N^0 d'ordre : ..../ 2022 / 2023

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ M'HAMED BOUGARA BOUMERDES

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire pour l'obtention du diplôme de Master

en mathématiques

Domaine : Mathématique- Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse Mathématique

THÈME

LES ESTIMATIONS DE COEFFICIENTS POUR CERTAINE CLASSE DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Présenté Par :

DZIRI Asmaa

Soutenu publiquement, le 08 / 07 / 2023 devant le jury composé de :

M.	**A. BOUZEKRI**	Maître de Conférences "B"	U.M.B.B.	Président.
M.	**M. BOULOUDENE**	Maître de Conférences "B"	U.M.B.B.	Examinateur.
M.	**Y. ADJABI**	Maître de Conférences "A"	U.M.B.B.	Encadreur.

Remerciement

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma gratitude

Je voudrais dans un premier temps remercier, mon encadreur de mémoire Dr ***ADJABI Yacine****, Maître de Conférences à l'université de M'hamed Bougara de Boumerdes, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.*

Je remercie également toute l'équipe pédagogique de l'université de boumerdes qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires.

Je tiens à remercier également les membre des jury : Dr ***BOUZEKRI Ali*** *ET Dr* ***BOULOUDENE Mokhtar*** *pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant d'examiner notre travail.*

Un grand merci à mon cher père ***DZIRI Hamid*** *pour la personnalité qui m'a donne, Je remercie ma chére mère* ***ABZAR Razika*** *qui ont toujours été là pour moi.*

Je remercie en particulier ma petit fille ***Mayar*** *et mes frère* ***Sifo****,* ***Abdou****,* ***Billel Youcef****, qui ont toujours été là pour moi, Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.*

À tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

Dédicace

my dad ...... you died before I had the chance to make you proud

les estimations des coefficients pour certaines classes des fonctions analytiques

Résumé

– –

Résumé : Le problème des coefficients est un sujet essentiel de la théorie des fonctions univalentes.

L'objet de ce mémoire est d'étudier les relations entre le comportement dans le cercle unité de certaines familles de fonctions holomorphes à l'origine, et les coefficients de leur développement en série de Taylor au voisinage de l'origine.

Récemment dans [12], D. Raducanu et P. Zaprawa sont données quelques résultats intéressants sur l'estimation de l'expression $H_2(2) = a_2a_4 - a_3^2$ pour la classe des fonctions presque convexes.

Nous présentons des estimations des déterminants de Hankel pour les classes **SQ** et $\mathbf{k}_{\alpha\delta}$ des fonctions analytiques univalentes, c'est-à-dire les sous-classes des analytiques univalentes f qui vérifient, dans le disque unité, l'inégalité $Re(\sqrt{f'(z)}) \leq \frac{1}{2}$ ou $Re\left(e^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{g(z)}\right) > \delta$ avec $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ et $0 < \delta < 1$.

Dans ce mémoire nous avons le but de détail et de développer les deux articles [13] et [6]. .

Mots clés : Fonctions analytiques, fonctions univalentes, les coefficients de de développement du Taylor, déterminants de Hankel, déterminants de Toeplitz, disque unitaire.

– –

Table des matières

Introduction générale

La théorie des fonctions analytiques a des applications dans divers domaines tels que équations aux dérivées partielles, théorie du contrôle,.. ect.

En 1715, Brook Taylor a introduit une extension de l'approximation polynomiale d'une fonction donnée par le théorème de Taylor. Une fonction f est dite analytique en z_0 quand cette série coïncide avec f au voisinage de z_0.

On s'intéressera à la classe $\mathbf{A}$ des fonctions analytiques normalisées dans $\mathbf{D}$, où $\mathbf{D}$ est défini comme disque unité, $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ si $f \in \mathbf{A}$ alors $f(z)$ a la représentation suivante :

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{(F.a.n.)}$$

Schur avait établi qu'il existe une suite d'inégalités rationnelles sur les coefficients du développement d'une fonction en série de Taylor au voisinage de l'origine, constituant une condition nécessaire et suffisante pour que cette fonction soit holomorphe et bornée par 1 en module dans le cercle-unité.

Des études de Borel et de Carison et Polya ont montré que la possibilité de prolonger une fonction a coefficients entiers à l'extérieur du cercle-unité constitue une condition suffisante pour qu'elle soit une fraction rationnelle.

Ce travail de mémoire se concentre sur les coefficients d'une fonction analytique.

La classe des fonctions de Schwarz w, qui sont analytiques en $\mathbf{D}$ et vérifient $|w(z)| < 1$,$w(0) = 0$, est dans $\mathbf{A}$, et ayant la forme de représentation de Taylor.

Pour deux fonctions f et g analytiques dans $\mathbf{D}$, on dit que f est subordonnée à g, notée $f < g$, s'il existe $w \in \mathbf{A}$ tel que

$$f(z) = g(w(z)) \; , \; z \in D.$$

Si, en particulier, g est univalente dans $\mathbf{D}$, alors $f < g$ si et seulement si

$$f(0) = g(0) \qquad et \qquad f(\mathrm{D}) \subset g(\mathrm{D}).$$

Le centre d'intérêt est une classe **SQ** des fonctions analytiques **A** satisfaite des conditions sur la fonction, ainsi que les nombreuses applications qui dérivent de cette étude.

On peut aussi s'intéresser à la classe **B** des fonctions analytiques normalisées par $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ dans $\mathbf{D}$. Si $f \in \mathbf{B}$ alors $f(z)$ à la représentation $(F.a.n.)$.

Nous désignons **S** comme la classe des fonctions univalentes dans **B**. Il existe trois sous-classes principales dans **S** qui incluent les fonctions étoilées, les fonctions convexes et les fonctions presque convexes. On note par $\mathbf{k}_{\alpha\delta}$ la classe des fonctions presque convexes dans **S**.

Ce travail est réparti en trois chapitres, à savoir :

• Le chapitre 1 est constitué de notations, définitions, lemmes et théorèmes que nous utiliserons dans toute la suite du mémoire.

• Au chapitre 2, nous reprenons l'idée de [13] de décrire une nouvelle arithmétique pour laquelle les opérations usuelles telles que la somme, le produit sur les fomules peuvent être effectuées avec une complexité réduite.

Dans la deuxième section, nous obtenons des bornes pour les déterminants de Hankel $H_2(1)$, $H_2(2)$ et les fonctionnelles de Zalcman $a_4 - a_2 a_3$ et $a_5 - a_3^2$. Dans section 3, nous étudions les bornes supérieures de $|S_3|$,$|S_4|$ et$|S_5|$ par les points critiques pour trouvée la borne supérieure.

• Dans le dernier chapitre, nous nous intéressons au cas particulier des déterminants de Hankel, nous déterminons les estimations des déterminants de Toeplitz $T_q(n)$ pour la classe des fonctions presque convexes $\mathbf{k}_{\alpha\delta}$.

• En fin, nous donnons la conclusion du présent travail, ainsi la fonction "Plot" dans logciel Mathematica en annexe.

Chapitre 1

Quelques rappels

Dans ce chapitre, nous mettons en place les differentes définitions et propriétés élémentaires que nous utiliserons par la suite.

1.1 Les fonctions holomorphes

Définition 1.1.1. *Une fonction* $w = f(z)$ *est dite holomorphe en un point donné* z *d'un domaine* $\mathbf{D}$ *si elle est dérivable aussi bien au point* z *lui-même que dans un certain voisinage de ce point.*

Définition 1.1.2. *On dit que la fonction* $w = f(z)$ *est holomorphe dans le domaine* $\mathbf{D}$ *si elle est dérivable en chaque point de ce domaine. Le terme analytique (plus employé par les physiciens que le terme holomorphe) est un synonyme du terme holomorphe.*

1.2 Les fonctions analytiques

On appelle fonctions analytiques (celles qui se développent en série entière au voisinage de chaque point) les fonctions qui, comme les polynômes ou l'exponentielle, peuvent être dérivées ou intégrées de façon purement algébrique.

Définition 1.2.1. *On dit qu'une fonction définie sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{C}$ *est analytique dans* Ω *si elle est* développable *en série entière en tout point de* Ω*. c'est-à-dire si* *pour tout $z_0 \in \Omega$ il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^n$ et un nombre $r > 0$ tels que, pour tout z satisfaisant $|z - z_0| \leq r$,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

On peut remarquer que $a_0 = f(z_0)$.

Définition 1.2.2. *La fonction f est analytique sur Ω si elle est analytique en tout point $z_0 \in \Omega$.*

Théorème 1.2.1. *Toute fonction analytique f est infiniment dérivable au sens des fonctions de variable complexe. Son développement en série entière en un point z_0 est donné par sa série de Taylor*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n .$$

Définition 1.2.3. *Une fonction entière est une fonction qui est analytique en chaque point à distance finie du plan complexe. Puisque la dérivée d'un polynôme existe partout, tout polynôme est une fonction entière*

— Si deux fonctions sont analytiques dans un domaine **D**, leur somme et leur produit sont tous les deux analytiques dans **D**. De même, leur quotient est analytique dans **D** pourvu que le dénominateur ne s'annule en aucun point de **D**.

— Si une fonction f n'est pas analytique en un point z_0 mais est analytique dans tout voisinage de z$_0$, alors z_0 est appelé un point singulier ou une singularité de f.

Exemple 1.2.1. *La fonction exponentielle complexe est analytique sur $\mathbb{C}$. En effet, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$.*

$$\exp(z) = \exp(z_0)\exp(z - z_0) = \exp(z_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n!},$$

et f est analytique en z_0.

Exemple 1.2.2. *La fonction* $z \to \dfrac{1}{z}$ *est analytique sur* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *car, si* $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *et* $|z-a| < |a|$, *alors*

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (z-a)^n .$$

Exemple 1.2.3. $f(z) = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0)$, *dont la dérivée est* $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ *est analytique en tout point* $(z \neq 0)$ *(elle n'est même pas définie en* $z = 0$*). Le point* $z = 0$ *est donc un point singulier.*

Exemple 1.2.4. *La série géométrique* $\Sigma_{n=0}^{\infty} z^n$ *est absolument convergente pour* $|z| < 1$, *divergente pour* $|z| \geq 1$. *Son rayon de convergence est donc* 1 *et elle est divergente en tout point de son cercle de convergence.*

$\Sigma_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$ *converge pour* $|z| < 1$.

1.2.1 Quelques propriétés

— La série obtenue en dérivant $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ terme par terme, c'est à dire $\Sigma_{n=1}^{\infty} n\, a_n \, (z-z_0)^{n-1}$, est *uniformément* et *absolument convergente* dans $D(z_0, r)$ $\forall\, 0 < r < R$ et coïncide avec $f'(z)$.

De même on a $\forall z \in D(z_0, R)$:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n \, n(n-1)\cdots(n-k+1)(z-z_0)^{n-k} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} k!(z-z_0)^{n-k}. \end{aligned}$$

En particulier :

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = a_k.$$

— **(a)** Si les séries

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n \, (z-z_0)^n,$$

et

$$g(z) = \sum_{0}^{\infty} b_n \, (z-z_0)^n.$$

coïncident dans un voisinage de z_0 alors $a_n = b_n \, \forall\, n$.

— **(b)** Si les séries $f(z)$ et $g(z)$ coïncident pour une suite $(w_k)_{k \in \mathbb{C}}$ telle que $w_k \to z_0$, alors $a_n = b_n \quad \forall\, n$.

1.3 La fonction de Koebe

Définition 1.3.1. *On appelle fonction de Koebe, la fonction définie sur* $\mathbf{D}$ *par :*

$$\boxed{\forall z \in \mathbf{D}, \qquad k(z) = \tfrac{z}{(1-z)^2}} \tag{1.1}$$

On peut écrire K *comme la somme d'une série entière sur* $\mathbf{D}$ *:*

$$\forall z \in \mathbf{D}, k(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4....$$

Exemple 1.3.1. *En s'appuyant sur le développement* $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ *qui est valable pour* $|z| < 1$*, pour développer en série la fonction*

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} \quad \textit{dans} \quad 4 < |z+2| < \infty,$$

suivant les puissances de $(z+2)$ *.*

Preuve. On a

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \frac{1}{(z+2)^2} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{4}{z+2}\right)^2}.$$

Comme $\frac{1}{\left(1-\frac{4}{z+2}\right)}$ est analytique, la série $\frac{d}{dz}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{4}{z+2}\right)^n\right)$ converge et on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\left(1-\dfrac{4}{z+2}\right)}\right) &= \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z+2}\right)^n\right) \\
\frac{+\left(\dfrac{4}{z+2}\right)'}{\left(1-\dfrac{4}{z+2}\right)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[n.\left(\frac{4}{z+2}\right)'.\left(\frac{4}{z+2}\right)^{n-1}\right] \\
\frac{1}{\left(1-\dfrac{4}{z+2}\right)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[n.\left(\frac{4}{z+2}\right)^{n-1}\right] \\
\frac{1}{(z+2)^2}\frac{1}{\left(1-\dfrac{4}{z+2}\right)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[n.\frac{4^{n-1}}{(z+2)^{n+1}}\right], \quad \left|\frac{4}{z+2}\right| < 1.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} = \frac{1}{(z+2)^2} + 2\frac{4}{(z+2)^3} + ...$$

■

1.4 Les fonctions étoilées

Définition 1.4.1. *Une fonction $w = f(z)$ qui est régulière et univalente dans le disque $|z| < 1$,$f(0) = 0$, et applique $|z| < 1$ sur un domaine en étoile par rapport à $w = 0$.*

Définition 1.4.2. *Une fonction $f(z)$, $f(z) \neq 0$ dans $0 < |z| < 1$, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, régulière dans $|z| < 1$, est en étoile dans ce disque si et seulement s'il satisfait la condition*

$$\boxed{Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0, \quad |z| < 1}. \tag{1.2}$$

Définition 1.4.3. *La famille des fonctions étoilées dans $|z| < 1$, normalisées pour que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, la classe $\mathbf{S}^*$, qui admet un représentation paramétrique par intégrales de Stieltjes :*

$$f(z) = z \exp\left[-2\int_{-\pi}^{\pi} \log\left(1 - e^{-it}z\right) d\mu(t)\right],$$

où $\mu(t)$ est une fonction non décroissante sur $[-\pi, \pi]$, $\mu(\pi) - \mu(-\pi) = 1$.

Définition 1.4.4. *Une fonction en étoile telle que*

$$\boxed{Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \alpha, \quad |z| < \alpha} \tag{1.3}$$

est appelée une fonction en étoile d'ordre α dans $|z| < 1$.

1.5 Les fonctions convexes sur un intervalle ouvert

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$; rappelons qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in]0,1[: f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Une longue et intéressante discussion de la définition des fonctions convexes se trouve dans [2]. on peut montrer sans difficulté qu'une fonction convexe sur un intervalle ouvert bénéficie de propriétés meilleures que la continuité : elle possède en tout point une dérivée à gauche et une dérivée à droite.

1.6 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 1.6.1. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions. Alors :*

$f \geq g$ si $\forall x \in I : f(x) \geq g(x)$;

$f \geq 0$ si $\forall x \in I : f(x) \geq 0$;

$f > 0$ si $\forall x \in I : f(x) > 0$;

f est dite constante sur I si $\exists a \in \mathbb{R} \forall x \in I f(x) = a$;

f est dite nulle sur I si $\forall x \in I : f(x) = 0$.

Définition 1.6.2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction. On dit que :*

f est majorée sur I si $\exists\ M \in \mathbb{R}, \forall x \in I : f(x) \leq M$;

f est minorée sur I si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I : f(x) > m$;

f est bornée sur I si f est à la fois majorée et minorée sur I, c'est-à-dire si :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I : |f(x)| \leq M.$$

1.6.1 Borne inf, borne sup

Définition 1.6.3. *Si l'ensemble des majorants d'une partie* **A** *de* **R** *admet un plus petit élément M on dit que M est la borne supérieure de* **A** *et on note $M = sup(A)$. Cette borne est alors unique.*

Définition 1.6.4. *Si l'ensemble des minorants d'une partie* **A** *de* **R** *admet un plus grand élément* m*, on dit que* m *est la borne inférieure de* **A** *et on note* $m = inf(A)$*. Cette borne est alors unique*

Exemple 1.6.1. *Si une partie admet un plus grand élément, c'est sa borne supérieure.*

— *si* a *et* b *sont deux réels tels que* $a < b$ *alors* $\sup([a, b[) = b$.

— $\sup(cos(x), x \in [0, \frac{\pi}{2}]) = 1$.

— $\sup(cos(x), x \in]0, \frac{\pi}{2}]) = 1$.

1.6.2 Points critiques

Définition 1.6.5. *Le point* (x, y) *est un point critique de* $y = f(x)$ *si* x *appartient à l'ensemble de définition de la fonction* $f(x)$ *et si*

$$f'(x) = 0.$$

Il existe trois types de points critiques : les minima locaux ,les maxima locaux et les points d'inflexions.

Exemple 1.6.2. *Soit la fonction* $f(x) = x^2 - 2x$ *définie sur l'ensemble des réels* **R**. *La dérivée première de cette fonction*

$$f'(x) = 2x - 2.$$

Puisque cette dérivée est définie pour tout x *,il nous suffit, pour trouver les points critiques, de déterminer les valeurs de* x *pour les quelles elle s'annule.*
On doit donc résoudre l'équation

$$2x - 2 = 0 \textit{ pour } x = 1.$$

Il y a donc un point critique en $x = 1$ *.On peut évaluer la fonction en ce point pour trouver*

$$f(1) = (1)^2 - 2(1) = -1.$$

Donc, $(1, -1)$ *est un point critique de notre fonction.*

1.6.3 Optimum locaux d'une fonction

Définition 1.6.6. *Soit $f(x)$ une fonction. Le point c est appelé maximum local si et seulement s'il existe I, un intervalle ouvert contenant c, tel que $f(c) \leq f(x)$ pour tout x dans I.*

Définition 1.6.7. *Soit $f(x)$ une fonction. Le point c est appelé minimum local si et seulement s'il existe I, un intervalle ouvert contenant c, tel que $f(c) \geq f(x)$ pour tout x dans I.*

1.7 Les transformations de Möbius du plan complexe

On définit la transformation suivante :

Définition 1.7.1. *Les transformations de Möbius conservant l'orientation sont de la forme*

$$\boxed{g(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad avec \qquad ad - bc \neq 0} \tag{1.4}$$

Réciproquement une telle fonction est bien une transformation de Möbius par composition des fonctions suivantes ($g = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$) :

— $f_1(z) = z + \frac{d}{c}$ *(translation)*

— $f_2(z) = \frac{1}{z}$ *(inversion par rapport à la sphère unité puis réflexion par rapport à la droite réelle)*

— $f_3(z) = (-\frac{(ad-bc)}{c^2}).z$*(homothétie)*

— $f_4(z) = \frac{z+a}{c}$ *(translation)*

1.8 Les déterminants de Hankel

Soit **A** la classe de toutes les fonctions analytiques de la forme $(F.a.n.)$ défini sur le disque unité ouvert $\mathbf{D} := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$.

Définition 1.8.1. *Les déterminants de Hankel* $H_q(n)(n = 1, 2....; q = 1, 2....)$ *de la fonction* f *sont définis par*

$$H_q(n) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \vdots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \vdots & a_{n+q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+q-1} & a_{n+q} & \vdots & a_{n+2(q-1)} \end{vmatrix} \quad (a_1 = 1)$$

Les déterminants de Hankel sont utiles, par exemple, pour montrer qu'une fonction de caractéristique bornée en **D**.

1.8.1 Le premièr déterminant de Hankel

Le première déterminant de Hankel est

$$\boxed{H_2(1) = a_3 - a_2^2} \tag{1.5}$$

est le bien connu Fekete-Szegö fonctionnel.

1.8.2 Le deuxième déterminant de Hankel

La deuxième déterminant de Hankel $H_2(2)$ est donné par

$$\boxed{H_2(2) = a_2a_4 - a_3^2} \tag{1.6}$$

Exemple 1.8.1. *Soit* $f(x) = \sin x$*, calculons* H_2^2 *:*

$$H_2^2\,(\sin) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}$$

Dans de nombreuses branches des mathématiques, les matrices et les déterminants de Hankel ont joué un rôle important et ont plusieurs applications.

Il existe plusieurs résultats des déterminants de Hankel dans la littérature. les premières recherches sur les déterminants de Hankel pour de nombreuses classes de fonctions analytiques ont commencé dans les années 1960.

Dans 1966 et 1967, Pommerenke avait étudié les déterminants de Hankel pour la classe des fonctions univalentes. Après cela, de nombreux recherche récents se sont préoccupés du problème de trouver l'estimation des déterminants de Hankel pour diverses sous-classes de fonctions univalentes.

Chacun d'eux devra s'occuper de trouver la borne supérieure de

$$|a_2a_4 - a_3^2|$$

de leurs propres classes.

Quelques des résultats, trouvera aussi la fonctionnelle plus générale

$$|a_2a_4 - \mu a_3^2|$$

avec le vrai pour différentes classes de fonctions.

1.8.3 La conjecture de Zalcman

Définition 1.8.2. *La conjecture de Zalcman est utilisée pour les sous-classe de fonction univalente à coefficients réels f de la forme $(F.a.n.)$ La conjecture de Zalcman dans le cas particulier où $m = n$ (l'ordre de la matrice).Conjecture de Zalcman généralisée : Pour $n, m = 2, 3, ...$*

$$|a_na_m - a_{n+m-1}| \leq (n-1)(m-1).$$

1.8.4 Le déterminant Toeplitz

Définition 1.8.3. *En* 1911, *Otto Toeplitz introduit les matrices de Toeplitz après l'étude de formes quadratiques* $\sum \varphi_{i,j} x_i y_j$ *pour lesquelles les coefficients de ces formes vérifient la propriété particulière* $\varphi_{i,j} = \varphi_{i-,j}$ *et ainsi obtient des matrices associées* $T = (\varphi_{i,j})_{i,j}$ *à diagonales et sur/sous-diagonales constantes que l'on appelle à présent matrices de Toeplitz. Le déterminant Toeplitz symétrique* $T_q(n)$ *a été introduit récemment pour les fonctions analytiques de la forme (F.a.n.), définies comme suit*

$$T_q(n) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \vdots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & a_n & \vdots & a_{n+q-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+q-1} & a_{n+q-2} & \vdots & a_n \end{vmatrix}$$

où $n, q = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ *et* $a_1 = 1$. *En particulier,*

$$T_2(2) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} \quad , T_2(3) = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ a_4 & a_3 \end{vmatrix} \quad ,$$

$$T_3(1) = \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & 1 & a_2 \\ a_3 & a_2 & 1 \end{vmatrix} \quad , T_3(2) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_3 & a_2 \end{vmatrix} \quad ,$$

Quand on calcule numériquement des solutions approchées d'équations aux dérivées partielles elliptiques ou paraboliques par des méthodes de différences finies, on doit considérer des matrices tridiagonales (pour les problèmes à une dimension) ou tridiagonales par blocs (pour les dimensions supérieures). Pour développer et étudier certains préconditionnements pour les méthodes itératives, il est utile de connaitre les propriètés de l'inverse comme, par exemple, la décroissance des éléments de l'inverse sur une ligne ou une colonne. On ne peut obtenir des formules explicites pour *les éléments de l'inverse que pour des matrices particulières comme par exemple les matrices tridiagonales de Toeplitz qui correspondent à des équations aux dérivées partielles elliptiques à coefficients constants ou bien, autre exemple, les matrices tridiagonales par blocs intervenant dans les problèmes elliptiques bidimensionnels séparables.*

1.8.5 La relation entre déterminants de Toplitz et déterminants de Hankel

Les déterminants de Toeplitz sont étroitement liés aux déterminants de Hankel. Avec l'inverse diagonale, les matrices de Hankel ont des entrées constantes, tandis que les matrices de Toeplitz ont des entrées constantes avec la diagonale.

Les déterminants de Hankel sont liés aux déterminants de Toeplitz

$$T_n^m = \left|(a_{m+i-j})_{i,j=1,n}\right|$$

$$H_n^m = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} T_{n+1}^{m+n}; T_n^m = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} H_{n-1}^{m-(n-1)}.$$

Ces derniéres relations s'obtiennent par une permutation des colonnes.

1.9 La dérivée Schwarzienne

En 1869, H.A. Schwarz a introduit un outil diérentiel, appelé aujourd'hui la dérivée schwarzienne, dans un travail sur les représentations conformes. Cette notion joue un rôle décisif dans des problèmes variés : par exemple, en analyse complexe, dans la théorie invariante des équations diérentielles et dans la caractérisation des fonctions analytiques univalentes.

En 1968, D. Springer a exploité pour la première fois ce concept dans la théorie des bifurcations des orbites périodiques ; la dérivée schwarzienne s'avère en effet très efficace pour la compréhension des modèles dynamiques non linéaires : nous consacrerons ultérieurement un article a ce sujet passionnant.

Définition 1.9.1. *Soit f une fonction numérique réelle qui sera toujours supposée au moins trois fois continûment dérivable sur un intervalle ouvert I et de dérivée non identiquement nulle sur tout sous-intervalle ouvert de I. La dérivée schwarzienne de f en un point x de I où $f'(x) \neq 0$ est notée $Sf(x)$ et définie par*

$$Sf = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 \tag{1.7}$$

de façon équivalente, on a encore

$$Sf = (\log f'')' - \frac{1}{2}\left((\log f')'\right)^2$$

Exemple 1.9.1. *on vérifiera aisèment les formules suivantes (où a, b et c désignent des constantes, avec $a \neq 0$) données bien entendu sous réserve d'existence.*

$f(x)$	$Sf(x)$
$ax+b$	0
$\frac{1}{ax+b}$	0
$\ln x$	$\frac{1}{2x^2}$
e^x	$\frac{-1}{2}$
$\sin x$	$-1-\frac{3}{2}\tan^2 x$
$\cos x$	$-1-\frac{3}{2}\cot^2 x$
ax^2+bx+c	$\frac{-2}{(1+x^2)^2}$

1.9.1 Dérivée schwarzienne des fonctions composées

Les règles de calcul de la dérivée schwarzienne diérent fortement des règles habituelles de dérivation classique. Ainsi, pour une constante a non nulle, on a visiblement

$$S[af(x)] = S[f(x)]$$

en particulier, la dérivée schwarzienne de l'opposé d'une fonction f coïncide avec la dérivée schwarzienne de f. Plus généralement, on dispose de cette loi de dérivation schwarzienne pour les fonctions composées

$$S(f \circ g)(x) = (g'(x))^2 Sf(g(x)) + Sg(x)$$

En effet, on obtient successivement par la règle classique de dérivation des fonctions composées :

$$\begin{aligned}
(f\circ g)'(x) &= f'(g(x))\,g'(x)\\
(f\circ g)''(x) &= f''(g(x))\,(g'(x))^2 + f'(g(x))\,g''(x)\\
(f\circ g)'''(x) &= f'''(g(x))\,(g'(x))^3 + 3f''(g(x))\,g''(x)\,g'(x) + f'(g(x))\,g'''(x)
\end{aligned}$$

d'où, en prenant les dérivées de f en $g(x)$ et celles de g en x :

$$\begin{aligned}
S(f\circ g)(x) &= \frac{f'''(g')^3 + 3f''g''g' + f'g'''}{f'g'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(g')^2 + f'g''}{f'g'}\right)^2\\
&= \frac{f'''}{f'}(g')^2 + 3\frac{f''}{f'}g'' + \frac{g'''}{g'} - \frac{3}{2}\frac{f''^2g'^4 + f'^2g''^2 + f''g''g'^2}{f'^2g'^2}\\
&= \frac{f'''}{f'}(g')^2 + \frac{g'''}{g'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 g'^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2\\
&= g'^2 Sf(g(x)) + Sg(x)\,.
\end{aligned}$$

Définition 1.9.2. *Les dérivés Schwarziennes d'ordre supérieur sont définis inductivement comme suit. Pour $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$*

$$\boxed{\sigma_{n+1}(f) = \sigma_n(f') - (n-1)\tfrac{f''}{f'}\sigma_n(f)}. \tag{1.8}$$

Observons les trois faits suivants :

$$\sigma_3(f) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}(\frac{f''}{f'})^2,$$

$$\sigma_4(f) = \frac{f''''}{f'} - 6\frac{f'''f''}{f'^2} + 6(\frac{f''}{f'})^3$$

et

$$\sigma_5(f) = \frac{f'''''}{f'} - 10\frac{f''''f''}{f'^2} - 6(\frac{f'''}{f'}) + 48\frac{f'''f''^2}{f'^3} + 36(\frac{f''}{f'})^4.$$

Pour toutes les transformations de Mobius g*, les éléments suivants propriété d'invariance vaut :*

$$\boxed{\sigma_n(f \circ \mathrm{g}) = \sigma_n(f) \circ \mathrm{g}.(\mathrm{g}')^{\mathrm{n}-1}} \tag{1.9}$$

1.9.2 Fonctions homographiques

Parmi toutes les propriétés de la dérivée schwarzienne, une des plus importantes est assurément la caractérisation de toute fonction homographique (c'est-à-dire le quotient de deux binômes du premier degré). De fait, si

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

on peut écrire

$$f(x) = \frac{1}{\alpha x + \beta} + \gamma$$

pour des constantes α, β et γ adéquates, d'où, en vertu de ce qui précéde,

$$Sf(x) = 0$$

Ce qui est plus remarquable est le fait que la réciproque est aussi valable, d'où les fonctions de dérivée schwarzienne nulle sont exactement les fonctions homographiques.

1.9.3 Principe Schwarzienne du min, max

La connaissance de la dérivée schwarzienne de f permet d'obtenir des renseignements utiles sur les extrema locaux eventuels de f'.

1.10 Inégalités triangulaires

Définition 1.10.1. *Si a et b sont deux nombres réels, alors :*

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$||a| - |b|| \leq |a-b|$$

où $|.|$ désigne la valeur absolue .

Cas d'égalité : si a et b sont deux nombres réels tels que $|a+b| = |a| + |b|$ ou $||a| - |b|| = |a-b|$,alors $|a|$ et $|b|$ sont même signe.

Chapitre 2

Sur les estimations des coefficients pour une certaine classe de fonctions analytiques SQ

2.1 Introduction

Soient $\mathbf{A}$ la famille de toutes les fonctions analytiques f de la forme (*F.a.n.*), défini sur le disque d'unité ouvert $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ et les fonctions de Schwarz w, qui sont analytiques dans D vérifient $|w(z)| < 1, w(0) = 0$. Si $w \in \mathbf{A}$ alors son développement en série de Taylor est donné par

$$\boxed{w(z) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n} \tag{2.1}$$

Pour deux fonctions f et g analytiques dans D, on dit que f est subordonnée à g, notée $f < g$, s'il existe $w \in \mathbf{A}$ tel que

$$f(z) = g(w(z)) \text{ , } z \in D$$

En particulier, si g est univalent dans D, alors $f < g$ si et seulement si

$$f(0) = g(0) \qquad et \qquad f(D) \subset g(D).$$

Le permier déterminant de Hankel

$$H_2(1) = a_3 - a_2^2$$

est bien connue la fonctionnelle de Fekete-Szego qui est aussi un cas particulier de la fonctionnelle de Zalcman

$$a_{n+m-1} - a_n a_m$$

Le deuxième déterminant de Hankel est donné par

$$H_2(2) = a_2 a_4 - a_3^2$$

Soit $S_n = \sigma_n(f)(0)$ $f \in \mathbf{A}$. Si est de la forme (F.a.n.), alors

$$\boxed{\begin{array}{l} S_3 = 6(a_3 - a_2^2) \\ S_4 = 24(a_4 - 3a_2a_3 + 2a_2^3) \\ S_5 = 24(5a_5 - 20a_2a_4 - 9a_3^2 + 48a_3a_2^2 - 24a_2^4) \end{array}} \tag{2.2}$$

Rapplons que SQ est la classe des fonctions analytiques f satisfaisant

$$\boxed{Re\sqrt{f'(z)} > \tfrac{1}{2} \quad , z \in D} \tag{2.3}$$

ou en terme de subordination

$$\boxed{f'(z) < \tfrac{1}{(1-z)^2} \quad , z \in D} \tag{2.4}$$

Les lemmes suivants pour les fonctions de Schwarz seront utilisés.

Lemme 2.1.1. *Soit* $w(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ *une fonction de Schwarz. Alors, pour tout nombres réels* α, β *tels que*

$$(\alpha, \beta) \in \left\{ |\alpha| \leq \frac{1}{2}, -1 \leq \beta \leq 1 \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2} \leq |\alpha| \leq 2, \frac{4}{27}(|\alpha| + 1)^3 - (|\alpha| + 1) \leq \beta \leq 1 \right\}$$

l'estimation suivante est valable

$$|c_3 + \alpha c_1 c_2 + \beta c_1^3| \leq 1.$$

Lemme 2.1.2. *Soit* $w(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ *une fonction de la classe* **A**. *Alors, Les estimations suivantes sont vérifiées*

$$|c_1| \leq 1, |c_2| \leq 1 - |c_1|^2$$

$$|c_3| \leq 1 - |c_1|^2 - \tfrac{|c_2|^2}{1+|c_1|}$$

$$|c_4| \leq 1 - |c_1|^2 - |c_2|^2.$$

Lemme 2.1.3. *Soit* $w(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ *une fonction de Schwarz. Ensuite, pour tout nombre complexe* λ, *les estimations suivantes sont valables*

$$|c_2 + \lambda c_1^2| \leq \max 1, |\lambda| \tag{2.5}$$

$$|c_4 + (1 + \lambda)c_1 c_3 + c_2^2 + (1 + 2\lambda)c_1^2 c_2 + \lambda c_1^4| \leq \max 1, |\lambda|.$$

(2.6)

2.2 Estimations des coefficients

Dans cette section, nous obtenons les bornes des cinq premiers coefficients de développement en série de Taylor au voisinage de l'origine pour les fonctions dans la classe SQ.

Théorème 2.1

Soit $f \in SQ$ de la forme (F.a.n.). Alors les cinq premiers coefficients de développement en série de Taylor de f sont bornés par un.

Preuve. Supposons que f dans SQ. Alors il existe une fonction de Schwarz w de la forme (2.1) tel que

$$\boxed{f'(z) = \frac{1}{(1-w(z))^2}, z \in D} \tag{2.7}$$

En remplacant les séries (F.a.n.) et (2.1) dans (2.7). Dans ce cas le coefficient $a_n, n > 1$ est déterminé en annulant le coefficient de z^n, on obtient pour $n > 1$

$$a_2 = c_1$$

$$a_3 = \frac{1}{3}(2c_2 + 3c_1^2)$$

$$a_4 = \frac{1}{2}(c_3 + 3c_1c_2 + 2c_1^3) \tag{2.8}$$

$$a_5 = \frac{1}{5}(2c_4 + 6c_1c_3 + 3c_2^2 + 12c_1^2c_2 + 5c_1^5)$$

Il est évident que $|a_2| \leq 1$. De

$$a_3 = \tfrac{2}{3}(c_2 - \tfrac{3}{2}c_1^2)$$

La borne $|a_3| \leq 1$ découle facilement de (2.5) avec $\lambda = \frac{3}{2}$. Pour le quatrième coefficient nous avons :

$$\begin{aligned}|a_4| &= \frac{1}{2}|(c_3 + 2c_1c_2 + c_1^3) + (c_1c_2 + c_1^3)| \\ &\leq \frac{1}{2}(|c_3 + 2c_1c_2 + c_1^3| + |c_1c_2 + c_1^3|).\end{aligned}$$

L'inégalité $|(c_3 + 2c_1c_2 + c_1^3)| \leq 1$ découle du lemme (2.1.1) avec $\alpha = 2$ et $\beta = 1$. En appliquant (2.5) avec $\lambda = 1$, on obtient

$$|c_1c_2 + c_1^3| = |c_1||c_2 + c_1^2| \leq 1$$

Enfin, nous avons $|a_4| \leq 1$. En suite

$$\begin{aligned}|a_5| &= \frac{2}{5}\left|(c_4 + 3c_1c_3 + c_2^2 + 5c_1^2c_2 + 2c_1^4) + \frac{1}{2}(c_2^2 + 2c_1^2c_2 + c_1^4)\right| \\ &\leq \frac{2}{5}|c_4 + 3c_1c_3 + c_2^2 + 5c_1^2c_2 + 2c_1^4| + \frac{1}{5}|c_2^2 + 2c_1^2c_2 + c_1^4|\end{aligned}$$

De (2.6) avec $\lambda = 2$, on obtient

$$|c_4 + 3c_1c_3 + c_2^2 + 5c_1^2c_2 + 2c_1^4| \leq 2$$

De l'inégalité triangulaire et l'inégalité de $|c_2|$ dans Lemme (2.1.2), on a

$$\begin{aligned}|c_2^2 + 2c_1^2c_2 + c_1^4| &\leq |c_2|^2 + 2|c_1|^2|c_2| + |c_1|^4 \\ &\leq (1 - |c_1|)^2 + 2|c_1|^2(1 - |c_1|^2) + |c_1|^4 \\ &= 1\end{aligned}$$

et donc $|a_5| \leq 1$.

■

2.3 Estimations des déterminants de Hankel et la fonctionnelle de Zalcman

Dans cette section, nous obtenons des bornes pour les déterminants de Hankel $H_2(1)$, $H_2(2)$ et les fonctionnelles de Zalcman $a_4 - a_2a_3$ et $a_5 - a_3^2$.

sont obtenus :

Théorème 2.2

Soit $f \in \mathbf{SQ}$ de la forme (F.a.n.). Alors

$$|H_2(1)| \leq \tfrac{2}{3} \quad \text{et} \quad |H_2(2)| \leq \tfrac{4}{9}.$$

Preuve. Supposons que $f \in \mathbf{SQ}$ de la forme (F.a.n.). La première inégalité :

$$\begin{aligned} |H_2(1)| &= |a_3 - a_2^2| \\ &= \frac{2}{3}|c_2| \\ &\leq \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

En utilisant (2.8), on a

$$\begin{aligned} |H_2(2)| &= |a_2a_4 - a_3^2| \\ &= \frac{1}{18}|9c_1c_3 + 3c_1^2c_2 - 8c_2^2|. \end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire, on obtient

$$|H_2(2)| \leq \frac{1}{18}(9|c_1||c_3| + 3|c_1|^2|c_2| + 8|c_2|^2).$$

En substituant les inégalités pour $|c_2|$ et $|c_3|$ dans le Lemme (2.1.2), on obtient

$$\begin{aligned}
|H_2(2)| &\leq \frac{1}{18}\left[(9|c_1|(1-|c_1|^2 - \frac{|c_2|^2}{1+|c_1|}) + 3|c_1|^2|c_2| + 8|c_2|^2\right] \\
&= \frac{1}{18}\left[9|c_1|(1-|c_1|^2) + |c_2|^2\frac{8-|c_1|}{1+|c_1|} + 3|c_1|^2|c_2|\right] \\
&\leq \frac{1}{18}\left[9|c_1|(1-|c_1|^2) + (1-|c_1|^2)^2\frac{8-|c_1|}{1+|c_1|} + 3|c_1|^2(1-|c_1|^2)\right] \\
&= \frac{2}{9}(-|c_1|^4 - |c_1|^2 + 2) \\
&\leq \frac{4}{9}.
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.3

Soit $f \in \mathbf{SQ}$ de la forme (F.a.n.). Alors les inégalités suivantes sont vraies

$$|a_4 - a_2a_3| \leq \tfrac{8\sqrt{3}}{27} \qquad \text{et} \qquad |a_5 - a_3^2| \leq 0.7789...$$

Preuve. Supposons que $f \in \mathbf{SQ}$. De (2.8), on obtient

$$|a_4 - a_2a_3| = \frac{1}{6}|3c_3 + 5c_1c_2|$$

Alors, par inégalité triangulaire, on a

$$|a_4 - a_2a_3| = \frac{1}{6}(3|c_3| + 5|c_1||c_2|).$$

Par lemme (2.1.2), on obtient

$$|a_4 - a_2a_3| = \frac{1}{6}\left[3\left(1 - |c_1|^2 - \frac{|c_2|^2}{1+|c_1|}\right) + 5|c_1||c_2|\right]$$

d'où

$$\boxed{|a_4 - a_2a_3| = \tfrac{1}{6}\left(3 - 3|c_1|^2 - \tfrac{3|c_2|^2}{1+|c_1|} + 5|c_1||c_2|\right).} \tag{2.9}$$

On note $|c_1| = x$ et $|c_2| = y$ dans (2.9), on obtient

$$|a_4 - a_2a_3| \leq g(x,y)$$

où

$$g(x,y) = \frac{1}{6}\left(3 - 3x^2 - \frac{3y^2}{1+x} + 5xy\right).$$

De $|c_2| \leq 1 - |c_1|^2$, le domaine de définition de (x,y) coïncide avec

$$D_g = \left\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2\right\}$$

Par conséquent, nous devons trouver la valeur maximale de $g(x,y)$ dans la région D_g. Les points critiques de $g(x,y)$, donnés par le système

$$\begin{cases} -6x + \frac{3y^2}{(1+x)^2} + 5y = 0 \\ \frac{-6y}{(1+x)} + 5x = 0 \end{cases}$$

sont $(0,0)$ et $(\frac{22}{75}, \frac{1067}{3375})$. Des calculs élémentaires montrent que $(0,0)$ est un maximum point et

$$g(0,0) = \tfrac{1}{2}.$$

Sur le bord de D_g on a

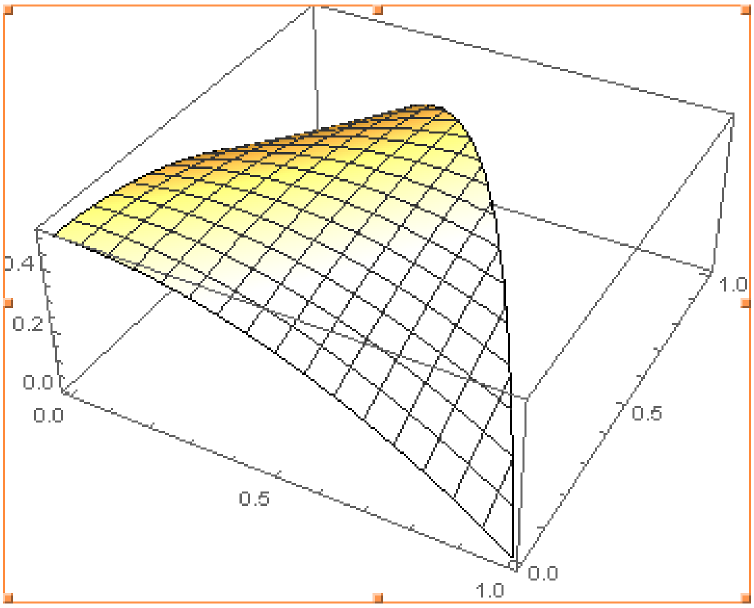

FIGURE 2.1 – le graphe du la fonction g(x,y)

$$g(x,0) = \frac{1}{6}(3-3x^2) = \frac{1}{2}(1-x^2) \leq \frac{1}{2}$$
$$g(0,y) = \frac{1}{6}(3-3y^2) = \frac{1}{2}(1-y^2) \leq \frac{1}{2}$$
$$g(x,1-x^2) = \frac{4}{3}(x-x^3) \leq \frac{8\sqrt{3}}{27} = 0,5132.... \quad pour \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

De toutes ces inégalités, on obtient

$$g(x,y) \leq \tfrac{8\sqrt{3}}{27} \quad \text{pour tous} \quad (x,y) \in D_g$$

En suite, la fonction de Schwarz est de la forme

$$w(z) = z\tfrac{z+c_1}{1+c_1 z} = c_1 z + (1-c_1^2)z^2 - c_1(1-c_1^2)z^3 + ...,$$

où

$$c_1 = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \text{ ,} c_2 = \tfrac{2}{3} \text{ et } |c_3| = \tfrac{2}{3\sqrt{3}}.$$

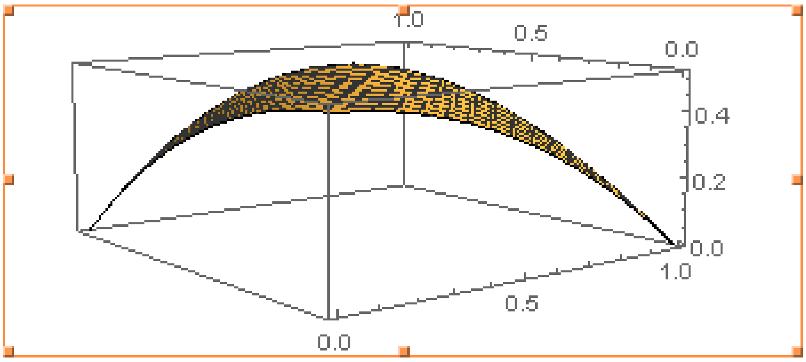

FIGURE 2.2 – la valeur maximale du la fonction g(x,y)

Maintenant, nous continuons avec l'estimation de $\left|a_5 - a_3^2\right|$. De (2.8), on obtient

$$|a_5 - a_3^2| = \frac{1}{5}\left|2c_4 + 6c_1c_3 + \frac{16}{3}c_1^2c_2 + \frac{7}{9}c_2^2\right|$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et les inégalités pour $\left|c_4\right|,\left|c_3\right|$ dans le lemme (2.1.2), on obtient

$$\boxed{\begin{aligned} |a_5 - a_3^2| &\leq \frac{1}{5}\left[2(1-|c_1|^2-|c_2|^2) + 6|c_1|\left(1-|c_1|^2-\frac{|c_2|^2}{1+|c_1|}\right) + \frac{16}{3}|c_1|^2|c_2| + \frac{7}{9}|c_2|^2\right] \\ &= \frac{1}{5}\left[2+6|c_1|-2|c_1|^2-6|c_1|^3-\frac{6|c_1||c_2|^2}{1+|c_1|}-\frac{11}{9}|c_2|^2+\frac{16}{3}|c_1|^2|c_2|\right] \end{aligned}} \tag{2.10}$$

On pose $|c_1| = x$ et $|c_2| = y$ dans (2.10) on a alors $|a_5 - a_3^2| \leq h(x,y)$, où

$$h(x,y) = \frac{1}{5}\left(2+6x-2x^2-6x^3-\frac{6xy^2}{1+x}-\frac{11}{9}y^2+\frac{16}{3}x^2y\right)$$

En tenant compte de l'inégalité $\left|c_2\right| \leq 1 - \left|c_1\right|^2$, le domaine de définition de (x,y) coïncide avec

$$D_h = \left\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x^2\right\}$$

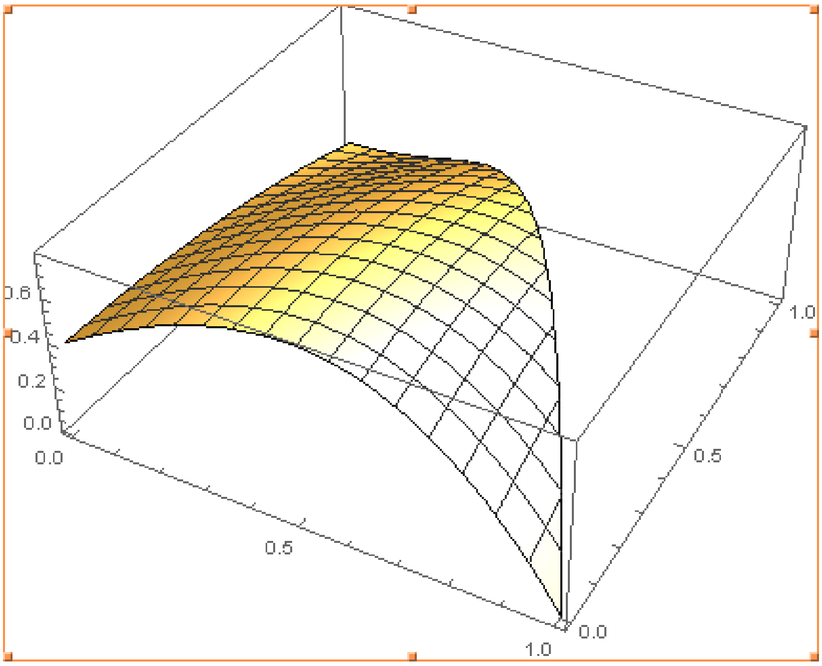

FIGURE 2.3 – le graphe du la fonction h(x,y)

Ainsi, nous devons trouver la valeur maximale de $h(x, y)$ sur la région D_h. La solution du système

$$\begin{cases} 6 - 4x - 18x^2 - \frac{6y^2}{(1+x)^2} + \frac{32}{3}xy = 0 \\ \frac{-12xy}{(1+x)} - \frac{22}{9}y + \frac{16}{3}x^2 = 0 \end{cases}$$

sont les points critiques de $h(x, y)$. Le maximum de $h(x, y)$ est atteint en

$$(0.5285..., 0.2259...)$$

et sa valeur est

$$h(0.5285..., 0.2259...) = 0.7789...$$

Sur le bord de la région D_h nous ont

$$h(x,0) = \frac{1}{5}(2 - 2x^2 - 6x^3 + 6x) \le \frac{32(10+7\sqrt{7})}{1215} = 0,7511...$$
$$h(0,y) = \frac{1}{5}(2 - \frac{11}{9}y^2) \le \frac{2}{5} = 0.4$$
$$h(x,1-x^2) = \frac{1}{45}(7 + 106x^2 - 113x^4) \le \frac{80}{113} = 0,7079...$$

Il s'ensuit que $h(x,y) \le 0.7789...$ pour$(x,y) \in D_h$, qui est la borne souhaitée pour $|a_5 - a_3^2|$ ■

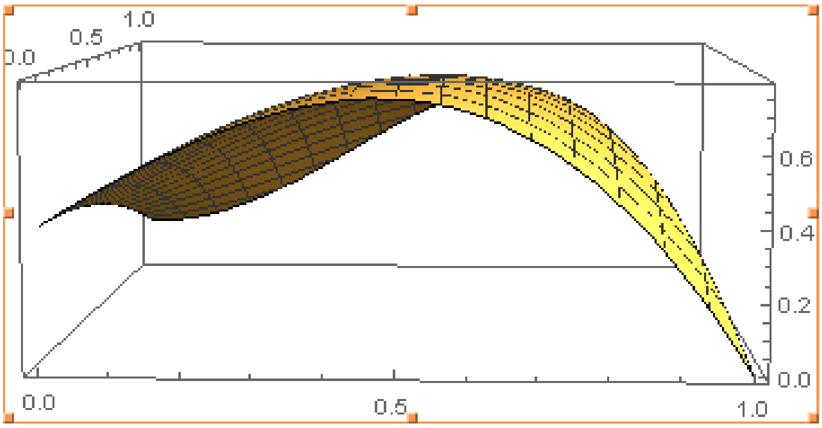

FIGURE 2.4 – la valeur maximale du la fonction h(x,y)

2.4 Estimations des dérivées Schwarziennes d'ordre supérieur

Dans cette section, nous étudions les bornes supérieures de $|S_3|$,$|S_4|$ et$|S_5|$, où S_3, S_4, S_5 sont donnés par (2.2).

Théorème 2.4

Soit $f \in \mathbf{SQ}$ donné par (F.a.n.). Alors les estimations suivantes satisfaisantes

$$|S_3| \leq 4,\ |S_4| \leq 12, \text{ et } |S_5| \leq 73.176....$$

Preuve. Soit $f \in \mathbf{SQ}$, D'après (2.8), on a

$$\begin{aligned} |S_3| &= 6|a_3 - a_2^2| \\ &= 4|c_2| \leq 4. \end{aligned}$$

Pour $c_2 = 1$ et $c_k = 0$, $c_k \neq 2$, on obtient $a_2 = 0$ et $a_3 = \frac{2}{3}$. Cela montre que l'égalité est vraie pour la fonction donnée par (2.7) avec égalité $w(z) = z^2$. Alors

$$\begin{aligned} |S_4| &= 24|a_4 - 3a_2a_3 + 2a_2^3| \\ &= 12|c_3 - c_1c_2| \end{aligned}$$

L'inégalité$|c_3 - c_1c_2| \leq 1$ découle du lemme (2.1.1) avec $\alpha = -1$ et $\beta = 0$.

Par conséquent, $|S_4| \leq 12$ Si $c_3 = 1$ et $c_k = 0$, $k \neq 3$, alors $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ et $a_4 = \frac{1}{2}$. Cela signifie que l'égalité est vraie pour la fonction donnée par (2.7) avec $w(z) = z^3$.

Nous continuons avec l'estimation pour $|S_5|$. De (2.8), on obtient

$$|S_5| = 24|2c_4 - 4c_1c_3 - c_2^2 - c_1^2c_2|$$

Par inégalité triangulaire, on a

$$|S_5| \leq 24(2|c_1| - 4|c_1||c_3| - |c_2|^2 - |c_1|^2|c_2|)$$

En utilisant les inégalités pour $|c_3|$ et $|c_4|$ dans le Lemme (2.1.2), on obtient

$$\boxed{\begin{aligned} |S_5| &\leq 24\left[2(1-|c_1|^2-|c_2|^2)+4|c_1|(1-|c_1|^2-\frac{|c_1|^2}{1+|c_1|})+|c_2|^2+|c_1|^2|c_2|\right] \\ &= 24\left(2-2|c_1|^2+4|c_1|-4|c_1|^3-|c_2|^2-\frac{4|c_1||c_2|^2}{1+|c_1|}+2|c_1|^2|c_2|\right) \end{aligned}} \tag{2.11}$$

Si, on remplace $|c_1| = x$ et $|c_2| = y$ dans (2.11), alors $|S_5| \leq k(x, y)$ où

$$k(x,y) = 24\left(2 - 4x^3 - 2x^2 + 4x - y^2 - \tfrac{4xy^2}{1+x} + 2x^2y\right)$$

De $|c_1| \leq 1 - |c_1|^2$, le domaine de définition de (x, y) coïncide avec

$$D_k = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$$

Afin d'obtenir la borne supérieure de $|S_5|$, il faut trouver la valeur maximale de $k(x, y)$ sur la région D_k. Les points critiques de $k(x, y)$ sont la solution du système

$$\begin{cases} 1 - x - 3x^2 - \frac{y^2}{(1+x)^2} + xy = 0 \\ \frac{-4xy}{(1+x)} - y + x^2 = 0 \end{cases}$$

La valeur maximale de $k(x, y)$ est atteinte en

$$(0.44402..., 0.088414...)$$

Dans ce cas :

$$k(0.44402..., 0.088414...) = 73.176...$$

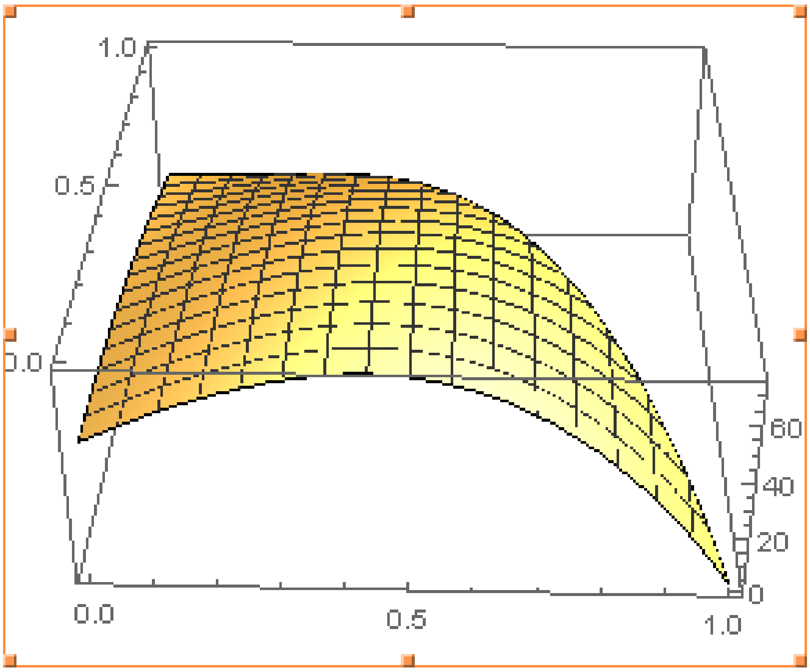

FIGURE 2.5 – le graphe du la fonction k(x,y)

Ensuite, nous vérifions le comportement de la fonction $k(x, y)$ sur le bord de D_k :

$$k(x,0) = 24(2 - 2x^2 - 4x^3 + 4x) \leq \frac{8(35 + 13\sqrt{13})}{9} = 72.7752...$$

$$k(0,y) = 24(2 - y^2) \leq 48$$

$$k(x, 1 - x^2) = 24(1 + 6x^2 - 7x^4) \leq \frac{384}{7} = 54.8571...$$

Compte tenu des inégalités ci-dessus, on obtient $k(x, y) \leq 73, 176...$

■

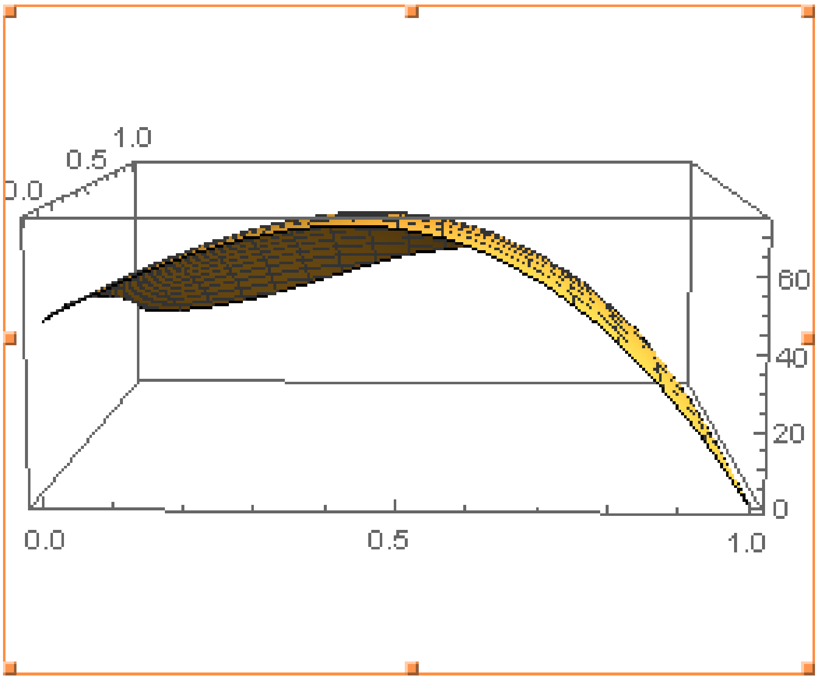

FIGURE 2.6 – la valeur maximale du la fonction k(x,y)

Chapitre 3

Estimations des coefficients par le déterminant de Toeplitz pour une certaine classe des fonctions presque convexes $\mathbf{k}_{\alpha\delta}$

3.1 Introduction

Soit $\mathbf{B}$ la classe des fonctions analytiques normalisées par $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ dans $\mathbf{D}$. Si $f \in \mathbf{B}$ alors $f(z)$ est de la forme $(F.a.n.)$

Nous désignons $\mathbf{S}$ comme la classe des fonctions univalentes dans $\mathbf{B}$. Il existe trois sous-classes principales dans $\mathbf{S}$ qui incluent les fonctions étoilées, les fonctions convexes et les fonctions presque convexes.

Définition 3.1.1. *Soit* $\mathbf{S}^*$ *la classe des fonctions étoilées dans* $\mathbf{S}$*. Une fonction* $f \in \mathbf{B}$ *est une fonction étoilée, si elle satisfait la condition suivante,*

$$\boxed{Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0, pour z \in \mathbf{D}.} \tag{3.1}$$

Définition 3.1.2. *Une fonction $f \in \mathbf{B}$ est une fonction convexe, si elle satisfait la condition suivante,*

$$\boxed{Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0, pour z \in \mathbf{D}.} \tag{3.2}$$

On note **CV** pour la classe des fonctions convexes dans **D** .

Définition 3.1.3. *Soit une fonction $f \in \mathbf{S}$, s'il existe un nombre réel α, où $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ et une fonction $g(z)$ convexe qui satisfait la condition,*

$$\boxed{Re\left(e^{i\alpha}\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > 0, pour z \in \mathbf{D}.} \tag{3.3}$$

Alors la fonction f est une fonction quasi-convexe.

Définition 3.1.4. *Soit une fonction $h(z) \in \mathbf{S}^*$ alors $h(z) = zg'(z)$ où $g(z) \in \mathbf{CV}$. Par conséquent, la condition (3.3) peut également s'écrire sous la forme*

$$\boxed{Re\left(e^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{h(z)}\right) > 0, pour z \in \mathbf{D}.} \tag{3.4}$$

Car toutes les fonctions étoilées et convexes sont des fonctions presque convexes.

Ceux-ci peuvent être résumé par l'inclusion propre .

$$\mathbf{CV} \subseteq \mathbf{S}^* \subseteq \mathbf{k} \subseteq \mathbf{S}$$

La classe des fonctions presque convexes est notée **K**.

Définition 3.1.5. *La fonction $f \in \mathbf{B}$ est dite presque convexe si la fonction étoilée $g \in \mathbf{S}^*$ existe, tel que*

$$\boxed{Re\left(e^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{g(z)}\right) > \delta, pour z \in \mathbf{D}.} \tag{3.5}$$

où $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$, *et* $\cos(\alpha) > \delta$.

Cette classe est notée $\mathbf{k}_{\alpha\delta}$.

3.2 Estimations des déterminants de Toeplitz

Soit P la classe de fonctions analytiques p dans le disque unité $\mathbf{D}$, de la forme suivante :

$$\boxed{p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n,} \tag{3.6}$$

tel que $Re\ (p(z)) > 0$ dans le disque de l'unité $\mathbf{D}$. Ces fonctions sont parfois appelées les fonctions de Carathéodory .

Dans cette section, nous supposons que $f \in \mathbf{k}_{\alpha\delta}$ et nous nous intéressons comme dans le précédent chapitre à l'éstimation des coefficients de la fonction f.

Nous avons besoin de quelques résultats préliminaires pour les fonctions dans P.

Lemme 3.2.1. *Pour une fonction* $p \in P$ *de la forme (3.6), l'inégalité* $|c_n| \leq 2$ *pour chaque* $n \geq 1$. *L'égalité est vérifiée par la fonction*

$$p(z) = \frac{(1+z)}{(1-z)}.$$

Lemme 3.2.2. *Soit $p \in P$ de la forme (3.6) et $\mu \in \mathbf{C}$. Alors*

$$|c_n - \mu c_k c_{n-k}| \leq 2 \max\{1, |2\mu - 1|\} \quad \textit{pour} \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Si $|2\mu - 1| \geq 1$ alors l'inégalité est vérifiée par la fonction $p(z) = \frac{(1+z)}{(1-z)}$.
Si $|2\mu - 1| \leq 1$ alors l'inégalité est vérifiée par $p(z) = \frac{(1+z^n)}{(1-z^n)}$.

Lemme 3.2.3. *Soit $g \in \mathbf{S}^*$ sous la forme*

$$\boxed{g(z) = z + \textstyle\sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n} \tag{3.7}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$: on a

$$|b_3 - \lambda b_2^2| \leq \max\{1, |3 - 4\lambda|\}.$$

L'inégalité est vérifiée pour la fonction de Koebe de la forme (1.1) *si*

$$|3 - 4\lambda| \geq 1$$

et pour

$$(k(z^2))^2.$$

si

$$|3 - 4\lambda| < 1.$$

Lemme 3.2.4. *Soit $g \in \mathbf{S}^*$ sous la forme (3.7) Alors*

$$|\lambda b_n b_m - b_{n+m-1}| < \lambda nm - (n+m-1) pour \lambda \geq \tfrac{2(n+m-1)}{nm}.$$

où $n, m = 2, 3, \ldots$. L'inégalité est vérifiée pour la fonction de Koebe.

Lemme 3.2.5. *Soit $g \in \mathbf{S}^*$ sous la forme (3.7) Alors*

$$|b_2 b_4 - b_3^2| \leq 1$$

et l'inégalité est vérifiée pour la fonction de Koebe.

Lemme 3.2.6. *Soit $f \in \mathbf{k}_{\alpha\delta}$ de la forme $(F.a.n.)$. Alors*

$$|a_2 a_4 - 2a_3^2| \leq \frac{1}{72}\left[340 + 148(A_{\alpha\sigma})^2 + 120 A_{\alpha\sigma} + 36 A_{\alpha\sigma}\left(\sqrt{\frac{1369}{81} + \frac{2116}{81}\sigma^2}\right)\right].$$

Preuve. Soit f de la forme $(F.a.n.)$, alors

$$f'(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1} = 1 + 2a_2 z^1 + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + \ldots. \tag{3.8}$$

et

$$z f'(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^n = z + 2a_2 z^2 + 3a_3 z^3 + 4a_4 z^4 + \ldots. \tag{3.9}$$

Soit g de la forme $(F.a.n.)$, alors

$$\boxed{g(z) = z + \textstyle\sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n = z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4 + \ldots} \tag{3.10}$$

et

$$\boxed{p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = 1 + c_1 z^1 + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \ldots\ldots\ldots} \tag{3.11}$$

En se référant à la définition (3.1.5), on a

$$e^{i\alpha} \frac{zf'(z)}{g(z)} > \delta \ , \quad \text{où} \quad \cos(\alpha) > \delta, \quad |\alpha| < \frac{\pi}{2}$$

Il existe une fonction de Carathéodory, car $p \in \mathbf{P}$ de la forme (3.11) telle que,

$$\boxed{\frac{zf'(z)}{g(z)} = p(z)} \tag{3.12}$$

Nous devons trouver un théorème de représentation de la classe $\mathbf{k}_{\alpha\delta}$.

Soit $f \in \mathbf{S}$ sous la forme de (F.a.n.), le deuxième membre de l'équation (3.12), s'écrire sous la forme

$$e^{i\alpha} \frac{zf'(z)}{g(z)} - \delta = e^{i\alpha} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n\right) - \delta$$

et

$$e^{i\alpha} \frac{zf'(z)}{g(z)} - \delta - i\sin(\alpha) = \cos(\alpha) - \delta + \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\alpha} c_n z^n$$

qui donne

$$\frac{e^{i\alpha} \frac{zf'(z)}{g(z)} - \delta - i\sin(\alpha)}{\cos(\alpha) - \delta} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{i\alpha} c_n}{\cos(\alpha) - \delta}\right) z^n$$

et

$$\boxed{\frac{e^{i\alpha} \frac{zf'(z)}{g(z)} - \delta - i\sin(\alpha)}{\cos(\alpha) - \delta} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n z^n,} \tag{3.13}$$

où $q_n = \left(\frac{e^{i\alpha} c_n}{\cos(\alpha) - \delta}\right)$.

Ensuite, nous pouvons relier l'équation (3.13) à une fonction dans $\mathbf{P}$ avec

$$\frac{e^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{g(z)} - \delta - i\sin(\alpha)}{\cos(\alpha) - \delta} = p(z),$$

où $p(z)$ est de la forme de (3.6).

On suppose que $\cos(\alpha) - \delta$ doit toujours être positif, ensuite, on retrouve le coefficient de z^n, en utilisant l'équation suivante,

$$e^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{g(z)} - \delta - i\sin(\alpha) = p(z)\left(\cos(\alpha) - \delta\right)$$

ce qui implique,

$$\boxed{zf'(z) = e^{-i\alpha}g(z)\left[p(z)\left(\cos(\alpha) - \delta\right) + \delta + i\sin(\alpha)\right]} \tag{3.14}$$

On note par $\mathbf{A}_{\alpha\delta} = cos(\alpha) - \delta$ et du premier membre de l'équation (3.14), nous avons

$$= e^{-i\alpha}\left(z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n\right)\left[\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n\right)(\cos(\alpha) - \delta) + \delta + i\sin(\alpha)\right]$$

$$= e^{-i\alpha}\left(z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n\right)\left[\left((\cos(\alpha) - \delta) + \sum_{n=1}^{\infty}(\cos(\alpha) - \delta)\, c_n z^n\right) + \delta + i\sin(\alpha)\right]$$

$$= e^{-i\alpha}\left(z + \textstyle\sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n\right)\left[e^{i\alpha} + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} A_{\alpha\delta} c_n z^n\right]$$

De plus, à partir du deuxième membre de l'équation (3.14), nous avons

$$zf'(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^n = z + 2a_2 z^2 + 3a_3 z^3 + 4a_4 z^4 + \ldots.$$

En comparant les coefficients de z dans l'équation (3.14), nous obtiendrons

$$\boxed{2a_2 = A_{\alpha\delta} e^{-i\alpha} c_1 + b_2} \tag{3.15}$$

$$\boxed{3a_3 = A_{\alpha\delta}e^{-i\alpha}c_2 + A_{\alpha\delta}e^{-i\alpha}b_2c_1 + b_3} \tag{3.16}$$

$$\boxed{4a_4 = A_{\alpha\delta}e^{-i\alpha}c_3 + A_{\alpha\delta}e^{-i\alpha}b_2c_2 + A_{\alpha\delta}e^{-i\alpha}b_3c_1 + b_4} \tag{3.17}$$

Maintenant, pour trouver l'équation $a_2a_4 - 2a_3^2$, en utilisant les coefficients que nous avions obtenus en (3.15), (3.16) et (3.17).

On pose $A = a_2a_4$,

$$\begin{aligned}
A &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(A_{\alpha\delta}e^{-i\alpha}c_1 + b_2\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(A_{\alpha\delta}e^{-i\alpha}c_3 + A_{\alpha\delta}e^{-i\alpha}b_2c_2 + A_{\alpha\delta}e^{-i\alpha}b_3c_1 + b_4\right)\\
&= \left(\frac{1}{8}\right)\left[\left(A_{\alpha\delta}\right)^2 e^{-2i\alpha}\left(c_1c_3 + b_2c_2c_1 + b_3c_1^2\right) + A_{\alpha\delta}e^{-i\alpha}\left(b_4c_1 + b_2c_3 + b_2^2c_2 + b_3b_2c_1\right) + b_4b_2\right]
\end{aligned}$$

Aussi, en posant $B = 2a_3^2$, nous aurons

$$\begin{aligned}
B &= \left(\frac{2}{9}\right)\left(A_{\alpha\delta}e^{-i\alpha}c_2 + A_{\alpha\delta}e^{-i\alpha}b_2c_1 + b_3\right)^2\\
&= \left(\frac{2}{9}\right)\left[\left(A_{\alpha\delta}\right)^2 e^{-2i\alpha}\left(c_2^2 + 2b_2c_2c_1 + b_2^2c_1^2\right) + A_{\alpha\delta}e^{-i\alpha}\left(2b_3b_2c_1 + 2b_3c_2\right) + b_3^2\right]
\end{aligned}$$

Ensuite, nous soustrairons les équations de A et B que nous avons obtenues pour qu'il devienne $A - B = a_2a_4 - 2a_3^2$, et cela donne

$$\begin{aligned}
A - B = &\left[\left(A_{\alpha\delta}\right)^2 e^{-2i\alpha}\left(\frac{c_1c_3}{8} + \frac{b_2c_1c_2}{8} + \frac{c_1^2b_3}{8} - \frac{2c_2^2}{9} - \frac{4b_2c_1c_2}{9} - \frac{2b_2^2c_1^2}{9}\right)\right]\\
&+ A_{\alpha\delta}e^{-i\alpha}\left(\frac{b_4c_1}{8} + \frac{b_2c_3}{8} + \frac{b_2^2c_2}{8} + \frac{b_3b_2c_1}{8} - \frac{4b_3b_2c_1}{9} - \frac{4b_3c_2}{9}\right)\\
&+ \frac{b_4b_2}{8} - \frac{2b_3^2}{9}
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\begin{aligned} A - B = \frac{1}{72}[&\left(9b_4 b_2 - 16b_3^2\right) + A_{\alpha\delta} e^{-i\alpha} c_1 \left(9b_4 - 23b_3 b_2\right) \\ &+ \left(A_{\alpha\delta}\right)^2 e^{-i\alpha} c_1^2 \left(9b_3 - 16b_2^2\right) + A_{\alpha\delta} e^{-i\alpha} c_2 \left(9b_2^2 - 32b_3\right) \\ &+ A_{\alpha\delta} e^{-i\alpha} b_2 \left(9c_3 - 23A_{\alpha\delta} e^{-i\alpha} c_2 c_1\right) + \left(A_{\alpha\delta}\right)^2 e^{-2i\alpha} \left(9c_1 c_3 - 16c_2^2\right)] \end{aligned}} \tag{3.18}$$

En appliquant l'inégalité triangulaire pour l'équation (3.18), nous avons

$$\boxed{\begin{aligned} 72|a_2 a_4 - 2a_3^2| \leq\ & |9b_4 b_2 - 16b_3^2| + A_{\alpha\delta}|c_1||9b_4 - 23b_3 b_2| \\ &+ \left(A_{\alpha\delta}\right)^2 |c_1^2||9b_3 - 16b_2^2| + A_{\alpha\delta}|c_2||9b_2^2 - 32b_3| \\ &+ A_{\alpha\delta}|b_2||9c_3 - 23A_{\alpha\delta} e^{-i\alpha} c_2 c_1| + \left(A_{\alpha\delta}\right)^2 |9c_1 c_3 - 16c_2^2| \end{aligned}} \tag{3.19}$$

En posant

$$Y_1 = |9b_4 b_2 - 16b_3^2| \quad , \quad Y_2 = |9b_4 - 23b_3 b_2|$$

$$Y_3 = |9b_3 - 16b_2^2| \quad , \quad Y_4 = |9b_2^2 - 32b_3|$$

$$Y_5 = |9c_3 - 23A_{\alpha\delta} e^{-i\alpha} c_2 c_1| \quad , \quad Y_6 = |9c_1 c_3 - 16c_2^2|$$

Ensuite, en appliquant les lemmes (3.2.3), (3.2.4) et (3.2.5), nous obtiendrons

$$\begin{cases} Y_1 \leq 9|b_4 b_2 - b_3^2| + 7|b_3|^2 \\ \quad \leq 9 + 63 \\ \quad \leq 72 \end{cases} \tag{3.20}$$

$$\begin{cases} Y_2 \leq 9|b_4 - \dfrac{23b_3b_2}{9}| \\ \quad \leq 9\left(\dfrac{46}{3} - 4\right) \\ \quad \leq 102 \end{cases} \tag{3.21}$$

$$\begin{cases} Y_3 \leq 9|b_3 - \dfrac{16b_2^2}{9}| \\ \quad \leq 9\left(\dfrac{64}{9} - 3\right) \\ \quad \leq 37 \end{cases} \tag{3.22}$$

$$\begin{cases} Y_4 \leq 32|b_3 - \dfrac{9b_2^2}{32}| \\ \quad \leq 32\left(3 - \dfrac{9}{8}\right) \\ \quad \leq 60 \end{cases} \tag{3.23}$$

Pour

$$Y_5 = 9|c_3 - \mu c_2 c_1| \leq 18 \max\{1, |2\mu - 1|\}$$

où

$$\mu = \frac{23}{9} A_{\alpha\delta} e^{-i\alpha}.$$

On remarque que,

$$\boxed{\begin{aligned} |2\mu - 1|^2 &= |2\left(\frac{23}{9} A_{\alpha\delta} e^{-i\alpha}\right) - 1|^2 \\ &= \left[\frac{14}{9} + \frac{23}{9}\cos(2\alpha) - \frac{46}{9}\delta\cos(\alpha)\right]^2 + \left[\frac{23}{9}\sin(2\alpha) - \frac{46}{9}\delta\sin(\alpha)\right]^2 \end{aligned}} \tag{3.24}$$

Nous devons développer l'équation (3.24), en posant

$$\mathbf{Q_1} = \left[\tfrac{14}{9} + \tfrac{23}{9}\cos(2\alpha) - \tfrac{46}{9}\delta\cos(\alpha)\right]^2$$

et

$$\mathbf{Q_2} = \left[\tfrac{23}{9}\sin(2\alpha) - \tfrac{46}{9}\delta\sin(\alpha)\right]^2$$

A partir de $\mathbf{Q_1}$, nous aurons,

$$\mathbf{Q_1} = \frac{196}{81} + \frac{644}{81}\cos(2\alpha) + \frac{592}{81}\left(\cos(2\alpha)\right)^2 + \frac{2116}{81}\delta^2\left(\cos(\alpha)\right)^2$$

Alors à partir de $\mathbf{Q_2}$, nous aurons,

$$\mathbf{Q_2} = \frac{529}{81}\left(\sin(2\alpha)\right)^2 - \frac{2116}{81}\delta\sin(2\alpha)\sin(\alpha) + \frac{2116}{81}\delta^2\left(\sin(\alpha)\right)^2$$

Par conséquent, nous ajouterons les deux équations, $\mathbf{Q_1}$ et $\mathbf{Q_2}$, nous obtiendrons

$$\mathbf{Q_1} + \mathbf{Q_2} = \frac{725}{81} + \frac{644}{81}\cos\left(2\alpha\right) + \frac{2116}{81}\delta^2 - \frac{2116}{81}\delta\sin\left(2\alpha\right)\sin\left(\alpha\right)$$

En posant $f(\alpha) = \mathbf{Q_1} + \mathbf{Q_2}$, alors nous devons trouver le point critique de l'équation en dérivant les fonction $f(\alpha)$ par rapport à α, on aura

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{df\left(\alpha\right)}{d\alpha} &= \frac{1288}{81}\sin\left(2\alpha\right) - \frac{2116}{81}\delta\left(\sin\left(2\alpha\right)\cos\left(\alpha\right) + 2\sin\left(\alpha\right)\cos\left(2\alpha\right)\right) \\ &= \frac{1}{81}\left[\sin\left(2\alpha\right)\left(1288 - 2116\delta\left(\cos\left(\alpha\right) + 2\sin\left(\alpha\right)\cot\left(2\alpha\right)\right)\right)\right] \end{aligned}} \tag{3.25}$$

Nous aurons

$$\frac{df\left(\alpha\right)}{d\alpha} = \frac{1}{81}\left[\sin\left(2\alpha\right)\left(1288 - 2116\delta\left(\cos\left(\alpha\right) + 2\sin\left(\alpha\right)\cot\left(2\alpha\right)\right)\right)\right] = 0$$

Puisque l'équation $\sin\left(2\alpha\right)$ ne peut être nulle. Alors les points critiques sont :

$$\alpha = \tfrac{\pi}{2} \quad \text{and} \quad \alpha = 0$$

D'après les points critiques que nous avions acquis, nous savons que,

$$1 + \tfrac{2116\delta^2}{81} \leq |2\mu - 1|^2 \leq \tfrac{1369}{81} + \tfrac{2116}{81}\delta^2$$

et

$$\sqrt{1 + \tfrac{2116\delta^2}{81}} \leq |2\mu - 1| \leq \sqrt{\tfrac{1369}{81} + \tfrac{2116}{81}\delta^2}.$$

Donc,

$$\boxed{Y_5 = |9c_3 - 23\mathbf{A}_{\alpha\delta}e^{-i\alpha}c_2c_1| \leq 18\left(\sqrt{\tfrac{1369}{81} + \tfrac{2116}{81}\delta^2}\right)} \tag{3.26}$$

En utilisant les lemmes (3.2.2) et (3.2.3) pour l'équation Y_6, nous aurons

$$\boxed{\begin{aligned} |9c_1c_3 - 16c_2^2| &\leq 9|c_1c_3 - c_4| + 9|c_4 - \frac{16}{9}c_2^2| \\ &\leq 18 + 46 \\ &\leq 64. \end{aligned}} \tag{3.27}$$

Ainsi, en utilisant les relations des équations (3.20), (3.21), (3.22), (3.23), (3.26), (3.27) et l'inégalité (3.19), on obtient

$$\begin{aligned} |a_2a_4 - 2a_3^2| \leq \frac{1}{72}[\ 72 &+ (\mathbf{A}_{\alpha\delta})(2)(102) + (\mathbf{A}_{\alpha\delta})^2(2)^2(37) + \mathbf{A}_{\alpha\delta}(2)(60) \\ &+ \mathbf{A}_{\alpha\delta}(2)(18)\left(\sqrt{\frac{1369}{81} + \frac{2116}{81}\delta^2}\right) + 64] \\ &\leq \frac{1}{72}\left[340 + 148(\mathbf{A}_{\alpha\delta})^2 + 120\mathbf{A}_{\alpha\delta} + 36\mathbf{A}_{\alpha\delta}\left(\sqrt{\frac{1369}{81} + \frac{2116}{81}\delta^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

■

Théorème 3.1

Soit $f \in \mathbf{K}_{\alpha\delta}$ sous la forme de (F.a.n.). Alors

$$|T_3(2)| \leq 44 + 4\left[\tfrac{340}{72} + \tfrac{148}{72}\left(\mathbf{A}_{\alpha\delta}\right)^2\right.$$

$$+120\frac{}{72\mathbf{A}_{\alpha\delta}+\frac{36}{72}\mathbf{A}_{\alpha\delta}\left(\sqrt{\frac{1369}{81}+\frac{2116}{81}\delta^2}\right)}$$

Preuve. Soit $f \in \mathbf{K}_{\alpha\delta}$ sous la forme de (F.a.n.). Alors

$$\begin{aligned}
|T_3(2)| &= |a_2^3 - 2a_2a_3^2 - a_2a_4^2 + 2a_3^2a_4| \\
&\leq |a_2|^3 + 2|a_2||a_3^2| + |a_4||a_2a_4 - 2a_3^2| \\
&\leq 44 + 4\left[\frac{340}{72} + \frac{148}{72}\left(\mathbf{A}_{\alpha\delta}\right)^2 + \frac{120}{72}\mathbf{A}_{\alpha\delta} + \frac{36}{72}\mathbf{A}_{\alpha\delta}\left(\sqrt{\frac{1369}{81} + \frac{2116}{81}\delta^2}\right)\right].
\end{aligned}$$

■

Conclusion

Ce travail est une étude sommaire des outils mathématiques intervenant dans la théorie des fonctions analytiques et ses applications dans le cadre des équations diffrentielles ordinaires et aux derivees partielles.

Le problème des coefficients est fondamental et essentiel dans la théorie des fonctions univalentes.

Dans ce mémoire, nous avons trouvé les bornes supérieure et inférieure des première et deuxième déterminants de Hankel pour une classe **SQ** des fonctions analytiques introduites par D. Raducanu dans [13]. Pour les fonctions de cette classe, elle satisfait que $f(z)$ subordonnée à $1/(1-z)^2$ dans le disque unitaire ouvert $\mathbf{D}$.

Nous avons présenté aussi des estimations des déterminants de Toeplitz pour les classes $\mathbf{k}_{\alpha\delta}$ des fonctions analytiques univalentes introduites par S. Cik Soh et al. dans [6]. .

Les résultats présentés dans ce mémoire pourrait faire l'objet d'une étude plus approfondie liée au fonctionnelle Fekete – Szegö telle que $a_3 - \mu a_2^2$, $a_2 a_4 - \mu a_3^2$ ou $a_4 - \mu a_2 a_3$.

Un sujet intéressant d'étudier le problème des coefficients des fonctions univalence ou non-univalence et les déterminants de Hankel d'ordre supérieur à 3 pour les fonctions holomorphes ou les fonctions méromorphes bornées par 1 en module sur le cercle-unité.

Bibliographie

[1] Ali M. F., Thomas D. K., Vasudevarao A. (2018) : Toeplitz determinants whose elements are the coefficients of analytic and univalent functions. Bull. Aust. Math. Soc., 97(2), 253-264.

[2] Bair J.,Haesbroeck G., Variations autour de la définition des fonctions convexes, Mathématique et Pédagogie 105 (1996), 57-70 et 106 (1996), 27-41.

[3] Bansal D. : Upper bound of second Hankel determinant for a new class of analytic functions. Applied Mathematics Letters, 26(1), 103-107.(2013).

[4] Brown J.E. , Tsao A. : On the Zalcman conjecture for starlike and typically real functions, Math. Z., 2(191)(1986), 467-474.

[5] Carlson F. : Sur les coefficients d'une fonction bornée dans le cercle unité, Ark.Mat.Astr. Fys., 27A(1) (1940), 8pp.

[6] Cik Soh S. , Daud M., Huzaifah D., *Coefficient Estimates of Toeplitz Determinant for a Certain Class of Closeto-Convex Functions.* Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences, Vol. 17 (2021) 670-677. 2021.

[7] Cik Soh S., Daud M. : Coefficient bounds for certain classes of closeto-convex functions. International Journal of Mathematical Analysis, Vol. 2, no. 27, pp. 1343-1351, 2008.

[8] Efraimidis I. : A generalization of Livingston's coefficient inequalities for functions with positive real part, J. Math. Anal. Appl., 435(1) (2016), 369-379.

[9] Kharudin, N., Akbarally, A., Mohamad, D.,Soh, S. C : The second Hankel determinant for the class of close to convex functions. European Journal of Scientific Research, 66(3), 421-427. (2011).

[10] Lee S. K. , Ravichandran V., Supramanian S. : Bounds for the second order Hankel determinant of certain univalent functions, J. Inequal. Appl., art. 281 (2013).

[11] Obradovic M., Tuneski N. : Zalcman and generalized Zalcman conjecture for a subclass of univalent functions, Novi Sad J. Math., 52(1)(2022), 185-190.

[12] Raducanua D., Zaprawab P. , *Second Hankel determinant for close-to-convex functions*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I355(2017)1063–1071, 2017.

[13] Raducanua D. , *On Coefficient Estimates for a Certain Class of Analytic Functions*. Mathematics 2023, 11(1), 12, 2023.

[14] Thomas D., Halim S. A. : Toeplitz matrices whose elements are the coefficients of starlike and close-to-convex functions', Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 40(4)(2017), 1781–1790.

Appendices

A.1. Écrire la fonction en logiciel Mathematica

références de figure	la fonction en Mathematica
Figure 2.3 et 2.4	g(x,y) $g\left[x_{-},y_{-}\right]=\frac{1}{6}\left(3-3x^{2}-\frac{3x\times y^{2}}{1+x}+5x\times y\right)$
Figure 2.3 et 2.4	h(x,y) $h\left[x_{-},y_{-}\right]=\frac{1}{5}\left(2+6x-2x^{2}-6x^{3}-\frac{6x\times y^{2}}{1+x}+\frac{16}{3}x^{2}\times y-\frac{11}{9}y^{2}\right)$
Figure 2.5 et 2.6	k(x,y) $k\left[x_{-},y_{-}\right]=24\left(2+4x-2x^{2}-4x^{3}+2x^{2}\times y-y^{2}-\frac{4x\times y^{2}}{1+x}\right)$

A.2. Tracée le graphe dans logiciel Mathematica

références de figure	la fonction en Mathematica
Figure 2.3 et 2.4	$cg=Plot3Dg\left[x,y\right],\{x,0,1\},\{y,0,1-x^{2}\}$ $,colorfubction\rightarrow"Monochrome",PlotStyle\rightarrow Thick$
Figure 2.3 et 2.4	$ch=Plot3Dh\left[x,y\right],\{x,0,1\},\{y,0,1-x^{2}\}$ $,colorfubction\rightarrow"Monochrome",PlotStyle\rightarrow Thick$
Figure 2.5 et 2.6	$ck=Plot3Dk\left[x,y\right],\{x,0,1\},\{y,0,1-x^{2}\}$ $,colorfubction\rightarrow"Monochrome",PlotStyle\rightarrow Thick$