

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université M'hamed Bougara de Boumerdès



Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Filière: Mathématiques

Spécialité : Modélisation stochastique et statistique.

Thème

Processus de diffusion et ses applications

Présenté par :

- ❖ **KHIRI Hanane.**
- ❖ **DOULACHE Cylia.**

Soutenu le 06 /06 / 2022 devant le jury composé de :

Mr M. ZITOUNI	Encadreur	UMBB
Mr K. KHALDI	Président	UMBB
Mme S. MEDDAHI	Examinatrice	UMBB

2021-2022

Remerciements :

D'abord, je remercie Dieu qui ma donné le souffle pour la réalisation de ce mémoire

Je tiens à exprimer mon respect et ma profonde gratitude à Mr MAHIEDDINE ZITOUNI pour m'avoir encadré et proposer un sujet aussi riche qu'intéressant, qui m'a initié aux applications des processus stochastiques dans plusieurs domaines, je lui suis reconnaissante pour son aide, ses remarques, ses conseils et sa patience à me guider et à me soutenir.

Merci pour m'avoir permis de mener ce travail à bien, j'ai beaucoup appris.

Mes plus chaleureux remerciements au président du jury Mr le professeur KHALDI, et à Madame Dr MEDDAHI examinatrice pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de prendre part au jury d'évaluation de ce travail.

Mes pensées se tournent vers mes parents, je les remercie pour le soutien affectif qu'ils m'ont apporté tout au long de ma vie et qui m'ont permis d'aller jusqu'au bout de mes rêves.

Je dédie mon mémoire :

A mon père Djamel et ma mère Yamina ; vous êtes pour moi une Source de vie car sans vos sacrifices, Votre tendresse et votre affection, je ne pourrais arriver jusqu'au bout. .Qu'Allah vous garde afin que votre regard puisse suivre ma destinée.

A mon Mari qui occupe une place dans mon cœur et, merci d'avoir été présent j'espère vous rendre fiers.

A mes enfants Anes et Safaa vous être mon plus beau cadeau.

A mes chers frères (Lounes, Walid , Badis). A ma sœur Dallel .

A toute personne qui porte le nom Doulache.

DOULACHE Cylia

Dédicace

Je tiens à dédier ce travail tous d'abord à mes chers parents Nacira et Rabeh. Merci pour votre patience et encouragement qui me pousse à donner le meilleur de moi-même, merci d'avoir été présent j'espère vous rendre fiers.

A ma chère sœur, Samira qui était toujours présente à mes côtés, merci de toute l'aide que m'avez apporté.

Aux frères qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui était toujours à mes côtés : Abd El-Hak et Anes, Mohamed Amine sans oublier sa femme Amina.

Et pour finir mes sincères remerciements vont à Mr ZITOUNI Mahieddine , notre promoteur, pour exprimer ma profonde gratitude pour votre disponibilité et vos idées originales qui ont servi à enrichir ce mémoire.

KHIRI Hanane



Sommaire

Sommaire

Chapitre 1 : Introduction a la notion des processus stochastiques

1.1 Généralités sur les processus aléatoires	4
1.2 Définition	4
1.3 Tribus	4
1.4 Tribu borélienne.....	4
1.5 Mesure.....	5
1.6 Martingale a temps continu.....	5

Chapitre II : Mouvement Brownien et sa construction

2.1 Introduction.....	6
2.2 Historique.....	8
2.3 Mouvement Brownien	10
2.3.1 Discrétisation dimensionnel.....	10
2.3.2 Définition de mouvement Brownien unidimensionnel	10
2.3.3 Définition de mouvement Brownien multidimensionnel.....	11
2.3.4 Propriété du mouvement Brownien	11
2.4 La construction de mouvement Brownien	12

Chapitre III : Equation différentielle stochastique

3.1 Equation différentielle stochastique	22
3.2 Solution de l'équation différentielle stochastique	23
3.3 Discrétisation	24

Chapitre IV: Processus de diffusion

4.1 Processus aléatoire.....	28
4.2 Processus trajectoire continu	28
4.3 Processus mesurable	28
4.4 Processus de markov	29
4.5 Exemples de processus de diffusion	29
4.5.1 Modèle de Vařicek	29
4.5.2 Modèle de cox-ingersoll-ross	30

Sommaire

4.5.3 Modèle de black-sholes	31
Chapitre V : Simulation	
5.1 Définition de simulation.....	35
5.2 Le bute de simulation :.....	35
5.3 Simulation et mouvement brownien :.....	35
5.4 Les méthodes de simulation :.....	36
5.4.1 La méthode de monte Carlo :.....	36
5.5 Exemples de simulation	37
chapitre VI : Application des processus de diffusion	
6.1.1 Application en physique (mécanique des fluides)	44
6.1.2 Expérience : Chute d'une goutte d'encre dans un liquide.....	44
6.1.3 Observation réelle	45
6.1.4 Une approche microscopique.....	46
6.2 Application en finance	56
6.2.1 Introduction à la finance de marché.....	56
6.2.2 Le modèle de Black-Scholes en pratique.....	56
6.2.3 Définition.....	63
6.2.4 Etude de modèle	63
6.2.5 Equation de Black-Scholes.....	65
Conclusion générale.....	68
Bibliographi	70



Introduction

Introduction

Introduction

Ce mémoire est une introduction au calcul stochastique et au processus de diffusion.

Les diffusions sont des fonctions aléatoires, qui sont utilisées dans plusieurs domaines tels la physique (mécanique des fluides), chimie, biologie, statistique et en finance ...

Ce travail de mémoire contient deux parties :

-Partie théorique : généralité, mouvement brownien et sa construction, processus de diffusion, et équation différentielle stochastique.

-Partie pratique : Une application en physique (diffusion d'un nombre de particules dans un fluide) et une application en finance à partir de modèle de Black Sholes...

Ce travail de mémoire est organisé comme suit :

Le **Chapitre 1** est une introduction aux processus stochastiques notamment les processus stochastiques à temps continu. Nous présentons d'abord les définitions nécessaires pour comprendre la structure des processus aléatoires ; tribu, mesure, filtration, martingale et temps d'arrêt ...

Dans le **Chapitre 2** on a commencée par une présentation du mouvement brownien qui est la base pour la construction de la plupart des modèles stochastiques et ainsi sa construction et quelque propriété élémentaire de l'intégrale stochastique.

Etant donné que le processus de Wiener est à variation non bornée, l'intégrale stochastique ne satisfait pas le calcul différentiel classique, alors il était nécessaire d'introduire le calcul d'Itô basé sur la «formule d'Itô » qui permet de différentier une fonction deux fois continûment différentiable qui sera présentée dans le cas unidimensionnel.

Introduction

Le **Chapitre 3** c'est l'étude de processus de diffusion qui est solution d'une équation différentielle stochastique, et nous avons donné quelque exemple de ce processus comme le modèle Vasicek, Cox-Ingersol-Ross et Black Sholes.

Le **Chapitre 4** : Nous avons énoncé quelques théorèmes d'existence et d'unicité d'une solution forte et faible d'une EDS. Ensuite, nous avons présenté une méthode de résolution des EDS linéaires basée sur le calcul d'Itô.

Le **Chapitre 5** : Nous avons donné quelques exemples de simulation.

Le **Chapitre 6** : Nous avons proposé deux applications sur les processus de diffusion la première en physique : diffusion d'une particule dans un fluide (nous avons pris comme exemple la diffusion d'une goutte d'encre dans un verre d'eau).

L'autre application du mouvement brownien aux mathématiques financières a l'aide de Modèle de Black-Scholes qui sert à calculer la valeur d'une option européenne.

Chapitre I :
***Introduction à la notion des processus
stochastiques***

1 Introduction a la notion des processus stochastique

1.1 Généralités sur les processus aléatoires

Pour E un espace métrique séparable, un *processus aléatoire à valeurs dans E* est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans l'espace des trajectoires de \mathbb{R}_+ dans E ; autrement dit c'est une trajectoire aléatoire (X_t) avec $t \geq 0$.

1.2 Tribus

Soient E ensemble et $B \subset P(E)$.

B est une tribu si $E \in B$, B est stable par passage complémentaire,

B est stable par réunion.

On note (E, B) espace mesurable

La plus petite tribu c'est l'intersection de toute les tribus s'appel tribu engendré.

1.3. Tribu Borélienne

La tribu de boréliens de \mathbb{R} est la plus petite tribu contenant tous les intervalles ouverts (ou fermés, ou ouverts à droite fermés à gauche ...).

On la note. $B_{\mathbb{R}}$

Chapitre I : Introduction a la notion des processus stochastiques

1.4. Mesure

μ de B dans $\overline{R^+}$ est mesure sur (E,B) si vérifier les conditions :

1/ $\mu(\emptyset)=0$.

2/ $\forall A_n \in B$ deux a deux disjoint $\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$.

Le triple (E,B, μ) est un espace mesuré.

1.5. Martingale et temps d'arrêt

1.5.1. Filtration

Soit (Ω, F, P) espace probabilisé si F_n sous suite croissante de $F, n \geq 0$ on dit F_n est une filtration sur (Ω, F, P) .

Si $(X_n, n \geq 0)$ adapté a la filtration F_n alors X_n est F_n mesurable.

1.5.2. Filtration et martingale

Soit F_n est filtration sur (Ω, F, P) , $(M_n, n \geq 0)$ est variable aléatoire réelle .

M_n est martingale si elle vérifier les trois condition :

1/ $(M_n, n \geq 0)$ est F_n mesurable.

2/ $E[|M_n|]$ es fini.

3/ $E[M_{n+1} / F_n] = M_n$.

si $E[M_{n+1} / F_n] \leq M_n, M_n$ est sur martingale.

$E[M_{n+1} / F_n] \geq M_n, M_n$ est sou martingale

1.5.3. Martingale à temps continu

Soit $(M_t, t \geq 0)$ processus stochastique adapté sur (Ω, F, P) , de filtration $F=(F_t, t \geq 0)$, M est martingale si : $\forall t \geq 0$,

1/ M_t est integrable.

2/ $E[|M_t|]$ est fini.

3/ $E[M_t / F_s] = M_s$.

Chapitre I : Introduction à la notion des processus stochastiques

1.5.4. Temps d'arrêt

Un temps aléatoire T est qualifié de *temps d'arrêt* quand, on peut déterminer le moment de ce temps à partir de la seule connaissance du passé de la trajectoire avant ce moment, sans chercher à savoir ce qui se passe ensuite. Informellement, il s'agit d'une règle pour crier « stop ! » à un certain moment suivant une règle déterministe dépendant de la trajectoire, trajectoire qu'on découvre au fur et à mesure.

Chapitre II :
Mouvement Brownien et sa
construction

2 Mouvement brownien et sa construction

2.1 Introduction :

La motivation de ce chapitre est la suivante :

Le mouvement brownien, ou processus de Wiener, est le plus important des processus stochastiques, en finance comme dans les autres sciences, d'une part parce qu'il sert à modéliser les perturbations aléatoires et d'autre part parce qu'il permet de construire des modèles simples sur lesquels des calculs peuvent être faits.

2.2 Historique :

Le philosophe et poète latin Lucrèce a donné une remarquable description du mouvement des particules selon les principes d'Épicure dans son œuvre *De la nature des choses* :

Si tu penses que les atomes, principes des choses, peuvent trouver le repos et dans ce repos engendrer toujours de nouveaux mouvements, tu te trompes et t'égarés loin de la vérité. Puisqu'ils errent dans le vide, il faut qu'ils soient tous emportés, soit par leur pesanteur propre, soit par le choc d'un autre corps. Car s'il leur arrive dans leur agitation de se rencontrer avec choc, aussitôt ils rebondissent en sens opposés : ce qui n'a rien d'étonnant puisqu'ils sont des corps très durs, pesants, denses, et que rien derrière eux ne les arrête. Et pour mieux comprendre comment s'agitent sans fin tous les éléments de la matière, souviens-toi qu'il n'y a dans l'univers entier aucun fond ni aucun lieu où puissent s'arrêter les atomes, puisque l'espace sans limite ni mesure est infini en tous sens, ainsi que je l'ai montré abondamment avec la plus sûre doctrine. Puisqu'il en est ainsi, il ne peut y avoir aucun repos pour les atomes à travers le vide immense ;

Chapitre II : Mouvement Brownien et sa construction

au contraire agités d'un mouvement continu et divers, ils se heurtent, puis rebondissent, les uns à de grandes distances, les autres faiblement, et s'éloignent peu. »

Mouvement de sphères (20 nm de diamètre) de latex fluorescentes dans de l'eau.

À l'été 1827, le naturaliste écossais Robert Brown aperçut dans le fluide contenant l'intérieur des grains de pollen de la *Clarkia pulchella*, de très petites particules agitées de mouvements apparemment chaotiques et non pas les grains de pollen eux-mêmes comme souvent mentionné. Brown n'est pas exactement le premier à avoir fait cette observation. Il signale lui-même que plusieurs auteurs avaient suggéré l'existence d'un tel mouvement (en lien avec les théories vitalistes de l'époque). Parmi ceux-ci, certains l'avaient effectivement décrit. On peut mentionner en particulier l'abbé John Turberville Nedham (1713-1781), célèbre à son époque pour sa grande maîtrise du microscope, qui attribua ce mouvement à une activité vitale.

La réalité des observations de Brown a été discutée tout au long du XX^e siècle. Compte tenu de la médiocre qualité de l'optique dont il disposait, certains ont contesté qu'il ait pu voir véritablement le mouvement brownien, qui intéresse des particules de quelques micromètres au plus.

Les expériences ont été refaites par l'Anglais Brian Ford au début des années 1990, avec le matériel employé par Brown et dans les conditions les plus semblables possibles. Le mouvement a bien été observé dans ces conditions, ce qui valide les observations de Brown.

Chapitre II : Mouvement Brownien et sa construction

2.3 Mouvement brownien :

Un mouvement brownien $(W_t)_{t \geq 0}$, est un processus stochastique adapté construit sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, P)$ tel que :

MB1) $\forall \omega \in \Omega, W_0(\omega) = 0$.

MB2) $\forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$, les variables aléatoires

$W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ Sont indépendants.

MB3) $\forall s, t \geq 0$ tel que $s < t$, la variable aléatoire $W_t - W_s$ est de distribution normale d'espérance 0 et de variance s .

MB4) $\forall \omega \in \Omega$, la trajectoire $t \rightarrow W_t(\omega)$ est continue.

2.3.1 Discrétisation dimensionnelle :

Exemple:

Approximation d'un mouvement brownien bidimensionnel par une marche aléatoire de 3000 pas dont chaque pas, est gaussien en abscisse et en ordonnée

Approximation d'un mouvement brownien tridimensionnel par une marche aléatoire de 1000 pas dont chaque pas est gaussienne en abscisse, en ordonnée et en cote.

2.3.2 Définition de mouvement brownien unidimensionnel :

Le mouvement brownien unidimensionnel est un processus stochastique dépendant du temps t et vérifiant :

1. Le processus est un processus gaussien, c'est-à-dire pour tous temps, le vecteur est un vecteur gaussien.
2. est presque sûrement continu. C'est-à-dire pour toute réalisation, la fonction est continue.
3. Quels que soient $t > s$, la moyenne nulle est et la covariance est $t-s$.

Chapitre II : Mouvement Brownien et sa construction

2.3.3 Définition du mouvement

brownien multidimensionnel :

Le mouvement brownien multidimensionnel est un processus où les processus sont des mouvements browniens indépendants.

Autrement dit le mouvement brownien d -dimensionnel est à valeurs dans et ses projections sur les espaces sont respectivement des mouvements browniens uni-, bi-, ..., $d-1$ -dimensionnels.

2.3.4 Propriétés du mouvement brownien :

- Le mouvement brownien est un processus Markovien.
- Le processus de Winner est continu
- Le processus de winner est une martingale car :
 1. $E(W_t) < \infty$
 2. $\forall s, t \geq 0$ tel que $s < t, E[W_t/F_s] = E[(W_t - W_s) + W_s/F_s] = E[W_t - W_s/F_s] + E[W_s/F_s] = E(W_t - W_s/F_s) + W_s$ (car indépendance de mouvement brownien) $= W_s$

Exemple de mouvement brownien :

Le mouvement brownien géométrique :

Prend toutes ses valeurs strictement positives et seuls les changements élémentaires de la variable aléatoire significatifs.

Le mouvement brownien géométrique représente une approximation raisonnable de l'évolution des cours en bourse parce qu'une quantifie qui suit un mouvement brownien.

Chapitre II : Mouvement Brownien et sa construction

2.4 La construction de mouvement brownien :

2.4.1 Méthodes de construction

Il existe plusieurs méthodes de construction du mouvement brownien :

1. La méthode de Kolmogorov (1933 et 1956) : Il a utilisé la notion de consistence et un critère de continuité, pour démontrer l'existence d'une probabilité P sur $\mathbb{R}^{[0,\infty[}$, $\mathcal{B}_{[0,\infty[}$ et un processus stochastique $((W_t)_{t \geq 0}, \mathfrak{F}_t^W)$ sur le même espace, tels que avec P , W est un mouvement brownien.

2. Wiener (1923), Lévy (1948), Ciesielski : ils ont fait une construction basée sur la théorie des espaces de Hilbert et sur le caractère gaussien du M.B.

3. Donsker (1951) : il a fait une construction sur l'ensemble $C([0, \infty[)$ d'une mesure, appelée mesure de Wiener, en utilisant la notion de convergence faible de variables aléatoires, il a montré que le mouvement brownien : s'obtient comme limite de promenades aléatoires renormalisées il se résume comme suit :

Définition :

Soit $(\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ Une famille de variable aléatoire de Bernoulli indépendantes identiquement distribuées définies sur l'espace $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ on a $P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = 1/2$.

On définit la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ comme suit :

$S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $n \geq 1$. La suite $(S_n)_{n \geq 0}$ s'appelle promenade aléatoire ou marche aléatoire.

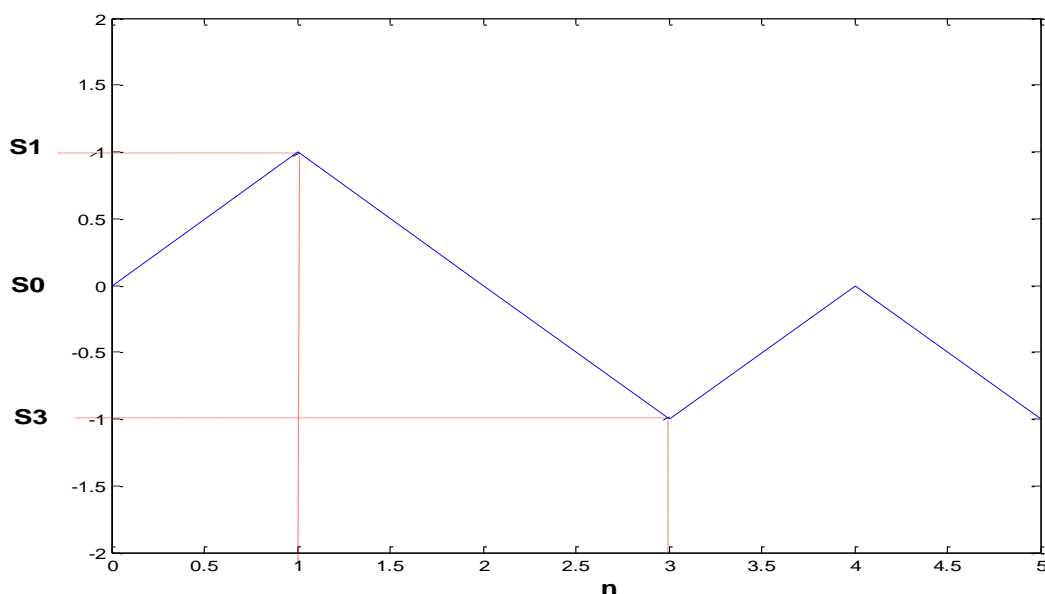
- La figure 1 : Représente une trajectoire de marche aléatoire pour $n=5$. On sait que $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$ plus généralement $\forall t \in [0,1]$ On construit un processus continu $Y = (Y_t)_{t \in [0,1]}$ par interpolation linéaire :

Chapitre II : Mouvement Brownien et sa construction

$Y_t = S_{[t]} + (t - [t])\xi_{[t]+1}$ Tel que $[t]$ désigne la partie entière de t c'est la normalisation de l'échelle du temps et de l'espace.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$X^n = \{ X_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_{nt}; t \geq 0 \}.$$



La figure 1 : Représente une trajectoire de marche aléatoire pour $n=5$.

Remarque :

Si on choisit $s = \frac{k}{n}$ et $t = \frac{(k+1)}{n}$ on obtient :

$X_t^n - X_s^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{i+1}$ qui indépendant de la tribu engendré par X^n jusqu'à l'instant s , car c'est aussi la tribu engendrée par les $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$. de plus, on a : $E(X_t^n - X_s^n) = 0$, $VAR(X_t^n - X_s^n) = \frac{1}{n}$.

Ensuite on prend une suite de variable aléatoire $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ indépendantes identiquement distribuées de moyenne nulle et de variance σ^2 avec $0 < \sigma^2 < \infty$. On prend la définition précédente de S_n, Y_t et on normalise par $1/\sigma$ dans la définition de X^n .

Chapitre II : Mouvement Brownien et sa construction

Théorème de Donsker :

La suite de processus (X^n) converge en loi vers un processus qui est un mouvement brownien de dimension 1.

La démonstration de ce théorème repose se résume comme suit :

Ce qui implique que X^n induit une probabilité P^n sur $(C([0,+\infty]), \beta_{(0,+\infty)})$ et la convergence en loi de X^n est équivalent à la convergence faible de la suite P^n .

Pour tout $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m < \infty$, $(x_{t_1}, \dots, x_{t_m})$ converge en loi vers $(w_{t_1}, \dots, w_{t_m})$ en effet : X^n est une fonction de (Ω, \mathfrak{F}) dans $(C([0,+\infty]), \beta_{(0,+\infty)})$, ou' $(C([0,+\infty])$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur $([0,+\infty])$ muni de la métrique (ou de la distance)

$$\rho(f, g) = \sum \frac{1}{2^n} \max_{0 \leq t \leq n} (|f(t) - g(t) \wedge 1|)$$

On a $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers la loi normal centré réduite $N(0,1)$

ce qui implique que $\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{[nt]}}$ converge aussi vers $N(0,1)$ et par suite

$$\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} = \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{[nt]}} \sqrt{\frac{[nt]}{n}}$$

converge vers $\sqrt{t} N(0,1) = N(0,t)$ et puisque les variables aléatoires $\xi_{[nt]}$, $S_{[nt]+1}$ sont indépendantes alors X^n converge vers $N(0,t)$ qui est la loi de W_t .

On faisant une démonstration plus approfondie et à l'aide d'outils d'analyse mathématiques (en particulier, le théorème d'Ascoli), on peut montrer qu'effectivement, X^n converge étroitement vers cette limite.

Chapitre II : Mouvement Brownien et sa construction

Remarque :

Cette construction fournit un outil important pour la simulation des trajectoires browniennes.

Marche aléatoire sur un réseau à x dimensions :

A/Marche aléatoire à deux dimensions :

On considère une marche aléatoire sur le réseau plan \mathbb{Z}^2 . Il y a ici quatre mouvements possibles à chaque site : en avant, en arrière, à droite, à gauche. Pour des longues marches, la distribution de la position finale du marcheur se comporte asymptotiquement comme une description gaussienne

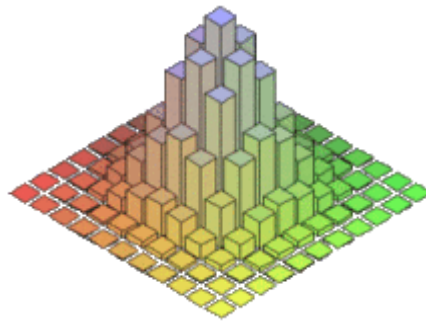


Figure2 : Représentation de la marche aléatoire

B/Marche aléatoire de Trois dimensions

Une marche aléatoire sur le réseau cubique \mathbb{Z}^3 . Il y a ici six mouvements possibles à chaque site : en avant, en arrière, à droite, à gauche, en haut, en bas.

Chapitre II : Mouvement Brownien et sa construction

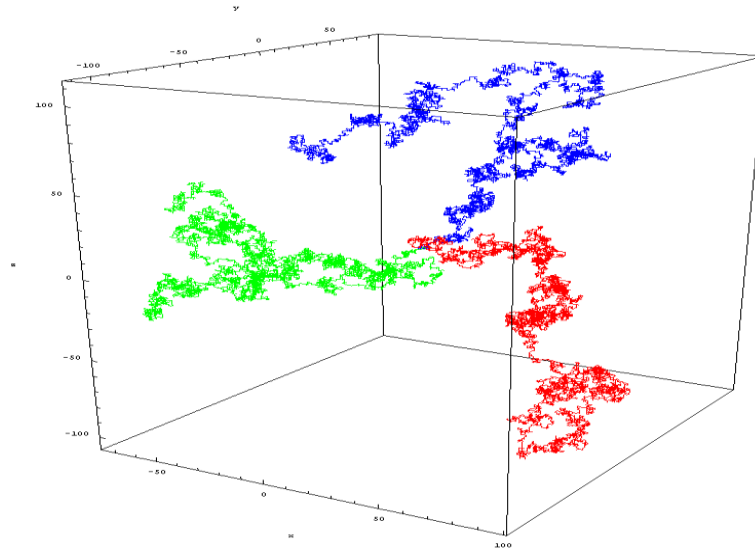


Figure 3: Marche aléatoire en 3 dimensions.

Distribution de mouvement Brownien

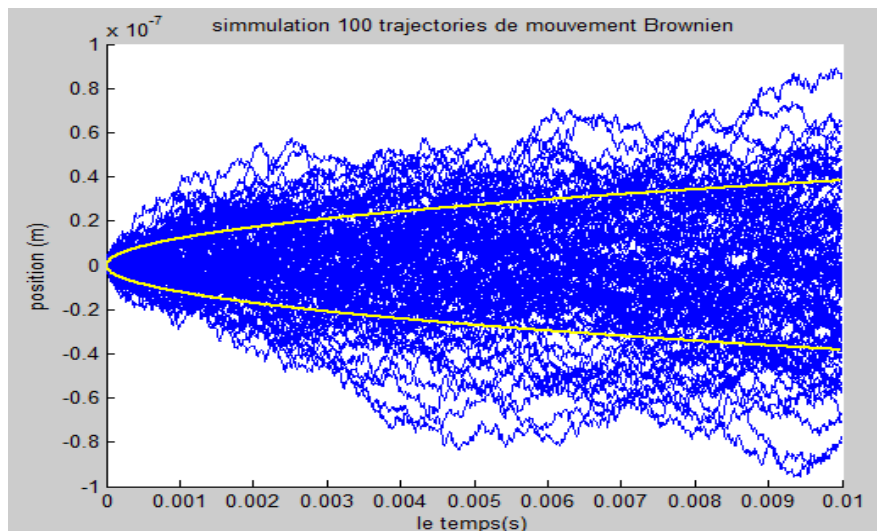


Figure4 : Trajectoire browniennes sont simulés pour $n=1000$.

Chapitre II : Mouvement Brownien et sa construction

Remarque : Les positions finales semblent se concentrer autour de 0, mais manière inconnue.

-La distribution des positions

Pour connaître la distribution de mouvement brownien on peut utiliser deux méthodes, la première est calculatoire et l'autre graphique.

Première méthode

On peut calculer explicitement beaucoup de lois de probabilité reliées au mouvement brownien.

La plus célèbre distribution c'est la distribution gaussienne on donne $t > 0$, on connaît la loi de probabilité du mouvement brownien au temps t :

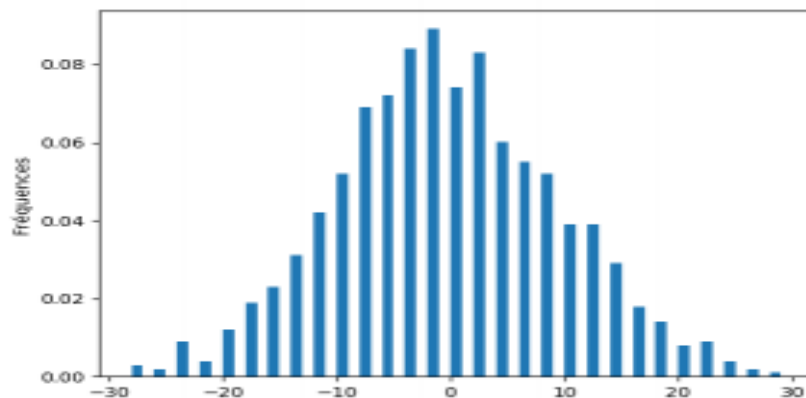
$$\text{Proba}(a < B_t < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx.$$

C'est la loi Normale, ou gaussienne (ici avec moyenne 0 et variance σ)

Deuxième méthode :

Graphiquement :

A l'aide d'un histogramme



L'histogramme 1: Représente les fréquences de la position finale associée aux 1000 particules de mouvement brownien.

Chapitre II : Mouvement Brownien et sa construction

Remarque

Cette deuxième méthode est plus simple que la première méthode.

Il est possible de visualiser la forme de la distribution des données en les représentant sous forme d'histogramme

Si on compare la forme de cet histogramme avec une courbe représentant une loi Normale il donne une idée du type de loi sous-jacente c'est une distribution gaussienne centrée en 0.

Nous intéressons à son écart-type :

Tableau 1: Représente le nombre de pas de chaque marche et sa valeur de l'écart-type

Nombre de pas	100	900	10000
Ecart-type	10,84	29,34	99,95

On peut remarquer que l'écart-type est égale racine de nombre de pas .

Conclusion

La distribution des positions finales d'une marche aléatoire de N pas, suit donc une distribution normale de moyenne 0 et d'écart-type \sqrt{N} .

Nous allons par la suite remplacer ces N pas par une durée T :

On aura donc une distribution normale de moyenne 0 et d'écart-type: \sqrt{T} .

1.3.1 Simulation d'une trajectoire du processus de Wiener :

Pour simuler la trajectoire de processus Brownien sur l'intervalle $[T_0, T]$ il suffit de simuler une variable normale de moyenne nulle et de variance $\Delta_t = \frac{T-T_0}{n}$ et les points de la trajectoire sont reliés par des droites affines.

1.3.1.1 Calcul d'Itô :

Le lemme d'Itô, ou encore formule d'Itô, est l'un des principaux résultats de la théorie du *calcul* stochastique. Ce lemme offre un moyen de manipuler le mouvement brownien ou les solutions d'équations différentielles stochastiques (EDS).

1.3.1.2 Formule d'Itô :

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un espace probabilisé muni d'une filtration et (B_t) avec $t > 0$ un

\mathcal{F}_t -mouvement brownien, on appelle processus d'Itô, un processus (X_t) avec $0 \leq t \leq T$ à valeurs dans \mathbb{R} tel que :

$$\forall t \leq T \quad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$$

Avec : $X_0 \mathcal{F}_0$ -mesurable

est dit semi-martingale et il se décompose en deux parties :

- ✚ $X_0 + \int_0^t H_s dB_s$ Est dite partie martingale du processus.
- ✚ $\int_0^t K_s ds$ Est dite partie à variation finie du processus.
- ✚ on dit que $F(X_t)$ est un processus d'Itô si F est une fonction deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t .

Chapitre II : Mouvement Brownien et sa construction

Exemple d'utilisation de la formule d'Itô :

Si : $f(x) = x^2$ et $X_t = B_t$, on a $K_s = 0$ et $H_s = 1$,


$$\text{Donc : } B_t^2 = 2 \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t 2 ds$$

On obtient :

$$B_t^2 - t = 2 \int_0^t B_s dB_s$$

comme $E \left(\int_0^t B_s^2 ds \right) < +\infty$ On trouve le fait que $B_t^2 - t$ est une martingale

Chapitre III :
Equations différentielles
stochastiques



3 Equations différentielle stochastiques

3.1 Equation différentielle stochastique :

Une équation différentielle stochastique est une généralisation de la notion d'équation différentielle prenant en compte un terme de bruit blanc.

Les EDS permettent de modéliser des trajectoires aléatoires, tels des cours de bourse ou les mouvements de particules soumises à des phénomènes de diffusion. Sa forme

$$dX_t = [a_1(x)X_t + a_2(t)]dt + [b_1(t)X_t + b_2(t)]dw_t$$

Où a_1 a_2 b_1 b_2 sont deux fonctions de temps, mesurables au sens de Lebesgue et bornée sur $[0, T]$.

Et dw_t est la différentielle d'un mouvement brownien w_t .

Existence et unicité des solutions des EDS :

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes sur b et σ pour avoir un résultat d'existence et d'unicité pour

$$x_t = z + \int_0^t b(s, x_s)ds + \int_0^t \sigma(s, x_t)dB_s \quad (1)$$

Théorème :

Si b et σ sont des fonctions continues telles qu'il existe une constante

$K < \infty$ AVEC

-Condition de Lipchitz

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$$

-Restriction sur la croissance $|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|)$

-E (Z^2) Alors pour $T \geq 0$, (1) admet une solution unique dans

l'intervalle $[0, T]$.

L'unicité signifie que si X_t $0 \leq t \leq T$ et Y_t $0 \leq t \leq T$ sont deux solutions de (1) alors

$$\forall 0 \leq t \leq T \quad X_t = Y_t$$

Chapitre III : Equations différentielle stochastiques

Remarque :

L'ESD (1) admet une unique solution à indistinguabilité près sur $[0, T]$.
, la solution est dite processus de diffusion de dérive b

3.2 Solution de l'équation différentielle stochastique :

Il existe deux types de solutions d'EDS :

Les solutions fortes et les solutions faibles.

Lorsque la solution de l'EDS ne change pas pour une autre valeur du processus de Wiener, on parle de solution forte, dans le cas contraire, alors on parle à la solution faible.

3.2.1 La solution forte :

Une solution forte d'EDS est un processus

- Adapté à la filtration naturelle du mouvement brownien
- Une solution forte consiste à trouver un processus stochastique X existant sur le même espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$.

3.2.2 La solution faible :

Solution faible si nous pouvons construire :

-Un espace probabilisé filtré.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ est un mouvement brownien standard.

Remarque :

Si la solution forte est unique il y aura une unique solution faible mais la réciproque est fautive.

3.2.3 Comment résoudre une EDS :

Etape 1 : Il faut passer par la solution homogène

Etape 2 : On applique soit la formule d'Itô soit la formule d'IPP (intégration par partie) sur la transformation suivante :

$$Y(t, X) = \varphi_t^{-1} X_t$$

(La formule d'IPP : $d(X_t V_t) = X_t dV_t + V_t dX_t + d \langle X, V \rangle_t$) \square

3.3 Discrétisation :

En mathématiques appliquées, la discrétisation est la transposition d'un état continu (fonction, modèle, variable, équation) en un équivalent discret. Ce procédé constitue en général une étape préliminaire à la résolution numérique d'un problème ou sa programmation sur machine. Un cas particulier est la dichotomisation où le nombre de classes discrètes est 2, où on peut approcher une variable continue en une variable binaire.

La discrétisation la plus simple consiste à considérer les instants de discrétisation $t = 0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \dots$ pour ε très petit.

D'autres choix de discrétisation sont possibles, notamment quand il importe de connaître la trajectoire avec plus de précision sur certaines parties spécifiques.

Éventuellement, les instants de discrétisation pourront dépendre de la simulation elle-même : ainsi, si par exemple on cherche à savoir à quel instant la trajectoire dépasse un certain seuil pour la première fois, cela conduira à "zoomer" en choisissant des intervalles de temps plus petits quand la valeur du processus approche ce seuil, et le moment où cela se produira dépendra évidemment de la simulation.

3.3.1 Objectifs de choix de la discrétisation

Le choix de la discrétisation du temps doit assurer le meilleur compromis entre deux objectifs

Antithétiques : d'un côté, que la simulation discrétisée (avec interpolation) ressemble plus possible à la vraie trajectoire, ce qui suggère de prendre de très petits intervalles de temps ε ; de l'autre, que le coût de simulation : reste raisonnable, ce qui impose de ne pas prendre

Chapitre III : Equations différentielle stochastiques

trop d'instant de discrétisation. L'équilibre précis entre ces deux contraintes dépend des exigences exactes du problème.

3.3.2 Les différents types de méthode de discrétisation :

On compte également la méthode d'Euler Maruyama, et le bloqueur d'ordre 0 parmi la méthode de discrétisation 0.

Méthode de Maruyama :

La méthode de Maruyama est une méthode de résolution numérique approximative d'une équation différentielle stochastique

C'est une extension de la méthode d'Euler pour les équations différentielle ordinaire aux l'équation différentielle stochastique

Nous cherchons à simuler sous matlab la solution d'une équation différentielle stochastique de la forme :

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt$$

où σ et b sont connus bien sûr.

On a tenté d'appliquer ESD d'Euler Pour cela on prend $t = \text{linspace}(0,1)$, et on rentre la valeur initiale pour $X_0 = x_0$ un vecteur de taille d et on procède par itération

Chapitre III : Equations différentielle stochastiques

for i=2 :100

B(i, ∇)=sqrt(t(i))randn(1,d) afin de générer une loi normal de variance t
(préalablement on rentre B(1, ∇)=zeros(1,d))

X(I, ∇)=X(i-1, ∇)+\sigma(X(i-1, ∇))* (B(I, ∇)-B(i-1, ∇)+b(X(i-1, ∇))*(t(i)-t(i-1))

end

puis

plot3(X(:,1),X(:,2),X(3, ∇), 'r').

Chapitre IV :
Processus de diffusion

4 Processus de diffusion

En théorie des probabilités et en statistique, le processus de diffusion c'est une solution à une équation différentielle stochastique.

Il s'agit d'un processus de Markov en temps continu, Par exemple le mouvement Brownien et les processus d'Ornstein-Uhlenbeck...

4.1 Processus aléatoire

On suppose T ensemble

(E, τ) Espace mesurable,

(Ω, τ, P) espace mesuré,

N : ensemble négligeable.

4.2 Processus trajectoire continu

Soit $\omega \in \Omega$.

L'application $t \rightarrow X_t(\omega)$ c'est une trajectoire associée à ω .

On pose $T = \mathbb{R}^+$, $(E, \tau) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$

On dit que le processus trajectoire continu ou presque sûrement continue à droite si :

$\{\forall \omega \in \Omega, t \rightarrow X_t(\omega)\}$ Est continu à droite.

4.3 Processus mesurable

Un processus $(X_t(\omega), t \in \mathbb{R}^+)$ à valeur dans (E, τ) est mesurable si :

$(t, \omega) \rightarrow X_t(\omega)$ est mesurable de $(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F})$

Dans (E, τ) . Si l'ensemble $E = \mathbb{R}^n$ donc le processus à trajectoire continue est mesurable.

Chapitre IV : Processus de diffusion

4.4 Processus de Markov :

Le processus de Markov est un processus aléatoire sans mémoire tel que le présent ne dépend pas du passé.

Soit (E, τ) espace mesurable tel que $\forall x \in E \{x\} \in \tau$, soit

$$X = \{\Omega, F_t, F, X_t, (P_x)\}$$

Le processus de Markov vérifié :

1/ $\forall x \in E, P_x$ est une proba sur (Ω, F) .

2/ $\forall A \in F, x \rightarrow P_x(A)$ est E mesurable.

3/ est une variable aléatoire mesurable dans (E, τ)

4/ $\forall x \in E, P_x(X_0 = x) = 1$.

5/ $\forall t, h > 0, \forall x \in E, \forall L \in \tau$

$P_x(\in L / F_t) = P_{X_t}(X_h \in L)$. P_x Presque surement

6/ $E[f(X_{t+h}) / F_t] = E_{X_t}[f(X_h)]$

4.5 Exemples des processus de diffusion :

4.5.1 Modèle de Vašicek

La formule générale est

$$dr_t = \beta(\alpha - r_t)dt + \delta dW_t.$$

tel que $r_0, \beta, \alpha, \delta > 0$ constant

W : Mouvement brownien.

dt : Terme de processus d'Ornstein-Uhlenbeck s'interprète comme un retour à la moyenne long terme.

α : Vitesse de retour à la moyenne.

β : La volatilité du taux court.

Cette équation est utilisée pour étudier l'évolution des taux d'intérêt dans le modèle financier dit Vašicek. Un tel modèle est qualifié mean-reverting (retour à la moyenne) car, pour α et β positifs, le processus r_t

Chapitre IV : Processus de diffusion

tend vers α , quand t tend vers l'infini. Ce comportement se justifie intuitivement :

Si $\alpha > r_t$, $\beta(\alpha - r_t)$ est positif est le processus r est en moyenne croissant.

Quand $r_t = \alpha$, le processus est en moyenne constant et si $\alpha < r_t$,

le drift $\beta(\alpha - r_t)$ est négatif et le processus r est au moyenne décroissante.

Si l'on pose $X_t = r_t - \alpha$,

La solution explicite est donnée par :

$$r_t = (r_0 - \alpha)e^{-\beta t} + \alpha + \sigma \int_0^t e^{-\beta(t-u)} dw_u$$

1.3.1.3 Avantages et inconvénient:

Avantage :

- 1 /Il est gaussien donc il est facile a manipuler.
- 2 /La simulation est aisé parce que les formule sont explicites.
- 3/simple à comprendre d'un point de vue théorique et en informatique il fournit des réponses rapidement
- 3/Il faut calculer peu de paramètre.

Inconvénient:

- 1/Le premier défaut : comme le modèle de Vašicek suit un processus gaussien donc les taux peuvent être négatifs.
- 2/Il ya une corrélation des variations des taux entre elles.

4.5.2 Modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR):

Ce modèle a été développé en 1985 par Johnac-Cox,-Ingersoll et Ross

Est un modèle d'équilibre à un facteur qui utilise le processus de diffusion de racine carrée pour garantir que les taux d'intérêt sont toujours positifs.

En finance (CIR) permettant de modéliser l'évolution des taux d'intérêt cour terme.

Chapitre IV : Processus de diffusion

La formule générale :

La formule générale de modèle est :

$$dr_t = \beta(\alpha - r_t)dt + \delta \sqrt{r_t}dW_t. \text{ Avec :}$$

$$r_0 = X.$$

$X \geq 0$, α , μ , $\delta > 0$ constant.

α : La moyenne a long terme.

β : Vitesse de convergence a la moyenne.

δ : La volatilité de processus.

. W : Mouvement Brownien

La solution est :

$$r_t = r_u + \beta \int_u^t (\alpha - r_s) ds + \delta \int_u^t \sqrt{r_s} dW_s$$

La solution de l'équation différentielle est toujours positive.

Car la condition $\delta^2 < (2 \beta \alpha)$ qui assure la stricte positivité du processus $r^2(t)$.

Avantage:

- Les taux négatifs sont interdits.
- peut de paramètre à calculer.

4.5.3 Modèle de Black-Sholes :

Historique :

Le modèle de Black-Sholes est utilisé pour désigner deux concepts très proches :

- le modèle Black-Sholes ou modèle Black-Sholes-Merton est un modèle mathématique du marché pour une action, dans lequel le prix de l'action est un processus stochastique en temps continu ; par opposition au

Chapitre IV : Processus de diffusion

« modèle Cox Ross-Rubinstein » qui suit un processus stochastique en temps discret (les processus stochastiques sont des fonctions du temps aléatoires) ;

-l'équation aux dérivées partielles de Black-Sholes qui est l'équation satisfaite par le prix d'un dérivé d'un primitif.

Robert C. Merton a été le premier à publier un article développant l'aspect mathématique d'un modèle d'évaluation d'option en citant les travaux de Fischer Black et de Myron Sholes. Ceux-ci, publiés en 1973, se fondent sur les développements de théoriciens comme Louis Bachelier ou encore Paul Samuelson. L'apport fondamental du modèle de Black et Sholes est de mettre en rapport le prix implicite de l'option et les variations de prix de l'actif sous-jacent.

Robert Merton et Myron Sholes reçurent en 1997 le prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel pour leurs travaux. Fischer Black, décédé en 1995 et donc inéligible, a été cité comme contributeur.

L'équation de Black-Sholes c'est :

$$\frac{dX(t)}{dt} = X(t)(\mu + \sigma W(t)).$$

Avec $X(t)$ est le prix d'un actif sous-jacent t. On applique la formule d'Ito :

En utilisant le changement de variable

$$Y_t = \ln(X(t))$$

Chapitre IV : Processus de diffusion

Ce qui donne

$$dY_t = \frac{dX(t)}{X(t)} - \frac{\sigma^2 dt}{2} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt$$

La solution est donnée par l'intégrale stochastique suivante

$$Y_t = Y_{t_0} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \delta W_t$$

Revenant à la variable $X(t)$, on obtient

$$X(t) = X(t_0) \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \delta W_t \right)$$

Chapitre V :

Simulation

5 Simulation

5.1 Définition de simulation :

La simulation est une technique permettant d'étudier et analyser le comportement d'un monde réel ou d'un système imaginaire en le reproduisant sur une application informatique.

Une simulation consiste à travailler sur un modèle mathématique qui décrit le système.

5.2 Le but de simulation :

Les simulations aident les concepteurs à optimiser leurs systèmes en effectuant les modifications nécessaires et en obtenant de bon résultat.

Les utilisateurs peuvent exécuter les simulations plus rapidement que dans le monde réel, ce qui peuvent aider à comprendre plus que détails.

5.3 Simulation et mouvement brownien :

Concernant le mouvement brownien qui est un processus à temps continu. Il est impossible de simuler complètement sa trajectoire, même sur un intervalle de temps borné, expliquer et calculer sa valeur en un nombre infini d'instants.

On est donc obligé en pratique de discrétiser le temps ; c'est-à-dire qu'on ne simule pas la valeur du mouvement brownien en tous les instants, mais seulement en un nombre fini de petits intervalles.

Chapitre V : Simulation

5.4 Les méthodes de simulation :

Il existe plusieurs méthodes de simulation, la plus connue : la méthode de Monté Carlo.

5.4.1 La méthode de Monte Carlo :

On appelle méthode de Monte-Carlo toute méthode visant à calculer une valeur numérique, et utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes.

Le nom de ces méthodes, qui fait allusion aux jeux de hasard pratiqués à Monte-Carlo, a été inventé en 1947 par Nicholas Metropolis, est publié pour la première fois en 1949 dans un article co-écrit avec Stanislas Ulam.

Les méthodes de Monte-Carlo sont particulièrement utilisées pour calculer des intégrales en dimensions plus grandes que 1 (en particulier, pour calculer des surfaces, des volumes, etc.).
-La méthode de simulation de Monte-Carlo permet aussi d'introduire une approche statistique du risque dans une décision financière.

Elle consiste à isoler un certain nombre de variables-clés du projet tel que le chiffre d'affaires ou la marge... et à leur affecter une distribution de probabilités.

Pour chacun de ces facteurs, on effectue un grand nombre de tirages aléatoires dans les distributions de probabilité déterminées précédemment, afin de déterminer la probabilité d'occurrence de chacun des résultats.

Le véritable développement des méthodes de Monte-Carlo s'est effectué, sous l'impulsion de John Von Neumann et Stanislas Ulam notamment, lors de la Seconde Guerre mondiale et des recherches sur la fabrication de la bombe atomique.

Chapitre V : Simulation

Notamment, ils ont utilisé ces méthodes probabilistes pour résoudre des équations aux dérivées partielles.

5.5 Des exemples de simulation :

Programme 1.1 : Mouvement brownien géométrique

```
function[X] = brownien_geometrique (N,r,alpha,T)
% Mouvement brownien geometrique
T=1 ;
N=10000 ;
t = (0 :1 :N)' /N ;
r=1 ;
alpha=1
W = [0; cumsum(randn(N,1))]/sqrt(N) ;
t = t*T ;
W = W*sqrt(T) ;
Y = (r-(alpha^2)/2)*t + alpha * W ;
X = exp(Y) ;
plot(t,X) ;
holdon
plot(t,exp(r*t),' :') ;
axis([0T 0 max(1,exp(
(r-(alpha^2)/2)*T+2*alpha))])
title([int2str(N) '-mouvement brownien
geometrique'])
xlabel(['r = ', num2str(r) , ' et alpha = ',
num2str(alpha)])
holdoff
```

Chapitre V : Simulation

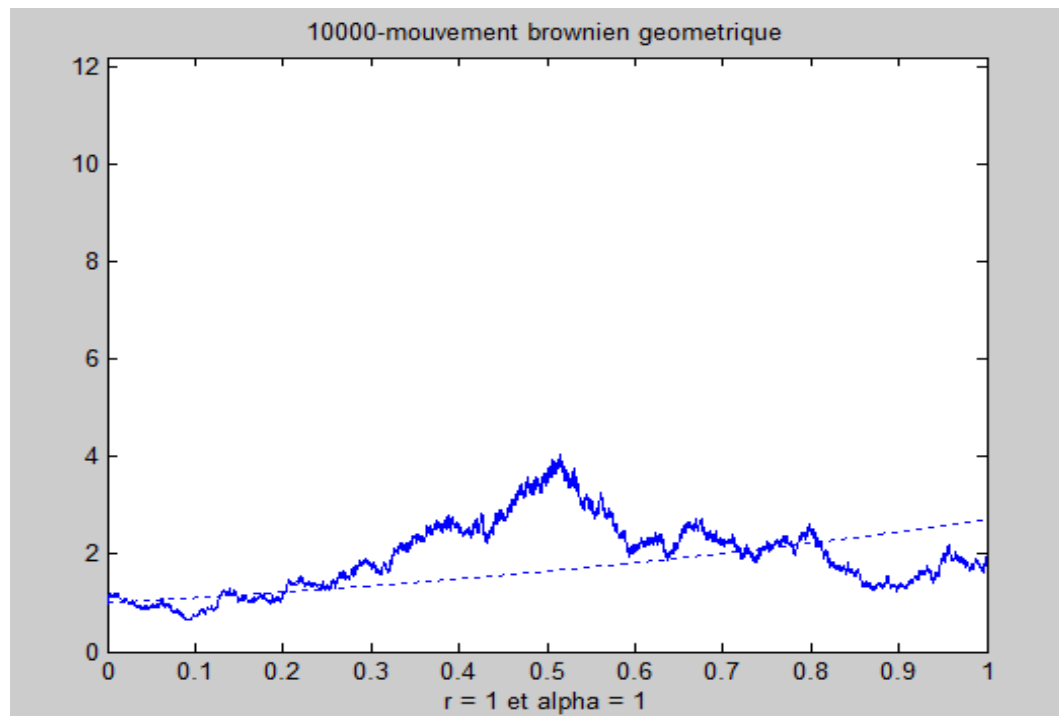


Figure 1.1 :1000 Mouvement Brownien géométrique

Programme 1.2 :

```
Simulation de mouvement Brownien de 'np'  
Particules en T secondes  
% Simulation de mouvement Brownien de 'np'  
Particules en T secondes  
clear;  
clc;  
T= input('Entrer la period de temps : ');  
% Temps en Secondes  
N=100.*T ;  
h=sqrt(T/N) ;  
np=input('Entrer le nombre de particule : ');  
% Nombre des Particules  
x = zeros(1,np);  
y = zeros(1,np);
```

Chapitre V : Simulation

```
z = zeros(1,np);
for j=1:np
for i=1:N
x(i+1,j)=x(I,j)+h*randn();
y(i+1,j)=y(I,j)+h*randn();
z(i+1,j)=z(I,j)+h*randn();
end
end
cmap = hsv(np);

% le graphe des particules.
For k=1 :np
plot3(x(:,k),y(:,k),z(:,k),'Color',cmap(k,∇));
holdon;
end
gridon ;
```

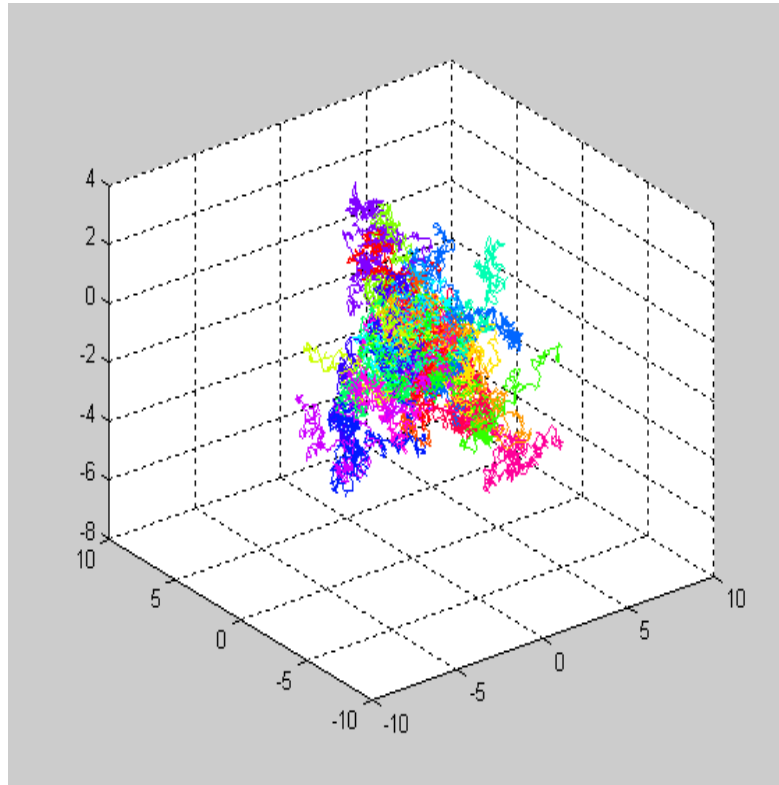


FIGURE 1.2 : Simulation de mouvement Brownien pour ‘np’ Particules et en T secondes en 3 dimension

Programme 1.3 :Modèle de Vasick

%Simulation d’un taux court à l’aide de Vasicek

beta=0.6;

alpha=0.5;

sigma=0.6;

T=1;

N=10000;

dt=T/N;

rzero=0.4;

rt(1)=rzero;

for i=1:N

rt(i+1)=rt(i)+alpha*(beta-rt(i))*dt*sqrt(dt)*randn(1);

Chapitre V : Simulation

```
end  
plot([0:dt:T],rt)  
title('graphe de simulation de Vasick sur le taux d'intérêt')
```

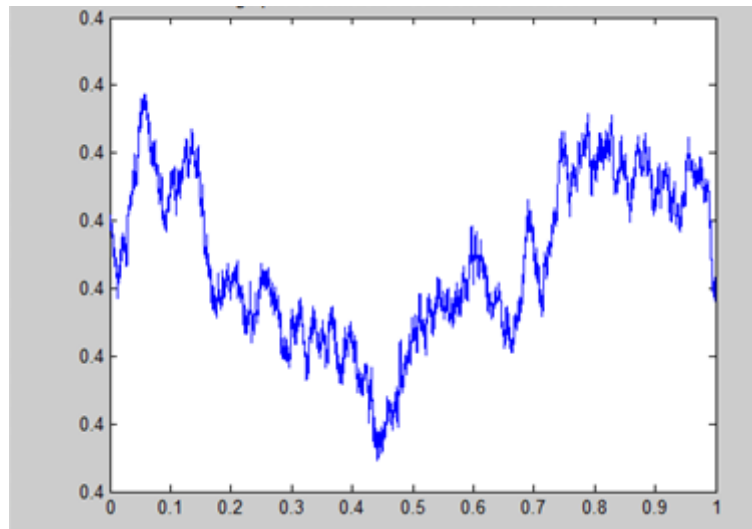


Figure 1.3 : Graphe de simulation de Vasick sur le taux d'intérêt.

Programme 1.4 : Discrétisation d'une EDS par la méthode d'Euler

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt$$

```
% discrétisation d'une EDS par la méthode d'Euler.
```

```
% eds est  $dX = \lambda * X dt + \sigma * \sqrt{X} dW$ ,
```

```
%  $X(0) = X_{zero}$ .
```

```
T=1; N=100; dt=T/N;
```

```
lambda=0.1; sigma=2; Xzero=1;
```

```
Xem=zeros(1,N+1);
```

```
Xem(1)=Xzero;
```

```
for j=1:N
```

```
  dW=sqrt(dt)*randn;
```

Chapitre V : Simulation

```
Xem(j+1)=Xem(j)+dt*lambda*Xem(j)+sigma*(Xem(j))*dW;  
end  
plot([0:dt:T],Xem,'m-');  
xlabel('t') ;ylabel('X')
```

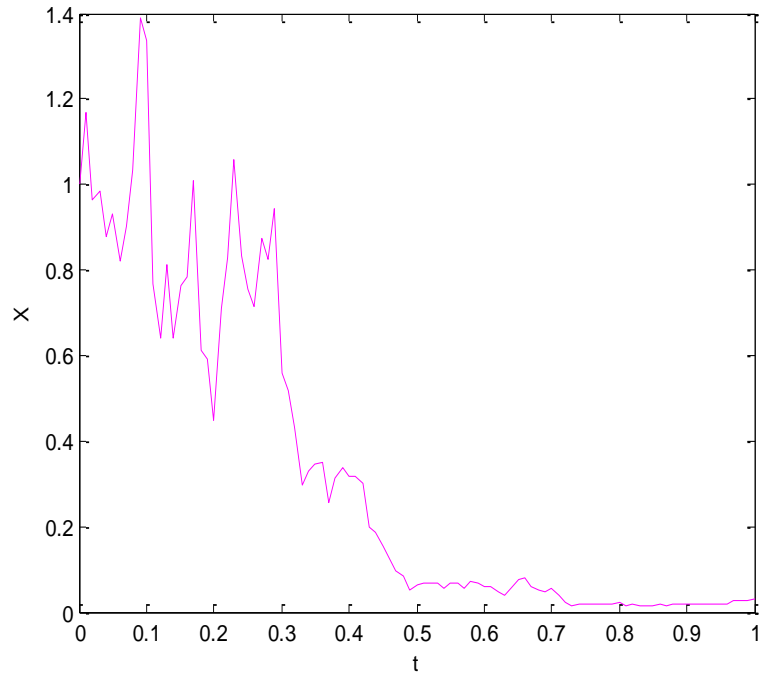


Figure 1.4 : Simulation d'une EDS par la méthode d'Euler

$$(dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt)$$

Chapitre VI :
Application des processus de
diffusion

6 .Application des processus de diffusion :

6.1 Application en physique (mécanique des fluides) :

Diffusion d'un nombre de particule dans un fluide

6.1.1 Introduction :

Dans le cadre de ce sujet, nous allons nous replonger dans les travaux de Brown, en décomposant notre travail selon plusieurs points.

Nous avons choisis comme particules une goutte d'encre est comme fluide un verre d'eau.

Une approche microscopique tout d'abord, identique à celle de Brown nous permettra de suivre le chemin aléatoire, le "randomwalk" d'une particule d'encre.

En démultipliant cette particule nous obtiendrons notre goutte d'encre et ce qui nous permettra ainsi de passer de réelle au microscopique.

Enfin nous suivrons la concentration de cette goutte par unité de temps, concentration qui sera liée à sa diffusion.

Pour finir nous jouerons sur les paramètres de diffusion, notamment le coefficient de diffusion et la dernière partie est consacrée à la conclusion de notre modélisation.

6.1.2 Expérience : Chute d'une goutte d'encre dans un liquide.

Le déroulement de l'expérience est très simple :

1/Remplir le verre d'eau. Laisser l'eau reposer pendant une minute.

2/Percer la cartouche et presser la juste au dessus du verre pour laisser tomber une goutte d'encre.

Chapitre VI :Application des processus de diffusion

6.1.3Observation réelle :

Un joli motif ; la goutte se sépare en plusieurs gouttelette. Plus le temps avance plus le motif est complexe.



Image 1 : Séparation en plusieurs gouttelettes.

Remarque :

La séparation de la goutte en plusieurs gouttelettes est due à la déformation de la goutte initiale en une structure instable.

6.1.4 Une approche microscopique :

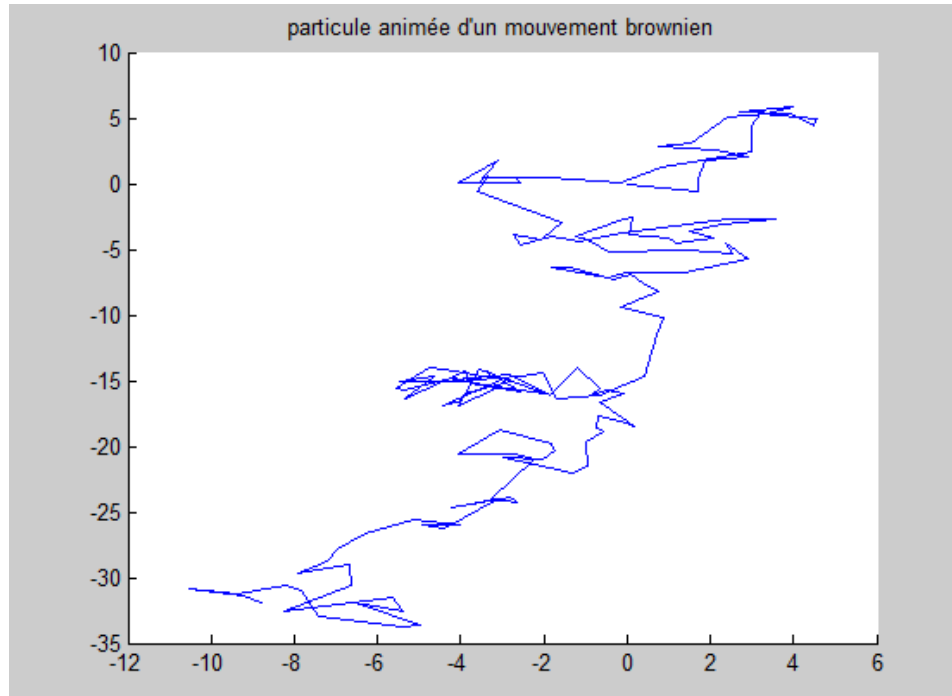


Figure 1.6: Mouvement brownien d'une particule dans un espace a 2 dimensions.

Comme notre goutte d'encre est composée de millier des particules mais non pas d'une seule, nous avons ajouté une boucle sur le programme Matlab (au programme : 1.7) permettant de générer plusieurs particules, tel que:

I_{pmax} =le nombre de particules.

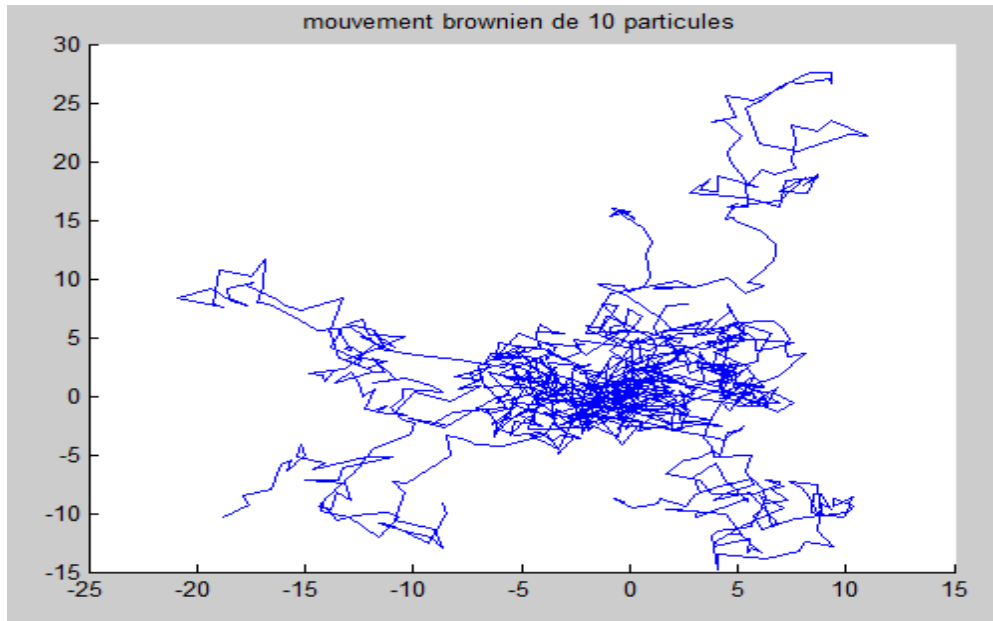


Figure 1.7 : Trajectoire de mouvement brownien de 10 particules indépendantes.

Le déplacement moyen des particules :

La diffusion et la marche aléatoire :

Le résultat de cette simulation nous donne donc l'évolution de la diffusion de notre goutte d'encre dans un verre d'eau

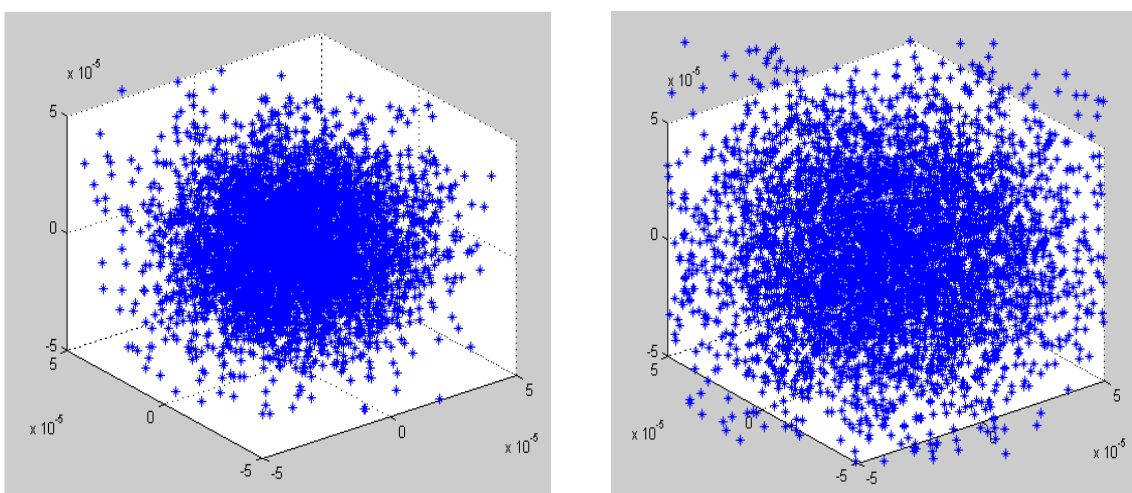


Image 2 : Image animée d'un programme Matlab dont on a extrait 2 images.

Chapitre VI : Application des processus de diffusion

Observation :

Le modèle de marche aléatoire ou la marche au hasard existe aussi en dimension plus grande pare exemple 3dimension

-Au temps 0 la particule est en l'origine.

-Au temps 1 : la particule fait un pas dans l'une des quartes directions possibles (Nord, Sud, Est, Oust) chaque direction étant choisi avec une probabilité $\frac{1}{4}$.

-Au temps 2 : la particule fait un second pas choisit selon les mêmes règles, indépendamment de premier pas et ainsi de suite

La formule d'Einstein pour le mouvement brownien :

Einstein établit que le déplacement moyen d'une particule brownienne sur un intervalle de temps de longueur t est égal à D_t Ou D est une constante appelée constante de diffusion.

La formule d'Einstein donne la valeur de la constant de diffusion D en terme de plusieurs paramètres.

$$D = \frac{RT}{6\pi\eta rN}$$

T : est la température.

r : le rayon de la particule.

η : est la viscosité du fluide.

R : est la constante universelle des liquides.

N : est le nombre d'Avogadro (nombre de molécule dans une mole)

Chapitre VI : Application des processus de diffusion

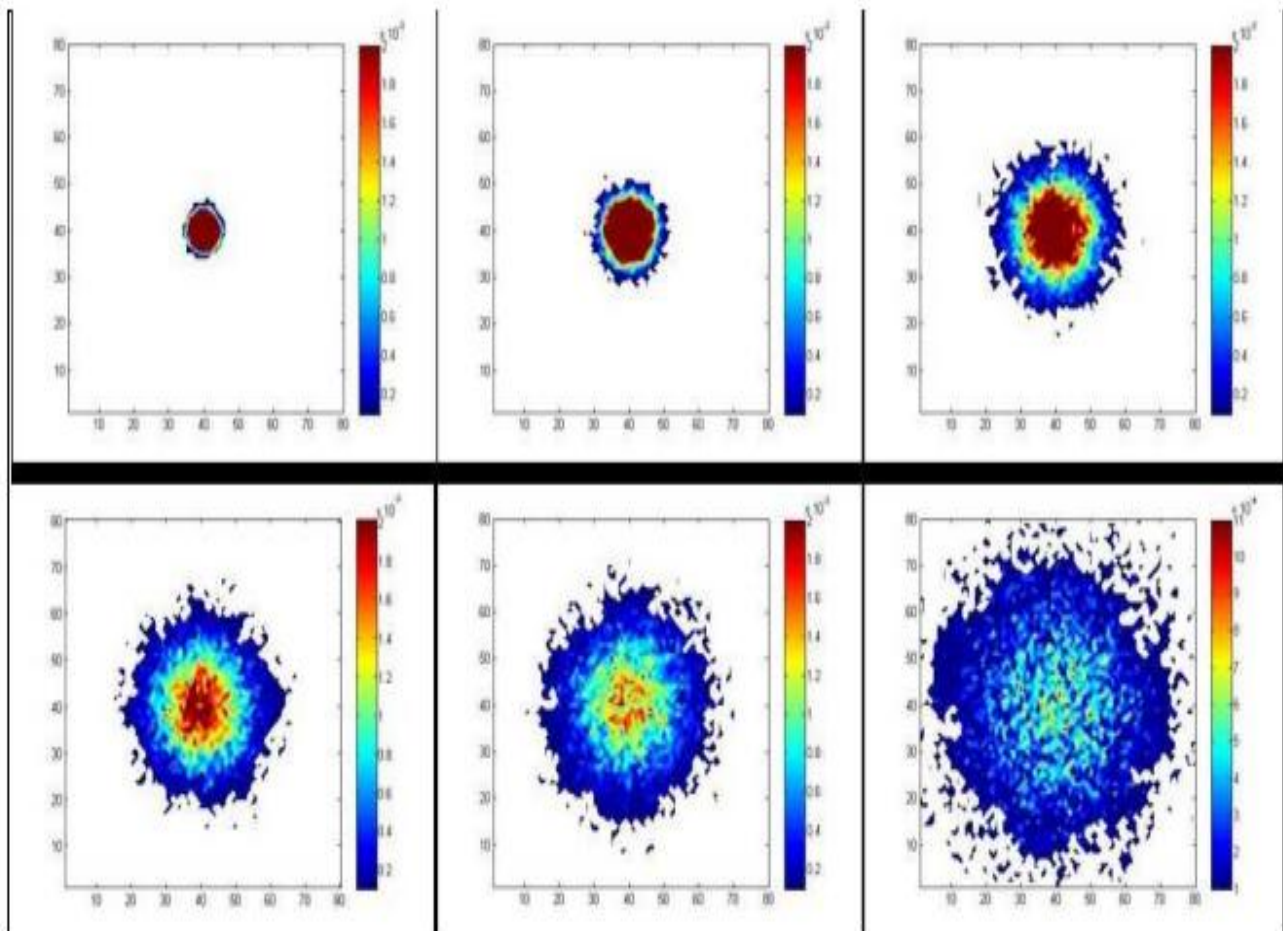


Figure 1.8: Représente 6 étapes de la diffusion d'une goutte d'encre en fonction de temps.

Les valeurs de temps sur 1, 2, 4, 5, 6 et 10 seconds.

Chapitre VI : Application des processus de diffusion

Tableau 2: Représente l'approximation de la concentration de deux point en fonction de temps

Le temps(s)	1	2	4	5	6	10
La concentration au point (40 ;40)	2×10^{-3}	$1,9 \times 10^{-3}$	$1,6 \times 10^{-3}$	$1,55 \times 10^{-3}$	$1,3 \times 10^{-3}$	5×10^{-4}
La concentration au point (40 ;60)	0	0	$0,1 \times 10^{-3}$	$0,2 \times 10^{-3}$	$0,85 \times 10^{-3}$	$4,5 \times 10^{-4}$

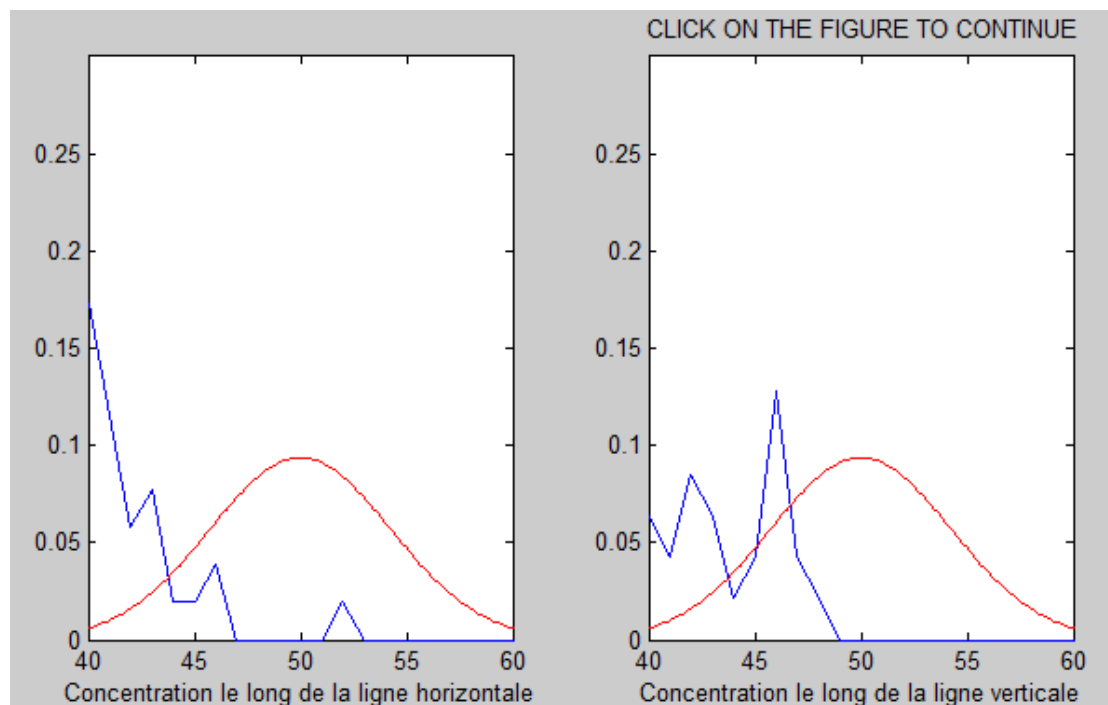


Figure 1.9 : Représente la concentration le long de la ligne horizontale et verticale.

Chapitre VI :Application des processus de diffusion

Observation :

A partir de figure 7 et tableau 2 on observe :

*La goutte initiale est d'abord centrée en (40,40), elle s'aplatit et prend la forme d'un anneau.

* la tore est instable et certaines parties de l'anneau deviennent plus grandes, il diffuse dans le verre.

*Les particules dans le verre d'eau se déplacent des zones de forte concentration vers les faibles concentrations de façon aléatoire pure.

La relation entre le temps et la concentration :

D'après le tableau on remarque que lorsque le temps augmente la concentration décroît.

Aussi dans la figure 8 on remarque que lorsque σ augmente la concentration diminue.

Conclusion :

Concrètement la diffusion est un échange de matière qui a lieu spontanément entre deux masses de fluide (dans notre cas la goutte d'encre et le fluide qui est l'eau).

Dans le même état physique (liquide), et à la même température, mais présentant une différence de concentration au cause de marche aléatoire des milliers des particules.

Cet échange se produit en l'absence de tout mouvement de masse de fluide.

Chapitre VI :Application des processus de diffusion

Programme 1.6 : Script général de marche aléatoire d'une seule particule.

```
clearall
close all
itmax=150;%nombre d'itération de la particule
x0=0;
y0=0;
for it=(1:itmax)
xa=x0+randn;%cordonner en x
ya=y0+randn;%cordonner en y
    line([xa x0],[ya y0]%vecteur
title('particule animée d'un mouvement brownien')
%changement des coordonner
    x0=xa;
    y0=ya;
end
```

Programme 1.7 : Script de mouvement des particules pour ipmax=10 :

```
clear all
close all
ipmax=10;
itmax=100;
for ip=(1:ipmax)
    x0=0;
    y0=0;
for it=(1:itmax)
xa=x0+randn;
```

Chapitre VI :Application des processus de diffusion

```
ya=y0+randn;  
% vecteur  
line([xa x0],[ya y0])  
title('mouvement brownien de 10 particules')  
% changement des coordonner  
    x0=xa;  
    y0=ya;  
end  
end
```

Programme 1.8 : Programme pour la diffusion d'une goutte d'encre dans un verre.

```
clear all;  
close all;  
ipmax=5000;  
itmax=15;  
xa(1:ipmax)=40;  
ya(1:ipmax)=40;  
xo=xa;  
yo=ya;  
x=[0:0.01:80];  
% boucle des concentrations  
for is=(0.6:0.2:1.6);  
    figure(1);  
    hold on;  
    % boucle de temps  
    for it=(1:itmax);  
        conc=zeros(80,80);  
        % nettoyage figure evite les superpositions  
        clf
```

Chapitre VI : Application des processus de diffusion

```
% boucle du calcul de la concentration
for ip=(1:ipmax);
    conc(round(xo(ip)),round(yo(ip)))=conc(round(xo(ip)),round(yo(ip)))+1;
end

% pour avoir les fonds des fenetres en blanc
conc2=conc; % pour ne pas mélanger avec conc de la gaussienne
conc2(find(conc==0))=NaN;
% conc en pourcentage ??
contourf(conc2./ipmax,[0:1:20]./ipmax); warning off; shading flat;
colorbar;
hold on
plot([0 80],[40 40], 'k-')
% boucle du tracé des particules
for ip=(1:ipmax);
    % attribution des x
    xo(ip)=(is*randn)+xa(ip);
    % attribution des y
    yo(ip)=(is*randn)+ya(ip);
    % conditions sur déplacements particules
    if xo(ip)>80 | xo(ip)<1 | yo(ip)>80 | yo(ip)<1
        xo(ip)=xa(ip);
        yo(ip)=ya(ip);
    end
    % boucle incrémentation de mouvement
    xa(ip)=xo(ip);
    ya(ip)=yo(ip);
end % for ip
end % for it
% comparaison théorie vs expérience
```

Chapitre VI :Application des processus de diffusion

```
is;  
hold on;  
clf  
plot(conc(40,+)/sum(conc(40,+)), 'g' )  
fick=1./sqrt(2*pi*is^2*itmax).*exp(-1/2*((x-40) ./(is.*sqrt(itmax))).^2);  
line(x,fick, 'color' , 'r' )  
end%for is
```

Chapitre VI :Application des processus de diffusion

6.2 Application en finance:

6.2.1 Une introduction à la finance de marché :

Actif financier :

Un actif financier est un titre ou un contrat négociable qui génère de la valeur ou un revenu pour l'investisseur, mais en contrepartie une certaine prise de risque.

Voici quelques exemples :

-Action : C'est un produit financier négociable de propriété sur une fraction du capital social d'une entreprise donnée. Chaque année, le propriétaire d'une action reçoit une fraction des bénéfices de l'entreprise sous forme de Dividendes.

-Obligation : Une obligation est un titre de créance. Lorsqu'un investisseur achète une obligation il prête à l'émetteur de l'obligation une somme d'argent, par conséquent l'émetteur (Ou le vendeur de l'obligation) est créancier et l'acheteur est prêteur.

Dans le langage financier, un portefeuille désigne l'ensemble d'actifs financiers distendus par l'investisseur.

-Une option :

Une option est un contrat entre un acheteur et un vendeur.

L'acheteur de l'option obtient le droit, et non pas l'obligation, d'acheter (Call) ou de vendre (Put) un actif sous-jacent.

-Call : est une option d'achat sur un actif sous-jacent
(Action, obligation,.....)

-Put : est une option contractuelle de vente par laquelle deux parties s'accordent pour échanger un actif à un prix fixé à une date prédéterminée.

-Prix fixe à l'avance (appelée Strike), à une date fixée à l'avance dans le contrat. Le vendeur s'engage

Chapitre VI : Application des processus de diffusion

à respecter les termes du contrat si l'acheteur décide d'exercer son option, en contrepartie, l'acheteur lui donne de l'argent. Si l'option n'est pas exercée, le vendeur a gagné un montant égal au prix de l'option.

Il existe deux types d'options, les options vanilles (ou simples) et exotiques (complexes). Les options vanilles sont les plus rencontrées sur le marché, il s'agit des options européennes et américaines.

-Une option européenne :

Une option d'achat européenne, appelée Call Européenne, donne le droit à son détenteur d'acheter une certaine quantité d'actif sous-jacent c'est à dire l'action ou la marchandise qu'on souhaite vendre (de valeur S_t à l'instant t) à une certaine date future, appelée maturité notée T , et à un prix fixé dans le contrat noté K appelée Strike. L'acheteur ayant donc le droit et non l'obligation d'exercer l'option à la maturité, il va exercer l'option si $S_T > K$ sinon il ne fait rien. La valeur réelle donc échangée à la maturité.

Modélisation des marchés financiers en temps continu :

Pour modéliser le prix d'un produit dérivé, nous avons besoin d'un modèle stochastique pour décrire la dynamique de l'évolution incertaine de l'actif sous-jacent. Un bon modèle doit capturer à la fois les propriétés statistiques de la dynamique du prix et s'intégrer efficacement dans la théorie de l'analyse stochastique. Le célèbre modèle de Black-Scholes est un compromis entre ces deux exigences et donne des formules explicites de prix d'options.

L'incertitude sur les marchés financiers est modélisée par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ où Ω représente tous les états du monde. La tribu \mathcal{F} représente la structure d'information globale disponible sur le marché

Chapitre VI : Application des processus de diffusion

F_t est une filtration croissante décrivant l'information disponible aux agents du marché à la date t , $F_t \subset F$. Dans le cas où l'horizon T des investisseurs sur le marché est fini, on suppose usuellement $F_T = F$. La propriété de croissance $F_s \subset F_t$, si $s \leq t$,

Traduit le fait que le marché n'oublie rien et donc qu'on dispose de plus en plus d'informations au fur et à mesure du temps. Une probabilité P qui donne les probabilités a priori des événements considèrent C 'est la probabilité historique ou objective.

6.2.2 Le modèle de Black Scholes en pratique :

La thèse fondamentale du modèle de Black-Scholes était que le prix de l'option d'achat est indiqué implicitement si le sous-jacent est échangé sur les marchés.

L'utilisation du modèle et de la formule Black-Scholes est très répandue sur les marchés financiers, à tel point que certaines cotations se donnent en niveau de volatilité plutôt qu'en prix absolu. En effet, les autres paramètres du modèle (durée à l'échéance, prix d'exercice, taux d'intérêt sans risque et prix du sous-jacent) sont facilement observables sur les marchés.

Cependant, le modèle de Black-Scholes ne permet pas de modéliser précisément le monde réel. L'expérience montre qu'en réalité la volatilité dépend du prix d'exercice et de la maturité.

Chapitre VI : Application des processus de diffusion

La volatilité : mesure l'ampleur et la rapidité de l'évolution du prix d'un actif sur un période de donnée.

En pratique, la surface de volatilité :

La volatilité implicite en fonction du prix d'exercice et de la maturité n'est pas plate. Souvent, pour une maturité donnée, la volatilité implicite par rapport au prix d'exercice a une forme de sourire (appelé le *smile* de volatilité) : à la monnaie, la volatilité implicite est la plus basse et plus on s'éloigne de la monnaie, plus elle est élevée. On constate par ailleurs que le *smile* n'est souvent pas symétrique sur le marché des actions : plus haut du côté *put* que du côté *call*. Cela est dû au fait que les acteurs de marché sont plus sensibles au risque de baisse qu'au risque de hausse de l'action.

Pour un prix d'exercice donné, la différence entre la volatilité implicite observée et celle à la monnaie s'appelle le *skew*.

La surface de volatilité d'un sous-jacent évolue également dans le temps. Les acteurs du marché la réévaluent sans cesse, modifiant leur anticipation de la probabilité, pour chaque prix d'exercice et maturité, qu'une option ne finisse dans la monnaie courante.

Chapitre VI : Application des processus de diffusion

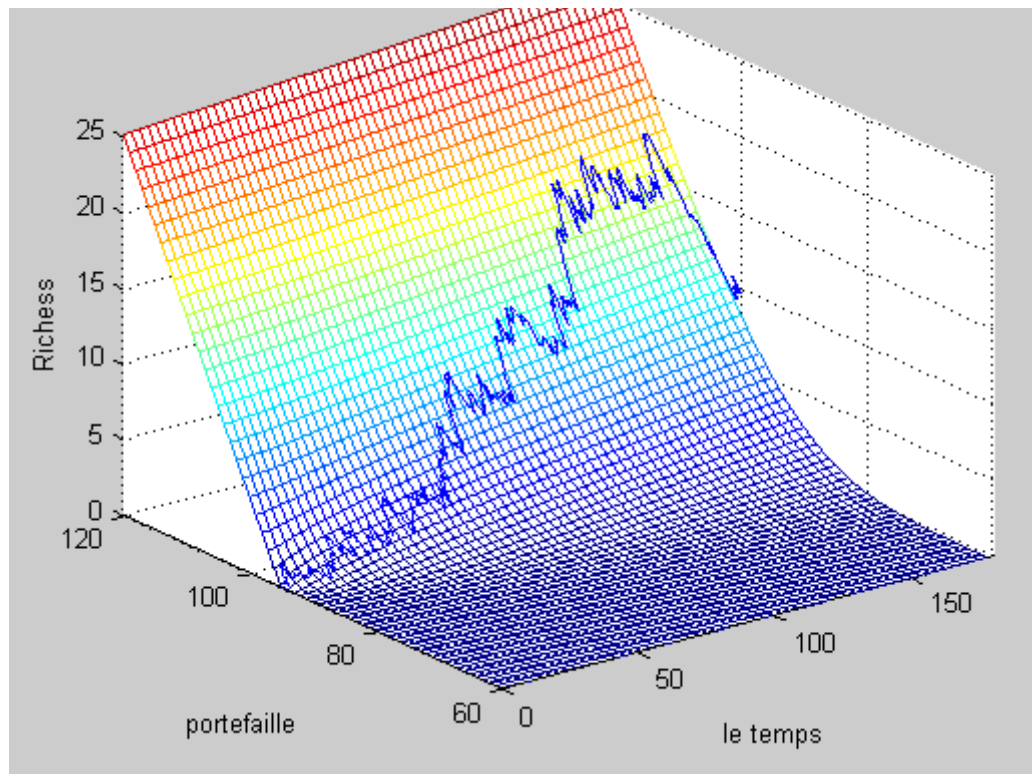


Figure 1.9 : Graphe de black Sholes sur la surface de volatilité.

Programme 1.9: de black Sholes

```
r = log(1.04)/365;    % taux de croissance des obligations
mu = log(1.05)/365;  % taux de croissance du cours des actions
sigma = 0.01;        % volatilité des cours boursiers
init = 100;           % prince inicial des action et des obligations
c = 95;               % exercise
N=500;               % nombre de pas à faire
T=180;               % maximum de temps
h=T/N;               % pas de temps
t=(0:h:T);           % vecteur [0 1h 2h 3h ... Nh]
clf
subplot(1,1,1)
b=zeros(size(t));    % prix des opligations
```

Chapitre VI : Application des processus de diffusion

```
p=zeros(size(t)); % cours de la bourse
m=zeros(size(t)); % nombre d'actions d'obligation
n=zeros(size(t)); % nombre d'action
x=zeros(size(t)); % processus de richesse calculé
y=zeros(size(t));
% Initial values
b(1)=init; % prix initial de l'obligation
p(1)=init; % cours initial de l'action
s = T; % temps argument
v = (log(p(1)/c)+(r+(sigma^2)/2)*s) ./ (sigma*sqrt(s));
w = v - sigma*sqrt(s);
x(1) = p(1) .* normcdf(v) - c*exp(-r*s) .* normcdf(w); % prix de option
y(1) = x(1);

n(1)=normcdf(v)+(normpdf(v)*c*exp(r*s)*normpdf(w)/p(1))/(sigma*sqrt(
s));

m(1) = (x(1)-n(1)*p(1))/b(1);
for i=1:N % commencer à prendre des mesures
b(i+1)=b(i)+r*b(i); % prix des obligation
p(i+1)=p(i)+mu*p(i)*h+sigma*p(i)*sqrt(h)*randn; % prix des option
y(i+1) = y(i) + n(i)*(p(i+1)-p(i)) + m(i)*(b(i+1)-b(i));
s = T-t(i+1); % temps de argument
v = (log(p(i+1)/c)+(r+(sigma^2)/2)*s) ./ (sigma*sqrt(s));
w = v - sigma*sqrt(s);
x(i+1) = p(i+1) .* normcdf(v) - c*exp(-r*s) .* normcdf(w);
n(i+1)=normcdf(v)+(normpdf(v)-
c*exp(r*s)*normpdf(w)/p(i+1))/(sigma*sqrt(s));
m(i+1) = (x(i+1)-n(i+1)*p(i+1))/b(i+1);
```

Chapitre VI :Application des processus de diffusion

```
end;
[xx,tt] = meshgrid(60:1:120,0.05:3:180);    % prepare points on a grid
gg = (log(xx/c)+(r+(sigma^2)/2)*tt) ./ (sigma*sqrt(tt));
uu = xx .* normcdf(gg) - c*exp(-r*tt) .* normcdf(gg - sigma*sqrt(tt));
mesh(tt,xx,uu);
shading faceted;
xlabel('temps restant');
ylabel('prix de l'action ');
zlabel('richesse');
title('Fonction de Black-Scholes portefeuille');
axis([0 180 60 120 0 25]);
grid on;
hold on;
g = (log(p/c)+(r+(sigma^2)/2)*t) ./ (sigma*sqrt(t));
u = p .* normcdf(g) - c*exp(-r*t) .* normcdf(g - sigma*sqrt(t));
plot3(T-t, p,( x)+0.25);
```

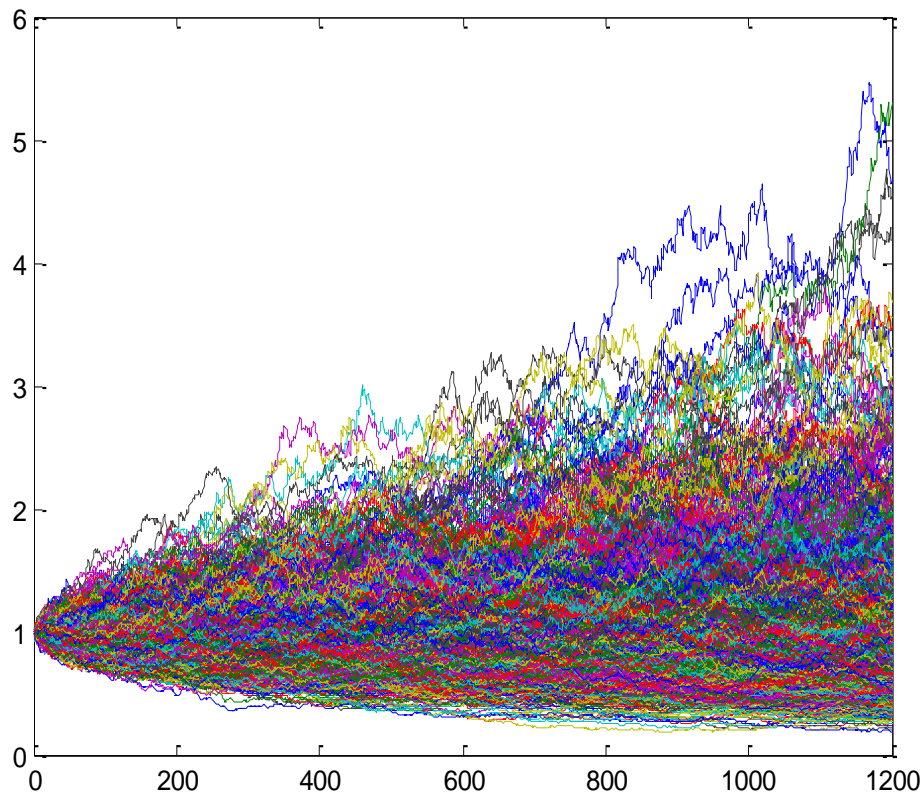


Figure 1.10 : 1200 trajectoires d'un actif.

Le programme 1.10 : Black- Scholes de 1200 échantillons d'un actif

```
T=1; N=1200;Dt=T/N;
```

```
mu=0.2;sigma=0.5; Szero=1;
```

```
S= Szero*cumprod(exp((mu-sigma^2)*Dt+sigma*sqrt(Dt)*randn(N,N)));
```

```
plot(S)
```

6.2.3 Définition :

- Le modèle de Fisher Black et Myron Sholes est permis de calculer la valeur théorique d'une option à partir des cinq données suivantes :

Chapitre VI : Application des processus de diffusion

- S_t : la valeur actuelle de l'action sous-jacente.
- t : le temps qui reste à l'option avant son échéance T .
- K : le prix d'exercice fixé par l'option.
- r : le taux d'intérêt sans risque.
- σ : la volatilité du prix de l'action.

6.2.4 Etude de modèle :

Hypothèse sur le marché :

Sur le marché, nous suppose que :

1. le prix de sous-jacent est un mouvement brownien géométrique.
2. la volatilité est continue à l'avance.
3. il est possible d'acheter et de vendre le sous-jacent à tout moment et sans frais.
4. les ventes à découvert sont autorisées.
5. Le taux d'intérêt est constant et connue à l'avance.
6. l'exercice de l'option ne peut se faire qu'à la date d'échéance, pas avant.
7. Il n'y a pas des dividendes.

Le prix théorique d'une option d'achat call, qui donne le droit mais pas l'obligation d'acheter l'actif S à la valeur K à la date T , et caractérisé par son payoff :

$$(S_t - K)^+ = \max(S_t - K ; 0)$$

Pour employer le modèle du prix de l'actif, Black-Scholes on impose un nombre de supposition de simplification aux options de marché alors on utilise la formule suivante pour la valeur de l'option européenne :

$$C(S, t) = S N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2) \text{ avec}$$

$$d_1 = \frac{\log S/k + (r + 0.5\sigma^2) * (T - t)}{\sigma\sqrt{(T - t)}}$$

Chapitre VI : Application des processus de diffusion

$$d2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T - t)}$$

Et $N(\cdot)$ est. une fonction de la loi normal $N(0,1)$

Le programme 1.11:Black-Sholes pour un call Européen
fonction $C=bsf(S,t,K,r,\sigma,T)$

$S=2;t=0;K=1;r=0.05;\sigma=0.25;T=3;$

$\tau=T-t;$

if $\tau > 0$

$d1=(\log(S/K)+(r+0.5*\sigma^2)*\tau)/(\sigma*\sqrt{\tau});$

$d2=d1-\sigma*\sqrt{\tau};$

$N1=0.5*(1+\text{erf}(d1/\sqrt{2}));$ %% la fonction de la loi normale %%

$N2=0.5*(1+\text{erf}(d2/\sqrt{2}));$

$C=S*N1-K*\exp(-r*\tau)*N2;$

else

$C=\max(S-K,0);$

End

-Le programme donne la valeur de call $C = 1.1447$ pour $t=0$.

6.2.5L'équation de black-sholes :

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} - 0.5\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rS \frac{\partial C}{\partial S} + rC = 0$$

Avec $\tau = T - t$

Avec la condition initiale :

$C(0,\tau) = \max(S(0)-k,0)$

Est pour résoudre cette équation on utilise deux méthodes (différences finies et probabiliste)

La résolution de D

Conclusion :

Chapitre VI :Application des processus de diffusion

Nous avons étudié ici le modèle classique de Black-Sholes pour le priming des options européennes.

De manière générale, ce modèle reste l'outil fondamental de l'ingénierie financière moderne. Cependant il présente beaucoup de faiblesses puisqu'il n'est pas conforme à la réalité, en effet le temps n'est pas continu et il peut y avoir des coûts de transaction supplémentaires suites aux échanges économiques.

La volatilité n'est pas observable dans le marché donc on ne peut pas l'estimer juste avec une constante.

Par conséquent, de nombreux modèles ont été proposés au fil du temps, tous tentent d'inclure les caractéristiques du marché « réel ».

Conclusion Générale

Conclusion Général

Conclusion générale :

Cette étude nous a permis de se familiariser avec des applications des divers domaines (finance et mécanique des fluides) de ce que nous avons étudié théoriquement, notre intérêt était surtout de servir d'introduction à l'immense littérature qui existe sur le sujet.

Nous avons exposé des outils mathématiques indispensables qui sont le calcul stochastique et le mouvement brownien et sa construction et les EDS. Ces dernières ont été utilisées et appliquées tout au long de notre travail à travers les modèles présentés.

On utilise on pratique dans la partie finance le modèle mathématique de Black-Sholes qui est devenu une référence utilisée dans de nombreux secteurs (assurance- banque...). Dans la partie physique on a expliqué le modèle de la goutte d'encre et la marche aléatoire dans le fluide qui est l'eau.

Un aspect intéressant de la méthodologie que nous avons adopté est que les sauts dont l'amplitude était supposée gaussienne sont introduits explicitement dans les modèles retenus qui, tout en restant simples permettent de mieux représenter les situations de discontinuités.

La discrétisation des EDS conduit à arbitrer entre précision et temps de calcul, néanmoins la discrétisation exacte donne des résultats satisfaisants mais plus coûteux en temps de calcul.

Dans la partie simulation on a utilisé le logiciel Matlab pour simuler les différents programmes (mouvement brownien les EDS black Sholes marche aléatoire ...).

Le mouvement brownien est simulé à des instants aléatoires qui gouvernent son comportement on peut ainsi simuler très précisément une trajectoire brownien.



Bibliographie

Bibliographie :

- [1] A .Laouar et R. Lebtahi. Etude exploratoire des modèles d'option en finance. Mémoire d'ingénieur, encadré par K. Boukhatala .USTHB, 2003.
- [2] Annie Millet, Methode de Monte –Carlo , Universités Paris .
- [3]B.Ycart. Introduction aux équations différentielles stochastiques. Ecole des techniques avancées de Grenoble.
- [4]BouKhatala K,Guidoum A(2011).*Sim.DiffProc* :Simulation of Diffusion Processes.
- [5]Claude Bernier, Représentation des solutions et contrôle d'équations différentielle stochastique, Thèse du Ph.D . Universités de Montréal , Octobre1995.
- [6]Cour Mr Khaldi khaled , MSS (2021-2022).
- [7] E. Pardoux , D. Talay. Discrétization and simulation of Stochastic Differential Equation. Acta Applicandae Mathematicae, 1985
- [8] E. Pardoux , D. Talay. Discrétization and simulation of Stochastic Differential Equation. Acta Applicandae Mathematicae, 1985.
- [9]Equations différentielles stochastiques et processus de diffusion.Boubeche Hassiba.
- [10] F. Planchet , P. E. Therond. Simulation de trajectoires de processus continues. JWA- Actuaire, 2004.
- [11] F.Black, M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of political economy 81 p 637-659,1973
- [12] Guikhman,A. Skorokhod. Introduction à la théorie des processus aléatoires. Edition Mir, Moscou, 1980.
- [13]J.JANSSEN,M.SAIB et K.TAOUS.Technique d'Estimation pour le Modèle de Black et Scholes .
- [14]Jean- Francois LE GALL,Mouvement brownien et calcul stochastique ,Université Pierre et Marie Curie, 1997.

[15] I. Karatza, S.E.Shreve. Brownian motion and stochastic calculus. Springer-Verlag, 1998.

[16] Monique Jeanblanc. Cours de calcul stochastique. DESS IM EVERY. Option finance ,2002.

[17] N.Limnios, Introduction à la méthode de Monte Carlo, Université de technologie de Compiègne, 2005.