République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA –BOUMERDES-

FACULTE DES SCIENCES

Département de mathématiques

En vue de l'obtention du diplôme de master en mathématiques

Prix des options européennes avec taux d'intérêt et volatilité stochastiques

Domaine : Mathématiques et informatique(MI)

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématique Financière (MF)

Réalisé par :

KELAI Fella **LABII Manel**

Suivi par : Mme.S.MEDDAHI: Promotrice

Les jurys : Ms.K.KHALDI : Président

Ms.M.ZITOUNI : Examinateur

Année universitaire : 2021/2022

Remerciement

On dit souvent que le trajet est aussi important que la destination. Les cinq années de maîtrise nous ont permis de bien comprendre la signification de cette phrase toute simple.

On tient à la fin de ce travail à remercier ALLAH le tout-puissant de nous' avoir donné la foi et de nous avoir permis d'en arriver là

Nos remerciements vont également à nos familles de tous les sacrifices

*On remercie infiniment notre promotrice **Mme.Meddahi** dont la disponibilité, le savoir-faire et le soutien ne m'ont jamais fait défaut.*

*On remercie vivement Monsieur **K.KHALDI** professeur à l'université de M'hamed Bougara Boumerdes, pour l'intérêt qu'il a apporté à ce sujet en acceptant d'être le président du jury.*

*Nos remerciements et de notre profonde gratitude vont aussi à Monsieur **M.ZITOUNI**, pour avoir accepté d'évaluer ce travail et participer à ce jury.*

Nous témoignons une reconnaissance particulière à l'ensemble des enseignants du département des mathématiques pour leur soutient inestimable

Dédicace

«L'eau coule grâce à sa source

L'arbre pousse grâce à ses racines »

A
Mes parents,

Pour les sacrifices déployés à mon égard ; pour leur patience
Leur amour et leur confiance en moi.

Ils ont tout fait pour Mon bonheur et ma réussite.
Qu'ils trouvent dans ce modeste travail, le témoignage de mon
Profonde affection et de mon attachement indéfectible.
Nulle dédicace ne puisse exprimer ce que je leur dois
Que dieu leur réserve la bonne santé et une longue vie.

A mes amis

En témoignage de Mes sincères reconnaissances pour les efforts
Qu'ils ont consentis pour me soutenir au cours de mes études.
Que dieu nous garde toujours unis

A

*Ma binôme **Fella** qui m'ont soutenue jusqu'au bout.et a*

Toute personne qui m'a aidé à faire mon projet.

*A mon fiancé **Lotfi***

Aucune dédicace ne pourrait exprimer mon amour, ma gratitude et mon respect.
Depuis que je t'ai connu, tu n'as jamais cessé de me soutenir et de m'épauler

Je remercie le bon dieu qui a croisé nos chemins. Je prie Dieu le tout puissant de préserver notre attachement mutuel

Mlle. Labii Manel

Dédicace

Je dédie ce travail aux deux personnes les plus chères de mon existence,

A mon très cher père, pour son soutien, son encouragement et sa présence ; que Dieu le protège.

A ma très chère mère, pour son affectation, sa patience, son soutien, et son encouragement qu'elle me témoigne chaque jour inlassablement ; que Dieu la protège.

A mes sœur,, A mon frère

Que Dieu nous garde tous unis.

A ma binôme ***Manel*** *qui m'ont soutenue jusqu'au bout.*

A tous mes oncles et toutes mes tantes et tout le reste de la famille.

A mes amies.

Mlle. Kelai Fella

Table des matières

Introduction générale

Les contrats d'options financières sont parmis les produits dérivés les plus inventifs et imaginatifs car ils ont été fortement considérés par les précurseurs des universitaires en ingénierie financière et en gestion financière, et ils sont venus à occuper une position privilégiée. En raison de leur rôle crucial dans l'atténuation des dangers causés par des fluctuations importantes de la le coût de certains placements financiers auxquels ils sont jugés fiables outil de couverture.

Il existe des différents modèles d'évaluation d'options européennes dont le plus connue est le modèle Black-Scholes qui est considéré comme le plus grand succès dans le domaine de la théorie financière.

En 1973, Black et Scholes ont proposé une formule analytique pour des options sur actions qui ne versent pas des dividendes .

Dans le calcul de la valeur d'une option , la volatilité et le taux d'intérêt sont deux paramètres inobservables, sont des paramètres stochastiques contrairement à l'hypothèse de Black et Scholes qui le considère comme constant.

Ces constatations nous amènent à considérer la volatilité et le taux d'intérêt comme processus de diffusion, ce qui a donné naissance aux modèles à volatilité et taux d'intérêt stochastiques dont le modèle de vasicek (1977) qui présente l'évaluation des taux d'intérêt et le modèle Cox Ingersoll Ross (1985) ,Ainsi que le modèle Heston.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à la simulation et l'évaluation des options Européenne avec taux d'intérêt et volatilité stochastiques ,La structure de ce travail est la suivante :

Le premier chapitre: on présentera des différents notions et instruments financiers basiques , nous commencerons par donner l'explication des actives financiers , les produits dérivés , Call et put européens ,...., on termine ce chapitre avec les titres de créance négociable (TNC).

Le deuxième chapitre: nous avons introduit le modèle BlackScholes, qui est fondamentalement basé sur la méthode EDP pour l'évaluation des options,tout en énonçant initialement des idées fondamentales essentielles à la compréhension de ce modèle, il est basé sur l'action européenne.

Le troisième chapitre: examine les comportements stochastiques, ce qui nécessite d'abord l'explication des principes directeurs des taux d'intérêt, nous présentons de modèle Vasicek , ensuite nous étudions la volatilité déterministe et la volatilité Stochastique. Finalement, nous avons réalisé un programme sous Matlab afin de simuler et évaluer le prix des options européennes dans le cas d'un taux d'intérêt et volatilité stochastiques.

Chapitre 1

Instruments financiers

Sommaire

1.1 Actifs financiers

Définition 1.1. *Un actif financier est un titre ou un contrat, la plupart de temps négociable et transmissible sur un marché financier, qui confère à son détenteur des revenus ou un gain en capital, Il y en a de très nombreuses sortes, des plus simples : actions, obligations, aux plus complexes : options, swaps, dérivés de crédit,un actif financier offre aux émetteurs la possibilité de satisfaire à leur besoin de capitaux, il permet également aux investisseurs de satisfaire à leur besoin de rémunération de capitaux.*

On considère sur un horizon de temps $T > 0$, un marché financier dans lequel nous avons $d + 1$ actifs, un actif sans risque et d actifs risqués.

1.1.1 Actif sans risque

Un actif sans risque est un titre dont les flux sont certains et garantis dans un intervalle de temps [t, t+dt] à la date t de l'opération, son prix est toujours noté

$$S^0 = \{S_t^0, t \in T\}$$

l'actifs S^0est le cash.

1.1.2 Actif risqué

Un actif risqué est un titre dont les flux ne sont pas certains et garantis dans un intervalle de temps [t, t+dt] à la date t de l'opération, son prix est un processus noté

$$S = \{S_t, t \in T\}$$

1.2 Portefeuille

Un portefeuille est un ensemble d'un ou plusieurs actifs financiers détenus par un investisseur. Ces actifs peuvent prendre diverses formes, notamment des actions, des obligations, des produits dérivés, des matières premières et des fonds . La composition de ce portefeuille est susceptible d'évoluer au fil du temps. Étant donné que la valeur des actifs financiers est déterminée par des fonctions stochastiques du temps (processus stochastique), la valeur d'un portefeuille est également un processus stochastique.

1.3 Actifs sous-jacent

En finance, un actif sous-jacent est un élément fondamental qui va servir à valoriser un produit dérivé donné. Il peut s'agir d'un instrument financier(devise, action, indice, obligation, contrat à terme, option..) ou physique (matières premières agricoles ou minérales.).

1.4 Les produits dérivés

Un produit dérivé est un contrat entre deux parties pour convenir du prix d'un actif. Par conséquent c'est un instrument financier permettant de fixer le prix d'une action pendant une période donnée. La valeur d'un produit dérivé sera donc déterminée par la valeur de son actif sous-jacent au cours du temps.

1.5 Les options

Définition 1.2. *Une option standard est un titre financier conditionnel qui confère à son détenteur le droit, mais non l'obligation d'acheter* (*option call*) *ou de vendre* (*option put*) *un titre à un prix convenu à l'avance* (*prix d'exercice ou Strike*) *et jusqu'à une date fixée* (*maturité*), *passe cette période l'option ne vaut plus rien, c'est-à-dire une date de fin de validité du contrat , Pour exercer ce droit, l'acheteur de l'option doit verser une prime au vendeur.*

1.5.1 Call et put européens

Call européenne:

Définition 1.3. *une option d'achat européenne* (*Call*) *est un contrat qui confère à son détenteur le droit, mais non l'obligation d'acheter, le sous-jacent (qui vaut S_T à l'instant t) à une certaine date future* (*maturité noté T*), *et à un prix fixé d'avance dans le contrat* (*prix d'exercice ou Strike noté K*).

Remarque 1.1. *Si l'actif a un prix $S_T > K$ dans le marché, l'acheteur exercera son droit, autrement dit achète une action au prix K et la vend sur le champ dans le marché ouvert au prix S_T, récoltant un gain égal à la différence $S_T - K$.*
Sinon si $S_T < K$ l'acheteur réalise un profit nul.

Donc une option Européenne d'achat permet de réaliser un gain égal :

$$(S_T - K)^+ = max\,(0, S_T - K)$$

on appelle $(S_T - K)^+$ *le payoff de l'option.*

Exemple 1. *On achète aujourd'hui au prix de 3€, le droit d'acheter une action au prix de 101€ dans 60 jours. Cette action valant aujourd'hui 100€.*

Si l'action atteint 107€ dans 60 jours, l'investisseur pourra donc l'acheter à 101€ (prix d'exercice) et la revendra immédiatement à 107€, il encaissera donc 6€ pour une mise initiale de 3€.

Inversement, si l'action cote moins de 101€ au terme de 60 jours, son option ne vaut plus rien, et il perdre 3€.

Put européenne

Définition 1.4. *Une option de vente européenne (Put) est un contrat qui donne à son détenteur le droit, mais non l'obligation, de vendre une action (unité de l'actif) à une date future (maturité noté T), et à un prix (prix d'exercice noté K) fixé d'avance, Ce contrat a un prix ; il est échangé sur le marché.*

Remarque 1.2. *Si l'actif a un prix $S_T < K$ dans le marché. Dans ce cas le vendeur exercera son droit, vendra une action au prix K et peut acheter après dans le marché une action au prix S_T récoltant un gain égal à la différence* $(K - S_T)$
Sinon si $S_T > K$ vendeur réalise un profit nul.
Donc une option Européenne de vente permet de réaliser un gain égale :

$$(K - S_T)^+ = max\,(K - S_T, 0)$$

1.5.2 Call et put Américains

Call Américaine

Définition 1.5. *Une option d'achat américaine ou call américain est un contrat qui confère à son détenteur le droit mais non l'obligation d'acheter une certaine quantité de sous-jacent à toute date comprise entre aujourd'hui* (*la date de début* $t = 0$) *et la maturité du contrat* (*noté*

T), au prix K (Strike) prédéterminé à l'avance. Ce contrat a un prix il est échangé sur le marché.

Put Américains

Définition 1.6. *Une option de vente américaine ou put américain est un contrat qui confère à son détenteur le droit mais non l'obligation de vendre une certaine quantité de sous-jacent à toute date comprise entre aujourd'hui (la date de début $t = 0$) et la maturité du contrat (noté T), au prix K (Strike) prédéterminé à l'avance. ce contrat a un prix il est échangé sur le marché.*

1.5.3 Comparaison des options américaines et européennes

Les options européennes peuvent être exercées seulement le jour d'échéance alors que Les options américains peuvent être exercées à tout instant avant leur échéance, de plus une option américaine offre à son détenteur plus de possibilités que son homologue européenne, ce qu'il produit que Les options européennes sont souvent moins chères.

1.5.4 Relation parité Put-Call

Dans un marché sans arbitrage, la parité d'achat est le rapport entre les options d'achat européennes (Call)et les options de vente (Put). Cette relation est très utile pour déterminer le prix de l'un des deux dans le modèle Black-Scholes la seconde se déduit immédiatement à l'aide de cette relation.

Considérons donc un call et un put européen basés sur le même actif sous-jacent S, du maturité T et de Strike K, La relation est données par

$$C_t - P_t = S_t - K \exp\left(-r(T-t)\right) \quad , t \in [0, T]$$

1.6 Les warrants

Les warrants sont des dérivés, c'est-à-dire des instruments financiers basés sur des valeurs de marché ou des indices (contrat à terme, option sur taux, indice, valeurs...). Le droit d'acheter ou de vendre un actif financier à une date et une heure prédéterminées est appelé le warrant. Il est lié à une parité, soit au nombre de bons émis pour une unité financière déterminée.

Le warrant peut être utilisé pour atténuer les effets d'une évolution défavorable d'un marché ou pour renforcer l'impact d'un investissement anticipant une évolution future.

1.7 Les swaps

Ces contrats gré-à-gré vous permettent d'échanger un subordonné contre un prix fixe sur une période de temps définie. Typiquement, un swap de taux d'intérêt échangera un paiement à taux variable contre un taux fixe sur un nominal donné.

1.8 Les obligations

Une obligation représente la part d'un emprunt émise par une entité (L'état, les établissements publics, les sociétés. . .) qui s'engage à la rembourser a une échéance déterminée avec un intérêt annuel, les obligations sont cessibles et librement négociable sur le marché boursier et elles sont au porteur, les caractéristiques d'une obligation sont :

Le nominal: il est égal au capital de départ emprunté par l'émetteur de l'obligation divisé par le nombre de titres émis.

Le prix d'émission: c'est le montant que doit verser tout souscripteur au moment de l'émission de l'emprunt obligatoire, ce prix est en générale égal à la valeur nominale si le prix d'émission est supérieur au nominal on dit que l'obligation est au-dessus du pair et inversement si le prix d'émission est inférieur au nominal.

Le coupon: est le revenu (l'intérêt) que le détenteur de l'obligation reçoit, il est payé régulièrement chaque année à une date fixé ou intervenu infine c'est-à- dire à l'échéance.et est égal au produit du taux d'intérêt par la valeur nominale de l'obligation.

La maturité ou l'échéance: elle correspont à la date à laquelle le détenteur de l'obligation se voit rembourser le montant du nominal.

1.9 Les actions

Une action représente un titre financier qui exprime le droit d'un individu à une part de l'entreprise cette part permet à son propriétaire (actionnaire) de participer aux bénéfices, droit à l'amortissement des titres et en cas de liquidation, droit à recevoir une partie du boni de liquidation. et lui donne le droit d'intervenir dans les décisions de l'entreprise ainsi que le droit d'information sur les résultats et les comptes.

1.10 Titre de créance négociable (TCN)

Les TCN sont des titres émis sous la forme des billets ou des bons à échéance, confèrent à leur porteur le droit de créance pour une durée déterminée, négociable sur un marché réglementé et portant un intérêt Les principaux titres sont :

- billets de trésorerie
- certificat de dépôt négociable
- bon du trésor en compte courant
- bon des sociétés financières
- bon à moyen terme négociable

1.10.1 les billets de trésorerie (BT)

titre d'emprunt négociable de court duré (inférieure à 1 an) qu'émettent les entreprises sous forme de billet à ordre pour se procurer des capitaux à court terme sans passer par le système bancaire

1.10.2 les bons à moyen terme négociable (BMTN)

sont des titres de créance négociables dont la durée est supérieure à 1 an pouvant être émis sur le marché gré à gré ou un marché réglementé sous réserve de certaines conditions par les entreprises et les établissements de crédit.

Chapitre 2

L'évaluation des options avec le modèle de Black-Scholes

2.1 Généralités

2.1.1 Absence d'opportunité d'arbitrage

Une opportunité d'arbitrage sur $[0, T]$ est une stratégie de portefeuille autofinançant ∇dont la valeur $V(\nabla)$ vérifie :

i. $V_0(\nabla) = 0$ cela signifie que l'on part de rien

ii. $V_T(\nabla) \geq 0$ cela signifie que l'on est sûr de ne pas perdre d'argent

iii. $P\left[V_T(\nabla)\right] > 0$ cela signifie qu'avec une probabilité strictement positive on fait un réel profit

Notée AOA, l'absence d'opportunité d'arbitrage se caractérise par le fait qu'il n'est pas possible de réaliser un gain sans une prise de risque importante à un instant donné, autrement dit il n'existe aucune stratégie financière permettant pour un cout initial nul d'acquérir une richesse certaine dans une date future.

2.1.2 Marché complet

On considère un marché où l'hypothèse de l'absence d'opportunité d'arbitrage$(A.O.A)$, ce marché est dit complet si tout produit financier peut être répliqué par une stratégie autofinançant.

2.1.3 Probabilité historique et probabilité risque neutre

En finance, les probabilités sont essentielles car elles permettent de modéliser des grandeurs et des amplitudes inconnues, ainsi que le pricing des produits financiers. Pour cela, il est nécessaire de comprendre ces probabilités dont les plus connues sont la probabilité historique et la probabilité neutre au risque.

la probabilité historique:

Cette probabilité affecte à un évènement donné une probabilité égale à sa fréquence au sens probabiliste. Elle est une sorte de mémoire du temps et aucune anticipation n'est prise en considération.

Probabilité risque neutre:

On dit que Q est une probabilité risque neutre associée à P si :

- La probabilité Q est équivalente à la probabilité P.
- $(S_n/\tilde{r}_n)$ est une martingale sous Q,

Ou $\tilde{r}_n \equiv (1+r_n)(1+r_{n-1})\dots(1+r_T), \check{r}_0 = 1$

Proposition 2.1. *Supposons qu'il existe une probabilité risque neutre Q, alors si ∇ est un portefeuille autofinançant, sa valeur actualisée est une martingale sous Q.*

2.1.4 Stratégie autofinançant

On dit qu'une stratégie est autofinancée s'il n'y a pas d'investissement externe ou de retrait de fonds du portefeuille. Alternativement, cette énotion décrit le comportement d'un investisseur lorsqu'il réorganise son portefeuille entre les instants t et $t+1$ et réorganise ses actifs pour préserver la valeur du portefeuille.

2.2 Modèle de Black-Scholes

2.2.1 Présentation de modèle

En 1973, Fisher Black et Myron Scholes ont publié le modèle Black-Scholes que la plupart des investisseurs utilisent pour estimer la valeur des options à terme et évaluer le risque. Le modèle Black-Scholes est un modèle de changement de prix dans le temps pour les instruments financiers tels que les actions qui sont utilisés pour déterminer le prix d'une option d'achat européenne. Ce modèle est basé sur les hypothèses suivantes :

— Le marché est complet,

— Le temps est continu, la volatile constante

— le sous-jacent est infiniment divisible (par exemple on peut acheter $1/1000$ de sous jacent),

— les ventes à découvert sont autorisées,

— il n'y a pas de coup de transaction,

— il existe un taux d'intérêt constant,

— il n'y a pas de dividende (bénéfices distribués aux détenteurs d'actions

Les prix des actifs peuvent être modélisés par l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dS_t = \mu(t)S_t dt + \sigma(t)S_t dW_t. \\ S_0 \succ 0 \text{ et } 0 \leq t \leq T \end{cases} \tag{Eq2.2.1.1}$$

avec : $(\mu, \sigma) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

S_t : est le prix de l'action au temps t.

μ : est le taux d'intérêt

σ : est la volatilité.

W_t : un mouvement Brownien standard

- On suppose que l'évolution du prix de l'actif risqué(une action de prix S_t a l'instant t) est régie par l'équation $(Eq2.2.1.1)$

-Le prix initial d'une action $S(0) = S_0$, est supposé connu. Conformément aux conditions établies, les deux paramètres μ et σ sont constants.

On cherche à résoudre cette équation

on détermine d'abord a l'aide de la formule d'Ito l'EDS que vérifier

$$X_t = \log(S_t)$$

pour cela on considére la fonction

$$f(t, x) = \log(x)$$

on a

- $\dfrac{df}{dt} = 0$
- $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{1}{x}$
- $\dfrac{d^2f}{d^2x} = \dfrac{-1}{x^2}$

donc

$$\begin{aligned}
dX_t &= \left(0 + \frac{1}{2}(\sigma S_t)^2(\frac{-1}{S_t^2})\right) dt + \frac{1}{S_t} dS_t \\
&= \frac{-1}{2}\sigma^2 dt + \frac{1}{S_t}\left(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t\right) \\
&= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma S_t dW_t
\end{aligned}$$

En intégrant , il vient

$$X_t = X_0 + \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) ds + \int_0^t \sigma dW_s$$

$$X_t = \log S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t$$

puis comme $S_t = \exp(X_t)$

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right) \tag{Eq2.2.1.2}$$

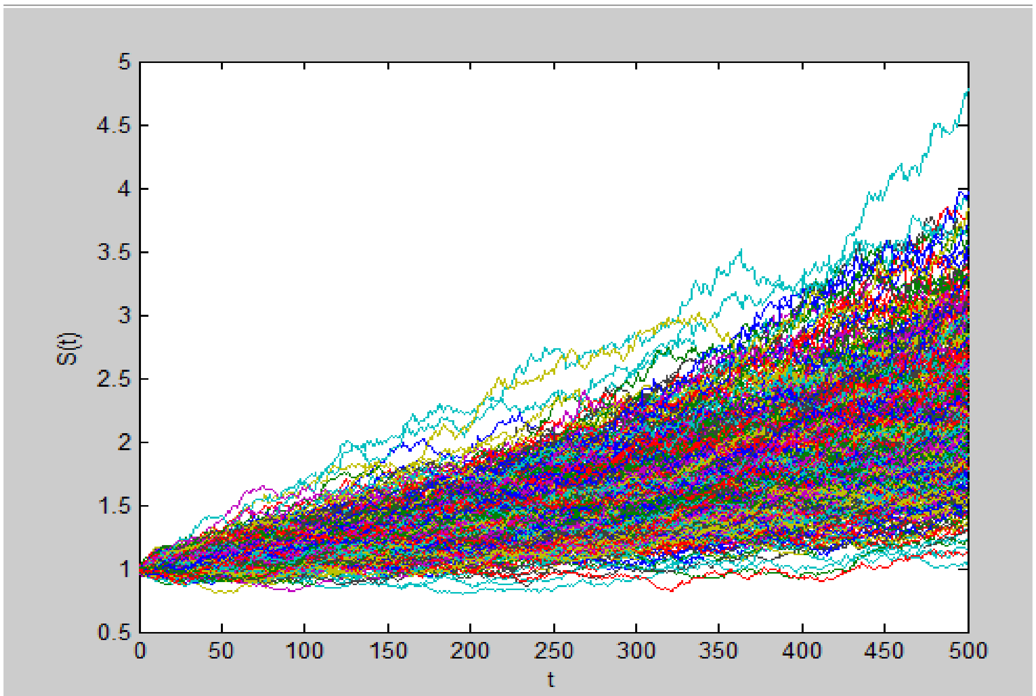
2.2.2 Simulation de la solution du modèle de Black-Scholes

Nous voulons simuler la solution du modèle de Black-Sholes pour 500 échantillons d'un actif.en réalisant un programme sous Matlab

```
%programme:simulation du 500 trajectoire de la solution de l'equation de
%B-S
clear all ; clc;
%initialisation des paramétres
T=1;
N=500;
h=T/N ;
Mu=0.8;
sigma=0.25; s0=1;
%solution exacte de B-S
S=s0*cumprod(exp((Mu-0.5*sigma^2)*h+sigma*sqrt(h)*randn(N,N)));
%figure
xlabel('t')
ylabel('S(t)')
plot(S)
```

Programme de simulation de la solution du modèle de Black-Scholes

La figure ci-dessous illustre les 500 trajectoires d'un actif



Représentation de 500 trajectoires d'un actif financier

2.2.3 Equation aux dérivées partielles de Black-Scholes

on se préoccupe par une option de type européen (de prix noté E_t à l'instant t) sur actif risqué S (ayant l'équation $(Eq2.2.1.1)$comme élément représentative de l'évolution de son prix) qui rapporte à son détenteur $H = h(S_t)$ à l'échéance T notons que h est la fonction de Pay-Off, alors on a la relation :

$$E_t = h(S_t) \qquad \text{(Eq2.2.3.1)}$$

de plus , on suppose qui'il existe une application $u \in C^{1,2}([0,T], \mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ telle que pour $t \in [0,T]$ on a

$$E_t = u(t, S_t) \qquad (Eq2.2.3.2)$$

dont on lui applique le lemme d'Ito, on obtient l'equation suivante

$$dE_t = du(t, S_t) = \frac{du(t, S_t)}{dt}dt + \frac{du(t, S_t)}{dS_t}dS_t + \frac{1}{2}\frac{d^2u(t, S_t)}{d^2S_t}\left[\sigma(S_t)\right]^2 dt. \qquad (Eq2.2.3.3)$$

en remplaçant dS_t par l'equation $(Eq2.2.1.1)$

$$dE_t = du(t, S_t) = \frac{du(t, S_t)}{dt}dt + \frac{du(t, S_t)}{dS_t}(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2}\frac{d^2u(t, S_t)}{d^2S_t}\left[\sigma(S_t)\right]^2 dt$$

$$dE_t = du(t, S_t) = \left(\frac{du(t, S_t)}{dt} + \mu S_t \frac{du(t, S_t)}{dS_t} + \frac{1}{2}\frac{d^2u(t, S_t)}{d^2S_t}\left[\sigma(S_t)\right]^2\right) dt + \sigma S_t \frac{du(t, S_t)}{dS_t} dW_t. \qquad (Eq2.2.3.4)$$

le marché étant complet il existe une stratégie auto-finançante notée

$$(X_t, Y_t)\ 0 \leq t \leq T$$

où :

X_t : représente pour chaque instant t la quantité d'actif sans risque supposée un zéro coupon, noté R_t détenus dans le portefeuille

Y_t : est la quantité de l'actif risqué S dans le portefeuille à chaque instant t telle que la richesse associée à l'instant final T soit :

ou h est la fonction pay-of

$$V_T(X, Y) = h(S_t)$$

et d'aprés $(Eq2.2.3.1)$ on trouve

$$V_t(X, Y) = E_t \qquad (Eq2.2.3.5)$$

Par ailleurs

$$V_t(X, Y) = X_t R_t + Y_t S_t = u(t, S_t)$$

et la condition d'auto-financement s'écrit en temps continu

$$dV_t(X, Y) = X_t dR_t + Y_t dS_t = dE_t = du(t, S_t). \qquad (Eq2.2.3.6)$$

avec

$$dR_t = rR_t dt \qquad (Eq2.2.3.6.1)$$

Or en remplaçant $(Eq2.2.3.6.1)$et $(Eq2.2.1.1)$ dans l'équation $(Eq2.2.3.6)$on obtient

$$dE_t = (rX_tR_t + \mu Y_tS_t)d_t + \sigma Y_tS_tdW_t \qquad (Eq2.2.3.7)$$

en faisant correspondre les deux équations $(Eq2.2.3.4)$ et $(Eq2.2.3.7)$ on obtient d'une part

$$\begin{aligned} \sigma S_tY_t &= \sigma S_t\frac{du(t,S_t)}{dS_t} \\ Y_t &= \frac{du(t,S_t)}{dS_t} \end{aligned}$$

Et d'autre part

$$rX_tR_t + \mu Y_tS_t = \frac{du(t,S_t)}{dS_t}\mu S_t + \frac{du(t,S_t)}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2u(t,S_t)}{d^2S_t}\sigma^2S_t^2$$

D'où on déduit que

$$X_t = \frac{\left[u(t,S_t) - S_t\frac{du(t,S_t)}{dS_t}\right]}{R_t}$$

Enfin on obtient

$$\begin{aligned} \frac{du(t,S_t)}{dt} + rS_t\frac{du(t,S_t)}{dS_t} + \frac{\sigma^2S_t^2}{2}\frac{d^2u(t,S_t)}{d^2S_t} &= ru(t,S_t) \\ u(t,S_t) &= h(S_t) \end{aligned}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que ces relation soient satisfaite et que U soit solution de l'EDP parabolique suivant

$$\begin{aligned} \frac{du(t,x)}{dt} + rSx\frac{du(t,x)}{dS_t} + \frac{\sigma^2}{2}x\frac{d^2u(t,S_t)}{d^2S_t} &= ru(t,x) \\ u(t,x) &= h(x)\ \forall x \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

C'est l'EDP de Black Scholes.

2.2.4 Résolution de l'équation aux dérivées partiels de Black-Scholes

pour résoudre l'EDP de Black-Scholes dans le cas d'un Call et d'un Put européen on commence par résoudre l´équation de la chaleur car l'EDP de Black Scholes se ramène a cette équation

On cherche à résourdre le probléme

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{d^2u}{d^2x} \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} . \qquad \text{(Eq2.2.4.1)}$$

La solution v est donc donnée par

$$\begin{cases} v(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(y,0) \exp(\frac{-(y-x)^2}{4\tau}) dy \\ v(x,0) = u_0(x). \end{cases} \qquad \text{(Eq2.2.4.2)}$$

pour une option Call européenne, notons sa valeur $C(S,t)$, ce qui correspond au u précédemment, ou S représente le prix du sous-jacent, et $t \in [0,T]$ T étant la maturité,pour $t \in [0,T]$ et $S_t \in \mathbb{R}_+$ On a l'équation suivant

$$\begin{cases} \dfrac{dc(s_t,t)}{dt} + rS_t^2 \dfrac{dc(s_t,t)}{dS_t} + \dfrac{\sigma^2}{2} S_t^2 \dfrac{d^2c(s_t,t)}{d^2S_t} = rC(S_t,t) \\ C(S_t,t) = (S_t - E)^+ = \max(S_t - E, 0) \end{cases} \qquad \text{(Eq2.2.4.3)}$$

Pour résoudre cette équation, nous allons procéder à divers changements de variable pour nous remener à une équation de la chaleur du type $(Eq2.2.4.1)$.

Pour pouvoir se ramener à ce type d'équation, commençons tout d'abord par supprimer les coefficients S et S^2de l'équation de Black-Scholes.

pour ce faire , on pose

$$\begin{cases} S = E \exp x \\ t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \\ C(S_t,t) = Ev(x,\tau) \end{cases}$$

On a donc

$$v(x,\tau) = \frac{1}{E} C\left(E \exp x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{E} C(S,t). \qquad (Eq2.2.4.4)$$

Ensuite on dérive l'équation $(Eq2.2.4.4)$par rapport à x

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1}{E}\dfrac{dC}{dS}\dfrac{dS}{dx} + \dfrac{1}{E}\dfrac{dC}{dt}\dfrac{dt}{dx} \\ \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{S}{E}\dfrac{dC}{dS} \end{cases}$$

On dérive une deuxième fois par rapport à x

$$\frac{d^2v}{d^2x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{S}{E}\frac{dC}{dS}\right) = \frac{d}{dS}\left(\frac{S}{E}\frac{dC}{dS}\right)\frac{dS}{dx} = \frac{1}{E}\left(\frac{dC}{dS} + \frac{d^2C}{d^2S}\right)S$$

d'ou

$$\frac{d^2v}{d^2x} = \frac{S}{E}\frac{dC}{dS} + \frac{S^2}{E}\frac{d^2C}{dS2}$$

Maintenant on dérive par rapport à τ

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{1}{E}\frac{dC}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{E}\frac{dC}{dt}\frac{-1}{\frac{1}{2}\sigma^2}$$

En introduisant ces équations dans l'EDP de Black-Scholes ($Eq2.2.4.3$) on obtient

$$\frac{-E\sigma^2}{2}\frac{dv}{d\tau} + \frac{E\sigma^2}{2}\left(\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{dv}{dx}\right) + rE\frac{dv}{dx} - rEv = 0$$

Soit en divisant par $\left(\frac{E}{2}\sigma^2\right)$

$$-\frac{dv}{dt} + \frac{d^2v}{dx^2} - \frac{dv}{dx} + rE\frac{dv}{dx} - rEv = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dx^2} + (k-1)\frac{dv}{dx} - kv \quad \text{avec } k = \frac{2r}{\sigma^2}$$

On a alors comme condition initiale (en $\tau = 0$ puisque la condition est en $t = T$)

$$v(x,0) = \frac{1}{E}C\left(E\exp x, T\right) = \frac{1}{E}\max\left(E\exp x - E, 0\right) = \max(\exp x - 1, 0)$$

Nous procédons à un changement de variable afin d'aboutir à une équation similaire à ($Eq2.2.4.1$), on pose

$$v(x,\tau) = \exp(\alpha x + \beta\tau)u(x,\tau) \qquad (Eq2.2.4.5)$$

On réinjecte dans l'équation ($Eq2.2.4.5$)

$$\begin{aligned}
\exp(\alpha x + \beta\tau)\left(\beta u + \frac{du}{d\tau}\right) &= \exp(\alpha x + \beta\tau)\left(\alpha^2 u + 2\alpha\frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} + (k-1)(\alpha u + \frac{du}{dx}) - ku\right) \\
\left(\beta u + \frac{du}{d\tau}\right) &= \left(\alpha^2 u + 2\alpha\frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} + (k-1)(\alpha u + \frac{du}{dx}) - ku\right)
\end{aligned}$$

En regroupent les termes par dérivée

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{d^2u}{dx^2} + (2\alpha + k - 1)\frac{du}{dx} + \left(\alpha^2 + \alpha(k-1) - k - \beta\right)u$$

On doit éliminer les termes en $\dfrac{du}{dx}$ et u alors on a besoin de résoudre les équations suivants :

$$2\alpha + k - 1 = 0$$

et

$$\alpha^2 + \alpha(k-1) - k - \beta = 0$$

Ce qui donne

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k-1)$$

et

$$\beta = -\frac{1}{4}(k-1)^2$$

on a donc

$$v(x,\tau) = \exp\left(-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k-1)^2\tau\right) u(x,\tau). \qquad (Eq2.2.4.6)$$

Donc la relation devient

$$v(x,0) = u(x,0) = u_0(x) = \exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x\right) \max(\exp x - 1, 0)$$

$$v(x,0) = u(x,0) = \max\left(\exp\left(\frac{1}{2}(k+1)x\right) - \exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x\right), 0\right).. \qquad (Eq2.2.4.7)$$

En ayant cette condition on reconstitue le système qui représente l'équation qui se rapproche de celle de la chaleur après les nombreuses modifications

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = \dfrac{d^2u}{dx^2} \quad ,\forall\ \tau \succ 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ v(x,0) = u(x,0) = \max\left(\exp\left(\frac{1}{2}(k+1)x\right) - \exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x\right), 0\right) \end{cases} .. \qquad (Eq2.2.4.8)$$

La solution est donc donnée par :

$$v(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(y,0) \exp\left(\frac{(y-x)^2}{4\tau}\right) dy$$

On résout l'équation dans le but d'évaluer le prix de l'option Call européenne, on commence par poser $m = \dfrac{y-x}{\sqrt{2\tau}}$:

$$\begin{aligned}
v(x,\tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty} v(y,0)\exp\left(\frac{-(y-x)^2}{4\tau}\right)dy \\
v(x,\tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y)\exp\left(\frac{-(y-x)^2}{4\tau}\right)dy \\
v(x,\tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} u_0(m\sqrt{2\tau}+x)\exp\left(-\frac{m^2}{2}\right)dm \\
v(x,\tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{2}(k+1)(m\sqrt{2\tau}+x)\right)\exp\left(-\frac{m^2}{2}\right)dm + \\
&\quad +\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{2}(k-1)(m\sqrt{2\tau}+x)\right)\exp\left(-\frac{m^2}{2}\right)dm
\end{aligned}$$

Notons les intégrales par

$$\begin{cases}
\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty}\exp\left(\frac{1}{2}(k+1)(m\sqrt{2\tau}+x)\right)\exp\left(-\frac{m^2}{2}\right)dm \quad (\mathrm{I}_1)\\
\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty}\exp\left(\frac{1}{2}(k-1)(m\sqrt{2\tau}+x)\right)\exp\left(-\frac{m^2}{2}\right)dm. \quad (\mathrm{I}_2)
\end{cases}$$

Nous nous intéressons au premier intégral (I_1)dont on va essayer de le ramener à la loi de répartition normale centrée réduite

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty}\exp\left(\frac{1}{2}(k+1)(m\sqrt{2\tau}+x)\right)\exp\left(-\frac{m^2}{2}\right)dm$$

Ona la relation $(Eq2.2.4.6)$dont on lui ajoute la quantité suivante $\exp\left(\frac{1}{4}(k-1)^2\tau\right)$ on trouve

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty}\exp\left(\frac{1}{2}(k+1)(m\sqrt{2\tau}+x)\right)\exp\left(-\frac{m^2}{2}\right)\exp\left(\frac{1}{4}(k-1)^2\tau\right)dm$$

Après simplification on obtient

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\exp\left(\frac{1}{2}(k+1)x\right)}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}(m-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}+)^2\right)\exp\left(\frac{1}{4}(k-1)^2\tau\right)dm \\
I_1 &= \frac{\exp\left(\frac{1}{2}(k+1)x\right)\exp\left(\frac{1}{4}(k-1)^2\tau\right)}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}(m-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}+)^2\right)dm
\end{aligned}$$

on pose: $\lambda = m - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$ et $d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$

l'intégrale devient

$$I_1 = \frac{\exp\left(\frac{1}{2}(k+1)x\right)\exp\left(\frac{1}{4}(k-1)^2\tau\right)}{2\sqrt{\pi}}\int_{-d_{1=}\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty}\exp(-\frac{1}{2}\lambda^2)d\lambda$$

On note que la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite s'écrit sous la forme suivante

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \exp \frac{-1}{2} S^2 dS$$

et on sait aussi que : $N(d_1) + N(-d_1) = 1$ ce qui nous améne à déduire

$$\begin{cases} I_1 = \exp\left(\frac{1}{2}(k+1)x\right) \exp\left(\frac{1}{4}(k-1)^2\tau\right) \ N(d_1) \\ d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} \end{cases}$$

Par le même calcul on trouve

$$\begin{cases} I_2 = \exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x\right) \exp\left(\frac{1}{4}(k-1)^2\tau\right) \ N(d_2) \\ d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau} \end{cases}$$

A présent que l'on a l'expression de u revenons à l'expression de C

Rappelons quelques variables importantes

$$v(x,\tau) = \exp(\alpha x + \beta\tau)u(x,\tau), C(S,t) = Ev(x,\tau) \text{ et } \tau = \frac{2\tau}{\sigma^2} = \frac{1}{2}(T-t)\sigma^2$$

ainsi que

$$x = \ln(\frac{S}{E})$$

D'ou

$$\begin{aligned} C(S,t) &= E\exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x\right)\exp\left(\frac{1}{4}(k-1)^2\tau\right) \times \\ &\left[\begin{array}{c} \exp\left(\frac{1}{2}(k+1)x\right)\exp\left(\frac{1}{4}(k-1)^2\tau\right) \quad N(d_1) - \\ \exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x\right)\exp\left(\frac{1}{4}(k-1)^2\tau\right) \quad N(d_2) \end{array}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(S,t) &= E\exp\left(\frac{1}{2}(k-1)\ln(\frac{S}{E})\right)\exp\left(\frac{1}{4}(k-1)^2\frac{1}{2}(T-t)\sigma^2\right) \times \\ &\left[\begin{array}{c} \exp\left(\frac{1}{2}(k+1)\ln(\frac{S}{E})\right)\exp\left(\frac{1}{4}(k-1)^2\frac{1}{2}(T-t)\sigma^2\right) \quad N(d_1) - \\ \exp\left(\frac{1}{2}(k-1)\ln(\frac{S}{E})\right)\exp\left(\frac{1}{4}(k-1)^2\frac{1}{2}(T-t)\sigma^2\right) \quad N(d_2) \end{array}\right] \end{aligned}$$

Après simplification on trouve

$$\begin{cases} C(S,t) = SN(d_1) - E\exp\left(-r(T-t)\right)N(d_2) \\ d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{E}) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\ d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{E}) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \end{cases} \qquad (Eq2.2.4.9)$$

On a trouvé l'équation qui caractérise le prix d'une option call européenne. Maintenant si on veut avoir l'équation d'un Put européen de même maturité T et de prix d'exercice E, il suffit seulement d'utiliser la relation parité Call-Put

$$C(S,t) - P(S,t) = S - E\exp\left(-r(T-t)\right)$$

Et donc on obtient

$$P(S,t) = C(S,t) - S + E\exp\left(-r(T-t)\right)$$

$$\begin{aligned} P(S,t) &= SN(d_1) - E\exp\left(-r(T-t)\right)N(d_2) - S + E\exp\left(-r(T-t)\right) \\ P(S,t) &= S(N(d_1)-1) - E\exp\left(-r(T-t)\right)(1-N(d_2)) \end{aligned}$$

On peut simplifier cette équation en utilisant le fait que $N(d_1) + N(-d_1) = 1$ on obtient alors

$$\begin{cases} P(S,t) = E\exp\left(-r(T-t)\right)N(-d_2) - SN(d_1) \\ d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{E})+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\ d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{E})+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \end{cases} \qquad (Eq2.2.4.10)$$

2.2.5 Evaluation du prix des options call et put

la solution de l'EDP de Black-Scholes donne la valeur théorique d'une option d'achat européenne ainsi que de vente ,en utilisant les paramètres suivants :

S_t: le prix de sous-jacent à l'instant t.

T: l'échéance

E: le prix d'exercice

r: taux d'intérêt sans risque

σ: la volatilité du prix

à l'instant t les valeurs du Call et du Put sont:

$$\begin{cases} C\left(S,t\right) = SN\left(d_1\right) - E\exp\left(-r\left(T-t\right)\right)N\left(d_2\right) \\ P\left(S,t\right) = E\exp\left(-r\left(T-t\right)\right)N\left(-d_2\right) - SN\left(-d_1\right) \\ d_1 = \frac{\ln\frac{S}{E}+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 = \frac{\ln\frac{S}{E}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{cases}$$

Avec: $N\left(.\right)$est la distribution cumulative de la loi normale centré réduite.

Le programme d'évaluation d'un call

```
%programme:simulaton du prix d'un Call européen
S=input('donner la valeur de prix de sous jacent:');
E=input('donner la valeur de prix exercice :');
T=input('donner la date de maturité :');
r=input('donner la valeur de taux de inetert:');
sigma=input('donner la valeur de volatilité:');

 %calculer di
d1=(log(S/E)+(r+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d2=d1-sigma*sqrt(T);
%calculer Ni
N1=0.5*(1+erf(d1/sqrt(2)));
N2=0.5*(1+erf(d2/sqrt(2)));
%calculer la valeur de call
C=S*N1-E*exp(-r*T)*N2
```

Programme qui calcule le prix d'un Call européen

Application numérique:

aprés exécution nous résumons les résultats dans le tableau suivant:

S	E	T	r	sigma	C
100	100	2	0.05	0.1	11.41
120	100	2	0.05	0.1	29.64
100	110	2	0.05	0.1	5 .86
100	100	3	0.05	0.1	15.64
100	100	2	0.1	0.1	18 .58
100	100	2	0.05	0.9	50.16

Le calcul du prix du Call européen

où C désigne le prix du Call européen du modéle de Black-Scholes.

Le programme d'évaluation d'un put

```
%programme:simulaton du prix d'un put européen
S=input('donner la valeur de prix de sous jacent:');
E=input('donner la valeur de prix exercice :');
T=input('donner la date de maturité :');
r=input('donner la valeur de taux de inetert:');
sigma=input('donner la valeur de volatilité:');
 %calculer di
d1=(log(S/E)+(r+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d2=d1-sigma*sqrt(T);
%calculer Ni
N1=0.5*(1+erf(-d1/sqrt(2)));
N2=0.5*(1+erf(-d2/sqrt(2)));
%calculer la valeur de put
P=E*exp(-r*T)*N2-S*N1
```

Programme qui calcule le prix d'un Put européen

Application numérique:

aprés exécution nous résumons les résultats dans le tableau suivant:

S	E	T	r	sigma	P
100	100	2	0.05	0.1	1.89
120	100	2	0.05	0.1	0.12
100	110	2	0.05	0.1	5.39
100	100	3	0.05	0.1	1 .93
100	100	2	0.1	0.1	0.45
100	100	2	0.05	0.9	40.56

Le calcul du prix du Put européen

où P désigne le prix du Put européen du modéle de Black-Scholes.

2.2.6 Interprétation

La valeur d'une option dépend en général de cinq paramètres:

La valeur S du titre sous-jacent:

Quand S augmente, la valeur C du call augmente et la valeur P du put diminue, puisque le prix d'exercice E est fixé.

Le prix d'exercice E:

Plus ce dernier est élevé, plus le call est bon marché(baisse du prix du call) et plus le put est cher(augmentation du prix du put.) puisque, en cas d'exercice E sera payé par le détenteur du call et encaissé par le détenteur du put.

La volatilité a du titre sous-jacent:

Une augmentation de la volatilité de l'action implique une augmentation du prix du call et du prix du put.

La maturité de l'option:

Une augmentation du temps restant jusqu'à l'échéance implique une augmentation du prix du call et du prix du put.

Le taux d'intérêt:

Une augmentation du taux sans risque implique une augmentation du prix du call et une baisse du prix du put.

on résume les facteurs qui influencent le prix d'une option dans le tableau suivant :

Note :

$\nearrow$: influence positive

$\searrow$: influence négative

Les facteurs déterminants	Effet de leur augmentation sur le prix de l'option	
	Put	Call
1- Le cours de l'action	↘	↗
2- La volatilité	↗	↗
3- Les dividendes	↗	↘
4- Le taux d'intérêt à court terme	↘	↗
5- La durée de vie de l'option	↗	↗
6- Le prix d'exercice de l'option	↗	↘

Les déterminants du prix des options

2.2.7 conclusion

Le modèle Black-Scholes est l'un des concepts les plus importants de la théorie financière moderne. Elle est considérée comme l'une des meilleures modéles pour déterminer le juste prix des options en intégrant des concepts d'ingénierie financière. Il est pratique car il permet des formules fixes pour valoriser les Calls et les Puts européen.

Dans un monde où les marchés changent quotidiennement, les hypothèses fondatrices de ce derniers sont parfait ce qui méne que les résultats obtenues sont limités.

Chapitre 3

Taux d'intérêt et volatilité stochastiques

3.1 Taux d'intérêt stochastique

Les taux d'intérêts sont l'un des piliers sur les quels repose la majorité du système financier et des dérivés financiers. L'objectif des banques centrales est de fixer les taux d'intérêts et donc la masse monétaire afin d'équilibrer les objectifs de croissance économique et d'inflation tout en maintenant un niveau de liquidité suffisant dans le système financier.

3.1.1 Obligation zéro-coupon

Comme son nom l'indique, une obligation de coupon zéro n'entraîne pas le paiement d'un coupon au porteur. Il s'agit d'une obligation qui a été achetée à un prix inférieur à sa valeur nominale. A l'expiration de l'obligation, le titulaire de l'obligation se fait restituer la valeur nominale .

Définition 3.1. *Le taux d'intérêt est le prix que l'on doit payer pour emprunter de l'argent, ainsi que le prix que l'on reçoit en prêtant de l'argent. Ce prix est exprimé en pourcentage L'intérêt est donc la rémunération d'un service, le prêt d'argent noté r.*
Pour une obligation zéro-coupon $B(t,T)$.Le taux d'intérêt est:

$$r(t,T) = -\frac{\ln B(t,T)}{T-t}$$

Exemple 2. *lors de l'achat d'obligations, l'acheteur sait à l'avance combien lui rapporteront ses obligations chaque année. En effet, lors de l'émission des obligations, le taux d'intérêt annuel rémunérant les obligations a été précisé.*

Remarque: Dans la plupart des cas, le taux d'intérêt est annuel, bien qu'il puisse également être mensuel. En conséquence, la période couverte par ce prix doit en principe être précisée.si non si rien d'autre n'est spécifié, il est supposé qu'il s'agit d'un taux annuel.

3.1.2 Types de taux d'intérêt

Taux d'intérêt nominal: Un taux d'intérêt nominal est celui qui est fixé lors d'une opération de prêt ou de crédit, celui qui est inscrit dans le contrat de prêt ou de crédit et celui qui est payé par l'emprunteur au prêteur. Cependant, au fil du temps, l'inflation érodera la valeur réelle des fonds empruntés et remboursés.

Taux d'intérêt réel: Il s'agit d'un taux d'intérêt nominal qui tient compte du taux d'inflation ainsi que de la prime de risque.

Taux actuariel: L'expression « taux actuariel » fait référence à un taux dont le calcul est basé sur un modèle actuariel. Il est utilisé pour une variété de transactions financières, y compris les prêts bancaires et les émissions de dettes.

Pour une obligation, le taux actuariel est le rendement réel en fonction de son prix d'achat et de la durée de vie de l'emprunt.

Taux zéro-coupon: Le taux zéro-coupon est le taux actuariel qu'aurait une obligation ayant une date de départ et une durée bien définie ou le versement des coupons est exclus jusqu'à une date d'échéance convenus, en d'autre termes il n'y a aucun détachement de coupon intermédiaire jusqu'à la maturité. Ce taux a pour notation $r(0,T)$.

Taux court terme: Sur les marchés financiers, le taux court appelé aussi taux d'intérêt spot représente la rémunération de l'argent sur de courtes durées(entre un jour et un an),est défini mathématiquement comme la limite du taux continu moyen quand la maturité tend vers t

$$r_t = \lim_{T \to t} r(t,T) = r(t,t)$$

Taux de l'argent sans risque: Le taux de l'argent sans risque est le taux d'intérêt d'un placement sûr, sans risque de défaut de remboursement.

3.1.3 Structure par termes des taux

La Structure par termes des taux, appelée aussi la courbe des taux, est la fonction qui à une date donnée et pour chaque maturité en abscisse, indique le niveau de taux d'intérêt associer en ordonnée, en pratique elle est déduite du prix de plusieurs instruments et actifs financiers

La courbe des taux peut prendre de nombreuses formes différentes en fonction des événements de marché.:

- ⧫ Quasi plate.
- ⧫ Croissante.
- ⧫ Décroissante.
- ⧫ Décroissante surle court terme puis croissante.
- ⧫ Croissante sur le court terme puis décroissante.

3.1.4 Modélisation de taux d'intérêt

3.1.5 Modéle de Vasicek

Présentation de modéle :

Le modèle de Vasicek est un modèle créé par 'Oldrich Vasicek' en 1977 pour montrer l'évolution des taux d'intérêt. Il décrit les fluctuations des taux d'intérêt en raison d'une source unique de risque de marché. Il s'agit donc d'un modèle de taux à court terme à facteur unique; Bien que ce modèle présente un avantage significatif en ce sens qu'il a une solution explicite, il présente un défaut majeur en ce sens qu'il est théoriquement possible pour les taux de prendre des valeurs négatives.

On se place sur un espace de probabilité(Ω, F, P) muni d'une filtration $(F_t)_{0\leq t\leq T}$ On suppose que sous une probabilité risque-neutre Q le taux court instantané r suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck à coefficients constants le processus $r(t)$ vérifie

$$\begin{aligned} dr_t &= \beta(\alpha - r_t)d_t + \sigma dw_r(t) \qquad \text{(Eq3.3.1.1)} \\ r(0) &= r_0 \end{aligned}$$

Où W_t est un mouvement brownien standard, il oscille autour de sa valeur moyenne, ce qui est typique des taux au comptant qui n'ont pas de tendance à long terme bien définie.

Les paramètres β, α et σ sont des constantes positives caractérisent complétement la dynamique telque:

le niveau moyen à long terme α : Cela signifie que toutes les trajectoires futures de r convergeront autour d'un niveau moyen α à long terme.

Vitesse de réversion β : Il dénote la vitesse à laquelle un groupe de telles trajectoires se rassemblera dans le temps.autour de α.

Volatilité instantanée σ : Elle mesure l'ampleur du caractère aléatoire qui entre dans le

système en temps réel.

Solution du modéle

Le modèle décrit précédemment et représenté par l'équation $(Eq3.3.1.1)$ a pour solution

$$r_t = r_0 \exp(-\beta t) + \alpha \left[1 - \exp\left(-\beta t\right)\right] + \sigma \int_0^t \exp\left(-\beta\left(t-s\right)\right) dw_r(s)$$

Preuve. :on pose

$$Z_t = r_t - \alpha$$

d'aprés l'équation de modéle de vasicek on a :

$$dr_t = dZ_t = -\beta Z_t dt + \sigma dw_r(t)$$

cette équation est similaire à celle d'un processus d'Ornstein-UhlenbeckLa solution de l'équation linéaire s'obtient comme dans le cas des équations différentielles ordinaires par la méthode de variation des constanteson pose la fonction

$$f\left(r_t, t\right) = Z_t \exp(\beta t)$$

il est claire que la fonction est C^2 donc on peut appliquer le lemme d'Ito :

$$\begin{aligned}
df\left(r_t,t\right) &= dZ_t \exp\left(\beta t\right) + \beta Z_t \exp\left(\beta t\right) dt \\
df\left(r_t,t\right) &= \exp\left(\beta t\right)\left(-\beta Z_t dt + \sigma dw_r(t)\right) + \beta Z_t \exp\left(\beta t\right) dt \\
df\left(r_t,t\right) &= -\beta Z_t \exp\left(\beta t\right) dt + \sigma \exp\left(\beta t\right) dw_r(t) + \beta Z_t \exp\left(\beta t\right) dt \\
df\left(r_t,t\right) &= \sigma \exp\left(\beta t\right) dw_r(t)
\end{aligned}$$

en intégrant

$$\begin{aligned}
f\left(r_t,t\right) &= Z_t \exp(\beta t) = Z_0 + \sigma \int_0^t \exp\left(\beta s\right) dw_r(s) \\
Z_t &= \exp(-\beta t)[Z_0 + \sigma \int_0^t \exp\left(\beta s\right) dw_r(s)]
\end{aligned}$$

on remplace Z_t par son expression on aura:

$$\begin{aligned}
r_t - \alpha &= \exp(-\beta t)[r_0 - \alpha + \sigma \int_0^t \exp(\beta s)\, dw_r(s)] \\
r_t &= \exp(-\beta t)[r_0 - \alpha + \sigma \int_0^t \exp(\beta s)\, dw_r(s)] + \alpha \\
r_t &= \exp(-\beta t)[r_0 - \alpha + \sigma \int_0^t \exp(\beta s)\, dw_r(s)] + \alpha \\
r_t &= \exp(-\beta t) r_0 - \alpha \exp(-\beta t) + \sigma \int_0^t \exp(-\beta(t-s))\, dw_r(s) + \alpha \exp(\beta t)
\end{aligned}$$

d'ou :

$$r_t = r_0 \exp(-\beta t) + \alpha(1 - \exp(-\beta t)) + \sigma \int_0^t \exp(-\beta(t-s))\, dw_r(s)$$

en général :

$$r_t = r_p \exp(-\beta(t-p)) + \alpha(1 - \exp(-\beta(t-p))) + \sigma \int_0^t \exp(-\beta(t-s))\, dw_r(s)$$

■

Corollaire 3.1. *r_t suit une loi Normal de moyenne :*
$E(r_t) = r_p \exp(-\beta(t-p)) + \alpha(1 - \exp(-\beta(t-p)))$
et de variance :
$var(r_t) = \sigma^2 \left(\frac{1-\exp(-2\beta t)}{2\beta}\right)$

Preuve. : on a $\int_0^t \exp(-\beta(t-s))\, dw_r(s)$ est conditionnellement à F_s une martingale gaussienne de moyenne nulle et de variance

$$\int_0^t \exp(-\beta(t-s))\, ds$$

■

• En particulier, le taux instantané r_t peut prendre des valeurs négatives avec une probabilité strictement positive dans le modéle de vasicek ce qui n'est pas trés satisfaisant en pratique.

Notons aussi quand t tend vers l'infinie,r_t converge en loi vers une loi gaussienne de moyenne α et de variance $\dfrac{\sigma^2}{2\beta}$.

Prix d'une obligation zéro-coupon

Proposition 3.1. *Le prix du zéro-coupon de maturité T à la date t dans le modéle de Vasicek s'écrit :*

$$p(t,T) = A(t,T) \exp(-B(t,T) r(t)$$

telque:

$$\begin{cases} A(t,T) = \exp\left[(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\beta^2})(B(t,T) - (T-t)) - \frac{\sigma^2}{4\beta}B(t,T)^2\right], \\ B(t,T) = \frac{1-\exp(-\beta(T-t))}{\beta} \end{cases}$$

Preuve. Plusieurs méthodes permettent d'arriver à ce résultat,la méthode utilisée ici consiste à calculer l'esperance en montrant que le paramétre de l'exponentielle est un processus gaussien

pour r_t processus gaussiene à trajectoir continues l'inégral $\mathrm{I}(t,T) = \int_t^T r_s ds$ est gaussienne conditionellement à F_t(écrire la des sommes convergence de Riemann de cette intégrale),sous la mesure Q on peut calculer l'esperance $m(t,T)$ et la variance$v(t,T)$ directement conditionellement à F_t telque:

$$\begin{cases} m(t,T) = \alpha(T-t) + (r_t - \alpha)\frac{1-\exp(-\beta(T-t))}{\beta} \\ v(t,T) = \frac{\sigma^2}{\beta^2}\left[(T-t) - 2\frac{1-\exp(-\beta(T-t)}{\beta} + \frac{1-\exp(-2\beta(T-t)}{2\beta}\right] \end{cases}$$

Le prix du zéro-coupon s'écrit donc

$$\begin{aligned} P(t,T)) &= E_Q\left[\exp(-\int_t^T r_s ds)/F_t\right] \\ &= E_Q\left[\exp(-I(t,T)/F_t\right] \\ &= E_Q\left[\exp(-m(t,T) + \frac{1}{2}v(t,T)/F_t\right] \end{aligned}$$

On conclut par calcul direct de cette quantité.Notons que l'on peut également obtenir le résultat sur la distribution gaussienne et les moments de$I(t,T)$ en écrivant:

$$\begin{aligned} I(t,T) &= \int_t^T r(s)ds \\ &= \int_t^T r(t)\exp(-\beta(u-s)) + \int_t^T \exp(-\beta(u-t) + \int_t^T \sigma \int_t^u \exp(-\beta(u-s)dw_s du \end{aligned}$$

et en admettant qu'un théoréme de Fubini stochastique permet l'inversion de l'intégrale brownienne et de l'intégrale de Riemann dans le dernier terme. On obtient dans ces conditions:

$$I(t,T) = (r_t - \alpha)\frac{1-\exp(-\beta(T-t))}{\beta} + \alpha(T-t) + \int_t^T \sigma\frac{1-\exp(-\beta(T-s))}{\beta}dw_s$$

ce qui permet bien de conclure que$I(t,T)$ est conditionnellement gaussien de premiers moments $m(t,T)$ et $v(t,T)$.

Du prix d'un zéro-coupon on peut extraire directement le taux zéro-coupon ■

Proposition 3.2. *Dans le modéle de Vasicek, le taux zéro-coupon de maturité T s'écrit à la date t*

$$R(t,T) = R_\infty + (r_t - R_\infty)\frac{1-\exp(-\beta(T-t))}{\beta(T-t)} + \frac{\sigma^2}{4\beta(T-t)}\left(1-\exp(-\beta(T-t))\right)^2$$

avec

$$R_\infty = \alpha - \frac{\sigma^2}{2\beta^2}$$

Le taux zéro-coupon dans le modéle de Vasicek est donc somme de trois facteurs:
Le premier, $R_\infty = \lim_{T\to\infty} R(t,T)$ s'interpréte comme un taux zéro-coupon long-terme. Le second facteur est fonction de l'écart entre le taux instantané r_t et le taux zéro-coupon long-termeR_∞ . Son importance d´ecroît avec la maturité, d'autant plus vite que la dynamique de r comporte un paramétre de retour à la moyenne élevé

∘ Ce modèle permet d'avoir la plupart des formes de la courbe des taux suivantes[2].:
Structure ascendante si : $r_t \leq R_\infty - \frac{\sigma^2}{4\beta^2}$
Structure inversée si: $r_t \geq R_\infty + \frac{\sigma^2}{2\beta^2}$
Structure bosselée si: $R_\infty + \frac{\sigma^2}{2\beta^2} \leq r_t \leq R_\infty - \frac{\sigma^2}{4\beta^2}$

La courbe des taux issue du modéle de Vasicek

Le modéle de Vasicek donne la forme analytique de la courbe des taux aujourd'hui et plus généralement de n'importe quelle date.

Le graphe de la fonction$(T-t) \rightarrow R(t, T-t)$ ressemble effectivement à de nombreuses courbes de taux observées sur le marché. Toutefois, certaines d'entre elles, notamment les courbes dites "inverées", où le taux court r est plus haut que le taux long R_∞, et où apparâit un creux ne peuvent être atteintes par un modéle de ce genre.

3.1.6 méthode de Monte-Carlo

Utilisant la simulation de variables aléatoires, les méthodes de Monte Carlo permettent d'estimer des quantités. Le calcul d'intégrales, la résolution de problèmes d'optimisation et la résolution de problèmes de système linéaire font partie des problèmes qui peuvent survenir. La flexibilité, la simplicité et l'efficacité de la méthode pour les problèmes à grande échelle en font un outil utile qui peut être utilisé en remplacement ou en guide pour d'autres méthodes numériques,cette méthode est basée sur le "théorème des grands nombres " et " la théorème central limite"

Le but des méthodes de Monte-Carlo est de faire des calculs numériques sur des fonctions variables aléatoires. Ces techniques remontent aux travaux de Laplace et Bouffon, qui utilisaient la simulation de variables aléatoires pour calculer la valeur numérique de $.\pi$ En pratique, l'idée principale est de mener une série d'expériences puis de déterminer la valeur moyenne obtenue de chacune d'entre elles.

Principe de la méthode:

Dans le cas d'une option, le problème de l'évaluation de son prix s'écrit pour $0 \prec t \prec T$:

$$M_f = E^Q\left[f(s_{t)}\right]$$

Utilisant l'idée fondamentale des méthodes de Monte-Carlo qui consiste à créer un grand nombre de possibilités de trajectoires pour déterminer le coût de l'actif,pour $0 \prec t \prec T$,en simulant N trajectoires indépendantes $S_t^1, ..., S_t^N$ Pour chacune de ces trajectoires, on calcule alors le montant $f(S_t^i)$des pay-offs correspondants ensuite considérons a_N un estimateur du prix dont il doit converger vers le paramètre M_f

La loi des grands nombres est utilisée par les techniques de simulation de Monte-Carlo pour estimer la valeur étudiée que l'on recherche M_f,donc si les courbes

$$S^i = \left\{S_t^i, 0 \prec t \prec T\right\}, 1 \leq i \leq N$$

représentent N trajectoires indépendantes distribuées suivant une même loi, alors

$$a_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(S^i) \underrightarrow{p.s} M_f$$

L'une des problématiques auxquelles est confronté le praticien est de déterminer le nombre N de simulations nécessaires pour obtenir une estimation de prix satisfaisante.Plus la variance de $f(S^i)$ obtenu par l'utilisation du théorème central limite est élevé, plus le nombre de simulations nécessaires à l'obtention d'un estimateur précis est important. Si la réalisation d'une simulation est très couteuse en temps de calcul, il est intéressant de développer une approche jouant non pas sur N mais sur V afin de réduire le ratio $\frac{V}{N}$

Théorème central limite Si le moment d'ordre 2 de $f(S_t)$ est fini, alors

$$\sqrt{N}(a_N - M_f)\underrightarrow{Loi}N(0, var\left[f(s)\right]$$

Aujourd'hui le nombre de simulations n'est pas vraiment un facteur dominant car cela ne prendra qu'un petit moment afin de réaliser le calcul pour un grand nombre de simulations de type simple,

Toutefois pour des situations complexes ou il faut simuler dynamiquement tout un processus (plutôt qu'une seule variable), le temps de calcul devient un enjeu très important. Il faut alors chercher à réduire le nombre de simulations nécessaires.

Nous allons présenter une des méthodes utilisées pour améliorer la précision et la qualité des simulations de Monte-Carlo.

3.1.7 Méthode de rééchantillonnage quadratique

Quand on génère des variables aléatoires on obtient des statistiques empiriques qui ne coïncidents en général pas avec les statistiques du modèle.

Si on veut exploiter des formules théoriques contenant ces dernières, il faut transformer les données de façon que les paramètres empiriques égalent les paramètres théoriques.

Le paramètre qui revient constamment dans les calculs est la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire donné.

La méthode que nous allons décrire, introduite par Barraquand en 1995 est appelée le rééchantillonnage quadratique, elle est très utile pour des probabilités d'intégration multidimensionnelles

soit $Y = (Y_1......Y_n)^T$ un vecteur aléatoire à n dimension ,sa moyenne est

$$m_Y = E\left[Y\right] = \left(E\left[Y_1\right], ..., E\left[Y_N\right]\right)^T$$

Et sa matrice de covariance est définie par

$$\begin{aligned} v_Y &= E\left[(Y - m_Y)(Y - m_Y)^T\right] \\ v_Y &= E\left[YY^T\right] - m_Y m_Y^T \end{aligned}$$

Si on veut estimer m_Y et v_Y par N simulations, leurs valeurs empiriques deviennent

$$\hat{m}_Y = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} Y_j$$

et

$$\hat{v}_Y = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(Y_j - \hat{m}_Y)(Y_j - \hat{m}_Y)^T$$

Ou Y_j est le vecteur obtenu de la jième simulation. En développant l'expression de la variance empirique, on obtient.

$$\hat{v}_Y = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N\prime}(Y_j)(Y_j)^T - \hat{m}_Y\hat{m}_Y^T$$

Donc d'après la loi des grands nombres quand N est très élevé $\hat{v}_Y$ et $\hat{m}_Y$, approchent m_Y et v_Y avec une grande précision.

Lorsque N est fixé et limité, cette précision peut laisser à désirer. On peut toutefois modifier les données Y pour que la moyenne et la matrice de covariance empirique coïncident avec la moyenne et la matrice de covariance théorique.

En pratique est une matrice carrée symétrique définie positive. Cette matrice existe et est régulière. Définissons-la par :

$$I = \sqrt{v_Y}\ (\sqrt{\hat{v}_Y})^{-1}$$

posaons à présent

$$Z = I(Y - \hat{m}_Y) + m_Y$$

Pour les N simulations le vecteur Y devient

$$Z_j = I(Y_j - \hat{m}_Y) + m_Y$$

Et la moyenne empirique de Z devient

$$m_Z = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} Z_j$$

En développant cette somme, on obtient l'égalité de la moyenne empirique de Z et de la moyenne statistique de Y

$$m_Z = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} Z_j = m_Y$$

De la même manière, on calcule la matrice de covariance empirique de Z comme suit :

$$\begin{aligned}
\hat{v}_Y &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(Z_j - \hat{m}_Z)(Z_j - \hat{m}_Z)^T \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} I(Y_j - \hat{m}_Y) + m_Y - \hat{m}_Z) \\
&\quad \times (I(Y_j - \hat{m}_Y) + m_Y - \hat{m}_Z)^T \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} I(Y_j - \hat{m}_Y)(Y_j - \hat{m}_Y)^T I^T \\
&= I\hat{v}_Y I^T \\
&= \sqrt{v_Y}(\sqrt{\hat{v}_Y})^{-1}(\sqrt{\hat{v}_Y}\sqrt{\hat{v}_Y})(\sqrt{\hat{v}_Y})^{-1}\sqrt{v_Y} \\
&= \sqrt{v_Y}
\end{aligned}$$

Afin de pouvoir effectuer cette méthode, il faut connaitre la matrice de covariance théorique de l'échantillon de base. Pour pouvoir améliorer la précision des calculs des simulations Monte-Carlo.

3.2 La volatilité stochastique

3.2.1 Volatilité

La volatilité est une notion de base qui évalue le risque associé à la performance de l'actif sous-jacent sur le marché financier sur une période donnée.

L'aspect le plus difficile de la tarification est l'estimation de la volatilité. De plus, l'évolution de la volatilité a un impact important sur la valeur des options.

L'écart-type de la rentabilité d'un actif est utilisé pour définir sa volatilité. Il sert d'indicateur de risque. Plus un actif est volatilé, plus le risque est élevé. C'est l'un des critères les plus importants pour déterminer la prime, avec le prix de l'actif sous-jacent. La volatilité est imperceptible.

Par conséquent, la volatilité est un facteur critique dans l'établissement de la valeur d'une option, et la précision avec laquelle elle est estimée dicte l'exactitude avec laquelle les options sont évaluées Autrement dit, il ne suffit pas d'avoir un bon modèle d'évaluation des choix,il est également nécessaire d'avoir une estimation de volatilité la plus précise possible.

La volatilité historique (fondée sur les données historiques sur les prix des actions) et la volatilité implicite (fondée sur l'observation des prix des options) sont les deux estimateurs de base de ce paramétre.

Estimation de la volatilité

L'estimation de la volatilité est l'une des questions les plus étudiées en finance. Lors de l'analyse des produits dérivés (par exemple, les options exotiques ou la création de stratégies contenant des positions sur option), il devient essentiel de mesurer correctement son importance.

L'application d'un modèle Black-Scholes simple peut entraîner plusieurs erreurs d'évaluation,la volatilité des marchés peut être estimée à l'aide de divers modèles et Les modèles les plus essentiels sont la volatilité historique et la volatilité implicite.

3.2.2 Importance de la volatilité

Lorsqu'un produit financier suit la loi

$$dS_t = S_t \left(\mu d_t + \sigma dW_t \right) .. \qquad \text{(Eq 3.2.2.1)}$$

On dit généralement que σ représente la volatilité du produit. Dans $(Eq3.2.2.1)$ σ représente l'écart-type de $\frac{dS}{S}$ qui et est lié au risque de l'actif. Il est à noter due le coefficient μ n'est pas entré dans la formule de valorisation de Black-Scholes.

Par conséquent, nous pouvons obtenir μ qui varie avec le temps ou même qui soit un processus stochastique adapté à une certaine filtration.La formule de Black-Scholes ne donne un résultat explicite que lorsque les coefficients μ et σ sont déterministes si la volatilité est aléatoire,cela signifie que le marché est incomplet et que le prix de l'option est donné à ce moment là par une espérance conditionnelle,La formule d'Itô appliquée à $C\left(t, S_t\right)$ conduit à :

$$dC_t = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial X} dS_t + \frac{1}{2} \left(\sigma S_t \right)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} dt$$

$$dC_t = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial X} \mu dS_t + \frac{1}{2} \left(\sigma S_t \right)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} \right) dt + \frac{\partial C}{\partial X} \sigma S_t dW_t$$

La volatilité d'une option d'achat est :

$$\frac{1}{C} \frac{\partial y}{\partial x} S \sigma$$

Ce que nous pouvons écrire :

$$v_c = \frac{S}{C}\frac{\partial C}{\partial x}v_s$$

En posant : $\eta = \frac{S}{C}$

On obtient donc que la volatilité de l'option d'achat est proportionnelle à la volatilité de l'actif sous-jacent $v_c = v_s$ ce qui justifie l'achat d'une option d'achat. Et lorsque nous comparons la valeur calculée sous le modèle de Black-Scholes avec le prix réel de l'option, c'est généralement une différence entre les deux valeurs, Ce biais dans le modèle d'évaluation est connu comme étant l'effet "Smile" : La formule d'évaluation d'option de Black-Scholes tend à sous-estimer les options hors-jeu ("out-of-the-money") et à sur-estimer les options en jeu ("at-the-money"), ce qui implique que la volatilité implicite change avec le prix d'exercice ("Strike price"). Et dans le l'hypothèse faite dans le modèle Black-Scholes la volatilité est constante. En réalité,la volatilité n'est pas constante Elle n'est pas non plus uniforme Toutes ces observations nous amènent à traiter la volatilité comme une variable aléatoire.

3.2.3 Volatilité déterministe

La Volatilité Historique:

L'estimation de la volatilité , à partir de données historiques , a été utilisée par plusieurs chercheurs tels que Black Scholes(1972) , Galai (1977) et Finnerty(1978).

La volatilité historique est mesurée par l'écart type du rendement R_t du sous-jacent, durant la période qui précède l'émission des options. Si on fait abstraction des dividendes , si on désigne par $S_t - d_t$: le cours du sous-jacent, respectivement, au début et à la fin de période ce rendement s'écrit :

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-dt}}{S_{t-dt}} = \frac{dS}{S} = d\ln S$$

Le rendement instantané du sous-jacent est supposé suivre un mouvement brownien géométrique suivant l'équation:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dw$$

où dw est un processus de Wiener-Lévy (ce qui est équivalent à dire que la variable dw suit une loi normale centrée de variance dt ,il est équivalent d'affirmer que R_t suit une loi normale ou que $\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$ suit une loi normale.

Dans le modéle de Black Scholes la volatilité du rendement instantané est supposée constante. Observer la situation de prés, Il est possible d'estimer la volatilité immédiate en utilisant le prix sous-jacent. Selon la théorie proposée par la volatilié de Black Sholes, la meilleure estimation de la volatilité étant donné la racine carrée de la variance empirique non biaisée σ^2, donnée par les formules suivantes:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)-\bar{R}\right)^2 \\
\sigma_{historique} &= \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)-\bar{R}\right)^2}
\end{aligned}$$

ou

$$\bar{R} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)\right)$$

avec:

S_t:le cours de l'actif sous-jacent à la date t.

N: le nombre de jours passés, et donc le nombre d'observations à prendre en compte lors de l'évaluation de la volatilité

$\bar{R}$: la moyenne des rendements.

S_{t-1} : le cours de l'actif sous-jacent à la date $(t-1)$.

La volatilité implicite:

Les volatilités implicites sont trés importantes, car elles sont intégrées dans les prix des options et ces derniers reflétent les anticipations futurs du marché, ceci implique que la volatilité implicite constitue une éstimation prévisionelle de la volatilité de l'action. .Étant donné les critiques adressées à la méthode de la volatilité historique , une méthode alternative consiste à utiliser les prix observés sur les marchés pour en extraire une volatilité implicite.

Comme la volatilité implicite est liée à la valeur présente du marché, elle est un estimateur meilleur que la volatilité historique. L'idée est que la volatilité implicite est basée sur le prix présent de l'option qui inclue les prévisions des événements futurs.

La volatilité implicite de Black Scholes est définie comme la valeur de la volatilité σ qui égalise le prix de l'option donné par la formule de Black Scholes et le prix de l'option observé sur le marché. Le calcul de la volatilité implicite nécessite donc l'inversion de la formule d'évaluation,en l'occurrence celle de Black Scholes , tout en considérant la valeur de l'option sur le marché.,cette inversion est possible dans la mesure, où la valeur du marché fonction de la volatilité est une bijection

L'inversion d'une formule d'évaluation d'options permet d'estimer les anticipations du marché ,relatives à la volatilité future des cours des actifs sousjacents. En effet, un opérateur détenant une option, dont il veut estimer sa volatilité , observe, généralement, le cours coté de cette même option la veille (où un cours coté de l'option sur le même titre pour une autre échéance ,par exemple). Puis , en supposant la formule de Black Scholes , l'opérateur déduit la volatilité σ inconnue , à partir du cours observé. Celle-ci permet le calcul de la valeur future de l'option.

En pratique , la volatilité implicite est la méthode d'estimation la plus utilisée par les praticiens Pour calculer la volatilité implicite , on fait recours à des méthodes numériques , pour inverser les formules d'évaluation.

Estimation de la Volatilité Implicite

Continuons avec la formule Black-Scholes pour un Call-Européen pour générer une expression de volatilité selon elle:

$$C(s,t) = SN\left(d_1\right) - E\exp\left(-r\left(T-t\right)\right)N\left(d_2\right)$$

or

$$N\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp -\frac{S^2}{2}dS$$

on a alors

$$N'\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp -\frac{x^2}{2}$$

et

$$\begin{aligned}
N'(d_1) &= S\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp-\frac{d_1^2}{2}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}E\exp\left(\ln\left(\frac{S}{E}\right)\right)\exp-\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\ln\left(\frac{S}{E}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)^2\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}E\exp\left(\ln\left(\frac{S}{E}\right)\right)\exp-\frac{1}{2}\times\\
&\left(\frac{\ln^2\left(\frac{S}{E}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)^2(T-t)^2+2\ln\left(\frac{S}{E}\right)\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma^2(T-t)}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}E\exp-\frac{1}{2}\times\\
&\left(\frac{\ln^2\left(\frac{S}{E}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)^2(T-t)^2+\ln\left(\frac{S}{E}\right)(2r+\sigma^2-2\sigma^2)(T-t)}{\sigma^2(T-t)}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}E\exp-\\
&\frac{1}{2}\left(\frac{\ln^2\left(\frac{S}{E}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)^2(T-t)^2+2\ln\left(\frac{S}{E}\right)\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma^2(T-t)}\right)
\end{aligned}$$

D'autre part :

$E\exp(-r(T-t))N'(d_2) = E\exp(-r(T-t))\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{d_2^2}{2}\right)$

$= E\exp(-r(T-t))\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp-\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\ln\left(\frac{S}{E}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)^2$

$= E\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln^2\left(\frac{S}{E}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2(T-t)^2+2\ln\left(\frac{S}{E}\right)\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma^2(T-t)}+2r(T-t)\right)$

$= E\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp-\frac{1}{2}\times\left(\frac{\ln^2\left(\frac{S}{E}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2(T-t)^2-2r(T-t)^2\sigma^2+2\ln\left(\frac{S}{E}\right)\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma^2(T-t)}\right)$

$= E\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln^2\left(\frac{S}{E}\right)+(T-t)^2\left(r^2+\frac{\sigma^4}{4}-r\sigma^2+2r\sigma^2\right)+2\ln\left(\frac{S}{E}\right)\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma^2(T-t)}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}E\exp-\frac{1}{2}\times\left(\frac{\ln^2\left(\frac{S}{E}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)^2(T-t)^2+2\ln\left(\frac{S}{E}\right)\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma^2(T-t)}\right)$

et donc on a :

$$SN'(d_1) = E\exp(-r(T-t))N'(d_2) \qquad \text{(Eq 3.2.2.2)}$$

$$C^{(1)} = \frac{dC}{d(\ln S)}$$

$$C^{(2)} = \frac{d^2 C}{d\left(\ln S\right)^2}$$

$$\mu = C^{(1)} - C^{(2)}$$

on a :

$$C^{(1)} = SN\left(d_1\right) + \frac{S}{\sigma\left(T-t\right)} N'\left(d_1\right) - \frac{E\exp\left(-r\left(T-t\right)\right)}{\sigma\left(T-t\right)} N'\left(d_2\right)$$

$$C^{(2)} = SN\left(d_1\right) + 2\frac{S}{\sigma\left(T-t\right)} N'\left(d_1\right) + \frac{S}{\left(\sigma\left(T-t\right)\right)^2} N'\left(d_1\right) - \frac{E\exp\left(-r\left(T-t\right)\right)}{\left(\sigma\left(T-t\right)\right)^2} N''\left(d_2\right)$$

donc :

$$\mu = \frac{S}{\sigma\left(T-t\right)} N'\left(d_1\right) + \frac{S}{\left(\sigma\left(T-t\right)\right)^2} N''\left(d_1\right) - \frac{E\exp\left(-r\left(T-t\right)\right)}{\left(\sigma\left(T-t\right)\right)^2} N''\left(d_2\right)$$

$$N''\left(d\right) = -dN(d), d_1 = d_2 + \sigma\left(T-t\right)$$

et en utilisant $(Eq3.2.2.2)$ on a :

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{S}{\sigma\left(T-t\right)} N'\left(d_1\right) + \frac{1}{\left(\sigma\left(T-t\right)\right)^2} E\exp\left(-r\left(T-t\right)\right) d_2 N'\left(d_2\right) \;\; Sd_1 N'\left(d_1\right) \\
&= \frac{S}{\sigma\left(T-t\right)} N'\left(d_1\right) + \frac{1}{\left(\sigma\left(T-t\right)\right)^2} E\exp\left(-r\left(T-t\right)\right) \sigma\left(T-t\right) N'\left(d_2\right) \\
&= \frac{S}{\sigma\left(T-t\right)} N'\left(d_1\right) + \frac{E\exp\left(-r\left(T-t\right)\right)}{\left(\sigma\left(T-t\right)\right)^2} N'\left(d_2\right) \\
&= \frac{2S}{\sigma\left(T-t\right)} N'\left(d_1\right) = \frac{2E\exp\left(-r\left(T-t\right)\right)}{\left(\sigma\left(T-t\right)\right)^2} N'\left(d_2\right)
\end{aligned}$$

Soit E_μ l'élasticité de la fonction auxiliaire μ par rapport à S:

$$\frac{d\ln\mu}{d\ln S}$$

$$\ln\mu = \ln 2 + \ln S - \ln\left(\sigma\left(T-t\right)\right) - \ln\left(\sqrt{2\pi}\right) - \frac{d_1^2}{2}$$

D'ou:

$$\begin{aligned}
E_\mu &= 1 - \frac{d_1}{\sigma (T-t)} \\
&= -\frac{d_1}{\sigma (T-t)} + \frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \\
&= -\frac{d_1}{\sigma (T-t)} + \frac{\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma^2 (T-t)} + \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \\
&= -\frac{1}{\sigma^2 (T-t)} \ln\left(\frac{S}{E}\right) + \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}
\end{aligned}$$

Et:

$$\sigma^2 (T-t)\left(E_\mu - \frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2}\right) = \ln\left(\frac{E}{S}\right) \iff \sigma^2 (T-t)\left(E_\mu - \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{E}{S}\right) - r(T-t)$$

Donc :

$$\sigma_{imp} = \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{E}{S}\right) - r(T-t)}{(T-t)\left(E_\mu - \frac{1}{2}\right)}}$$

On a donc une expression de la volatilité en fonction des autres paramètres et de E qui n'est autre qu'une combinaison des différentielles premières et secondes du prix du Call par rapport au logarithme du sous-jacent ,En connaissant donc les valeurs précédentes du Call,on en déduit la volatilité.

On remarque que la volatilité implicite dépend du Strike et de la maturité, on obtient donc une courbe qui a la forme d'un sourire, c'est le problème de " Smile de la volatilité".

En pratique, pour calculer la volatilité implicite, on ne se sert pas de cette formule trop compliquée à mettre en place compliquée à mettre en place, on utilise une résolution numérique

Si on appelle C_0 la valeur d'un Call à l'instant initial, pour calculer la volatilité implicite, on cherche à résoudre :

$$C_0 - SN(d_1) - E\exp(-r(T-t))N(d_2) = 0$$

3.2.4 Volatilité stochastique

L'estimation de la volatilité est capitale en mathématiques financières, pour calculer le prix d'une option. Elle permet de mesurer l'instabilité du cours d'un actif financier. Plus la volatilité est importante plus l'actif est instable, si la volatilité est nulle , on peut connaître de manière exacte la valeur de l'actif dans le futur. En utilisant les données historiques du cours sous-jacent S_t et des méthodes statistiques d'estimation pour la moyenne et la variance en déduit les paramètres de la volatilité. En utilisant les prix observés des options C_t et en inversant la formule de Black-Scholes,on peut retrouver le paramètre σ. Ici,en général, on n'a pas une seule valeur de σ mais une courbe qui dépend du strike K, c'est le phénomène du "smile de volatilité".

La forme générale:

Les modèles financiers en temps continu sont écrits comme des processus de diffusion utilisant des équations différentielles stochastiques, La forme générale des modèles que nous étudions est la suivante:

$$dS_t = \mu\left(t\right) Sd_t + \sqrt{\upsilon_t} S_t dW_t^1 \qquad \text{(Eq 3.2.2.3)}$$

$$d\upsilon_t = \alpha\left(S, \upsilon, t\right) dt + \sigma\beta\left(S, \upsilon, t\right) \sqrt{\upsilon_t} dW_t^2 \qquad \text{(Eq 3.2.2.4)}$$

avec:

$$\langle dW_t^1 dW_t^2 \rangle = \rho dt$$

ou:

$\boldsymbol{\mu}$: correspond au taux de rendement du sous-jacent sous monde réel(drift).

$\boldsymbol{\sigma}$: la volatilité de la variance.

$\mathbf{dW}_t^1$, $\mathbf{dW}_t^2$: sont des processus de Wiener.

$\boldsymbol{\rho}$: la corrélation entre le mouvement Brownien standard de la volatilité et celui de l'actif sous-jacent (la corrélation entre les rendements aléatoires des cours des actions et les variations de $\upsilon(t)$)

Le processus suivi par la volatilité suit est très général, et nous ne pouvons par faire hypothèse sur $\alpha\left(.\right)$ et $\beta\left(.\right)$.

Le processus stochastique (Eq3.2.2.3) suivi par le prix de l'action est égal au processus supposé dans la dérivation de Black-Scholes. Cela garantit que la version standard de la volatilité dépendante du t de la formule de Black-Scholes peut être récupérée dans la limite quand σ tend vers 0

Dans la pratique, c'est l'exigence de base du modèle stochastique de tarification des options de volatilité, par ce l'intuition des praticiens sur le comportement des prix des options s'exprime toujours dans le cadre de la formule de Black-Scholes dans la dérivation de Black-Scholes. Cela garantit que la version standard de la volatilité.

Dans le modèle de Black-Scholes il n'y avait qu'une seule source d'aléatoire, le prix du sous-jacent qui peut être couvert par une obligation. Dans ce cas, afin de constituer un portefeuille d'investissement sans risque il est nécessaire de se couvrir contre les variations aléatoires de la volatilité.

Par conséquent, nous formerons un portefeuille Π qui contient l'option en cours qui est évaluée par $V(v,s,t)$, une quantité Δ de l'action et une quantité Δ_1 portefeuille d'investissement sans risque, il est nécessaire de se couvrir contre les variations aléatoires de la volatilité. Par conséquent, nous formerons un portefeuille Π qui contient l'option en cours qui est évaluée par $V(v,s,t)$, une quantité Δ de l'action et une quantité Δ_1 d'un autre actif dont la valeur V_1 dépend de la volatilité. On a :

$$\Pi = V - \Delta S - \Delta_1 V_1$$

L'évolution de ce portefeuille dans un temps dt, en appliquant le lemme d'Itô, donc nous obtenons :

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\upsilon S^2(t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma\upsilon\beta S(t)\frac{\partial^2 V}{\partial\upsilon\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2\upsilon\beta^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial\upsilon^2}\right)dt \\ &\quad -\Delta_1\left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\upsilon S^2(t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma\upsilon\beta S(t)\frac{\partial^2 V_1}{\partial\upsilon\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2\upsilon\beta^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial\upsilon^2}\right)dt \\ &\quad +\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta_1\frac{\partial V_1}{\partial S} - \Delta\right)dS + \left(\frac{\partial V}{\partial\upsilon} - \Delta_1\frac{\partial V_1}{\partial\upsilon}\right)d\upsilon \end{aligned}$$

Ici, par souci de clarté, nous n'avons pas mentionné la dépendance des variables S_t et v_t en t et ce sont les paramètres de la fonction β pour que le portefeuille soit instantanément sans risque, nous devons choisir :

$$\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta_1\frac{\partial V_1}{\partial S} - \Delta = 0 \qquad \text{(Eq 3.2.2.5)}$$

Pour éliminer les termes de la ds

$$\frac{\partial V}{\partial\upsilon} - \Delta_1\frac{\partial V_1}{\partial\upsilon} = 0 \qquad \text{(Eq 3.2.2.6)}$$

Pour éliminer les termes de la dv

Ensuite, nous obtenons :

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\upsilon S^2(t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma\upsilon\beta S(t)\frac{\partial^2 V}{\partial\upsilon\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2\upsilon\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial\upsilon^2}\right)dt \\ &\quad -\Delta_1\left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\upsilon S^2(t)\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho\sigma\upsilon\beta S(t)\frac{\partial^2 V_1}{\partial\upsilon\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2\upsilon\beta^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial\upsilon^2}\right)dt \\ &= r\Pi dt \\ &= r\left(V - \Delta S - \Delta_1 V_1\right)dt \end{aligned}$$

Cette dernière égalité découle de l'évaluation sans risque du portefeuille en l'absence arbitrage. Lorsque nous avons utilisé que le rendement d'un portefeuille sans risque devrait temps t. En rassemblant tous les termes en V du côté gauche et ceux en V_1 de l'autre et en utilisant les deux équations $(Eq3.2.2.5)$ et $(Eq3.2.2.6)$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\frac{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\upsilon S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma\upsilon\beta S\frac{\partial^2 V}{\partial\upsilon\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2\upsilon\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial\upsilon^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV}{\frac{\partial V}{\partial\upsilon}} \\ &= \frac{\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\upsilon S^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho\sigma\upsilon\beta S\frac{\partial^2 V_1}{\partial\upsilon\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2\upsilon\beta^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial\upsilon^2} + rS\frac{\partial V_1}{\partial S} - rV_1}{\frac{\partial V_1}{\partial\upsilon}} \\ &= f\left(S_t, \upsilon_t, t\right) \end{aligned}$$

On peut pouvons déduire que chaque côté de l'équation est égal à une fonction f des variables S, υ et t.Nous en déduisons que:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\upsilon S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma\upsilon\beta S\frac{\partial^2 V}{\partial\upsilon\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2\upsilon\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial\upsilon^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV \\ &= -\left(\alpha - \varphi\beta\right) \end{aligned}$$

ou:

$$f\left(S_t, \upsilon_t, t\right) = k\left(0 - \upsilon + \lambda\left(S_t, \upsilon_t, t\right)\right) = \left(\alpha - \varphi\beta\right)$$

3.2.5 Modèle de Heston

Présentation de modèle:

Le modèle de Heston suppose que le prix de l'action sous-jacente S_t suit un processus stochastique de type Black-Scholes, mais avec une variance stochastique v_t qui suit un processus de

Cox, Ingersoll et Ross (1985) par conséquent, le modèle de Heston est représenté par le système bivarié d'équations différentielles hastiques ($EDSs$)

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{\upsilon_t} S_t dW_t^1 \\ d\upsilon_t &= k(\theta - \upsilon_t) dt + \sigma \sqrt{\upsilon_t} dW_t^2 \\ dW_t^1 dW_t^2 &= \rho dt. \end{aligned}$$

Les variables du système sont définies comme suit :

S_t, υ_t : sont respectivement le prix et le processus de volatilité

$\sqrt{\upsilon_t}$: la volatilité (écart-type) du prix de l'actif

μ : est le coefficient de dérive du prix de l'action

θ : est la moyenne à long terme de la variance

σ :est la volatilité de la volatilité

k : est le taux de retour moyen

ρ : est le Coefficient de corrélation pour W_t^1 et $W_t^2, \rho[-1, 1]$

dt : est un incrément de temps positif indéfiniment faible

$[0, T]$: l'intervalle de temps

W_t^1 : est le mouvement brownien du prix des actifs.

W_t^2 : est le mouvement brownien de la variance du prix de l'actif.

Fonction caractéristique de Heston:

Chaque modèle de volatilité stochastique aura une fonction caractéristique unique qui décrit la probabilité la fonction de densité de ce modèle, la formule de la fonction caractéristique de Heston est la suivante

$$f(x, \upsilon_t, T, \phi) = \exp\left((C(T-t, \phi) + D(T-t, \phi)\upsilon_t + i\phi x)\right)$$

$$C(T-t, \phi) = r\phi i\tau + \frac{a}{\sigma^2}\left[(b_j\rho\sigma\phi i + d)\tau - 2\ln\frac{1 - g\exp d_r}{1-g}\right]$$

$$D(T-t, \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{\sigma^2}\left(\frac{1 - \exp d_r}{1-g}\right)$$

$$g = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{b_j - \rho\sigma\phi i - d}$$

$$d = \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2\left(2u_j\phi i - \phi^2\right)}$$

pour $j = (1, 2)$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} \\ u_2 &= -\frac{1}{2} \\ a &= k\theta \\ b_1 &= k + \lambda - \rho\sigma \\ b_2 &= k + \lambda \end{aligned}$$

sous la martingale équivalente mesure $\mathbb{Q}$ une certaine simplifcation des paramètres a lieu,à savoir

$$\begin{aligned} a &= k^*\theta^* \\ b_1 &= k^* - \rho\sigma \\ b_2 &= k^* \end{aligned}$$

On peut constater que, dans les faits, le paramètre λ a été éliminé Une méthode d'évaluation des formules sous la forme $(Eq3.2.5.1)$. été proposée par$(Carr - Madan1999)$. Cette méthode est beaucoup plus rapide que l'utilisation d'une méthode numérique pour les dites intégrales.

La solution à forme fermée (closed-form):

La solution de forme fermée d'une option d'achat européenne sur un actif non rémunéré en dividendes pour le modèle Heston est la suivante

$$C(S_t, v_t, t, T) = S_t P_1 - K \exp\left(-r\left(T - t\right)\right) P_2 \qquad \text{(Eq3.2.5.1)}$$

ou:

$$P_j\left(x, v_t, T, K\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Re\left(\frac{\exp\left(-i\theta\ln\left(k\right)\right) f_j\left(x, v_t, T, \phi\right)}{i\phi}\right) d\phi, \text{avec } j = 1, 2 \quad \text{(Eq3.2.5.2)}$$

$$x = \ln S_t$$

Le prix de l'option de vente peut alors être calculé en utilisant la formule dite de parité put-call donné par

$$put(S_t, v_t, t, T) = C(S_t, v_t, t, T) + K \exp\left(-r\left(T-t\right)\right) - S_t$$

avec : K est le prix d'exercice.

Une telle formule semble intimidante, mais en réalité, elle est "explicite" et facile à évaluer dans Matlab. La seule partie qui constitue un petit problème est la limite de l'intégrale dans ($Eq3.2.5.2$) L'intégrale ne peut pas être évaluée avec précision, mais elle peut être approximée avec une précision raisonnable en utilisant des techniques d'intégration numérique (tellesque l'intégration de Gauss-Lagendre ou Gauss-Lobato).

3.3 Prix d'option avec taux d'intérêt et volatilité stochastiques

Étant donné qu'en pratique, il est crucial de prendre en compte la possibilité que les taux d'intérêt et la volatilité puissent être stochastiques, il est nécessaire de simuler dynamiquement l'ensemble du processus afin de déterminer le prix d'une option d'achat et de vente sur actif sous-jacent de type européen avec un taux d'intérêt et volatilité stochastiques

Dans cette partie nous présenterons un modéle de volatilité stochastique et nous ferons quelque simulation Monte Carlo sur des options européenne d'achat et de vente

La volatilité du prix d'un actif dépendra bien sûr de la valeur de l'actif mais sera aussi corrélée avec le rendement de l'actif. Nous aurons une corrélation entre le taux d'intérêt et volatilité de l'actif.

La volatilité de l'actif suit le processus stochastique suivant

$$d\sigma(t)^2 = \upsilon(\beta - \sigma(t)^2)dt + \sigma_\sigma \sigma(t) dW_\sigma(t)$$

où dW_σ est un processus de Winner tel que

$$\begin{aligned} corr(dW_\sigma(t), dW_S(t)) &= \rho_{\sigma,S} = -0.5 \\ corr(dW_\sigma(t), dWr(t)) &= \rho_{\sigma,r} = \rho_{\sigma,S}\rho_{S,r} = 0.1 \end{aligned}$$

dans l'équation de la volatilité stochastique :

• $\boldsymbol{\upsilon}$: est la vitesse d'ajustement

• $\boldsymbol{\beta}$: est la moyenne à long terme du processus

• $\boldsymbol{\sigma}_\sigma$: est l'écart type du processus

Pour effectuer les simulation sur des options d'achat et de vente,nous avons utilisé les valeurs suivants

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 0.1 \\ \upsilon &= 1.25 \\ \beta &= 0.05 \\ \sigma_\sigma &= 0.1 \end{aligned}$$

Le programme Matlab

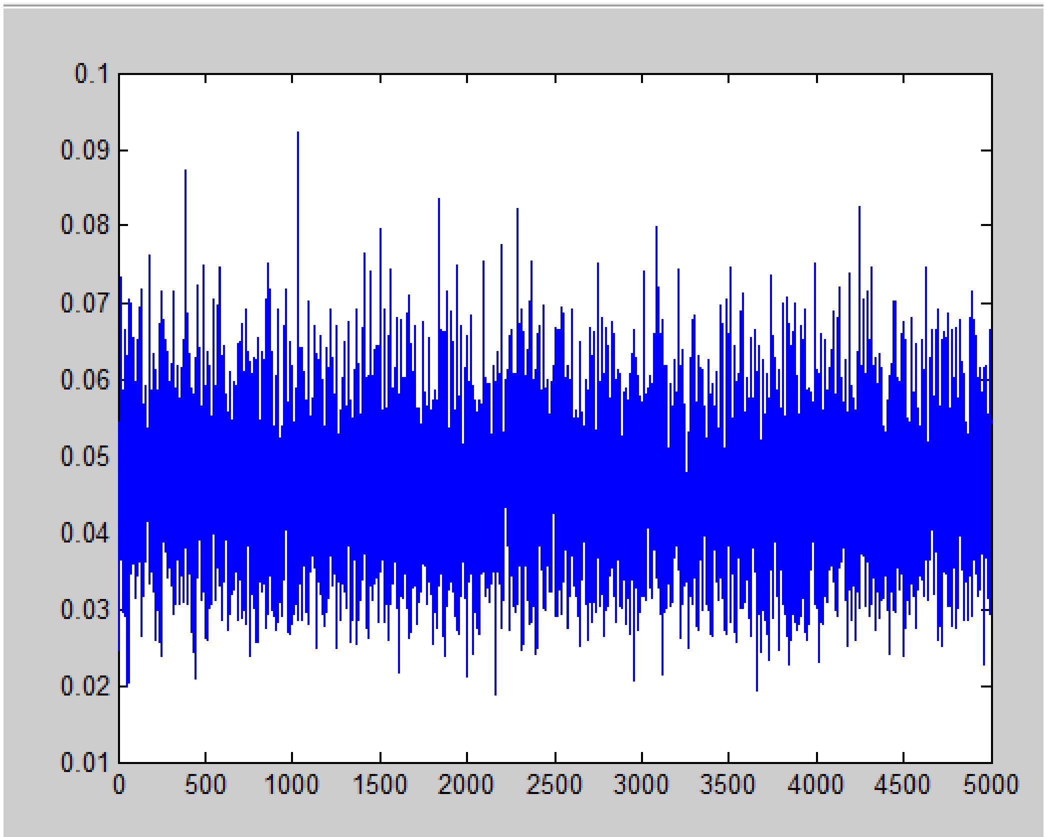
```
function rep=OptionIntVolStoch(S0,Strike,T,gamma)
%Fonction qui calcule les prix des options d'achat et de vente avec
 %simulation Monte Carlo et taux intérêt et volatilité stochastiques.
 %S0: Prix initial de l'actif
 %K: Prix d'exercice des options
 %T: Échéance des options
 %gamma: Paramètre de la simulation du taux d'intérêt

 %Paramètres initiaux
 NbPas=100;
 DeltaT=T/NbPas;
 NbTraj=5000;
 rho=-0.2;

 %Paramètres pour le taux d'intérêt
 kappa=0.25;
 theta=0.04;
 sigmaR=0.04;
 r0=0.05;

 %Paramètres pour la volatilité
 nu=1.25;
 beta=0.05;
 sigma0=0.1;
 sigmaSigma=0.1;
 rho2=-0.3;
```

```
 rho3=rho*rho2;

 %Vecteurs des valeurs du taux spot et d'actualisation
 r = r0*ones(NbTraj,1);
 rAct = zeros(NbTraj,1);

 %Vecteur des valeurs de l'actif et de la volatilité
 S = S0*ones(NbTraj,1);
 sigma = sigma0*ones(NbTraj,1);

 %Factorisation de Choleski
 L=chol([DeltaT,rho*DeltaT,rho2*DeltaT;rho*DeltaT,DeltaT,rho3*DeltaT;...
          rho2*DeltaT,rho3*DeltaT,DeltaT])';

 %Simulation des trajectoires
 for cptpas=1:NbPas
     DeltaZ = randn(3,NbTraj);
     DeltaZ = ReQuadratique(DeltaZ,zeros(3,1),eye(3));
     DeltaW = L*DeltaZ;
     S = max(0,S.*(1+r*DeltaT+sigma.*DeltaW(1,:)'));
     r = max(0,r+kappa*(theta-r)*DeltaT+sigmaR*(r.^gamma).*DeltaW(2,:)');
     sigma = max(0,sigma.^2+nu*(beta-sigma.^2)*DeltaT+...
               sigmaSigma*sigma.*DeltaW(3,:)').^(0.5);
     rAct = rAct + r*DeltaT;
 end
```

```
%Calcul du prix des options d'achat et de vente
PrixCall = mean(max(0,S-Strike).*exp(-rAct))
PrixPut = mean(max(0,Strike-S).*exp(-rAct))

end

function Rep=ReQuadratique(Echantillon, MoyTheo,CovTheo)
%Fonction effectuant le rééchantillonnage quadratique.
%Echantillon: Échantillon empirique ou simulé
%MoyTheo: Moyenne théorique des variables
%CovTheo: Matrice de covariance théorique des variables

%Calcul des paramètres de la distribution empirique
CovEmp=cov(Echantillon');
MoyEmp=mean(Echantillon,2);
LEmp=chol(CovEmp)';

%Rééchantillonnage basé sur la matrice de covariance théorique
LTheo=chol(CovTheo)';
Echantillon=LTheo*inv(LEmp)*(Echantillon-...
               repmat(MoyEmp,1,size(Echantillon,2)))+...
               repmat(MoyTheo,1,size(Echantillon,2));
Rep=Echantillon;

end
```

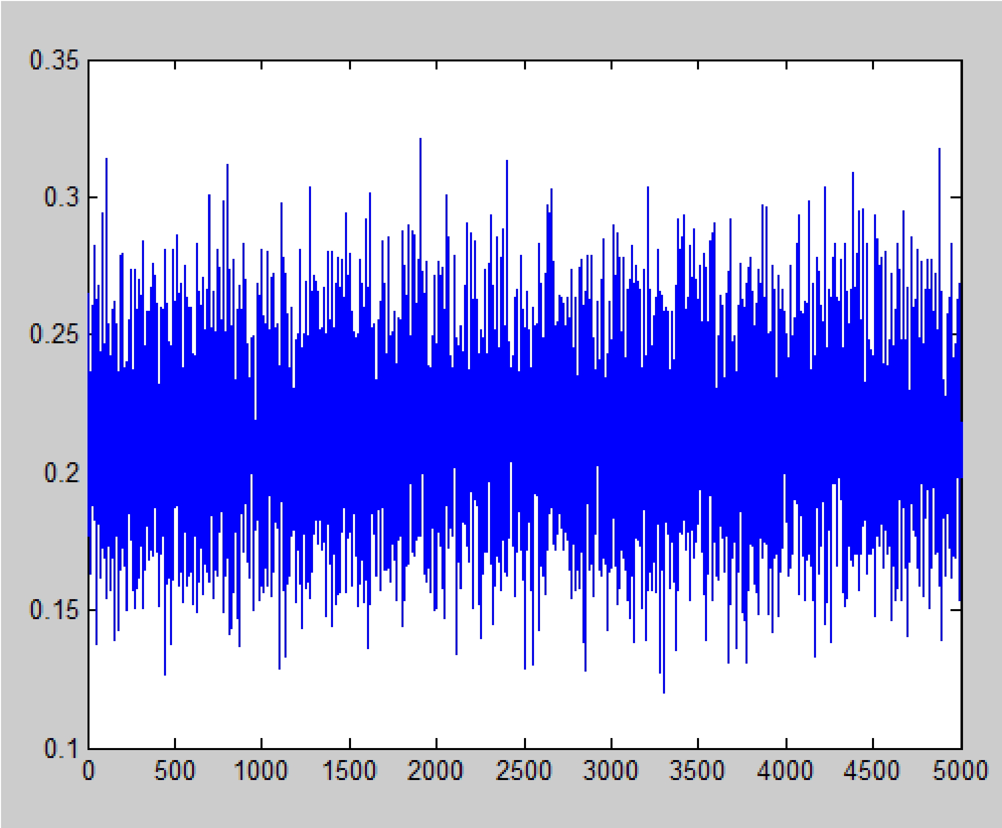
Programme qui calcule le prix d'option européenne avec taux d'intérêt et volatilité stochastiques

La figures ci-dessous illustre la simulation de taux d'intérêt stochastique:



Simulation de taux d'intérêt stochastique

La figures ci-dessous illustre la simulation de volatilité stochastique:



Simulation de volatilité stochastique

Suite à l'exécution du programme posons que $gamma = 0,5$, les résultats suivants ont été obtenus et présentés dans le tableau suivant:

Les paramètres			Prix d'option	
S_0	**E**	**T**	**Call**	**Put**
80	100	1	1.01	16.21
80	100	2	4.56	15.42
80	100	3	8.13	14.96
100	100	1	9.06	4.29
100	100	2	15.29	6.12
100	100	3	20.39	7.27
110	90	1	24.78	0.48
110	90	2	30.00	1.83
110	90	3	34.80	2.86

Valeurs de l'option et ses paramètres

Interprétation de résultats:

Au debut on choisit de fixer la valeur de prix initial S_0 de l'actif ainsi le prix d'exercice E ;tel que S_0 est inférieur à E , en variant la date d'échéance T entre $1; 2$ et 3, on constate que le prix de call européenne augmente proportionellement à la date de maturité ,alors que le prix de put européenne resulte une diminution de la même harmonie

Maintenant si on supposons que le prix d'exercice E est égal au prix initial S_0 pour une date de maturitéT qui variant entre $1, 2$ et 3, on note une augmentation remarquable dans les prix des Calls et des Puts;même chose qui a été constaté tout de même quand le prix S_0est supérieur à E.

Conclusion générale

Cette étude est principalement centré sur le probléme des calcul d'options, qui à été le moteur de la théorie et reste l'exemple le plus frappant de la pertinence des méthodes de calcul stochastique en finance.

Il existe de nombreux modéles de calcul des taux et volatilité,selon l'etude qui a fait l'objet de ce mémoire.Mais ces modéles ne peuvent pas être utilisés dans toutes les situations.Afin de protéger la stabilité financiére des organisations qui les utilisent,il est crucial de les employer de maniére responsable.

Dans l'économie financière, le modèle de taux d'intérêt de Vasicek est utilisé pour déterminer les trajectoires potentielles des futures fuctuations des taux d'intérêt. Selon le modèle,le mouvement d'un taux d'intérêt est causé par une combinaison de risque de marché, de temps et de valeur d'équilibre, le taux ayant tendance à revenir à la moyenne de ces facteurs au fil du temps. Il prévoit essentiellement où les taux d'intérêt se termineront à la fin d'une période spécifiée, en tenant compte de la volatilité du marché à ce moment-là, du taux d'intérêt moyen à long terme et d'un facteur de risque de marché spécifique.

Le calcul des multiples entiers peut être résolu numériquement à l'aide des méthodes de Monte-Carlo et d'une approche probabiliste. Ces méthodes financières permettent d'estimer les prix des options en tenant compte du rendement empirique moyen sur l'échantillon simulé des flux futurs actualisés d'un actif sous-jacent. Cela permet la tarification de produits dérivés complexes difficiles à représenter analytiquement. Nous avons choisi d'utiliser la méthode de rééchantillonnage quadratique en complément, dans le but d'améliorer ces résultats et de réduire la marge d'erreur au niveau le plus bas possible, afin d'avoir des résultats réalistes et compréhensibles.

Notre recherche s'appuiera sur une application dans laquelle nous simulerons deux éléments de contrôles-le taux d'intérêt et la volatilité-en prenons en considération.qu'ils ont un comportement stochastiques et réalisons par la suite une application qui valorise des actifs financiers complexes.

Bibliographie

[1] Aimad Taleb, Modèles à intensité et copules appliqués à la détermination des probabilités de défaut d'un portefeuille, 2002

[2] Alexis Fauth,Modèles de Taux, Surface de Volatilité et Introduction au Risque de Crédit, Université Lille I, 2014/2015, P : 27

[3] D.Lambreton.B.Lapeyre. Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance. Ellipses Marketing, 2012.

[4] Eddahabi, Marché financier et modèles des taux d'intérêts, 2003

[5] H Pham. Introduction aux mathématiques et modèles stochastiques des marchés financiers. Université Paris, 2006

[6] Heston S, A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility, with Application to Bond and Currency Options.Review of Financial Studies,6, (1993),

[7] Ioane Muni Toke, Modèles stochastiques de taux d'intérêts, Draft, Version du 11 janvier 2011

[8] John Hull, Options, Futures et autres actifs dérivés, édition 8, Pearson, P 305

[9] Khaoula Guenifi. Évaluation et couverture des option européenne par le calcul stochastique, memoire de master, université de Mohammed khider , biskra. 2019

[10] Mohseni Abbas, Marie-Laurence Mulot, Obligations et options attachées, Matif, Edition : 1, 1991.

[11] Naima Mekla et Daibeche Amina, Valorisation d'options Théorie-Simulation. Université de M'hamed Bougerra, 2017

[12] Nicolas Baud, Vincent Porte, Echantillonnage d'importance et stratification, 2001, P : 03

[13] Nicole El Karoui, Couverture des risques dans les marchées financiers,2003-2004.

[14] Patrick Georges, The Vasicek and CIR models and the expectation hypothesis of the interest rate term structure, Working Paper 17, 2003.

[15] Puig Matias, An introduction to stochastic volatility models. 2017.

[16] Sadek Hami, Les modèles DFA : Présentation, Utilité et Application, Mémoire ISFA, 2004.

[17] Van Son LAI, Simulations Stochastiques, Edition : Economica, P : 75

[18] Yacin Jerbi. Evaluation des options et gestion des risques financiers par les réseaux de neurones et par les modèles à volatilité stochastique. Mathématiques [math]. Université Panthéon-Sorbonne -Paris I,2006. Français.

.