République Agérienne Démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Faculté des sciences - Département de Mathematiques
Université de Boumerdès

Méthode des sous et sur -solutions dans l'étude des équations différentielles du second ordre

Mémoire pour l'obtention du diplôme de Master en Analyse Mathématiques

présenté par

khaouani Djamila

Soutenu le 25 septembre 2022 devant le jury composé de

D. Seba	Professeur	UMBB	Présidente
k. Laoubi	MC/A	UMBB	Examinatrice
S. Mechrouk	MC/A	UMBB	Encadreur

Année Universitaire 2021/2022

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENT

Tout d'abord, je tiens remercier Dieu, notre créateur de m'avoir donner la force, le courage et le temps nécessaire afin d'accomplir ce travail.

Je voudris adresser toute ma reconnaissance à ma promotrice de mémoire madame **MECHROUK Salima**. Je la remercie de m'avoire encadrée, orientée, aidée et conseillée.

Je tiens à remercier également les membre des jury : madame **LAOUBI Karima** et madame **SEBA djamila** pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant d'examiner notre travail.

Pour terminer. un grand merci à mon cher père **KHAOUANI Kamel** et ma chère mère **BOUDIEB Yasmina**, à mes frères et sœurs, à mon mari et sa famille, à mes amis qui m'ont apporté leur soutient moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, on a prouvé la méthode des **sous et sur solutions** avec les théorèmes de comparaisons et quelques résultats d'existence pour quelques problèmes aux limites de type **Dirichlet**.

Puis on a présenté des résultats d'existence et d'unicité de solutions pour quelques problèmes de type **Neumann**.

INTRODUCTION

La méthode des **sous et sur solutions** trouve son origine pour la première fois dans les travaux de picard en 1890($[8]-[9]$) pour les équations aux dervèes partielles et en 1893 pour **les équations differentielles ordinaires**, il été developpé en 1931 par **Scoza Dragoni**. Le but de ce travaill, inspiré de ces exposés, est de faire introduction a cette méthode.

La méthode des **sous et sur solutions** ($[1]-[6]$) donne l'existence et la localisation d'une solution d'un problème aux limites en presence d'un couple de fonctions, appelés **sous-solution et sur-solution**, bien ordonné. Ces **sous- et sur-solutions** peuvent être considerées comme des approximations de la solution. Cette méthode est devenue par sa simplicité, un outil standard pour la recherche des solutions des problèmes du type :

$$u''(t) = f(t, u)$$

Avec

$$a \leq t \leq b$$

Le plan que l'on va adopler est le suivant :

Le **chapitre 1**, Il reforme quelques rappels susceptibles de nous aider à atteindre le but ultime de ce travail il est composé de deux section :

Section 1 : Elle concerne quelques résultats sur l'analyse fonctionnelle (fonction borneé, fonction continue, fonction lipschitzienne......)

Section 2 : On rappel quelque théorème de problème de Sturm-Lioville Linéaire et donner des résultats élementaires sur l'existence de solutions ainsi que sur la théorie fondamentale de la fonction de Green.

Dans le **chapitre 2**, une discussion des théorèmes de l'existence d'une paire de **sous- et sur-solutions** bien ordonnées dévoilera les implications concernant l'existence, la localisation d'une solution ainsi que des informations sur la structure de l'ensemble des solutions.

Dans le **chapitre 3**, on s'inspire du **chapitre 2** et on donne quelques résultats d'existence et d'unicité de solutions pour quelques problèmes de **Sturm-Lioville** de type **Neumann** .

Le mémoire est clôturé par une **conclution**.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, on rappelle quelques notions et théorèmes dont on aura besoin tout au long de ce travail [16] [17].

1.1 Analyse fonctionnel

1.1.1 Fonction Bornée

1.1.1.1 Définition

— Une fonction f définie sur un ensemble D de R est minorée si et seulement si il existe $m \in R$ appelé minorant tel que pour tout réel x de l'ensemble D, $f(x) \geq m$

— Une fonction f définie sur un ensemble D de R est majorée si et seulement si il existe $M \in R$ appelé Majorant tel que pour tout réel x de l'ensemble D, $f(x) \leq M$

— Une fonction f définie sur un ensemble D de R est bornée si et seulement elle est à la fois minorée et Majorée, il existe un réel $M \in R$ tel que :

$$|f(x)| \leq M, \forall x \in D$$

Exemple 1.1 *1. La fonction sinus* $\sin x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *est bornée (minorée par -1 et majorée par 1)*

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

2. La fonction $\frac{1}{x}$ *définie pour tous les réel x à l'exception de 0 est non bornée, à mesure que x s'approche 0, les valeurs de cette fonction deviennent de plus en plus grandes. Cette fonction peut être rendue bornée si on la restreint par exemple à* $[1, +\infty[$

3. Toute fonction continue de [0,1] dans $\mathbf{R}$ *est bornée. Plus généralement :*

— *Toute fonction continue d'un espace compact dans un espace métrique est bornée .*

— *Toute fonction localement bornée d'un espace dénombrale compact dans* $\mathbf{R}$ *est bornée et atteinte ses bornes .*

1.1.2 Fonction Continue

1.1.2.1 Définition

On dit qu'une fonction f est continue au point x_0 si et seulement si $f(x_0)$ existe et les deux limites de f(x) à gauche et à droite en x_0 existent et sont égales à $f(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Exemple 1.2 *La fonction sinus est continue sur* $\mathbf{R}$ *: pour tout* $x_0 \in \mathbf{R}$ *et pour tout* $\epsilon > 0$ *on peut prend* $\mu = \epsilon$

1.1.3 Fonction Lipschitzienne

1.1.3.1 Définition

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, $f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ une application et μ un réel strictement positif.
on dit que f est μ-lipschitzienne si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathbf{I^2}, |f(x) - f(y)| \leq \mu |x - y|$$

- f est lipschitzienne s'il existe $\mu > 0$ tel que f soit μ-lipschitzienne
- le plus petit μ tel que f soit μ-lipschitzienne est appelé constante de lipschitz
- f est dite contractante si et seulement s'il existe un $\mu \in [0, 1[$ tel que f soit μ-lipschitzienne

Proposition 1.1 — *Toute fonction lipschitzienne est continue et même uniformément continue.*

Démonstration. Soient $f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ une fonction μ-lipschotzienne (avec $\mathbf{I}$ un intervalle réel et μ un réel positif) et $\epsilon > 0$
On pose $k = \frac{\epsilon}{\mu+1} > 0$. Comme f est μ-lipscitzienne. Alors on a : :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{I^2}, |x - y| \leq k \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \mu \frac{\epsilon}{\mu + 1} < \epsilon$$

D'ou f est unif-continue sur $\mathbf{I}$. ∎

Exemple 1.3 — *Toute fonction continûment dérivable sur un intervalle fermé et borné est lipschitzienne .*

— *La fonction $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne*

1.1.4 Equicontinuité

1.1.4.1 Définition

Cette notion permet de contrôler les variations de la fonction indépendament du point où on la considère.

Autrement dit, au lieu de faire varier le point où l'on étudie la continuité on fait varier la fonction.

Définition 1.1 *Soient X et Y deux espaces métriques.*
Notons $C(X,Y)$ l'ensemble des fonctions continues définies de X dans Y.
On dit qu'une partie F de $C(X,Y)$ est equicontinue en $x_0 \in X$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0, \forall y \in X : \|y - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \forall f \in F,\ \|f(y) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

Remarque 1.1 *Le préfixe "équi" indique une uniformité par rapport aux fonctions $f \in F$.*

Exemple 1.4 *Soit F une partie de $C(X,Y)$.*
Si toutes les fonctions de F sont C-lipschitzienne pour une même constante $C > 0$ tel que :

$$\forall f \in F, \| f(x) - f(y) \|_Y \leq C \| x - y \|_X \ \forall x, y \in X.$$

Alors F est équicontinue.
Plus précisément, il suffit que tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert V_x tel que toutes les fonctions de F soient C_x lipschitzienne sur V_x pour une même constante C_x dependant uniquement de x :

$$\forall x \in X, \exists V_x \subset X, \forall f \in F : \| f(x) - f(y) \| \leq C_x \| x - y \|_{V_x} .$$

1.1.5 Equicontinuité uniforme

1.1.5.1 Définition

Définition 1.2 *Soit* (X,d) *un espace métrique et soit* F *une partie de* $C(X,X)$. *On dit que* F *est uniformement équicontinue sur* X *si :*

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\forall x,y\in X,d(x,y)<\delta\Rightarrow||f(x)-f(y)||\,\|_X<\varepsilon,\forall f\in F.$$

Lemme 1.1 *Soit* X *un espace métrique compact et* F *une partie équicontinue de* $C(X,X)$ *alors* F *est uniformement équicontinue sur* X.

Démonstration.
Soit $\varepsilon>0$.
Supposons l'équicontinuitée de F pour chaque $x\in X$, notons $\delta_x>0$ une constante dépende de x.
tel que :

$$\forall y\in X:d(x,y)<2\delta_x\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon,\forall f\in F$$

Soient $X=\bigcup_{k=1}^{n}B(x_k,\delta_x^k)$ et $\delta=Min\{\delta_x^1,\delta_x^2,...,\delta_x^n)$.
Considérons $x,y\in X$ et on suppose que $d(x,y)<\delta$ tel que $x\in B(x_k,\delta_x^k)$
L'inégalité triangulaire montre que $y\in B(x_k,2\delta_x^k)$. En effet :

$$\begin{aligned}d(x,y)&\leq d(x,x_K)+d(x_K,y)\\&\leq 2\delta_x^k\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&\leq |f(x)-f(x_k)|+|f(x_k)-f(y)|\\&\leq 2\varepsilon\end{aligned}$$

D'où, F est uniformement équicontinue. ■

1.1.6 fonction homogène

1.1.6.1 Définition

Soit E et F deux espace vectoriels sur le même corps commutatif $\mathcal{K}$.

Une fonction f dans E dans F est dit homogène de dégré $\alpha\in R$ si :

$$\forall t\in\mathcal{K},\forall x\in E,f(tx)=t^\alpha f(x).$$

Si $\mathcal{K}$ est sous- corps des réels, on dit que f est positivement homogène de dégré α si

$$\forall t\in\mathcal{K},\forall x\in E,f(tx)=|t|^\alpha f(x).$$

Exemple 1.5 — *Une application linéaire est homogène de dégré 1.*

1.1.7 Ensemble compact

1.1.7.1 Définition

Soit A un ensemble d'un espace métrique X. On dit que A est compact s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue :
de tout recouvrement de A par des ouverts on peut extraire un sous recouvrement fini.

1.1.8 Ensemble relativement compact

1.1.8.1 Définition

Pour qu'une partie A d'un espace metrique complet X soit relativement compact, il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compact K_ε de X tel que :

$$\forall x \in A,\ d(x, K_\varepsilon) < \varepsilon$$

Dans tout ce qui suit E désigne un espace de Banach.

1.1.9 Opérateur complètement continu

1.1.9.1 Définition

On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires définies de E dans F.
Un opérateur continu $T \in L(E, F)$ est dit complètement continu si l'image $T(B_E)$ est une partie relativement compact de F.

Théorème 1.1 ***Théorème d'Ascoli-Arzella*** *Soient (X, d) un espace métrique compact, A un sous-ensemble de $C(X)$.*
On suppose que :

1. *A est borné pour la norme de $C(X)$:*

$$\exists M > 0, \forall f \in A, \| f(x) \| \leq M, \forall x \in X.$$

2. *A uniformement équicontinu :*

$$\exists \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in A, \forall s,t \in X : d(s,t) < \delta \Rightarrow ||f(s) - f(t)|| < \varepsilon$$

Alors, A est relativement compact.

Exemple 1.6 *On considère l'opérateur : $V : L^2([0,1]) \to C([0,1])$ défini par :*

$$V(f(x)) = \int_0^1 f(t)dt$$

Montrons que V est completèment continu :

— V est continu : Pour tout $x \in [0,1]$ et $f \in L^2([0,1])$, on a :

$|V(f(x))| = |\int_0^1 f(t)dt| \leq \int_0^1 |f(t)|dt \leq \parallel f \parallel_{L^1} \leq \parallel f \parallel_{L^2}$

Donc

$$\parallel f \parallel_\infty \leq \parallel f \parallel_L^2, \forall f \in L^2([0,1])$$

— Soit B_{L^2} une partie bornée de $L^2([0,1])$ et soit $C > 0$ une constante positive tel que :

$$B_{L^2} = \{f \in L^2, \parallel f \parallel_{L^2} \leq C\}$$

On a :

$$|V(f(x))| \leq \parallel f \parallel_{L^2} \leq C$$

Alors;

$$\parallel V(f) \parallel_\infty \leq C, \forall f \in B_{L^2}$$

Donc;

$$V(B_{L^2}) = \{V_f, f \in B_{L^2}\}$$

est uniformement borné .

De plus,l'ensemble $V(L^2)$ est équicontinu de $C([0,1])$.

Soit $x, y \in [0,1]$ et $f \in L^2([0,1])$.
On a :

$$\begin{aligned} |V_f(y) - V_f(x)| &\leq |y-x|^{12} \left(\int_x^y |f(t)|^2 \right)^{12} \\ &\leq \parallel f \parallel_2 |y-x|^{12} \end{aligned}$$

$$\leq \quad C|y-x|^{12}$$

$$< \quad \delta, \quad \forall f \in B_{L^2}$$

D'aprés le théorème d' Ascoli-Arzela, l'opérateur V est relativement compact et envertu de la définition (1.1.9) V est complètement continu.

Théorème 1.2 ***Théorème de Schauder :*** *Soient X un sous ensemble fermé, borné, convexe, non vide d'un espace de Banach E et $f : X \to X$.*
Si f est complétement continue alors f admet au moins un point fixe $x_0 \in X$ tel que :

$$f(x_0) = x_0.$$

Théorème 1.3 ***Théorème des valeurs intermédiaires*** *Soit f une fonction continue et stictement monotone sur un intervalle $[m, M]$, alors pour tout nombre réel $k \in [f(m), f(M)]$, il existe un unique réel $c \in [m, M]$ telle que $F(c) = k$.*

1.2 Problème de strum-liouville linéaire homogène[12]

1.2.1 Introduction :(Exemples)

On considère les quatres problèmes linéaires homogènes suivants :

$$(a)\begin{cases} y'' + y = 0, \quad 0 < x < 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

La solution de ce problème est $y_G(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ et en utilisant les conditions aux limite on trouve : $y \equiv 0$.

Donc ce problème a seulement la solution triviale $y \equiv 0$. .

$$(b)\begin{cases} y'' + \pi^2 y = 0, \quad 0 < x < 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

La solution de ce problème est $y(x) = C_1 \cos(\pi x) + C_2 \sin(\pi x)$ et en utilisant les conditions aux limite on trouve :

$$y_G(x) = C_1 \sin(\pi x) \quad /C_1 \in R$$

Il y'a une infinité de solutions.

$$(c) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \quad a < x < b \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

Si $\lambda \leq 0$ alors $r = \pm\sqrt{-\lambda}$ et $y(x) = \upsilon_1 \exp(x\sqrt{\lambda}) + \vartheta_2 \exp(-x\sqrt{\lambda})$ donc $y \equiv 0$

Si $\lambda > 0$ alors $y(x) = K_1 \cos(x\sqrt{\lambda}) + K_2 sin(-x\sqrt{\lambda})$
Il y a une double infinité de solutions.

$$(d) \begin{cases} y'' = 0, \quad a < x < b \\ y(0) = 0, \ y(1) = 1 \end{cases}$$

La solution du problème est $y(x) = C_1 + C_2 x$ ce qui implique que $y(0) = C_1 = 0$ et $y(1) = C_2 = 1$
Finalement ce problème admet une unique solution $y(x) = x$

1.2.1.0.1 Conclusion : Un problème aux limites linéaire peut admettre zéro, une ou une infinité de solutions, cela dépend des conditions aux bords et du coeficient multiplicateur de y et la longeur de l'intervalle d'etude.

Définition 1.3 (Problème de Strum-liouville linéaire, régulier, homogène) *Soient $p \in C^1([a,b]), q, r \in C([a,b])$ des fonctions réelles telles que $p, r > 0$ sur $[a,b]$ et soient $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in R^4$ tels que $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$*
On appelle problème de Strum-liouville linéaire, régulier, homogène le problème :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} (py')' + (q + \lambda r)y \ = 0, \ a < x < b \\ \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0 \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0 \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbf{C}$ est appelé valeur propre du problème $(\mathcal{SLH})$ si ce problème admet une solution non triviale. Les conditions aux bords de l'intervalle]a,b[sont linéaires et séparées. Nous ne considérons pas les conditions aux bords non séparées, c'est-à-dire du type

$$\begin{cases} c_{11}y(a) + c_{12}y'(a) - d_{11}y(a) - d_{12}y'(a) = 0 \\ c_{21}y(b) + c_{22}y'(b) - d_{21}y(b) - d_{22}y'(b) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Remarque 1.2 — *Si le second nombre est non nul (dans l'équation ou dans les conditions), on dit que le problème est non homogène.*

- *Le problème est dit régulier car les fonctions p et r ne s'annulent pas sur (a,b).*

- *Une équation général du second ordr y" + a(x) y' + b(x)y = 0 peut se mettre sous forme de Sturm-Liouville ; en posant* $A(x) = \int a(t)dt$, *l'équation prend la forme* $[y'e^{A(x)}]' + b(x)e^{A(x)}y = 0$. *La réciproque est vraie si p est de classe* $\mathbf{C^1}$

- *si* c_{11} *et* d_{11} *est nul alors le problème (1.1) est Neumann ou* c_{12} *et* d_{12} *est nul alors le problème (1.1) est Dirichlet sinon le problème (1.1) est mixe*

1.2.2 Existence de solutions du problème de Strum-liouville linéaire

Dans cette section on prend $\lambda = 0$ et on s'intéresse aux questions d'existence et de multiplicité des solutions du problème

$$(\mathcal{P}_{Nh}) \begin{cases} (py')' + qy = f \quad (NH) \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

On associé à ce problème le problème homogène suivant :

$$(\mathcal{P}_h) \begin{cases} (py')' + qy = 0 \quad (H) \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

où $p \in C^1([a,b]), q \in C([a,b])$ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in R^4$ $\alpha_1^2+\alpha_2^2 \neq 0, \beta 1^2+\beta 2^2 \neq 0$.

Définition 1.4 (Fonction de Green) *On appelle fonction de Green associée au problème homogène* $(\mathcal{P}_h)$ *une fonction* $G : [a,b]\times[a,b] \to R$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

(a) G *est continue sur* $[a,b] \times [a,b]$.

(b) G *est symétrique* $\Leftrightarrow G(x,y) = G(y,x) \qquad \forall x,y \in [a,b]$

(c) $\frac{\partial G}{\partial x}$ *continue pour* $x \neq y$.

(d) $\frac{\partial G}{\partial x}(y^+,y) - \frac{\partial G}{\partial x}(y^-,y) = \frac{1}{p(y)}, \quad \forall y \in [a,b]$

(e) La fonction $x \mapsto G_y(x) = G(x,y)$ *solution de l'équation (H),* $x \neq y$.

(f) $x \mapsto G(x,y)$ *vérifie les conditions de bords* $\forall y \in [a,b]$.

Théorème 1.4 *Supposons que le problème homogène* $(\mathcal{P}_h)$ *n'admet pas de solution non triviale, alors il existe une (et une seule) fonction* G *qui ne dépend pas de* f *appelè fonction de Green, telle que, pour toute fonction* f*, la solution* y *du problème non homogène* $(\mathcal{P}_{Nh})$ *s'écrit de manière unique sous la forme :* $y(x)=\int_a^b G(x,y)f(y)dy$

1.2.2.0.1 Méthode pratique pour trouver la fonction de Green associée à un problème :

Soit φ_1 et φ_2 les solutions respectives des problèmes aux conditions initiales :

$$(H) + \begin{cases} \varphi_1(a) = \alpha_2 \\ \varphi_1'(a) = -\alpha_1 \end{cases}$$

et

$$(H) + \begin{cases} \varphi_2(b) = \beta_2 \\ \varphi_2'(b) = \beta_1 \end{cases}$$

Alors : $\varphi_1, \varphi_2 \not\equiv 0$ sont linéairement indépendantes car sinon φ_1 (et aussi φ_2) serait solution du problème : (P_0) (H)+(CB)$_h$ ce qui contredit l'hypothèse.

Soit $W \neq 0$ leur Wronskien et G la fonction de Green définie par :

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{\varphi_1(x)\varphi_2(y)}{p(x)W(x)}, & a \leq x \leq y \\ \frac{\varphi_1(y)\varphi_2(x)}{p(y)W(y)}, & y \leq x \leq b. \end{cases}$$

Exemple 1.7 *Considérons le problème aux limites posé sur un intervalle* $[a, b]$

$$\begin{cases} y'' = f(x), & a < x < b \\ y(a) = 0, & y(b) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Construisons les fonctions φ_1 *et* φ_2 *deux solutions du problème de Cauchy tels que :*

$$\begin{cases} \varphi_1'' = 0 \\ \varphi_1(a) = 0 \\ \varphi_1'(a) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_2'' = 0 \\ \varphi_2(b) = 0 \\ \varphi_2'(b) = -1 \end{cases}$$

Alors, $\varphi_1(x) = (a - x)$, $\varphi_2(x) = (b - x)$ et $W(\varphi_1, \varphi_2) = b - a$.

D'où la fonction de Green :

$$\text{G(x,y)=}\begin{cases} \frac{(x-a)(y-b)}{(b-a)}, & \text{si } x \le y; \\ \frac{(y-a)(x-b)}{(b-a)}, & \text{si } x \ge y. \end{cases}$$

L'unique solution du problème (1.2) est donnée par

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_a^b G(x, y) f(y) dy \\ &= \frac{x-b}{b-a} \int_a^x (y-a) f(y) dy + \frac{x-a}{b-a} \int_x^b (y-b) f(y) dy. \end{aligned}$$

1.3 Théorème d'existence pour le problème de strum-liouville

1.3.1 Cas d'un Second Membre Lipschitzienne

Théorème 1.5 *soit* $f : [a, b] \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *une fonction continue, lipschitzienne par rapport aux deux dernière variable et borné, alors pour tout réel* γ, δ *le* *problème*

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y'), & a < x < b \\ y(a) = \gamma \\ y(b) = \delta. \end{cases} \tag{1.3}$$

Admet aux moins une solution $y \in \mathbf{C^2}([a,b])$.

1.3.2 Cas d'un Second Membre Continue borné

Théorème 1.6 ([10] − [11]) *Soit* $f : [a,b] \times R \to R$ *une fonction continue et bornée :*

$$\exists M > 0, \quad |f(x,y)| \leq M \quad \forall (x,y) \in [a,b] \times R$$

Alors le problème :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} y''(x) = f(x,y), & a < x < b \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Admet au moins une solution $y \in C^0([a,b])$

La démonstration de ce théorème repose sur le théorème de Schauder. **Démonstration.** Par la méthode du point fixe : Soit $E = C^0([a,b],R)$ l'espace des fonctions continues de $[a,b]$ dans R et $T : E \to E$ un opérateur tels que :

$$Ty(x) = \int_a^b G(x,s)f(s,y(s))ds,$$

Selon le théorème 1.4, le problème $(\mathcal{P})$ est équivalent au problème de point fixe $Tu = u$.

■

Lemme 1.2 *Soit I=]a,b[,* $f \in \mathrm{C}(\bar{I}, \mathrm{R}^2, \mathrm{R})$ *et* $h \in C(R^+, R^+_*)$ *une fonction satisfaisant à la condition de croissante suivante :*

$$\int^{\infty} \frac{s}{h(s)} ds = +\infty \qquad (A)$$

Et il existe $M > 0$ *telle que* $\forall x \in \bar{I}, |y| \leq M, z \in \mathrm{R}, |f(x,y,z)| \leq h(|z|)$.

Soit y *une solution de l'équation différentielle* $y'' = f(x,y,y')$ *telle que* $|y(x)| \leq M, \forall x \in \bar{I}$, *alors il existe* $N = N(M,h,I) > 0$, *telle que* $|y'(x)| < N, \forall x \in I$.

CHAPITRE 2

MÉTHODE DES SOUS ET SUR SOLUTIONS

Dans ce chapitre. On s'interesse aux théorèmes de comparaison et à la méthode des sous et sur solutions pour des problème aux limites de condition mix, [6, 7, 9, 10, 11, 13, 14].

Considérons le problème de Sturm-Lioville non linéaire

$$(\mathcal{P}_{Nh}) \begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Commençons par les définitions d'une sous et sur solutions.

2.1 Définitions

Définition 2.1 *Une fonction v deux fois dérivable est dite sous-solution du problème* $(\mathcal{P}_{Nh})$ *si :*

$$\begin{cases} v''(x) \geq f(x, v(x), v'(x)), & \forall x \in]a, b[\\ a_1 v(a) - a_2 v'(a) \leq \alpha \\ b_1 v(b) + b_2 v'(b) \leq \beta \end{cases} \tag{2.2}$$

Comme $a_1, a_2, b_1, b_2 \geq 0, a_1 + a_2 > 0, b_1 + b_2 > 0, (\alpha, \beta) \in R^2$

Définition 2.2 *Une fonction w deux fois dérivable est diet sur-solution du problème* $(\mathcal{P}_{Nh})$ *si :*

$$\begin{cases} w''(x) \leq f(x, w(x), w'(x)), & \forall x \in]a, b[\\ a_1 w(a) - a_2 w'(a) \geq \alpha \\ b_1 w(b) + b_2 w'(b) \geq \beta \end{cases} \tag{2.3}$$

Comme $a_1, a_2, b_1, b_2 \geq 0, a_1 + a_2 > 0, b_1 + b_2 > 0, (\alpha, \beta) \in R^2$

2.2 Résultat d'existence

Théorème 2.1 *Considérons le problème de Dirichlet suivant où f ne dépend pas de la dérivée*

$$\begin{cases} y'' = f(x,y); & a < x < b \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases} \tag{2.4}$$

Comme $(\alpha, \beta) \in R^2$.
Supposons l'existence de v, w *respectivement sous et sur-solutions telles que* $v \leq w$.
Supposons que $f : [a,b] \times R \to R$ *est continue sur l'ensemble*

$$\mathcal{K} = \Big\{ \ (x,y) \in [a,b] \times \mathbf{R}, \qquad v(x) \leq y \leq w(x) \ \Big\}. \tag{2.5}$$

Alors le problème (2.4) admet au moins une solution u *telle que* $v \leq u \leq w$ *sur [a,b] .*

Démonstration.
Comme l'ensemble $\mathcal{K}$ est bornée, alors f est bornée sur $\mathcal{K}$ mais pas nécessairement sur $[a,b] \times \mathbf{R}$. Introduisons alors la fonction $\bar{f}$ modifiée de f, définie par la méthôde de troncature comme suite :

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,v) + \frac{y-v(x)}{1+y^2}, & si \quad y \leq v(x) \\ f(x,y) + \frac{y-y}{1+y^2}, & si \quad (x,y) \in \mathcal{K} \\ f(x,w) + \frac{y-w(x)}{1+y^2}, & si \quad y \geq w(x) \end{cases}$$

Si on pose

$$\delta(x,y) = \begin{cases} v(x) & y \leq v(x) \\ y & (x,y) \in \mathcal{K} \\ w(x) & y \geq w(x) \end{cases}$$

C'est à dire
$$\delta(x,y) = \max(v(x), \min(y, w(x))).$$

Alors on peut écrire la fonction $\bar{f}$ sous la forme suivante :

$$\bar{f}(x,y) = f(x,\delta) + \frac{y - \delta(x,y)}{1+y^2}.$$

Montrons que $\bar{f}$ est bornée sur $[a,b]\times\mathbf{R}$. En effet soit $(x,y)\in[a,b]\times\mathbf{R}$
On a :

$$\begin{aligned}|\bar{f}(x,y)| &= |f(x,\delta)| + |\frac{y-\delta(x,y)}{1+y^2}|\\ &\leq |f(x,\delta)| + |\frac{y}{1+y^2}| + |\frac{\delta(x,y)}{1+y^2}|\\ &\leq \max_{x\in[a,b]}|f(x,\delta)| + \max_{y\in\mathbf{R}}|\frac{y}{1+y^2}| + \max_{x\in[a,b],y\in\mathbf{R}}|\frac{\delta(x,y)}{1+y^2}|\end{aligned}$$

Comme $\quad v(x)\leq\delta(x,y)\leq w(x).$

Donc $\quad |\delta(x,y)\leq\max(|v(x)|,|w(x)|).$

C'est à dire :

$$|\bar{f}(x,y)| \leq \max_{x\in[a,b]}|f(x,\delta)| + \max_{y\in\mathbf{R}}|\tfrac{y}{1+y^2}| + \max(|v(x)|,|w(x)|) \qquad (I)$$

De plus

$$\max_{y\in\mathbf{R}}|\frac{y}{1+y^2}| \leq \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Les deux fonctions v et w sont continue sur [a,b] donc bornés par une constante notée M_1.
Alors l'inégalité (I) implique que :

$$|\bar{f}(x,y)| \leq \max_{x\in[a,b]}|f(x,\delta)| + \frac{1}{2} + M_1$$

D'où, $\exists M>0$ tel que $\max_{x\in[a,b]}|f(x,\delta)| + \frac{1}{2} + M_1 \leq M$. on a :

$$|\bar{f}(x,y)| \leq M.$$

Il reste à montrer que $v\leq u\leq w$ sur [a,b], auquel cas $\bar{f}=f$.
Pour cela, il suffit de montrer que $v\leq u$ sur [a,b].
C'est à dire $v(x)\leq u(x), \qquad \forall x\in[a,b]$

Raisonnons par l'absurde. Supposons

$$\exists x_0 \in]a,b[, v(x_0) > u(x_0)$$

En posant

$$d(x) = v(x) - u(x)$$

Il vient que $d(x_0) > 0$.
Puisque

$$d(a) = v(a) - u(a) \leq \alpha - u(a) \leq 0$$
$$d(b) = v(b) - u(b) \leq \beta - u(b) \leq 0$$

Alors il existe un intervalle $J = [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ tel que $d(\alpha) = d(\beta) = 0$ et $d(x) > 0, \forall x \in]\alpha, \beta[$. Il esiste donc $x_1 \in]a, b[$, Tel que

$$\max_{x \in [\alpha, \beta]} d(x) = d(x_1)$$

Avec $d'(x_1) = 0$ et

$$d''(x_1) \leq 0 \qquad 1$$

$$d(x_1) > 0 \qquad 2$$

De (1), il vient que $v''(x_1) \leq u''(x_1)$ et de (2) , on a $v(x_1) > y(x_1)$.

On en déduit donc que $\bar{f}(x, u(x_1)) = f(x, v(x_1) + \frac{u(x_1) - v(x_1)}{1 + u^2(x_1)}$

$$\begin{aligned} u''(x_1) \geq v''(x_1) \quad &\Leftrightarrow \quad \bar{f}(x_1, u(x_1)) \geq \bar{f}(x_1, v(x_1)) \\ &\Leftrightarrow \quad \bar{f}(x_1, u(x_1)) \geq f(x_1, v(x_1)) \\ &\Leftrightarrow \quad f(x_1, v(x_1)) + \frac{u(x_1) - v(x_1)}{1 + u^2(x_1)} \geq f(x_1, v(x_1)) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{-d(x_1)}{1 + u^2(x_1)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad d(x_1) \leq 0. \end{aligned}$$

Contradiction avec le fait que $d(x_1) > 0$

■

Corollaire 2.1 (Résultat d'existence et d'unicité) .

Si $f : [a, b] \times R \to R$ est une fonction continue, croissante par rapport à y, alors le problème

$$\begin{cases} y'' = f(x, y), \qquad a < x < b \\ \qquad y(a) = \gamma \\ \qquad y(b) = \delta \end{cases} \tag{2.6}$$

Comme $(\gamma,\delta) \in R^2$. *Admet exactement une solution* $y \in C^2([a,b])$.

Démonstration.

2.2.0.1 Existence de Solution

Construisons une sous et sur solution au problème comme suit :

$$\begin{aligned} v(x) &= m + \int_a^x (\int_a^t f(s,0)ds)dt \leq 0 \\ w(x) &= M + \int_a^x (\int_a^t f(s,0)ds)dt \geq 0, \end{aligned}$$

où les constantes m et M vérifiant pour tout $x \in [a,b]$

$$m \leq -\int_a^x (\int_a^t f(s,0)ds)dt + \min(0,\gamma,\delta) \leq -\int_a^x (\int_a^t f(s,0)ds)dt + \max(0,\gamma,\delta) \leq M$$

Alors par construction $v \leq w$, de plus $v''(x) = f(x,0) \geq f(x,v(x))$ car $v(x) \leq 0$ et f est croissante par rapport à y.
De plus

$$v(a) = m \leq \min(0,\gamma,\delta) \leq \gamma$$

Et

$$v(b) = m + \int_a^b (\int_a^t f(s,0)ds)dt \leq \min(0,\gamma,\delta) \leq \delta$$

Et $w''(x) = f(x,0) \leq f(x,w(x))$ Alors :

$$w(a) = M \geq \max(0,\gamma,\delta) \geq \gamma$$

$$w(b) = M + \int_a^b (\int_a^t f(s,0)ds)dt \geq \max(0,\gamma,\delta\delta) \geq \delta$$

D'apès le théorème 2.1 le problème (2.6) admet au moins une solution $y \in C^2([a,b])$

2.2.0.2 Unicité de Solution

Soient y_1, y_2 deux solutions du problème (2.6). En posant $Z = y_1 + y_2$, on a :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{U}} : \begin{cases} Z'' = y_1'' - y_2'' = f(x,y_1) - f(x,y_2) & a < x < b \\ Z(a) = \gamma - \gamma = 0 \\ Z(b) = \delta - \delta = 0 \end{cases}$$

En Multipliant l'équation du problème $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ par Z et en intègrant par partie sur [a,b], il vient

$$\begin{aligned}\int_a^b Z''(x)Z(x)dx &= [Z'(x)Z(x)]_a^b - \int_a^b [Z']^2(x)dx \\ &= \int_a^b [f(x,y_1) - f(x,y_2)](y_1 - y_2)dx\end{aligned}$$

Ona $[Z'(x)Z(x)]_a^b = 0$ car $Z(a) = Z(b) = 0$. cela implique

$$-\int_a^b [Z']^2(x)dx = \int_a^b [f(x,y_1) - f(x,y_2)](y_1 - y_2)dx \geq 0$$

Car f est croissante par rapport à y .
Cela implique

$$-\int_a^b [Z'(x)]^2 dx \leq 0$$

Par suite

$$-\int_a^b [Z'(x)]^2 dx = 0$$

Donc

$$Z'(x) = 0 \qquad a < x < b.$$

D'où

$$Z(x) = c, \qquad \forall x \in [a,b].$$

Comme $Z(a) = 0$, alors $Z(x) = Z(a) = 0, \forall x \in [a,b]$. Cela implique que $Z \equiv 0$ sur [a,b].
D'où

$$y_1 \equiv y_2, \forall x \in [a,b].$$

■

Théorème 2.2 *Soit le problème aux limites*

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} y'' = f(x,y,y'), \qquad a \leq x \leq b, \\ a_1 y(a) - a_2 y(a) = \alpha, \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = \beta \end{cases} \tag{2.7}$$

Avec $a_1, a_2, b_1, b_2 \geq 0; a_1 + a_2 > 0, b_1 + b_2 > 0$ et supposons satisfaites les hypothèses suivantes :

1. *Il existe v, w deux fonctions de classe* C^2 *sous et sur-solutions avec $v \leq w$ sur [a,b].*

2. *f est continue et μ-lipschtzienne par rapport à la $3^{ème}$ variable sur l'ensemble*

$$\mathcal{K} = \Big\{ \ (x, y, z) \in [a, b] \times \mathrm{R}^2, v(x) \leq y \leq w(x). \ \Big\}$$

Alors le problème(2.7) admet au moins une solution $u \in \mathrm{C}^2([a, b])$ telle que $v(x) \leq u(x) \leq w(x), \forall x \in [a, b]$

Démonstration. La fonction f est supposée μ-lipschitzienne par rapport à la $3^{ème}$ variable sur $\mathcal{K}$.
Alors

$$\exists \mu > 0, |(f(x, y, z_1) - f(x, y, z_2)| \leq \mu |z_1 - z_2|, \forall z_1 \geq z_2$$

Soit un réel $c > \max_{a \leq x \leq b}(|v'(x)|, |w'(x)|)$ et considérons pour $(x, y, z) \in \mathcal{K}$ une première modification f^* de la fonction f définie par :

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, c), & si \quad z \geq c \\ f(x, y, z), & si \quad |z| \leq c \\ f(x, y, -c), & si \quad z \leq -c \end{cases}$$

Tel que f^* continue et bornée et étendue à $[a, b] \times \mathrm{R}$ par la fonction :

$$f^{**}(x, y, z) = \begin{cases} f^*(x, v(x), z), & si \quad y \leq v(x) \\ f^*(x, w(x), z), & si \quad y \geq w(x) \end{cases}$$

Puis une dexième modification de f^{**} donnée par :

$$\bar{f}(x, y, z) = f^{**}(x, (\delta(x, y)), z) + \frac{y - \delta(x, y)}{1 + y^2}.$$

Où

$$\delta(x, y) = \max(v(x), \min(y, w(x)))$$

La fonction $\bar{f}$ est continue et bornèe sur $[a, b] \times R^2$ et μ-lipschitzienne. En effet :
Montrons

$$\exists M > 0, |\bar{f}(x, y, z)| \leq M, \qquad \forall (x, y, z) \in [a, b] \times \mathrm{R}^2$$

Soit $(x, y, z) \in [a, b] \times R^2$, on a :

$$\begin{aligned} \bar{f}(x, y, z) &= |f^{**}(x, (\delta(x, y)), z) + \frac{y - \delta(x, y)}{1 + y^2}| \leq |f^{**}(x, (\delta(x, y)), z)| + |\frac{y}{1 + y^2}| + |\frac{\delta(x, y)}{1 + y^2}| \\ &\leq \max_{(x,y,z) \in [a,b] \times \mathrm{R} \times [-c,c]} |f^{**}(x, (\delta(x, y)), z)| + \max_{y \in \mathrm{R}} |\frac{y}{1 + y^2}| + \max_{(x,y) \in [a,b] \times \mathrm{R}} |\frac{\delta(x, y)}{1 + y^2}| \end{aligned}$$

Raisonmant comme dans le théorème 2.1, il vient que $\bar{f}$ est bornée sur $\mathcal{K}$.

Montrons que est $\bar{f}$ est μ-lipschitzienne .

Montrer que $\bar{f}$ est μ-lipschitzienne , il suffit de montrer qur f^* est μ-lipschitzienne
on prend $z_1 \geq c$ et $z_2 \leq -c$ alors

$$\begin{aligned}|f^*(x,y,z_1) - f^*(x,y,z_2)| &= |f(x,v,c) - f(x,v,-c)| \\ &\leq \mu|c+c| \\ &\leq \mu|z_1 - z_2|\end{aligned}$$

Et aussi si $|z_1| \leq c$ et $z_2 \geq c$ on a :

$$\begin{aligned}|f^*(x,y,z_1) - f^*(x,y,z_2)| &= |f(x,v,z_1)| - |f(x,v,c)| \\ &\leq \mu|z_1 - c| = \mu(c - z_1) \\ &\leq \mu|z_2 - z_1| = \mu|z_1 - z_2|.\end{aligned}$$

Alors $\bar{f}$ est aussi $\mu - lipschitzienne$ et borné donc le problème (2.7) admet au moins une solution $u \in C^2[a,b]$.

Maintenant montrons que $v(x) \leq u(x) \leq w(x)$, tel que v et w sont sous et sur solution respectivement du problème(2.7).
On suppose que $d(x) = v(x) - u(x)$ admet un maximum strictement positive en un point $x_m \in (a,b)$ nous avons donc deux cas qui peuvent ètre vérifiés que :

2.2.0.3 • Premièr Cas :

On prend $x_m \in]a,b[$, on a :

$$d(x_m) = v(x_m) - u(x_m) > 0 \Rightarrow v(x_m) > u(x_m)$$

$$d'(x_m) = v'(x_m) - u'(x_m) = 0 \Rightarrow v'(x_m) = u'(x_m)$$

Et

$$d''(x_m) = v''(x_m) - u''(x_m) \leq 0 \Rightarrow v''(x) \leq u''(x)$$

Donc

$$0 \geq d''(x_m) \geq \bar{f}(x_m, v(x_m), v'(x_m)) - \bar{f}(x_m, u(x_m), u'(x_m)).$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} 0 \geq f^{**}(x_m, \gamma(x_m, v(x_m)), v'(x_m)) &+ \frac{v(x_m) - \gamma(x_m, v(x_m))}{1 + v^2(x_m)} - \\ f^{**}(x_m, \gamma(x_m, u(x_m)), u'_m(x)) &- \frac{u(x_m) - \gamma(x_m, u(x_m))}{1 + u^2(x_m)} \end{aligned}$$

Cela implique

$$\begin{aligned} 0 \geq d''(x_m) \geq f^{**}(x_m, v(x_m)), v'(x_m)) &+ \frac{v(x_m) - v(x_m)}{1 + v^2(x_m)} - \\ f^{**}(x_m, v(x_m), u'(x_m)) &- \frac{u(x_m) - v(x_m)}{1 + u^2(x_m)} \end{aligned}$$

Car

$\gamma(x_m, v(x_m)) = \max(v(x_m), \min(v(x_m), w(x_m))) = \max(v(x_m), v(x_m)) = v(x_m)$

et

$\gamma(x_m, u(x_m)) = \max(v(x_m), \min(u(x_m), w(x_m))) = \max(v(x_m), u(x_m)) = v(x_m)$.

Donc

$$0 \geq d''(x_m) \geq f^{**}(x_m, v(x_m)), v'(x_m)) - f^{**}(x_m, v(x_m), u'(x_m)) - \frac{u(x_m) - v(x_m)}{1 + u^2(x_m)}$$

On a $v(x_m) \geq u(x_m)$, alors

$$0 \geq d''(x_m) \geq f^{*}(x_m, v(x_m), v'(x_m)) - f^{*}(x_m, v(x_m), u'(x_m)) - \frac{u(x_m) - v(x_m)}{1 + u^2(x_m)}.$$

Comme $c > \max(|v'(x_m)|, |w'(x_m)|)$, alors $c > v'(x_m)$ donc :

$$f^{*}(x_m, v(x_m), v'(x_m)) = f(x_m, v(x_m), v'(x_m)).$$

C'est à dire

$$0 \geq d''(x_m) \geq f(x_m, v(x_m)), v'(x_m)) - f^{*}(x_m, v(x_m), u'(x_m)) + \frac{v(x_m) - u(x_m)}{1 + u^2(x_m)}$$

. Donc

$$0 \geq d''(x_m) \geq f(x_m, v(x_m), v'(x_m)) - f^{*}(x_m, v(x_m), v'(x_m)) + \frac{d(x_m)}{1 + u^2(x_m)}$$

Il vient que $d(x_m) \leq 0$.

D'où l'inégalité $v(x) \leq u(x)$ sur [a,b] est satisfaite.

Pour démontré le deuxième cas, on a besoin du lemme suivant :

2.2.0.4 •Deuxième Cas :

On prend $x_m = a$ et $d(x) < d(a), \forall x \in]a, b[$.

On a :

$$d(x) < d(a) \Rightarrow v(x) - u(x) < v(a) - u(a).$$

De plus, on a :

$$a_1 v(a) - a_2 v'(a) \leq \alpha \tag{1}$$

$$a_1 u(a) - a_2 u'(a) = \alpha. \tag{2}$$

On soustrait (2) de (1), il vient que :

$$a_1 v(a) - a_2 v'(a) - a_1 u(a) + a_2 u'(a) \leq 0.$$

Cela implique que :

$$a_1(v(a) - u(a)) - a_2(v'(a) - u'(a)) \leq 0.$$

Puis

$$a_1 d(a) - a_2 d'(a) \leq 0.$$

par suite

$$a_1 d(a) \leq a_2 d'(a).$$

Et

$$0 \leq \frac{a_1}{a_2} \leq d'(a)$$

Donc $d'(a) \geq 0$.

$\exists \epsilon > 0$ telle que $d(x) > 0$,et on a pour tout $x \in (a, a + \epsilon)$.

$$\begin{aligned} d''(x) &= v''(x_) - u''(x) \\ &\geq \bar{f}(x, v(x), v'(x)) - \bar{f}(x, u(x), u'(x)). \end{aligned}$$

Raisonmons comme dans le première cas, on trouve

$$\begin{aligned} d''(x) &\geq f^*(x, v(x), v'(x)) - f^*(x, v(x), u'(x)) - \frac{u(x) - v(x)}{1 + u^2(x)} \qquad (I) \\ &\geq f^*(x, v(x), v'(x)) - f^*(x, v(x), u'(x)). \end{aligned}$$

puisque f^* est μ-lipschitzienne.
Alors

$$|f^*(x, v(x), v'(x)) - f^*(x, v(x), u'(x))| \leq \mu|v'(x) - u'(x)|.$$

C'est à dire

$$-\mu|v'(x) - u'(x)| \leq |f^*(x, v(x)), v'(x)) - f^*(x, v(x), u'(x))| \leq \mu|v'(x) - u'(x_)|.$$

Donc

$$|f^*(x, v(x)), v'(x)) - f^*(x, v(x), u'(x))| \geq -\mu|v'(x) - u'(x)|$$

De (I) , on a :

$$d''(x) \geq -\mu|v'(x) - u'(x)|$$

C'est à dire

$$d''(x) \geq -\mu|d'(x)|, \ \forall x \in (a, a+\epsilon) \qquad (*)$$

Pour arrive à une contradiction, nous alons établir l'assertion suivante

$$F = \left\{ \ \exists x_0 \in J = (a, a+\epsilon), d'(x_0) > 0 \ \right\} \qquad (**)$$

En effet, supposons le contraire $\forall x \in J, d'(x) \leq 0$
Soit $x \in J$, on a :

$$d''(x) \geq -\mu|d'(x)| = \mu d'(x)$$

La fonction $f : x \to d'(x)e^{-\mu x}$ est croissante, car

$$\begin{aligned}(d'(x)e^{-\mu x})' &= d''(x)e^{-\mu x} - \mu d'(x)e^{-\mu x} \\ &= [d''(x) - \mu d'(x)]e^{-\mu x} \geq 0.\end{aligned}$$

Puisque $e^{-\mu x} \geq 0$ Donc

$$d'(x)e^{-\mu x} \geq d'(a)e^{-\mu a} \geq 0, \qquad \forall x \in J$$

Donc $d'(x) \geq 0$.

D'ou $d'(x) \equiv 0$ sur J.

Par suite, $d(x) \equiv cte$ sur J

Comme $d(x) = d(a), x \in J$, alors on a une contradiction avec le fait que $d(x) < d(a)$.

De l'inégalité (*) et (**) ,on a : $\exists \delta > 0$,tel que

$$d'(x) > 0, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

on a

$$\frac{d''(x)}{d'(x)} \geq -\mu$$

On intègre les deux membres, on trouve

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d''(x)}{d'(x)} dx \geq \int_{x_0}^{x} -\mu dx.$$

Par suite

$$ln(\frac{d'(x)}{d'(x_0)}) \geq -\mu(x - x_0).$$

Donc

$$\frac{d'(x)}{d'(x_0)} \geq e^{-\mu(x-x_0)}.$$

D'où

$$d'(x) \geq d'(x_0)e^{-\mu(x-x_0)} > 0.$$

On continue ainsi de suite jusqu'au point b on aurra $d'(b) > 0$ et $0 < d(a) < d(b)$. D'après les condition aux limites, on a :

$$b_1 v(b) + b_2 v'(b) \leq \beta \qquad (1)$$

$$b_1 u(b) + b_2 u'(b) = \beta. \qquad (2)$$

On soustrait (2) de (1), on trouve

$$b_1(v(b) - u(b)) + b_2(v'(b) - u'(b)) \leq 0.$$

Par suite

$$b_1(v(b) - u(b)) \leq -b_2(v'(b) - u'(b)) \leq 0.$$

Donc

$$b_1 d(b) \leq -b_2 d'(x) \leq 0.$$

Alors $b_2 \leq 0$ mais $b_2 \geq 0$ donc $b_2 = 0$ comme $b_1 + b_2 > 0$ donc $b_1 > 0$ c'est à dire $0 < b_1 d(b) < 0$, d'où la contradiction,

Il reste à montrer que $\bar{f} = f$. Pour que le probleme (2.7) admet au moins un solution. Pour cela, il suffit de montrer $\exists N > 0, |y'(x)| \leq N$.

On a déja démontré qu'il existe une constante M tel que :

$$|\bar{f}(x, y, z)| \leq M$$

Mais

$$\int_a^\infty \frac{s}{M} ds = \frac{1}{M} \int_a^\infty s ds = \frac{1}{M} [\frac{1}{2} s^2]_a^\infty = +\infty$$

d'où la condition (A) est vérifiée.

De plus $\exists \delta > 0, |y(x)| \leq \max_{[a,b]}(|v(x)|, |w(x)|) \leq \delta$. D'après le lemme(2.1) , on a :

$N > 0$ telle que $|y'(x)| \leq N$. Si on prend $c > \max_{[a,b]}(N, \max_{[a,b]}(|v'(x)|, |w'(x)|)$ et on utilise la définition de $\bar{f}$, on trouve que :

$$f = \bar{f}.$$

on conclut que le problème (2.7) admet une solution $y \in \mathrm{C}^2([a, b]$

■

CHAPITRE 3

LES SOLUTIONS POUR LES PROBLÈMES DE TYPE NEUMANN

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux quelques résultats d'existence et unicité de solutions pour des problèmes de Sturm-Lioville de type **Neumann**, [6, 7, 9, 10, 11, 13, 14].

Corollaire 3.1 *Si $f : [a, b] \times R \to R$ est une fonction continue et croissante par rapport à la deuxi 'eme variable , alors le problème de Neumann :*

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x)), a < x < b \\ y'(a) = \gamma \\ y'(b) = \delta \end{cases} \tag{3.1}$$

Admet pour tout $(\gamma, \delta) \in R^2$ une solution si et seulement s'il existe une constante $c \in \mathbf{R}$, telle que :

$$\int_a^b f(x, c)dx = \delta - c.$$

Démonstration.

3.0.0.1 Condition nécessaire

Soit $y \in \mathbf{C^2}([a, b])$ une solution de problème (3.1) on a :

$$y''(x) = f(x, y(x))$$

On intègre les deux membres de a à b, On trouve :

$$\int_a^b y''(x)dx = \int_a^b f(x, y(x))dx.$$

Donc

$$[y'(x)]_a^b = \int_a^b f(x, y(x)).$$

Par suite

$$\int_a^b f(x, y(x)) = y(b) - y(a).$$

D'où

$$\int_a^b f(x, y(x)) = \delta - \gamma.$$

Comme la fonction y est bornée, alors $\exists m, M \in R$:

$$m \leq y(x) \leq M.$$

Introduisons la fonction $F : [m, M] \to R$, définie par

$$t \to F(t) = \int_a^b f(x,t)dx.$$

La fonction f est continue sur [m,M].
De plus, la croissante de f sur [a,b], implique que :

$$F(m) \leq F(t) \leq F(M), \forall t \in [m, M]$$

En vertu du théorème des valeurs intermédiare, il existe $c \in]m, M[$ tel que :

$$F(c) = \delta - \gamma.$$

3.0.0.2 Condition suffisante

Une suppose qu'il existe $c \in R$ tel que $\int_a^b f(x,c)dx = \delta - \gamma$.

Soit φ une solution du problème lineaire, telle que :

$$\begin{cases} \varphi'' = f(x,c) \\ \varphi'(a) = \gamma \\ \varphi'(b) = \delta \end{cases}$$

Soit C_1, C_2 deux constante telle que

$$C_1 + \varphi(x) \leq c \leq C_2 + \varphi(x), \forall x \in [a, b]$$

Puis considérons les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} v(x) = C_1 + \varphi(x) \\ w(x) = C_2 + \varphi(x) \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} v''(x) = \varphi''(x) = f(x,c) \geq f(x, v(x)) \\ v'(a) = \varphi'(a) = \gamma \\ v'(b) = \varphi'(b) = \delta \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} w''(x) = \varphi''(x) = f(x,c) \geq f(x, w(x)) \\ w'(a) = \varphi'(a) = \gamma \\ w'(b) = \varphi'(b) = \delta. \end{cases}$$

cela montre que v et w sont respectivement sous et sur solution du problème (3.1).
En vertu de théorème 2.2, le problème (3.1) admet au moins une solution.
■

Remarque 3.1 *Dans le théorème (2.1) on a l'unicité et l'éxistence de solutions pour le problème de Dirichlet mais le cas de corollaire précédent on a seulement l'existence de solution pour le problème de Neumann.*

Exemple 3.1 *considérons le problème de Neuman linéaire suivant :*

$$\begin{cases} y''(x) = f(x), \qquad \forall x \in [a,b] \\ y'(a) = \gamma \\ y'(b) = \delta \end{cases}$$

En vertu du corollaire(3.1), on en déduit que le problème (3.1) admet une solution si et seulement si

$$\int_a^b f(x)dx = \delta - \gamma.$$

Corollaire 3.2 *Soit $f \in \mathbf{C}([a,b] \times R, R)$ une fonction vérifiant la condition de lipschitz unilatérale suivante :*

$$\exists k \in [0, \frac{\pi}{b-a}], f(x,y_1) - f(x,y_2) \geq -k^2(y_1 - y_2), \forall x \in [a,b], \forall y_1 \geq y_2 \qquad (B)$$

Alors le problème

$$\begin{cases} y''(x) = f(x,y(x)), \qquad a < x < b \\ y'(a) = \gamma \\ y'(b) = \delta \end{cases} \qquad (3.2)$$

Admet pour tout $(\gamma, \delta) \in R^2$ une solution unique $y \in \mathbf{C^2}([a,b])$.

Démonstration.

3.0.0.3 Existence de solution.

On choisit deux constante $c_1 < c_2$ telle que $c_1 < a < b < c_2$ et $c_2 - c_1 < \frac{\pi}{k}$.

Soit $y_p \equiv \varphi : [a,b] \to \mathbf{R}$ solution particulière de l'équation suivante :

$$y'' + k^2 y = f(x,0) \qquad (*)$$

On sait que la solution homogène de cette équation est

$$y_h(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx).$$

On pose $A = -\sin(kc_1), B = \cos(kc_1)$.

Alors

$$y_h(x) = \sin[k(x - c_1)].$$

comme $y_G(x) = y_h(x) + y_p(x)$, alors

$$y_G(x) = \sin[k(x - c_1)] + \varphi(x), \qquad (c)$$

solution générale de l'équation (3.2).

On prend m et M suffisamment petit et grand respectivement, sur (a,b), on a :

$$v(x) = m\sin[k(x - c_1)] + \varphi(x) \leq \min(0, \gamma, \delta)$$

Et

$$w(x) = M\sin[k(x - c_1)] + \varphi(x) \geq \min(0, \gamma, \delta)$$

Cela implique :

$$\begin{aligned} v''(x) &= -mk^2\sin(k(x - c_1)) + \varphi(x) \\ &= -k^2(v - \varphi) + \varphi'' \\ &= -k^2 v + (\varphi'' + k^2\varphi) \end{aligned}$$

En utilisant les définition de v et w, on trouve :

$$v''(x) = -k^2 v(x) + f(x, 0) \qquad (1)$$

$$w''(x) = k^2 w(x) + f(x, 0) \qquad (2)$$

En utilisant (3.2) et de condition de lipschitz unilatérale de f, on trouve :

$$\begin{aligned} v''(x) &\geq f(x, v(x)) - f(x, 0) + f(x,) \\ &= f(x, v(x)) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} w''(x) &\geq f(x,w(x)) - f(x,0) + f(x,0) \\ &= f(x,w(x)) \end{aligned}$$

De plus

$$v(a) = m\sin(k(a-c_1)) + \varphi(a) \leq \gamma$$
$$v(b) = m\sin(k(b-c_1)) + \varphi(b) \leq \delta$$

Et

$$w(a) = m\sin(k(a-c_1)) + \varphi(a) \geq \gamma$$
$$w(b) = m\sin(k(b-c_1)) + \varphi(b) \geq \delta$$

les fonctions v t w sont respectivement sous et sur solution, d'où l'existence de solution par le théorème 2.2.

3.0.0.4 Unicité de solution.

On pose $Z = y_1 - y_2$ telle que $y_1 > y_2$ et

$$\begin{cases} y_1(x) = f(x, y_1(x)) \\ y_1(a) = \gamma \\ y_1(b) = \delta \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} y_2(x) = f(x, y_2(x)) \\ y_2(a) = \gamma \\ y_2(b) = \delta \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} Z''(x) &= y_1''(x) - y_2''(x) \\ &= f(x,y_1(x)) - f(x,y_2(x)) \\ &\geq -k^2(y_1 - y_2) \\ &= -k^2 Z \end{aligned}$$

On se base sur le lemme suivant :

Lemme 3.1 *Soit $x_1 < x_2$ tel que $x_2 - x_1 < \frac{\pi}{k}(k > 0)$ et soit Z une fonction de classe $\mathbf{C^2}([a,b])$, telle que :*

$$\begin{cases} Z'' + k^2 Z \geq 0, \qquad x \in (x_1, x_2) \\ Z(x_1) \leq 0, Z(x_2) \leq 0 \end{cases}$$

Alors $Z(x) \leq 0, x \in [x_1, x_2]$.

La fonction différence de solution $Z = y_1 - y_2$ vérifie alors

$$Z'' = f(x, y_1) - f(x, y_2) \geq -k^2 Z, \forall Z > 0.$$

Par suite

$$\begin{cases} Z'' + k^2 Z \geq 0, & x \in (x_1, x_2) \\ Z(x_1) = Z(x_2) = 0. \end{cases}$$

Or, d'après le lemme(3.1), $Z(x) \leq 0$ sur [a,b].
On a une contradiction avec le fait que $Z > 0$.

D'où l'unicité de solutions.

■

Corollaire 3.3 *Soit* $f \in C([a, b] \times R, R)$ *une fonction vérifiée a condition de signe suivante :*

$$\exists M_0 > 0, yf(x, y) > 0, \forall y \in R, |y| \geq M_0.$$

Alors le problème

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x)), & a < x < b \\ \alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) = \gamma \\ \beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b) = \delta. \end{cases} \tag{3.3}$$

Où $\alpha_i, \beta_i > 0(i = 1, 2)$ *admet pour tout* $(\gamma, \delta) \in R^2$ *au moins une solution* $y \in C^2$.

Démonstration.
Soit $M \geq M_0$, on pose : $v(x) = -M$ et $w(x) = M$.

Alors , on a :

$$0 = v''(x) \geq f(x, -M, 0) = f(x, v, v')$$

$$0 = w''(x) \geq f(x, +M, 0) = f(x, w, w').$$

Car $(-M)f(x, -M, 0) > 0$ et $Mf(x, M, 0) > 0, \qquad \forall x \in [a, b]$.

Pour que v et w soient réspectivement sous et sur solution de problème (3.3) il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} \alpha_1 v(a) - \alpha_2 v'(a) \leq \gamma \\ \beta_1 v(b) + \beta_2 v'(b) \leq \delta \\ \alpha_1 w(a) - \alpha_2 w'(a) \geq \gamma \\ \beta_1 w(b) + \beta_2 w'(b) \geq \delta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -M\alpha_1 \leq \gamma \\ -M\beta_1 \leq \delta \\ M\alpha_1 \geq \gamma \\ M\beta_1 \geq \delta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \geq \frac{-\gamma}{\alpha_1} \\ M \geq \frac{-\delta}{\beta_1} \\ M \geq \frac{\gamma}{\alpha_1} \\ M \geq \frac{\delta}{\beta_1} \end{cases}$$

Donc, on choisit $M \geq \max(0, \frac{|\gamma|}{\alpha_1}, \frac{|\delta|}{\beta_1})$. Enfin d'après le problème (3.3) admet une solution.

■

CONCLUSION

Dans ce modeste mémoire, on a rappelé quelques outils **d'Analyse Mathématique** qui sont utiles et importants pour la théorie des **sous et sur solutions**.

En particulier, On a présenté quelques résultats d'existence et d'unicité de solutions pour quelques problèmes du **Sturm-Lioville** de **Dirichlet** et **Neumann**.

Notre travail est centré sur la méthode des **sous et sur solutions**

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.Adje, Sur et sous solution dans les equations differentielles discontinues avec conditions aux limites non linéaires, Dissertation n Doctorale, Universite Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve,1987.

[2] A.Adje, Sur et sous solutions generalises et problmes aux limites du second ordre, Bull. Soc. Math. Belg. 42 ser.B(1990),347-368

[3] L. Aguinaldo and K. Schmitt, On the boundary value problem $u''+u = \alpha u-$, $u(0) = 0 = u(\pi)$, Proc . A.M.S.68(1978),64-68.

[4] K. Ako, Subfunctions for ordinary differentiel equations IV, Funkcialaj Ekvacioj 11 (1968), 185-195.

[5] K. Ako, Subfunctions for ordinary differential equations V, Funkcialaj Ekvacioj 12 (1969),239-249.

[6] H.Amann, Or the number of solutions of nonlinear equations in ordered Banach spaces, J. Funct. Anal. 11 (1972), 346-384.

[7] A.Granas,R.B.Guenther et J.W, On a theorem of S.Berstein, Pacif J.Math 74 (1978), 67-82.

[8] E. Picard, Mémoire sur les equations aux dérivées partielles et la méthode des approximation successives .J.Math.6(1890), 145- 210.

[9] E. Picard,Sur l'application des méthodes d'approximations successives

a l'étude de certaines équations différentielles ordinaires.J.Math.9,217-27 ;

[10] M.Nagumo, On principally linear elliptic differential equation of the second order, Osaka Math.J.6(1945) 207 -229.

[11] S. Berstein, Sur certains équations différentielles ordinaires du seconde ordre. C.R Acad.Sci.Paris 138 (1904), 950-951.

[12] Boyce W.E. Diprima R.C., Elementary Diferential Equations with Boundary Value Problems, John wiley , Sons(1986).

[13] De Coster C. and habets P., Upper and lower solutions in the theory of ODE Boundary value problems : classical and recent results, CISM Courses and lectures 371 (1996), 1-78 ;

[14] Granas A., Guenther R. and Lee J.,Nonlinear Boundary Vlue Problems for Ordinary Differential Equation, Dissertationes mathematicae, Warszawa, Poland (1985).

[15] Lakhmikantham V. and Leela S., Differential and Integral Inequalities, vol I and II, Academic press (1969).

[16] E. Zeidler, Nonlinear Functional analysis and its application, Vol. I, Fixed point theorems, Springer-Verlag, New-York 1986.

[17] G. Flory, Topologie et analyse , classes préparatoires et universitaires, Tome 1, Exercices avec solution, Vuibert 1995.