الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة أمحمد بوقرة بومرداس
كلية العلوم الاقتصادية ، التجارية
و علوم التسيير

Ministère de l'enseignement supérieur
Et de la recherche scientifique

Université M'Hamed BOUGARA de Boumerdès
Faculté Des Sciences Economiques , Commerciales
Etdes Sciences De Gestion

مطبوعة بيداغوجية تحت عنوان:

محاضـرات وتطبيقات فـي التحليل الرياضي لمقياس رياضيات1

موجهة لطلبة: السنة الأولى **تخصص**: جذع مشترك علوم اقتصادية تجارية و علوم التسيير

من إعداد الدكتورة : سايغ مليكة **قسم** : علوم التسيير

السنة الجامعية: 2022 /2023

جامعة بومرداس
نيابة العمادة
المكلفة بما بعد
التدرج
و البحث العلمي و
العلاقات الخارجية
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

مقدمة عامة 1
الفصل الأول : التحليل التوفيقي 2
- مفهوم العاملي و العمليات الحسابية عليه 2
- مفهوم الترتيبات و التوفيقات و خواصهم 5
- طرق نشر $(a+b)^n$ 7
تمارين مقترحة 10
الفصل الثاني : عموميات المتتاليات العددية 11
- تعاريف عامة حول عموميات المتتاليات 11
- المتتالية الحسابية 17
- تعريف وعموميات وقوانين المتتالية الحسابية مع تطبيق حالة الادخار بفائدة بسيطة 17
- المتتالية الهندسية 25
- تعريف وعموميات و قوانين المتتالية الهندسية مع تطبيق حالة الادخار بفائدة مركبة 25
تمارين مقترحة 33
الفصل الثالث : الدوال اللوغاريتمية و الآسية 34
- تعريف الدالة 34
- مجموعة تعريف دالة مع تطبيقات لبعض أشكال الدوال 34
- تعريف الدالة اللوغاريتمية وخواصها الحسابية و التحليلية 35
- حل المعادلات و المتراجحات اللوغاريتمية 39
- تعريف الدالة الآسية وخواصها الحسابية و التحليلية 42
- حل المعادلات و المتراجحات الآسية 45
تمارين مقترحة 49
الفصل الرابع : المشتقات 50
- تعريف و العمليات على الاشتقاق 50
- قوانين الاشتقاق 52

جامعة بومرداس
نيابة العمادة
المكلفة بما بعد
و البحث العلمي و
العلاقات الخارجية
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

- تطبيق الاشتقاق على مفهوم القيمة الحدية العظمى و الصغرى 55
- المشتقات المتعاقبة 59
تمارين مقترحة 65
الفصل الخامس : الدوال الأصلية وحساب التكامل 66
- تعريف مفاهيم أساسية حول الدوال الأصلية 66
- التكامل غير المحدود و خصائصه 66
- طرق حساب التكاملات 6 7
- التكامل المحدود وخصائصه 71
- تطبيقات التكامل في العلوم الاقتصادية 74
- التكامل التجزئة 75
- بعض تكاملات الدوال الكسرية 77
تمارين مقترحة 83
المراجع 84

مقدمة عامة

يعتبر التحليل الرياضي احد فروع الرياضيات ، وأداة ضرورية لدراسة مواضيع مختلفة مثل الاقتصاد و الإحصاء وغيرها من العلوم ، وقد أصبح التحليل الرياضي في السنوات الأخيرة يشكل جزءا أساسيا من الخلفية الرياضية المطلوبة في كثير من العلوم .

تحتوي هذه المطبوعة على دروس و أمثلة محلولة و تمارين مقترحة في التحليل الرياضي ، لمقياس الرياضيات 1 موجهة بالدرجة الأولى لطلبة السنة الأولى ل م د علوم اقتصادية و تجارية و علوم التسيير

يمكن استخدام هذه المطبوعة كمقرر منهجي للطلبة لدراسة مقياس رياضيات 1 وكمصدر مهم للعلوم الأخرى ، ومن هنا كان هدفنا الإسهام بهذا العمل المتواضع نضعه بين أيدي طلبتنا الأعزاء .

تتكون هذه المطبوعة على خمسة فصول يشمل كل فصل على أمثلة مختلفة محلولة ، وتمارين مقترحة

يتضمن الفصل الأول التحليل التوفيقي

الفصل الثاني يتناول عموميات المتتاليات العددية

الفصل الثالث يتناول الدوال اللوغاريتمية و الآسية

يهتم الفصل الرابع بالمشتقات

وأخيرا يتضمن الفصل الخامس الدوال الأصلية و حساب التكامل

الفصل الأول : التحليل التوفيقي (أساليب العد)

تعريف : وهي أساليب تعتمد على بعض مبادئ الجبر الرياضي مفيدة في تحديد عدد النتائج المرتبطة بأحداث معينة لتجارب عشوائية .يعد التحليل التوافقي من الطرق التي تستطيع تحديد عدد النتائج الممكنة لتجربة ما بغير طرق العد البسيطة

-مفهوم العاملي و العمليات الحسابية عليه :

العاملي هو جداء الأعداد الطبيعية الأصغر أو يساوي n واكبر أو يساوي 1 حيث n عدد طبيعي ويرمز للعاملي بالرمز $n!$ حيث العاملي للأعداد الطبيعية فقط بمعنى $n \geq 0$ الذي يعتبر شرط العاملي

لا يوجد العاملي للأعداد السالبة

مثال :

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

$$6! = 6 \times 5! \qquad 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

ومنه نستنتج أن : $n! = n[(n-1)(n-2) \ldots \ldots \times 1]$

$$\boldsymbol{n! = n(n-1)!}$$

$$\boldsymbol{n! = n(n-1)(n-2)!}$$

ملاحظة :

$$\begin{cases} \mathbf{0! = 1} \\ \mathbf{1! = 1} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{0! = 1!}$$

مثال : احسب مايلي

$(n+3)! = (n+3)(n+2)(n+1)!$

$(2n+1)! = (2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)!$

$0! + 1! + 2! + 3! = 1 + 1 + 2 + 6 = 10$

$\frac{15!}{13!} = \frac{15 \times 14 \times 13!}{13!} = 15 \times 14 = 210$

$$\frac{10!+9!}{9!}=\frac{10\times9!+9!}{9!}=\frac{9!(10+1)}{9!}=11$$

$$\frac{12!+13!}{13!-12!}=\frac{12!+13\times12!}{13\times12!-12!}=\frac{12!(1+13)}{12!(13-1)}=\frac{14}{12}=\frac{7}{6}$$

$$\frac{4!+5!+6!}{3!+4!+5!}=\frac{4!+5\times4!+6\times5\times4!}{3!+4\times3!+5\times4\times3!}=\frac{4!\,(1+5+30)}{3!\,(1+4+20)}=\frac{4\times3!\,(36)}{3!\,(25)}=\frac{4\times36}{25}=\frac{144}{25}$$

مثال اوجد قيمة x $\frac{4!-3!}{5!}=\frac{x}{100}$

لدينا : $n!=n(n-1)!$

$$\frac{4\times3!-3!}{5\times4\times3!}=\frac{x}{100}\ \Rightarrow\frac{(4-1)3!}{20\times3!}=\frac{x}{100}\Rightarrow\frac{3}{20}=\frac{x}{100}$$

$$300=20x\ \Rightarrow x=15$$

احسب قيمة n $\frac{n!}{(n-3)!}=60$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!}=60\Rightarrow n(n-1)(n-2)=60$$

$$5\times4\times3=60\ \Rightarrow n=5$$

اوجد قيمة x $120=x\times4!$

$$120=x\times4!\ \Rightarrow x=\frac{120}{4!}=\frac{5!}{4!}=\frac{5\times4!}{4!}=5$$

اوجد قيمة n $\frac{n!}{(n-1)!}+\frac{(n+1)!}{n!}=7$

$$\frac{n(n-1)!}{(n-1)!}+\frac{(n+1)n!}{n!}=7\ \Rightarrow\quad n+n+1=7\Rightarrow2n=6\ \Rightarrow n=3$$

احسب A $\quad A = \frac{(2-n)!+(n-2)!}{3!+0!}$

حسب شرط العاملي فان :

$$\begin{cases} 2-n \geq 0 \Rightarrow n \leq 2 \\ n-2 \geq 0 \Rightarrow n \geq 2 \end{cases}$$

ومنه فان : $n=2$

$$A = \frac{0!+0!}{3!+0!} \Rightarrow \frac{1+1}{3\times 2\times 1+1} = \frac{2}{7}$$

اوجد قيمة a حيث : $\quad a! + (a-1)! = a+1$

$$a(a-1)! + (a-1)! = a+1 \Rightarrow (a-1)!(a+1) = a+1$$

$$\Rightarrow (a-1)! = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ \nu \\ a-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ \nu \\ a=2 \end{cases}$$

اوجد قيمة a حيث : $\quad 15! - a13! = 105 \times 13!$

$$15 \times 14 \times 13! - a13! = 105 \times 13!$$

$$13!(15 \times 14 - a) = 105 \times 13! \Rightarrow 210 - a = 105$$

$$\Rightarrow a = 210 - 105 = 105$$

احسب B حيث : $\quad B = \frac{26!\times 38!}{37!\times 25!\times 13}$

$$B = \frac{26\times 25!\times 38\times 37!}{37!\times 25!\times 13} = \frac{26\times 38}{13} = 76$$

$\frac{(n-5)!}{2(n-4)!} = \frac{1}{22}$ اوجد قيمة n حيث :

$$\frac{(n-5)!}{2(n-4)(n-5)!} = \frac{1}{22} \Rightarrow \frac{1}{2(n-4)} = \frac{1}{22} \Rightarrow 2(n-4) = 22$$

$$\Rightarrow 2n - 8 = 22 \Rightarrow 2n = 30 \Rightarrow n = 15$$

$\frac{(n+3)!}{2(n+1)!} = 21$ اوجد قيمة n حيث :

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{2(n+1)!} = 21 \Rightarrow \frac{(n+3)(n+2)}{2} = 21$$

$$\Rightarrow (n+3)(n+2) = 42$$

$$\Rightarrow 7 \times 6 = 42 \Rightarrow \begin{cases} n+3 = 7 \Rightarrow n = 4 \\ \nu \\ n+2 = 6 \Rightarrow n = 4 \end{cases}$$

جداء عددين طبيعيين متتاليين يساوي 42 هما 6 و7 أو نحل المعادلة من الدرجة الثانية ذات المتغير n

$\frac{(2n)!}{(2n-1)!(n^2-n)} = \frac{2}{9}$ اوجد قيمة n حيث :

$$\frac{(2n)(2n-1)!}{(2n-1)!(n^2-n)} = \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{2n}{n^2-n} = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{n-1} = \frac{2}{9} \Rightarrow 2(n-1) = 18$$

$$\Rightarrow 2n = 20 \Rightarrow n = 10$$

-مفهوم الترتيبات و التوفيقات و خواصهم :

1- الترتيبات : $A_n^p (Les\ arrangements)$:

تعريف **:** لتكن مجموعة متكونة من n عنصر حيث $n \in N^*$ وليكن P عدد طبيعي بحيث $(1 \leq P \leq)$, الترتيبة هي مجموعة جزئية ذات P عنصر متمايزة حيث لا يقبل التكرار و ترتيب عناصرها مهم .يعني نسمي ترتيب ل P عنصر متمايزا مأخوذا من n عنصر كل متتالية مرتبة بدون تكرار لهذه العناصر .ونرمز لعدد التراتيب ل p عنصر من بين n بالرمز A_n^p . وتحسب عدد التراتيب ذات P عنصر أي عدد المجموعات الجزئية بالعلاقة التالية :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$$

-خواص عامة للترتيبات :

$$\forall \boldsymbol{n}, \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{N}$$

$$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{A_n^n = n!} \qquad \mathbf{2)}\ \boldsymbol{A_n^1 = n} \qquad \mathbf{3)}\ \boldsymbol{A_n^0 = 1}$$

- الترتيبة ترتيب عناصرها مهم

مثال :

$$\boldsymbol{A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4\times3\times2\times1}{1!} = \frac{24}{1} = 24}$$

$$\boldsymbol{A_4^4 = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = \frac{4!}{1} = 4! = 4\times3\times2\times1 = 24}$$

$$\boldsymbol{A_5^1 = \frac{5!}{(5-1)!} = \frac{5\times4!}{4!} = 5}$$

$$\boldsymbol{A_6^0 = \frac{6!}{(6-0)!} = \frac{6!}{6!} = 1}$$

مثال : احسب عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين من بين الأرقام 5,4,3,2,1

$$n = 5 \quad p = 2$$

$$A_5^2 = 5(5-1) = 5\times4 = 20$$

عدد الأعداد في A_n^p يساوي p

في هذه الحالة p=2 فان A_5^2 تساوي 4x5 عددين ونتوقف

لما تكون لدينا 6 عناصر ونكون بها ترتيبات بثلاث عناصر

$$A_6^3 = 6(6-1)(6-2) = 6\times5\times4 = 120$$

في هذه الحالة p=3 نتوقف في ثلاث أعداد

2 -التوفيقات : Les combinaisons C_n^p : لتكن E مجموعة تحتوي على n عنصر حيث $n \in N^*$ كل جزء من E يحتوي على P عنصر) Pعدد طبيعي (،حيث $P \leq n$ تسمى توفيقة ل p عنصر من بين n عنصر

وتحسب عدد التوفيقات ذات p عنصر متمايزة حيث لا يقبل التكرار وترتيب عناصرها غير مهم اي عدد المجموعات الجزئية من E بالعلاقة التالية :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

خواص عامة للتوفيقات :

-من اجل كل عددين طبيعيين n و p حيث : $0 \leq p \leq n$ **فان :** $C_n^p = C_n^{n-p}$

-من اجل كل عددين طبيعيين n و p حيث : $0 \leq p \leq n-1$ **فان :** $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

مثال :

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = 10$$

$$C_3^3 = \frac{3!}{3!\,(3-3)!} = \frac{3!}{3!} = 1$$

$$C_3^0 = \frac{3!}{0!\,(3-0)!} = \frac{3!}{3!} = 1$$

$$C_5^4 = \frac{5!}{4!\,(5-4)!} = \frac{5 \times 4!}{1! \times 4!} = 5$$

طرق نشر $(a+b)^n$ **:** توجد طريقتين للنشر

1 - **عبارة** **Binôme de Newton** :

لدينا :

$n = 1$ $\quad (a+b)^1 = 1\,a + 1\,b = C_1^0\,a + C_1^1 b$

$n = 2$ $\quad (a+b)^2 = 1\,a^2 + 2\,ab + 1\,b^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1\,ab + C_2^2 b^2$

$n = 3$ $\quad (a+b)^3 = 1\,a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1\,b^3$

$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3$$

بصفة عامة :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n$$

ونكتب :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^{n-k}\, b^k$$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n a^0 b^n$$

مثال : انشر العبارة $(x+2)^5$ باستعمال عبارة **Binôme de Newton**

$$(x+2)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k \; x^{5-k} \; 2^k$$

$$(x+2)^5 = C_5^0 x^5 2^0 + C_5^1 x^4 2^1 + C_5^2 x^3 2^2 + C_5^3 x^2 2^3 + C_5^4 x^1 2^4 + C_5^5 x^0 2^5$$

$$(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

مثال : انشر العبارة $(x-2)^6$ باستعمال عبارة **Binôme de Newton**

$$(x-2)^6 = (x+(-2))^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k x^{6-k}(-2)^k$$

$$(x-2)^6 = C_6^0 x^6 + C_6^1 x^5(-2)^1 + C_6^2 x^4(-2)^2 + C_6^3 x^3(-2)^3 + C_6^4 x^2(-2)^4 + C_6^5 x(-2)^5 + C_6^6(-2)^6$$

$$(x-2)^6 = x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64$$

2 - مثلث باسكال Triangle de pascale :

مثلث باسكال يمكننا من الحصول على معاملات نشر Newton)التوفيقات (باستعمال القانون

P و n عددين طبيعيين حيث : $1 \leq p \leq n$ $n \geq 2$

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$$

مثال : $C_2^2 + C_4^3 = C_5^3$

مثال : انشر العبارة التالية : $(z+5)^6$

لدينا :

$p \rightarrow$

$n \downarrow$

	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	C_6^0	C_6^1	C_6^2	C_6^3	C_6^4	C_6^5	C_6^6

مثلث باسكال يمكننا الحصول على معاملات نشر Newton التي هي التوفيقات ومنه :

$$(z+5)^6 = 1z^6 5^0 + 6z^5 5^1 + 15z^4 5^2 + 20z^3 5^3 + 15z^2 5^4 + 6\,z\,5^5 + 1(5)^6$$

$$(z+5)^6 = z^6 + 30\,z^5 + 375\,z^4 + 2500\,z^3 + 9375\,z^2 + 18750\,z + 15625$$

تمارين مقترحة للفصل الأول

التمرين الأول : أعطي قيمة $n!$ لكل قيمة n حيث : $n \in \{0, 1, 2, \dots 7\}$

التمرين الثاني : بسط واحسب العبارات التالية :

$$(n+1)n! \qquad \frac{(n+1)!}{(n+2)!} \qquad \frac{(n+2)!}{n+2} \qquad n! + (n+1)!$$

$$\frac{n!}{(n-1)!} \quad (n \geq 1) \qquad \frac{n!}{(n-2)!} \quad (n \geq 2) \qquad \frac{(n+2)!}{(n-1)!} \quad (n \geq 1) \qquad \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}$$

التمرين الثالث :

-اوجد قيمة العدد الطبيعي n في الحالتين التاليتين :

$$* \quad A_n^4 = 42A_n^2$$

$$* \quad A_n^2 = 72$$

- اثبت أن : $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

التمرين الرابع : انشر العبارات التالية :

$$(a+b)^6 \qquad \left(\frac{1}{2}z + 2\right)^4 \qquad (z-3)^8 \qquad (2x-1)^5$$

الفصل الثاني : عموميات المتتاليات العددية

1 - تعاريف عامة حول عموميات المتتاليات :

- **تعريف متتالية عددية :** نسمي متتالية عددية كل دالة من مجموعة الأعداد الطبيعية N في مجموعة الأعداد الحقيقية R

يرمز إلى صورة عدد طبيعي n بواسطة متتالية عددية U( ) بالرمز (U_n)

الأعداد U_1 U_2 ⋯ U_n تسمى حدود المتتالية

العدد الحقيقي (U_n) يسمى حدها العام

أمثلة :

-الدالة التي ترفق بكل عدد طبيعي n العدد الحقيقي $(n^2 - n + 1)$ هي متتالية عددية معرفة في N

-الدالة التي ترفق بكل عدد طبيعي n العدد الحقيقي $\frac{n+3}{n-2}$ هي متتالية عددية معرفة في N -{2}

-الدالة التي ترفق بكل عدد طبيعي n العدد الحقيقي $\frac{n}{n+1}$ هي متتالية عددية معرفة في N

المتتالية المتزايدة :نقول أن المتتالية (U_n) هي متتالية متزايدة إذا كان :

$$\forall n \in N \quad U_{n+1} > U_n$$

$$\forall n \in N \quad U_{n+1} - U_n > 0$$

المتتالية المتناقصة : نقول أن المتتالية (U_n) هي متتالية متناقصة اذا كان :

$$\forall n \in N \quad U_{n+1} < U_n$$

$$\forall n \in N \quad U_{n+1} - U_n < 0$$

نقول عن المتتالية (U_n) أنها رتيبة إذا كانت متزايدة أو متناقصة

المتتالية الثابتة :نقول أن المتتالية (U_n) هي متتالية ثابتة إذا وفقط إذا كانت :

$$\forall n \in N \quad U_{n+1} = U_n$$

$$\forall n \in N \quad U_{n+1} - U_n = 0$$

مثال : لتكن المتتاليات التالية حيث :

$$U_n = \frac{1}{n} \qquad V_n = n^2 + 1 \qquad W_n = (-1)^n$$

-ادرس رتابتها

الحل :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

ومنه (U_n) متناقصة

$$V_{n+1} - V_n = \left[(n+1)^2 + 1\right] - (n^2+1) = 2n + 1 > 0$$

ومنه (V_n) متزايدة

$$W_{n+1} - W_n = (-1)^{n+1} - (-1)^n = (-1)^n(-1-1) = -2(-1)^n = \begin{cases} -2 & n \text{ زوجي} \\ +2 & n \text{ فردي} \end{cases}$$

ومنه (W_n) ليست متزايدة ولا متناقصة فهي ليست رتيبة

المتتالية المحدودة :

*نقول عن متتالية أنها محدودة من الأعلى إذا كان :

$$\forall n \epsilon N \quad \exists \alpha \epsilon R \quad U_n \leq \alpha$$

*نقول عن متتالية أنها محدودة من الأسفل إذا كان :

$$\forall n \epsilon N \quad \exists \beta \epsilon R \quad U_n \geq \beta$$

ملاحظة :نقول عن متتالية أنها محدودة إذا كانت في آن واحد محدودة من الأعلى ومن الأسفل اي :

$$\forall n \epsilon N \quad \exists \alpha \epsilon R \quad \exists \beta \epsilon R \quad \beta \leq U_n \leq \alpha$$

مثال :لتكن المتتالية التالية حيث : $U_n = \sin n$

$$\forall n \in N \quad -1 \leq \sin n \leq 1$$

المتتالية (U_n) محدودة لأنها محدودة من الأسفل ب)-1(ومحدودة من الأعلى ب)1(

المتتالية المتقاربة :

نقول عن متتالية (U_n) أنها متقاربة إذا كان :

$$\lim_{n \to +\infty} (U_n) = p \quad p \in R$$

نقول أن المتتالية (U_n) تتقارب نحو P

لكل متتالية متقاربة نهاية موجودة ووحيدة

إذا كانت (U_n) متتالية غير متقاربة نقول أنها متباعدة

مثال : لتكن المتتاليتين (U_n) و (V_n) حيث : $U_n = \sqrt{n-1}$ $V_n = \frac{n}{n^2+1}$

ادرس تقارب المتتاليتين

الحل :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n-1} = +\infty$$

النهاية موجودة لكنها ليست محدودة ومنه المتتالية ليست متقاربة فهي متباعدة

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

النهاية موجودة ومحدودة ومنه المتتالية متقاربة وتتقارب إلى الصفر

نظرية1 : نهاية متتالية إذا وجدت فهي وحيدة

نظرية 2 : لتكن (U_n) ، (V_n) و (W_n) ثلاث متتاليات حيث :

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} V_n = p \\ \wedge \ V_n \leq W_n \leq U_n \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} W_n = p$$

مثال : لتكن المتتالية (U_n) حيث : $U_n = \frac{\sin n}{n}$ احسب $\lim_{n\to+\infty} U_n$

الحل :

$$\forall n \in N \quad -1 \leq \sin n \leq +1$$

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in N^*$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = 0 \quad \wedge \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{و}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0 \quad \text{فان:}$$

نظرية 3 : إذا كانت المتتالية (U_n) متزايدة ومحدودة من الاعلى او متناقصة ومحدودة من الاسفل فهي متقاربة

المتتالية التراجعية :

تعريف : نقول عن المتتالية (U_n) أنها متتالية تراجعية إذا أمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$\begin{cases} U_0 = a & a\epsilon R \\ U_n = f(U) \end{cases}$$

إذا كانت المتتالية (U_n) متقاربة وتتقارب الى P فان P هو حل للمعادلة $P=f(p)$

مثال : لتكن المتتالية التراجعية المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{5U_n - 4}{1 + U_n} & \forall n \epsilon N^* \end{cases}$$

-برهن بالتراجع أن : $\forall n \in N^* \quad U_n > 2$

-هل المتتالية متقاربة إذا كان جوابك نعم احسب نهايتها

الحل :

*نتحقق أن المتباينة صحيحة من اجل العدد الطبيعي n=1

$U_1 > 2 \Rightarrow 3 > 2$ صحيحة

*نفرض أن المتباينة صحيحة من اجل العدد الطبيعي n

$$\forall n \in N^* \; U_n > 2$$

*ولنبرهن أن المتباينة صحيحة من اجل العدد الطبيعي $(n+1)$

$$\forall n \in N^* \; U_{n+1} > 2$$

$$\forall n \in N^* \; U_{n+1} - 2 > 0$$

$$\frac{5U_n - 4}{1 + U_n} - 2 > 0$$

$$\frac{5U_n - 4 - 2(1 + U_n)}{1 + U_n} = \frac{5U_n - 4 - 2 - 2U_n}{1 + U_n} = \frac{3U_n - 6}{1 + U_n}$$

$$= \frac{3(U_n - 2)}{1 + U_n} > 0 \qquad \forall n \in N^* \; U_n > 2 \quad \text{لان}$$

$$\forall n \in N^* \; U_{n+1} - 2 > 0 \quad \text{اذن}$$

وهو المطلوب

$\forall n \in N^* \ U_n > 2$: لدينا

ومنه المتتالية محدودة من الأسفل ب 2

دراسة رتابة المتتالية :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{5U_n - 4}{1+U_n} - U_n = \frac{5U_n - 4 - U_n(1+U_n)}{1+U_n} = \frac{-({U_n}^2 - 4U_n + 4)}{1+U_n}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-(U_n - 2)^2}{1+U_n} < 0$$

$\forall n \in N^* \ U_n > 2$: لان

ومنه المتتالية متناقصة

لدينا :

$$\begin{cases} \text{المتتالية متناقصة} \\ \text{و محدودة من الاسفل} \end{cases} \Rightarrow \text{المتتالية متقاربة}$$

$$(\text{المتتالية المتقاربة}) \Rightarrow (\lim_{n \to +\infty} U_n) = p$$

P موجود ومحدود واكبر من الصفر ويحقق العلاقة $p=f(p)$

$$\frac{5p-4}{1+p} = p \quad \Rightarrow 5p - 4 = (1 + p)$$

$$\square p^2 - 4p + 4 = 0$$

$$\square (p-2)^2 = 0 \ \Rightarrow p - 2 = 0 \ \Rightarrow p = 2$$

2eǔ : المتتالية متقاربة وتتقارب إلى 2

مثال 2 : لتكن المتتالية التراجعية التالية :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n} \end{cases} \quad \forall n \geq 1$$

$\forall n \epsilon N \quad U_n \geq 1$ – برهن بالتراجع ان :

- ℽ المتتالية متقاربة إذا كان جوابك نعم اوجد نهايتها

الحل :

n=0 *LjŇUŽiəOŽiyŷǔ5Ɛ F⁴NH FɜlJŎIgŽi2ǐ ⌊ T⁴Ik**

$U_0 \geq 1 \Rightarrow 2 \geq 1$ صحيحة

n *LjŇUŽiəOŽiyŷǔ5Ɛ F⁴NH FɜlJŎIgŽi2ǐ ϱ –z**

$\forall n \epsilon N \quad U_n \geq 1$

n+1 *Ljη̃UZ̃iəΘZ̃ŷ ŷüƐ F↳N̈Ḧ Ḧ̃ŠJ̃ḧ̃gZ̃i2ĭ5‖ – ̃̈sZ**

$\forall n \epsilon N \quad U_{\square+1} \geq 1$

$\forall n \epsilon N \quad \sqrt{U_n} \geq 1$

$\forall n \epsilon N \quad U_n \geq 1$ لدينا :

$\sqrt{U_n} \geq 1 \Rightarrow U_{n+1} \geq 1$ و هو المطلوب

$\forall n \epsilon N \quad U_n \geq 1$ لدينا :

1 ù ŷ∂ƃəüƐ ̃ə! ΘḦƐ F̈ḦḦ̃gZ̃i ;Ɛ!

- دراسة رتابة المتتالية:

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n} - U_n = \sqrt{U_n}\left(1 - \sqrt{U_n}\right) < 0$$

$\forall n \epsilon N \quad U_n \geq 1$ لان :

Fd ŷ̃ḦḦ̃gZ̃i : 2əü

: *Ḧ̃fƐ*

$$\begin{cases} \text{المتتالية متناقصة} \\ \text{و محدودة من الاسفل} \end{cases} \Rightarrow \text{المتتالية متقاربة}$$

$$(\text{المتتالية المتقاربة}) \Rightarrow (\lim_{n \to +\infty} U_n) = p$$

P موجود ومحدود واكبر من الصفر ويحقق العلاقة $p=f(p)$

$$p = \sqrt{p} \Rightarrow p^2 = p \Rightarrow p^2 - p = 0 \Rightarrow p(p-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ p = 1 \end{cases}$$

$\forall n \epsilon N \quad U_n \geq 1$ مرفوض لان : $p = 0$

إذن المتتالية متقاربة وتتقارب إلى الواحد

2 - المتتالية الحسابية :

1-2 تعريف وعموميات وقوانين المتتالية الحسابية مع تطبيق حالة الادخار بفائدة بسيطة:

تعريف : نقول عن المتتالية العددية (U_n) المعرفة في N أنها متتالية حسابية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي (r) بحيث :

$\forall n \epsilon N \quad U_{n+1} = U_n + r$

$\forall n \epsilon N \quad U_{n+1} - U_n = r$

$(\forall n \epsilon N \quad U_{n+1} = U_n + r) \Leftrightarrow (U_n)$ متتالية حسابية ذات الاساس r بمعنى :

يسمى (r) (U_n) وهو عدد ثابت حقيقي غير معدوم

ملاحظة : إذا كان r =0 فان المتتالية ثابتة وكل حدودها تساوي الحد الأول

مثال :

- 0، 2، 4...$2n$ هي حدود متتابعة لمتتالية حسابية حدها الأول يساوي الصفر وأساسها $r=2$
- 1، 3 ، 5 ...$2n+1$ هي حدود متتابعة لمتتالية حسابية حدها الأول يساوي الواحد وأساسها $r=2$

اتجاه تغير متتالية حسابية :

(U_n) متتالية حسابية معرفة في N ذات الأساس (r)

$\forall n \epsilon N \quad U_{n+1} - U_n = r$

* U_n متتالية متزايدة اذا كان $r > 0$
* U_n متتالية متناقصة اذا كان $r < 0$
* U_n متتالية ثابتة اذا كان $r = 0$

مثال : لتكن المتتالية الحسابية المعرفة كمايلي :

$U_{n+1} - U_n = -\sqrt{2} = r$

إذن : متتالية حسابية أساسها r= $-\sqrt{2}$ فهي متناقصة

الحد العام لمتتالية حسابية : لتكن (U_n) متتالية حسابية حدها الاول (U_0) واساسها (r) فان :

$\forall n \epsilon N \quad U_n = U_0 + n\,r$

وهي عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول (U_0) واساسها (r)

ملاحظة : الحد الاول (U_1) فان عبارة الحد العام هي :

$\forall n \epsilon N^* \quad U_n = U_1 + (n-1)r$

بصفة عامة : إذا كان (U_p) الحد الاول حيث p عدد طبيعي اصغر من n فان عبارة الحد العام هي :

$\forall n > p \quad U_n = U_p + (n-p)r$

مثال 1 : (U_n) متتالية حسابية معرفة بحدها الاول (U_0) واساسها (r) حيث r=3 و $U_0 = 1$

- اكتب عبارة الحد العام بدلالة n
- احسب الحد التاسع

الحل :

لدينا : $\forall n \epsilon N \quad U_n = U_0 + n\,r$

$\forall n \epsilon N \quad U_n = 1 + 3n$

الحد التاسع هو (U_8) لان حدها الاول (U_0)

$U_8 = 1 + 8r \Rightarrow U_8 = 1 + 8(3) = 25$

مثال 2: (U_n) متتالية حسابية معرفة بحدها الاول (U_1) واساسها (r) حيث r=2 و $U_1 = 3$

- اكتب عبارة الحد العام بدلالة n
- احسب الحد التاسع

الحل :

لدينا : $U_n = U_1 + (n-1)r$

$U_n = 3 + (n-1)2 \Rightarrow U_n = 2n + 1$

$U_9 = U_1 + 8r \Rightarrow U_9 = 3 + 8(2) = 19$

مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية :

لتكن (U_n) متتالية حسابية أساسها (r) وحدها الأول (U_0)

ليكن (S_n) مجموع n حدا حيث :

$S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1}$

يعطى المجموع بالعلاقة :

$\forall n \epsilon N \quad S_n = \frac{\text{الحدود عدد}}{2}(U_0 + U_{n-1})$

$\forall n \epsilon N \quad S_n = \frac{n}{2}(U_0 + U_{n-1})$

قاعدة : المجموع في المتتالية الحسابية يكون بالكيفية التالية:

$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}$ (الحد الاول + الحد الاخير)

عدد الحدود =دليل الحد الأخير -دليل الحد الأول + 1

مثال : لنحسب المجموع التالي :

$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

الأعداد 1 ،2 ، 3 ، ...،n هي حدود متتابع لمتتالية حسابية أساسها $r = 1$ وحدها الأول 1 وحدها الأخير n فيكون المجموع كالتالي :

$$S_n = \frac{n}{2}(1 + n)$$

نهاية متتالية حسابية :

(U_n) متتالية حسابية حدها الاول (U_0) واساسها (r)

$\mathbf{U_n = U_0 + nr}$ نعلم ان :

فان نهاية هذه المتتالية تتوقف على إشارة الأساس (r)

* اذا كان $r > 0$ فان : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

* اذا كان $r < 0$ فان : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

* اذا كان $r = 0$ فان : $\lim_{n\to+\infty} U_n = U_0$

مثال 1 : (U_n) متتالية حسابية حدها الاول $U_1 = 2$ واساسها r= 3

-اكتب عبارة الحد العام بدلالة n

- احسب نهاية (U_n)

-احسب احد الخامس عشر

نعتبر المجموع (S_n) حيث : $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

-احسب المجموع (S_n) بدلالة n

-احسب المجموع من اجل خمسة عشرة حدا الأولى

الحل :

* لدينا : $U_n = U_1 + (n-1)r$

$U_n = 2 + (n-1)3 \Rightarrow U_n = 3n - 1$

$*\lim_{n\to+\infty}(U_n) = \lim_{n\to+\infty}(3n - 1) = +\infty$

$*U_n = 3(15) - 1 = 45 - 1 = 44$

$* S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n) = \frac{n}{2}(2 + 3n - 1) = \frac{n}{2}(3n + 1)$

$* S_{15} = \frac{15}{2}(U_1 + U_{15}) = \frac{15}{2}(2 + 44) = \frac{15}{2}(46) = 345$

مثال 2 : (U_n) متتالية حسابية حدها الاول (U_0) واساسها (r) حيث : $U_3 = 3$ و $U_6 = 9$

-اوجد الأساس (r) و حدها الأول (U_0)

-اكتب عبارة الحد العام (U_n) بدلالة n

-هل العدد 37 حدا من حدود المتتالية (U_n) اذا كان صحيح اعطي رتبته

– احسب المجموع : $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_{20}$

– احسب المجموع S_n حيث : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

الحل :

-إيجاد الأساس (r) و حدها الأول (U_0)

$$U_n = U_p + (n - p)r$$

$$U_6 = U_3 + (6 - 3)r \Rightarrow 9 = 3 + 3r \Rightarrow 3r = 6 \Rightarrow r = 2$$

لدينا : $U_3 = U_0 + 3r$

$$U_0 = U_{3-} + 3r \Rightarrow U_0 = 3 - 6 \Rightarrow U_0 = -3$$

-كتابة عبارة الحد العام (U_n) بدلالة n :

نعلم ان : $\mathbf{U_n = U_0 + n\,r}$

$$\mathbf{U_n = -3 + 2n}$$

-العدد 37 حد من حدود المتتالية (U_n) معناه يوجد العدد الطبيعي k بحيث :

$$U_k = 37 \Rightarrow -3 + 2k = 37 \Rightarrow 2k = 40 \Rightarrow k = 20\ \epsilon\ N$$

$$U_{20} = 37$$

إذن العدد 37 هو حد من حدود المتتالية (U_n) ورتبته هي الواحد وعشرون لان الحد الأول للمتتالية هو (U_0)

-حساب المجموع : $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_{20}$

$$S = \frac{21}{2}(U_0 + U_{20}) = \frac{21}{2}(-3 + 37) = \frac{21}{2}(34) = 357$$

– حساب المجموع S_n حيث : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

$$S_n = \frac{n+1}{2}(U_0 + (-3 + 2n)) = \frac{n+1}{2}(-3 - 3 + 2n) = (n+1)(n-3)$$

2-2 تطبيق حالة الادخار بفائدة بسيطة :

-مفهوم الفائدة البسيطة :

$\mathbf{500DA}$ الفائدة سنويا $\frac{\text{سنويا } \mathbf{5\%}}{\text{معدل الفائدة}}$ ادخر $\mathbf{10000\ DA}$

$\mathbf{5\% = \frac{5}{100} = 0,05}$ $\mathbf{10000 \times 0,05 = 500DA}$ سنويا

المبلغ المتحصل عليه في نهاية السنة :

$$\mathbf{10000 + 500 = 10500DA}$$

مثال : لاستخراج القانون

مثلا ادخر المبلغ 1000 DA بفائدة بسيطة سنويا 5%

*المبلغ في نهاية السنة الأولى :

$$1000 \times 0,05 = 50DA$$

الفائدة = معدل الفائدة × المبلغ الاولي

$$a_1 = 1000 + 50 = 1050\ DA$$

$$a_1 = a_0 + a_0 r$$

حيث :

a_1 مبلغ نهاية السنة الاولى

a_0 المبلغ المدخر

r معدل الفائدة

*المبلغ في نهاية السنة الثانية :

$$\boldsymbol{a_2 = 1000 + 50 + 50}$$

$$a_2 = a_0 + a_0 r + a_0 r = a_0 + 2a_0 r$$

*المبلغ في نهاية السنة الثالثة :

$$a_3 = 1000 + 50 + 50 + 50$$

$$a_3 = 1000 + a_0 r + a_0 r + a_0 r$$

$$a_3 = 1000 + 3(a_0 r)$$

*المبلغ في نهاية السنة n :

$$a_n = a_0 + n(a_0 r)$$

هو حد عام لمتتالية حسابية حدها الأول a_0 واساسها $(a_0 r)$ وحدها الاخير a_n

$$a_n = a_0 + n\ (a_0 r)$$

a_n المبلغ الجديد المتحصل عليه في السنة n (المبلغ المتحصل عليه في نهاية الادخار)

a_0 مبلغ بداية الفترة (المدخر)

n عدد السنوات

r معدل أو نسبة الفائدة

المبالغ المتحصل عليها سنويا هي حدود لمتتالية حسابية أساسها $d= (a_0 r)$ وحدها الأول a_0

يمكن استخلاص القانون التالي :

حيث : $(a_0 r)$ مقدار الفائدة السنوية $a_n = a_0 + n(a_0 r)$

$d = r a_0$ $\mathrm{a_n = a_0 + nd}$

حيث : d هو مقدار الفائدة السنوية على المبلغ

مثال 1 : *ÚÎDžÆ r=5% Ñ MÅJ ¯ÓÑÆ²YÒ¬Ç¯ ε ÚÎDžÆ 5 ¯ÒÆZ[ˆs¯ÆÆLÇ²1000DA ÓÑÇ¯Ç D ƏC'–hə*

a5 ¯ÒÆÆÑÎ¯s LÇ²| MÅJ yÆd ¬ÑÆÆÓÑÇ¯ÇÆÆDÆÆ-

الحل :

$\mathrm{a_0 = 1000DA}$ المبلغ المدخر في بداية المدة

$\mathrm{a_n = a_0 + n(a_0 \times 0{,}05)}$ n عدد السنوات

$$a_5 = 1000 + 5(1000 \times 0{,}05) = 1000 + 250 = 1250\mathrm{DA}$$

مثال 2 : أودع منصور في البنك مبلغ 10000DA ÚÎDžÆ 7,5% Ñ MÅJ ¯ÓÑÆ²YÒ¬Ç¯ ε ÚÎDžÆ 8 ¯ÒÆZ

¯ÒÆÆÑÎ¯s LÇ²ÓÑÇ¯ÇÆÆF²MÅJ¯Æ-

الحل :

$$n = 8$$

$$r = 7{,}5\% = \frac{7{,}5}{100} = 0{,}075$$

$$a_n = a_8 = a_0 + 8(a_0 \times 0{,}075)$$

$$a_8 = 10000 + 8(10000 \times 0{,}075)$$

$$a_8 = 10000 + 6000 = 16000\ DA$$

مثال 3 : أودع شخص مبلغ لمدة 4,75 سنة بمعدل فائدة بسيطة 8% سنويا فوجد مبلغه في نهاية المدة مقدر ب 11040 DA

-كم كان المبلغ المدخر

الحل :

$$n = 4{,}75$$

$$r = 8\% = \frac{8}{100} = 0{,}08$$

$$a_n = a_{4{,}75} = 11040\ DA$$

لدينا : $a_n = a_0 + n(a_0 r)$

$$11040 = a_0 + 4{,}75(a_0 \times 0{,}08)$$

$$11040 = a_0 + 0{,}3a_0$$

$$11040 = 1{,}3a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{11040}{1{,}3} = 8000DA$$

مثال 4 : دخر إبراهيم في البنك مبلغ *12000DA* لمدة ما بمعدل فائدة بسيطة *5,5%* سنويا فوجد مبلغه في نهاية المدة قدره 16620DA

-ماهي مدة الـ n ؟

: y*ZZi

$a_0 = 12000DA$ مبلغ بداية المدة

$n = ?$

$r = 5{,}5\% = \frac{5{,}5}{100} = 0{,}05$

$a_n = 16620DA$

$a_n = a_0 + n\,(a_0\, r)$ لدينا :

$$a_n = 12000 + n(12000 \times 0{,}05)$$

$$a_n = 12000 + 660n$$

$$16620 = 12000 + 660n \Rightarrow 4620 = 660n \Rightarrow n = \frac{4620}{660} = 7$$ سنوات

مثال 5 : أودعت منال مبلغ ما لمدة 10 سنوات بمعدل فائدة بسيطة سنوية مع العلم ان المبلغ في السنة السادسة بلغ 16315 DA وفي نهاية المدة بلغ 18525 DA

-اوجد المبلغ الذي أودعته منال في البنك المبلغ الأولي a_0

r ¨GÍZZiF¨1s5Qy!i¨

الحل :

$n = 10$

$a_6 = 16315\ DA$

$a_{10} = 18525\ DA$

$a_0 = ?$

$r = ?$

$a_n = a_0 + n\,(a_0\, r)$ لدينا :

$a_n = a_0 + n\,d$ نعوض $a_0 r = d$ قيمة الفائدة السنوية

$$a_6 = a_0 + 6d \Rightarrow 16315 = a_0 + 6d \quad \dots \quad 1$$

$$a_{10} = a_0 + 10d \Rightarrow 18525 = a_0 + 10d \quad \dots \quad 2$$

$$2-1 \Rightarrow 18525-16315=4d$$

$$\Rightarrow 4d=2210 \Rightarrow d=552{,}5\ DA$$

لدينا : $a_6=a_0+6d$

$$16315=a_0+(6\times 552{,}5)$$

$$16315=a_0+3315 \Rightarrow a_0=13000\ DA$$

$$d=a_0 r \Rightarrow 552{,}5=13000\times r$$

$$\Rightarrow r=\frac{552{,}5}{13000}=0{,}0425$$

$$r=4{,}25\%$$

3 - المتتالية الهندسية :

1-3 تعريف وعموميات وقوانين المتتالية الهندسية مع تطبيق حالة الادخار بفائدة مركبة :

تعريف : نقول عن المتتالية (U_n) المعرفة في N أنها متتالية هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث :

$$\forall\, n\epsilon N \quad U_{n+1}=U_n\times q$$

بمعنى : $(\forall\, n\epsilon N \quad U_{n+1}=U_n\times q) \Leftrightarrow$ ((U_n) متتالية هندسية ذات الاساس q)

يسمى q بأساس المتتالية الهندسية وهو عدد ثابت حقيقي غير معدوم

مثال : إذا كان q=2 و $U_0=1$ نحصل على متتالية هندسية حدودها

$$U_n=U_0 q$$

$$U_1=U_0 q=2$$

$$U_2=U_0 q^2=2^2$$

$$U_3=U_0 q^3=2^3$$

$$U_0\,,\ U_1\,,U_2 \ldots .\ U_n=1\,,2\,,\ 2^2,2^3\ \ldots .\ 2^n$$

الحد العام لمتتالية هندسية :

لتكن (U_n) متتالية هندسية حدها الاول (U_0) و اساسها q

$$\forall\, n\epsilon N \quad U_n=U_0\ q^n$$

وهو الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول (U_0) واساسها q

ملاحظة : إذا كان (U_1) الحد الاول فان عبارة الحد العام هي :

$$\forall\, n\epsilon N^* \quad U_n=U_1\ q^{n-1}$$

بصفة عامة : إذا كان (U_p) الحد الاول حيث p عدد طبيعي اصغر من n فان عبارة الحد العام هي :

$$\forall n > p \qquad U_n = U_p \ \ q^{n-p}$$

مثال 1 : (U_n) متتالية هندسية معرفة بحدها الاول (U_0) واساسها q حيث $q=3$ و $U_0 = 1$

-اكتب عبارة الحد العام بدلالة n

-احسب الحد التاسع

الحل :

$$U_n = U_0 \times q^n = 1 \times 3^n = 3^n$$

$$U_8 = U_0 \times q^8 = 3^8$$

مثال 2 : (U_n) متتالية هندسية معرفة بالعلاقة $U_n = 2 \times 3^n$ وحدها الاول (U_0)

-احسب (U_2) و (U_3)

- استنتج الأساس q

-احسب الحد الخامس

y"Bi :

$$U_n = 2 \times 3^n$$

$$U_2 = 2 \times 3^2 \Rightarrow U_2 = 18$$

$$U_3 = 2 \times 3^3 \Rightarrow U_3 = 54$$

$$U_3 = U_2 \times q \ \Rightarrow q = \frac{U_3}{U_2} = \frac{54}{18} \Rightarrow q = 3$$

$$U_4 = 2 \times 3^4 = 162$$

: FNB FNBgZFh Uf ∂!Θ λDŽ

لتكن (U_n) متتالية هندسية اساسها q وحدها الأول (U_0) وليكن (S_n) مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية حيث : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{n-1}$

يعطى المجموع بالعلاقة :

$$\forall n \epsilon N \ \ S_n = U_0 \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) \qquad q \neq 1$$

حيث : U_0 الحد الاول

n عدد الحدود

عدد الحدود =دليل الحد الأخير –دليل الحد الأول +1

$S_n = n \quad _0$: 2 q=1 2

: المجموع في المتتالية الهندسية يكون بالكيفية التالية :

$$S_n = (\text{الحد الاول})\left(\frac{(\quad)^{\text{عدد الحدود}} - 1}{\text{الاساس} - 1}\right) \qquad q \neq 1$$

$$q = 1 \Rightarrow S_n = (\text{الحد الاول}) \times (\text{عدد الحدود})$$

مثال 1 : (U_n) متتالية هندسية حدها الاول $U_0 = 2$ واساسها q=1

نعتبر المجموع S_n حيث : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

-احسب المجموع S_n بدلالة n

الحل :

$$U_n = U_0 \times q^n \Rightarrow U_n = 2 \times 1^n = 2$$

$$\text{عدد الحدود} = (\text{دليل الحد الاخير} - \text{دليل الحد الاول} + 1) = n - 0 + 1 = (n + 1) \text{ حد}$$

$$S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n = 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = (n + 1)2 = 2n + 2$$

مثال 2 : (U_n) متتالية هندسية حدها الاول $U_1 = 5$ واساسها q=5

نعتبر المجموع S_n حيث : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

-احسب مجموع خمس حدود الأولى

الحل :

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5$$

$$S_n = U_1(\frac{5^5 - 1}{5 - 1}) = 5(\frac{5^5 - 1}{4}) = 5 \times 781 = 3905$$

:

(U_n) متتالية هندسية حيث : $U_0 \neq 0$

$$\boldsymbol{U_n = U_0 \times q^n}$$

الحالة الاولى : $\mathbf{q > 1}$ $\mathbf{\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty}$

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty & si \quad U_0 > 0 \\ \lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty & si \quad U_0 < 0 \end{cases}$$

في هذه الحالة المتتالية متباعدة

الحالة الثانية : $q = 1$ من اجل كل عدد طبيعي n يكون :

$U_n = U_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = U_0$

في هذه الحالة المتتالية متقاربة

الحالة الثالثة : $-1 < q < 1$ $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$

في هذه الحالة المتتالية متقاربة

الحالة الرابعة : $q \leq -1$ U_n لا تقبل نهاية

في هذه الحالة المتتالية متباعدة

مثال : لتكن (U_n) متتالية هندسية معرفة بعبارة الحد العام حيث : $U_n = 3(0,5)^n$

$\lim_{n\to+\infty}(U_n)$ ¯ bxiĭ

الحل :

بما أن : $-1 < 0,5 < +1$ فان : $lim_{n\to+\infty}(0,5)^n = 0$

مثال : لتكن $(U_n)_{n\epsilon N}$ المعرفة بحدها الأول $U_0 = 2$ وبالعلاقة $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2$

نعرف المتتالية V_n من اجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $V_n = U_n - 3$

-اثبت أن المتتالية (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

-احسب V_n بدلالة n ، استنتج U_n بدلالة n ثم احسب المجموع n حد الأولى من المتتالية V_n

-احسب نهاية V_n بدلالة n ثم احسب نهاية S ، احسب نهاية U_n

الحل :

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}U_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}(U_n - 3)$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n$$

إذن : (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $V_0 = -1$

ومنه من اجل كل عدد طبيعي n فان :

$$V_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

-كتابة U_n بدلالة n :

$$V_n = U_n - 3 \quad \Rightarrow U_n = V_n + 3 \Rightarrow U_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$$

$$S = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$$

$$S = -\frac{3}{2}(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n)$$

$$-1 < \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(V_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} S = \lim_{n\to+\infty} -\frac{3}{2}(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n) = -\frac{3}{2}$$

$$U_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(U_n) = 3$$

2-3 تطبيق حالة الادخار بفائدة مركبة :

مفهوم الفائدة المركبة :

ادخر $1000\ DA$ $\frac{5\%\ \text{سنويا}}{\text{معدل الفائدة}}$

-المبلغ المتحصل عليه في نهاية السنة الأولى :

$$1000 + (1000 \times 0{,}05) = 1000 + 50 = 1050$$

$$1000 \times (1 + 0{,}05) = 1050\ DA$$

$$a_0 \times (1 + i) = a_1$$

-المبلغ المتحصل عليه في نهاية السنة الثانية :

$$1050 \times (1 + 0{,}05) = 1102{,}5\ \text{DA}$$

$$a_0 \times (1+i) \times (1+i) = a_2$$

$$a_0 \times (1+i)^2 = a_2$$

-المبلغ المتحصل عليه في نهاية السنة الثالثة :

$$1102{,}5 \times (1+0{,}05) = 1157{,}625\ DA$$

$$a_0 \times (1+i)^2 \times (1+i) = a_0 \times (1+i)^3 = a_3$$

-المبلغ المتحصل عليه في نهاية السنة الرابعة :

$$a_0(1+i)^3 \times (1+i) = a_0 \times (1+i)^4 = a_4$$

: [illegible]

$$a_0 \times (1+i)^5 = a_5$$

: n [illegible]

$$a_n = a_0(1+i)^n$$

$$a_n = a_0\ r^n$$

[illegible]

مثال 1 : [illegible] 800 DA [illegible] 9% [illegible]

-[illegible]

الحل :

$$a_0 = 8000\ DA$$

$$i = 9\% = \frac{9}{100} = 0{,}09$$

$$n = 5 \qquad a_5 = ?$$

$$a_n = a_0(1+i)^n$$

$$a_5 = 8000(1+0{,}09)^5 = 12308{,}992\ DA$$

مثال 2 : دخر رائد مبلغ ما بفائدة مركبة 8% سنويا لمدة ستة سنوات وفي نهاية المدة اصبح المبلغ 15868,74322 DA

-ماهو المبلغ الذي دخره رائد a_0

: y^qZi

$$a_6 = 15868{,}74322\ DA$$

$$a_0 = ?$$

$$i = 8\% = \frac{8}{100} = 0{,}08$$

$$a_6 = a_0(1+i)^6 \Rightarrow a_6 = a_0(1+0{,}08)^6$$

$$15868{,}74322 = a_0(1+0{,}08)^6 \Rightarrow a_0 = \frac{15868{,}74322}{(1+0{,}08)^6} = 10000DA$$

مثال 3 : أودع وليد مبلغ ما لمدة 5 سنوات بفائدة مركبة مع العلم أن المبلغ الذي يملكه في السنة الثالثة بلغ *18522 DA* والمبلغ الذي يملكه في نهاية المدة هو *20420 ,505DA*

-احسب نسبة الفائدة i

-اوجد المبلغ المودع في البنك

الحل :

$$\mathrm{n} = 5 \qquad \mathrm{a}_3 = 18522DA \qquad a_5 = 20420{,}505\ DA$$

$$a_n = a_0\ r^n \qquad a_n = a_0(1+i)^n \qquad r = 1+i$$

$$a_5 = a_0\ r^5 \ \Rightarrow\ 20420{,}505 = a_0\ r^5 \qquad 1$$

$$a_3 = a_0\ r^3 \ \Rightarrow 18522\ = a_0\ r^3 \qquad 2$$

$$\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{20420{,}505}{18522}\ = \frac{a_0 r^5}{a_0 r^3} \Rightarrow r^2 = 1{,}1025\ \Rightarrow r = 1{,}05$$

$$r = i + 1\ \Rightarrow i = 1 - r\ \Rightarrow i = 0{,}05 = 5\%$$

$$20420{,}505 = a_0\ r^5 \Rightarrow a_0 = \frac{20420{,}505}{(1{,}05)^5} = 16000DA$$

مثال 4 : دخر إياد مبلغ *10000 DA* بفائدة مركبة سنوية وبعد مرور 4 سنوات أصبح المبلغ المدخر *12624 ,7696 DA*

-اوجد نسبة الفائدة

الحل :

$n = 4 \qquad a_0 = 10000\ DA \qquad a_4 = 12624{,}7696\ DA$

$$a_n = a_0\ (1+i)^n \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_0(1+i)^4$$

$$12624{,}7696 = 10000(1+i)^4 = 10000\ r^4 \qquad r = 1+i$$

$$r^4 = \frac{12624{,}7696}{10000} = 1{,}26247 \quad \Rightarrow r = \sqrt[4]{1{,}26} \quad = 1{,}06$$

$$r = 1+i \ \Rightarrow i = r-1 \Rightarrow i = 1{,}06 - 1 = 0{,}06 = 6$$

تمارين مقترحة للفصل الثاني

التمرين الأول : احسب الحدود الأربعة الأولى ثم ادرس رتابة وطبيعة كل متتالية ممايلي :

$U_n = \frac{n+1}{n+2}, n \in N \quad V_n = n(-1)^n \quad n \in N \quad W_n = n + (-1)^n \quad n \in N$

$Z_n = \frac{n+1}{3^n} \quad n \in N \quad T_n = \frac{2n}{n+1} \quad n \in N$

التمرين الثاني : لتكن المتتالية (U_n) المعرفة كمايلي :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2 - \frac{1}{U_n} \quad n \in N \end{cases}$$

-برهن بالتراجع أن : $\forall n \in N \quad U_n \geq 1$

-بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم عين نهايتها

التمرين الثالث : لتكن $(a_n)\ n \in N^*$ متتالية حسابية أساسها $r=5$

إذا علمت أن $a_7 = \frac{2}{3}$ فاحسب الحد الأول a_1 ثم استنتج عبارة الحد العام a_n

-احسب المجموع $w = a_{10} + a_{11} + \cdots + a_{50}$

التمرين الرابع : لتكن المتتالية (U_n) المعرفة كمايلي :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{2}{1+U_n} \quad \forall n \in N \end{cases}$$

1 - برهن بالتراجع أن : $\forall n \in N \quad 0 \leq U_n \leq 3$

2 - لتكن (V_n) متتالية معرفة كمايلي : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$

a- برهن أن المتتالية (V_n) هندسية ثم عين عبارة الحد العام V_n بدلالة n

***b*- اكتب** (U_n) بدلالة (V_n) ثم احسب نهايتها

تمرين تطبيقي : تلقى موظف عام 2022 اجر سنوي قدره 374000 *DA* ويترقب زيادة أجره بنسبة 3% خلال كل سنة من السنوات الأربعة القادمة

نفرض أن U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 تمثل اجور السنوات 2022 , 2023, 2024, 2025, 2026 على الترتيب

-ما نوع المتتالية التي تمثلها هذه الحدود

-احسب قيمة الحدين U_3 و U_5

-احسب الراتب الإجمالي المتحصل عليه خلال السنوات الخمس المذكورة سابقا

تعريف الدالة : نسمي دالة للمجموعة E نحو المجموعة F كل علاقة تربط كل عنصر من E بعنصر واحد فقط من F

و نرمز لها بالرمز f : E → F

$$f: E \to F$$

$$x \to y = f(x)$$

نسمي العنصر y صورة العنصر x بالدالة f

العنصر x هو سابقة العنصر y بالدالة f

مجموعة تعريف دالة : لتكن f دالة للمجموعة E في المجموعة F

مجموعة تعريف الدالة f هي مجموعة عناصر المجموعة E التي لها صورة في F بواسطة الدالة f

نرمز إلى مجموعة تعريف الدالة f بالرمز (Df) حيث :

$Df = \{x \in R \quad | \ f(x)$ معرف و موجود $\}$

مثال : لتكن الدوال f , g , h, s حيث :

$$f(x) = x^2 + 3x - 1 \qquad g(x) = \frac{1}{1-x^2} \qquad h(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x+3}}$$

$$s(x) = \sqrt{-4x^2 + 20x - 25}$$

-اوجد مجموعة تعريف الدوال أعلاه

الحل :

$$f(x) = x^2 + 3x - 1$$

Df =R لان f دالة كثير حدود

$g(x) = \frac{1}{1-x^2}$

$Dg = \{ x \in R \quad 1 - x^2 \neq 0 \}$

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow (1-x)(1+x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{او} \\ x = -1 \end{cases}$$

$Dg = R - \{-1, +1\}$

$h(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x+3}}$

$Dh = \{x \epsilon R \quad \frac{2-x}{x+3} \geq 0 \quad \wedge \quad x+3 \neq 0\}$

$x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$

x	-∞	-3	2 +∞
2-x	+	+	-
X+3	-	+	+
$\frac{2-x}{x+3}$	-	+	-

b

$$Df =]-3 \quad 2]$$

$S(x) = \sqrt{-4x^2 + 20x - 25}$

$$DS = \{x \epsilon R \qquad -4x^2 + 20x - 25 \geq 0\}$$

$$-4x^2 + 20x - 25 = 0$$

$$\Delta = (20)^2 - 4(-4)(-25) = 400 - 400 = 0$$

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{-8} = \frac{5}{2}$$

$$\forall\, x \epsilon R \qquad -4x^2 + 20x - 25 \leq 0 \quad \Rightarrow Ds = \left\{\frac{5}{2}\right\}$$

تعريف الدالة اللوغاريتمية وخواصها الحسابية و التحليلية :

تعريف الدالة اللوغاريتمية النيبيرية : هي دالة ترفق بكل عدد حقيقي x $(x\epsilon\ ]0\ +\infty[)$ العدد الحقيقي L n x والتي تنعدم عند الواحد حيث :

$$Ln\ 1 = 0 \qquad Ln\ e = 1 \qquad e = 2{,}718$$

مجموعة تعريف الدالة اللوغاريتمية : لإيجاد مجموعة تعريف الدالة (Ln) يجب أن يكون ما داخل (Ln) اكبر تماما من الصفر

$$f(x) = Ln(U(x))$$

تكون f معرفة إذا كان كل عدد حقيقي x يحقق $U(x) > 0$

$$Df = \{x\epsilon R \quad U(x) > 0\}$$

مثال : اوجد مجموعة تعريف الدوال التالية :

$$f(x) = Ln(x+1) \qquad g(x) = Ln|-x+3| \qquad h(x) = Ln(x^2+1)$$

$$S(x) = Ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

الحل :

$f(x) = Ln(x+1)$

$$Df = \{x \epsilon R \quad x+1 > 0\}$$

$$x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x\epsilon\,]-1 +\infty[$$

$$Df =]-1 +\infty[$$

$g(x) = Ln|-x+3|$

$$Dg = \{x \epsilon R \quad -x+3 \neq 0\}$$

$$-x+3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$Dg = R - \{3\}$$

$h(x) = Ln\,(x^2+1)$

$$Dh = \{x\epsilon R \quad x^2+1 > 0\}$$

$$\forall x \in R \quad x^2+1 > 0 \quad \Rightarrow \quad Dh = R$$

$S(x) = Ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$$Ds = \{x \in R \ \frac{x-1}{x+1} > 0 \quad \wedge \quad x+1 \neq 0\}$$

$$x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

x	-∞	-1	+1 +∞
x-1	-	-	+
X+1	-	+	+
$\frac{x-1}{x+1}$	+	-	+

$$Ds =]-\infty \quad -1[\ U\ ]1 \quad +\infty[$$

النهايات الشهيرة للدالة اللوغاريتمية :

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 0}} Ln\,x = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} Ln\,x = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} x^n Ln\,x = 0^-$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{Lnx}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{Ln(x+1)}{x} = 1$$

مثال : احسب النهايات التالية

$* \lim_{x\to 1} \frac{1-2x+Ln\ x}{x-1} = \frac{-1}{0}$

لندرس إشارة الصفر

X	-∞ 1	+∞
x-1	-	+

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 1}} \frac{1-2x+Lnx}{x-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{<\\ x\to 1}} \frac{1-2x+Lnx}{x-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$* \lim_{\substack{>\\ x\to 0}} \frac{-1}{xLnx} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

$* \lim_{x\to+\infty} \frac{Ln\ (x^2+1)}{x}$ $\qquad \frac{\infty}{\infty}$ ح ع ت

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{Ln\ (x^2+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{Ln(x^2(1+\frac{1}{x^2}))}{x} = \lim_{x\to+\infty} [\ \frac{Lnx^2}{x} + \frac{Ln(1+\frac{1}{x^2})}{x}\ ]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} [2\frac{Lnx}{x} + \frac{Ln(1+\frac{1}{x^2})}{x}] \quad = \frac{0}{\infty} = 0$$

$* \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-Lnx}$ $\qquad \frac{\infty}{\infty}$ ح ع ت

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{Lnx}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{lnx}{x}} = 1$$

الدالة المشتقة للدالة اللوغاريتمية :

$$\boldsymbol{f(x) = Lnx}$$

$$\boldsymbol{Df} =]\,\mathbf{0} \quad +\infty[$$

ودالتها المشتقة :

$$\mathbf{f}'(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} > 0$$

x	**0**	$+\infty$
$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$	+	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

من الجدول نستنتج أن :

$$\boldsymbol{f}:]\,\mathbf{0} \quad +\infty[\quad \rightarrow \quad \boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{x} \rightarrow \quad \boldsymbol{Ln\ x}$$

الدالة اللوغاريتمية قابلة للاشتقاق على $]0 \quad +\infty[$ ودالتها المشتقة $(\mathbf{Lnx})' = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$

بصفة عامة : $(Ln\mathrm{f(x)})' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

YUq : اوجد مشتق الدوال التالية :

$* f(x) = Ln(x^2 + 5x - 5)$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 5x - 5)'}{x^2 + 5x - 5} = \frac{2x + 5}{x^2 + 5x - 5}$$

$* \ g(x) = 2 - x + Lnx$

$g'(x) = -1 + \frac{1}{x}$

$* \ h(x) = 2x - 1 - (x + 1)Ln(x + 1)$

$h'(x) = 2 - \left[Ln(x + 1) + (x + 1)\frac{1}{x+1}\right] = 2 - Ln(x + 1)$

خواص *(ÛÜ5ŏNyLŽZNXK 5jeN* b ! a *5UXH*

$- Lna + Lnb = Ln(ab)$

$- Lna - Lnb = Ln\left(\frac{a}{b}\right)$

$- Ln\ a^n = n\ Lna$

$- Ln\left(\frac{1}{a}\right) = -Lna$

$-Lna = Ln\,b \quad \Rightarrow \quad a = b$

مثال : باستخدام الخواص اوجد x

$a)\ Ln2 - Lnx + 4Ln2 = -Ln3$

$b)\ Ln(x-1) + Ln2 = 0$

الحل :

$a)\ Ln2 - Lnx + 4Ln2 = -Ln3 \qquad x > 0$

$Ln2 - Lnx + Ln2^4 = -Ln3$

$Lnx = Ln2 + Ln2^4 + Ln3 \qquad \Rightarrow Lnx = Ln(2 \times 3 \times 16)$

$\Rightarrow Lnx = Ln96$

$\Rightarrow x = 96 > 0$

$b) Ln(x-1) + Ln2 = 0 \qquad Df =]1 \quad +\infty[$

$Ln\,[2(x-1)] = 0 \qquad \Rightarrow Ln(2x-2) = Ln1$

$\Rightarrow 2x - 2 = 1$

$\Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \in]1 \quad +\infty[$

حل المعادلات و المتراجحات اللوغاريتمية :

1 - لحل المعادلات و المتراجحات الدالة اللوغاريتمية يجب أولا تحديد مجموعة التعريف لنتأكد من أن الحلول تنتمي إلى مجموعة التعريف

(لازم حلول المعادلة أو المتراجحة تنتمي إلى مجموعة التعريف)

2 - معرفة نوع المعادلة :

1) $Lnx = 0 \qquad Ln\,1 = 0$

$Lnx = Ln1 \quad \Rightarrow x = 1$

2) $Ln\,x = y \quad \Rightarrow e^{Lnx} = e^y \Rightarrow x = e^y$

3) $Ln\,x = Ln\,y \quad \Rightarrow \quad x = y$

4) $Ln^2x + Ln\,x + b = 0$

$y = Lnx$ lIF 5-NHgZi-NHK HZbUjZip ‖ y^Ls

مثال 1 : *HXKie ÁəÜzZR LPyx̂*

$$Ln\left(x(x+1)\right)=0 \qquad Ln(2x)+4=0$$

$$(Lnx)^2+3Lnx-4=0 \qquad Ln(x+1)+Ln(x-3)=Ln(4x-8)$$

الحل :

$Ln\left(x(x+1)\right)=0$

$Df=\{x\in R \quad x(x+1)>0\ \}$

$$x(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \nu \\ x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \nu \\ x=-1 \end{cases}$$

-∞	*-1*	*0* +∞
+	-	+

$$\boldsymbol{Df}=]-\infty \ -1[\ \boldsymbol{U}]\boldsymbol{0} \quad +\infty[$$

$$\boldsymbol{Ln\left(x(x+1)\right)=0} \Rightarrow \boldsymbol{Ln(x^2+x)=Ln1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x^2+x=1} \Rightarrow \boldsymbol{x^2+x-1=0}$$

$$\Delta=\boldsymbol{1-4(1)(-1)=5}>0$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\ \boldsymbol{x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{x_1=-1,61\ \in Df} & \text{مقبول} \\ \boldsymbol{x_2=0,61\ \in Df} & \text{مقبول} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{S=\{x_1,x_2\}}$$

$Ln(2x)+4=0$

$$Df=\{\ x\ \in R \quad 2x\ >0\ \}=]0 \quad +\infty[$$

$$Ln2x\ =-4 \ \Rightarrow e^{Ln2x}=e^{-4} \ \Rightarrow 2x\ =e^{-4} \ \Rightarrow \ x=\frac{e^{-4}}{2} \quad >0$$

$$S=\left\{\frac{e^{-4}}{2}\right\}$$

$\boldsymbol{(Lnx)^2+3Lnx-4=0}$ $\qquad$ $\boldsymbol{Df}=]\boldsymbol{0} \quad +\infty[$

نحل المعادلة بتغيير المتغير نضع :

$$y = Lnx$$

$$y^2 + 3y - 4 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4(-4) = 25 > 0$$

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{-3-5}{2} \\ y_2 = \dfrac{-3+5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -4 \\ y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Lnx_1 = -4 \\ Lnx_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = e^{-4} & \in Df \\ x_2 = e & \in Df \end{cases}$$

$$S = \{e^{-4}, e\}$$

$\mathbf{Ln(x+1) + Ln(x-3) = Ln(4x-8)}$

$$\boldsymbol{Df} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \quad \boldsymbol{x+1} > 0 \quad \wedge \quad x - 3 > 0 \quad \wedge \quad 4\boldsymbol{x} - \boldsymbol{8} > 0\}$$

$$Df =]3 \quad +\infty[$$

$$Ln[(x+1)(x-3)] = Ln(4x-8)$$

$$Ln(x^2 - 2x - 3) = Ln(4x-8) \quad \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 4x - 8$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Delta = 36 - 4(5) = 16 > 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{6-4}{2} \\ x_2 = \dfrac{6+4}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 & \notin Df \quad \text{مرفوض} \\ x_2 = 5 & \in Df \quad \text{مقبول} \end{cases}$$

$$S = \{5\}$$

مثال 2 : حل في R المتراجحات التالية :

$$1 - Lnx \leq 0 \qquad Ln2x - 2Ln3 \geq 0 \qquad (Lnx)^2 + 3Lnx - 4 \leq 0$$

الحل :

$1 - Lnx \leq 0$ $\qquad Df =]0 \quad +\infty[$

$1 - Lnx \leq 0 \quad \Rightarrow Lnx \geq 1$

$\Rightarrow Lnx \geq Lne \qquad Lne = 1$

$\Rightarrow x \geq e \quad \Rightarrow x \in]0 \quad +\infty[$

الحلول هي : $S =]0 \quad +\infty[\cap [e \quad +\infty[$

$$S = [e \quad +\infty[$$

$Ln2x - 2Ln3 \geq 0$ $\qquad$ $Df =]0 \quad +\infty[$

$Ln2x - Ln3^2 \geq 0$

$Ln2x \geq Ln9 \quad \Rightarrow 2x \geq 9 \quad \Rightarrow x \geq \frac{9}{2}$

الحلول هي : $\qquad S =]0 \quad +\infty[\cap [\frac{9}{2} \quad +\infty[$

$S = [\frac{9}{2} \quad +\infty[$

$(Lnx)^2 + 3Lnx - 4 \leq 0$ $\qquad$ $Df = \quad]0 \quad +\infty[$

نضع : $\qquad y = Lnx$

$y^2 - 3y - 4 \leq 0$

$\Delta = 9 - 4(-4) = 25 > 0$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{3-5}{2} \\ y_2 = \frac{3+5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -1 \\ y_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Lnx_1 = -1 \Rightarrow x_1 = e^{-1} \\ Lnx_2 = 4 \Rightarrow x_2 = e^4 \end{cases}$$

-∞	e^{-1}	e^4 +∞
+	-	+

$(Lnx)^2 + 3Lnx - 4 \leq 0 \quad \Rightarrow x \in [e^{-1} \; e^4]$

ومنه الحلول هي : $\qquad S =]0 \; +\infty[\cap [\, e^{-1} \; e^4]$

$$S = [\, e^{-1} \;\; e^4 \,]$$

تعريف الدالة الآسية وخواصها الحسابية و التحليلية :

تعريف الدالة الاسية : الدالة الاسية f معرفة على R بالشكل :

$f(x) = e^x$ $\qquad$ حيث : $\quad e = 2{,}71$

$$Df = R$$

العدد e هو صورة 1 بالدالة الاسية أي : $\qquad e = exp(1)$

من اجل كل عدد حقيقي x فان : $exp(x) = e^x = (2{,}71)^x$

مجموعة تعريف الدالة الاسية :

$$\boldsymbol{x \to e^x} \qquad \boldsymbol{Df = R}$$

مثال : اوجد مجموعة تعريف الدوال التالية

$$e^{x^2+x} \qquad \frac{1}{e^x - 1} \qquad e^{\sqrt{x}} \qquad e^{\frac{x+1}{x^2+2}} \qquad \sqrt{e^x - 1}$$

الحل :

$f(x) = e^{x^2+x}$ $\qquad Df = R$

$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$

$Df = \{ x \in R \quad e^x - 1 \neq 0 \}$

$$e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1$$

$$\Rightarrow Lne^x = Ln1 \Rightarrow x = 0$$

$$Df = R^*$$

$f(x) = e^{\sqrt{x}}$

$$Df = \{x \in R \quad x \geq 0 \} \quad = [0 \ +\infty[$$

$f(x) = e^{\frac{x+1}{x^2+2}}$

$$Df = \{ x \in R \quad x^2 + 1 \neq 0 \quad \}$$

$$\forall x \in R \quad x^2 + 1 > 0$$

$$Df = R$$

$f(x) = \sqrt{e^x - 1}$

$$Df = \{x \in R \quad e^x - 1 \geq 0 \}$$

$$e^x - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow e^x \geq 1 \Rightarrow Lne^x \geq Ln1 \Rightarrow x \geq 0$$

$$Df = [0 \ +\infty [$$

ملاحظة : الدالة العكسية للدالة (Ln) تسمى الدالة الاسية ونرمز لها بالرمز (Exp)

$$(\boldsymbol{x \in R}) \qquad (\boldsymbol{y > 0})$$

$\boldsymbol{Exp}$: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}^{+}$

$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \quad \boldsymbol{e^x} > 0$

خواص الدالة الاسية :

ليكن x و y عددين حقيقيين فان :

1) $e^x = e^y \Rightarrow x = y$

2) $e^x < e^y \Rightarrow x < y$

3) $e^x > e^y \Rightarrow x > y$

$$\forall\, x > 0 \quad e^{Lnx} = x$$

$$e^1 = e \qquad e^0 = 1$$

النهايات الشهيرة للدالة الاسية :

$$\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{e^x} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \boldsymbol{e^x} = \boldsymbol{0} \qquad \lim_{x\to-\infty} \boldsymbol{x^n e^x} = \boldsymbol{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\boldsymbol{e^x - 1}}{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{1} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\boldsymbol{e^x}}{\boldsymbol{x^n}} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\boldsymbol{x^n}}{\boldsymbol{e^x}} = \boldsymbol{0}$$

حالات عدم التعيين : $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$

مثال : *Hxdkge Ufsdi Lxiu*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{e^x - 1}}{\mathbf{e^x + 1}} \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathbf{(x+1)e^x} \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathbf{(x-3)e^{x-1}} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{e^x - 1}}{\mathbf{2x}}$$

الحل :

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ت ع ح

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1-\frac{1}{e^x})}{e^x(1+\frac{1}{e^x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} = 1$

$\lim_{x\to-\infty} (x+1)e^x$ $(0.\infty)$ ت ع ح

$\lim_{x\to-\infty} [xe^x + e^x] = 0$

$\lim_{x\to-\infty}(x-3)e^{x-1}$ $(0.\infty)$ ح ع ت

$$\lim_{x\to-\infty}[(x-1-2)e^{x-1}] = \lim_{x\to-\infty}[(x-1)e^{x-1}-2e^{x-1}] = 0$$

$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ ح ع ت

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = \frac{1}{2}$$

قواعد الحساب : من اجل كل عددين حقيقيين x و y , من اجل كل عدد صحيح نسبي n فانه لدينا :

1) $e^0 = 1$
2) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
3) $e^{x+y} = e^x \times e^y$
4) $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
5) $(e^x)^n = e^{xn}$ $n \in Z$

الدالة المشتقة للدالة الاسية : الدالة الاسية قابلة للاشتقاق على R و دالتها المشتقة :

$$(e^x)' = e^x$$

بصفة عامة :

$$(e^{f(x)})' = f'(x)e^{f(x)}$$

مثال : اوجد مشتق الدالة التالية

$$f(x) = e^{x^2+2x+3}$$

$$f'(x) = (x^2+2x+3)'e^{x^2+2x+3} = (2x+2)e^{x^2+2x+3}$$

حل المعادلات و المتراجحات الاسية :

مثال 1 : حل في R المعادلات التالية

$e^{x^2+3} = e$ $e^{x^2-x+2} = \frac{1}{e^{-2}}$ $\frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} = e$

$e^x - \frac{3}{e^x} - 2 = 0$ $(2e^x+1)(e^x-e) = 0$

الحل :

$\mathrm{e}^{x^2+3} = e$

حتى يكون للمعادلة معنى فان : $Df = R$

$$e^{x^2+3} = e \quad \Rightarrow x^2 + 3 = 1 \ \Rightarrow x^2 = -2$$ غير ممكن

$$\forall\, x \in R \ \ x^2 \geq 0$$

$$S = \emptyset$$

$e^{x^2-x+2} = \frac{1}{\mathrm{e}^{-2}}$ $\mathrm{Df} = \mathrm{R}$

$$e^{x^2-x+2} = \mathrm{e}^2 \ \Rightarrow x^2 - x + 2 = 2$$

$$\Rightarrow \ x^2 - x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-1) = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \nu \\ x = 1 \end{cases}$$

$$S = \{0,1\}$$

$\frac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^{x-3}} = \mathrm{e}$ $\mathrm{Df} = \mathrm{R}$

$$e^{2x+3} \times e^{-(x-3)} = e \quad \Rightarrow e^{x+4} = e \quad \Rightarrow x + 4 = 1 \Rightarrow x = -3 \ \in R$$

$$S = \{-3\}$$

$e^x - \frac{3}{e^x} - 2 = 0$ $Df = R$

$\frac{e^{2x}-3+2e^x}{e^x} = 0 \quad \Rightarrow \frac{e^{2x}-2e^x-3}{e^x} = 0$

$\forall x \in R \quad e^x > 0$

$$e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$$ و منه :

نقوم بتغيير المتغير نضع : $y = e^x \quad > 0$

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(-3) = 16 > 0$$

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{2-4}{2} \\ y_2 = \dfrac{2+4}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -1 < 0 \quad \text{مرفوض} \\ y_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow y_2 = e^x = 3 \Rightarrow x = Ln3 \in Df$$

$$S = \{Ln3\}$$

$(2e^x + 1)(e^x - e) = 0 \qquad Df = R$

$$(2e^x + 1)(e^x - e) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2e^x + 1 = 0 \\ \nu \\ e^x - e = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in R \quad 2e^x + 1 > 0 \\ e^x = e \quad \Rightarrow x = 1 \quad \in R \end{cases} \Rightarrow S = \{1\}$$

مثال 2 : حل في R المتراجحات التالية

$$e^{1-x} \leq e^{3x} \qquad e^{2x} - 2e^x \geq 0 \qquad 3e^{2x} + e^x - 4 < 0 \qquad Ln(e^x - \frac{2}{e^x}) < 0$$

الحل :

$e^{1-x} \leq e^{3x} \qquad Df = R$

$1 - x \leq 3x \quad \Rightarrow 4x \geq 1 \quad \Rightarrow x \geq \frac{1}{4}$

$$S = [\frac{1}{4} \quad +\infty[$$

$e^{2x} - 2e^x \geq 0 \qquad Df = R$

$$e^x(e^x - 2) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad e^x - 2 \geq 0 \qquad e^x > 0 \text{ : لان}$$

$$\Rightarrow e^x \geq 2 \quad \Rightarrow \quad x \geq Ln2$$

$$S = [Ln2 \quad +\infty[$$

$3e^{2x} + e^x - 4 < 0 \qquad Df = R$

$$y = e^x > 0$$

$$3y^2 + y - 4 < 0$$

$3y^2 + y - 4 = 0$ نحل المعادلة

$$\Delta = 1 - 4(3)(-4) = 49 > 0$$

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{-1-7}{6} \\ y_2 = \dfrac{-1+7}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{-8}{6} < 0 \quad \text{مرفوض} \\ y_2 = 1 \Rightarrow y = e^x = 1 \Rightarrow x = Ln1 = 0 \end{cases}$$

-∞	0	+∞
-	+	

$$S =]-\infty \quad 0[$$

$Ln\left(e^x - \frac{2}{e^x}\right) < 0$

$$Df = \{x \in R \ e^x - \frac{2}{e^x} > 0\}$$

$$e^x - \frac{2}{e^x} > 0 \Rightarrow \frac{e^{2x} - 2}{e^x} > 0$$

$\Rightarrow e^{2x} - 2 > 0$ لان : $e^x > 0$

$\Rightarrow e^{2x} > 2 \Rightarrow 2x > Ln2 \Rightarrow x > \frac{Ln2}{2}$

$$Df =]\frac{Ln\,2}{2} \quad +\infty[$$

نحل المتراجحة :

$$Ln\left(e^x - \frac{2}{e^x}\right) < 0 \qquad Ln1 = 0$$

$$Ln\left(e^x - \frac{2}{e^x}\right) < Ln1 \Rightarrow e^x - \frac{2}{e^x} < 1$$

$\Rightarrow e^x - \frac{2}{e^x} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{e^{2x} - e^x - 2}{e^x} < 0$

$\Rightarrow e^{2x} - e^x - 2 < 0$ لان : $e^x > 0$

نحل المعادلة : $e^{2x} - e^x - 2 = 0$

$$y = e^x > 0$$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(-2) = 9 > 0$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1-3}{2} \\ y_2 = \frac{1+3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -1 < 0 \quad \text{مرفوض} \\ y_2 = 2 \Rightarrow y = e^x = 2 \Rightarrow x = Ln2 \end{cases}$$

-∞	$Ln2$	+∞
-	+	

$e^{2x} - e^x - 2 < 0 \Rightarrow x \in]-\infty \quad Ln2[$

$$S =]\frac{Ln2}{2} \quad +\infty[\cap]-\infty \ Ln2[$$

$$S =]\frac{Ln2}{2} \quad Ln2\,[$$

تمارين مقترحة للفصل الثالث

التمرين الأول : حدد مجموعة تعريف الدوال التالية :

$Ln(2x)$ $\quad \frac{1}{x} + Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ $\quad \sqrt{\frac{x}{Lnx-1}}$ $\quad Ln\,(x^2+1)$

$Ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|$ $\quad Ln(Lnx)$

التمرين الثاني : حل في R المعادلات التالية :

$xLnx = 0$ $\quad 2Ln(x-3) = Ln4$ $\quad Ln^2(4x) + Ln(4x) - 2 = 0$

التمرين الثالث : حل في R المتراجحات التالية :

$Ln(x^2-4) < 0$ $\quad Ln(x+1) - Ln(2x-3) \geq 0$ $\quad Ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \geq Lnx$

التمرين الرابع : حدد مجموعة تعريف الدوال الاسية التالية :

$\frac{e^x}{x}$ $\quad (x-1)e^{\frac{x}{x-1}}$ $\quad \sqrt{e^{-2x}-e}$ $\quad \frac{e^{2x}+e^x-1}{e^{2x}-3e^x+2}$

التمرين الخامس : حل في R المعادلات التالية :

$e^{2x+3} = 1$ $\quad 6e^{2x} + e^x - 1 = 0$ $\quad e^{x+3} = e^{\frac{4}{x}}$ $\quad \frac{e^{-x}-3}{e^{-x}+5} = \frac{1}{2}$

التمرين السادس : حل في R المتراجحات التالية :

$e^{x+1} \leq e^{2x}$ $\quad e^{-3-x} \times e^{1+2x} > \frac{1}{e^x}$ $\quad (2x-1)e^{2x-3} > 0$ $\quad \frac{e^x-1}{e^x-2} > 0$

الفصل الرابع : المشتقات

تعريف و العمليات على الاشتقاق

تعريف : لتكن f دالة معرفة ومستمرة عند النقطة x_0 نقول عن الدالة f أنها قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 اذا كانت :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ موجودة و منتهية

تسمى هذه النهاية بالعدد المشتق بمعنى :

$$\lim_{n\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

مثال : لتكن الدالة f حيث :

$$f(x)=\sqrt{x^2-2}$$

-ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند النقطة $x_0 = 2$

الحل :

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2-2}-\sqrt{2}}{x-2}$$ ح ع ت $\frac{0}{0}$

لإزالتها نضرب ونقسم في مرافق البسط

$$\lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{2})(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{2})}{(x-2)(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{2})} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{2})} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{2})}$$
$$= \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \in R$$

ومنه : f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0 = 2$

قابلية اشتقاق دالة عند النقطة x_0 على اليمين وعلى اليسار :

-نقول أن f دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 على اليمين اذا وفقط اذا كان :

$$\lim_{\substack{>\\ x\to x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = B$$ نهاية موجودة و محدودة $B \in R$

-نقول أن f دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 على اليسار اذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{\substack{<\\ x\to x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = B'$$ نهاية موجودة و محدودة $B' \in R$

-نقول أن f دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 اذا وفقط اذا كان : $B = B'$

بمعنى إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 على اليمين وعلى اليسار اي :

$$\lim_{\substack{>\\ x\to x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{<\\ x\to x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

ملاحظة : تكون الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 إذا كانت النسبة لا تقبل نهاية عند النقطة x_0 بمعنى :

$$\lim_{\substack{>\\ x\to x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq \lim_{\substack{<\\ x\to x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

أو : إذا كانت نهاية النسبة عند النقطة x_0 هي ($\pm\infty$) موجودة لكنها غير محدودة

مثال : لتكن الدالة f حيث :

$$f(x) = |x-2|$$

-ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند النقطة $x_0 = 2$

الحل :

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x \geq 0 \\ -x+2 & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 2}} \left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right) = \lim_{\substack{>\\ x\to 2}} \left(\frac{x-2}{x-2}\right) = +1$$

$$\lim_{\substack{<\\ x\to 2}} \left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right) = \lim_{\substack{<\\ x\to 2}} \left(\frac{-x+2}{x-2}\right) = \lim_{\substack{<\\ x\to 2}} \left(\frac{-(x-2)}{x-2}\right) = -1$$

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 2}} \left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right) \neq \lim_{\substack{<\\ x\to 2}} \left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)$$

$\lim_{x\to 2} \left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)$ بمعنى : غير موجودة

ومنه : الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0 = 2$

مثال 2 : لتكن الدالة f حيث :

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & si \quad x \in [0 \quad +\infty[\\ x & si \quad x \in]-\infty \quad 0[\end{cases}$$

-ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند النقطة $x_0 = 0$

الحل:

$\begin{pmatrix} x & \to & \sin x \\ x & & \to x \end{pmatrix}$ الدالتين قابلتين للاشتقاق على R

عند النقطة $x_0 = 0$ يوجد انقطاع

لندرس قابلية اشتقاق الدالة f عند النقطة $x_0 = 0$

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 0}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right) = \lim_{\substack{>\\ x\to 0}} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{\substack{<\\ x\to 0}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right) = \lim_{\substack{<\\ x\to 0}} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$$

إذن : الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0 = 0$

العمليات الجبرية على الدوال القابلة للاشتقاق :

ليكن I مجالا و f , g دالتين معرفتين من المجال I في R قابلتين للاشتقاق عند النقطة x من المجال I فان :

1) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
2) $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$
3) $(f(x) \times g(x))' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$
4) $(\lambda f(x))' = \lambda f'(x)$
5) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\times g(x) - f(x)\times g'(x)}{(g(x))^2}$ $\qquad g(x) \neq 0$

قوانين الاشتقاق :

1 - دالة كثير حدود $(x^n)' = x^{n-1}$

2-إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال]a b[فان الدالة المركبة

$x \to (f(x))^n$ $\quad n \in N^*$ قابلة للاشتقاق على المجال]a b[ولدينا :

$$((f(x))^n)' = (f^n(x))' = n\ f'(x)\ f^{n-1}(x)$$

3 - إذا كانت f قابلة للاشتقاق على المجال D فان الدالة $x \to \sqrt{f(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال D ودالتها المشتقة :

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

-4 $\quad (\sin f(x))' = f'(x)\ \cos f(x)$

-5 $\quad (\cos f(x))' = -f'(x)\ \sin f(x)$

مثال : اوجد مشتق الدوال التالية :

$$x^5 - 2x^2 + 1 \qquad (2x^2 + 4x) + (5x + 2) \qquad \frac{x+2}{3x^2+1}$$

$$(x^5 + 2x)(3\sqrt{x}) \qquad \sqrt{2x+6} \qquad (2x^2 + 5x)^3$$

$$e^{\cos\sqrt{x}} \qquad \cos(2x+5) \qquad \sin\left(\frac{x}{3} - 1\right)$$

الحل : 3

$$(x^5 + 2x^2 + 1)' = 5x^4 + 4x$$

$$\left((2x^2 + 4x) + (5x + 2)\right)' = (2x^2 + 4x)' + (5x + 2)' = 4x + 9$$

$$\left(\frac{x+2}{3x^2+1}\right)' = \frac{(x+2)'(3x^2+1) - (x+2)(3x^2+1)'}{(3x^2+1)^2}$$

$$\left(\frac{x+2}{3x^2+1}\right)' = \frac{(3x^2+1) - 6x(x+2)}{(3x^2+1)^2} = \frac{-3x^2 - 12x + 1}{(3x^2+1)^2}$$

$$((x^5 + 2x)(3\sqrt{x}))' = (x^5 + 2x)'(3\sqrt{x}) + (x^5 + 2x)(3\sqrt{x})'$$

$$((x^5 + 2x)(3\sqrt{x}))' = (5x^4 + 2)(3\sqrt{x}) + (x^5 + 2x)\left(\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$(\sqrt{2x+6})' = \frac{(2x+6)'}{2\sqrt{2x+6}} = \frac{2}{2\sqrt{2x+6}} = \frac{1}{\sqrt{2x+6}}$$

$$((2x^2 + 5x)^3)' = 3(2x^2 + 5x)'(2x^2 + 5x)^2$$

$$((2x^2 + 5x)^3)' = 3(4x + 5)(2x^2 + 5x)^2$$

$$(e^{\cos\sqrt{x}})' = (\cos\sqrt{x})' e^{\cos\sqrt{x}} = \frac{-1}{2\sqrt{x}} \quad \sin\sqrt{x} \quad e^{\cos\sqrt{x}}$$

$$(\cos(2x+5))' = -(2x+5)' \sin(2x+5) = -2\sin(2x+5)$$

$$\left(\sin\left(\frac{x}{3} - 1\right)\right)' = \left(\frac{x}{3} - 1\right)' \cos\left(\frac{x}{3} - 1\right)$$

$$\left(\sin\left(\frac{x}{3} - 1\right)\right)' = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3} - 1\right)$$

طريقة لوبيتال : (L' Hôpital)

تطبق هذه الطريقة لإزالة عدم التعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$ او $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

لتكن $g(x)$ و$f(x)$ دالتين معرفتين و قابلتين للاشتقاق على المجال D , ونهاية $f(x)$ تساوي نهاية $g(x)$ وكل منهما يساوي الصفر او المالانهاية عندها يمكننا استعمال طريقة لوبيتال لإزالة عدم التعيين وذلك باشتقاق كل من البسط والمقام

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \nu \quad \frac{\infty}{\infty}$$

فان :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال : احسب النهايات التالية باستعمال طريقة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{3x}\right) \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x^2+x}\right) \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} \qquad \lim_{x\to 0} x\,Lnx$$

الحل :

$* \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{3x}\right)$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ ح ع ت

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{3x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{3} = \frac{5}{3}$$

$* \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x^2+x}\right)$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ ح ع ت

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x^2+x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2x+1} = 1$$

$* \lim_{x\to 0} x\,Lnx$ $(0.\infty)$ ح ع ت

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{Ln\,x}{\frac{1}{x}}\right)$ $\frac{\infty}{\infty}$ ح ع ت

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-x} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

نتيجة : إذا كان $f'(x) = g'(x) = 0$ يحققان شروط طريقة لوبيتال في جوار النقطة x_0

فان :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'}{g'} = \lim_{x\to x_0}\frac{f''}{g''}$$

مثال : احسب النهاية التالية :

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\sin x}$

الحل :

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x\sin x}\right)$ حالة عدم التعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$

لإزالتها نطبق طريقة لوبيتال

$\lim_{x\to 0}\left[\frac{(\sin x - x)'}{(x\sin x)'}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}\right]$ حالة عدم التعيين اخرى من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$

لإزالتها نطبق للمرة الثانية طريقة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{(\cos x - 1)'}{(\sin x + x\cos x)'}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{-\sin x}{\cos x + \cos x + x(-\sin x)}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x}\right] = 0$$

نتيجة : طريقة لوبيتال صحيحة في حالة التي تكون فيها $x_0 = \infty$

مثال : $*\ \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x}$ $(0.\infty)$ ح ع ت

$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}$ $\frac{\infty}{\infty}$ ح ع ت

لإزالتها نطبق طريقة لوبيتال

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x}$ $\frac{\infty}{\infty}$ ح ع ت

لإزالة حالة عدم التعيين نطبق للمرة الثانية طريقة لوبيتال

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

تطبيق الاشتقاق على مفهوم القيمة الحدية العظمى و الصغرى :

1 - إيجاد القيم الحدية العظمى و الصغرى باستخدام المشتقة الأولى :

تعريف : لتكن الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال I حيث $I \subset R$, f' دالتها المشتقة

-إذا انعدمت الدالة المشتقة وغيرت من إشارتها نقول انه توجد قيمة حدية عظمى أو صغرى

-تكون f(a) قيمة حدية عظمى للدالة f على المجال I عند النقطة a إذا كان :

$$\forall x \in I \quad f(a) \geq f(x)$$

-تكون f(a) قيمة حدية صغرى للدالة f على المجال I عند النقطة a إذا كان :

$$\forall x \in I \quad f(a) \leq f(x)$$

مثال 1 : لتكن الدالة f حيث :

$$f(x) = x^2 + 4x - 1 \qquad Df = R$$

-دراسة إشارة الدالة المشتقة :

$$f'(x) = 2x + 4$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$$

x	-∞	-2	+∞
$f'(x)$	-	+	
$f(x)$	↘	F(-2)	↗

عند النقطة x=-2 توجد قيمة حدية صغرى

F(-2)=-5 هي قيمة حدية صغرى عند النقطة x=-2

مثال 2 : لتكن الدالة f حيث :

$$f(x) = x^3 \qquad Df = R$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

	-∞	0	+∞
$f'(x)$	+	+	
f		↗	

$f'(x)$ انعدمت عند النقطة x=0 لكنها لم تغير إشارتها

إذن : لا توجد قيم حدية لا صغرى ولا عظمى

مثال 3 : لتكن الدالة f معرفة على R حيث :

$$f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x + 3$$

$$f'(x) = -3x^2 + \frac{6}{2}x + 6 \qquad \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 3x + 6$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 3x + 6 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4(-3)(6) = 81 > 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-3-9}{-6} \\ x_2 = \frac{-3+9}{-6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

جدول الإشارة :

	∞-	1-	2	∞+
	-	+	-	
F	↘	$\frac{-1}{2}$ ↗	13 ↘	

$f(-1) = \frac{-1}{2}$ قيمة حدية صغرى عند النقطة x=-1

$f(2) = 13$ قيمة حدية عظمى عند النقطة x=2

2 - إيجاد القيم الحدية العظمى و الصغرى باستخدام المشتقة الثانية :

تعريف : يمكن استخدام المشتقة الثانية للدالة لمعرفة نوع القيم الحدية (عظمى او صغرى) بإتباع مايلي :

1) $f''(x) < 0 \Rightarrow$ تحدب قيمة حدية عظمى

2) $f''(x) > 0 \Rightarrow$ تقعر قيمة حدية صغرى

3) $f''(x) < 0 \Rightarrow$ هذه الطريقة لا تصلح نلجا الى اشارة المشتقة الاولى

مثال : باستخدام المشتقة الثانية إن أمكن تحديد القيم الحدية الصغرى و العظمى للدوال التالية :

$$\boldsymbol{f(x) = -3x^2 + 6x - 1} \qquad \boldsymbol{g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x}$$

$$\boldsymbol{s(x) = 4 - (x+1)^4} \qquad \boldsymbol{h(x) = x - \frac{4}{x^2}}$$

: y

$\boldsymbol{f(x) = -3x^2 + 6x - 1}$

$f'(x) = -6x + 6$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -6x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 2$$

x=1 *Hl TkÁiÓN*(+2) *Hlðx FzNJÝbF*

(*ÝlZ ÛãüÓHlz*) $f''(x) = -6 \Rightarrow f''(1) = -6 < 0$

x=1 *Hl TkÁiÓN dž‹l JNHlðx FzNLJ* (+2)

$\boldsymbol{g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x}$

$g'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$g'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$

$$\Delta = 36 - 4(3)(-9) = 144 > 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{6-12}{6} \\ x_2 = \dfrac{6+12}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-6}{6} = -1 \Rightarrow f(-1) = 5 \\ x_2 = \dfrac{18}{6} = 3 \Rightarrow f(3) = -27 \end{cases}$$

g تقبل قيمتين حديتين *(5)* و *(-27)*

$$g'(x) = 6x - 6$$

$$g''(-1) = -6 - 6 = -12 < 0$$

$$g''(3) = 6(3) - 6 = 12 > 0$$

x=-1 *Hl TkÁiÓN*(5) *dž‹l JNHlðx FzNJÝbg*

x=3 *Hl TkÁiÓN* (-27) *DžÏH Hlðx FzNJÝbg*

$\boldsymbol{s(x) = 4 - (x+1)^4}$

$\boldsymbol{s'(x) = -4(x+1)^3}$

$\boldsymbol{s'(x) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow f(-1) = 4}$

x=-1 *Hl TkÁiÓN*(4) *Hlðx FzNJÝbS

$\boldsymbol{S''(x) = -12(x+1)^2}$

$\boldsymbol{S''(-1) = 0}$

لا يمكن تحديد إشارة $S''(-1)$ هذه الطريقة ليست صالحة نلجا الى اشارة المشتقة الاولى

	∞-	1 -∞+
	+	-
S(x)	*4* ↗	↘

$S(-1)=4$ هي قيمة حدية عظمى عند النقطة $x=-1$

$$\boldsymbol{h(x) = \quad x - \frac{4}{x^2}}$$

$$\mathrm{h}'(x) = (x - 4x^{-2})'$$

$$\mathrm{h}'(x) = 1 + 8x^{-3} \ = 1 + \frac{8}{x^3}$$

$$\mathrm{h}'(x) = 0 \quad \Rightarrow 1 + \frac{8}{x^3} = 0 \quad \Rightarrow \frac{8}{x^3} = -1$$

$$\Rightarrow \ -x^3 = 8 \ \Rightarrow x = 2 \ \Rightarrow f(-2) = -3$$

(-3) هي قيمة حدية ,لتحديد هل هي عظمى أو صغرى نحسب المشتقة الثانية

$$\mathrm{h}'(x) = (1 + 8x^{-3})' = -24\,\mathrm{x}^{-4} = \frac{-24}{\mathrm{x}^4}$$

$$h''(-2) = \frac{-24}{(-2)^4} = \frac{-24}{16} < 0$$

$h\,(-2)=-3$ قيمة حدية عظمى عند النقطة $x=-2$

h تقبل (-3) كقيمة حدية عظمى عند النقطة $x=-2$

المشتقات المتعاقبة :

تعريف : f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال I من R و f' دالتها المشتقة

إذا كانت f' هي الاخرى قابلة للاشتقاق على المجال I فإنها تقبل دالة مشتقة لها $(\mathrm{f}')'$ ونرمز لها بالرمز (f'') و تسمى الدالة المشتقة الثانية

إذا كانت (f'') هي الاخرى قابلة للاشتقاق على المجال I فإنها تقبل دالة مشتقة لها $(f'')'$ ونرمز لها بالرمز $f^{(3)}$ وتسمى الدالة المشتقة الثالثة للدالة f

وهكذا بنفس الطريقة يمكن تعيين المشتقات الأخرى للدالة f حيث تسمى الدوال

f' , f'' , $f^{(3)}$ ... $f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة f

$$(f^{(n-1)})' = f^{(n)}$$

ملاحظة : $\mathrm{f}^{\mathrm{n}} \neq \mathrm{f}^{(\mathrm{n})}$ حيث : f^{n} القوى النونية للدالة f

$\mathrm{f}^{(\mathrm{n})}$ هي الدالة المشتقة النونية للدالة f

ملاحظة : f دالة قابلة للاشتقاق n مرة على المجال I فان :

$$\mathrm{f}^{(0)} = f$$

$$\forall\, n \in N \quad f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

مثال 1 : لتكن الدالة f المعرفة على R حيث :

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 10x$$

-احسب المشتقات المتتابعة للدالة f

الحل :

f دالة كثير حدود قابلة للاشتقاق على R

$$f'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 10x + 10$$

f' قابلة للاشتقاق على R ودالتها المشتقة هي :

$$f''(x) = 12x^2 + 18x - 10$$

f'' قابلة للاشتقاق على R ودالتها المشتقة هي :

$$f^{(3)}(x) = 24x + 18$$

$f^{(3)}$ قابلة للاشتقاق على R ودالتها المشتقة هي :

$$f^{(4)}(x) = 24$$

$f^{(4)}$ قابلة للاشتقاق ودالتها المشتقة هي :

$$f^{(5)}(x) = 0$$

ومنه :

$$f^{(n)}(x) = 0 \qquad \forall n \geq 5$$

مثال 2 : لتكن الدالة f المعرفة على R كمايلي :

$$f(x) = \cos x$$

-عين الدوال المشتقة المتتابعة $f^{(5)}, f^{(4)}, f^{(3)}, f'', f'$

-استنتج حسب قيم العدد الطبيعي n عبارة $f^{(n)}(x)$ المشتقة ذات الرتبة n

الحل : f معرفة وقابلة للاشتقاق على R

$$\underline{f'(x) = -\sin x}$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$\underline{f^{(3)}(x) = \sin x}$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x$$

$$\underline{f^{(5)}(x) = -\sin x}$$

نميز حالتين :

الحالة الأولى : لما n فردي (الرتبة فردية) $n=2k+1$

$$\boldsymbol{f^{(n)}(x) = f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1}\sin x}$$

$$\boldsymbol{k = 0 \ \Rightarrow f^{(1)}(x) = (-1)^{1+0} sin\, x \ = -sin\, x}$$

$$\boldsymbol{K=2 \ \Rightarrow f^{(5)}(x) = (-1)^{2+1} sin\, x \ = -sin\, x}$$

الحالة الثانية : لما n زوجي (الرتبة زوجية) $n=2k$

$k = 0 \Rightarrow f^{(0)}$ غير موجود

$$\mathrm{f}^{(\mathrm{n})}(x) = f^{2k}(x) = (-1)^k \cos x \qquad k \neq 0$$

$k = 1 \Rightarrow f^{(2)}(x) = -\cos x$

$$k = 2 \Rightarrow f^{(4)}(x) = (-1)^2 \cos x = \cos x$$

: *KNJ* R* *dzNH2-hz* f *HZGZ5UZ:* ***3 YWH***

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$\mathrm{f}^{(5)}, \mathrm{f}^{(4)}, \mathrm{f}^{(3)}, \mathrm{f}'', \mathrm{f}'$ *Hh"UkszaFTkc'zaYul GaQy!u-*

n *F"xzaz io FTkc'za* $\mathrm{f}^{(\mathrm{n})}(x)$ *"UN* n *LjhNJZaOZaNJ 1x YKf5u-*

$\mathrm{f}^{(\mathrm{n})}(x)$ *HYKf5zaF"kI lIyu-Ef5||-"-*

الحل :

$f(x) = x^{-1}$

$f'(x) = -1x^{-2} = -1!\, x^{-2}$

$f''(x) = (-1)(-2)x^{-3} = 1 \times 2x^{-3} = 2!\, x^{-3}$

$f^{(3)}(x) = 1 \times 2 \times (-3) \times x^{-4} = (-1) \times 1 \times 2 \times 3 \times x^{-4} = -3!\, x^{-4}$

$f^{(4)}(x) = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times x^{-5} = 4!\, x^{-5}$

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \ (-1)^n \ n!\ x^{-n-1} = \ \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}}$$

$f^{(n)}(x)$ *"UNF"kI dzNlIyu-Ef5||-"-5-*

n = 1 *Ljŋ̈ÑJŽäəΘŽäyŷŭ5Ɛ FЧNЖH ˇ˘ Ůŋ̈Žä2ĭ ĺ TЧЖ**

$$f'(x) = \frac{(-1)^1 1!}{x^2} = -x^{-2}$$

n *Ljŋ̈ÑJŽäəΘŽäyŷŭ5Ɛ FЧNЖH ˇ˘ Ůŋ̈Žä2ĭ ϱ –æ**

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

n+1 *Ljŋ̈ÑJŽäəΘŽäyŷŭ5Ɛ FЧNЖH ˇ˘ Ůŋ̈Žä2ĭ 5‖ – ˚sZ**

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left(\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\right)' = \frac{-(-1)^n n!\,(n+1)x^n}{x^{n+1}\ x^{n+1}}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!\ x^n}{x^n\ \ x\ \ x^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}$$

FЧNЖH FŸKЖ5ƵŽäˇ˘ Ůŋ̈Žä\ɛ!

مثال 4 : *LƤ?FƵ–ŋƐ* f *FŽäΘŽä5UƵ¿* : *KŇJ* $R - \{2\}$

$$f(x) = \frac{1}{2-x} = (2-x)^{-1}$$

$f^{(4)}, f^{(3)}, f'', f'$ *Ĥŋ̈ ˚ÜЖƵŽäFЖK¿ƵŽäYŭ ΘŽäΘŷ!ŭ+*

n *F˚ɔ¿ŽäɛŭΘFЖK¿ƵŽä* $f^{(n)}(x)$ ˇ˘ *ŨŇ* n *LjŋÑJŽäəΘŽäC¥J Ьχ YŸKЖ5ŭ+*

$f^{(n)}(x)$ *FŸKЖ5ƵŽäˇ˘ Ůŋ̈ŽäFЧЖ ŀŀŷŭ+ЖŨ5‖ – ˚-*

الحل :

$$f'(x) = (-1)(-1)(2-x)^{-1} = (2-x)^{-2}$$

$$f''(x) = (-2)(-1)(2-x)^{-3} = 2 \times 1 \times (2-x)^{-3} = 2!\,(2-x)^{-3}$$

$$f^{(3)}(x) = 2 \times 1 \times (-3) \times (-1)(2-x)^{-4} = 1 \times 2 \times 3(2-x)^{-4} = 3!\,(2-x)^{-4}$$

$$f^{(4)}(x) = 1 \times 2 \times 3 \times (-4)(-1)(2-x)^{-5} = 1 \times 2 \times 3 \times 4(2-x)^{-5} = 4!\,(2-x)^{-5}$$

$$f^{(n)}(x) = n!\,(2-x)^{-n-1} \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(2-x)^{n+1}}$$

$f^{(n)}(x)$ ̆ ŰNF¶Ł dž̄Nlł¶ýŭ+Ł₡Ű5‖–̆5-

n = 1 LjŋŇJŽŭəŋŽŭýŷŭ5Ɛ F¶ŁNŁH ̆ ŰŋŽŭ2ĭ[T¶Ł₡*

$$f'(x) = \frac{1!}{(2-x)^2} = (2-x)^{-2}$$ صحيحة

*نفرض أن العبارة صحيحة من اجل العدد الطبيعي n

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(2-x)^{n+1}}$$

*ولنبرهن أن العبارة صحيحة من اجل العدد الطبيعي n+1

$$f^{(n+1)} = \frac{(n+1)!}{(2-x)^{n+2}}$$

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})' = \left(\frac{n!}{(2-x)^{n+1}}\right)'$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{-n!\,(n+1)(-1)(2-x)^n}{((2-x)^{n+1})^2} = \frac{n!\,(n+1)(2-x)^n}{((2-x)^{n+1})^2}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!\,(2-x)^n}{(2-x)^{n+1}\ (2-x)^{n+1}} = \frac{(n+1)!\,(2-x)^n}{(2-x)^n(2-x)(2-x)^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{(2-x)^{n+2}}$$

ومنه العلاقة المستنتجة صحيحة

مثال : لتكن الدالة f حيث : $f(x) = xe^x$

-احسب المشتقات المتتابعة للدالة f

$$f^{(4)},\quad f^{(3)},\quad f'',\quad f'$$

-استنتج حسب قيم العدد الطبيعي n عبارة $f^{(n)}(x)$ المشتقة ذات الرتبة n

-برهن بالتراجع صحة العبارة المستنتجة

الحل :

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

$$f''(x) = e^x(1+x) + e^x = e^x + xe^x + e^x = (2+x)e^x$$

$$f^{(3)}(x) = e^x + (2+x)e^x = e^x + 2e^x + xe^x = (3+x)e^x$$

$$f^{(4)}(x) = e^x + (3+x)e^x = (4+x)e^x$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (n+x)e^x \qquad \forall\, n \geq 1$$

-نتحقق أن العلاقة صحيحة من اجل العدد الطبيعي *n=1*

$\mathbf{f^{(1)}(x) = (1 + x)e^x}$ صحيحة

-نفرض أن العلاقة صحيحة من اجل العدد الطبيعي n

$$\boldsymbol{f^{(n)}(x) = (n + x)e^x}$$

-ولنبرهن أن العلاقة صحيحة من اجل العدد الطبيعي)n+1( )

$$\mathbf{f^{(n+1)}(x) = (n + 1 + x)e^x}$$

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = [(n + x)e^x]'$$

$$f^{(n+1)}(x) = e^x + (n + x)e^x = (n + 1 + x)e^x$$

ومنه العلاقة صحيحة

$$f^{(n)}(x) = (n + x)e^x$$

تمارين مقترحة للفصل الرابع

التمرين الأول : احسب مشتق الدوال التالية :

$(\mathrm{x}^2+2)Ln2x$ $\quad\sqrt{x^2+2x-1}$ $\quad e^{\frac{3}{x-1}}$ $\quad(2x^2+5x)^4$ $\quad 4cos(3x)-3sin(-x)$

التمرين الثاني : اوجد القيم الحدية) العظمى و الصغرى(إن أمكن للدوال التالية :

$x^4-2\mathrm{x}^2$ $\quad\mathrm{x}^2-4\mathrm{x}+3$ $\quad\mathrm{x}^3-3\mathrm{x}^2+1$ $\quad 2\mathrm{x}^3$

التمرين الثالث : لتكن الدالتين f و g حيث :

$$f(x)=sinx \qquad g(x)=\frac{1}{x-1}$$

-عين الدوال المشتقة المتتابعة من الرتبة 1 إلى الرتبة 5 للدالتين f و g

-استنتج حسب قيم العدد الطبيعي n عبارة $f^n(x)$ المشتقة ذات الرتبة n

التمرين الرابع : لتكن الدالتين f و g المعرفة كمايلي :

$$f(x)=e^{ax} \quad a\neq 0 \qquad g(x)=Lnx$$

-عين المشتقات المتتابعة من الرتبة 1 إلى الرتبة 5 للدالتين f و g

-استنتج حسب قيم n عبارة المشتقة $\mathrm{f}^n(x)$ و $\mathrm{g}^n(x)$ ثم برهن بالتراجع صحة الاستنتاج

الفصل الخامس : الدوال الأصلية وحساب التكامل

تعريف مفاهيم أساسية حول الدوال الأصلية :

تعريف الدوال الأصلية لدالة عددية : لتكن لدينا دالتين عدديتين f و g معرفتين على نفس المجال I من R وكانت g قابلة للاشتقاق على هذا المجال

نقول أن : g هي دالة أصلية للدالة f إذا كان :

$$\forall x \in I \quad f(x) = g'(x)$$

مثال : لتكن الدالتين f و g حيث :

$$f(x) = 3x^2 \qquad g(x) = x^3$$

-هل الدالة g دالة أصلية للدالة f

$$g'(x) = 3x^2 = f(x)$$

إذن g دالة أصلية للدالة f

-نفس السؤال بالنسبة للدالتين f و g حيث :

$$f(x) = -2\sin 2x \qquad g(x) = \cos 2x$$

$$g'(x) = -2\sin 2x = f(x)$$

إذن g دالة أصلية للدالة f

نظرية : إذا كانت g دالة أصلية للدالة f على المجال I فان الدالة f تقبل عددا غير منته من الدوال الأصلية تكون من الشكل : $g(x) + c$ حيث : c هي دالة ثابتة

مثال : إذا كانت $g(x) = \sin x$ هي دالة اصلية للدالة $f(x) = \cos x$ فان الدوال الاصلية للدالة f تكون من الشكل (sinx+c)

نرمز لمجموعة الدوال الأصلية للدالة f بالرمز $\int f(x)dx$

ونكتب : $\int f(x)dx = g(x) + c$

يسمى الرمز $(\int)$ تكامل غير محدود

C ثابت التكامل

ولدينا أيضا الرمز $\int_a^b f(x)\,dx$ يسمى التكامل المحدود

خصائص التكامل غير محدود : إذا كانت f و g دالتين معرفتين على المجال I من R وكان λ عدد حقيقي غير معدوم فان :

1) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
2) $\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$
3) $\int (\lambda f(x)) = \lambda \int f(x)\,dx$
4) $\int \lambda\,dx = \lambda x + c$

ملاحظة :

$$* \int -\mathrm{f(x)}\, dx = -\int f(x)\, dx$$

$$* \int (f(x) + \lambda)\, dx = \int f(x)\, dx + \int \lambda\, dx$$

طرق حساب التكاملات :

$$\mathbf{1)} \int \mathbf{x^n}\, \boldsymbol{dx} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n+1}} \quad \boldsymbol{x^{n+1}} + \boldsymbol{c} \qquad \boldsymbol{n \neq -1}$$

مثال : احسب التكاملات التالية :

$$\mathrm{I}_1 = \int (3\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x})\, dx = \int 3x^2\, \mathrm{dx} + \int 2\mathrm{x}\, \mathrm{dx}$$

$$\mathrm{I}_1 = 3\int x^2\, dx + 2\int x\, dx = 3\left(\frac{1}{3}x^3\right) + 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) + c = x^3 + x^2 + c$$

$$\mathrm{I}_2 = \int (5x^2 - 8x + 3)\, dx = \int 5x^2\, dx - \int 8x\, dx + \int 3\, dx$$

$$\mathrm{I}_2 = 5\int x^2\, dx - 8\int x\, dx + 3\int dx$$

$$\mathrm{I}_2 = 5\left(\frac{1}{3}x^3\right) - 8\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 3x = \frac{5}{3}x^3 - 4x^2 + 3x + c$$

$$\mathrm{I}_3 = \int x(x^2 - 1)\, dx = \int (x^3 - x)\, dx$$

$$\mathrm{I}_3 = \int x^3\, dx - \int x\, dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + c$$

ملاحظة :

$$\mathbf{si\ \ n = -1} \ \Rightarrow \int \mathbf{x^{-1}\, dx} = \int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\mathbf{dx} = \mathbf{Ln|x| + c}$$

$$\boldsymbol{si\ n = 0} \ \Rightarrow \int \boldsymbol{x^0\, dx} = \int \mathbf{1}\, \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{x + c}$$

2) $\int \frac{1}{x^n} dx = \int x^{-n}\, dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$

مثال : احسب التكاملين التاليين :

$I_1 = \int (3x^7 - \frac{7}{x^2} + \frac{2}{x})\ dx$

$I_1 = 3\int x^7\, dx - 7\int x^{-2}\, dx + 2\int \frac{1}{x} dx$

$I_1 = 3\left(\frac{1}{8}x^8\right) - 7\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + 2Ln|x| + c$

$I_1 = \frac{3}{8}x^8 + \frac{7}{x} + 2Ln\,|x| + c$

$$I_2 = \int \frac{1}{\sqrt[n]{x}} dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}} dx = \int x^{\frac{-1}{n}} dx \qquad n \neq 0$$

$$I_2 = \frac{1}{\frac{-1}{n}+1} x^{\frac{-1}{n}+1} + c \ = \frac{1}{\frac{n-1}{n}} x^{\frac{n-1}{n}} + c$$

$$I_2 = \frac{n}{n-1} \quad x^{\frac{n-1}{n}} + c$$

3) $\int f'(x)\ f^n(x)\, dx = \ \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} \ + c$

مثال : احسب التكاملات التالية :

$$I_1 = \int 10x\ (x^2+3)^{\frac{5}{2}}\ dx = \int 5(2x)(x^2+3)^{\frac{5}{2}} dx = 5\int f'(x) f^n(x) dx$$

$$I_1 = 5\left(\frac{(x^2+3)^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\right) + c \ = \frac{10}{7}\ (x^2+3)^{\frac{7}{2}} + c$$

$I_2 = \int (4x+6)\sqrt{2x+3}\ \ dx = \int (4x+6)(2x+3)^{\frac{1}{2}}\ dx$

$I_2 = \int 2(2x+3)(2x+3)^{\frac{1}{2}} dx \ = \int 2(2x+3)^{\frac{3}{2}}\ dx$

$I_2 = \ \int f'(x) f^n(x)\, dx \ = \frac{(2x+3)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c = \ \frac{(2x+3)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c$

$I_2 = \frac{2}{5}(2x+3)^{\frac{5}{2}} + c$

$$I_3 = \int (2x+3)^5\, dx = \frac{1}{2}\int 2(2x+3)^5\, dx = \frac{1}{2}\int f'(x) f^n(x)\, dx$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{(2x+3)^6}{6}\right) + c = \frac{1}{12}(2x+3)^6 + c$$

$$I_4 = \int \sqrt[3]{(4x+9)^7}\, dx = \int ((4x+9)^{\frac{7}{3}}\, dx = \frac{1}{4}\int 4(4x+9)^{\frac{7}{3}}\, dx$$

$$I_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{(4x+9)^{\frac{7}{3}+1}}{\frac{7}{3}+1}\right) + c = \frac{\frac{1}{4}(4x+9)^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}} + c = \frac{3}{40}(4x+9)^{\frac{10}{3}} + c$$

4) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = Ln\,|f(x)| + c$

مثال : احسب التكاملات التالية

$$I_1 = \int \frac{dx}{x+2} dx = Ln|x+2| + c$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{1-x} dx = -\int \frac{-1}{1-x}\, dx = -Ln|1-x| + c$$

$$I_3 = \int tg\ \frac{5x}{2} dx = \int \frac{sin\frac{5x}{2}}{cos\frac{5x}{2}}\, dx = \frac{-2}{5}\int \frac{-\frac{5}{2}sin\frac{5x}{2}}{cos\frac{5x}{2}}\, dx = -\frac{2}{5} Ln\left|cos\ \frac{5x}{2}\right| + c$$

$$I_4 = \int \frac{1}{x\, Ln\, x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{Ln\, x}\, dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = Ln|Lnx| + c$$

5) $f'(x)\ e^{f(x)}\, dx = e^{f(x)} + c$

مثال : احسب التكاملات التالية :

$$I_1 = \int x e^{x^5}\, dx = \frac{1}{2}\int 2x e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\, e^{x^2} + c$$

$$I_2 = \int \sin x\, e^{\cos x}\, dx = -\int -\sin x\ e^{cosx}\, dx = -e^{\cos x} + c$$

$$I_3 = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\, dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

$$I_4 = \int \frac{1}{e^{4x-3}}\, dx = \int e^{-4x+3}\, dx = -\frac{1}{4}\int -4\, e^{-4x+3}\, dx = -\frac{1}{4}\, e^{-4x+3} + c$$

6 -**التكامل بالتعويض (تغيير المتغير) :**

لتكن U دالة قابلة للاشتقاق على المجال]a b[ولتكن F الدالة الاصلية ل f على المجال

[U(a) U(b)]

$$\int \mathrm{U}'(x) f(U(x))\, dx$$

$F(U(x))$ هي الدالة الاصلية للدالة $\mathrm{U}'(x) f(U(x))$

هذا يعني ان :

$$I = \int \mathrm{U}'(x) f(U(x))\, dx \quad = \quad \mathrm{F(U(b))} \; - \; \mathrm{F(U(a))}$$

نضع : **t = U(x)**

$$\mathbf{dt} \; = \; \boldsymbol{U}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$$

مثال : احسب التكاملات التالية :

$$\mathrm{I}_1 = \int \frac{\mathrm{dx}}{2\mathrm{x}-1}$$

$$y = 2x - 1$$

$$dy = 2dx \quad \Rightarrow dx = \frac{dy}{2}$$

$$\mathrm{I}_1 = \int \frac{\frac{dy}{2}}{y} = \int \frac{dy}{2y} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\, Ln\,|y| + c = \frac{1}{2}\, Ln\,|2x-1| + c$$

$$\mathrm{I}_2 = \int \frac{dx}{(3x+2)^2}$$

$$y = 3x + 2$$

$$dy = 3dx \quad \Rightarrow dx = \frac{dy}{3}$$

$$\mathrm{I}_2 = \int \frac{\frac{dy}{3}}{y^2} \; = \frac{1}{3}\int y^{-2}\; dy = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{-1}\right) y^{-1} + c$$

$$\mathrm{I}_2 = -\frac{1}{3} y^{-1} + c \; = \frac{-1}{3(3x+2)} + c$$

$I_3 = \int \cos 2x \ dx$

$$y = 2x$$

$$dy = 2dx \quad \Rightarrow dx = \frac{dy}{2}$$

$I_3 = \int \cos y \ \frac{dy}{2} = \frac{1}{2} \int \cos y \ dy = \frac{1}{2} \sin y + c = \frac{1}{2} \sin 2x + c$

$I_4 = \int 3x^2 \ e^{x^3} \ dx$

$$y = x^3$$

$$dy = 3x^2 \ dx \quad \Rightarrow dx = \frac{dy}{3x^2}$$

$I_4 = \int 3x^2 \ e^y \ \frac{dy}{3x^2} = \int e^y \ dy = e^y + c = e^{x^3} + c$

$I_5 = \int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}} \ dx$

$$y = 2x^2 + 3$$

$$dy = 4x \ dx \ \Rightarrow \ dx = \frac{dy}{4x}$$

$I_5 = \int \frac{x}{\sqrt{y}} \ \frac{dy}{4x} = \frac{1}{4} \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \sqrt{y} + c = \frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + 3} + c$

التكامل المحدود وخصائصه :

تعريف : لتكن g دالة أصلية للدالة f على المجال $[a \ \ b]$ حيث :

$$\int_a^b \mathrm{f(x)} \, dx = [g(x)]_a^b = g(b) - g(a)$$

يسمى بتكامل الدالة f في المجال $[a \ \ b]$

مثال : احسب التكاملات التالية :

$I_1 = \int_1^3 (2x + 5) \, dx = 2 \int_1^3 x \, dx + \int_1^3 5 \, dx$

$I_1 = \left[\frac{2x^2}{2} + 5x\right]_1^3 = [x^2 + 5x]_1^3$

$I_1 = (9 + 15) - (1 + 5) = 24 - 6 = 18$

$$I_2 = \int_0^2 (x^2 + 3x + 1)\,dx = \int_0^2 x^2\,dx + 3\int_0^2 x\,dx + \int_0^2 dx$$

$$I_2 = \left[\frac{1}{3}x^3 + 3\left(\frac{x^2}{2}\right) + x\right]_0^2 = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x\right]_0^2$$

$$I_2 = \left[\frac{(2)^3}{3} + \frac{3(2)^2}{2} + 2\right] - 0 = \frac{32}{3}$$

$$I_3 = \int_0^1 (x^4 + \frac{2}{3}x^2)\,dx = \int_0^1 x^4 + \frac{2}{3}\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x^3\right)\right]_0^1$$

$$I_3 = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2}{9}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{2}{9} - 0 = \frac{19}{45}$$

$$I_4 = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{Ln\,x}{x}dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x}Ln\,x\,dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e} f'\ f = \left[\frac{1}{2}(Lnx)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{e}$$

$$I_4 = \frac{1}{2}(Lne)^2 - \frac{1}{2}\left(Ln\frac{1}{e}\right)^2 = \frac{1}{2}(Lne)^2 - \frac{1}{2}(Ln1 - Lne) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

ملاحظة :

1 - التكامل المحدود هو عبارة عن عدد حقيقي موجب تماما أما التكامل غير محدود هو عبارة عن دالة بدلالة المتغير x

2 - $\int_a^b f(x)$ له معنى الا اذا كانت الدالة f معرفة ومستمرة على المجال $[a\ \ b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = [g(x)]_a^b = g(b) - g(a) \qquad -3$$

خواص التكامل المحدود : إذا كانت الدالتين f وg معرفة و مستمرة على المجال $[a \quad b]$ وكان c عدد حقيقي فان :

1) $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

2) $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

3) $\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\;dx$

4) $\int_a^b f'(x)\,dx = [f(x)]_a^b$

5) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,d \qquad a \le c \le b$ (علاقة شال)

6) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

7) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

مثال 1 : لتكن الدالة f معرفة كمايلي :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad 0 \le x \le 2 \\ x^2 + 1 & si \quad 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

-احسب التكامل $\int_0^3 f(x)$

الحل :

$$\int_0^3 \mathrm{f(x)}\,dx = \int_0^2 2x\,\mathrm{dx} + \int_2^3 (\mathrm{x}^2 + 1)\,\mathrm{dx}$$

$$\int_0^3 \mathrm{f(x)}\,dx = \left[2\left(\frac{1}{2}x^2\right)\right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_2^3$$

$$\int_0^3 \mathrm{f(x)}\,dx = [x^2]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_2^3 = 4 + \left[\left(\frac{1}{3}(27) + 3\right) - \left(\frac{1}{3}(8) + 2\right)\right]$$

$$\int_0^3 \mathrm{f(x)}\,dx = 4 + 12 - \frac{14}{3} = \frac{34}{3}$$

مثال 2 : احسب التكامل المحدود التالي :

$$\int_{-1}^{4} \frac{dx}{x-2}$$

التكامل هذا ليس له معنى لان الدالة $x \to \frac{1}{x-2}$ غير معرفة عند النقطة x=2 و x=2 تنتمي إلى مجال التكامل

تطبيقات التكامل في العلوم الاقتصادية :

دالة التكاليف الحدية ← تكامل دالة التكاليف الحدية ← دالة التكاليف

دالة الايراد الحدي ← تكامل دالة ايراد الحدي ← دالة الايراد

دالة الربح الحدي ← تكامل دالة الربح الحدي ← دالة الربح

مثال 1 : إذا كانت دالة التكلفة الحدية لإنتاج إحدى الشركات ممثلة بالعلاقة :

$$C'(x) = 30x^2 + 54x - 30$$

علما ان التكاليف الثابتة هي 200

-اوجد دالة التكلفة الكلية

الحل :

دالة التكلفة الكلية =تكامل التكلفة الحدية

$$C(x) = \int C'(x)\,dx = \int (30x^2 + 54x - 30)\,dx$$

$$C(x) = 30\left(\frac{1}{3}\right)x^3 + 54\left(\frac{1}{2}x^2\right) - 30x + c$$

$$C(x) = 10x^3 + 27x^2 - 30x + c$$

حيث أن التكاليف الثابتة c=200

$$C(x) = 10x^3 + 27x^2 - 30x + 200$$

مثال 2 : إذا كانت دالة الإيراد الحدي لإنتاج إحدى الشركات ممثلة بالعلاقة :

$$R'(x) = 60x^3 + 18x^2 + 36$$

علما أن الإيراد يساوي الصفر في حالة عدم بيع أي وحدة

-اوجد دالة الإيراد الكلي

الحل :

دالة الإيراد الكلي =تكامل دالة الإيراد الحدي

$$R(x) = \int R'(x)\,dx$$

$$R(x) = \int (60x^3 + 18x^2 + 36)\,dx$$

$$R(x) = 60\left(\frac{1}{4}x^4\right) + 18\left(\frac{1}{3}x^3\right) + 36x + c$$

$$R(x) = 15x^4 + 6x^3 + 36x + c$$

c=0 *ÖQ¢! LJUÜNJQNLP–ad ZuLJÜljəü-lūüž'ïKNJ*

(ÍNÜzuε üQDÜeQN) Yəüəü-lūü

: LjdÜYüZu'hOüIQHÜÍ-JÜÍüZuüHÜ'ÝÜəü : 3 YÜü

$$MC = C'(x) = 400 + 0{,}4x$$

حيث : x هي عدد الوحدات المنتجة

-إيجاد التكاليف الكلية عند زيادة الإنتاج من 20 إلى 40 وح دة

الحل : يتم إيجاد التكاليف الكلية عند زيادة الإنتاج من 20 إلى 40 وحدة

حيث : التكاليف الكلية =تكامل التكلفة الحدية

$$\int_{20}^{40} \mathrm{C}'(\mathrm{x})\,dx = \int_{20}^{40} (400 + 0{,}4x)\,\mathrm{dx}$$

$$\int_{20}^{40} \mathrm{C}'(\mathrm{x})\,dx = \int_{20}^{40} 400\,dx + \int_{20}^{40} 0{,}4x\,dx = [400x]_{20}^{40} + \left[0{,}4\left(\frac{1}{2}x^2\right)\right]_{20}^{40}$$

$$\int_{20}^{40} \mathrm{C}'(\mathrm{x})\,dx = [400x]_{20}^{40} + [0{,}2x^2]_{20}^{40}$$

$$\int_{20}^{40} \mathrm{C}'(\mathrm{x})\,dx = (400 \times 40 - 400 \times 20) + [0{,}2(40)^2 - 0{,}2(20)^2]$$

$$\int_{20}^{40} \mathrm{C}'(\mathrm{x})\,dx = 16320 - 8080 = 8420DA$$

التكامل بالتجزئة : هذه الطريقة تسمح لنا بمكاملة جداء دالتين فان :

$$(\mathrm{u}(\mathrm{x}) \times \mathrm{v}(\mathrm{x}))' = \mathrm{u}'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(\mathrm{x})$$

$$\int (\mathrm{u}(\mathrm{x}) \times \mathrm{v}(\mathrm{x}))'\,dx = \int u'(x) \times v(x)\;dx + \int u(x) \times v'(x)\,dx$$

$$u(x) \times v(x) = \int u'(x) \times v(x)\,dx + \int u(x) \times v'(x)\,dx$$

$$\int u(x) \times v'(x)\,dx = u(x) \times v(x) - \int u'(x) \times v(x)\,dx$$

$$\int u\,v' = u\,v - \int u'v$$

ملاحظة : يمكن استعمال طريقة التكامل بالتجزئة عدة مرات في نفس التكامل

-كيف نختار الدالة u :

← نختار الدالة $\boldsymbol{u}$ حسب الاولوية

A	***L***	***P***	***E***	***S***
↓	↓	↓	↓	↓
Arc sin	***Ln***	***polynome***	***Exp***	***Sin***
Arc cos		حدود كثير دالة		***cos***
Arc tg				**tg**

مثال : احسب التكاملات التالية

$I_1 = \int x \cos x \, dx$

$$u = x \qquad u' = 1$$

$$v = \sin x \qquad v' = \cos x$$

$$I_1 = x\sin x - \int \sin x \, dx = x\sin x - (-\cos x) + c$$

$$I_1 = x\sin x + \cos x + c$$

$I_2 = \int Lnx \, dx = \int 1 \times Lnx \, dx$

$$u = Ln\, x \qquad u' = \frac{1}{x}$$

$$v = x \qquad v' = 1$$

$$I_2 = xLn\, x - \int x\left(\frac{1}{x}\right) dx = xLn\, x - \int 1 \, dx$$

$$I_2 = x\, Ln\, x - x + c$$

$I_3 = \int xe^x \, dx$

$$u = x \qquad u' = 1$$

$$v = e^x \qquad v' = e^x$$

$$I_3 = xe^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x + c$$

$$I_3 = (x-1)e^x + c$$

$I_4 = \int xe^{3x} \, dx$

$$u = x \qquad u' = 1$$

$$v = \frac{1}{3}\, e^{3x} \qquad v' = e^{3x}$$

$$I_4 = \frac{1}{3} x\, e^{3x} - \int \frac{1}{3}\, e^{3x} \, dx$$

$$I_4 = \frac{1}{3}\, x\, e^{3x} - \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{3}\right) 3\, e^x \, dx = \frac{1}{3}\, x\, e^{3x} - \frac{1}{9}\int 3e^{3x} \, dx$$

$$I_4 = \frac{1}{3}\, x\, e^{3x} - \frac{1}{9}\, e^{3x} + c = \frac{1}{3}\, e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right) + c$$

$$I_5 = \int \sqrt{x}\ Ln\ x\ dx\ = \int x^{1/2}\ Ln\ x\, dx$$

$$u = Ln\ x \qquad u' = \frac{1}{x}$$

$$v = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \qquad v' = x^{1/2}$$

$$I_5 = \frac{2}{3}\ x^{\frac{3}{2}}\ Ln\ x - \int \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$I_5 = \frac{2}{3}\ x^{\frac{3}{2}}\ Ln\ x\ - \frac{2}{3}\int x^{\frac{3}{2}}\ x^{-1}\ dx$$

$$I_5 = \frac{2}{3}\ x^{\frac{3}{2}}\ Ln\ x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$I_5 = \frac{2}{3}\ x^{\frac{3}{2}}\ Ln\ x - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) + c = \frac{2}{3}\ x^{\frac{3}{2}}\ Ln\ x - \frac{4}{9}\ x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$I_5 = \frac{2}{3}\ \sqrt{x^3}\ \ Ln\ x - \frac{4}{9}\sqrt{x^3}\ \ + c$$

بعض تكاملات الدوال الكسرية :

الحالة الأولى : درجة البسط اقل من درجة المقام :

-الدالة الكسرية هي $\frac{\text{كثيرحدود}}{\text{كثير}}$

-المقام قابل للتحليل إلى دوال خطية من الدرجة الأولى

-تحليل الكسر الحقيقي إلى كسور جزئية كمايلي :

$$a)\ \ \frac{f(x)}{(x+a)(x+b)(x+c)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + \frac{C}{x+c}$$

$$b)\ \ \frac{f(x)}{(x+a)^n} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{(x+a)^2} + \cdots + \frac{D}{(x+a)^n}$$

$$c)\ \ \frac{f(x)}{(x+a)^n(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{(x+a)^2} + \cdots + \frac{D}{(x+a)^n} + \frac{F}{x+b}$$

مثال : احسب التكاملات التالية :

$$I_1 = \int \frac{x-1}{x^2-4} dx$$

نحلل المقام إلى دوال من الدرجة الأولى

$$I_1 = \frac{x-1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$I_1 = \frac{A(x+2) + B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$x-1=A(x+2)+B(x-2)$

$$x=-2 \Rightarrow -3=-4B \quad \Rightarrow B=\frac{3}{4}$$

$$x=+2 \Rightarrow 1=4A \Rightarrow \quad A=\frac{1}{4}$$

$\mathrm{I}_1=\int \frac{\frac{1}{4}}{x-2}dx+\int \frac{\frac{3}{4}}{x+2}dx$

$$\mathrm{I}_1=\frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2}dx+\frac{3}{4}\int \frac{1}{x+2}dx=\frac{1}{4}\,Ln|x-2|+\frac{3}{4}\,Ln\,|x+2|+c$$

$\mathrm{I}_2=\int \frac{2x+3}{x^2+2x+1}dx=\int \frac{2x+3}{(x+1)^2}dx$

$$\frac{2x+3}{(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}$$

$$\frac{2x+3}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}$$

$2x+3=A(x+1)+B$

$$x=-1 \Rightarrow B=1$$

$$x=0 \Rightarrow 3=A+B \quad \Rightarrow A=3-1 \Rightarrow A=2$$

$$\mathrm{I}_2=\int \frac{2}{x+1}dx+\int \frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$\mathrm{I}_2=2\int \frac{1}{x+1}dx+(x+1)^{-2}dx=\ 2Ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+c$$

$\mathrm{I}_3=\int \frac{5x+3}{x^3-9x}dx=\int \frac{5x+3}{x(x^2-9)}dx$

$\mathrm{I}_3=\int \frac{5x+3}{x(x-3)(x+3)}dx$

$$\frac{5x+3}{x(x-3)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+3}$$

$$\frac{5x+3}{x(x-3)(x+3)}=\frac{A(x-3)(x+3)+B(x)(x+3)+C(x)(x-3)}{x(x-3)(x+3)}$$

$$5x + 3 = A(x-3)(x+3) + B(x)(x+3) + C(x)(x-3)$$

$$x = 3 \Rightarrow 18 = 18B \Rightarrow B = 1$$

$$x = -3 \Rightarrow -12 = 18C \Rightarrow C = \frac{-2}{3}$$

$$x = 0 \Rightarrow 3 = -9A \Rightarrow A = \frac{-1}{3}$$

$$I_3 = \int \frac{\frac{-1}{3}}{x}dx + \int \frac{1}{x-3}dx + \int \frac{\frac{-2}{3}}{x+3}dx$$

$$I_3 = \frac{-1}{3}\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{x-3}dx - \frac{2}{3}\int \frac{1}{x+3}dx$$

$$I_3 = -\frac{1}{3}\,Ln\,|x| + Ln\,|x-3| - \frac{2}{3}\,Ln|x+3| + c$$

الحالة الثانية : درجة البسط f(x) اكبر أو يساوي درجة المقام g(x) :

1 - استخدام القسمة الاقليدية

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \int (\text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{g(x)})dx$$

$\frac{\text{الباقي}}{g(x)}$ (يصبح درجة البسط < درجة المقام)

2 - نقوم بتجزئة $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

مثال : احسب التكامل التالي

$$I_1 = \int \frac{2x^2+13x+6}{x^2+6x-16}dx$$

$x^2+6x-16$	$2x^2+13x+6$
2	$-2x^2-12x+32$
	X+38
	↓
	الباقي اقل من درجة المقسوم عليه نتوقف

$\frac{2x^2+13x+6}{x^2+6x-16} = 2 + \frac{x+38}{x^2+6x-16}$

$\frac{x+38}{x^2+6x-16} = \frac{x+38}{(x+8)(x-2)}$

$$\int \frac{2x^2+13x+6}{x^2+6x-16}\,dx = \int 2\,dx + \int \frac{x+38}{(x+8)(x-2)}\,dx$$

لنحسب التكامل : $\int \frac{x+38}{(x+8)(x-2)}\,dx$

$$\frac{x+38}{(x+8)(x-2)} = \frac{A}{x+8} + \frac{B}{x-2}$$

$$\frac{x+38}{(x+8)(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x+8)}{(x+8)(x-2)}$$

$$x+38 = A(x-2)+B(x+8)$$

$$x = 2 \Rightarrow 40 = 10B \Rightarrow B = 4$$

$$x = -8 \Rightarrow 30 = -10A \Rightarrow A = -3$$

$\int \frac{x+38}{(x+8)(x-2)}\,dx = \int \frac{-3}{x+8}\,dx + \int \frac{4}{x-2}\,dx$

$$\int \frac{x+38}{(x+8)(x-2)}\,dx = -3\int \frac{1}{x+8}\,dx + 4\int \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$\int \frac{x+38}{(x+8)(x-2)}\,dx = -3Ln|x+8| + 4Ln|x-2| + c$$

$$I_1 = \int 2\,dx + \int \frac{x+38}{(x+8)(x-2)}\,dx$$

$$I_1 = 2x - 3Ln|x+8| + 4Ln|x-2| + c$$

مثال 2 : احسب التكامل التالي

$I_2 = \int \frac{x^3}{x^2-3x+2}\,dx$

$x^2 - 3x + 2$ | x^3

X+3 | $-x^3 + 3x^2 - 2x$

$3x^2 + 2x$

$-3x^2 + 9x - 6$

$7x - 6$

↓

الباقي اقل من درجة المقسوم عليه نتوقف

$$\frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{x^2-3x+2}} = \boldsymbol{x+3+\frac{7x-6}{(x-1)(x-2)}}$$

$$\int \frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{x^2-3x+2}}\boldsymbol{dx} = \int \boldsymbol{(x+3)\,dx} + \int \boldsymbol{\frac{7x-6}{(x-1)(x-2)}dx}$$

$$\int \frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{x^2-3x+2}}\boldsymbol{dx} =$$

لنحسب التكامل $\int \frac{7x-6}{(x-1)(x-2)}\boldsymbol{dx}$

$$\frac{7\mathrm{x}-6}{(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

$$\frac{7\mathrm{x}-6}{(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}-2)} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$7x-6 = A(x-2)+B(x-1)$$

$$x = +2 \;\Rightarrow\; 8 = B$$

$$\mathrm{x} = 1 \;\Rightarrow 1 = -\mathrm{A} \;\Rightarrow \mathrm{A} = -1$$

$$\int \frac{7x-6}{(x-1)(x-2)}dx = \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{8}{x-2}dx$$

$$\int \frac{7x-6}{(x-1)(x-2)}dx = -\int \frac{1}{x-1}dx + 8\int \frac{1}{x-2}dx$$

$$\int \frac{7x-6}{(x-1)(x-2)}dx = -\,Ln|x-1| + 8\,Ln|x-2| + c$$

جدول الدوال الأصلية :

هذا الجدول مستنتج مباشرة من مشتقات بعض الدوال

الدالة	الدالة الأصلية لها	الدالة	الدالة الأصلية لها
0	a aϵR	$f^n \times f' \quad n \neq -1$	$\frac{f^{n+1}}{n+1} + c$
a ϵR	ax+c cϵR	$f \times f'$	$\frac{1}{2} f^2 + c$
$x^n \quad n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\frac{1}{x^n} \quad n \neq 1$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a} Ln\,\lvert ax+b \rvert + c$	$\frac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f} + c$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a} e^{ax+b} + c$	$\frac{f'}{f}$	$Ln\lvert f \rvert + c$
$\frac{f'}{f^n} \quad n \neq 1$	$\frac{-1}{(n-1)f^{(n-1)}} + c$	$f' \times e^f$	$e^f + c$
cos(ax+b)	$\frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$	$sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a} cos(ax+b) + c$

تمارين مقترحة للفصل الخامس

التمرين الأول : احسب تكامل الدوال التالية من الشكل $\int x^{\mathrm{n}}$ $n \neq -1$

$$\int (\mathbf{7x^4} - \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{x^2}})\,\boldsymbol{dx} \qquad \int (\sqrt{\boldsymbol{x}} + \sqrt[3]{\boldsymbol{x}})\,\boldsymbol{dx} \qquad \int \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2\,dx$$

التمرين الثاني : احسب تكامل الدوال التي تؤدي إلى اللوغاريتمات

$$\int \frac{1}{xLnx}dx \qquad \int \frac{2x-1}{x^2-x+3}dx \qquad \int cotg(3x+2)\,dx$$

التمرين الثالث : احسب تكامل الدوال باستعمال طريقة تغيير المتغير

$$\int sin(2x+3)\,dx \qquad \int \frac{3x}{(x^2+3)^4}dx \qquad \int \frac{4}{3x-1}dx \qquad \cos 7x\,dx$$

التمرين الرابع : احسب التكامل المحدود للدوال التالية

$$\int_1^9 \sqrt{x}\;dx \qquad \int_1^3 (2x+5)dx \qquad \int_0^1 (x^3-2x^2+3)\,dx \qquad \int_1^5 |x-2|dx$$

التمرين الخامس : احسب تكامل الدوال التالية بالتجزئة

$$\int x^3 Lnx\;dx \qquad \int (x-1)e^{-x}\,dx \qquad \int \frac{Lnx}{x^2}dx \qquad \int x\,sin\,x\,dx$$

التمرين السادس : احسب تكامل الدوال الكسرية التالية

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+x^2}dx \qquad \int \frac{x}{x^2+2x+1}dx \qquad \int \frac{x^2+5}{x^2-1}dx \qquad \int \frac{3x^4-3x^2-x}{x^2-1}dx$$

قائمة المراجع

1 - باللغة العربية

-قادة علاب ،عناصر من التحليل الرياضي ، التوابع لمتغير واحد ،ديوان المطبوعات الجامعية ،1991

-بابا حامد ،محاضرات في التحليل ،ديوان المطبوعات الجامعية ،1988

-سعود محمود ،التحليل الرياضي ،ديوان المطبوعات الجامعية ،2009

-بن عيسى لخضر ، التحليل الرياضي ،ديوان المطبوعات الجامعية ،2009

-ا.علي حميدة ،التحليل دروس وتمارين محلولة الجزء 2-3 ، جامعة منتوري قسنطينة

2 - باللغة الأجنبية

- Cantoni Eva, Exercices résolus de probabilités et de statistique, springer 2006

- Lecoutre Jean-Pierre , statistique et probabilités cours et exercices corrigés Dunod 2016

- Alain soyeur-François capaces-Emmanuel vieillard-Bron ,Cours de Mathématique,2011

- Horst stocker traduit par Vincent Bosser , Toutes les Mathématique ,Dunod 1999

- Stephane Rossignol , Mathématiques en économie-Gestion , Dunod 2015

- K. Allab ,Eléments d'analyse , OPU 1990

- C.Baba Hamed et K.Benhabib, Analyse 1 rappels de cours et Exercices avec solution OPU

-K. Abdelkarim, Exercices résolus d'analyse avec rappels de cours OPU 1989

- E. Azoulay , Mathématique 1 - Analyse , cours et exercices ,Mc Grow-Hill 1995

- N.Belbahri et A. Mansouri, Eléments d'analyse cours et exercices résolus , édition chihab 1993

- A. khelladi ,Introduction a l'analyse Mathématiques, Tome3,OPU 2002

- L. Michelle et F. Pierre, suites et Fonctions numériques cours avec exercices , Dunod 1977

- D.Medjadi ,Analyse Mathématique, Fonctions d'une variable réelle, Vol 1 ,OPU. Alger,2001

- Wieslawaj ,Kaczor et Maria T, Problème d'analyse III (intégration) exercices corrigés ,Nowk,2008,EDP Sciences

- Laurent Schwartz – Professeur a l'école Polytechniques et a la faculté des sciences de paris, HERMANN paris 1967