

Des six axiomes ci-dessus, il est clair qu'il y a des mystères dans la mécanique quantique tels que [15]:

- 1- Le caractère mystérieux des règles quantiques, comme celle d'une impulsion réelle \vec{P} , qui correspond à un opérateur complexe $-i\hbar \vec{\nabla}$ qui agit sur une amplitude de probabilité complexe.
- 2- L'existence d'un plan complexe en mécanique quantique, mais il n'est pas clair où se trouve ce plan complexe.
- 3- La mécanique quantique est une théorie axiomatique plutôt qu'une théorie de principe. L'origine physique des axiomes de la mécanique quantique n'est pas clairement comprise.

1.4-LA NECESSITE D'UN PRINCIPE PLUS GENERAL DE RELATIVITE :

Selon la relativité et la mécanique quantique, n'importe quel objet peut être décrit par des systèmes de coordonnées qui sont (x, y, z, t) [1, 2, 4]. La résolution de l'espace-temps est l'unité minimale qui peut être utilisée lors de la caractérisation de l'intervalle de longueur ou de temps par un nombre final. La description parfaite de tout système physique doit inclure les erreurs de mesure ou les incertitudes. Par conséquent, l'information complète sur la position et le temps du système ne doit pas se restreindre à la donnée (x, y, z, t) elle doit comporter les résolutions $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t)$ [15]. L'analyse du problème est importante dans l'interprétation quantique puisque les résultats de la mesure deviennent dépendants de la résolution, en conséquence de la relation de Heisenberg [15]. Ici, le comportement quantique est la conséquence d'une dépendance fondamentale et universelle de l'espace-temps lui-même sur la résolution qui est révélée dans toute mesure, à savoir ; que l'espace-temps quantique a les propriétés d'un fractal., (fractal signifie ce qui a été fractionné à l'infini. En latin « fructus » dérivé du verbe "frangere" et veut dire briser) De cette façon, les relations d'Heisenberg indiquent que les résultats des mesures de l'impulsion et de l'énergie dépendent de l'état d'échelle du système de référence [15].

Le super système peut maintenant être défini comme un système qui contient les coordonnées habituelles et les résolutions spatio-temporelles, c'est-à-dire $(x, y, z, t, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t)$ [15].

Appliquer les lois de la nature à toutes ces coordonnées du super système donne une extension du principe de relativité [1]. Cette extension dans les principes de la relativité donne une nouvelle théorie de

la relativité qui est la théorie de la relativité d'échelle telle qu'elle a été introduite pour la première fois par Nottale [15] en 1993.

Cette théorie stipule que « **les lois fondamentales de la nature s'appliquent quel que soit l'état d'échelle du système de coordonnées** ». L'état d'un système de référence est caractérisé par les résolutions avec lesquelles ce système est observé. Il ne peut être défini que d'une manière relative. L'idée principale de la théorie est d'abandonner l'hypothèse arbitraire de la différentiabilité de l'espace-temps [15]. Cette théorie reformule la mécanique quantique à partir des premiers principes de relativité du mouvement.

1-5. CONCLUSION :

Comme la relativité est basée sur des principes et comme la mécanique quantique est basée sur des postulats, les physiciens essaient de trouver une généralisation entre ces deux théories en rejetant les postulats de la mécanique quantique, cette généralisation est une nouvelle théorie qui est la relativité d'échelle qui est fondée sur l'aspect fractale de l'espace-temps.

Chapitre 2 :

L'Espace-Temps Fractal, la Relativité d'Echelle et la Mécanique Quantique.

2-1. INTRODUCTION :

Le terme "fractale" a été inventé en 1975 par B. Mandelbrot[10] pour nommer les objets, les courbes, les fonctions ou les ensembles "**dont la forme est extrêmement irrégulière et / ou fragmentés à toutes les échelles**". Ces objets ont été étudiés par des mathématiciens depuis plus d'un siècle. Ils peuvent être caractérisés par des dimensions non entières et par leur non-différentiabilité[19].

Jusqu'à présent, cette non-différentiabilité due aux fractales, est une propriété qui peut avoir un intérêt majeur en tant qu'un nouvel outil mathématique pour la physique, mais ils emble que cet outil a empêché les physiciens de traiter facilement le problème de la nature fractale dans les espaces euclidiens ou riemanniens.

Dans ce chapitre, on va parler de l'aspect fractal de l'espace-temps et la théorie de la relativité d'échelle[15].

2-2. ESPACE-TEMPS FRACTAL :

- **Zoom sur un fractal :**

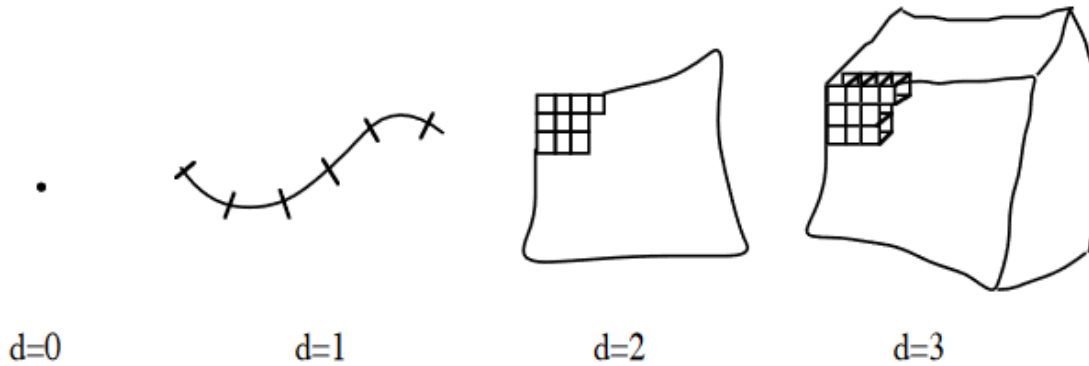
Les fractales sont des objets mathématiques qui ont été introduits par Benoît Mandelbrot [10] en 1975. Dans un espace fractal, les géodésiques, en nombre infini, sont des courbes non différentiables : on ne peut leur attribuer une tangente. A chaque modification d'échelle, la courbe fractale change complètement d'aspect. Selon les lois de transformation d'échelle de Laurent Nottale, la limite absolue du changement d'échelle est la dimension de Planck : 10^{-33} cm[15].

2-2-1. La dimension fractale :

Notion de dimension :

Il existe une méthode usuelle pour mesurer des longueurs, surfaces ou volumes. Cette méthode consiste à recouvrir des ensembles de pavés. Ces derniers sont pris comme unité de mesure [19], c'est

exactement comme que lorsqu'on calcule des intégrales multiples.



Si ϵ est le côté (étalon de longueur) du pavé, la mesure est $M = N_{\mu} \epsilon^d$ avec μ est l'unité de mesure, N est la longueur et d est la dimension.

Des mathématiciens (Cantor, Carathéodory, Réano ...) ont montré qu'il existe des objets pathologiques pour lesquels la méthode précédente ne s'applique pas, et pour cela cette méthode doit être remplacée par une autre.

2-2-2. La longueur de la côte de Bretagne :

Supposons en effet que l'on veuille appliquer la méthode précédente à la mesure de la longueur, entre deux points fixés, d'une côte très découpée comme la côte de Bretagne. On constate rapidement que l'on est confronté à une difficulté : la longueur mesurée L dépend de l'unité de mesure choisie ϵ , et croît indéfiniment quand ϵ décroît [19].

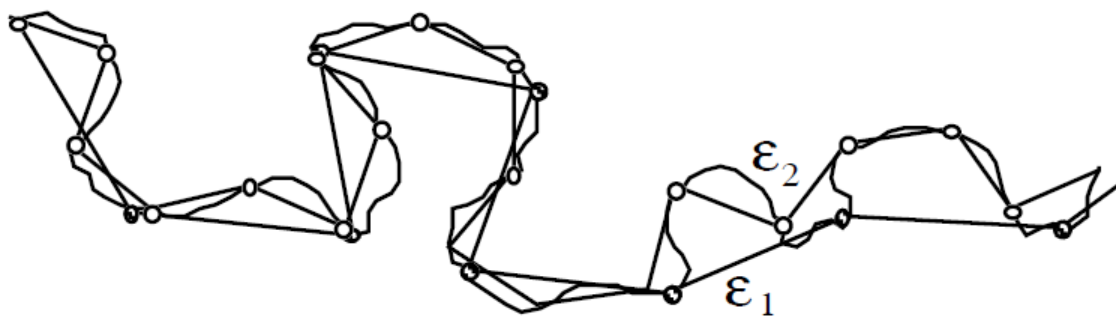


Fig. 1 : Mesure de la longueur d'une côte par rapport à des unités différentes

En 1961 **L. F. Richardson** après avoir étudié les variations de longueurs $L(\epsilon)$ de côtes a écrit la formule générale de la loi dans un large domaine de valeurs de ϵ

$$L(\epsilon) = N(\epsilon) \epsilon \propto \epsilon^{-\rho}$$

Lorsque ρ est positif, les courbes sont non dérivables.

L'exposant $(1 + \rho)$ de $1/N(\epsilon)$ définit ce qu'on appelle **dimension fractale**.

Pour calculer la dimension d'une structure, il est nécessaire que cette structure possède une notion de distance entre deux points quelconques de celle-ci, mais cela ne pose guère de problèmes pour les structures fournies par la nature.

Avant d'illustrer avec quelques structures fractales, on donne quelques définitions et méthodes de calcul de la dimension, notons qu'il y a toujours passage à la limite $\epsilon \rightarrow 0$

2-2-3. La dimension topologique :

Pour des objets géométriques, la dimension topologique dT est :

Un ensemble de points : $dT = 0$

Éléments de courbe : $dT = 1$

Éléments de surface : $dT = 2$

Élément de volume : $dT = 3$

Chaque structure fractale a une dimension fractale supérieure à sa dimension topologique [19].

2-2-4. La dimension de Hausdorff-Besicovitch :

Lorsqu'on ne peut pas recouvrir les objets par des pavés identiques de côté ϵ et on peut les recouvrir avec des boules V_i , de diamètre ($diam V_i$) inférieur ou égal à ϵ , on a :

$$\mu = (diam V_i)^\alpha$$

On considère donc ce que l'on appelle la α -mesure de recouvrement, (Hausdorff 1919, Besicovitch 1935) définie comme suit :

$$m^\alpha = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum (diam V_i) : \cup V_i \supset E, diam V_i \leq \epsilon \right\}$$

E est la dimension fractale

On définit la dimension de Hausdorff (ou Hausdorff - Besicovitch) par :

$$dim E = \inf \{ \alpha : m^\alpha(E) = 0 \} = \sup \{ \alpha : m^\alpha(E) = \infty \}$$

La dimension de **Hausdorff** est la valeur de α pour laquelle la mesure fait un saut de zéro à l'infini, pour cette valeur, la mesure est quelconque entre zéro et l'infini.

L'exemple le plus simple est celui du carré de dimension $d=2$:

-Si la dimension $d=1$, la longueur du carré est infinie.

- Si la dimension $d=3$, le volume du carré est nul.

Pour une courbe fractale, la dimension de **Hausdorff** devient indépendante de la résolution ϵ , donc :

$$L_{Hausdorff} = \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^{D-1} \text{ où } L \text{ est la longueur et } D \text{ la dimension fractale.}$$

2-2-5. La dimension de Bouligand-Minkowski :

On peut également définir une dimension dite de Bouligand-Minkowski, (Bouligand, 1929, Minkowski, 1901), que l'on note $\Delta(E)$. Voici quelques méthodes permettant de calculer $\Delta(E)$:

- **La saucisse de Minkowski**

Soit E un ensemble inclus dans un espace euclidien de dimension d (précisément, E est une partie bornée de \mathbb{R}^d), soit maintenant $E(\epsilon)$ l'ensemble des points de \mathbb{R}^d distants de moins de ϵ de E . $E(\epsilon)$ définit une saucisse de Minkowski, on l'appelle aussi épaissement ou dilatation de E comme en analyse d'image. On peut la définir comme la réunion,

$$E(\epsilon) = \cup_{x \in E} B_\epsilon(x)$$

$B_\epsilon(x)$ est une boule de l'espace euclidien à d dimensions, centrée en x et de rayon ϵ . On calcule,

$$\Delta(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ d - \frac{\log \text{Vol}_d(E(\epsilon))}{\log \epsilon} \right\}$$

Où Vol_d représente simplement le volume de dimension d (par exemple, longueur, surface ou volume. Si la limite existe, $\Delta(E)$ est par définition la dimension de Bouligand-Minkowski [19].



Fig .2 :Saucisse de Minkowski ou épaissement d'une courbe E .

2-2-6:La méthode des boites

C'est une méthode très intéressante pour de nombreuses structures fractales. Soit $N(\epsilon)$ le nombre de pavés de côté ϵ recouvrant E [19]:

$$\Delta(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{N(\epsilon)}{\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{-\log(\epsilon)}$$

On a utiliser la méthode de Minkowski $\Delta(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N(\varepsilon)}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}$ où le signe (-) vient de l'inverse du

log

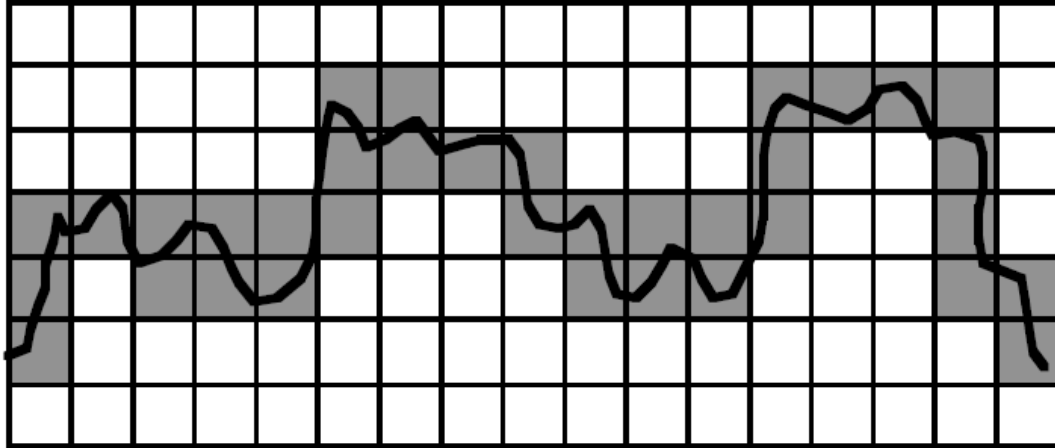


Fig.3 : Mesures de la dimension d'une courbe par la méthode des boîtes.

2-2-7. La méthode des boules disjointes :

Soit $N(\varepsilon)$ le nombre maximum de boules disjointes de rayon ε centrées sur l'ensemble E [19]: alors,

$$\Delta(E) = \log N(\varepsilon) / |\log \varepsilon|$$

Cette méthode est peu utilisée en pratique.

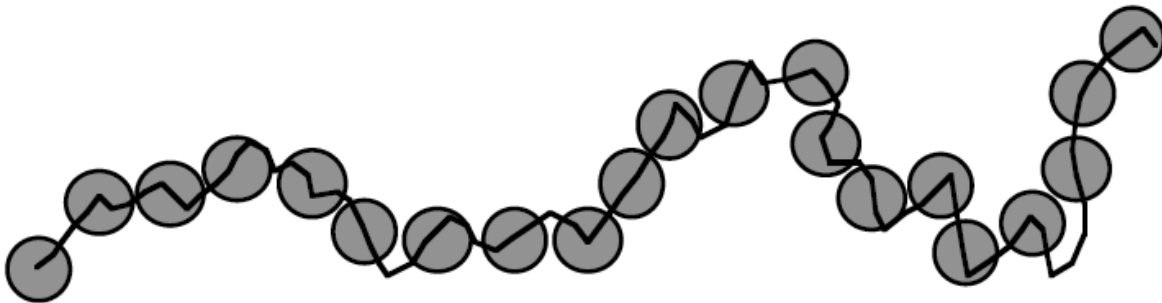


Fig. 4 : Mesures de la dimension d'une courbe par la méthode des boules disjointes.

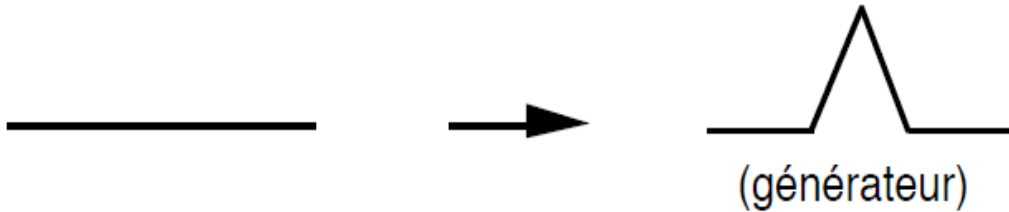
2-2-8-Exemples de fractales :

2-2-8-1-Fractales déterministes :

Avec un processus récurrent composé d'un initiateur (l'état initial) et d'un générateur (l'opération de récurrence), on peut facilement construire des structures fractales [19].

2-2-8-2-La courbe triadique de Von Koch (1904) :

On remplace chaque segment ϵ par un générateur (une ligne brisée) de 4 segments de longueurs $\epsilon/3$ comme ci-dessous.



A l'itération zéro, si l'initiateur est un segment de courbe de **Koch** avec une dimension horizontale L . A la première itération (la courbe se confond alors avec le générateur), les premiers segments auront pour longueur $\epsilon_1 = L / 3$, à la seconde itération ils auront pour longueur $\epsilon_2 = L / 9$ puis $\epsilon_3 = L / 3^3$ à la troisième itération [19].

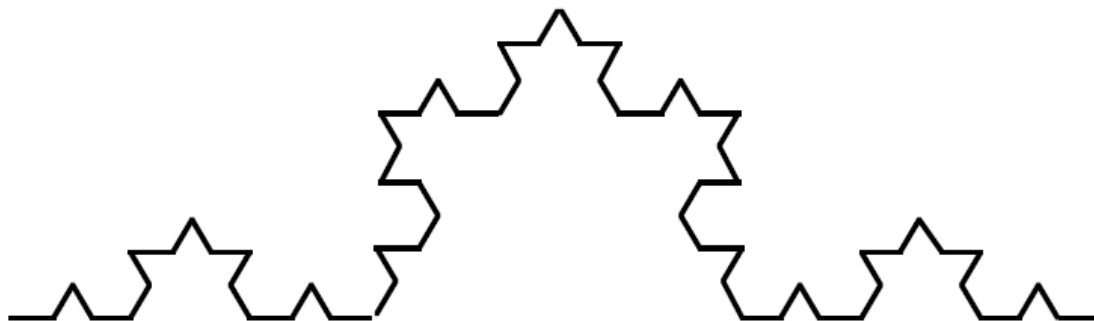


Fig.5 :la forme obtenue à la troisième itération

et ainsi de suite. Les relations donnant la longueur L de la courbe sont donc :

$$\epsilon_1 = L/3 \rightarrow L_1 = 4 \epsilon_1$$

$$\epsilon_2 = L/9 \rightarrow L_2 = 16 \epsilon_2$$

...

$$\epsilon_n = L/3^n \rightarrow L_n = 4^n \epsilon_n$$

En éliminant n entre les deux égalités de la dernière ligne, la longueur l_n en fonction de l'unité de mesure L s'écrit finalement,

$$l_n = L^D (\varepsilon_n)^{1-D} \dots$$

On peut calculer la valeur de la dimension fractale $D = \log 4 / \log 3 = 1,2618$

L'expression précédente est un premier exemple de loi d'échelle car elle peut s'écrire [19]:

$$l_n / \varepsilon_n = f\left(\frac{L}{\varepsilon_n}\right) = \left(\frac{L}{\varepsilon_n}\right)^D$$

2-2-8-3-Détermination directe de la dimension fractale, cas multi-échelles :

La dimension fractale D peut se déterminer de manière directe sur une seule itération si l'on sait que la structure limite est fractale : si une structure fractale de taille L dont la masse(mesure) est: $M(L) = A(L)L^D$ donne par itération K élément de taille L/h ; on a alors une relation implicite en D [19] :

$$M(L) = kM(L/h),$$

$$\text{Soit : } A(L) L^D = kA(L/h) (L/h)^D.$$

D est ainsi déterminé asymptotiquement (L tend vers l'infini) en remarquant que $A(L/h) / A(L) \rightarrow 1, D'où: k(1/h)^D = 1.$

Par exemple la courbe de Koch correspond à $k = 4eth = 3, (A(L)$ est indépendant de L).

On peut rencontrer plus loin des fractales multi-échelles, donnant à chaque itération k_i éléments de taille L/h_i ($i = 1 \dots n$) soit :

$$M(L) = k_1M(L/h_1) + k_2M(L/h_2) + \dots k_nM(L/h_n)$$

Et donc :

$$k_1(1/h_1)^D + k_2(1/h_2)^D \dots k_n(1/h_n)^D = 1$$

Ce qui détermine D [19].

- **Ensemble de Cantor :**

Un objet, également très étudié bien avant l'introduction de la notion de fractale, est l'ensemble de Cantor, obtenu en éliminant itérativement le tiers central de chaque segment :

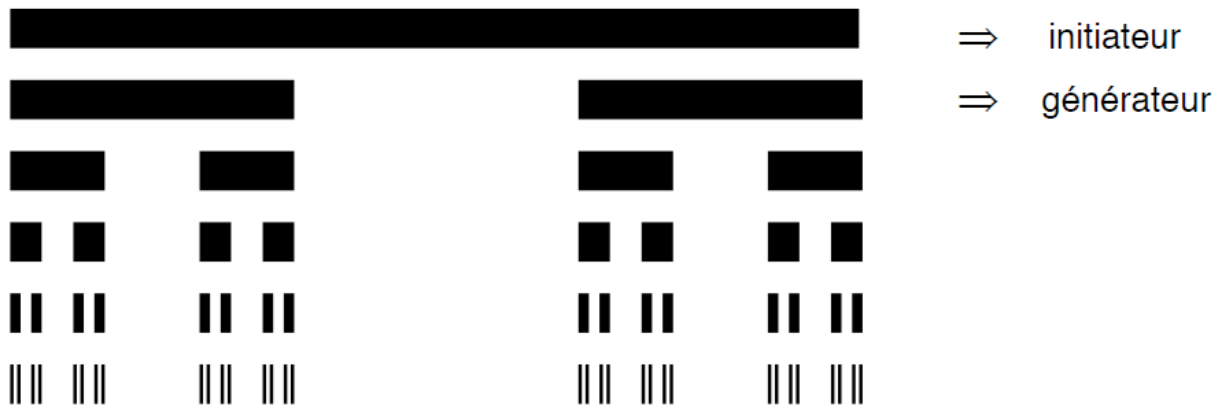


Fig. 6 : Construction des cinq premières itérations d'un ensemble de Cantor.

La dimension fractale de cet ensemble est : $D = \log 2 / \log 3 = 0,6309 \dots$

Dans les ensembles de Cantor, elle est telle que $0 < D < 1$: on dit que l'on a « **une poussière** ». Elle n'est plus constituée que de points, sa dimension topologique est $dT = 0$ [19].

- **Tamis de Sierpinsky :**

Les structures en Tamis et Tapis sont très fréquemment utilisées pour mener à terme des calculs analytiques exacts de diverses propriétés physiques (conductance, vibrations...)[19].

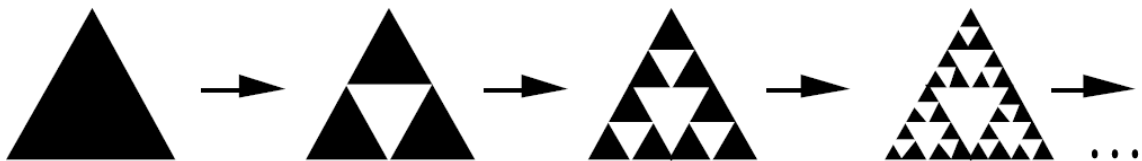


Fig.7 : Itération du tamis de Sierpinsky formé de triangles pleins (Les objets sont constitués seulement des parties laissées en noir).

Le facteur d'échelle de l'itération est **2**, tandis que le rapport de masse est **3**.

La dimension fractale correspondante est ainsi ; $D = \log 3 / \log 2 = 1,585$

On considère également souvent le tamis de Sierpinsky engendré par la division des côtes seuls. On vérifie aisément qu'il a la même dimension

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,585$$

On peut montrer qu'asymptotiquement les deux structures « convergent » l'une vers l'autre, au sens de la distance de Hausdorff[19].

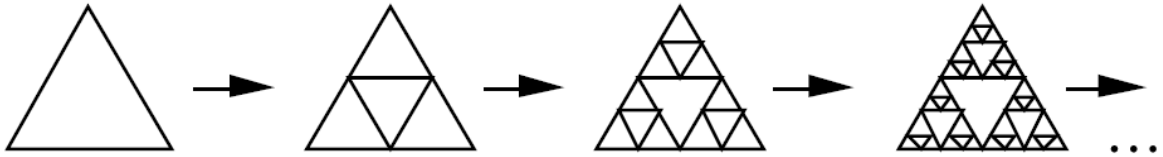


Fig.8 : Itération du tapis de Sierpinsky formé des côtés des triangles.

- **Tapis de Sierpinsky**

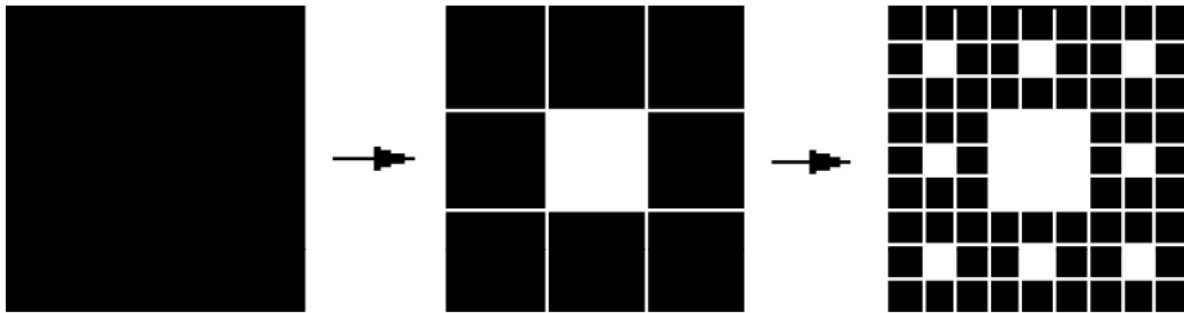


Fig.9 : Itération d'un tapis de Sierpinsky.

Le facteur d'échelle est **3** et le rapport de masse (carrés noirs) est **8**. Soit

$$D = \log 8 / \log 3 = 1,8928\dots$$

2-2-8-4-Fractales non uniformes :

Une autre variation possible dans les structures fractales réside dans la présence simultanée de plusieurs échelles de dilatation.

L'exemple de la figure **10** montre une structure obtenue par itération déterministe contenant les facteurs **1/4** et **1/2**. Sa géométrie est évidemment fractale et sa dimension **D** se détermine sur une seule itération comme précédemment (à partir de l'équation suivante) [19] :

$$4 (L/4)^D + (L/2)^D = L^D.$$

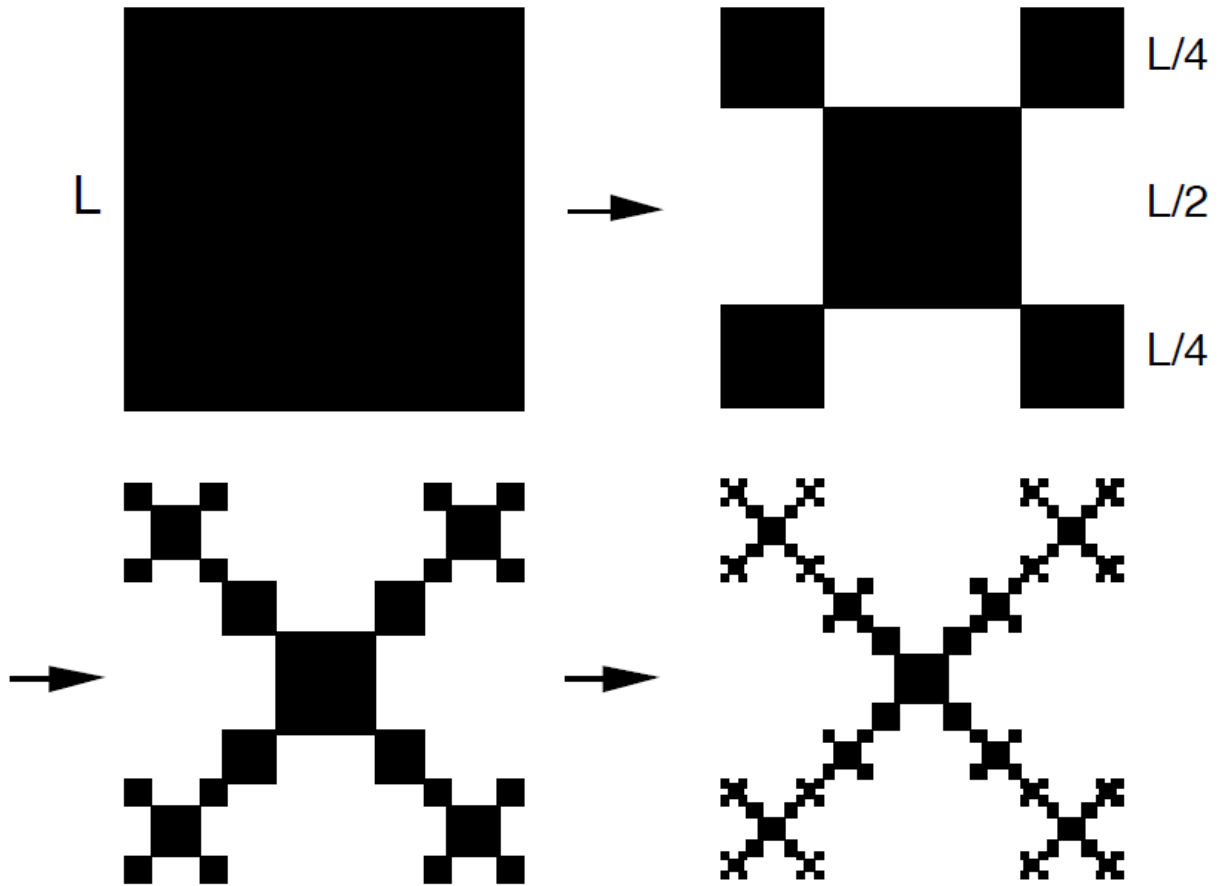


Fig.10 : Construction d'une fractale déterministe non uniforme : ici avec deux échelles de contraction.

2-2-8-5-Fractales statistiques :

Nous avons donné jusqu'à présent des exemples de fractales déterministes (on dit aussi exactes) mais on peut aisément définir des structures statistiques.

Dans ces structures la récurrence définissant la hiérarchie est régie par une ou plusieurs lois probabilistes précisant le choix de l'application de tel ou tel générateur à chaque itération [19].

✓ **Fractales homogènes :**

Une fractale statistique est homogène quand le volume (ou la masse) de structure est répartie uniformément à chaque niveau d'hierarchie, c'est-à-dire que les divers générateurs qui servent à construire la fractale conservent le rapport de masse d'un niveau au suivant.

Ainsi à partir de la récurrence [19] :

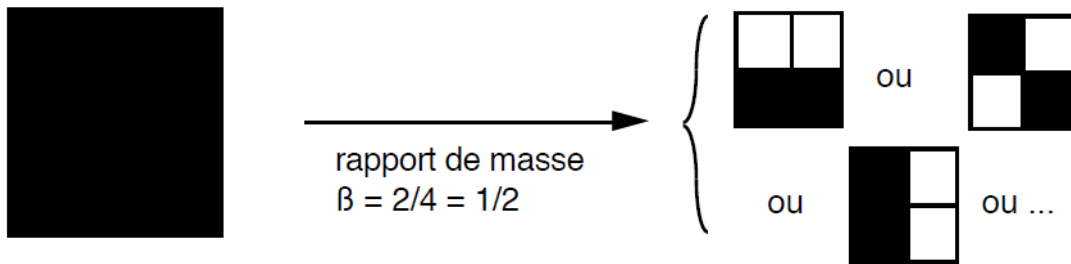


Fig.11 : Générateur d'une fractale statistique

La dimension fractale correspondante est :

$D = d + \log \beta / \log 2 = 1$ où d est la dimension de l'espace support

✓ **Fractales hétérogènes :**

Si le fractale est hétérogène, le rapport de masse β peut lui-même varier alors

$$D = d + \log \langle \beta \rangle / \log 2 = 1$$

Avec d est la dimension de l'espace support, ici égale à 2 [19].

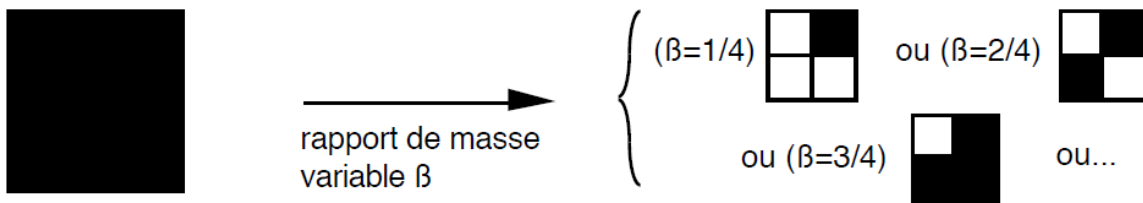


Fig.12 : Générateur d'une fractale statistique hétérogène

✓ **Les fractales dans la nature :**

Les structures fractales se présentent beaucoup dans la nature, par exemple la bordure des feuilles de certaines plantes comme les lichens, les orchidées ou les laitues

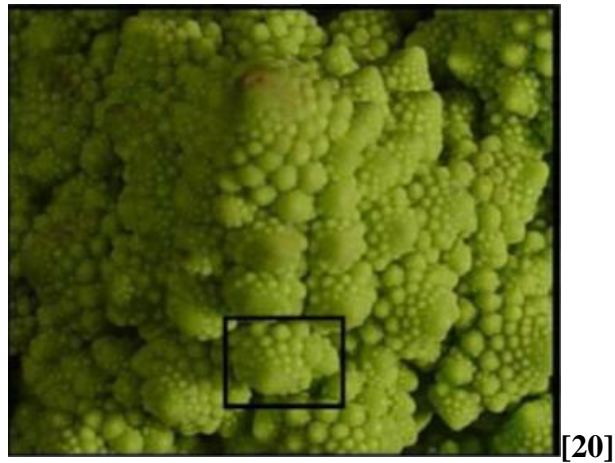


Fig.13 :la fractalité dans la nature

Les fractales aussi constituent le paysage (côtes, montagnes, rivières, vague...)



[20]

Fig. 14 :la fractalité dans les paysages

Aussi elle existe dans le corps humain et on découvre régulièrement de nouvelles preuves montrant que notre organisme est fractal.



[20]

Fig. 15 :la fractalité dans le corps humain

2-2-8-6-Effets induits par la non-différentiabilité :

Trois effets au minimum sont attendus dans la description des géodésiques d'un espace-temps non-différentiable :

- Infinité de géodésiques
- Brisure de symétrie
- Fluctuations fractales

2.3-Structure générale de la théorie de la relativité d'échelle de Nottale

2.3.1-Introduction :

La théorie de la relativité d'échelle [15] est construite en ajoutant aux lois de la physique classique, relativiste et quantique (lois du mouvement dans l'espace, c'est-à-dire du déplacement dans un espace-temps) de nouvelles lois d'échelle, dans lesquelles les résolutions de l'espace-temps sont considérées comme des variables intrinsèques à la description des phénomènes physiques.

Trois domaines principaux sont à considérer afin de mettre en œuvre la relativité d'échelle :

- Lois d'échelle : description des structures fractales internes des trajectoires dans un espace-temps non différentiable à un point d'un événement donné.
- Effets induits des lois d'échelle sur les équations du mouvement : génération de la mécanique quantique comme une nouvelle mécanique dans un espace-temps non différentiable.
- Couplage échelle-mouvement : effets des dilatations induites par les déplacements, que nous interprétons comme des champs de jauge.

2.3.2-Relativité d'échelle galiléenne :

Les lois en puissance rencontrées dans les comportements fractals auto-similaires peuvent être identifiées comme les plus simples des lois recherchées. Considérons en effet la plus simple des équations d'échelle possibles, qui s'écrit comme une équation aux valeurs propres de l'opérateur de dilatation D_d qui agit sur la longueur de la courbe \mathcal{L} considérée comme suit :

$$D_d \mathcal{L} = b \mathcal{L} \quad (2.1)$$

C'est la loi d'échelle [15] et dont la solution est une loi fractale divergente standard :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 (\lambda_0 / \varepsilon)^\tau \quad (2.2)$$

Où \mathcal{L}_0 est la longueur initiale de la courbe fractale et λ_0 est une échelle arbitraire

$\tau = -b = D_F - D_T$, expression dans laquelle D_F est la dimension fractale, supposée constante et D_T la dimension topologique. La variable \mathcal{L} désigne la longueur mesurée sur une courbe fractale, qui décrira en particulier une coordonnée dans un système de référence fractal. Une telle loi correspond en ce qui concerne les échelles à ce qu'est l'inertie du point de vue du mouvement. On peut s'en assurer facilement en lui appliquant une transformation de résolution. Sous une telle transformation $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$, on obtient :

$$\ln \left(\frac{\mathcal{L}'}{\lambda} \right) = \ln \left(\frac{\mathcal{L}}{\lambda} \right) + \tau \ln \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \right), \tau = \tau' \quad (2.3)$$

où l'on reconnaît la structure mathématique du groupe de transformation de Galilée entre systèmes inertiels. La correspondance (mouvement ~ échelle) se traduit par les correspondances ;

$$x \sim \ln\left(\frac{\mathcal{L}}{\lambda}\right) \quad (2.4)$$

$$t \sim \tau \quad (2.5)$$

$$v \sim \ln(\varepsilon / \varepsilon') \quad (2.6)$$

La manifestation de la relativité des résolutions du point de vue mathématique se voit à partir de ces équations [15] : ces résolutions n'interviennent que par leurs rapports et l'échelle de référence λ_0 a disparu dans la relation (3). La dimension d'échelle joue le rôle du temps en ce qui concerne le mouvement, et le logarithme du rapport des résolutions joue le rôle de la vitesse. La loi de composition des dilatations écrite sous forme logarithmique confirme cette identification avec le groupe de Galilée :

$$\ln(\varepsilon''/\varepsilon) = \ln(\varepsilon''/\varepsilon') + \ln(\varepsilon'/\varepsilon) \quad (2.7)$$

Formellement identique à la composition galiléenne des vitesses,

$$W = U + V \quad (2.8)$$

Donc, les lois standards de dilatation, qui ont la structure d'un groupe Galiléen (loi en puissance fractale à dimension fractale constante). Lorsque la dimension fractale des trajectoires est $D = 2$, les lois du mouvement induit sont celles de la mécanique quantique standard.

2-3-Relativité d'échelle restreinte :

Généralisation des lois de dilatation à une forme Lorentzienne. La dimension fractale devient elle-même une variable et joue le rôle d'une cinquième dimension que Nottale avait appelé « **djinn** » [15]. Une infranchissable échelle de l'espace-temps, invariante sous dilatations, apparaît dans la théorie ; remplace le point zéro, qui possède toutes ses propriétés physiques (par exemple un élan énergétique infini serait nécessaire pour l'atteindre) et joue pour les lois d'échelle le même rôle que celui joué par la vitesse de la lumière pour le mouvement), c'est le concept de limite, c'est-à-dire, on le connaît mais on ne peut pas l'atteindre.

2.4-Relativité d'échelle quantique :

Ce qu'on a vu précédemment, suppose une différentiabilité des transformations d'échelle. Si l'espace est continu et non différentiable, on est confronté à des lois d'échelle aux mêmes conditions qui conduisent à la mécanique quantique conventionnelle dans l'espace-temps. On peut donc tenter de

construire une nouvelle mécanique quantique dans l'échelle-espace, réalisant ainsi une sorte de « troisième quantification » [15].

2.5-L'approche fractale de la mécanique quantique.

Feynman [8] a étudié la structure géométrique des chemins en mécanique quantique. Il a montré que les trajectoires typiques des particules quantiques sont continues mais non différentiables. Cette structure quantique peut être caractérisée par une dimension fractale égale à 2, bien que, Feynman n'a pas utilisé le mot « **fractal** », qui a été inventé plus tard en 1975 par Mandelbrot [10]. Abbott et Wise [12], ont également étudié le problème de la structure des chemins quantiques en termes de concept de fractales. Ils ont montré que la longueur d'une trajectoire en mécanique quantique est fonction de la résolution d'espace comme :

$\mathcal{L} \propto \delta x^{-1}$ lorsque $\delta x < \lambda_{dB}$ (longueur d'onde de de Broglie) et devient indépendante de l'échelle lorsque $\delta x \gg \lambda_{dB}$. On considère deux points dans ce résultat : Le premier dérive de l'expression connue de la divergence d'échelle d'une courbe fractale [15]:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \left(\frac{\lambda_{dB}}{\delta x} \right)^{D-1} \quad (2.9)$$

qui conduit à la dimension fractale $D = 2$ ce qui est en accord avec Feynman. Le deuxième point concerne le fait que la structure fractale ne persiste pas quelle que soit l'échelle, et qu'il y a une transition rapide

du comportement fractal au comportement non fractal ($D = 2$ à $D = 1$) de façon approximative et ceci par rapport à l'échelle de Broglie. Cette transition du quantique au classique est confirmée par Abbott et Wise [12, 15].

Dans ce qui suit on va montrer que la trajectoire observée d'une particule en mécanique quantique est une courbe fractale avec la dimension de Hausdorff $D = 2$.

2-5-1. Le principe d'incertitude de Heisenberg :

Le principe d'incertitude d'Heisenberg stipule que :

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar \quad (2.10)$$

$$\Delta p \approx \hbar / \Delta x \quad (2.11)$$

On trouve : $\langle \Delta l \rangle \approx \hbar \Delta t / m \Delta x$

Avec $\Delta l \approx l$

Hausdorff a proposé une définition modifiée de la longueur donnée par :

$$\langle l \rangle_{haus} = \langle l \rangle \Delta x^{D-1} \quad (2.12)$$

Ce qui conduit à :

$$\langle l \rangle_{haus} = (\hbar t / m) (\Delta x)^{D-2} \quad (2.13)$$

Et pour que la trajectoire soit indépendante de la résolution (Δx) il faut que la dimension de la trajectoire soit égale à 2 ce qui veut dire qu'elle peut occuper une surface. Dans le cas classique où l'on a $D = 1$, la trajectoire est indépendante de la résolution.

2-5-2. Le travail d'Abbott et Mark. B Wise :

Abbott et Wise [12] ont montré que la trajectoire d'une particule quantique est une courbe fractale de dimension $D_{haus} = 2$

ψ est la fonction d'onde d'une particule libre localisé dans une région Δx à $t = 0$, tel que :

$$\psi_{\Delta x}(x, t = 0) = \frac{(\Delta x)^{3/2}}{\hbar^3} \int \frac{d^3 p}{2\pi^{3/2}} f\left(\frac{|p|\Delta x}{\hbar}\right) e^{ipx/\hbar} \quad (2.14)$$

Définissant le vecteur sans dimension : $k = p(\Delta x)/\hbar$

La normalisation de la fonction d'onde implique :

$$\int d^3 x^2 |f(|k|)|^2 = 1 \quad (2.15)$$

$$\text{On peut choisir : } f(|k|) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/4} e^{-|k|^2} \quad (2.16)$$

La distance moyenne parcourue par la particule après un temps Δt est :

$$\langle \Delta l \rangle = \int d^3 x |x| |\psi|^2 \quad (2.17)$$

Si on pose que $y = x/\Delta x$

On obtient :

$$|\psi|^2 = (\Delta x)^{-3} \left| \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} f(|k|) e^{\frac{-i\hbar\Delta t}{2m(\Delta x)^2} k^2 + iky} \right|^2 \quad (2.18)$$

On peut écrire: $\langle \Delta l \rangle = \Delta x \left[\int d^3 y |y| |F(y, \mathbf{b})|^2 \right]$ (2.19)

Tel que $F(y, \frac{\hbar\Delta t}{2m(\Delta x)^2}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} f(|k|) e^{\frac{-i\hbar\Delta t}{2m(\Delta x)^2} k^2 + iky}$ (2.20)

Et $\mathbf{b} = \frac{\hbar\Delta t}{2m(\Delta x)^2}$ (2.21)

De(2.20)

$$|F(y, \mathbf{b})|^2 = (2\pi)^{-3/2} (1 + \mathbf{b}^2)^{-3/2} e^{\frac{-|y|^2}{2(1+\mathbf{b}^2)}} \quad (2.22)$$

Avec l'intégrale :

$$\int d^3 y = 4\pi \int dy |y|^2$$

$$\int_0^\infty e^{-\beta x^m} x^\alpha dx = \frac{1}{m} \beta^{-(\alpha+1)/m} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{m}\right)$$

Où Γ est La fonction gamma d'Euler α, β et m sont des nombres entiers naturels.

Exemple : $\alpha = 0, \beta = 1, m = 2$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} x^0 dx = \frac{1}{2} 1^{-(0+1)/2} \Gamma\left(\frac{0+1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} 1^{-1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\langle \Delta l \rangle \propto \Delta x \left(1 + \frac{\hbar^2(\Delta t)^2}{4m^2(\Delta x)^4} \right) \quad (2.23)$$

$$\langle \Delta l \rangle \propto \frac{\hbar\Delta t}{2m\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{2m\Delta x^2}{\hbar\Delta t} \right)^2} \quad (2.24)$$

Nous avons

$$\Delta x \ll \sqrt{\frac{\hbar\Delta t}{2m}}$$

Et on a $\langle \Delta l \rangle \propto \frac{\hbar\Delta t}{m\Delta x}$

$$\langle l \rangle_{hausss} = \langle l \rangle (\Delta x)^{D-1}$$

$$\langle l \rangle_{hausss} \propto \frac{\hbar t}{m} (\Delta x)^{D-2}$$

$D = 2$ est la condition pour que la longueur de Hausdorff doit être indépendante de la résolution.

2.5.3- La mécanique quantique et son espace non-différentiable :

En supposant que l'espace est continu et non différentiable, on peut exprimer le vecteur de position d'une particule par une fonction fractale continue finie $x(t, dt)$ en adoptant la formulation d'analyse non standard, Nottale [15] a remplacé dt par la variation différentielle dt pour écrire le vecteur position entre t et $t + dt$ sous la forme suivante :

$$x(t + dt) - x(t, dt) = b_+(x, t)dt + \xi_+(t, dt)\left(\frac{dt}{\tau_0}\right)^\beta \quad (2.25)$$

Ou: $\beta = 1/D$ ($\beta = 1/2$ dans le mouvement quantique et brownien), b_+ est la vitesse vers l'avant et ξ_+ est la fonction fractale.

La variation de x entre $t - dt$ et t telle que :

$$x(t, dt) - x(t - dt, dt) = b_-(x, t)dt + \xi_-(t, dt)\left(\frac{dt}{\tau_0}\right)^\beta \quad (2.26)$$

Ou b_- est la vitesse en arrière, les équations (2.25) et (2.26) peuvent être réécrites en termes de vitesses instantanées :

$$\begin{cases} v_+(x, t, dt) = b_+(x, t) + \xi_+(t, dt)\left(\frac{dt}{\tau_0}\right)^{\beta-1} & (2.27) \\ v_-(x, t, dt) = b_-(x, t) + \xi_-(x, t)\left(\frac{dt}{\tau_0}\right)^{\beta-1} & (2.28) \end{cases}$$

La non-différentiabilité est évidente dans cette expression, puisque dans le cas quantique

$$\beta - 1 = -1/2.$$

Les équations (2.27) et (2.28) peuvent être définies comme :

$$\begin{cases} V_+ = v_+(\frac{dt}{\tau'_0})^{1-\beta} \\ V_- = v_-(\frac{dt}{\tau'_0})^{1-\beta} \end{cases} \quad (2.29)$$

Où $\tau'_0 \neq \tau_0$

Alors chaque composante de V_+ et V_- est un nombre fini de l'ensemble des réels R^* non standard, dans NSA (non standard analyses) tout nombre fini de R^* peut-être décomposé d'une manière unique en la somme d'un nombre réel et d'un nombre infinitésimal, et l'équation (2.29) devient

$$\begin{cases} V_+ = \xi_+ + b_+(dt/\tau_0)^{1-\beta} \\ V_- = \xi_- + b_-(dt/\tau_0)^{1-\beta} \end{cases} \quad (2.30)$$

b_+ et b_- étant des nombres réels finis.

Dans le cas différentiable seule la partie classique de la vitesse reste $\xi_+ = \xi_- = 0$ et les vitesses en avant et en arrière sont égales :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \{x(t + dt, dt) - x(t, dt)\} = \lim_{t \rightarrow 0} \{x(t, dt) - x(t - dt, dt)\} \quad (2.31)$$

Dans l'espace-temps non différentiable, il existe une infinité de géodésiques entre n'importe quel couple de points, chacun d'entre eux ayant des propriétés fractales, c'est-à-dire dépendant de l'échelle. Leur ensemble définira une amplitude de probabilité. La figure ci-dessous montre la construction d'une fonction non différentiable par des dissections successives, sa longueur tend vers l'infini lorsque l'intervalle de résolution tend vers zéro. Nelson dans sa mécanique quantique stochastique, suppose un mouvement brownien sous-jacent d'origine inconnue qui agit sur les particules dans un espace-temps encore Minkowskien, puis il a introduit la non-différentiabilité. Ce qui est essentielle dans la théorie de Nottale même si la clef de voute pour sa théorie exige que l'on tienne compte des échelles de longueur les plus petites possibles.

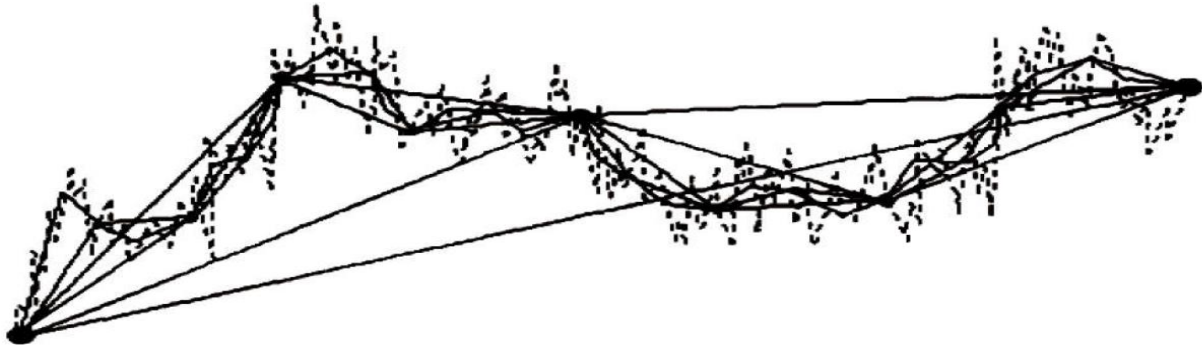


Fig. .16 : Construction d'une fonction non différentiable par dissections successives [15]

Nelson définit les dérivées moyennes avant et arrière d_+/dt et d_-/dt comme :

$$\frac{d_{\pm}}{dt} Y(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^{\pm}} \left\langle \frac{Y(t + \Delta t) - Y(t)}{\Delta t} \right\rangle \quad (2.32)$$

Où $Y(t)$ est toute fonction arbitraire de t et $\langle \rangle$ est la valeur moyenne. En appliquant cette équation au vecteur de position, on peut introduire des vitesses moyennes vers l'avant et vers l'arrière définies par :

$$\begin{cases} \frac{d_+}{dt} x(t) = b_+ \\ \frac{d_-}{dt} x(t) = b_- \end{cases} \quad (2.33)$$

En combinant les dérivées avant et arrière de l'équation (2.33) dans un opérateur dérivé complexe on obtient

$$\frac{\delta}{dt} = \frac{(d_+ + d_-) - i(d_+ - d_-)}{2dt} \quad (2.34)$$

En appliquant cette équation au vecteur de position, il vient :

$$\vec{v} = \frac{\delta}{dt} x(t) = \vec{V} - i\vec{U} = \frac{b_+ + b_-}{2} - i \frac{b_+ - b_-}{2} \quad (2.35)$$

On obtient aussi :

$$\begin{cases} \frac{d_v}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d_+ + d_-}{dt} \\ \frac{d_u}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d_+ - d_-}{dt} \end{cases} \quad (2.36)$$

Tel que :

$$\begin{cases} \vec{V} = \frac{d_v}{dt} x \\ \vec{U} = \frac{d_u}{dt} x \end{cases} \quad (2.37)$$

Où \vec{V} est la partie réelle de la vitesse complexe \vec{V} , qui représente la vitesse classique et \vec{U} la partie imaginaire de la vitesse complexe qui est une nouvelle quantité issue de la non-différentiabilité. Dans une représentation statistique, le vecteur de position $x(t)$ est assimilé à un processus stochastique qui satisfait la relation (2.38) :

$$\begin{cases} d\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_+(x(t))dt + d\xi_+(t) & \text{pour } dt > 0 \text{ avant} \\ d\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_-(x(t))dt + d\xi_-(t) & \text{pour } dt > 0 \text{ arri\`ere} \end{cases} \quad (2.38)$$

Où $d\xi(t)$ est la fluctuation autour de la partie classique \mathbf{b}_\pm qui est gaussienne de moyenne nulle, définit par :

$$\langle d\xi_{\pm i} d\xi_{\pm j} \rangle = \pm 2D \delta_{\pm} dt \quad (2.39)$$

Où D est le coefficient de diffusion $D = \frac{\hbar}{2m}$ et δ_j^i est le symbole de Kronecker

$$d\xi = \eta \sqrt{2D} (dt^2)^{1/2D} \quad (2.40)$$

Où η est une variable stochastique telle que $\langle \eta \rangle = 0$, $\langle \eta \rangle^2 = 1$

L'équation (2.39) permet d'obtenir une expression générale de la dérivée complexe δ/dt . Considérant une fonction $f(x, t)$ et sa différentielle qui s'écrit sous la forme suivante (2.41) :

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \vec{\nabla} f \cdot d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \quad (2.41)$$

Pour calculer les dérivées avant et arri\`ere de f , la valeur moyenne $\langle d\mathbf{x}_i d\mathbf{x}_j \rangle$ se réduit

$$\text{à } \langle d\xi_{\pm i} d\xi_{\pm j} \rangle$$

L'équation (2.41) devient :

$$\frac{d_\pm f}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{b}_\pm \cdot \vec{\nabla} \pm D\Delta \right) f \quad (2.42)$$

Δ le Laplacien, l'expression de l'opérateur dérivé du temps devient :

$$\frac{\delta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} - iD\Delta \quad (2.43)$$

Ensuite le passage de la mécanique classique (**différentiable**) peut être réalisé en remplaçant la dérivée du temps standard $\frac{d}{dt}$ par un nouvel opérateur complexe $\frac{\delta}{\partial t}$ qui joue le rôle d'une dérivée covariante quantique. Les principales étapes qui généralisent la mécanique classique peuvent être indiquées comme suit :

Tout système mécanique peut être caractérisé par une fonction de Lagrange $L = (x, \vec{V}, t)$; alors l'action stochastique moyenne S est définie comme :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \langle L(x, \vec{V}, t) \rangle dt \quad (2.44)$$

Le remplacement conduit à l'équation d'Euler -Lagrange généralisée :

$$\frac{\delta}{\delta t} \frac{\partial L}{\partial \vec{V}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad (2.45)$$

En mécanique Newtonienne, la fonction de Lagrange d'un système fermé s'écrit sous la forme suivante :

$$L(x, \vec{V}, t) = \frac{1}{2} m \vec{V}^2 - U \quad (2.46)$$

Où U est un potentiel scalaire. Les équations d'Euler-Lagrange conservent la forme de l'équation fondamentale de la dynamique de Newton comme la montre l'équation suivante :

$$-\vec{\nabla} U = m \frac{\delta}{\delta t} \vec{V} \quad (2.47)$$

qui est écrite en termes de variables complexes et d'opérateur dérivé.

2-6. L'équation de Schrödinger dans une nouvelle perspective :

Les notions d'espace-temps fractal et d'opérateur dérivé temporel complexe permettent de retrouver l'équation de Schrödinger, puis de la généraliser. L'amplitude est définie par la relation [15] :

$$\psi = e^{iS/2m \mathcal{D}} \quad (2.48)$$

S est l'action stochastique et \mathcal{D} le coefficient de diffusion.

La vitesse complexe \mathbf{V} apparaît comme un gradient $\vec{V} = \vec{\nabla} S / m$, et ψ est liée à la vitesse complexe par :

$$\vec{V} = 2i \langle \mathcal{D} \rangle \vec{\nabla} (\ln \psi) \quad (2.49)$$

Maintenant l'équation généralisée de Newton prend la forme :

$$\vec{\nabla} U = 2im \langle \mathcal{D} \rangle \frac{\delta}{\delta t} (\vec{\nabla} \ln \psi) \quad (2.50)$$

où $\vec{\partial}$ et $\vec{\nabla}$ ne commutent pas. D est une fonction de x :

$$D(x, t) = \langle D \rangle + \delta D(x, t) \quad (2.51)$$

Où $\langle D \rangle$ est une constante par rapport aux variables x et t

L'équation (2.49) peut être écrite sous la forme :

$$\vec{\nabla}U = 2im \langle D \rangle \left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} - iD(x, t)\Delta \right] \vec{\nabla}(\ln\psi) \quad (2.52)$$

Remplaçant les deux équations précédentes, on obtient :

$$\vec{\nabla}U = 2im \langle D \rangle \left[\frac{\partial}{\partial t} - 2i \langle D \rangle \vec{\nabla}(\ln\psi) \cdot \vec{\nabla} - i(\langle D \rangle) + \delta D(x, t) \right] \vec{\nabla}(\ln\psi) \quad (2.53)$$

L'équation généralisée de Schrödinger prend aussi cette forme :

$$\vec{\nabla} \left\{ \frac{U}{2m \langle D \rangle} - \frac{1}{\psi} \left[D\Delta\psi + i \frac{\partial\psi}{\partial t} + \delta D(\vec{\nabla}\ln\psi)^2 \right] \right\} = -\vec{\nabla}(\delta D)\Delta\ln\psi \quad (2.54)$$

Nottale [15] a considéré quelques cas simplifiés et dans chaque cas l'équation généralisée de Schrödinger prend une forme différente :

- $D = \frac{\hbar}{2m}$, une constante donc $\delta D = 0$.
- $D = D(\delta t) = D\left(\frac{\delta t}{\tau}\right)^{(2/D)-1}C$, est le cas contraire, le coefficient de diffusion reste constant en termes de position et de temps, mais il inclut l'effet d'une dimension fractale différente de 2.
- $\vec{\nabla}(\delta D) = 0$ où $\vec{\nabla}(\delta D) \ll 1$ dans ce cas, le coefficient de diffusion dépend du temps et non pas de la position.

Chapitre3 :

Application de la théorie de la Relativité d'Echelle au problème d'une Particule Quantique dans un Potentiel d'Oscillateur Harmonique

3.1-INTRODUCTION :

La relativité d'échelle est une approche émergente qui vise à unifier la physique quantique et la théorie de la relativité.

Dans ce qui suit, nous résolvons l'équation fondamentale de la relativité d'échelle pour l'oscillateur harmonique. Comme ce dernier est le modèle le plus simple exactement soluble dans l'une des théories physiques, les résultats sont abordés ici pour obtenir une meilleure compréhension de la façon dont la relativité d'échelle fonctionne. En particulier, nous montrons que les solutions du problème quantique sont intimement liées à ceux de l'approche de relativité d'échelle via l'équation différentielle non linéaire de Riccati[18].

3.2-Potentiel d'un oscillateur harmonique simple :

Equations de base :

Dans le cas le plus simple, préservant la notion de temps Newtonien, la métrique spatiale est continue et non différentiable partout. Les déplacements spatiaux ainsi que les vitesses sont comptés deux fois et la vitesse complexe est telle que

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{F}(\vec{x}, t) - i\vec{G}(\vec{x}, t) \quad (3.1)$$

Cette vitesse est introduite pour inclure les deux vitesses $v \pm$ puisque ses parties réelle et imaginaire sont respectivement données par $\vec{F}(\vec{x}, t) \equiv \frac{\vec{v}_+ + \vec{v}_-}{2}$ et $\vec{G}(\vec{x}, t) \equiv \frac{\vec{v}_+ - \vec{v}_-}{2}$. Dans la formulation Hamiltonienne, et pour un système stationnaire d'énergie définie W , de la loi de la dynamique se déduit l'équation de Riccati :

$$W = \frac{m}{2} \vec{v}^2 + \phi - i \frac{\hbar}{2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (3.2)$$

Pour une particule de masse m soumise au potentiel de l'oscillateur harmonique unidimensionnel,

$\phi = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$, la loi de la dynamique prend alors la forme :

$$\partial_x v = -i \frac{m}{\hbar} v^2 + i \frac{2}{\hbar} (W - \phi(x)) \quad (3.3)$$

Comme la vitesse complexe d'un état stationnaire n'a pas de rôle réel, nous arrivons à l'expression :

$$-G' = \frac{m}{\hbar} G^2 + \frac{2}{\hbar} \left(W - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \quad (3.4)$$

3.3-La solution de l'équation de mouvement :

On peut commencer par l'équation complexe de Newton

$$-\nabla u = m \frac{\partial}{\partial t} V \quad (3.5)$$

Où u est un potentiel scalaire et V est une vitesse complexe, séparez cette équation en partie réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} m \left(\frac{\partial}{\partial t} V - D \Delta U + (V \cdot \nabla) V - (U \cdot \nabla) U \right) = -\nabla u \\ m \left(\frac{\partial}{\partial t} V + D \Delta V + (V \cdot \nabla) U + (U \cdot \nabla) V \right) = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Ici, la vitesse classique moyenne V devrait être nulle car l'oscillateur harmonique est un système symétrique. Ensuite, les équations du mouvement peuvent être réduites comme :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} D U(x) + \frac{1}{2} U^2(x) \right) = \frac{\partial}{\partial x} u \quad (3.7)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} U(x) = 0 \quad (3.8)$$

Où U est la partie imaginaire de la vitesse complexe et D est le coefficient de diffusion. L'équation (3.8) montre que U est une fonction de x seulement. Le potentiel de l'oscillateur harmonique unidimensionnel peut s'écrire $\frac{1}{2} m \omega^2 x^2$, où ω est la pulsation. Ensuite, l'équation (3.7) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} D U(x) + \frac{1}{2} U^2(x) \right) = \frac{1}{2} m w^2 \frac{\partial}{\partial x} x^2 \quad (3.9)$$

En intégrant et en réorganisant les termes dans l'équation résultante, on obtient :

$$\frac{d}{dx} U(x) + \frac{1}{2D} U^2(x) - \frac{1}{2D} m w^2 x^2 + \frac{1}{D} c_1 = 0 \quad (3.6)$$

Où c_1 est une constante d'intégration. $c_1 = E/m$ (Selon Hermann) [17],

L'équation (3.6) devient :

$$\frac{dU(x)}{dx} + \frac{m}{\hbar} U^2(x) - \frac{m^2}{\hbar} w^2 x^2 + \frac{2E}{\hbar} = 0 \quad (3.10)$$

Où l'on a remplacé D par $\frac{\hbar}{2m}$. La dernière équation a la forme d'une équation de Riccati. Pour résoudre cette équation, on peut la transformer en une équation différentielle d'ordre 2 de la forme :

$$r y''(x) + r^2 q(x) y(x) = 0 \quad (3.11)$$

Où

$$U(x) = -\frac{1 y'(x)}{r y(x)} \quad (3.12)$$

et $y(x)$ est une fonction arbitraire de x .

De l'équation (3.10), il s'ensuit que :

$$\begin{cases} r = -\frac{m}{\hbar} ; \\ q(x) = \frac{2}{\hbar} \left(\frac{1}{2} m w^2 x^2 - E \right) \end{cases} \quad (3.13)$$

Ensuite l'équation (3.10) devient :

$$y''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{1}{2} m w^2 x^2 \right) y(x) = 0 \quad (3.14)$$

Sa solution est :

$$y_n(x) = A_n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(x) \quad (3.15)$$

Où A_n est une constante et H_n est un polynôme Hermite d'ordre n et $n = 0, 1, 2, \dots$

Et $U_n(x)$ est donné par :

$$U_n(x) = \frac{\hbar}{m} (-xH_n(x) + H'_n(x)) \quad (3.16)$$

On utilise la propriété suivante du polynôme de Hermite : $H'_n = 2nH_{n-1}(x)$ on obtient :

$$U_n(x) = \frac{\hbar}{m} \left(-x + 2n \left(\frac{H_{n-1}(x)}{H_n(x)} \right) \right) \quad (3.17)$$

Comme dans les travaux d'Hermann [17], on a l'équation des coordonnées de position qui s'écrit stochastiquement sous la forme suivante :

$$dx(t) = \frac{\hbar}{m} \left(-x + 2n \left(\frac{H_{n-1}(x)}{H_n(x)} \right) \right) dt + d\xi_+ \quad (3.18)$$

Où $d\xi_+$ est une variable aléatoire gaussienne d'écart type $\sqrt{2Ddt}$.

3.4--Simulation numérique :

L'équation (3.18) représente un processus stochastique [17]. Dans le problème d'un oscillateur harmonique unidimensionnel, il a été constaté que l'hypothèse $2Ddt = 1$ n'est pas efficace pour la présente simulation car elle conduit à de mauvais résultats. Donc on commence à ajuster la valeur de dt jusqu'à ce que l'on s'approche d'une valeur spécifique pour laquelle des résultats significatifs sont obtenus. Il a été constaté qu'une valeur de $dt = 10^{-3} \frac{m}{\hbar}$ convient pour la présente simulation. Il semble que cette valeur de dt soit liée à la période du mouvement dans le potentiel de l'oscillateur harmonique. On s'attend à ce qu'une valeur appropriée donne une valeur numérique significative. Les résultats de la simulation sont ceux qui conduisent à un nombre suffisant de pas de temps pour donner des valeurs significatives. Ceci est une conséquence de la nature statistique de ces simulations qui nécessitent de meilleures statistiques pour être significatives. Ensuite, l'équation (3.18) devient :

$$dx(t) = 10^{-3} \left(-x + 2n \left(\frac{H_{n-1}(x)}{H_n(x)} \right) \right) + \sqrt{10^{-3}} N(0, 1) \quad (3.19)$$

Où $N(0,1) = N(\mu, \sigma)$: Une variable aléatoire gaussienne de valeur moyenne nulle et d'un écart type=1

Où le choix des unités a été fait de telle sorte que : $\hbar = m = 1$

Un programme de la simulation a été écrit suivant la procédure d'Hermann [17], pour faire des simulations numériques pour le problème d'un oscillateur harmonique. Les simulations numériques sont réalisées à l'aide de l'équation (3.19) qui représente les équations de trajectoire de la particule pour différentes valeurs du nombre quantique n ($n = 0, 1, 2, 3, 4$ et 5). La sortie de ces simulations donne la densité de probabilité $f(x)$ de la particule dans le potentiel de l'oscillateur harmonique. Pour la construire, on peut diviser la région en 601 pièces (boîtes)[17]. Ce qui donne de meilleurs résultats est de diviser le temps en $\Delta x = 10^8$ et $\Delta t = 5 \times 10^8$, comme dans Le travail d'Hermann[17].

Les résultats des simulations numériques du présent travail sont comparés aux densités de probabilité de la mécanique quantique conventionnelle, c'est-à-dire :

$$P(x) = N_n^2 H_n^2(x) e^{-x^2} \quad (3.20)$$

Où : $N_n = 1/\sqrt{2^n n! \pi^{1/2}}$, est la constante de normalisation [17,18].

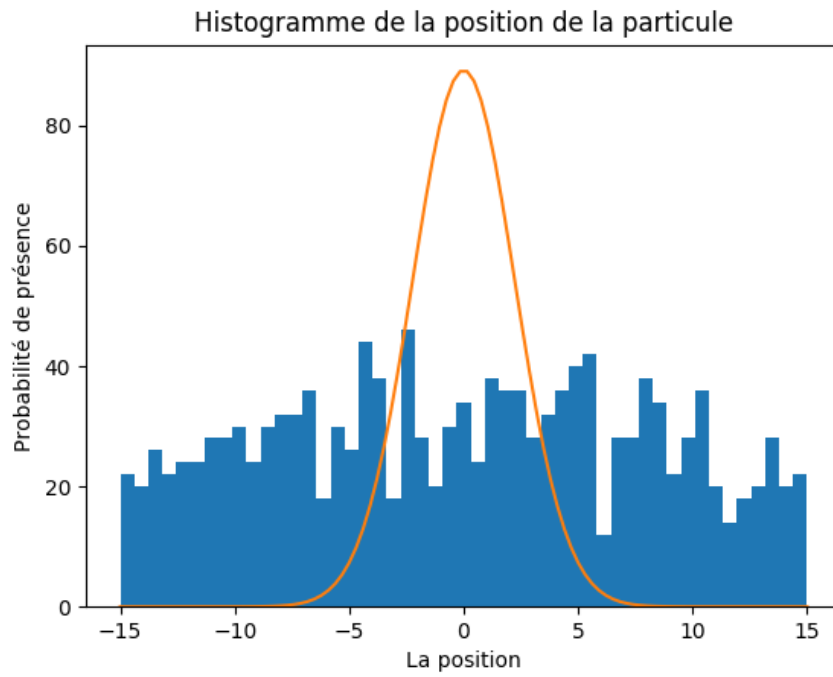
3.5-Résultats obtenus :

La simulation du déplacement stochastique (3.19) est représentée sur les figures ci-dessous où les histogrammes indiquent les résultats des présentes simulations et les courbes continues représentent les résultats de la mécanique quantique conventionnelle.

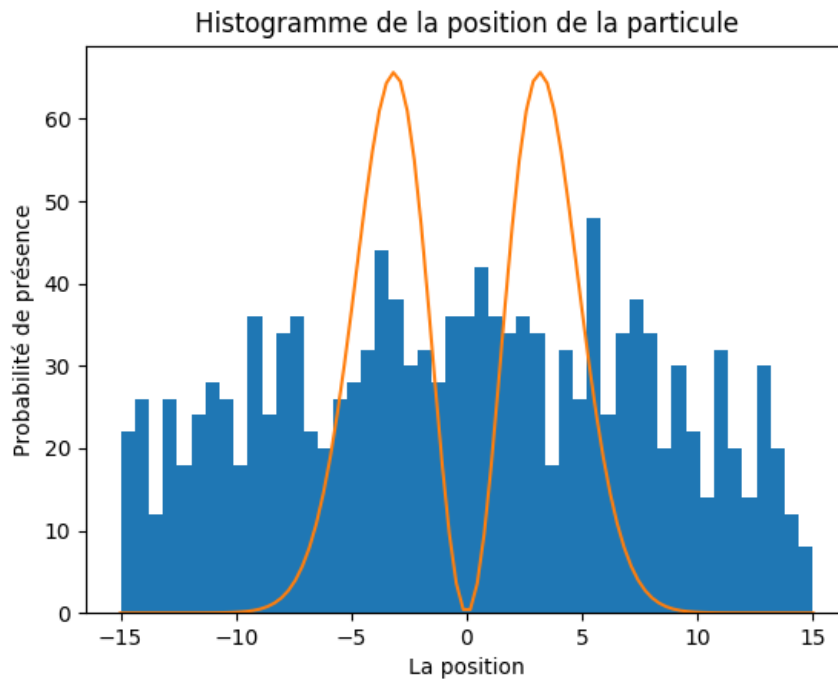
La simulation a été faite par le langage de programmation Python. Python est le langage de programmation open source le plus employé par les informaticiens. En effet, parmi les qualités de ce logiciel, on trouve qu'il permet aux développeurs de se concentrer sur ce qu'ils font plutôt que sur la manière dont ils le font. Ce langage libère les développeurs des contraintes de formes qui consomment beaucoup de temps avec les langages plus anciens. Ainsi, développer du code avec Python est plus rapide qu'avec d'autres langages.

Les résultats de la simulation (histogramme) sont représentés sur les mêmes figures avec les courbes de probabilité de présence de la mécanique quantique conventionnelle pour mieux comparer entre les deux approches à savoir la mécanique quantique non-relativiste et la relativité d'échelle. Nos simulations ont été faites pour les niveaux d'énergie ; $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

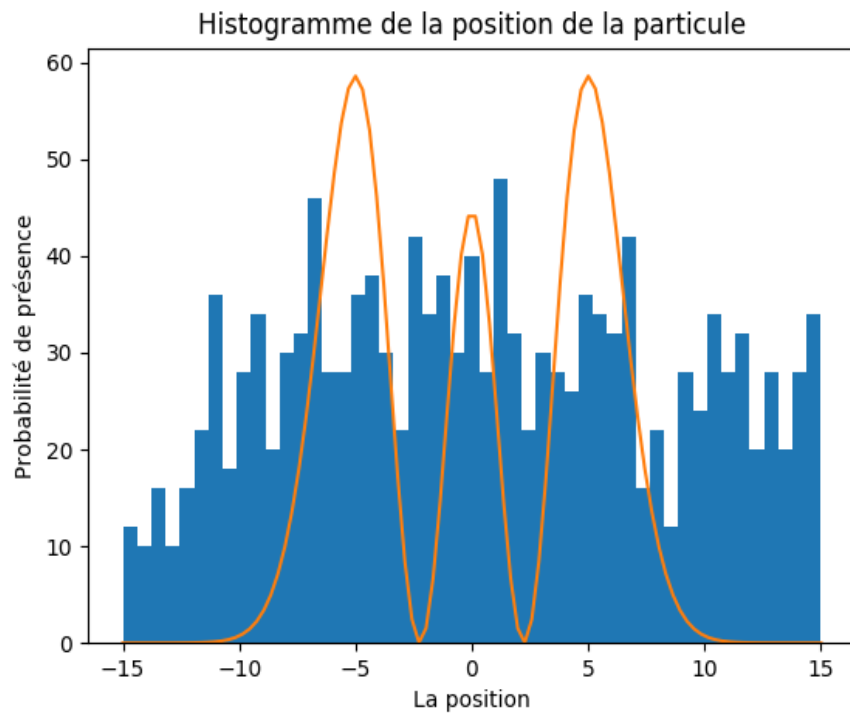
Niveau :0



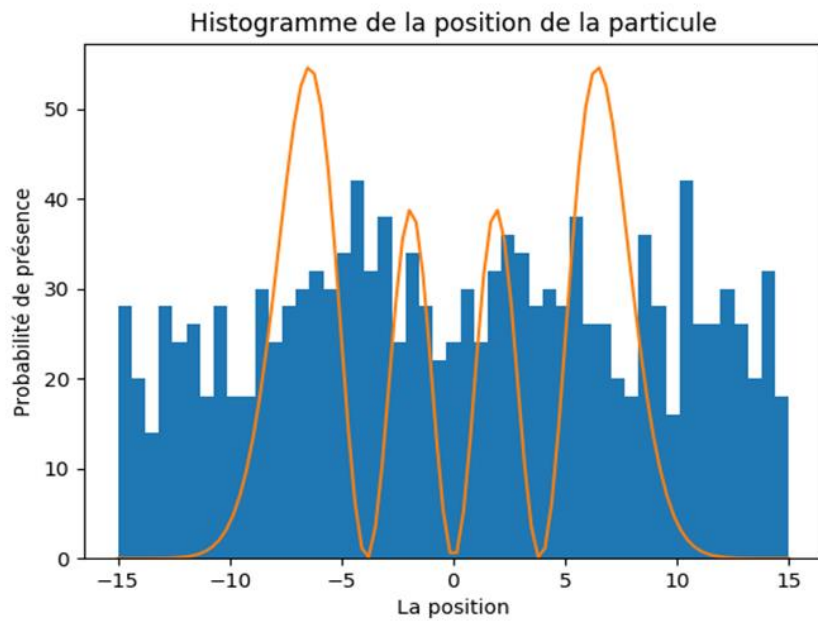
Niveau 1



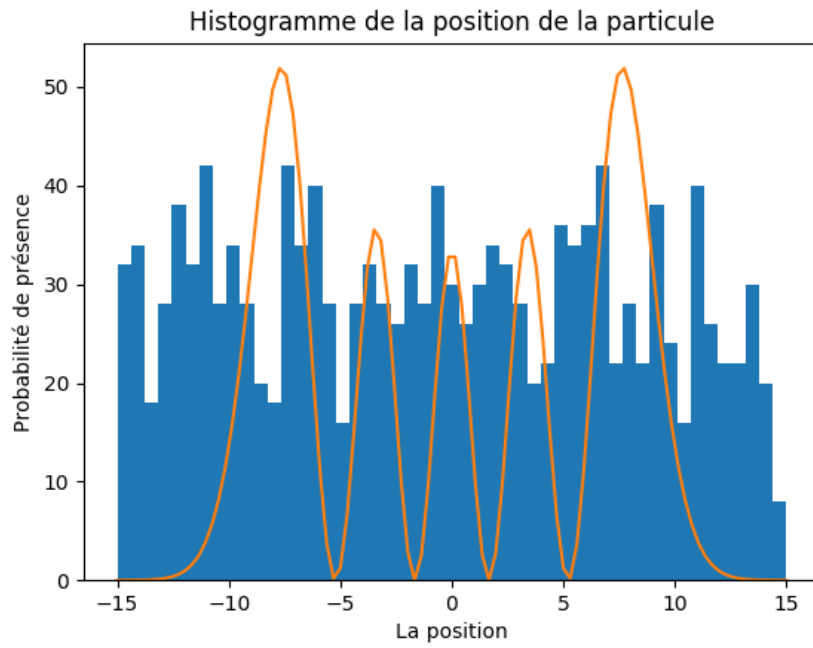
Niveau 2



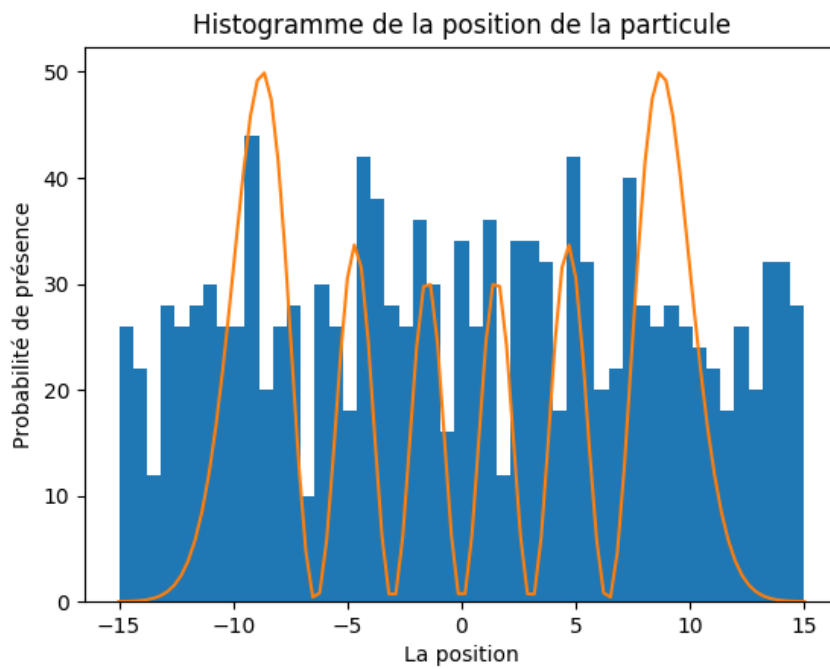
Niveau 3



Niveau 4



Niveau 5



3.6-CONCLUSION :

Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux de la mécanique quantique conventionnelle, donc on peut conclure que l'application de la théorie de la relativité d'échelle est valable. La prédiction quantitative du comportement d'une particule quantique dans un potentiel d'oscillateur harmonique simple peut être correctement obtenue sans écrire explicitement l'équation de Schrödinger ni d'utiliser aucun autre axiome quantique. Ceci amène à conclure aussi que la relativité d'échelle est une nouvelle approche bien fondée pour déduire la mécanique quantique du concept d'espace-temps fractal, qui est une conséquence de l'extension du principe de relativité. Les applications réussies n'étaient pas réalisables sans l'ajustement du pas de temps dt d'après une compréhension plus approfondie du mouvement des particules dans certains problèmes (le travail de Hermann [17]), on s'attend à ce que cette compréhension soit nécessaire lorsque des tentatives seront faites pour résoudre d'autres problèmes de mécanique quantique. L'apparition de l'équation de Riccati en relation avec la théorie de relativité d'échelle dans le présent travail, et l'utilisation de cette équation en mécanique quantique conventionnelle amène à conclure que cette équation est profondément enracinée dans l'aspect de la mécanique quantique. La relativité d'échelle n'est pas une approche particulièrement avantageuse pour résoudre directement des problèmes de mécanique quantique. Elle révèle seulement la relation entre le comportement quantique et la fractalité de l'espace-temps.

Nous avons montré aussi que l'équation fondamentale de la relativité d'échelle établie pour un oscillateur harmonique peut être réduite à une équation différentielle non linéaire de Riccati. En utilisant la relation bien connue entre les équations de Riccati et de Schrödinger, nous avons résolu le problème de relativité d'échelle en termes de fonctions propres quantiques de l'oscillateur. Contrairement à d'autres travaux, nous n'avons besoin aucune approximation numérique pour justifier la forme des solutions.

CONCLUSION GENERALE :

Dans ce travail, nous avons essayé d'appliquer le formalisme de la relativité d'échelle au problème d'une particule quantique dans un potentiel d'oscillateur harmonique. Afin d'atteindre cet objectif, nous avons suivi les étapes suivantes :

Dans le premier chapitre, on a parlé des deux plus grandes théories de la physique moderne à savoir, le principe de la relativité du mouvement dans ses deux parties restreinte et générale et la théorie quantique dans ses trois manifestations, mécanique quantique non-relativiste, mécanique quantique relativiste et théorie quantique des champs, ainsi que la nécessité d'un principe de relativité plus général qui puisse englober les deux théories. Le deuxième chapitre, est consacré à l'évolution historique du concept de l'espace-temps fractal et la théorie de la relativité d'échelle en commençant par les travaux de Feynman et Hibbs qui ont prouvé la non-différentiabilité des chemins des particules quantiques, qui est avec les concepts d'échelle et de résolution constituent les fondements de la géométrie fractale de Mandelbrot. En se basant sur cette géométrie L.Nottale, traite l'espace-temps comme un objet fractal, et en abandonnant la différentiabilité des chemins des particules quantiques et en considérant que la résolution obéisse au principe de relativité il a pu fonder la théorie de la relativité d'échelle. On a montré aussi que la mécanique quantique n'est rien d'autre que la mécanique Newtonienne dans un espace-temps fractale où on a appliqué la non-différentiabilité sur la relation fondamentale de la dynamique. Ceci nous a amené à l'équation de Schrödinger sans passer par les postulats de la mécanique quantique.

Dans le dernier chapitre on a appliqué la théorie de la relativité d'échelle sur une particule quantique dans un potentiel d'Oscillateur Harmonique, nous avons obtenu une équation différentielle stochastique que nous avons résolue par simulation numérique à l'aide d'un langage de programmation appelé **Python**. Les solutions obtenues ont été comparées à celles de la mécanique quantique conventionnelle (résolution de l'équation de Schrödinger pour le cas d'un oscillateur harmonique). Cette comparaison nous a permis de remarquer qu'il y a un bon accord entre les deux traitements à savoir la mécanique quantique et la relativité d'échelle de Nottale, ce qui nous mène à dire que cette nouvelle théorie qui est encore à ses premiers pas, peut-être, une nouvelle compréhension de la nature de l'espace-temps ainsi que les constituants de la matière qui immergent dans cet espace-temps. .

Références

- [1] C. Möller, "The Theory of Relativity", 2ndEd., Int. Series of Monographs on Phys., Oxford,1971.
- [2] C. C. Tannoudji, B. Diue and F. Laloë "Quantum mechanics", Vol. 1, John Wiley and Sons, New York,1977.
- [3] B. De Witt and R. N. Graham," The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics", Prin. Series in phys., Prin. Univ. Press,1973.
- [4] A. M. Marlow, "Quantum Theory and Gravitation", Acad. Press, New York,1980.
- [5] L. I. Schiff., "Quantum Mechanics", 3rd Ed., Int. Student, McGraw - Hill,1969.
- [6] C. Rovelli, "Relational Quantum Mechanics", Int. J. Theor. Phys. 35, 1996, pp.1637-1678.
- [7] A. Donald, "Quantum Chemistry", Univ. Sc. Books, Mill Valley, Calif, 1983
- [8] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, "Quantum Mechanics and Path Integrals", MacGraw–Hill,1965
- [9] J. J. Duistrmaat, "Self-Similarity of Riemann's Non- Differentiable Function", Nieuw Arch. Wisk,Vol.9, 1991, pp.303-337.
- [10] B. B. Mandelbrot, "The Fractal Geometry of Nature", W. H. Freeman and Company,1983.
- [11] E. Nelson, "Quantum Fluctuations", Princeton Univ. Press, 1985.
- [12] L. F. Abbott and M. B. Wise, "Dimension of a Quantum Mechanical Path", Am. J. Phys., Vol.49, 1981, pp.37-39.
- [13] D. Sornette, "Brownian Representation of Fractal Quantum Paths", Eur. J. Phys., Vol. 11, 1990, pp.334-337.
- [14] G. N. Ord, "Fractal Space-Time: a Geometric Analogue of Relativistic Quantum Mechanics", J. Phys. A; Math. Hen. 16, 1983, pp.1869-1884.
- [15] L. Nottale, "Fractal Space-Time andMicrophysics:To wards of a Theory of Scale Relativity", World Scientific, (First Reprint) 1998.
- [16] R. Hermann, G. Schumacher and R. Guyard, "Scale Relativity and Quantization of the Solar System :Orbite Quantization of the Planet’s Satellites", Astron. Astrophys., Vol. 355, 1998, pp. 281-286
- [17] R. P. Hermann, "Numerical Simulation of a Quantum Particle in a Box", J. Phys. A; Math. Gen. 30, 1997, pp.3967-3975.
- [18] S. N. T. Al Rashid, Thèse PhD “Some Applications of Scale Relativity Theory in Quantum Physics” 2006

[19] Le site web de Jean-François GOUYET : www.jfgouyet.fr/fractal/fractalfr/html/chapitre1.pdf

[20] Web: http://maths.ac-noumea.nc/polyhedr/stuff/AMC/formes_fractales_dans_nature.pdf