

*République Algérienne Démocratique et Populaire Minsitère de
l'Enseignement et de la Recherche Scientifique*

*Université M'Hamed Bougara de BOUMERDES
faculté des Sciences
Département de Mathématique*



Mémoire de Master

OPTION : RECHERCHE OPÉRATIONNELLE OPTIMISATION ET MANAGMENT
STRATÉGIQUE

Thème :

La coloration injective d'arêtes du graphe de Halin cubique complet

Présenté par : Melle **Drah Fouzia** et Melle **Oubrahem Hanane**

Membres du Jury :

Président : *M^{me}* W. Drici

M.C.A , Université U.M.B.B

Examineur : *M^r* F. Cheurfa

M.C.A , Université U.M.B.B

Rapporteur : *M^{me}* B. Ferdjallah

M.A.A , Université U.M.B.B

Année Universitaire 2021/2022

REMERCIEMENTS

Nous adressons en premier lieu notre reconnaissance à ALLAH, notre DIEU unique et miséricordieux, de nous avoir donné santé et courage, pour pouvoir achever ce modeste travail. Nous l'implorons de nous guider sur le droit chemin et de nous envelopper de sa bonté et de sa bénédiction.

AMINE !

Ce travail a été effectué au sein du département des Mathématiques, de l'université UMBB MHAMED BOUGARA de BOUMERDES, sous la direction de Madame FERDJALLAH BAYA, enseignante au sein du même département. Nous lui adressons nos plus vifs et sincères remerciements et gratitude pour avoir accepté la responsabilité d'encadrer notre mémoire et la confiance qu'elle nous a accordée, pour les orientations judicieuses qu'elle nous a prodiguées dans certains moments d'égarement et son soutien moral. Sa disponibilité permanente durant la réalisation de ce travail, sa courtoisie et sa gentillesse ne se sont jamais démenties. C'est tout à son honneur.

Nous adressons nos plus vifs remerciements aux membres du jury Madame Drici et Monsieur CHEURFA qui nous ont fait l'honneur d'accepter d'examiner notre mémoire. Qu'ils trouvent ici, l'expression de nos sentiments les plus empressés.

Un grand merci à l'ensemble des enseignants de la Faculté des Sciences département des Mathématiques Exactes et de spécialité Recherche Opérationnelle pour leur patience et leur dévouement envers les étudiants.

Nous ne saurons oublier nos camarades de promotion. Qu'ils trouvent ici, le témoignage de notre sympathie. Des remerciements chaleureux et particuliers vont à l'encontre de nos famille pour leur soutien et leur enthousiasme.

Nous remercions toute personne ayant consacré un moment, pour nous aider, nous conseiller, ou nous encourager.

À tous, nous disons : soyez-en sincèrement remerciés.



Dédicaces

Je dédie ce travail :

**À ma chère mère ouiza
À mon chère père lounes**

qui n'ont jamais cessé de me supporter, me soutenir et m'encourager durant mes années d'études. Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma profonde gratitude et de ma reconnaissance

`A mes frères Aziz, Sid Ahmed, Malk et Mohamed

`A mes soeurs Hanane, Khalida, Karima, Malak

Je vous souhaite un avenir plein de joie, de bonheur, de réussite et de sérénité. Vous étiez et resterez toujours les meilleurs amis pour moi. Veuillez trouver en ce travail, le témoignage de toute mon affection et de ma tendresse.

À toute ma famille.

`A tous ceux qui me sont chers.

`A tous mes amis et mes collègues

Ze.Cylia ch.Sabrina ou.chahinez Ch.Ahmed Kh.Lamia Fa.Fatema Be.Assala Ka.kahina

`A mes professeurs surtout ma promotrice Baya Feredjllah et monsieur Said Taharbouchet.

pour leurs conseils et aides afin de réaliser ce modeste travail.

Une spéciale dédicace à une personne qui a été paternaliste avec moi *S.F*



Drah & Fourzia

Je dédie ce projet :

**À ma chère mère Hanifa
À mon chère père Meziane**

Aucun mot ne pourra exprimer la profondeur de mes sentiments pour vous. C'est avec le plus grand amour et dévouement que je vous offre ce modeste travail, en hommage de ma gratitude qui ne sera jamais assez pour tous vos sacrifices et votre abnégation. Je ne vous remercierai jamais assez. J'espère simplement que vous êtes fiers de moi. Qu'ALLAH, notre DIEU, le tout puissant, unique et miséricordieux, vous bénisse et vous prête santé et longue vie, afin que je puisse toujours vous servir et vous combler.

*À mes frères Youcef et Abd Rahim
À mon cadeau qui est comme ma deuxième mère ma petite tante Fatima
À mon oncle Said et ses filles*

Je vous souhaite un avenir plein de joie, de bonheur, de réussite et de sérénité. Vous étiez et resterez toujours les meilleurs amis pour moi. Veuillez trouver en ce travail, le témoignage de toute mon affection et de ma tendresse.

À celui que j'aime beaucoup et qui ma soutenue tout au long de ce travail mon fiancé Yahia, et à sa famille.

*À toute ma famille.
À tous ceux qui me sont chers.
À toutes mes amis et mes collègues.
À moi-même.
Hanane.*

1	Concepte generaux sur les graphes	12
1.1	Un Graphe	12
1.1.1	Graphe orienté et non orienté	12
1.1.2	Boucle	13
1.1.3	Un Graphe Simple	13
1.1.4	Un multigraphe	13
1.1.5	Graphe régulier	15
1.1.6	Graphes subcubiques, Graphes cubiques	15
1.2	Degrés d'un sommet	15
1.3	Adjacence et incidence	16
1.4	Sous-graphe et sous-graphe induit	16
1.5	Graphe complémentaire :	17
1.6	Chaîne Cycle	17
1.6.1	Chaîne :	17
1.6.2	Cycle :	18
1.6.3	Graphe connexe	18
1.6.4	Maille	19
1.7	Distance et diamètre	19
1.7.1	Distance :	19
1.8	Quelque classes des graphes	20
1.8.1	Graphe complet	20
1.8.2	Clique	20
1.8.3	Graphe biparti	20
1.8.4	Graphe biparti complet	21
1.8.5	Graphe planaire	21
1.8.6	Les arbres	21
1.8.7	Forêt	22
1.8.8	L'arbre cubique complet	23

1.8.9	Étoile	23
1.8.10	Double étoile	24
1.8.11	La Roue	24
1.8.12	Le graphe de l'Hypercube	24
1.8.13	Graphe puissance	25
1.9	Le Produit cartésien	25
1.9.1	Isomorphisme de graphes	26
1.10	Problèmes de coloration de graphes	27
1.10.1	La Coloration Propre	29
1.10.2	La coloration forte des arêtes	33
1.11	Conclusion	34
2	La coloration injective des arêtes	35
2.1	Introduction :	35
2.2	L'indice chromatique injectif :	35
2.3	Exemple d'application	36
2.4	Quelques bornes de l'indice chromatique χ'_{inj} de quelques classes de graphes	37
2.5	Le nombre de cliques	39
2.6	L'indice chromatique injectif de certains graphes maillés et les produits cartésiens	42
2.7	Conclusion	43
3	La coloration injective d'un graphe d'Halin cubique complet	44
3.1	Historique	45
3.2	Graphe de Halin	45
3.3	Graphe de Halin cubique complet	46
3.4	La coloration injective de graphe Halin cubique complet	47
3.5	Nos résultats	47
3.5.1	Démonstration	47
3.6	Conclusion	57

TABLE DES FIGURES

1.1	Graphe orienté et non orienté	13
1.2	Graphe simple G	13
1.3	Un multigraphe	13
1.4	Un graphe G est 3-régulier	15
1.5	Un graphe G et son sous-graphe G'	16
1.6	un graph G	17
1.7	Le complémentaire de G	17
1.8	La chaîne joignant le sommet 1 au sommet 6	18
1.9	Un 4-cycle : le cycle $(1,2,3,4)$ est de longueur 4	18
1.10	Graphe G connexe	19
1.11	graphe non connexe	19
1.12	Graphe complet(K_5)	20
1.13	une clique	20
1.14	Graphe biparti	21
1.15	Graphe bipartie complet	21
1.16	Un graphe G et sa représentation plane	21
1.17	Un arbre T	22
1.18	Une forêt	22
1.19	Un arbre cubique complet de hauteur 3	23
1.20	Une étoile $k_{1,5}$	23
1.21	Double étoile $S_{2,6}$	24
1.22	La Roue W_4	24
1.23	Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4	25
1.24	Le cycle C_5 et le graphe $K_5 = C_5^2$	25
1.25	$K_3 \square K_2$	26
1.26	Un graphe G et son isomorphisme	26
1.27	Exemple de coloration de la carte régions de France	28
1.28	Le graphe associée à la carte régions de France	29

1.29	La coloration propre des sommets d'un graphe G	30
1.30	La coloration propre des sommets d'un graphe G	30
1.31	La coloration propre des arêtes d'un graphe G	32
1.32	La coloration propre des arêtes d'un graphe G	32
1.33	Une 4-coloration propre d'arêtes.	33
1.34	Une 5-coloration forte d'arêtes.	34
2.1	Une coloration des arêtes non injective.	36
2.2	Une 4-coloration injective des arêtes	36
2.3	Exemple d'application	37
2.4	$\chi'_{inj}(G) \leq 2(\Delta - 1)^2 + 1$	38
2.5	$\chi'_{inj}(P) = 5$	39
2.6	Un arbre de taille minimale.	41
3.1	Un graphe de Halin	46
3.2	La roue W_8	46
3.3	Graphe H_0	47
3.4	Une 6-coloration injective de graphe H_0	48
3.5	La 4-coloration injective de graphe H_1	49
3.6	La 4-coloration injective de graphe H_2	49
3.7	LE sous-graphe	50
3.8	LE sous-graphe	50
3.9	Une 4-coloration de graphe H_3	52
3.10	Une 4-coloration de graphe H_4	52
3.11	Une 4-coloration de graphe H_n	53
3.12	La 4-coloration injective d'arête de graphe H_3	56

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie des graphes est une branche des mathématiques discrètes qui trouve différentes applications dans de nombreux domaines tels que la chimie, la biologie, les réseaux de télécommunications ou encore les réseaux sociaux. Les recherches en théorie des graphes sont essentiellement menées par des informaticiens du fait de l'importance des aspects algorithmiques (recherche de solutions).

Les graphes permettent de modéliser et résoudre une grande variété de problèmes concrets notamment ceux qui ont comme objectif la recherche de la meilleure solution parmi un ensemble fini d'alternatives, afin de mieux les comprendre, éventuellement les résoudre. La modélisation se base sur les notions de sommets et d'arêtes.

En effet, on peut ainsi ramener un problème concret et complexe à un modèle mathématique plus clairement posé qui consiste en l'étude de sommets et arêtes (ou arcs). Un graphe $G = (V, E)$ est essentiellement défini par une relation binaire $E \in V \times V$ sur un ensemble V le plus souvent fini. Malgré la simplicité apparente de leur définition, les graphes capturent une large part de la complexité algorithmique. Il est ainsi très important de bien comprendre la structure des graphes afin d'utiliser des modélisations pertinentes à base de graphes (i.e. des modélisations sur lesquelles les algorithmes de résolution sont efficaces).

Le problème de coloration de graphes est l'un des origines de la théorie des graphes, ce problème remonte au XIX^{ème} siècle lorsque Guthrie a remarqué que quatre couleurs étaient suffisantes pour colorer la carte d'Angleterre, sans donner la même couleur à deux régions ayant une frontière commune.

La coloration de graphes permet de modéliser de nombreux problèmes réels tels que l'allocation de fréquences, la diffusion dans les réseaux, le partage des ressources, le transfert de fichiers, etc...

Une coloration injective des arêtes est une coloration des arêtes d'un graphe, de telle sorte que deux arêtes adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes. La coloration injective d'arêtes a été introduit pour la première fois en 2017 par Domingos M. Cardoso, J.Orestes Cerdeira, Charles Domiic et J.Pedro Cruz.[4]

L'objectif principal de ce mémoire est l'étude de la coloration injective des arêtes d'une sous classe de graphe de Halin, appelée graphe de Halin cubique complet.

Ce manuscrit est partitionné en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous rappelons les notions élémentaires et quelques concepts de base dont nous aurons besoin au cours de ce travail.

Le second chapitre regroupe les différentes études qui ont été faites sur la coloration injective des arêtes.

En premier lieu, nous introduisons le vocabulaire de base concernant ce paramètre de coloration, ensuite nous donnons un état de l'art contenant les principaux résultats obtenus, de même nous présentons quelques bornes de nombre chromatique injectif de certains graphes particuliers.

Le but du troisième chapitre est de déterminer le nombre chromatique injectif du graphe Halin cubique complet. Dans la première partie nous définissons ce graphe, ensuite nous étudions son nombre chromatique injectif. Ces résultats vont nous permettre de déterminer des valeurs exactes l'indice chromatique injectif de ce de ce graphe.

On se servira des définitions suivantes dans les différentes parties. Les notations et les termes utilisés sont les plus usuels possibles.

Pour plus de détails sur la terminologie utilisé dans ce mémoire, nous invitons le lecteur à se référer aux ouvrages suivants [7]; [13] et [15].

1.1 Un Graphe

Définition 1. Un graphe G est noté par une paire $(V(G), E(G))$ (ou simplement (V, E) s'il n'y a pas d'ambiguïté sur G), où $V(G)$ est un ensemble non vide dont les éléments sont appelés sommets et $E(G)$ est un ensemble de paires non-ordonnées de sommets dont les éléments sont appelés arêtes.

Le nombre de sommets (respectivement, arêtes) de G est appelé ordre (respectivement, taille) du graphe.

On note $m = |V(G)|$ et $n = |E(G)|$. Une arête reliant deux sommets u et v est notée uv au lieu de $\{u, v\}$.

Soit $e = uv$ une arête d'un graphe, Les sommets u et v sont appelés extrémités de e , l'arête e est dite incidente à u et v .

1.1.1 Graphe orienté et non orienté

Graphe orienté :

Définition 2. Un graphe orienté noté $G = (V, E)$, est un couple constitué d'un ensemble fini V de sommets ainsi que d'un ensemble E d'arêtes orientées, tel que : $(u, v) \in E \implies (v, u) \notin E$.

Graphe non orienté :

Définition 3. Un graphe non orienté G est un couple (V, E) où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes.

Nous désignerons par $V(G)$ et $E(G)$ respectivement, l'ensemble des sommets et l'ensemble des arêtes d'un graphe G .

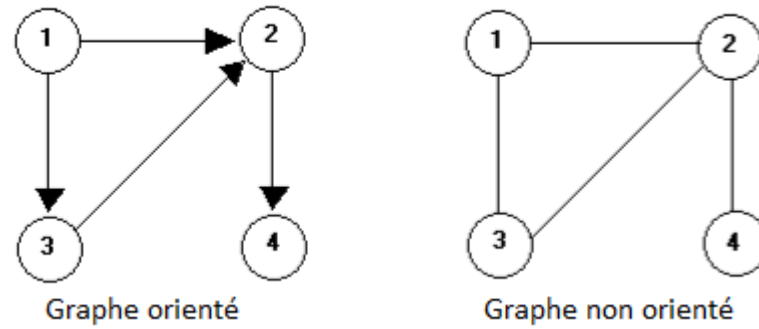


FIGURE 1.1 – Graphe orienté et non orienté

1.1.2 Boucle

Une boucle est une arête dont les deux extrémités sont identiques.

1.1.3 Un Graphe Simple

Définition 4. *Un graphe est dit simple s'il ne contient ni boucle ni arêtes multiples.*

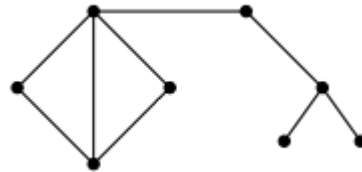


FIGURE 1.2 – Graphe simple G

1.1.4 Un multigraphe

Un multigraphe est un graphe qui n'est pas simple (contient des boucles et arêtes multiples).

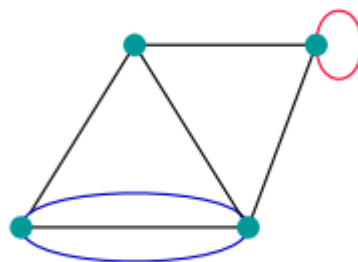


FIGURE 1.3 – Un multigraphe

Dans tout ce qui suit, nous considererons uniquement des graphes non orienté simple.

1.1.5 Graphe régulier

Définition 5. Un graphe $G = (V, E)$ est dit régulier si tous ses sommets ont le même degré, il est dit régulier de degré k si le degré de tous ses sommets est k . Ce graphe est également appelé k -régulier (Voir figure 1.4).

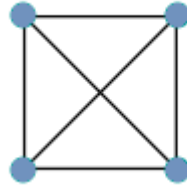


FIGURE 1.4 – Un graphe G est 3-régulier

1.1.6 Graphes subcubiques, Graphes cubiques

Un graphe G est dit subcubique si et seulement si tout sommet de G est de degré au plus 3, c'est-à-dire $\Delta(G) \leq 3$.

De plus si tout sommet de G est de degré exactement 3, c'est-à-dire :

$\forall u \in V(G), d_G(u) = 3$, alors ce graphe est appelé graphe cubique ou encore 3-régulier.

1.2 Degrés d'un sommet

Définition 6. Soit $G = (V, E)$ un graphe et v un sommet de ce graphe. Le degré de v noté $d_G(v)$ (ou $d(v)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté), est le nombre d'arêtes incidentes à v .

Un sommet de degré k (respectivement, au plus k , au moins k) est appelé un k -sommet (respectivement, un k^- -sommet, un k^+ -sommet).

Le degré maximum d'un sommet, noté $\Delta_G = \max\{d_G(u) : u \in V(G)\}$.

Le degré minimum d'un sommet, noté $\delta_G = \min\{d_G(u) : u \in V(G)\}$.

Lemme 1. (Lemme des poignées de mains).

Soit $G = (V, E)$ un graphe, alors :

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$$

En effet, chaque arête uv est comptée deux fois, une fois pour $d(v)$ et une seconde fois pour $d(u)$.

Lorsque $d(v) = 0$, on dit que le sommet v est isolé.

Si $d(v) = 1$, il est dit pendant ou feuille.

Le degré moyen

Le degré moyen d'un graphe G , noté $Ad(G)$, est égale à la moyenne des degrés de G , d'après le lemme 1, on a $Ad(G) = 2 \frac{|E(G)|}{|V(G)|}$.

Le degré moyen maximum de G , noté $mad(G)$, est le maximum parmi les degrés moyens de tous les sous-graphes H de G . c'est-à-dire :

$$mad(G) = \max\{Ad(H), H \subseteq G\}$$

1.3 Adjacence et incidence

Deux sommets u et v d'un graphe $G = (U, V)$ sont dits adjacents s'ils sont reliés par une arête. Deux arêtes sont adjacentes si elles possèdent une extrémité commune.

On dit aussi que u et v sont voisins si l'arête uv est incidente aux sommets u et v .

l'ensemble des sommets adjacents à u est appelé le voisinage de u , et est noté par $N_G(u)$ (ou $N(u)$).

1.4 Sous-graphe et sous-graphe induit

Définition 7. Un graphe $G' = (V(G'), E(G'))$ est un sous-graphe du graphe $G = (V(G), E(G))$ si $V(G') \subseteq V(G)$ et $E(G') \subseteq E(G)$ et si pour toute arête $e \in E(G')$, les extrémités de e sont dans $V(G')$.

On note alors $G' \subseteq G$ de la même manière, on peut définir le graphe induit par un sous-ensemble de sommets.

Etant donné un ensemble de sommets $S \subseteq V(G)$, on appelle sous graphe induit (ou sous graphe engendré) par S et on note $G[S]$ le graphe $G' = (S(G), E(G'))$ où $E(G')$ est l'ensemble des arêtes de $E(G)$ ayant leurs deux extrémités dans S .

Un graphe $G' = (V(G'), E(G'))$ est un graphe partiel du graphe $G = (V(G), E(G))$ si $V(G') = V(G)$ et $E(G') \subseteq E(G)$. Un graphe partiel d'un sous partiel est dit sous-graphe partiel de G .



FIGURE 1.5 – Un graphe G et son sous-graphe G'

1.5 Graphe complémentaire :

Définition 8. Nous appellons le complémentaire de G , le graphe \bar{G} , ayant le même ensemble de sommets que G , et ayant pour ensemble d'arêtes $E(\bar{G}) = \{uv, u, v \in V; uv \notin E(G)\}$, c'est à dire $E(\bar{G})$ a exactement les paires de sommets qui ne sont pas des arêtes de G .

On remarque que $\bar{\bar{G}} = G$.

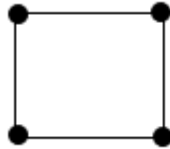


FIGURE 1.6 – un graph G

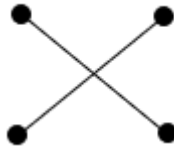


FIGURE 1.7 – Le complémentaire de G

1.6 Chaîne Cycle

1.6.1 Chaîne :

Définition 9. Une chaîne est une séquence finie et alternée de sommets et arêtes débutant et finissant par des sommets, telle que chaque arête est incidente avec les sommets qui l'encadre dans la séquence.

- Le premier et le dernier sommet sont appelés (sommets) extrémités de la chaîne.
- La longueur de la chaîne est égale au nombre de ses arêtes qui la composent.
- si aucun des sommets composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, la chaîne est dite chaîne élémentaire.
- si aucune des arêtes composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, la chaîne est dite chaîne simple.

On peut extraire du graphe ci-dessus les chaînes suivante : (1,2,3,6) ou (1,2,3,4,5) ou plein d'autres.

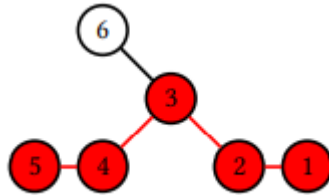


FIGURE 1.8 – La chaîne joignant le sommet 1 au sommet 6

1.6.2 Cycle :

Définition 10. *Un cycle est une chaîne dont les extrémités coïncident.*

Un cycle élémentaire (tel que l'on ne rencontre pas deux fois le même sommet en le parcourant) est un cycle minimale pour l'inclusion, c'est-à-dire ne contenant strictement aucun autre cycle.

Un cycle de longueur q est appelé un q -cycle.

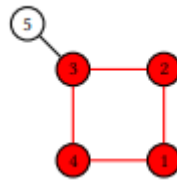


FIGURE 1.9 – Un 4-cycle : le cycle (1,2,3,4) est de longueur 4

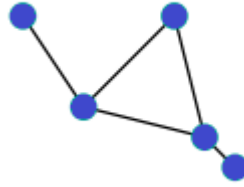
1.6.3 Graphe connexe

Définition 11. *Un graphe G est dit connexe si pour toute paire u et v , de sommets distincts il existe une chaîne reliant u à v .*

une composante connexe d'un graphe G est un sous-graphe maximale de G . c'est-à-dire un sous-graphe tel que tout sous-graphe de G le contenant strictement n'est pas connexe.

Théorème 1.6.1. *théorème d'Euler [17]*

- ❖ *Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.*
- ❖ *Un graphe connexe contient un cycle eulérien si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 (tous les sommets ont un degré pair).*

FIGURE 1.10 – Graphe G connexe

Graphe k -connexe

Définition 12. On dit qu'un graphe G est k -connexe ($k \geq 2$) si $|V(G)| > k$ et pour tout ensemble de sommets $U \subseteq V(G)$ avec $|U| \leq k - 1$, $G - U$ est connexe. On définit la connectivité d'un graphe comme étant le plus grand k tel que G est k -connexe. La connectivité d'un graphe G est notée par $k(G)$.

Graphe non connexe

Un graphe non connexe se décompose en composantes connexes.

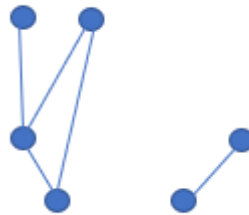


FIGURE 1.11 – graphe non connexe

1.6.4 Maille

Définition 13. La maille d'un graphe connexe G notée $g(G)$ est la longueur du plus petit cycle dans G qui contient au moins un cycle g . Nous avons $3 \leq g(G) \leq n = +\infty$.

1.7 Distance et diamètre

1.7.1 Distance :

Définition 14. Soit $G = (V, E)$ un graphe, nous appelons distance entre v et v' , que nous notons $dist(v, v')$, la longueur du plus courte chaîne entre v et v' .

Le diamètre d'un graphe est la plus longue des distances entre deux sommets.

1.8 Quelques classes des graphes

1.8.1 Graphe complet

Définition 15. *Un graphe complet est un graphe ou chaque sommet est reliée à tous les autres.*

Le graphe complet d'ordre n noté K_n , tel que chaque sommet est de degré $n - 1$.



FIGURE 1.12 – Graphe complet(K_5)

1.8.2 Clique

Définition 16. *une clique d'un graphe G est un sous-ensemble des sommets de G dont le sous-graphe induit est complet.*

une clique maximale d'un graphe est une clique dont le cardinal est le plus grand (c'est à dire qu'il possède le plus grand nombre de sommets).

On appelle le nombre d'un clique dans un graphe G noté $\omega(G)$, le cardinale de la plus grande clique de G .

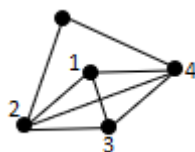


FIGURE 1.13 – une clique

Le sous-graphe engendrée par l'ensemble $C = \{1, 2, 3, 4\}$ est une clique.

1.8.3 Graphe biparti

Définition 17. *un graphe G est biparti si l'ensemble de ses sommets $V(G)$ peut être partitionné en deux sous-ensemble de sommets X et Y de façon que deux sommets de la même ensemble ne soient jamais adjacents.*

On note habituellement un tel graphe biparti $G = (X, Y, E(G))$.



FIGURE 1.14 – Graphe biparti

1.8.4 Graphe biparti complet

Définition 18. Un graphe biparti est dit biparti complet si tout les sommets de X est relié à tout les sommets de Y .

Le graphe biparti complet avec $|X| = m$ et $|Y| = n$ est noté $K_{m,n}$.

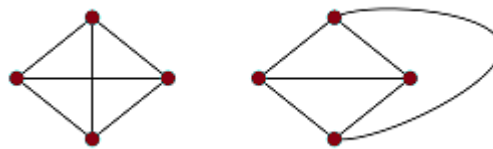
un graphe biparti complet dont une partition contient un seul sommet est appelé étoile.



FIGURE 1.15 – Graphe bipartie complet

1.8.5 Graphe planaire

Définition 19. Un graphe est dit planaire s'il existe au moins une façon de le représenter dans un plan sans que deux arêtes ne se croisent.

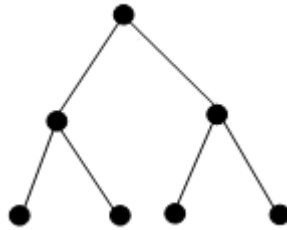
FIGURE 1.16 – Un graphe G et sa représentation planaire

1.8.6 Les arbres

Un arbre $T = (V, E)$ est un graphe connexe et sans cycle. Pour un arbre T de racine r on a :

- Le père d'un sommet u est l'unique voisin de u sur le chemin de la racine à u . La racine r est le seul sommet sans père.
- Les fils d'un sommet u sont les voisins de u autres que son père.

- Une feuille est un sommet sans fils. Les feuilles correspondent aux sommets de degré 1.
- Les sommets de degré supérieur ou égal à deux sont appelés sommets internes.
- La hauteur h de l'arbre T est la longueur du plus long chemin de la racine à une feuille.
- Soient v ou/et v' les centres de T . Alors, les branches de T sont les sous-graphes obtenus en supprimant les centres de T ainsi que leurs arêtes incidentes.

FIGURE 1.17 – Un arbre T

1.8.7 Forêt

Définition 20. *On appelle forêt un graphe dont chaque composante connexe est un arbre.*



FIGURE 1.18 – Une forêt

1.8.8 L'arbre cubique complet

Définition 21. *Un arbre cubique Complet est un arbre cubique de hauteur $n+1$ avec un sommet racine telle que toutes ses feuilles ont la même distance $n+1$ de la racine.*

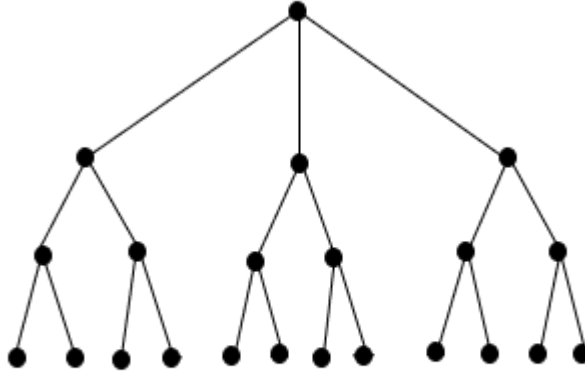


FIGURE 1.19 – Un arbre cubique complet de hauteur 3

1.8.9 Étoile

Définition 22. *L'étoile est un autre cas particulier d'arbre, souvent étudié comme sous-graphe induit. Une étoile est un arbre à un seul sommet support, appelé le centre de l'étoile. Cela peut aussi être vu comme un biparti complet, noté $K_{1,n-1}$ d'ordre $n \geq 2$. La griffe est l'étoile à 3 feuilles $K_{1,3}$.*

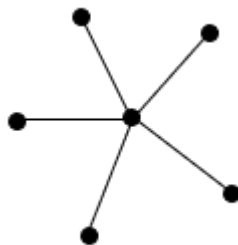


FIGURE 1.20 – Une étoile $k_{1,5}$

1.8.10 Double étoile

Définition 23. Une double étoile est un arbre dont exactement deux sommets ne sont pas des feuilles, noté $S_{r,s}$.

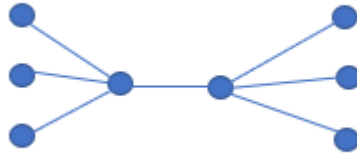


FIGURE 1.21 – Double étoile $S_{2,6}$

1.8.11 La Roue

Définition 24. La Roue W_n est un graphe d'ordre $n \geq 4$ formé en ajoutant un sommet "centre" connecté à tous les sommets du graphe cycle C_{n-1} . La roue W_n est souvent un C_n auquel on ajoute un sommet universel.

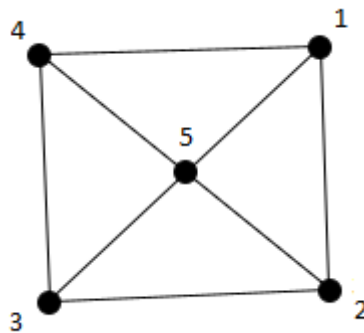


FIGURE 1.22 – La Roue W_4

1.8.12 Le graphe de l'Hypercube

Définition 25. L'hypercube de dimension d noté Q_d , est le graphe dont les sommets représentent les d -uplets de $\{0, 1\}^d$.

Deux sommets u et v sont adjacents si et seulement s'ils diffèrent exactement d'une composante.

notons que : $Q_0 = K_1$; $Q_1 = K_2$; de manière récurrente :

$Q_{d+1} = Q_d \square K_2$ pour $d \geq 0$.

ou encore : $Q_{d+m} = Q_d \square Q_m$.

Q_d est biparti, d -régulier avec 2^d sommets et $d * 2^{d-1}$ arêtes.

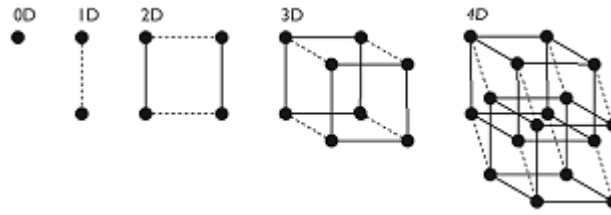


FIGURE 1.23 – Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4

1.8.13 Graphe puissance

Définition 26. La p -ième puissance G_p d'un graphe G est le graphe ayant le même ensemble de sommets que G , et tel que deux sommets u et v dans G_p sont adjacents si et seulement si la distance entre eux dans G est au plus p ($d_G(u, v) \leq p$).

Par exemple, le carré du cycle C_5 (c'est-à-dire la deuxième puissance de C_5) est le graphe complet K_5 (voir Figure 1.24).

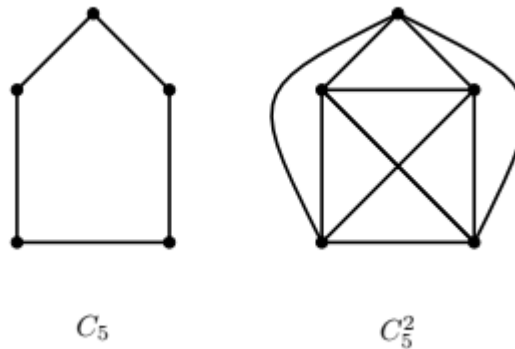


FIGURE 1.24 – Le cycle C_5 et le graphe $K_5 = C_5^2$.

1.9 Le Produit cartésien

Soit $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ deux graphes notée $G \square G'$, appelé produit cartésien des deux graphes G et G' , et tel que $V(G \square G') = V(G) \times V(G')$ et (u, u') est adjacent à (v, v') si et seulement si :

$$\begin{cases} u = v & \text{et} & u'v' \in E(G') \\ u' = v' & \text{et} & uv \in E(G) \end{cases}$$

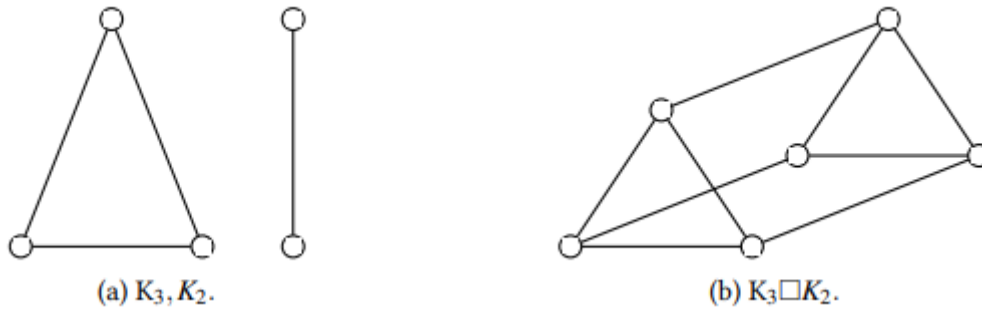


FIGURE 1.25 – $K_3 \square K_2$

1.9.1 Isomorphisme de graphes

Définition 27. Deux graphes H et G sont isomorphes s’il existe une bijection f entre $V(H)$ et $V(G)$ de sorte que $u, v \in E(H)$ si et seulement si $f(u), f(v) \in E(G)$.

Les deux graphes G et H sont isomorphes (Voir figures 1.26).

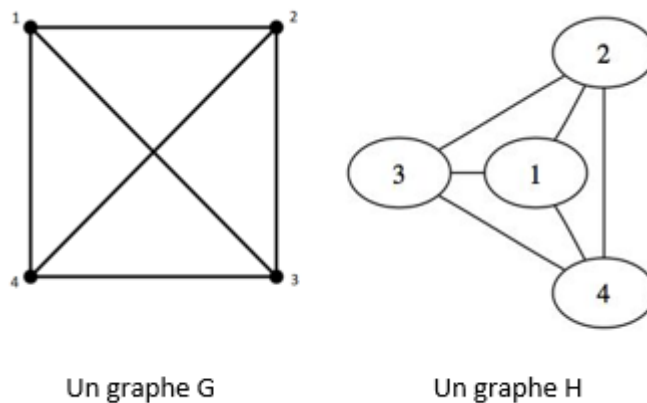


FIGURE 1.26 – Un graphe G et son isomorphisme

1.10 Problèmes de coloration de graphes

Un des premiers problèmes de coloration de graphes est certainement le problème de quatre couleurs. Ce problème posé par Francis Guthrie en 1852, il consiste à répondre à la question suivante : " est-il possible de colorer toute carte de géographie avec quatre couleurs ? " .

En théorie des graphes, ce problème consiste à répondre à la question suivante : " peut-on colorer les sommets d'un graphe planaire en utilisant quatre couleurs de telle sorte que toutes les arêtes aient des extrémités de couleurs différentes ?" . Depuis plusieurs décennies, la coloration de graphes est un domaine très attractif de la théorie des graphes par ses nombreuses applications. La coloration de graphes permet de modéliser de nombreux problèmes réels , depuis le placement de personnes autour d'une table ou de pièces sur un échiquier jusqu'aux différents problèmes d'ordonnancement et de planning de la vie de tous les jours et dans le domaine des réseaux/télécom. . .

Un peu d'histoire . . .

La coloration de graphes est un outil permettant de caractériser les graphes. Il n'y a pas une unique façon de colorer les graphes mais plusieurs. Nous pouvons colorer différents éléments d'un graphe (les sommets, les arêtes, une combinaison de ces éléments, des sous-structures, etc) et à ceci peuvent s'ajouter différentes contraintes. La contrainte la plus courante est celle de la propriété.

[14] Le problème de coloration de graphes est une des origines de la théorie des graphes. L'un des problèmes les plus célèbres et les plus productifs est le problème des quatre couleurs. Ce problème est resté pendant plus d'un siècle sans solution.

Les premiers résultats de coloration de graphes concernent presque exclusivement les graphes planaires : il s'agissait alors de colorer des cartes.

[10] En 1852, le jeune mathématicien F. Guthrie s'est demandé s'il est toujours possible de colorer une carte de géographie à l'aide de quatre couleurs de sorte à ce que des pays voisins aient des couleurs différentes. La première trace écrite de la conjecture des quatre couleurs apparaît dans une lettre que A. D. Morgan envoya à W. R. Hamilton en 1852.

De nombreuses tentatives de démonstration de la conjecture (incorrectes) furent alors proposées par Cayley, Kempe et bien d'autres. La carte à colorer a été remplacée par un graphe, chaque pays étant représenté par un sommet et deux pays voisins étant reliés par une arête.

[10] L'étude de cette conjecture entraîna de nombreux développements en théorie des graphes, par P. G. Tait, P. J. Heawood, F. Ramsey et H. Hadwiger. En 1890, P. J. Heawood fit remarquer que la démonstration de A. Kempe était

fausse.

[1] [2] Il montra quant à lui le théorème des cinq couleurs en reprenant des idées de A. Kempe. De nombreux travaux ont été publiés lors du siècle suivant pour réduire le nombre de couleurs à quatre, jusqu'à la démonstration finale de deux chercheurs américains, K.Appel et W. Haken en 1976. Ils ont pu répondre affirmativement à cette conjecture des quatre couleurs. Plus d'un siècle s'est donc écoulé entre l'énoncé et la résolution de ce problème en apparence très simple. Pour une note historique détaillée vous pouvez vous référer à [Kubale 04] [Wilson 04].

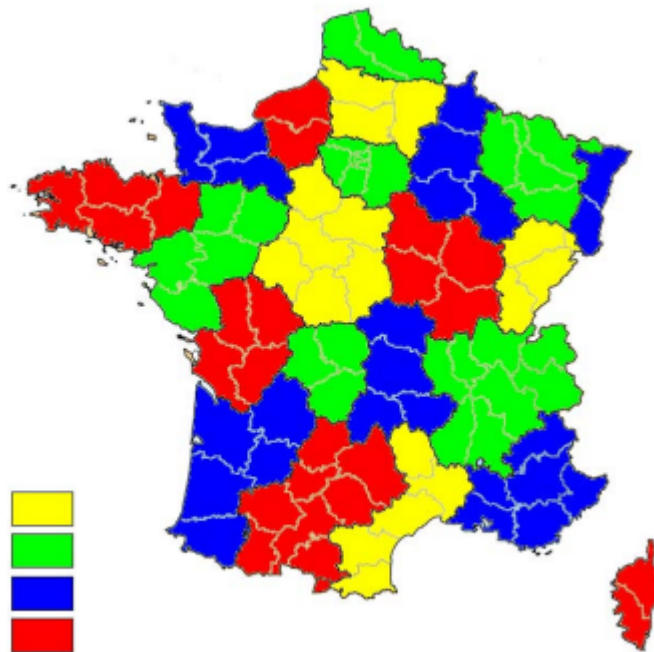


FIGURE 1.27 – Exemple de coloration de la carte régions de France

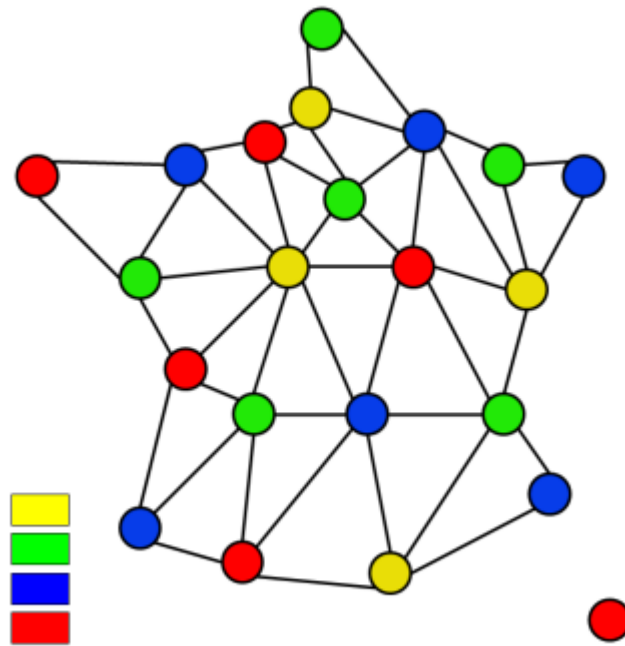


FIGURE 1.28 – Le graphe associée à la carte régions de France

1.10.1 La Coloration Propre

Coloration propre des sommets

Définition 28. Une K -coloration propre des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est une application ϕ de l'ensemble des sommets $V(G)$ dans l'ensemble des entiers de couleurs $1, \dots, K$ de telle sorte que deux sommets adjacents dans G reçoivent des couleurs différentes, c-à-d pour toute arête $uv \in E(G)$, $\phi(u) \neq \phi(v)$.

Un graphe qui admet une K -coloration est dit K -colorable.

le nombre chromatique

Le nombre chromatique de G noté $X(G)$, est le plus petit entier K telle que G admet une k -coloration propre de sommets .

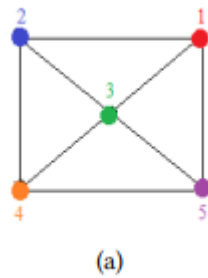
Exemple :

La figure 1.26 (a) représente une 5-coloration propre des sommets d'un graphe G , mais le nombre de couleur utilisé n'est pas minimum .

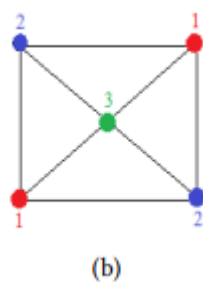
Le nombre chromatique de G vérifie : $3 \leq X(G)$, car G contient C_3 donc au moins 3 couleurs sont nécessaires pour colorer le graphe G .

Comme il existe une coloration utilisant 3 couleurs dans la figure 1.27 (b) alors :

$$X(G) \leq 3$$

FIGURE 1.29 – La coloration propre des sommets d'un graphe G

On conclure $X(G)=3$.

FIGURE 1.30 – La coloration propre des sommets d'un graphe G

Une borne supérieure classique du nombre chromatique est celle donnée par Brooks[27].

Théorème 1.10.1. (Brooks 1941) : [4] Pour tout graphe connexe G de degré maximum $\Delta(G)$, si G n'est ni un cycle d'ordre impaire, ni un graphe complet, alors :

$$X(G) \leq \Delta(G)$$

Si de plus, G est complet ou contient un cycle impaire, alors :

$$X(G) = \Delta(G) + 1$$

Il est bien connu que la taille maximum d'une clique $W(G)$ est une borne inférieure du nombre chromatique. En effet, si G contient une clique de taille K , alors il faut au moins K couleurs pour la colorer.

Donc tout graphe G vérifie : $X(G) \leq W(G)$.

Théorème 1.10.2. [4] Pour tout graphe G de degré maximum $\Delta(G)$ on a :

$$X(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Parmi les nombreux résultats du nombre chromatique, nous pouvons citer le théorème des quatre couleurs, démontré par Appel et Haken à l'aide d'un ordinateur :

Théorème 1.10.3. [1] Si G est un graphe planaire, alors $X(G) \leq 4$.
 [8] Soit G un graphe et \bar{G} le graphe complémentaire de G , on a :

$$X(G) + X(\bar{G}) \leq n + 1$$

[7] Dans un graphe biparti $G = (V_1 \cup V_2, E)$, chaque arête doit joindre un sommet de V_1 et un sommet de V_2 , alors on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 1.10.4. [6] Un graphe G est 2-colorable si et seulement si G est biparti.

La borne inférieure du nombre chromatique d'un graphe G implique le nombre chromatique de ses sous-graphes.

Théorème 1.10.5. [6] Si H est un sous-graphe d'un graphe G , alors :

$$X(H) \leq X(G)$$

Concernant les graphes cubiques, Brooks a démontré que les sommets d'un graphe cubique peuvent être coloriés avec trois couleurs (ou moins) de telle sorte que deux sommets adjacents ne soient pas de la même couleur, sauf dans le cas du graphe K_4 .

Un graphe bi-cubique est un graphe biparti régulier de degré 3, c'est-à-dire un graphe cubique dont les sommets peuvent être coloriés avec deux couleurs seulement.

Le nombre chromatique a été largement étudié et de nombreux résultats le concernant peuvent être trouvés dans la littérature .

Coloration propre des arêtes

Définition 29. Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un entier k , une k -coloration propre des arêtes de G est une application :

$$\phi : E(G) \longrightarrow C = \{1, 2, \dots, k\}$$

Telle que deux arêtes adjacentes ne portent pas la même couleur.

Autrement dit, pour tout $u, v, w \in V(G)$ tel que :

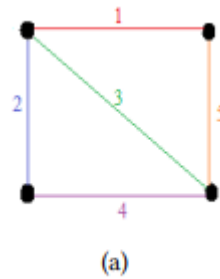
$$uv, vw \in E(G), \phi(uv) \neq \phi(vw)$$

L'indice chromatique de G :

Le plus petit entier K pour lequel G admet une K -coloration propre d'arêtes est appelé l'indice chromatique de G et est noté $X'(G)$.

Dans une coloration propre des arêtes, les arêtes incidentes à un même sommet doivent évidemment avoir toutes des couleurs différentes.

Cette observation donne la borne inférieure de l'indice chromatique :

FIGURE 1.31 – La coloration propre des arêtes d'un graphe G

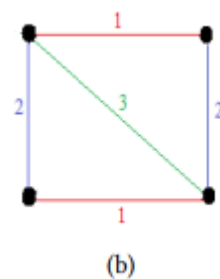
$$X'(G) \geq \Delta(G)$$

La figure (a) représente une 5-coloration propre des arêtes d'un graphe G , mais le nombre de couleur utilisé n'est pas minimum.

L'indice chromatique de G vérifie : $3 \leq X'(G)$, car G contient C_3 donc au moins 3 couleurs sont nécessaires pour colorier le graphe G , comme il existe une coloration utilisant 3 couleurs dans la figure (b), alors :

$$X'(G) \leq 3$$

On conclure que $X'(G) = 3$.

FIGURE 1.32 – La coloration propre des arêtes d'un graphe G

Le résultat le plus important portant sur l'indice chromatique est dû à Vizing en 1964 :

Théorème 1.10.6. [19] pour tout graphe G de degré maximum $\Delta(G)$ on a :

$$\Delta(G) \leq X'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Le théorème de Vizing permet donc de classifier les graphes en deux classes : les graphes ayant un indice chromatique égal à Δ , dit de classe 1, (par exemple les graphes bipartis) et ceux ayant un indice chromatique égal à $\Delta + 1$ dit de classe 2 (par exemple les cycles impaires).

1.10.2 La coloration forte des arêtes

La coloration forte d'arêtes a été introduite en 1983 par Fouquet et Jolivet, dans le but de régler le problème d'affectation des canaux sans conflit dans les réseaux radio. En effet, l'objectif est d'attribuer des fréquences à chaque paire d'émetteurs-récepteurs communiquant entre eux.

Ils l'ont défini comme suit :

Définition 30. La coloration forte des arêtes d'un graphe G est une application ϕ de l'ensemble des arêtes E dans l'ensemble des couleurs $1, \dots, k$ de telle sorte que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.

Soit e_1, e_2 et e_3 trois arêtes consécutives alors :

$$\phi(e_1) \neq \phi(e_2), \phi(e_2) \neq \phi(e_3) \text{ et } \phi(e_1) \neq \phi(e_3).$$

Une coloration forte des arêtes d'un graphe G est une coloration propre des arêtes telle que chaque paire de sommets appartenant à différentes arêtes de même couleur n'est pas adjacente.

L'indice chromatique fort

L'indice chromatique fort, $X_s'(G)$, est le nombre minimum de couleurs dans une coloration forte des arêtes de G .

Exemple :



FIGURE 1.33 – Une 4-coloration propre d'arêtes.

La coloration proposée dans la figure 1.33 ne représente pas une coloration forte des arêtes, car il existe trois arêtes consécutives yz, zu , et uv telle que :

$$\phi(yz) = \phi(uv).$$

La coloration proposée dans la figure 1.34 est une coloration forte des arêtes car chaque deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.

Il est clair que ce graphe ne peut pas être coloré avec moins de couleurs par cette coloration, donc $X_s'(G) = 5$.



FIGURE 1.34 – Une 5-coloration forte d'arêtes.

1.11 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de rappeler les bases du vocabulaire utilisé dans la théorie des graphes afin de pouvoir appréhender la suite au niveau de l'utilisation des graphes pour la résolution de problèmes combinatoires. Dans le deuxième chapitre, nous étudions le problème de la coloration injective.

2.1 Introduction :

La coloration injective des arêtes d'un graphe est un nouveau paramètre de coloration qui a été introduit en 2017 par Domingos M. Cardoso, J.Orestes Cerdeira, Charles Dominic et J.Pedro Cruz.

[5] Une coloration injective des arêtes est une coloration des arêtes d'un graphe, de telle sorte que deux arêtes adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes. On peut aussi la définir comme suit :

Définition 31. *Une coloration injective des arêtes d'un graphe $G = (V, E)$ est une application ϕ de l'ensemble des arêtes E dans l'ensemble des couleurs $\{1, \dots, k\}$ de telle sorte que si e_1, e_2 et e_3 sont trois arêtes consécutives dans G , alors $\phi(e_1) \neq \phi(e_3)$.*

Notons que cette coloration n'est pas une coloration propre, deux arêtes adjacentes peuvent recevoir la même couleur.

2.2 L'indice chromatique injectif :

L'indice chromatique injectif des arêtes de G , noté $\chi'_{inj}(G)$, est le plus petit entier K tel que G admet une K -coloration injective des arêtes.

Nous disons que le graphe G admet une k -coloration injective d'arêtes si $\chi'_{inj}(G) = k$.

La coloration illustrée dans la figure 2.1 n'est pas injective car les arêtes uz et xv sont à distance deux et ont la même couleur.

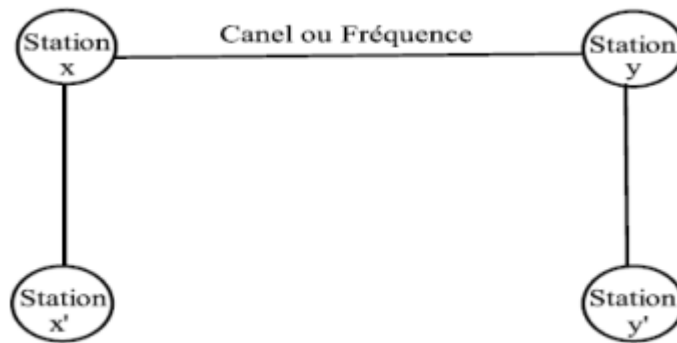


FIGURE 2.3 – Exemple d'application

G , peut créer l'interférence secondaire comme celle obtenue lorsque deux stations x et y qui s'entendent partagent la même fréquence avec un voisin $x' \neq y$ de x et un voisin $y' \neq x$. La figure 2.3 représente un sous graphe de G .

Une assignation de canaux ou de fréquences aux arêtes entre les stations pour éviter les interférences secondaires correspond à la coloration injective des arêtes du graphe (où chaque couleur est une fréquence ou un canal).

2.4 Quelques bornes de l'indice chromatique χ'_{inj} de quelques classes de graphes

Nous commençons cette section par quelques résultats fondamentaux qui sont des conséquences directes de la définition d'indice chromatique injectif. Il est clair que la coloration injective des arêtes est une coloration forte d'arêtes mais en exigeant pas la propreté, donc pour un graphe G cette borne est évidente :

$$\chi'_{inj}(G) \leq \chi_s(G).$$

Une autre borne supérieurs naturel de l'indice chromatique de la coloration injective des arêtes d'un graphe G en fonction de degré maximum Δ est donné par :

$$\chi'_{inj}(G) \leq 2(\Delta - 1)^2 + 1$$

En effet, on veut colorer une arête quelconque uv d'un graphe G , alors pour toute arête incidente au sommet v il faut éviter les $\Delta - 1$ couleurs des arêtes qui lui sont adjacentes.

Ce processus est répété $(\Delta - 1)^2$ des couleurs de côté de v .

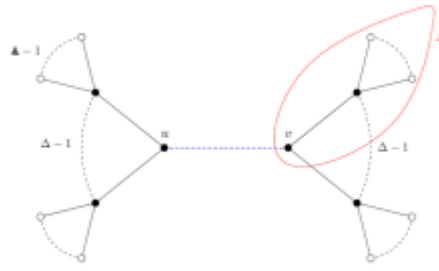


FIGURE 2.4 – $\chi'_{inj}(G) \leq 2(\Delta - 1)^2 + 1$

Par symétrie, on obtient le même nombre de couleurs à éviter du côté de u .
Ce qui nous fournit la borne supérieure suivante :

$$\chi'_{inj}(G) \leq 2(\Delta - 1)^2 + 1$$

Domingos M. Cardoso, J. Orestes Cerdeira, Charles Dominic, et J. Pedro Cruz ont démontré que la recherche de la valeur exacte de l'indice chromatique injectif d'un graphe χ'_{inj} est NP-complet dans le cas général. Ils ont obtenu des bornes pour certaines classes de graphes.

Proposition 2.4.1. [5] Soient P_n la chaîne de longueur n , C_n le cycle de longueur n , $K_{p,q}$ le graphe bipartite complet et P le graphe de Petersen, alors :

(1)

$$\chi'_{inj}(P_n) = 2, n \geq 4$$

.

(2)

$$\chi'_{inj}(C_n) = \begin{cases} 2 & ; n \equiv 0 \pmod{4}. \\ 3 & ; \text{sinon.} \end{cases}$$

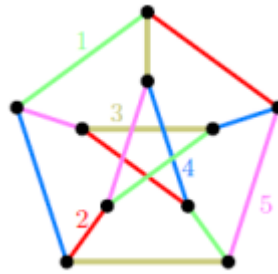
(3)

$$\chi'_{inj}(K_{p,q}) = \min\{p, q\}.$$

(4)

$$\chi'_{inj}(P) = 5$$

, (une 5-coloration injective du graphe de Petersen est illustrée dans la figure suivante :).

FIGURE 2.5 – $\chi'_{inj}(P) = 5$

Le cas de l'arbre, ils ont donné la borne suivante :

Proposition 2.4.2. *Pour tout arbre d'ordre n , $n \geq 2$, $1 \leq \chi'_{inj}(G) \leq 3$*

Proposition 2.4.3. [5] *Soit G un graphe. Alors : $\chi'_{inj}(G) = K$ si et seulement si k est l'entier positif minimal pour lequel l'ensemble des arêtes de G , $E(G)$ peut être partitionné en sous-ensembles non vides E_1, \dots, E_k , de telle sorte que les extrémités des arêtes de chacun de ces sous-ensembles E_j induit un sous-graphe G_j de G où chaque composante est une étoile.*

En appliquant la proposition 2.4.2, nous pouvons conclure que la coloration injective des arêtes de graphe roue W_n , si $n \geq 4$ est :

$$\chi'_{inj}(W_n) = \begin{cases} 6, & \text{si } n \text{ est pair} \\ 4, & \text{si } n \text{ est impair et } n-1 = 0(\text{mod}4) \\ 5, & \text{si } n \text{ est impair et } n-1 \neq 0(\text{mod}4) \end{cases}$$

Proposition 2.4.4. [5] *Pour tout graphe G $n \geq 2$, $\chi'_{inj}(G) = 1$ et si et seulement si G est l'union disjointe de $K \geq 1$ étoiles, c'est à dire :*

$$G = \bigcup_{j=1}^K K_{1,l_j}, \sum_{j=1}^K l_j = n - K \text{ et } V(K_{1,l_j}) \cap V(K_{1,l_{j'}}) = \emptyset \text{ pour } j \neq j'.$$

La proposition suivante 2.4.4 caractérise les graphes pour lesquels cette borne supérieure est atteinte.

Proposition 2.4.5. *Considérons un graphe G d'ordre n et de taille m , sans sommets isolés. Alors*

$$\chi'_{inj}(G) = m \text{ si et seulement si } G \text{ est complet.}$$

2.5 Le nombre de cliques

Rappelons que le nombre de cliques d'un graphe G , noté $W'(G)$, est le nombre de sommets dans une clique maximale de G .

$$\text{Il est évident que } W'(G) = \frac{(W(G))(W(G) - 1)}{2}.$$

Proposition 2.5.1. [5] Pour tout graphe connexe G d'ordre $n \geq 2$,

$$\chi'_{inj}(G) \geq W'(G).$$

Théorème 2.5.1. (Théorème de Turan) : [18] Soit G un graphe d'ordre n et de taille m , sans q -clique, avec $q > 1$. Alors

$$m \leq \frac{(q-2)n^2}{2(q-1)}.$$

En conséquence, nous avons le résultat suivant :

Corollaire 1. [12] Soit G un graphe d'ordre n et de taille m , et considérons un entier positif $q > 1$. Alors :

$$m > \frac{(q-2)n^2}{2(q-1)} \implies \chi'_{inj}(G) \geq \frac{q(q-1)}{2}.$$

Proposition 2.5.2. [12] Pour tout entier positif $p \geq 3$, on considère le graphe complet K_p , avec $V(K_p) = \{v_1, \dots, v_p\}$, et une famille d'étoiles $K_{1,q_1}, \dots, K_{1,q_p}$, avec $q_j \geq 1$.

Soit G le graphe obtenu en reliant un sommet de degré maximal de l'étoile K_{1,q_j} avec le sommet de v_j de K_p , pour $j = 1, \dots, p$.

Nous disons que G est un W' coloration injective des arêtes W' EIC-graphe si $\chi'_{inj}(G) = W'(G)$.

On a exemple des W' EIC-graphes, le graphe complet K_n et le star $K_{1,n}$.

Proposition 2.5.3. [12] Si G est un graphe unicyclique avec K_3 , alors G est un W' EIC-graphe.

Nous considérons maintenant l'indice chromatique injectif des graphes bipartis.

Proposition 2.5.4. [12] Si G est un graphe biparti avec la bipartition $V(G) = V_1 \cup V_2$, et G n'a pas de sommets isolés, alors

$$\chi'_{inj}(G) \leq \{|V_1|, |V_2|\}.$$

Corollaire 2. Soit G un graphe biparti connexe d'ordre $n \geq 2$. Alors

$$\begin{aligned} \chi'_{inj}(G) &\leq n - \frac{n-1}{\Delta(G)}. \\ \chi'_{inj}(G) &\leq n - i(G). \\ \chi'_{inj}(G) &\leq \alpha(G). \end{aligned}$$

Nous introduisons maintenant une borne supérieure sur le nombre chromatique injective d'un graphe G en fonction de sa taille et de son diamètre $\text{diam}(G)$.



FIGURE 2.6 – Un arbre de taille minimale.

Proposition 2.5.5. [12] Pour tout graphe connexe G de taille $m \geq 3$, $\chi'_{inj}(G) \leq m - \text{diam}(G) + 2$.

Cette borne supérieure est atteinte si et seulement si G est P_{m+1} .

Proposition 2.5.6. [12] Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 2$,

$$1 \leq \chi'_{inj}(T) \leq 3$$

Proposition 2.5.7. [12] Si H est un sous-graphe d'un graphe connexe G , alors $\chi'_{inj}(H) \leq \chi'_{inj}(G)$.

Comme conséquence immédiate, nous avons le corollaire ci-dessous.

Corollaire 3. [12] Soit G un graphe connexe d'ordre n .

- (1) Si x est une arête de G , alors $\chi'_{inj}(G) \leq \chi'_{inj}(G + x)$.
- (2) Si G comprend un cycle C_p et $4 \not\equiv 0 \pmod{4}$, alors, $\chi'_{inj}(G) \geq 3$.
- (3) Si G inclut un graphe complet K_p , alors $\chi'_{inj}(G) \geq p(p-1)/2$.
- (4) Si G inclut l'arbre représenté sur la figure 2.6, alors $\chi'_{inj}(G) \geq 3$.
- (5) Si G est un arbre T , qui inclut le sous-arbre T' représenté dans la figure 2.6, alors $\chi'_{inj}(T) = 3$.

En informatique, un arbre binaire parfait est une structure de donnée arborescente avec exactement un sommet de degré deux et où chacun des autres sommets est de degré un ou trois.

Nous avons maintenant un autre corollaire.

Corollaire 4. [12] Soit T un arbre binaire parfait avec $\text{diam}(T) \geq 7$. Alors $\chi'_{inj}(T) = 3$.

Lemme 2. [12] Si G est un graphe de taille $m \geq 1$

$\chi'_{inj} = \chi(\bar{G})$. D'après ce lemme nous pouvons conclure ce qui suit :

Proposition 2.5.8. [12] Si G est un graphe de taille $m \geq 1$, alors $\chi'_{inj}(G) \leq 2$, si et seulement si \bar{G} est bipartie.

Proposition 2.5.9. [12] Soit G un graphe de taille $m \geq 1$. Alors, $\chi'_{inj}(G) = 2$ si et seulement si G n'est pas une union disjointe d'étoiles et si \bar{G} n'a pas de cycle impair.

Proposition 2.5.10. [12] Soit T un arbre. Alors, soit

$\chi'_{inj}(T) = 1$ si T est une étoile, soit

$\chi'_{inj}(T) = 3$ si \bar{T} inclut un cycle impair, soit

$\chi'_{inj}(T) = 2$, dans tous les autres cas.

Notons que la proposition 2.5.11 donne un algorithme en temps polynomial pour déterminer l'indice chromatique injectif pour les arbres. Le résultat suivant relie l'indice chromatique injectif d'un graphe et de son carré.

Désignons la distance entre les sommets u et v dans G par $d_G(u, v)$. Le carré d'un graphe simple G est le graphe simple G^2 , où $e = uv$ est une arête dans G^2 si et seulement si $d_G(u, v) \leq 2$.

En utilisant ce concept et cette notation, nous nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 5. [12] Pour tout graphe connexe G , $\chi'_{inj}(G) \leq \chi'_{inj}(G^2)$.

Proposition 2.5.11. [12] Soit G un graphe unicyclique et C_p un cycle dans G . Si $p \geq 4$, alors

$$2 \leq \chi'_{inj}(G) \leq 4.$$

2.6 L'indice chromatique injectif de certains graphes maillés et les produits cartésiens

Parmi les graphes maillés, nous accordons une attention particulière aux produits cartésiens $P_n \square K_2$ et $P_r \square P_s$.

Proposition 2.6.1. [12] Si P_n est la chaîne d'ordre $n \geq 3$, alors

$$\chi'_{inj}(P_n \square K_2) = 3.$$

Proposition 2.6.2. [12] Pour tout graphe connexe G d'ordre $n \geq 2$,

$$\chi'_{inj}(G) \square K_2 \leq n^2 - n$$

Cette borne est forte. De plus, pour tout graphe complet K_n d'ordre $n \geq 2$,

$$\chi'_{inj}(K_n) \square K_2 = n^2 - n$$

Comme le graphe l'hypercube Q_n est défini comme étant $K_2 \square K_2 \square K_2 \dots \square K_2$, n fois alors la borne suivante est évidente :

Corollaire 6. *Si est l'hypercube Q_n , alors, $\chi_{inj}(Q_n) \leq 2^{n-1}(n-1)$*

Théorème 2.6.1. [11] *Soit G un graphe subcubique, alors :*

— Si $mad(G) < \frac{16}{7}$ alors $\chi'_{inj} \leq 4$.

— Si $mad(G) < \frac{8}{3}$ alors $\chi'_{inj} \leq 6$.

— Si $mad(G) < 3$ alors $\chi'_{inj} \leq 4$.

Corollaire 7. [11] *Soit G un graphe planaire subcubique avec une circonférence g , alors :*

— Si $g \geq 16$ alors $\chi'_{inj} \leq 4$.

— Si $g \geq 8$ alors $\chi'_{inj} \leq 6$.

— Si $g \geq 6$ alors $\chi'_{inj} \leq 7$.

Corollaire 8. [11] *Si G est un graphe subcubique, alors : $\chi'_{inj} \leq 8$.*

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons défini la notion de la coloration injective des arêtes, de même nous avons donné quelques bornes concernant ce paramètre de coloration, ainsi nous avons rappelé les principaux résultats existants dans la littérature sur cette coloration .

Dans le troisième chapitre, nous nous sommes intéressés à étudier le problème de la coloration injective de certaines classes de graphes de Halin cubique complet.

CHAPITRE 3

LA COLORATION INJECTIVE D'UN GRAPHE D'HALIN CUBIQUE COMPLET

Introduction

En théorie des graphes, un graphe de Halin est un graphe planaire construit à partir d'un arbre en reliant toutes ses feuilles dans un cycle qui fait le tour de l'arbre de telle façon que l'arbre reste planaire. On exige de plus que l'arbre comporte au moins quatre sommets et ne comporte pas de sommets de degré 2. Les graphes de Halin sont nommés d'après le mathématicien allemand Rudolf Halin qui les a étudiés en 1971, mais les graphes de Halin cubiques avaient déjà été étudiés plus d'un siècle auparavant par Thomas Kirkman.

On s'intéresse dans ce chapitre à étudier la coloration injective d'arêtes de la classe de graphe Halin cubique complet.

3.1 Historique

[9] En 1971, Halin a introduit les graphes de Halin comme une sorte de graphes au moins 3-connexes, en faisant remarquer que la suppression de n'importe quelle arête du graphe changeait le degré de connexité du graphe. Ces graphes ont gagné en importance lorsque l'on a découvert que de nombreux problèmes algorithmiques qui étaient difficiles à résoudre par calcul pour des graphes planaires arbitraires pouvaient être résolus efficacement avec eux, une propriété qui a été expliquée plus tard comme une conséquence de leur faible largeur arborescente.

Avant les travaux de Halin sur ces graphes, des problèmes d'énumération de graphes en concernant les graphes de Halin cubiques ont été étudiés en 1965 par Hans Rademacher. Rademacher définit ces graphes (qu'il appelle *based polyhedra*, polyèdres à base) comme les graphes polyédriques cubiques dans lesquels une des faces comporte $\{ \displaystyle f - 1 \}$ côtés, où $\{ \displaystyle f \}$ est le nombre de faces du polyèdre. Il mentionne lui-même des travaux bien antérieurs publiés en 1856 par Thomas Kirkman sur la même classe de graphes. Les graphes de Halin sont parfois également appelés *roofless polyhedra* (polyèdres à ciel ouvert), mais comme *based polyhedra*, ce nom peut aussi faire référence aux graphes de Halin cubiques.

En théorie des graphes, un graphe de Halin est défini comme suit :

3.2 Graphe de Halin

Définition 32. [3] *Un graphe de Halin est un graphe planaire obtenu à partir d'un arbre contenant au moins 4 sommets et sans sommets intérieurs de degré 2, en reliant tous les sommets pendants (feuilles) de cet arbre par un cycle, de telle façon que l'arbre reste planaire, il est noté par H_n .*

on écrit souvent $H_n = T_n \cup C$, où T_n est l'arbre appelé arbre caractéristique et C est le cycle adjoint.

On a comme exemple de graphe de Halin, la roue W_n qui est constituée par le graphe star (arbre) en reliant ses feuilles par un cycle.

Les figures ci-dessous représentent des graphes de Halin.

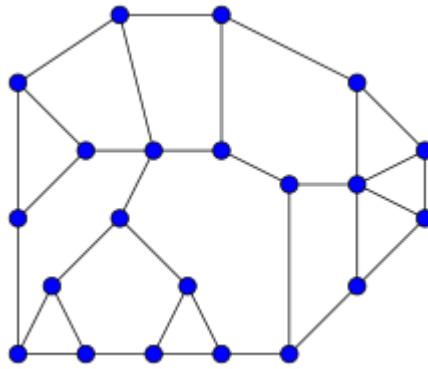
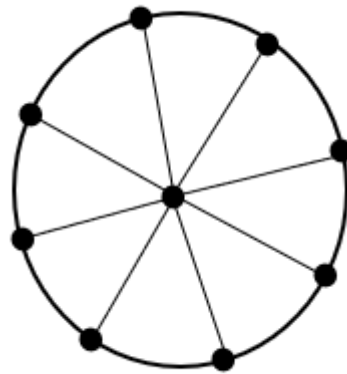


FIGURE 3.1 – Un graphe de Halin

FIGURE 3.2 – La roue W_8

3.3 Graphe de Halin cubique complet

[16] Un graphe de Halin cubique complet est un graphe de Halin dont les sommets intérieurs de l'arbre caractéristique sont tous de degré 3 et toutes les feuilles sont à la même distance de son racine .

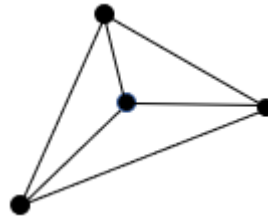
Un graphe de Halin cubique complet H_n est dit de hauteur $(n+1)$ si la distance entre la racine de l'arbre et n'importe quelle feuille est $(n+1)$.

le niveau d'un sommet est défini comme étant la distance entre le sommet racine et ce sommet.

Pour n'importe quelle arête uv de l'arbre T_n , telle que u est le père de v , le niveau de l'arête uv est le niveau de v par conséquent l'arbre T_n a $(n+1)$ niveau et le graphe de Halin cubique complet est le graphe $H_n = T_n \cup C$.

Dans ce cas $H_0 = T_0 \cup C$

Par exemple H_0 est le graphe K_4 .

FIGURE 3.3 – Graphe H_0

3.4 La coloration injective de graphe Halin cubique complet

3.5 Nos résultats

Après avoir étudié la coloration injective de graphe Halin cubique complet, on a trouvé des valeurs exactes de $\chi'_{inj}(H_n)$, elles sont données par le théorème suivant :

Théorème 3.5.1. *si H_n est le graphe de Halin cubique complet on a :*

$$\chi'_{inj}(H_n) = \begin{cases} 6 & \text{si } n = 0 \\ 4 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

3.5.1 Démonstration

Soient H_n le graphe de Halin cubique complet. Avant de démontrer le théorème, comonçons pour introduire quelques propriétés structurelles de H_n .

- Le graphe H_n contient 3 arêtes dans le niveau 1.
- Le graphe H_n contient 3×2 arêtes dans le niveau 2.
- \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots
- Le graphe H_n contient 3×2^n arêtes dans le niveau $n+1$.

De même la longueur de son cycle adjoint est 3×2^n .

Pour $n=0$, le graphe H_0 illustré dans la figure (3.3) isomorphe au graphe K_4 , donc il est facile de voir qu'on ne peut pas colorer ce graphe avec moins de 6 couleurs, alors

$$\chi'_{inj}(H_0) = 6$$

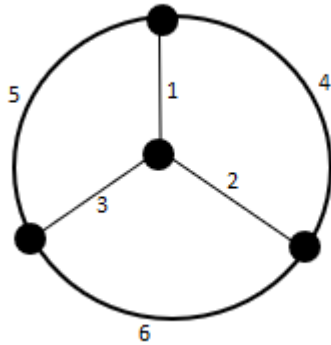
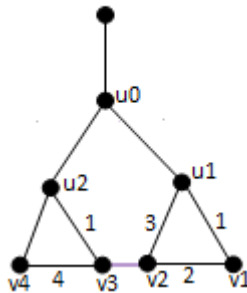


FIGURE 3.4 – Une 6-coloration injective de graphe H_0

Si $n \geq 1$, montrons d'abord que $\chi'_{inj}(H_n) \geq 4$.

Il est claire que tout graphe de Halin cubique copmlet H_n , $n \geq 1$ admet un sous graphe isomorphe au graphe suivant :



Soit ϕ une coloration injective d'arêtes de graphe H_n .

On commence à colorer le triangle $u_1v_1v_2$ comme suit : sans perte de généralité :

On met $\phi(u_1v_1) = 1, \phi(v_1v_2) = 2$ et $\phi(u_1v_2) = 3$

Pour colorer les arêtes u_2v_3 et v_3v_4 , on ne peut pas les affecter les couleurs 2 et 3 car elles sont à distance 2 des arêtes v_1v_2 et u_1v_2 . Donc $\phi(u_2v_3) = 1$ ou $\phi(v_3v_4) = 1$

Sans pert de généralité, on met $\phi(u_2v_3) = 1$

Par conséquent $\phi(v_3v_4) \neq 1, 2, 3$ (car elle est dans le même triangle avec u_2v_3 et elle est à distance deux des arêtes v_1v_2 et u_1v_2).

D'ou $\phi(v_3v_4) = 4$.

Montrons que $\chi'_{inj}(H_n) \leq 4$.

Pour $n = 1$ et 2 , on propose une 4-coloration injective des graphes H_1 et H_2 , elle est donnée par les figures suivantes :

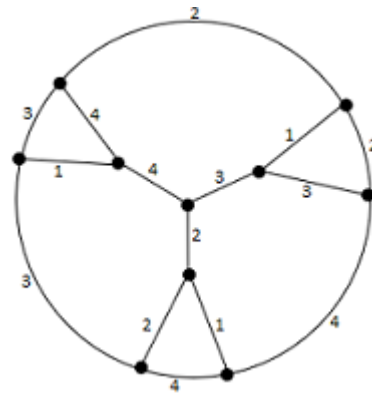


FIGURE 3.5 – La 4-coloration injective de graphe H_1

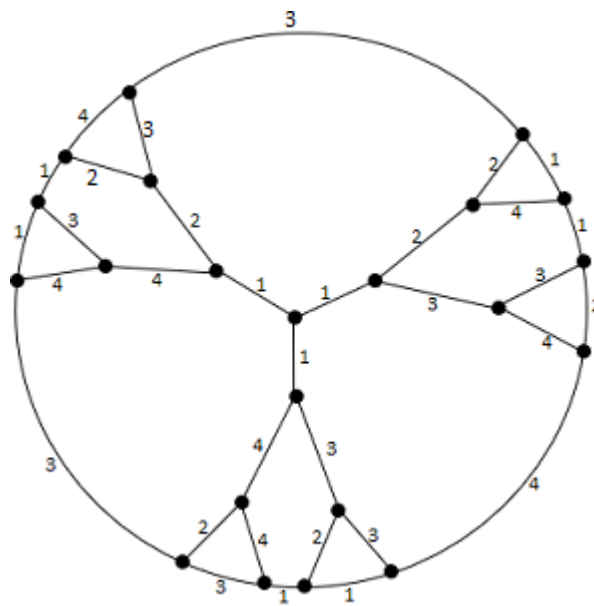


FIGURE 3.6 – La 4-coloration injective de graphe H_2

Si $n \geq 3$, on propose la procedure de coloration suivante :
 La coloration se fait en 2 étapes :

1^{re} étape :

On commence d'abord à colorer l'arbre caractéristique de niveau 1 jusqu'à $n-1$, comme suit :

On affecte la couleur j à toutes les arêtes de niveau j , tel que $1 \leq j \leq n - 1$ et j modulo 4. Il s'agit bien d'une coloration injective d'arête car les arêtes de niveau colorées par la même couleur sont à distance 4.

2^{eme} étape :

Pour colorer les 2 derniers niveaux de l'arbre ainsi que le cycle adjoint, On partitionne le sous-graphe (branche) correspondant au deux dernier niveau de l'arbre et le cycle adjoint en ajoutant la branche qui les relie, comme il est illustré dans la figure suivante (3.7) :

- 1) On affecte aux arêtes e_1, f_1, e_4, f_4, h_2 et h'_2 la couleur $C_3 \neq C_1, C_2$

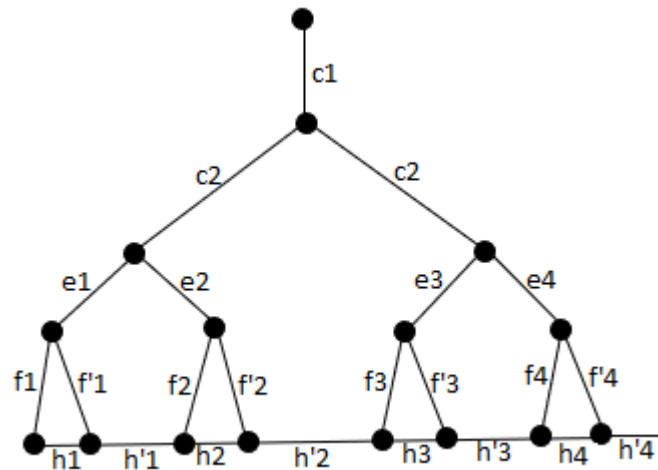


FIGURE 3.7 – LE sous-graphe

- 2) On affecte aux arêtes e_2, f_2, e_3, f_3, h_4 et h'_4 la couleur $C_4 \neq C_1, C_2, C_3$.
- 3) Les arêtes f'_1, f'_2, f'_3 et f'_4 prennent la couleur C_1 .
- 4) les arêtes h_1, h'_1, h_3 et h'_3 reçoivent la couleur C_2 .

Après avoir colorer toutes les arêtes de ce sous-graphe on obtient la configuration suivante(3.8) :

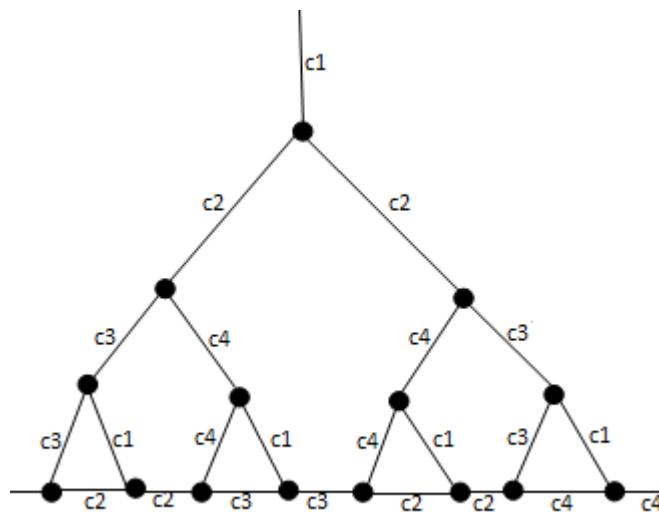
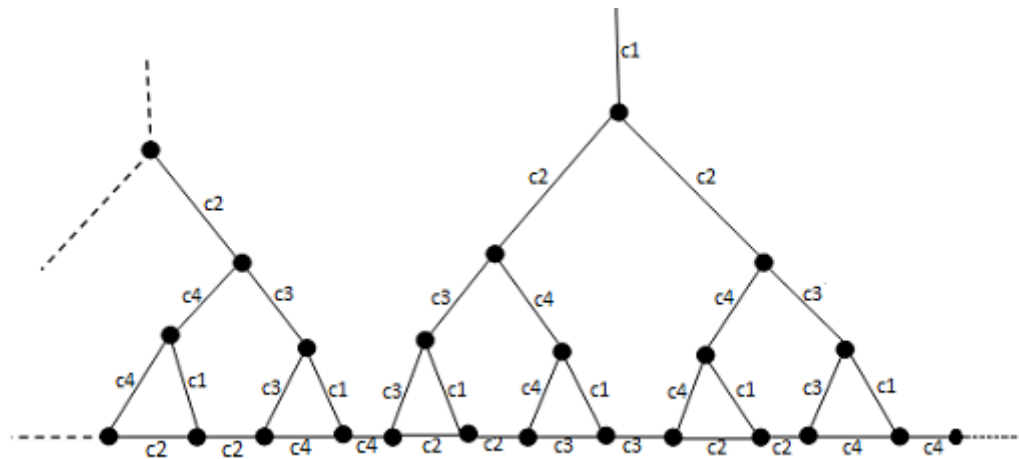


FIGURE 3.8 – LE sous-graphe

Il est facile de vérifier qu'il s'agit bien d'une coloration injective d'arêtes car tout les arêtes à distance deux ont des couleurs différentes.

On repète cette opération avec toutes arêtes des sous graphe restants jusqu'à ce que toutes les arêtes on été colorées.

Remarquons que le cycle est fermé, donc la première arête dans le cycle appartenant au premier sous-graphe coloré sera reliée avec la dernière arête dans le cycle appartenant au dernier sous-graphe coloré, mais ceci ne va pas créer le problème d'avoir des arêtes à distance deux colorées par la même couleur, car on a partitionner le sous-graphe correspondant au deux derniers niveaux et le cycle adjoint en sous-graphe contenant exactement 8 arêtes dans le dernier niveau de même 8 arête dans le cycle, et comme le dernier niveau ainsi que le cycle contiennent exactement 3×2^n , $n \geq 3$ arêtes. Ce nombre est un multiple de 8, donc cette partition nous a permis de partitionner les arêtes des deux derniers niveaux et le cycle en sous ensembles contenant les mêmes nombres d'arêtes. D'où après avoir colorer le dernier sous-graphe qui sera relié avec le premier, nous avons avoir la configuration suivante :



Une telle coloration satisfait la coloration injective d'arêtes de graphe H_n .

Les figures suivantes représentent des exemples de coloration injective des graphes H_3, H_4 et un sous graphe de H_n .

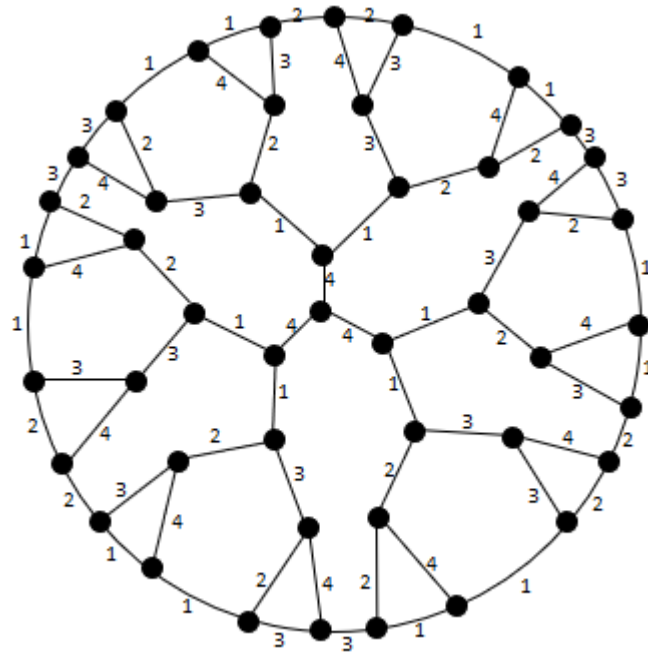


FIGURE 3.9 – Une 4-coloration de graphe H_3

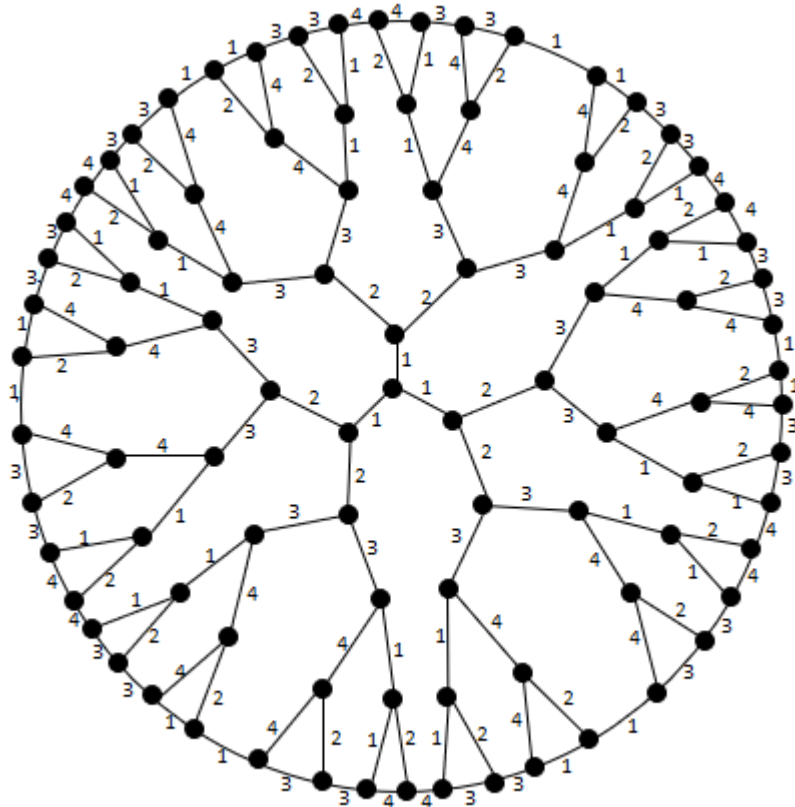


FIGURE 3.10 – Une 4-coloration de graphe H_4

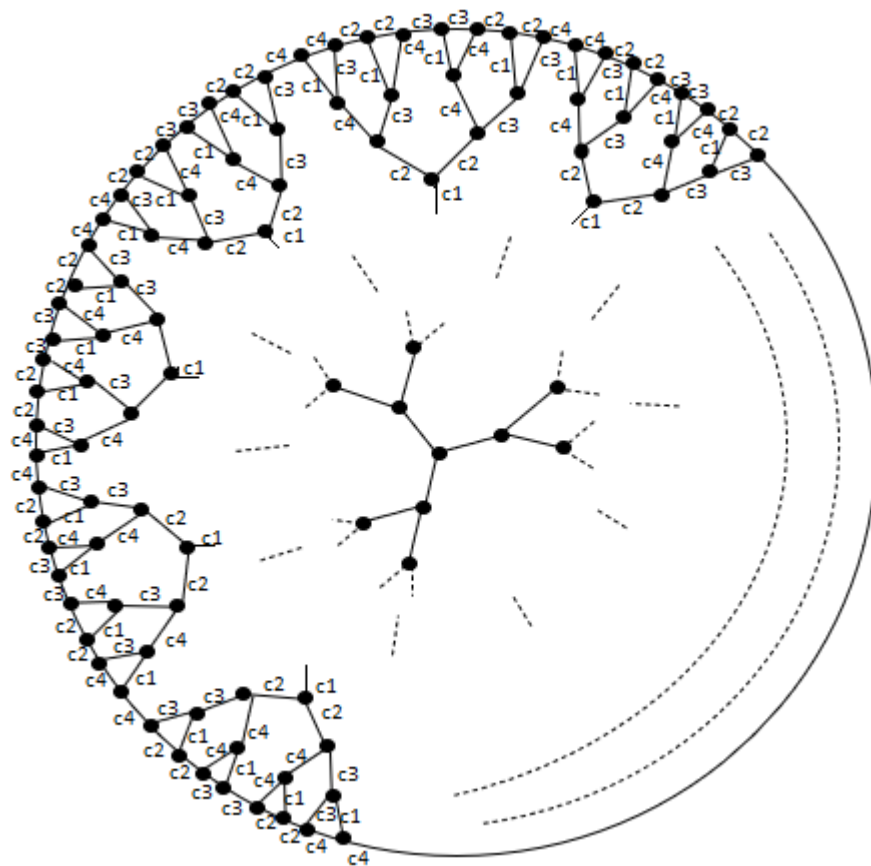


FIGURE 3.11 – Une 4-coloration de graphe H_n

Algorithme de coloration injective

Algorithme 3.1 : *Algorithme de coloration***Entrée :** Graphe H_n , $n \geq 3$.**Sortie :** $\varphi(e)$, $e \in E$. Coloration injective.**Début**

```

 $u := \text{fils}(u_0); \quad \varphi(u_0u[1]) := \varphi(u_0u[2]) := \varphi(u_0u[3]) := 1;$ 
pour  $i = 2$  à  $n - 1$  faire
  pour  $j = 1$  à  $3 \times 2^{i-2}$  faire
     $\varphi(u[j]f-g(u[j])) := \varphi(u[j]f-d(u[j])) := (i - 1 \bmod 4) + 1;$ 
  fin
   $u := \text{fils}(u);$ 
fin
 $j := 1;$ 
tant que  $j \leq 3 \times 2^{n-2}$  faire
   $\varphi(u[j]f-g(u[j])) := \varphi(u[j+1]f-d(u[j+1])) := (n - 1 \bmod 4) + 1;$ 
   $\varphi(u[j]f-d(u[j])) := \varphi(u[j+1]f-g(u[j+1])) := (n \bmod 4) + 1;$ 
   $j := j + 2;$ 
fin
 $u := \text{fils}(u); j := 1;$ 
tant que  $j \leq 3 \times 2^{n-1}$  faire
   $\varphi(u[j]f-g(u[j])) := \varphi(u[j+3]f-g(u[j+3])) := (n - 1 \bmod 4) + 1;$ 
   $\varphi(u[j+1]f-g(u[j+1])) := \varphi(u[j+2]f-g(u[j+2])) := (n \bmod 4) + 1;$ 
   $\varphi(u[j]f-d(u[j])) := \varphi(u[j+1]f-d(u[j+1])) := (n + 1 \bmod 4) + 1;$ 
   $\varphi(u[j+2]f-d(u[j+2])) := \varphi(u[j+3]f-d(u[j+3])) := (n + 1 \bmod 4) + 1;$ 
   $j := j + 4;$ 
fin
 $u := \text{fils}(u); j := 1;$ 
tant que  $j \leq 3 \times 2^{n-1} - 1$  faire
   $\varphi(u[j]u[j+1]) := \varphi(u[j+1]u[j+2]) := (n - 2 \bmod 4) + 1;$ 
   $\varphi(u[j+2]u[j+3]) := \varphi(u[j+3]u[j+4]) := (n - 1 \bmod 4) + 1;$ 
   $j := j + 4;$ 
fin
 $\varphi(u[3 \times 2^{n-1} - 1]u[3 \times 2^{n-1}]) := \varphi(u[3 \times 2^{n-1}]u[1]) := (n \bmod 4) + 1;$ 
 $j := 7;$ 
tant que  $j \leq 3 \times 2^{n-1} - 1$  faire
   $\varphi(u[j]u[j+1]) := \varphi(u[j+1]u[j+2]) := (n \bmod 4) + 1;$ 
   $j := j + 8;$ 
fin

```

Fin.

La fonction : $fil_s(u)$ retourne les fils de l'ensemble des sommets $\{u[1], u[2], \dots\}$
 La fonction : $f-g(u)$ (resp. $f-d(u)$) retourne le fils gauche (resp. fils droit) de sommet u .

Exemple d'exécution :

- Entrée : H_3
- Sortie : Une coloration injective d'arête de H_3 ($\chi'_{inj}(H_3) = 4$).

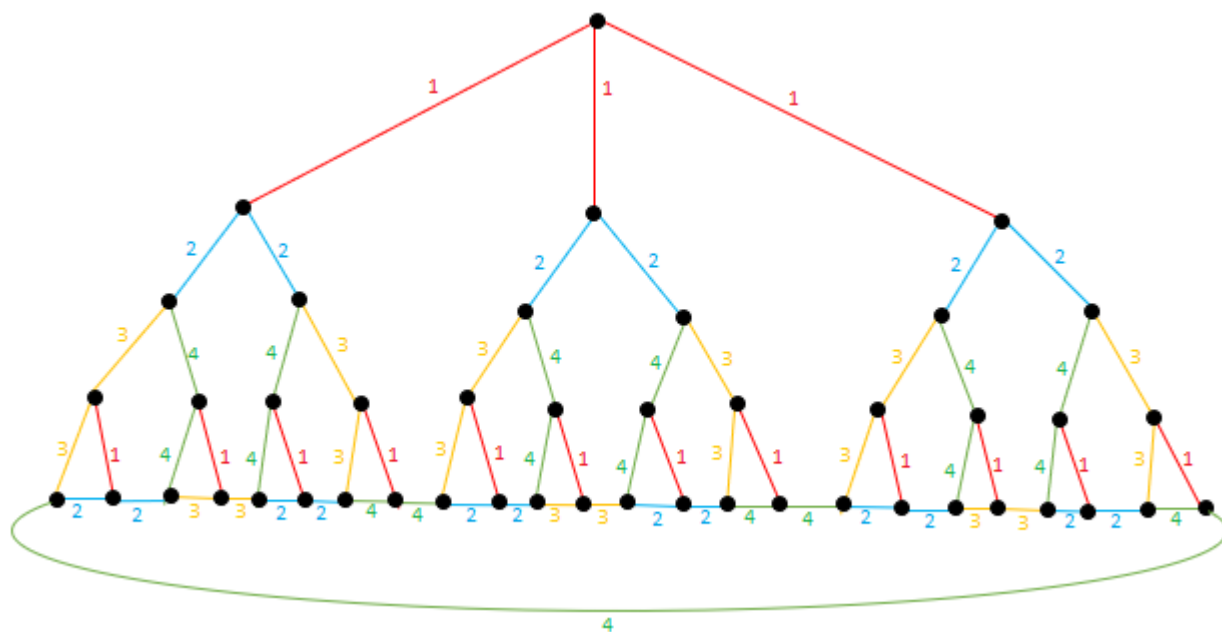


FIGURE 3.12 – La 4-coloration injective d'arête de graphe H_3

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la coloration injective des arêtes de graphe de Halin cubique complet, nous avons donné des valeurs exactes de l'indice -chromatique injective d'arêtes de ce graphe.

Conclusion et perspectives

Dans ce manuscrit , nous nous sommes intéressés principalement à la coloration injective des arêtes.

Nous avons défini la coloration injective des arêtes ainsi que nous avons donné quelques bornes sur l'indice chromatique injectif χ'_{inj} , puis nous avons cité des résultats principaux sur des quelques classes de graphes.

Enfin nous avons considéré la coloration injective de graphe Halin cubique complet H_n . Nous avons trouvé la valeur exacte de $\chi'_{inj}(H_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. nous avons montré que si G est le graphe de halin cubique complet, alors l'indice chromatique injectif est le suivant :

$$\chi'_{inj}(H_n) = \begin{cases} 6 & \text{si } n = 0 \\ 4 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Nous avons Comme perspectives :

— Trouver des bornes de χ'_{inj} de certains classes de graphes de Halin graphes telle que :

les graphes doubles stars.

— Trouver des bornes de χ'_{inj} de produit cartésien de graphes.

—Etudier d'autre paramètres de coloration.

- [1] K Appel and Wolfgang Haken. The existence of unavoidable sets of geographically good configurations. *Illinois Journal of Mathematics*, 20(2) :218–297, 1976.
- [2] Kenneth Appel, Wolfgang Haken, and John Koch. Every planar map is four colorable. part ii : Reducibility. *Illinois Journal of Mathematics*, 21(3) :491–567, 1977.
- [3] Daniela Bronner. Colorations suboptimales. Technical report, 2005.
- [4] Rowland Leonard Brooks. On colouring the nodes of a network. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 37, pages 194–197. Cambridge University Press, 1941.
- [5] Domingos M Cardoso, Orestes J Cerdeira, Charles Dominicc, and Pedro J Cruz. Injective edge coloring of graphs. *Filomat*, 33(19) :6411–6423, 2019.
- [6] G Chartrand, L Lesniak, and P Zhang. Graphs and digraphs, sixth, 2016.
- [7] Vašek Chvátal. In praise of claude berge. *Discrete Mathematics*, 165 :3–9, 1997.
- [8] MC Costa, C Picouleau, and H Topart. Une nouvelle classe de graphes : les hypotriangulés. *ROADEF 2009*, page 316, 2009.
- [9] Jean-François Couturier. *Algorithmes exacts et exponentiels sur les graphes : énumération, comptage et optimisation*. PhD thesis, Université de Lorraine, 2012.
- [10] Kaouther Drira. *Coloration d’arêtes -distance et clustering : études et algorithmes auto-stabilisants*. PhD thesis, Université Claude Bernard-Lyon I, 2010.

-
- [11] Baya Ferdjallah, Samia Kerdjoudj, and Andre Raspaud. Injective edge-coloring of sparse graphs. *arXiv preprint arXiv :1907.09838*, 2019.
- [12] Mohammad Mahdian. *The strong chromatic index of graphs*. University of Toronto, Department of Computer Science, 2000.
- [13] Didier Maquin. *Eléments de théorie des graphes*. *Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique*, 2003.
- [14] Myriam Preissmann. *Sur les colorations des arêtes des graphes cubiques*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 1981.
- [15] Michel Rigo. *Théorie des graphes*. *Université de Liège*, 2009.
- [16] Wai Chee Shiu and Wing Ka Tam. The strong chromatic index of complete cubic halin graphs. *Applied Mathematics Letters*, 22(5) :754–758, 2009.
- [17] Frédérique SOMON and Amélie FRAYSSE. *Théorie des graphes*.
- [18] P Turán. On an extremal problem in graph theory, mat. fiz. lapok 48 (1941) 436–452. *Hungarian. Search in*, 2010.
- [19] Vadim G Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Discret Analiz*, 3 :25–30, 1964.