Université M'Hamed BOUGARA de Boumerdès
Faculté des Hydrocarbures et de la Chimie

Département d'Économie
et de de la
Commercialisation des Hydrocarbures

Razika
TAHI

2023

Algorithmes du transport

Tome 4

Table des matières

Le problème du transport

*« Si un **problème** a une solution, il ne faut pas s'inquiéter.*
*Si un **problème** n'a pas de solution, il est inutile de s'inquiéter ».*
Proverbe Tibétain

Par leur structure particulière et simplicité, certains problèmes de programmation linéaire peuvent être résolus par un algorithme dont le principe de résolution est plus efficace que celui de la méthode du simplexe. Il s'agit de l'algorithme du transport. Celui-ci est d'un intérêt certain, car en plus de sa simplicité, son application est aussi vaste que fréquente.

1 – Présentation du modèle de transport

1 – 1 – Position du problème de transport

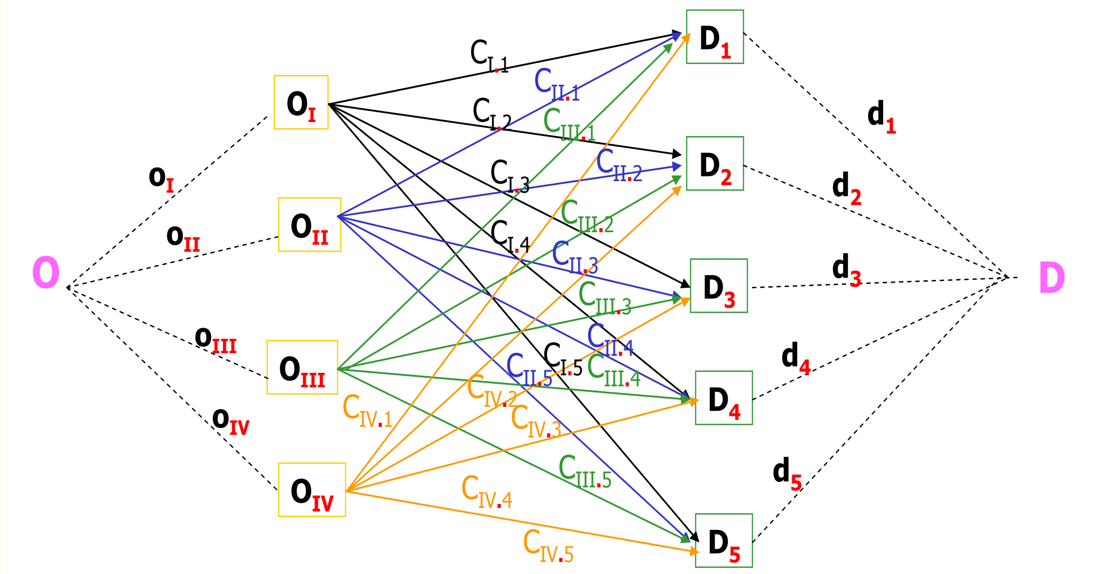
Comme son nom l'indique, ce modèle traite le plus souvent du problème de transport au sens strict du terme, c'est-à-dire la minimisation du coût (ou du temps) de transport d'une marchandise, qui a la particularité d'être homogène, à partir de plusieurs endroits appelés sources (ou origines) vers différentes destinations. Pour la minimisation de ce coût de transport, on tient compte de certaines contraintes liées à l'offre et à la demande, ainsi que des coûts de transport entre les origines et les destinations.

D'autres problèmes peuvent être assimilés au modèle du transport, c'est le cas de l'affectation optimale de matière première dans un programme de production, ou celle d'un personnel à des postes de travail où l'on peut considérer que toutes les marchandises transportées sont égales à **0** ou **1** selon les situations (il s'agit plus précisément du problème d'affectation que l'on présentera dans le paragraphe **6** - **5**).
Nous allons présenter tout d'abord dans ce paragraphe trois représentations du modèle de transport : la représentation graphique, la représentation tabulaire et la troisième sous forme de programme linéaire. Par la suite, nous n'utiliserons que la représentation tabulaire.

1 – 2 – Représentation graphique du modèle de transport

Le modèle du transport peut être représenté graphiquement en considérant une origine **O** et une destination **D**.
Dans le graphe **29**, on considère quatre origines $\mathbf{O_I}$, $\mathbf{O_{II}}$, $\mathbf{O_{III}}$ et $\mathbf{O_{IV}}$. À partir de ces quatre points, des marchandises sont transportées vers cinq destinations différentes $\mathbf{D_1}$, $\mathbf{D_2}$, $\mathbf{D_3}$, $\mathbf{D_4}$ et $\mathbf{D_5}$. Le coût de transport d'une origine $\mathbf{O_i}$ vers une destination $\mathbf{D_j}$ est représenté par $\mathbf{C_{ij}}$. Ainsi, de l'origine $\mathbf{O_{II}}$ vers la destination $\mathbf{D_3}$, le coût est de $\mathbf{C_{II.3}}$.

Graphe 1 : Représentation graphique du modèle de transport (**n** = **4**, **m** = **5**).



On précise encore ici, que si l'on utilise généralement le terme « coût », il ne s'agit pas toujours de coût monétaire. Dans le transport, il peut s'agir de temps. En effet, lors d'une catastrophe naturelle tel que le séisme de Boumerdes du 21 mai 2003, il ne s'agissait pas à ce moment de minimiser les coûts de transport des ambulances, mais de minimiser le temps de parcours de ces ambulances pour évacuer le maximum de blessés des lieux du sinistre vers les établissements hospitaliers.

1 – 3 – Représentation tabulaire du modèle de transport

Toutes les données concernant le modèle du transport peuvent être représentées dans un tableau récapitulatif appelé tableau du transport.

Tableau 1 : Tableau du transport.

Destinations / Origines	1	2	3	4	5	Disponibilités
I	$C_{I.1}$ $x_{I.1}$	$C_{I.2}$ $x_{I.2}$	$C_{I.3}$ $x_{I.3}$	$C_{I.4}$ $x_{I.4}$	$C_{I.5}$ $x_{I.5}$	a_I
II	$C_{II.I}$ $x_{II.I}$	$C_{II.2}$ $x_{II.2}$	$C_{II.3}$ $x_{II.3}$	$C_{II.4}$ $x_{II.4}$	$C_{II.5}$ $x_{II.5}$	a_{II}
III	$C_{III.1}$ $x_{III.1}$	$C_{III.2}$ $x_{III.2}$	$C_{III.3}$ $x_{III.3}$	$C_{III.4}$ $x_{III.4}$	$C_{III.5}$ $x_{III.5}$	a_{III}
IV	$C_{IV.1}$ $x_{IV.1}$	$C_{IV.2}$ $x_{IV.2}$	$C_{IV.3}$ $x_{IV.3}$	$C_{IV.4}$ $x_{IV.4}$	$C_{IV.5}$ $x_{IV.5}$	a_{IV}
Demandes	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	$\sum_{j=1}^{m} a_j = \sum_{i=1}^{n} d_i$

On considère pour illustrer ce tableau que **n** = **I** à **IV** et **j** = **1** à **5** (conventionnellement **i** = **1** à **n** et **j** = **1** à **m**). Il s'agit d'un tableau à double entrée (appelé tableau de contingence par les statisticiens). Les lignes représentent les différentes origines et les colonnes les différentes destinations. Dans chaque case de la matrice centrale de ce tableau, sont mentionnés deux éléments : le coût dans le coin nord-ouest et les quantités des marchandises transportées dans le coin sud-est. La dernière ligne du tableau nous renseigne sur les quantités demandées par les différentes destinations. Chaque destination a une demande spécifique que l'on écrit respectivement de $\mathbf{d_1}$ à $\mathbf{d_5}$ dans ce tableau **1**.

Dans le tableau du transport, les disponibilités doivent être égales aux demandes. Mais comme ce n'est pas toujours le cas dans la réalité, il suffit de faire quelques transformations pour l'adapter au problème traité. Si les demandes sont supérieures aux disponibilités, il suffit d'ajouter dans le tableau une colonne représentant une destination fictive et lui attribuer un coût nul. Dans cette colonne, est mentionné l'excédent de la demande. Dans le cas où les disponibilités sont supérieures aux demandes, il suffit d'ajouter une ligne dans le tableau où sera mentionné l'excédant des disponibilités. Cette ligne supplémentaire représente une origine fictive.

1 – 4 – Écriture du modèle de transport sous forme d'un programme linéaire

Dans la mesure où le modèle de transport est un cas particulier de la programmation linéaire, on peut alors le formuler sous forme de programme linéaire où il s'agit de trouver les quantités optimales à transférer tout en minimisant les coûts de transport. Les variables à étudier $\mathbf{x_{ij}}$ peuvent être définies comme les quantités à transporter de l'origine **i** vers la destination **j**.

On a une fonction objective à minimiser.

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij}\, x_{ij}.$$

Et les contraintes qui suivent.

- La disponibilité des produits est égale à la demande.

$$\sum_{j=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{n} d_i .$$

- La quantité distribuée aux différentes destinations est égale à la demande.

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = d_i .$$

- La quantité distribuée depuis les différentes origines est égale à sa disponibilité.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = a_i .$$

- Les contraintes de positivités.

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall\ i \text{ et } j.$$

Puisque le modèle de transport peut s'écrire sous forme d'un programme linéaire primal, on peut lui associer un programme linéaire dual. Dans celui-ci, nous avons dans la fonction objective les variables y_i associées aux contraintes des disponibilités et les variables z_j associées aux contraintes des demandes.

$$\text{Max } Z' = \sum_{i=1}^{n} a_i.y_i + \sum_{j=1}^{m} d_j.z_j$$

$$\begin{aligned} y_i + z_j &\leq C_{ij} \\ y_i &\geq 0 \\ z_j &\geq 0 \qquad \forall\ i \text{ et } j. \end{aligned}$$

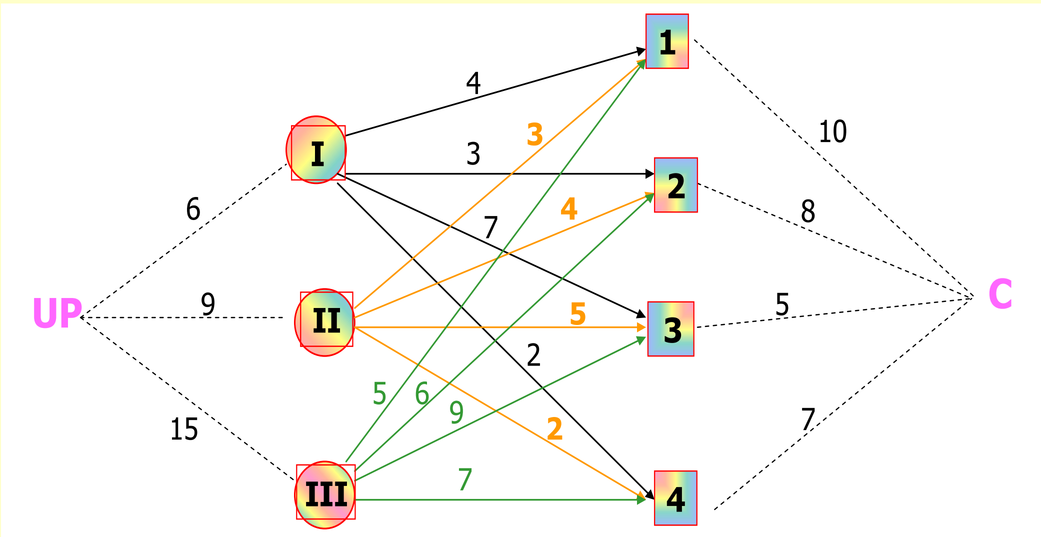
Application.

Une entreprise possède trois unités de production **I**, **II** et **III** d'un produit liquide au centre du pays, plus précisément à **Alger**, **Blida** et **Tipaza**. Elle doit livrer son produit à quatre clients dans des zones géographiques différentes qui sont **Médéa**, **Boumerdes**, **Dellys** et **Boufarik** représentées par les chiffres **1** à **4**. Les demandes des clients sont respectivement de **10**, **8**, **5** et **7** **m³**, alors que les quantités disponibles dans les unités de production sont de **6**, **9** et **15** **m³**. Les coûts de transport de ce produit des origines vers leurs destinations sont représentés dans le tableau **2**. On peut résumer toutes ces données dans un tableau, un graphe ou sous forme de programme linéaire.

Tableau 2 : Tableau du transport.

Unités \ Clients	1	2	3	4	Disponibilités
I	4	3	7	2	6
II	3	4	5	2	9
III	5	6	9	7	15
Demandes	10	8	5	7	Unité : 10³ U.M

Graphe 2 : Représentation graphique de l'application.



Comme il y a trois unités de production, on a trois segments qui aboutissent à trois sommets : **Alger**, **Blida** et **Tipaza** (**I**, **II** et **III**). À partir de ces trois sommets, on trace des vecteurs représentant les coûts de transport et qui se terminent au niveau de quatre sommets représentants les zones géographiques des clients, c'est-à-dire **Médéa**, **Boumerdes**, **Dellys** et **Boufarik** (**1** à **4**). De ces quatre sommets, on trace des segments représentant les demandes.

Programme linéaire primal.

Fonction objective :

$$\min Z = 4x_{I.1} + 3x_{I.2} + 7x_{I.3} + 2x_{I.4} + 3x_{II.1} + 4x_{II.2} + 5x_{II.3} + 2x_{II.4} + 5x_{III.1} + 6x_{III.2} + 9x_{III.3} + 7x_{III.4}.$$

Contraintes liées aux disponibilités des dépôts :

$$\begin{aligned} x_{I.1} + x_{I.2} + x_{I.3} + x_{I.4} &= 6 \\ x_{II.1} + x_{II.2} + x_{II.3} + x_{II.4} &= 9 \\ x_{III.1} + x_{III.2} + x_{III.3} + x_{III.4} &= 15. \end{aligned}$$

Contraintes liées aux demandes des clients :

$$\begin{aligned} x_{I.1} + x_{II.1} + x_{III.1} &= 10 \\ x_{I.2} + x_{II.2} + x_{III.2} &= 8 \\ x_{I.3} + x_{II.3} + x_{III.3} &= 5 \\ x_{I.4} + x_{II.4} + x_{III.4} &= 7. \end{aligned}$$

Contraintes de positivité :

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{avec } i = I \text{ à } III \text{ et } j = 1 \text{ à } 4.$$

Programme linéaire dual.

$$\text{Max } Z' = 6y_I + 9y_{II} + 15y_{III} + 10z_1 + 8z_2 + 5z_3 + 7z_4$$

$$\begin{aligned} y_I + z_1 &= 4 & \qquad y_{II} + z_3 &= 5 \\ y_I + z_2 &= 3 & y_{II} + z_4 &= 2 \\ y_I + z_3 &= 7 & y_{III} + z_1 &= 5 \\ y_I + z_4 &= 2 & y_{III} + z_2 &= 6 \\ y_{II} + z_1 &= 3 & y_{III} + z_3 &= 9 \\ y_{II} + z_2 &= 4 & y_{III} + z_4 &= 7 \end{aligned}$$

$$y_i \geq 0 \quad \text{avec} \quad i = I \text{ à } III$$

$$z_j \geq 0 \quad \text{avec} \quad j = 1 \text{ à } 4.$$

Vu que les produits transportés sont homogènes, on peut résoudre ce problème par la méthode du transport.

La résolution du problème de transport s'effectue en deux phases : la première consiste à calculer une solution de base, puis la seconde est consacrée à des itérations successives pour l'amélioration de la solution de base jusqu'à son optimisation.

2 – Calcul d'une solution de base

Plusieurs méthodes permettent d'obtenir une solution de base. Nous nous limiterons à en présenter trois : la méthode du coin nord-ouest, la méthode du meilleur coin nord-ouest et la méthode de Houthaker.

2 – 1 – Méthode du coin nord-ouest

Considérons le cas du transport d'un certain produit, de quatre origines vers cinq destinations, représenté dans le tableau 3.

Tableau 3 : Tableau du transport.

Destinations / Origines	1	2	3	4	5	Disponibilités
I	a_1					a_1
II						a_{II}
III						a_{III}
IV						a_{IV}
Demandes	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	$\sum_{j=1}^{m} a_j = \sum_{i=1}^{n} d_i$

La méthode du coin nord-ouest consiste à considérer tout d'abord la première case supérieure gauche[1] de la matrice des coûts du tableau de transport. On affecte à cette case la plus petite valeur correspondante soit à la demande de la même colonne ou soit à la disponibilité de la même ligne, c'est-à-dire le minimum entre a_I et d_1. On sature ainsi une ligne si $d_1 > a_I$, ou une colonne si $a_I > d_1$.

Dans ce cas, on va considérer que la demande **1** est supérieure à la disponibilité **I**. On inscrit alors a_1 dans la première case située au coin nord-ouest de la matrice centrale. Comme toutes les disponibilités ont été affectées vers la destination **1**, on ne prendra plus en compte cette ligne dans la suite du raisonnement, d'où le tableau réduit **215**.

[1] D'où l'appellation de la méthode du coin nord-ouest.

Tableau 4 : Tableau du transport réduit après une première affectation.

Destinations / Origines	1	2	3	4	5	Disponibilités
II						a_{II}
III						a_{III}
IV						a_{IV}
Demandes	$d_1 - a_1$	d_2	d_3	d_4	d_5	$\sum_{j=1}^{m} a_j = \sum_{i=1}^{n} d_i$

Lorsqu'une ligne (ou une colonne) est saturée, celle-ci n'est plus prise en compte dans les opérations qui suivent, et on considère par la suite seulement le tableau réduit d'une ligne (ou d'une colonne). La demande (ou la disponibilité) correspondante à la disponibilité (ou la demande) saturée est alors diminuée de celle-ci, c'est-à-dire $d_1' = d_1 - a_I$. On continue le processus en saturant à chaque phase une ligne ou une colonne jusqu'à ce que toutes les lignes et colonnes soient saturées.

Dans le cas où la disponibilité est égale à la demande, c'est en même temps la ligne et la colonne qui ne sont plus prises en compte dans la suite des calculs. On continue à remplir la case du coin nord-ouest du tableau réduit d'une ligne et d'une colonne.
Pour trouver une solution, il suffit alors de sommer le produit des quantités obtenues dans ce programme par leurs coûts respectifs.

$$S_b = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij}\, x_{ij}.$$

Application.

Reprenons l'énoncé du tableau 2. Pour décrire la méthode du coin nord-ouest, on va remplir progressivement le tableau 5, en précisant les chemins possibles à suivre pour obtenir une solution de base.

Tableau 5 : Tableau à remplir progressivement.

Clients / Unités	M	B_m	D	B_f	Disponibilités
Alger					6
Blida					9
Tipaza					15
Demandes	10	8	5	7	30

On commence par la case qui est située au nord-ouest de la matrice centrale, c'est-à-dire la case correspondante à l'intersection de l'unité de production d'**Alger** et le client de **Médéa**. On y affecte la plus petite valeur entre la disponibilité de l'unité de production d'**Alger** et la demande du client de **Médéa**, il s'agit du minimum entre 6 et 10, donc **6**.

Tableau 6 : Première affectation.

Clients / Unités	M	B_m	D	B_f	Disponibilités
Alger	6				6 – 6 = 0
Blida					9
Tipaza					15
Demandes	10 – 6 = 4	8	5	7	30 – 6 = 24

On affecte au client de **Médéa** **6 m³** provenant de l'unité de production d'**Alger**, et ainsi celle-ci ne dispose plus de produit liquide. Dans les tableaux qui suivent, la première ligne ne sera plus prise en compte. Pour le client **M** de **Médéa**, il a pu satisfaire une partie de sa demande. Il lui reste à satisfaire à présent une demande de **4** seulement (10 – 6 = **4 m³**).
La somme des disponibilités et demandes a diminuée de **6** unités, elle est égale à présent de **24 m³** (30 – 6 = **24**).

On continue l'affectation en considérant toujours le coin nord-ouest du tableau **7**.

Tableau 7 : Deuxième affectation.

Clients / Unités	M	B_m	D	B_f	Disponibilités
Blida	4				9 – 4 = 5
Tipaza					15
Demandes	4 – 4 = 0	8	5	7	24 – 4 = 20

On attribue à la case située à l'intersection de l'unité de production de **Blida** et du client de **Médéa** le minimum entre 9 et 4, c'est-à-dire **4**. La demande du client de **Médéa** n'a pu être satisfaite totalement (seulement **6**) dans l'étape précédente, il reçoit alors de l'unité de production de **Blida** le complémentaire, c'est-à-dire **4 m³**. Ainsi, la demande du client de **Médéa** est totalement satisfaite à présent. La première colonne n'est donc plus prise en considération dans les tableaux qui suivent. La disponibilité de la deuxième unité de production a diminué de **4**. Il ne reste alors, qu'une quantité de **5 m³** dans la deuxième unité de production et on obtient le tableau **218**.

Dans la mesure où (**6** + **4**) **m³** ont déjà été distribués, il ne reste à satisfaire qu'une demande de (30 – 10) = **20 m³**.

On considère ensuite le tableau **8** constitué par deux unités de production et trois clients.

Tableau 8 : Troisième affectation.

Clients / Unités	B_m	D	B_f	Disponibilités
Blida	5			5 – 5 = 0
Tipaza				15
Demandes	8 – 5 = 3	5	7	20 – 5 = 15

On affecte dans la case située à l'intersection de l'unité de production de **Blida** et le client de **Boumerdes** (toujours le coin nord-ouest du tableau réduit) le minimum entre 5 et 8, c'est-à-dire **5**. Ainsi, l'unité de production de **Blida** a distribué tous ses produits liquides et on obtient le tableau **8**.
Le client de **Boumerdes** a pu satisfaire une partie de sa demande, il lui reste à recevoir **3 m^3**.
Il ne reste plus qu'une seule unité de production et trois clients.

Tableau 9 : Quatrième affectation.

Clients / Unités	B_m	D	B_f	Disponibilités
Tipaza	3			15 – 3 = 12
Demandes	3 – 3 = 0	5	7	15 – 3 = 12

On affecte le minimum entre 15 et 3, c'est-à-dire **3** dans la case située à l'intersection de l'unité de production de **Tipaza** et le client de **Boumerdes** et ainsi, pour le client de **Boumerdes** sa demande a été totalement satisfaite, d'où le tableau **9**.

Tableau 10 : Cinquième affectation.

Clients / Unités	D	B_f	Disponibilités
Tipaza	5		12 – 5 = 7
Demandes	5 – 5 = 0	7	12 – 5 = 7

On affecte dans la case située à l'intersection de l'unité de production de **Tipaza** et le client de **Dellys** le minimum entre 12 et 5, donc **5**.

Tableau 11 : Sixième affectation.

Clients / Unités	B_f	Disponibilités
Tipaza	0	7 – 7 = 0
Demandes	7 – 7 = 0	7 – 7 = 0

On termine en affectant dans la case située à l'intersection de l'unité de production de **Tipaza** et le client de **Boufarik** la dernière quantité 7.
On peut résumer les différentes affectations dans le tableau **12** qui suit.

Tableau 12 : Tableau des affectations selon la méthode du coin nord-ouest.

Unités \ Clients	M	B_m	D	B_f	Disponibilités
Alger	6				6
Blida	4	5			9
Tipaza		3	5	7	15
Demandes	10	8	5	7	30

Pour obtenir une solution de base, il suffit de faire la somme des produits suivants :

$$Z_1 = 6.4 + 4.3 + 5.4 + 3.6 + 5.9 + 7.7 = 168 \text{ U.M.}$$

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne prend pas en considération les coûts de transport, d'où l'obtention d'une solution de base souvent, mais pas toujours, éloignée de la solution optimale. Cela contraint, par la suite, d'effectuer un nombre élevé d'itérations lors de la phase d'optimisation.

Une autre méthode permet de palier à cet inconvénient, il s'agit de la méthode du meilleur coin nord-ouest.

2 – 2 – Méthode du meilleur coin nord-ouest

La méthode du meilleur coin nord-ouest est aussi appelée méthode du coin nord-ouest modifiée. Il s'agit de choisir la première case dont la variable correspond au coût de transport minimum (min C_{ij}). On affecte à cette case la valeur d'une demande ou d'une disponibilité, selon le cas (la plus petite valeur des deux). Lorsqu'une ligne (ou une colonne) a été saturée, on repère le coût immédiatement supérieur ou égal dans la colonne (ou ligne) correspondante pour saturer une disponibilité (ou une demande). On continue le processus jusqu'à saturation de toutes les demandes et disponibilités. En sommant le produit de ces quantités par leurs coûts respectifs, on obtient une solution de base.

Application.

Reprenons l'exemple traité avec la méthode du coin nord-ouest, c'est-à-dire les données du tableau **2**.

En lisant la matrice des coûts, on constate que le plus petit coût correspond à la case située à l'intersection de l'unité de production d'**Alger** et le client de **Boufarik**. On affecte dans cette case le minimum entre 6 et 7, donc **6**. On obtient le tableau **13**.

Tableau 13 : Première affectation selon la méthode du meilleur coin nord-ouest.

Unités \ Clients	M	B_m	D	B_f	Disponibilités
Alger				6	6 – 6 = 0
Blida					9
Tipaza					15
Demandes	10	8	5	7 – 6 = 1	30 – 6 = 24

La disponibilité de l'unité de production d'**Alger** étant complètement distribuée, on ne considère plus dans la suite des calculs la première ligne.

Tableau 14 : Deuxième affectation selon la méthode du meilleur coin nord-ouest.

Unités \ Clients	M	B_m	D	B_f	Disponibilités
Blida				1	9 – 1 = 8
Tipaza					15
Demandes	10	8	5	1 – 1 = 0	24 – 1 = 23

On considère à présent le coût immédiatement supérieur ou égal à 2 dans la colonne 4 correspondant au client de **Boufarik**. Ce coût correspond à la case située à l'intersection de l'unité de production de **Blida** et le client de **Boufarik**. On lui attribue une quantité de **1 m^3** correspondant à la quantité nécessaire pour compléter la colonne **B_f**. Le client de **Boufarik** a ainsi satisfait toute sa demande. L'unité de production de **Blida** ne dispose plus que de **8 m^3** du produit liquide.

Tableau 15 : Troisième affectation selon la méthode du meilleur coin nord-ouest.

Unités \ Clients	M	B_m	D	Disponibilités
Blida	8			8 – 8 = 0
Tipaza				15
Demandes	10 – 8 = 2	8	5	23 – 8 = 15

On repère le coût immédiatement supérieur à 2 dans la deuxième ligne qui n'est pas encore saturée. Il s'agit de 3 correspondant à la case située à l'intersection de l'unité de production de **Blida** et du client de **Médéa**. On lui affecte le minimum entre 8 et 10, donc **8**, et ainsi la deuxième ligne correspondante à l'unité de production de **Blida** est saturée. Il ne reste plus qu'une demande de **2** à satisfaire pour le client de **Médéa**.

Tableau 16 : Quatrième affectation selon la méthode du meilleur coin nord-ouest.

Unités \ Clients	M	B_m	D	Disponibilités
Tipaza				15 – 2 = 13
Demandes	2 – 2 = 0	8	5	15 – 2 = 13

Dans la première colonne correspondante au client de **Médéa**, il nous reste une demande de (10 – 8) = 2 à satisfaire. On passe au coût supérieur suivant qui correspond à la case située à l'intersection de l'unité de production de **Tipaza** et du client de **Médéa**, à laquelle on affecte la quantité égale à **2 m^3**. L'unité de production de **Tipaza** ne dispose alors que de **13 m^3** de produit liquide.

Tableau 17 : Cinquième et sixième affectations.

Unités \ Clients	B_m	D	Disponibilités
Tipaza	8	5	13 – 13 = 0
Demandes	8 – 8 = 0	5 – 5 = 0	13 – 13 = 0

Il nous reste la dernière ligne correspondante à l'unité de production de **Tipaza** où l'on affecte tout d'abord une quantité de **8** à la case située à l'intersection de l'unité de production de **Tipaza** et du client de **Boumerdes**, puis une quantité de **5** dans la case située à l'intersection de l'unité de production de **Tipaza** et le client de **Dellys**.

Tableau 18 : Tableau récapitulatif.

Unités \ Clients	M	B_m	D	B_f	Disponibilités
Alger				6	6
Blida	8			1	9
Tipaza	2	8	5		15
Demandes	10	8	5	7	30

Toutes les disponibilités et demandes étant satisfaites, on peut alors calculer le coût total de cette solution de base qui est égal à : $Z_2 = 6.2 + 1.2 + 8.3 + 2.5 + 8.6 + 5.9 = 141$ **U.M**.
On constate que la valeur de Z_2 est inférieure à $Z_1 = 168$ **U.M**. Cela est normal, dans la mesure où le coût est pris en compte dans la méthode du meilleur coin nord-ouest.

Remarque.

Si l'on dispose le tableau selon l'ordre dont les variables ont été choisies, on retrouve un tableau ayant pour lignes successives **Alger**, **Blida** et **Tipaza** et pour colonnes **Boufarik**, **Médéa**, **Boumerdes** et **Dellys**. On obtient le tableau 19.

Tableau 19 : Tableau des affectations selon l'ordre des variables choisies.

Unités \ Clients	B_f	M	B_m	D	Disponibilités
Alger	6				6
Blida	1	8			9
Tipaza		2	8	5	15
Demandes	7	10	8	5	30

Dans la méthode du meilleur coin nord-ouest, on constate que dans l'affectation, la première valeur est située dans le coin nord-ouest, d'où son appellation.

2 – 3 – Méthode de Houthaker

Dans cette méthode, il s'agit de saturer en priorité les cases où le coût unitaire de transport est le plus bas dans la ligne et la colonne correspondante. On continue progressivement le processus de saturation jusqu'à ce que toutes les disponibilités soient distribuées et les demandes satisfaites.

Dans notre exemple, le coût le plus bas en ligne et en colonne est 2, correspondant à la case située à l'intersection de l'unité de production de **Blida** et le client de **Boufarik**.

Tableau 20 : Première affectation selon la méthode de Houthaker.

Unités \ Clients	M	B_m	D	B_f	Disponibilités
Alger					6
Blida				7	9 – 7 = 2
Boufarik					15
Demandes	10	8	5	7 – 7 = 0	23

On affecte donc à ce chemin (**Blida**-**Boufarik**) le minimum entre 9 et 7, c'est-à-dire 7. La demande du client de **Boufarik** est alors totalement satisfaite et il reste seulement dans l'unité de production de **Blida** une disponibilité de 2 **m**^{3}.

Tableau 21 : Deuxième affectation selon la méthode de Houthaker.

Unités \ Clients	M	B_m	D	B_f	Disponibilités
Alger		6			6 – 6 = 0
Blida				7	2
Boufarik					15
Demandes	10	8 – 6 = 2	5	0	23 – 6 = 17

La colonne correspondante à la demande du client de **Boufarik** étant saturée, on considère le coût supérieur égal à 2, sans prendre en compte évidemment la colonne **B**f. Il s'agit du coût 3 de la case située à l'intersection de l'unité de production d'**Alger** et du client de **Boumerdes**, on y affecte 6 et la ligne correspondante à la disponibilité de l'unité de production de l'unité d'**Alger** est ainsi saturée. Le client de **Boumerdes** a pu satisfaire une demande de 6 seulement. Il lui reste donc une demande de 2 à satisfaire.

Tableau 22 : Troisième affectation selon la méthode de Houthaker.

Unités \ Clients	M	B_m	D	B_f	Disponibilités
Alger		6			0
Blida	2			7	2 – 2 = 0
Tipaza					15
Demandes	10 – 2 = 8	2	5	0	17 – 2 = 15

Le plus petit coût suivant est égal à 3 de la case située à l'intersection de l'unité de production de **Blida** et le client de **Médéa**. On y affecte 2 et on sature la ligne représentant la disponibilité de l'unité de production de **Blida**. Il reste donc pour le client de **Médéa** à satisfaire une demande de 8 m^3 seulement.

Tableau 23 : Quatrième affectation selon la méthode de Houthaker.

Unités \ Clients	M	B_m	D	B_f	Disponibilités
Alger		6			0
Blida	2			7	0
Tipaza	8				15 – 8 = 7
Demandes	8 – 8 = 0	2	5	0	15 – 8 = 7

Le coût suivant est 5 et correspond à la case située à l'intersection de l'unité de production de **Tipaza** et le client de **Médéa** (on aurait pu aussi choisir le coût 5 correspondant à l'intersection de l'unité de production de **Blida** et le client de **Dellys**). On y affecte 8, ce qui satisfait toute la demande du client de **Médéa** et il reste une disponibilité de 7 m^3 dans l'unité de production de **Tipaza**.

Tableau 24 : Cinquième affectation selon la méthode de Houthaker.

Unités \ Clients	1	2	3	4	Disponibilités
I		6			0
II	2			7	0
III	8	2	5		7 – 2 – 5 = 0
Demandes	0	2 – 2 = 0	5 – 5 = 0	0	7 – 7 = 0

On considère ensuite la case située à l'intersection de l'unité de production de **Tipaza** et du client de **Boumerdes**, on y affecte le minimum entre 2 et 7, c'est-à-dire **2**. On termine avec la case située à l'intersection de l'unité de production de **Tipaza** et le client de **Dellys**, où l'on affecte **5 m^3**. Ainsi, toutes les demandes ont été satisfaites en tenant compte de toutes les disponibilités.
Le coût total est alors de : $Z_3 = 6.3 + 2.3 + 7.2 + 8.5 + 2.6 + 5.9 = 135$ **U.M.**
Ce coût est encore plus faible que Z_1 et Z_2.

Conclusion

Mise à part la méthode du coin nord-ouest, qui donne une solution assez éloignée de l'optimum, car elle ne prend pas en compte les coûts, il n'existe pas de critère de choix scientifique spécifique pour l'utilisation de l'une ou l'autre de ces méthodes concernant la solution de base. Seules, des considérations de programmation et de manipulation sur ordinateur peuvent déterminer la méthode à utiliser. Cependant, la méthode de Houthaker est celle qui s'est révélé la plus efficace bien que difficile à programmer. Elle permet, assez souvent, l'obtention d'une solution très proche de l'optimum, et parfois même elle conduit directement à la solution optimale.

3 – Amélioration de la solution de base

Concernant l'amélioration de la solution de base, plusieurs algorithmes existent, nous en présentons trois aussi. Tout d'abord, le plus connu qui correspond à la méthode de stepping stone, ensuite la méthode des coûts duaux et une méthode heuristique[2] (méthode de Vogel).

3 – 1 – Méthode de stepping *stone*

Le terme de stepping stone est anglais et signifie escalier (ou marchepied). Effectivement, cette méthode permet progressivement d'atteindre la solution optimale. *La montée d'escaliers est un très bon exercice de sport physique. La méthode de stepping stone est de même un excellent exercice de sport intellectuel, alors, n'hésitez pas à le faire.*

Cette méthode permet d'améliorer une solution de base par itérations successives jusqu'à obtention de la solution optimale. Le nombre d'itérations est fonction de l'éloignement de la

[2] Heuristique ou euristique : discipline qui se propose de dégager les règles de la recherche scientifique ou autres

solution de base par rapport à l'optimum. C'est donc le même principe que la méthode du simplexe.

La méthode de stepping stone consiste à diminuer le coût de transport unitaire, appelé coût réduit, en modifiant l'affectation d'une solution de base. Pour pouvoir obtenir une affectation à un moindre coût, il suffit d'examiner tous les chemins qui n'ont pas été utilisés lors du calcul de la solution de base (ces chemins correspondent aux cases vides dans le tableau du transport, et aux variables hors base dans un programme linéaire). À ces chemins, on attribue une unité tout en respectant les différentes contraintes du problème (disponibilités et demandes). Dans le cas où le coût de la nouvelle affectation est positif, cela signifie qu'il faut une dépense supplémentaire si on utilise ce chemin, donc cela ne nous intéresse pas. Dans le cas contraire, où le coût de la nouvelle affectation est négatif, cela entraîne un gain si on utilise ce nouvel itinéraire, d'où l'amélioration de la solution de base et cela nous intéresse.

Application.

Pour mieux comprendre la méthode de stepping stone, suivons ses différentes étapes de résolution dans l'exemple considéré dans le paragraphe précédent.

Considérons comme solution de base celle obtenue par la méthode de Houthaker. Commençons par vérifier si la solution de base est optimale. Pour cela, on doit calculer les coûts réduits que nous représenterons par $\delta_{i.j}$ pour chacune des cases vides.

Calcul des coûts réduits.

Considérons la première case **A.M** du tableau **25a**$_1$, correspondante à l'intersection entre l'unité de production d'**Alger** et le client de **Médéa**, puis calculons son coût réduit.

Tableau 25 : Ensemble des tableaux sur les coûts réduits.

Tableau a$_1$

+1	6 -1		
2 -1	+1		7
8	2	5	

Tableau b$_1$

	6 -1	+1	
2			7
8	2 +1	5 -1	

Tableau c$_1$

	6 -1		+1
2	+1		7 -1
8	2	5	

Tableau d$_1$

	6		
2 -1	+1		7
8 +1	2 -1	5	

Tableau e$_1$

	6		
2 -1		+1	7
8 +1	2	5 -1	

Tableau f$_1$

	6		
2		+1	7 -1
8	2	5 -1	+1

On affecte dans la case **A.M** une unité dont le coût est de **4** (conférez la matrice des coûts du tableau **2**). Mais, sachant que l'offre est de **6** et pour équilibrer celle-ci, on doit diminuer d'une unité le transport de l'itinéraire **A.Bm** dont le coût est de **3**. Il faut aussi respecter la contrainte concernant les demandes. En effet, si on diminue d'une unité transportée de **A.Bm**, on doit augmenter la colonne **2** d'une unité aussi, et cela, dans la case **Bl.Bm** avec un coût de **4**. Il en est de même pour la colonne **1**, puisqu'on a ajouté une unité dans celle-ci à partir de l'unité de production d'**Alger**, on doit alors en enlever une à partir de l'unité de production de **Médéa** dont le coût est de **3**.

D'où, un nouvel itinéraire dont la différence de coût est de :

$$\delta_{A.M} = 4 - 3 + 4 - 3 = 2 \text{ (tableau } \mathbf{a_1}\text{).}$$

On constate que si l'on change de trajet cela entraîne, pour une unité transportée, un coût supplémentaire de **2**. Il n'est alors pas intéressant de prendre en compte cette affectation, puisque ce qui nous intéresse est la diminution des coûts et non pas leur augmentation.
On continue en procédant de la même manière que $\delta_{A.M}$ pour les autres cases vides.

$$\delta_{A.D} = 7 - 9 + 6 - 3 = 1 \text{ (tableau } \mathbf{b_1}\text{).}$$
$$\delta_{A.Bf} = 2 - 2 + 4 - 3 = 1 \text{ (tableau } \mathbf{c_1}\text{).}$$
$$\delta_{Bl.Bm} = 4 - 6 + 5 - 3 = 0 \text{ (tableau } \mathbf{d_1}\text{).}$$
$$\delta_{Bl.D} = 5 - 9 + 5 - 3 = -2 \text{ (tableau } \mathbf{e_1}\text{).}$$

Pour la case $\delta_{Bl.D}$ le coût est négatif, ce qui signifie qu'en considérant ce nouveau trajet, on peut diminuer le coût, pour une unité transportée, de **2 U.M**. Sachant que ce parcours est plus économique que la solution de base, on essaiera de transporter par ce chemin le maximum de marchandises. Avant d'effectuer cette nouvelle affectation, on vérifie s'il n'y a pas d'autres trajets qui pourraient faire diminuer encore plus le coût de transport. On continue alors de calculer tous les autres coûts réduits des cases vides. Dans notre cas, il ne reste plus que le trajet **Tipaza-Boufarik**.

$$\delta_{T.Bf} = 7 - 2 + 5 - 9 = 1 \text{ (tableau } \mathbf{f_1}\text{).}$$

Dans le cas où il y a plusieurs valeurs négatives, on choisit la plus grande en valeur absolue. Celle-ci correspond à la plus grande perte que l'on peut éviter ou le gain le plus élevé dû au nouveau trajet.

Dans notre exemple, il s'agit de $\delta_{Bl.D}$ **= -2** et on peut ajouter des quantités dans les cases **Bl.D** et **T.M**. La quantité maximale à affecter dans ces cases provient des cases **Bl.M** et **T.D**. Dans ces cases les quantités disponibles sont de **2** et **5**. La quantité maximale à affecter dans le nouveau trajet est de **2** (on choisit le minimum entre 2 et 5) et chaque unité permettra de diminuer le coût de **2 U.M** ($\delta_{Bl.D}$ **= -2**).
On aura ainsi pour nouvelle solution :

$$\mathbf{Z = 135 + 2\,(-2) = 131}.$$

Tableau 26 : Première affectation après amélioration de la solution de base.

Unités \ Clients	M	B_m	D	B_f	Disponibilités
Alger		6			6
Blida			2	7	9
Tipaza	10	2	3		15
Demandes	10	8	5	7	0

À partir de cette nouvelle affectation, on peut vérifier le coût de ce trajet en calculant **Z** :

$$Z = 6.3 + 2.5 + 7.2 + 10.5 + 2.6 + 3.9 = 131 \text{ U.M.}$$

À ce stade, on ne sait pas si la solution est optimale. Pour cela, on considère de nouveau les cases vides en effectuant des affectations tout en respectant les contraintes.

Tableau 27 : Ensemble des tableaux sur les coûts réduits.

Tableau a_2

+1	6 -1		
		2	7
10 -1	2 +1	3	

Tableau b_2

	6 -1	+1	
		2	7
10	2 +1	3 -1	

Tableau c_2

	6 -1		+1
		2 +1	7 -1
10	2 +1	3 -1	

Tableau d_2

	6		
+1		2 -1	7
10 -1	2	3 +1	

Tableau e_2

	6		
	+1	2 -1	7
10	2 -1	3 +1	

Tableau f_2

	6		
+1		2	7 -1
10 -1	2	3	+1

$\delta_{A.M} = 4 - 3 + 6 - 5 = 2$ (tableau **a**2).
$\delta_{A.D} = 7 - 9 + 6 - 3 = 1$ (tableau **b**2).
$\delta_{A.Bf} = 2 - 2 + 5 - 9 + 6 - 3 = -1$ (tableau **c**2).
$\delta_{Bl.M} = 3 - 5 + 9 - 5 = 2$ (tableau **d**2).
$\delta_{Bl.Bm} = 4 - 5 + 9 - 6 = 2$ (tableau **e**2).
$\delta_{T.Bf} = 3 - 2 + 7 - 5 = 3$ (tableau **f**2).

Tableau 28 : Nouvelle affectation après une deuxième amélioration de la solution de base.

Unités \ Clients	M	B_m	D	B_f	Disponibilités
Alger		3		3	6
Blida			5	4	9
Tipaza	10	5			15
Demandes	10	8	5	7	30

Le coût total est donc égal à : **3.3 + 3.2 + 5.5 + 4.2 + 10.5 + 5.6 = 128 U.M**.

<u>Tableau 29</u> : Ensemble des tableaux sur les coûts réduits.

Tableau a_3

+1	3 -1		3
		5	4
10 -1	5 +1		

Tableau b_3

	3	+1	3 -1
		5 -1	4 +1
10	5		

Tableau c_3

	3		3
+1		5 -1	4
10 -1	5	+1	

Tableau d_3

	3 -1		3 +1
	+1	5	4 -1
10	5		

Tableau e_3

	3		3
	+1	5 -1	4
10	5 -1	+1	

Tableau f_3

	3 +1		3 -1
		5	4
10	5 -1		+1

$\delta_{A.M} = 4 - 3 + 6 - 5 = 2$ (tableau **a3**).
$\delta_{A.D} = 7 - 2 + 2 - 5 = 2$ (tableau **b3**).
$\delta_{Bl.M} = 3 - 5 + 9 - 5 = 2$ (tableau **c3**).
$\delta_{Bm.Bf} = 4 - 2 + 2 - 3 = 1$ (tableau **d3**).
$\delta_{T.D} = 9 - 5 + 4 - 6 = 2$ (tableau **e3**).
$\delta_{T.Bf} = 7 - 2 + 3 - 6 = 2$ (tableau **f3**).

Tous les δ_{ij} sont positifs, la solution précédente est donc optimale, il n'y a pas alors de troisième amélioration des coûts et **Z = 128 U.M** est la solution optimale.

Dans le cas où la valeur δ_{ij} = **0**, cela signifie que la solution optimale obtenue n'est pas unique et qu'il existe un autre itinéraire aboutissant au même coût de transport. Il s'agit dans ce cas d'une solution optimale multiple. Pour trouver cet itinéraire, il suffit de faire une nouvelle affectation dans la case correspondante à δ_{ij} = **0**.
En utilisant la méthode du coin nord-ouest, on peut obtenir la même solution optimale par la méthode du stepping stone mais avec un peu plus d'itérations.

3 – 2 – Méthode des coûts duaux

Comme il a déjà été mentionné dans le chapitre précédent, l'un des intérêts de la dualité est la simplification des calculs. Pour le modèle de transport, il est possible de simplifier les opérations pour l'obtention d'une solution optimale par la méthode des coûts duaux qui utilise les propriétés du théorème des écarts complémentaires.

Dans la méthode de stepping stone, l'évaluation des coûts réduits de tous les parcours correspondants à des cases vides est souvent longue et fastidieuse. Le programme linéaire dual du transport permet d'atteindre la solution optimale en calculant moins de coûts réduits.
Dans le paragraphe ***1 – 4***, on a défini le programme linéaire primal du transport et son programme linéaire dual correspondant. On a représenté par y_i les variables duales pour les

contraintes liées aux disponibilités et par z_j les variables duales pour les contraintes concernant les demandes.
En considérant x_{op} la solution optimale du programme linéaire primal, y_{op} la solution optimale du programme linéaire dual correspondant et le théorème des écarts complémentaires, on a :

$$x_{op\,ij} > 0 \Rightarrow y_{op.i} + z_{op.j} = c_{ij} .$$

Il ne peut y avoir de solution pour le programme linéaire dual que si :

$$c_{ij} - (y_i + z_j) \geq 0 \quad \text{ou} \quad c_{ij} \geq y_i + z_j .$$

- Si $(y_i + z_j) \leq c_{ij}$ pour les variables hors base, la solution est optimale.
- Si $(y_i + z_j) > c_{ij}$ pour une variable hors base, l'optimum n'est pas atteint. On introduit alors une variable x_{ij} pour améliorer la solution. Le processus itératif se poursuit jusqu'à obtention de tous les $(y_i + z_j) > c_{ij}$.

Application.

Reprenons la solution de base obtenue par la méthode de Houthaker dans notre exemple pour l'améliorer et obtenir la solution optimale.
Les variables en base sont donc : $x_{A.Bm}$, $x_{Bl.M}$, $x_{Bl.Bf}$, $x_{T.M}$, $x_{T.Bm}$ et $x_{T.D}$. D 'après le théorème des écarts complémentaires et la matrice des coûts, on peut écrire le système d'équations suivant : $y_A + z_{Bm} = 3$ $\quad y_{Bl} + z_M = 3$ $\quad y_{Bl} + z_{Bf} = 2$

$y_T + z_M = 5$ $\quad y_T + z_{Bm} = 6$ et $\quad y_T + z_D = 9$.

Pour résoudre ce système d'équations, il suffit de fixer arbitrairement l'une des variables duales z_i égale à 0 et ensuite résoudre l'ensemble des équations par un procédé séquentiel. En posant $z_{Bm} = 0$, on obtient : $y_A = 3$, $y_{Bl} = 4$, $y_T = 6$, $z_M = -1$, $z_D = 3$ et $z_{Bf} = -2$.

À partir de ces valeurs, nous pouvons établir un tableau à double entrée avec y_i en ligne et z_j en colonne. On inscrit les coûts dans les coins nord-ouest des cases et la solution de base au milieu de chaque case correspondante à celle-ci dans un cercle.

Tableau 30 : Tableau correspondant à la méthode des coûts duaux.

y_i \ z_j	$z_M = -1$	$z_{Bm} = 0$	$z_D = 6$	$z_{Bf} = -2$	Disponibilités
$y_A = 3$	4 2 ***2***	3 6	7 9 ***-2***	2 1 ***1***	6
$y_{Bl} = 4$	3 2 **-**	4 4 ***0***	5 10 ***-5*** **+**	2 7	9
$y_T = 6$	5 8 **+**	6 2	9 5 **-**	7 4 ***3***	15
Demandes	10	8	5	7	30

On évalue pour toutes les cases vides les $\delta_{ij} = y_i + z_j$ et on les inscrit en haut à droite de chaque case (coin nord-est). On calcule ensuite les $\Delta_{ij} = c_{ij} - \delta_{ij}$ que l'on inscrit an milieu de chaque case vide en italique et en gras. On obtient le tableau **241**.

Nous obtenons deux $\Delta_{ij} < 0$, on choisit le plus petit, c'est-à-dire -5 qui correspond à la case $y_{Bl}\ z_D$. On effectue une nouvelle affectation à partir de cette case (les + et – en rouge dans le tableau). On y affecte le minimum de (2, 5), donc **2** et on obtient l'affectation du tableau 31.

Tableau 31 : Nouvelle affectation d'après la méthode des coûts duaux

Unités \ Clients	M	B_m	D	B_f	Disponibilités
Alger		6			6
Blida			2	7	9
Tipaza	10	2	3		15
Demandes	10	8	5	7	30

Le coût total correspondant à cette affectation est de :

$$Z_3 = 6.3 + 2.5 + 7.2 + 10.5 + 2.6 + 3.9 = 131 \text{ U.M.}$$

On vérifie tout d'abord si l'optimum est atteint. Pour cela, on doit calculer les y_i et z_j avec les données cette nouvelle affectation.

Tableau 32 : Nouvelle affectation avec la méthode des coûts duaux.

y_i \ z_j	$z_M = -1$	$z_{Bm} = 0$	$z_D = 3$	$z_{Bf} = 0$	Disponibilités
$y_A = 3$	4 2 *2*	3 (6)	7 6 *1*	2 3 *-1*	6
$y_{Bl} = 2$	3 1 2	4 2 *2*	5 (*2*)	2 (*7*)	9
$y_T = 6$	5 (10)	6 (2)	9 (3)	7 6 *1*	15
Demandes	10	8	5	7	30

Le minimum des Δ_{ij} est (**-1**) qui correspond à la case $Y_A.Z_{Bf}$. On ajoute une quantité dans cette case tout en équilibrant les lignes et colonnes et on obtient le tableau 33.

Tableau 33 : Tableau avec les calculs intermédiaires.

Unités \ Clients	M	B_m	D	B_f	Disponibilités
Alger		6 -1		+1	6
Blida			2 +1	7 -1	9
Tipaza	10	2 +1	3 -1		15
Demandes	10	8	5	7	30

La quantité à affecter dans ce nouveau trajet est de min (6, 3, 7) = **3**, d'où le tableau **34**.

Tableau 34 : Nouvelle affectation avec la méthode des coûts duaux.

Clients / Unités	M	B_m	D	B_f	Disponibilités
Alger		**3**		**3**	**6**
Blida			**5**	**4**	**9**
Tipaza	**10**	**5**			**15**
Demandes	**10**	**8**	**5**	**7**	**30**

Le coût total est de :

$$Z_3 = \mathbf{3.3 + 3.2 + 5.5 + 4.2 + 10.5 + 5.6 = 128\ U.M.}$$

La solution optimale est atteinte, on peut le vérifier en calculant les coûts réduits. *Évidemment, il n'est pas interdit de faire ces calculs, il ne faut pas confondre interdit avec facultatif.*

3 – 2 – Méthode heuristique

Les méthodes de stepping stone et des coûts duaux permettent de déterminer la solution optimale du problème. Cela peut parfois être long et fastidieux, ce qui entraîne des coûts très élevés et quelquefois même inutiles par rapport aux objectifs fixés. Il existe des méthodes permettant de traiter les données disponibles pour obtenir une solution qui n'est pas toujours optimale, mais qui se rapproche de l'optimum avec une probabilité élevée. Il s'agit des méthodes heuristiques.

Dans ce qui suit, nous ne présenterons que la méthode de Vogel, appelée aussi méthode de Ballas-Hammer ou de la différence maximale.

Cette méthode consiste à calculer pour chaque ligne et colonne de la matrice des coûts de transport, la différence entre les deux coûts les plus faibles. Ces différentes valeurs obtenues, appelées nombres de Vogel, sont inscrites à droite et au dessous de la matrice des coûts. Au plus grand nombre de Vogel (ligne ou colonne), on sélectionne dans la ligne ou la colonne respective la case du coût minimum. On alloue à cette case la plus petite valeur entre la demande et la disponibilité, c'est-à-dire min ($\mathbf{a_i}$, $\mathbf{d_j}$). Dans la phase suivante, on élimine la ligne (ou colonne) saturée tout en déduisant dans les demandes ou disponibilités, selon le cas, les quantités affectées à la ligne (ou colonne) qui n'est plus prise en compte dans la suite des calculs, puisqu'elle est saturée. On reprend ensuite, le même processus avec la matrice des coûts, les offres disponibles et les demandes insatisfaites restantes jusqu'à élimination de toutes les lignes et colonnes.

Reprenons notre exemple en établissant tout d'abord le tableau du transport **35**.

Tableau 35 : Premier tableau du transport correspondant à la méthode de Vogel.

Clients / Unités	M	B_m	D	B_f	a_i	Nombres de Vogel
Alger	4	3	7	2	6	3 – 2 = 1
Blida	3	4	5	2	9	3 – 2 = 1
Tipaza	5	6	9	7	15	6 – 5 = 1
d_j	10	8	5	7	30	
Nb de Vogel	4-3=1	4-3=1	7-5=2	7-2=5		

Dans ce premier tableau, le plus grand nombre de Vogel correspond à la différence maximale 5, qui coïncide à la colonne **4** (quatrième client de **Boufarik**). Le coût minimum se rapportant à cette colonne est min (2, 2, 7) = 2. On affecte à la case **A.B**$_f$ le minimum entre la demande et la disponibilité, c'est-à-dire min (6, 7) = **6**. La ligne correspondante à l'unité de production d'**Alger** est ainsi saturée, et ne sera plus prise en considération dans les tableaux qui suivent, car l'unité d'**Alger** a distribué toute sa production.

Le tableau suivant est constitué alors de quatre clients et deux unités de production.

Tableau 36 : Deuxième tableau du transport correspondant à la méthode de Vogel.

Clients / Unités	M	B_m	D	B_f	a_i	Nombres de Vogel
Blida	3	4	5	2	9	3 – 2 = 1
Tipaza	5	6	9	7	15	6 – 5 = 1
d_j	10	8	5	(7-6)=1	24	
Nb de Vogel	5-3=2	6-4=2	9-5=4	7-2=5		

On constate que la demande du client de **Bourarik** a été réduite à (7 – 6) = **1 m**^{3} puisque **6** unités ont déjà été distribuées par l'unité de production d'**Alger**.
Dans ce tableau **247**, le plus grand nombre de Vogel est **5** et correspond à la quatrième colonne (client de **Boufarik**). On affecte min (9, 1) = **1** à la case **B**$_l$**.B**$_f$ qui constitue le coût le plus faible. La colonne **4** est alors saturée et on élimine cette colonne, les besoins du quatrième client ont été satisfaits.
On obtient le tableau **37** avec trois clients et deux unités de production.

Tableau 37 : Troisième tableau du transport correspondant à la méthode de Vogel.

Clients / Unités	M	B_m	D	a_i	Nombres de Vogel
Blida	3	4	5	9-1=8	4 – 3 = 1
Tipaza	5	6	9	15	6 – 5 = 1
d_j	10	8	5	23	
Nb de Vogel	5-3=2	6-4=2	9-5=4		

Le plus grand nombre de Vogel est **4** et correspond à la troisième colonne, c'est-à-dire au client de **Dellys**. On alloue à la case **Bl.D** le min (8, 5) = **5**. Les besoins du client de **Dellys** étant satisfaits, on élimine cette colonne dans la suite des calculs.

Tableau 38 : Quatrième tableau du transport correspondant à la méthode de Vogel.

Clients / Unités	M	B_m	a_i	Nombres de Vogel
Blida	3	4	8 – 5 = 3	4 – 3 = 1
Tipaza	5	6	15	6 – 5 = 1
d_j	10	8	18	
Nb de Vogel	5-3=2	6-4=2		

On considère le plus grand nombre de Vogel qui est **2**. Dans le cas comme celui-ci où deux nombres de Vogel sont égaux, on choisit arbitrairement l'un d'eux. On choisit la case **Bl.Bm** pour lui affecter le minimum de (3, 8) = **3**, (*à titre d'exercice vous pouvez reprendre les mêmes calculs en considérant la case Bl.M*). L'unité de production de **Blida**, qui correspond à la deuxième ligne, n'a plus de produits à livrer donc on élimine cette ligne.

Tableau 39 : Cinquième tableau du transport correspondant à la méthode de Vogel.

Clients / Unités	M	B_m	a_i	Nombres de Vogel
Tipaza	5	6	15	6 – 5 = 1
d_j	10	8 – 3 = 5	15	
Nombre de Vogel	5-0=5	6-0=6		

Le plus grand nombre de Vogel étant **6**, on sature la deuxième colonne, correspondante au client de **Boumerdes**, en lui affectant le min (15, 5) = **5**.

Tableau 40 : Sixième tableau du transport correspondant à la méthode de Vogel.

Unités \ Clients	M	a_i
Tipaza	5	10
d_j	10	0

On termine en saturant la première colonne (correspondante au client de **Médéa**) en lui affectant **10 m^3**.

On peut établir le tableau **41** qui récapitule l'affectation selon la méthode de Vogel.

Tableau 41 : Affectation selon la méthode de Vogel.

Unités \ Clients	M	B_m	D	B_f	Disponibilités
Alger				6	6
Blida		3	5	1	9
Tipaza	10	5			15
Demandes	10	8	5	7	30

La solution est donc :

$$Z_4 = 6.2 + 3.4 + 5.5 + 1.2 + 10.5 + 5.6 = 131 \text{ U.M.}$$

On constate que la solution est assez proche de l'optimum qui est de **128 U.M**.

Cette solution est aussi meilleure que Z_1, Z_2 et Z_3 (Z_1 = 168, Z_2 = 141 et Z_3 = 135).

Si l'on veut obtenir l'optimum à partir de cette solution, on peut utiliser la méthode de stepping stone. Il suffira d'une seule itération pour obtenir la solution optimale.

4 – Cas particuliers du modèle de transport

Nous allons considérer certains cas particuliers des modèles de transport et qui sont les problèmes suivants :

1 - Problème de transport **non équilibré**.

2 - Problème de **transbordement**.

3 - Problème de transport avec des **itinéraires interdits**.

4 - Problèmes de transport avec des **itinéraires imposés**.

5 - Problèmes de transport avec des **centres liés**.

6 - Problème de **dégénérescence**.

4 – 1 – Problème du transport non équilibré

Dans le cas où les capacités des produits disponibles et celles des produits demandés sont différentes, le modèle de transport et dit déséquilibré (ou non équilibré), *mais ne craignez pas que cela ne vous déséquilibre, car ce cas particulier est le plus facile à traiter.*
Ce cas correspond à la formule suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i \neq \sum_{j=1}^{m} \mathbf{d}_j \ .$$

où $\mathbf{a}_i$ représentent les quantités de produits disponibles de **n** origines et $\mathbf{d}_j$ les quantités de produits demandées de **m** destinations.

Dans ce modèle de transport déséquilibré, deux cas peuvent se présenter.

Premier cas : les disponibilités sont supérieures aux demandes.
Ainsi, dans ce cas, les demandes sont totalement satisfaites et il reste une certaine quantité $\mathbf{Q}_{m+1}$ de produits disponibles qui est égale à la formule qui suit.

$$\mathbf{Q}_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i - \sum_{j=1}^{m} \mathbf{d}_j \ .$$

Il suffit d'affecter cette quantité à un centre de consommation fictif et d'attribuer un coût de transport nul aux quantités transférées des origines à ce centre.

Deuxième cas : Les disponibilités sont inférieures aux demandes.
Les demandes ne peuvent être totalement satisfaites et le déficit est de $\mathbf{D}_{n+1}$. Pour pouvoir combler ce déficit, il suffit de créer une source supplémentaire fictive dont la capacité est égale à $\mathbf{D}_{n+1}$.
Le coût de transport pour les livraisons de cette source fictive aux différentes destinations sera considéré comme nul.

Application où la demande est inférieure à l'offre

Soit le tableau 42 représentant cinq demandes de clients à satisfaire à partir de quatre dépôts.

Tableau 42 : Tableau du transport.

Dépôts \ Clients	1	2	3	4	5	a_i
I	8	27	17	14	9	60
II	8	5	10	2	10	75
III	7	21	18	14	10	80
IV	23	9	12	18	2	35
d_j	75	20	15	25	40	175 ≠ 250

On constate que les quantités des demandes ne sont pas égales à celles des disponibilités (175 et 250). On ajoute donc un centre de consommation fictif pour absorber le surplus et on attribue aux chemins menant à ce centre des coûts de transport nuls.

Tableau 43 : Tableau du transport modifié.

Dépôts \ Clients	1	2	3	4	5	*6*	a_i
I	8	27	17	14	9	*0*	60
II	8	5	10	2	10	*0*	75
III	7	21	18	14	10	*0*	80
IV	23	9	12	18	2	*0*	35
d_j	75	20	15	25	40	*75*	250 = 250

Dans le tableau 43, la colonne 6, écrite en italique, représente un client fictif qui absorbe toutes les disponibilités qui n'ont pas trouvé de client. Le coût de transport des dépôts vers ce client fictif est évidemment nul.
À partir de ce tableau de transport, on peut calculer une solution de base en utilisant la méthode de Houthaker.

Tableau 44 : Calcul d'une solution de base par la méthode de houthaker.

Dépôts \ Clients	1	2	3	4	5	*6*	a_i
I					5	55	60
II		20	15	25		15	75
III	75					5	80
IV					35		35
d_j	75	20	15	25	40	*75*	250 = 250

Le coût correspondant à cette solution est de :

$$5.9 + 55.0 + 20.5 + 15.10 + 25.2 + 15.0 + 75.7 + 5.0 + 35.2 = 940.$$

Nous allons utiliser la méthode de stepping stone pour calculer la solution optimale *ou, si on a de la chance, confirmer que cette solution est optimale.*

Comme il y a **14** cases vides, on devra alors calculer **14** coûts réduits. Évidemment la case IV.6 n'est pas comptabilisée puisque cet itinéraire n'existe pas.

Tableau 45 : Tableaux des coûts réduits.

Tableau a_1

+1				5 -1
	20	15	25	
75 -1				+1
				35

Tableau b_1

	+1			5 -1
	20 -1	15	25	+1
75				
				35

Tableau c_1

		+1		5 -1
	20	15 -1	25	+1
75				
				35

$\delta_{I.1}$ = 8 – 9 + 10 – 7 = 2 (tableau **a_1**).

$\delta_{I.2}$ = 27 – 9 + 10 – 5 = 23 (tableau **b_1**).

$\delta_{I.3}$ = 17 – 9 + 10 – 10 = 8 (tableau **c_1**).

Tableau 46 : Tableaux des coûts réduits.

Tableau d_1

			+1	5 -1
	20	15	25 -1	+1
75				
				35

Tableau e_1

				5
+1	20 -1	15	25	
75 -1	+1			
				35

Tableau f_1

				5
	20 -1	15	25	+1
75				
	+1			35 -1

$\delta_{I.4}$ = 14 – 9 + 10 – 2 = 13 (tableau **d_1**).

$\delta_{II.1}$ = 8 – 5 + 21 – 7 = 17 (tableau **e_1**). $\delta_{II.5}$ = 10 – 5 + 9 – 2 = 12 (tableau **f_1**).

Tableau 47 : Tableaux des coûts réduits.

Tableau g_1

				5
+1	20 -1	15	25	
75 -1	+1			
				35

Tableau h_1

				5
+1	20	15 -1	25	
75 -1		+1		
				35

Tableau i_1

				5
+1	20	15	25 -1	
75 -1			+1	
				35

$\delta_{III.2}$ = 21 – 5 + 8 – 7 = 17 (tableau **g_1**, identique au tableau **e_1**).

$\delta_{III.3}$ = 18 – 10 + 8 – 7 = 9 (tableau **h_1**) $\delta_{III.4}$ = 14 – 2 + 8 – 7 = 13 (tableau **i_1**).

Tableau 48 : Tableaux des coûts réduits.

Tableau j_1

				5
	20	15	25	
75 -1				+1
+1				35 -1

Tableau k_1

				5
	20	15	25	
75 -1				+1
+1				35 -1

Tableau l_1

				5
	20 -1	15	25	+1
75				
	+1			35 -1

$\delta_{III.5}$ = 10 – 2 + 23 – 7 = **24** (tableau $\mathbf{j_1}$).

$\delta_{IV.1}$ = 23 – 7 + 10 – 2 = **24** (tableau $\mathbf{k_1}$) $\delta_{IV.2}$ = 9 – 2 + 10 – 5 = **12** (tableau $\mathbf{l_1}$).

Tableau 49 : Tableaux des coûts réduits.

Tableau m_1

				5
	20	15 -1	25	+1
75				
		+1		35 -1

Tableau n_1

				5
	20	15	25 -1	+1
75				
			+1	35 -1

$\delta_{IV.3}$ = 12 – 10 + 10 – 2 = **10** (tableau $\mathbf{m_1}$). $\delta_{IV.4}$ = 18 – 2 + 10 – 2 = **24** (tableau $\mathbf{n_1}$).

Tous les coûts réduits calculés à partir de la solution de base sont positifs. Ainsi, aucune amélioration ne peut être effectuée sur la dernière affectation obtenue par la méthode de Houthaker. La solution optimale est donc égale à **940**.

Application où la demande est supérieure à l'offre.

Soient quatre sources **I** à **IV** disposant des quantités respectives de **60**, **40**, **75** et **25** unités (sans unité précise puisque les quantités ne sont pas définies) et cinq destinations notées **1** à **5** qui ont respectivement des demandes de **50**, **75**, **30**, **25** et **60**.

Les coûts de transport sont donnés dans le tableau de transport **50**.

Tableau 50 : Tableau du transport.

Demandes / Sources	1	2	3	4	5	a_i
I	110	120	100	105	115	60
II	165	155	150	180	175	40
III	200	210	203	206	209	75
IV	130	125	127	132	133	25
d_j	50	75	30	25	60	240 ≠ 200

On constate que les demandes sont supérieures aux disponibilités, d'où l'introduction d'une demande fictive dans le tableau 51 qui absorbera l'excédent avec des coûts de transport nuls.

Tableau 51 : Tableau du transport modifié.

Demandes / Sources	1	2	3	4	5	a_i
I	110	120	100	105	115	60
II	165	155	150	180	175	40
III	200	210	203	206	209	75
IV	130	125	127	132	133	25
V	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	40
b_j	50	75	30	25	60	240

À partir de ce tableau nous pouvons calculer une solution de base en utilisant la méthode de Houthaker et on obtient le tableau 52.

Tableau 52 : Calcul d'une solution de base par la méthode de houthaker.

Demandes / Sources	1	2	3	4	5	a_i
I	5		30	25		60
II		40				40
III	45				30	75
IV		25				25
V		*10*			*30*	*40*
b_j	50	75	30	25	60	240

Le coût correspondant à cette solution est de :

5.110 + 30.100 + 25.105 + 40.155 + 45.200 + 30.209 + 25.125 + 10.0 + 30.0 = 30 770.

À partir de cette solution, on optimise ce coût de transport par la méthode de stepping stone.

Tableau 53 : Tableaux des coûts réduits.

Tableau a_2

5	+1	30 -1	25	
	40 -1	+1		
45				30
	25			

Tableau b_2

5 -1		30	25	+1
	40			
45 +1				30 -1
	25			

Tableau c_2

5		30	25	
+1	40 -1			
45 -1	+1			30
	25			

$\delta_{I.2}$ = 120 – 100 + 150 – 155 = 15 (tableau **a**$_2$). $\delta_{I.5}$ = 115 – 209 + 200 – 110 = - 4 (tableau **b**$_2$).
$\delta_{II.1}$ = 165 – 155 + 125 – 130 = 5 (tableau **c**$_2$).

Tableau 54 : Tableaux des coûts réduits.

Tableau d_2

5	+1	30	25 -1	
	40 -1		+1	
45				30
	25			

Tableau e_2

5		30	25	
	40 -1			+1
45	+1			30 -1
	25			

Tableau f_2

5 +1		30 -1	25	
	40			
45 -1		+1		30
	25			

$\delta_{II.4}$= 180 – 105 + 120 – 155 = 40 (tableau **d**$_2$). $\delta_{II.5}$ = 175 – 209 + 210 – 155 = 21 (tableau **e**$_2$).
$\delta_{III.3}$ = 203 – 100 + 110 – 200 = 13 (tableau **f**$_2$).

Tableau 55 : Tableaux des coûts réduits.

Tableau g_2

5 +1		30	25 -1	
	40			
45 -1			+1	30
	25			

Tableau h_2

5		30	25	
	40			
45 -1	+1			30
+1	25 -1			

Tableau i_2

5	+1	30 -1	25	
	40			
45				30
	25 -1	+1		

$\delta_{III.4}$ = 206 – 105 + 110 – 200 = 11 (tableau **g**$_2$).
$\delta_{IV.1}$ = 130 – 125 + 210 – 200 = 15 (tableau **h**$_2$).$\delta_{IV.3}$ =127 – 100 + 120 – 125 = 22 (tableau **i**$_2$).

Tableau 56 : Tableaux des coûts réduits.

Tableau j_2

5	+1	30	25 -1	
	40			
45				30
	25 -1		+1	

Tableau k_2

5		30	25	
	40			
45	+1			30 -1
	25 -1			+1

$\delta_{IV.3}$ = 132 – 105 + 120 – 125 = 22 (tableau j_2).
$\delta_{IV.4}$ = 133 – 209 + 210 – 125 = 9 (tableau k_2).

Tous les coûts réduits ont été calculés et on constate que seul le coût réduit correspondant à la case **I.5** est négatif (- 4). On affecte donc 5 unités (minimum de 5 et 30) aux cases **I.5** et **III.1**, puis on diminue aussi de 5 unités dans les quantités des cases **I.1** et **III.5**, d'où le tableau 57 représentant la nouvelle affectation.

Tableau 57 : Tableau représentant une nouvelle affectation.

Demandes / Sources	1	2	3	4	5
I			30	25	5
II		40			
III	50				25
IV		25			

Le coût c

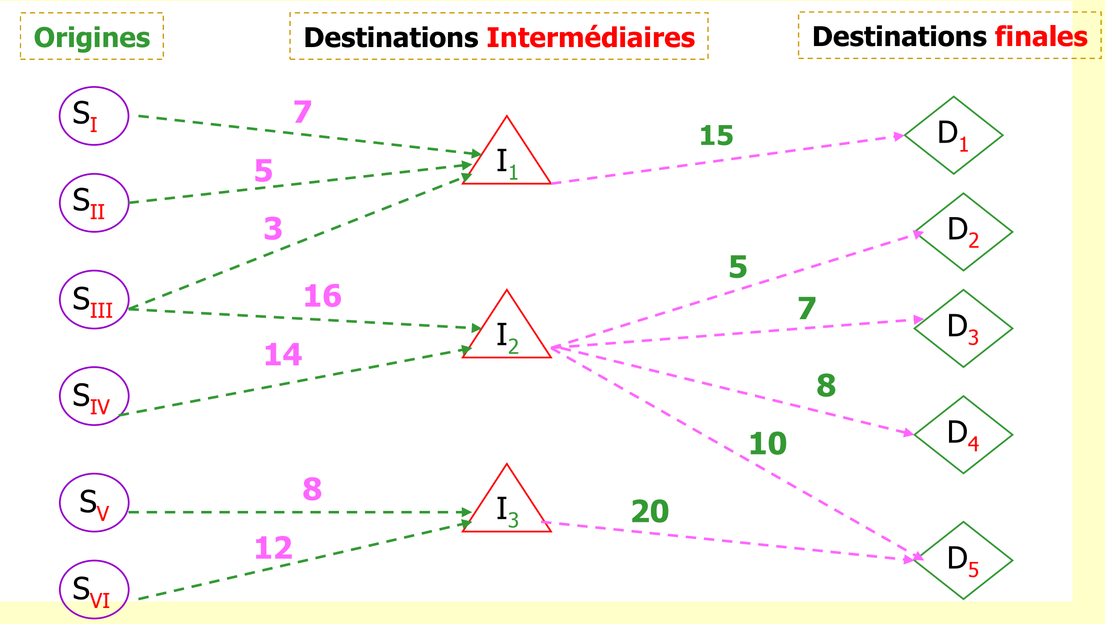
30.100 + 25.105 + 5.115 + 40.155 + 50.200 + 25.209 + 25.125 = 30 750.

Pour savoir s'il s'agit de la solution optimale, il suffit de calculer les coûts réduits à partir de cette affectation, *on vous laisse le soin de faire ces calculs, ou plutôt, on vous laisse vous divertir avec votre sport intellectuel.*

4 – 2 – Problème de transbordement

Au problème classique de transport, on peut envisager une extension en ajoutant aux deux niveaux considérés (origine et destination), un troisième niveau intermédiaire composé de regroupées et d'éclatements intermédiaires. Il s'agit du problème de transbordement que l'on peut schématiser dans le graphe 3. Dans ce cas, on considère six origines et cinq destinations finales. Entre ces deux niveaux, on ajoute trois destinations intermédiaires.

Graphe 3 : Représentation graphique du modèle de transbordement ($n = 6$, $m = 5$).



En considérant n origines, p destinations intermédiaires et m destinations finales, le problème du transport peut s'écrire sous forme de programme linéaire comme suit.

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} C_{ik}\, x_{ik} + \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{m} C_{kj}\, x_{kj}$$

$$\sum_{k=1}^{p} x_{ik} = a_i \qquad \forall\, i$$

$$\sum_{k=1}^{p} x_{kj} = d_j \qquad \forall\, j$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = \sum_{j=1}^{m} x_{kj} \qquad \forall\, j$$

$$x_{ik} \text{ et } x_{kj} \geq 0 \qquad \forall\, i \text{ et } j.$$

On peut résoudre ce type de problème en considérant les destinations intermédiaires à la fois comme origines et comme destinations.

Le tableau de transport correspondant à ce cas particulier est composé de (m + p) lignes et (p + n) colonnes.

Tableau 58 : Tableau de transport.

	I_I	…	I_k	…	I_p	D_1	…	D_i	…	D_n	Disp
S_I	c_{1I} x_{1II}	…	c_{1k} x_{1k}	…	c_{1p} x_{1p}		…		…		d_{SI}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
S_i	c_{iI} x_{iI}	…	c_{ik} x_{ik}	…	c_{ip} x_{ip}		…		…		d_{Si}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
S_m	c_{mI} x_{mI}	…	c_{mk} x_{mk}	…	c_{mp} x_{mp}		…		…		d_{Sm}
I_I		…		…		c_{I1} x_{I1}	…	c_{Ii} x_{Ii}	…	c_{In} x_{In}	d_{I1}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
I_k		…		…		c_{k1} x_{k1}	…	c_{ki} x_{kii}	…	c_{kn} x_{kn}	d_{Ik}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
I_p		…		…		c_{p1} x_{p1}	…	c_{pi} x_{pi}	…	c_{pn} x_{pn}	d_{Ip}
Dem	d_{I1}	…	d_{Ik}	…	d_{Ip}	d_{D1}	…	d_{D2}	…	d_{Dn}	

Les cases hachurées en jaune ne sont pas utilisées puisqu'elles ne représentent pas l'intersection de deux variables.
Pour une application, reprenons les données numériques du graphe 3.

Tableau 59 : Tableau de transport du graphe 3.

	1	*2*	*3*	1	2	3	4	5	Disp
I	7								7
II	5								5
III	3	16							19
IV		14							14
V			8						8
VI			12						12
1				15					15
2					5	7	8	10	30
3								20	20
Dem	15	30	20	15	5	7	8	30	130

Comme vous pouvez le constater, il n'y a pas de valeurs numériques aux coûts du tableau 58. Puisqu'il ne s'agit que d'une illustration du tableau de transport dans un cas de transbordement, vous pouvez ajouter les valeurs de votre choix.

4 – 3 – Modèle de transport avec itinéraires interdits

Il arrive souvent dans les problèmes de transport que certaines « routes » ou « itinéraires » ne sont pas praticables. Il s'agit de transport avec itinéraires interdits. Le programme linéaire associé à ce problème est le suivant :

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij}\, x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} d_j$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = d_j$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Il existe au moins un couple (**i**, **j**) tel que (**1** < **i** < **n**) et (**1** < **j** < **m**), pour lequel la liaison est interdite. La résolution de ce problème est simple. Il suffit de trouver une solution de base au problème sans restriction, remplacer dans cette solution les C_{ij} par **0** lorsque la « route » est permise et par **1** lorsque la « route » est interdite. Résoudre alors le problème avec ces nouvelles données par la méthode de stepping stone, ou la méthode de votre choix.
À préciser que lorsqu'une quantité $x_{ij} \neq 0$ est affectée à une case (**i**, **j**) où le C_{ij} = **1**, le problème n'a pas de solution.

Application du modèle de transport avec itinéraires interdits

Considérons le tableau de transport **60** où la route **II.3** ne peut être empruntée.

Tableau 60 : Tableau de transport d'un modèle avec itinéraire interdit.

	1	2	3	Disponibilités
I	6	4	2	10
II	5	5	3	8
Demandes	6	7	5	18

Les disponibilités sont respectivement de **10** et **8** pour les centres **I** et **II**. Les demandes sont de **6** pour la première destination, de **7** pour la seconde et de **5** pour la troisième.

Vous pouvez utiliser la méthode que vous voulez pour le calcul d'une solution de base. Nous présentons ici une méthode qui prend en considération les coûts afin d'arriver à la solution optimale avec le moins d'itérations à effectuer.

Tableau 61 : Solution de base obtenue avec la méthode du meilleur coin nord-ouest.

	1	2	3	Disponibilités
I	6	4 · 5	2 · 5	10
II	5 · 6	5 · 2	3	8
Demandes	6	7	5	18

$$Z = 5.4 + 5.2 + 6.5 + 2.5 = 70.$$

Méthode de stepping stone

On remplace dans le tableau du transport les coûts par 0 lorsque le trajet est libre et 1 lorsque le trajet est interdit, on obtient le tableau 62 et l'on calcule les coûts réduits.

Tableau 62 : Tableau du transport modifié avec un itinéraire interdit.

	1	2	3	Disponibilités
I	0	0 · 5	0 · 5	10
II	0 · 6	0 · 2	1	8
Demandes	6	7	5	18

Tableau 63 : Tableaux des coûts réduits.

Tableau a

+1	5 -1	5
6 -1	2 +1	

Tableau b

	5 +1	5 -1
6	2 -1	+1

$\delta_{I.1} = 0 - 0 + 0 - 0 = 0$ (tableau a).
$\delta_{II.3} = 1 - 0 + 0 - 0 = 1$ (tableau b).

Tous les coûts réduits sont positifs ou nuls, la solution est donc optimale.
Le coût total est donc :

$$Z = 70.$$

4 – 4 – Modèle de transport avec itinéraires imposés

Lorsque dans un modèle de transport, la marchandise transportée doit obligatoirement suivre un chemin prédéterminé, il s'agit d'un problème de transport avec « itinéraire imposé ».

L'écriture générale du programme linéaire associé à ce problème est la suivante :

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij}\, x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = d_j$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Il existe au moins un couple (**i, j**) tel que (**1** < **i** < **m**) et (**1** < **j** < **m**), pour lequel la liaison est imposée.

Dans un problème de transport, où l'itinéraire est imposé, trois cas peuvent se présenter.

- On impose à ce chemin une quantité minimale à transporter.
- On impose à ce chemin une quantité exacte à transporter.
- On impose à ce chemin une quantité maximale à transporter.

Nous présentons dans ce qui suit l'étude des deux premiers cas seulement.

- Quantité minimale à transporter.

Dans ce premier cas, dans lequel une quantité minimale T_{mi} à transporter est imposée dans un itinéraire, il faut ramener le problème à un cas où il n'y a pas de restriction, d'où la nécessité de :

* Soustraire de la disponibilité a_i, la quantité minimale T_{mi}.

* Soustraire de la demande b_j, la quantité minimale T_{mi}.

La soustraction est nécessaire pour les demandes et disponibilités simultanément afin d'équilibrer le problème.

Après ces transformations et à partir du nouveau tableau obtenu, résoudre le problème.

Lorsque la solution optimale est obtenue, ajouter la quantité T_{mi} dans la case (**i, j**) de la solution optimale.

Application.

Soit une entreprise qui dispose de deux usines de production fabriquant chacune un produit différent (**1 000** unités de P_1 dans l'usine U_I et **1 100** unités de P_2 dans l'usine U_{II}). Cette entreprise doit livrer sa production à trois clients répartis dans des zones géographiques différentes. Le client C_1 a besoin d'une livraison de **900** unités, le client C_2 d'une livraison de **700** unités et le client C_3 d'une livraison égale à **500** unités.

La direction commerciale de l'entreprise qui a des problèmes pour écouler son produit P_2, décide d'imposer au client **1**, dont les besoins sont importants, d'acheter une quantité minimale de **300** unités de ce produit. Les coûts de transport sont donnés dans le tableau **64**.

<u>Tableau 64</u> : Tableau du transport.

	C_1	C_2	C_3	Disponibilités
U_I	6	4	2	1 000
U_{II}	5	5	3	1 100
Demandes	900	700	500	2 100

Le problème est de connaître la meilleure répartition afin de minimiser les coûts de transport. Transformation du tableau du transport. La première transformation à effectuer consiste à diminuer de **300** unités la demande du client **C_1** et de la disponibilité de l'usine **U_{II}**.

<u>Tableau 65</u> : Tableau du transport transformé.

	C_1	C_2	C_3	Disponibilités
U_I	6	4	2	1 000
U_{II}	5	5	3	800
Demandes	600	700	500	1 800

L'usine **U_I** va toujours disposer de **1 000** unités, par contre la disponibilité de l'usine **U_{II}** a diminué à **800** unités (1 100 – 300). Les demandes des clients **C_2** et **C_3** n'ont pas variées, mais la demande du client **C_1** a diminuée de **300** unités.
À partir de ce tableau, on va calculer une solution de base et l'optimiser.
En utilisant la méthode du coin nord-ouest, on obtient la solution du tableau **66**.

Nous allons utiliser la méthode de stepping stone pour améliorer cette solution.

<u>Tableau 66</u> : Tableau du transport.

	C_1	C_2	C_3	Disponibilités
U_I	600 -1 -1	400 +1	+1	1 000
U_{II}	+1 +1	300 -1	500 -1	800
Demandes	600	700	500	1 800

Les différents coûts réduits sont les suivants :

$\delta_{I.3}$ = 2 – 3 + 5 – 6 = -2 (**+1** et **-1** sont inscrits dans les coins sud est des cases).
$\delta_{II.1}$ = 5 – 5 + 4 – 6 = -2 (**+1** et **-1** sont inscrits dans les coins nord est des cases).

On peut améliorer cette solution dans la mesure où des coûts réduits sont négatifs. Considérons le trajet de l'usine $\mathbf{U_{II}}$ au client $\mathbf{C_1}$. On va affecter à cet itinéraire la quantité **300**, c'est-à-dire le minimum entre 600 et 300.

Tableau 67 : Tableaux des coûts réduits.

Tableau a

300 -1	700 -1	+1 +1
300 +1	+1	500 -1 -1

Tableau b

+1	700 -1	300 +1 -1
600 -1	+1	200 -1 +1

Le calcul des coûts réduits de cette nouvelle affectation (tableau **a**) nous donne les résultats suivants :

$\delta_{I.3} = 2 - 3 + 5 - 6 = -2$, $\delta_{II.2} = 5 - 4 + 2 - 3 = 0$.

Le trajet de l'usine $\mathbf{U_I}$ au client $\mathbf{C_3}$ permet d'obtenir un gain, on va donc affecter à ce client la quantité de **300** unités, et on obtient l'affectation du tableau **b**.

$\delta_{I.1} = 6 - 2 + 3 - 5 = 2$ et $\delta_{II.2} = 5 - 4 + 2 - 3 = 0$.

Dans la mesure où tous les coûts réduits sont $\geq$ **0**, l'optimum est donc atteint. À partir de cette affectation, on ajoute au trajet **II.1** la quantité **300**, initialement enlevée et on obtient l'affectation du tableau **68**.

Tableau 68 : Tableau de l'affectation.

	C_1	C_2	C_3	Disponibilités
U_I		700	300	1 000
U_{II}	900		200	1 100
Demandes	900	700	500	2 100

Le coût correspondant à cette affectation est égal à :

$$Z = 4.700 + 2.300 + 5.900 + 3.200 = 8\,500 \text{ U.M.}$$

- Quantité exacte à transporter.

Le deuxième cas du modèle de transport à itinéraires imposés concerne le transfert d'une quantité exacte $\mathbf{X_e}$ à transporter d'une origine **io** vers une destination **jo**. Comme pour le premier cas, on commence par ramener le problème à un cas où il n'y a pas de restriction, on effectue donc les opérations suivantes :

* Soustraire de la disponibilité $\mathbf{a_{io}}$ la quantité $\mathbf{X_e}$,
* Soustraire de la demande $\mathbf{d_{jo}}$ la quantité $\mathbf{X_e}$.

Après l'obtention de cette nouvelle affectation, on considère le trajet **(io, jo)** comme un itinéraire interdit et on résout le problème. Lorsqu'on obtient la solution optimale, on ajoute la quantité X_e dans la case **io.jo**, et on calcule le coût correspondant.

Application.

Reprenons l'exemple précédent avec des demandes légèrement différentes.

Tableau 69 : Tableau du transport.

	C_1	C_2	C_3	Disponibilités
U_I	6	4	2	1 000
U_{II}	5	5	3	1 100
Demandes	600	700	800	2 100

Dans le cas que nous considérons, la direction commerciale de l'entreprise est tenue par une contrainte à respecter. Le client C_3 lui exige la commande exacte de **300** unités provenant de l'usine U_{II}. La production des deux usines ne change pas, c'est-à-dire qu'elle est de **1 000** unités pour l'usine U_I et de **1 100** unités pour l'usine U_{II}.
Le problème est de connaître la meilleure répartition de la production pour avoir un coût de transport minimal.

Nous allons tout d'abord retrancher **300** unités de la demande du client C_3 et de la disponibilité de l'usine U_{II}, et nous obtenons le tableau du transport transformé **70**.

Tableau 70 : Tableau du transport transformé.

	C_1	C_2	C_3	Disponibilités
U_I	6	4	2	1 000
U_{II}	5	5	3	800
Demandes	600	700	500	1 800

À partir de ce nouveau tableau du transport, on résout le problème en considérant le trajet $U_{II}C_3$ comme un itinéraire interdit.
En utilisant la méthode du meilleur coin nord-ouest, on obtient la solution de base du tableau **71a**.
Le coût de transport de cette solution est égal à :

$$Z = 500.4 + 500.2 + 600.5 + 200.5 = 7\,000 \text{ U.M.}$$

On remplace les C_{ij} par **0** dans les itinéraires où le transport est possible et par **1** lorsque l'itinéraire est interdit. On obtient le tableau **71b** où les C_{ij} sont inscrits en couleur marron dans le coin sud-ouest des cases.

Tableau 71 : Solution de base obtenue par la méthode du meilleur coin nord-ouest.

Tableau 71a

	500	500
600	200	

Tableau : 71b

0 +1	500 +1 0 -1	500 -1 0
600 0 -1	200 -1 0 +1	+1 1

Nous allons utiliser la méthode de stepping stone pour la résolution de ce problème.
Les coûts réduits sont les suivants :

$$\delta_{I.1} = 0 - 0 + 0 - 0 = 0 \quad \text{et} \quad \delta_{II.3} = 1 - 0 + 0 - 0 = 1.$$

Puisque tous les coûts réduits sont $\geq$ **0**, la solution est optimale. On ajoute à cette solution optimale la quantité **300** dans la case **II.3**, et on obtient le tableau 72.

Tableau 72 : Solution optimale.

	C_1	C_2	C_3	Disponibilités
U_I		500	500	1 000
U_{II}	600	200	300	1 100
Demandes	600	700	800	2 100

Le coût de cette affectation finale est de :

$$Z = 500.4 + 500.2 + 600.5 + 200.5 + 300.3 = 7\,900 \text{ U.M.}$$

4 – 5 – Problème de transport avec « centres liés »

Le problème de transport où plusieurs sources ont un même dépôt est appelé modèle de transport avec « centre lié ». Cela peut aussi être le cas de deux ou plusieurs dépôts qui s'unissent pour établir une commande commune.

La résolution d'un tel problème se fait en plusieurs phases.

- Choix des coûts minimaux correspondants aux lignes ou colonnes ayant une demande ou une disponibilité commune.
- Réunir en une seule ligne (ou colonne) avec les coûts choisis dans la phase précédente.
- Procéder ainsi pour toutes les demandes et les disponibilités qui représentent des centres liés.
- Résoudre le problème de transport avec le tableau obtenu.
- Remettre les lignes (ou colonnes) supprimées initialement et calculer le coût de transport.

Application.

Une entreprise possède quatre unités de production dont les stocks sont respectivement de 12, 8, 14 et 16 lots d'un certain produit. Les clients sont au nombre de deux. Le premier client

possède deux surfaces de vente situées dans deux régions différentes **SV**$_1$ et **SV**$_2$. Le deuxième client possède une seule surface de vente **SV**$_3$.
Les besoins du premier client pour alimenter ses deux surfaces de vente réunies s'élèvent à 40 lots, et ceux du deuxième client sont de 10 lots.
Les coûts de transport individuels sont donnés dans le tableau du transport 73.

Tableau 73 : Tableau du transport.

	SV_1	SV_2	SV_3	Disponibilités
U_1	7	8	3	12
U_2	3	2	2	8
U_3	1	4	1	14
U_4	9	6	4	16
Demandes	4	0	10	50

Le problème est de déterminer le coût de transport minimal.
Transformation du tableau du transport
On relie les colonnes correspondantes aux surfaces de vente **SV**$_1$ et **SV**$_2$.
On obtient alors un tableau composé de deux surfaces de vente correspondantes aux deux clients.
Tableau 74 : Tableau du transport transformé.

	$SV_{1 \text{ ou } 2}$	SV_3	Disponibilités
U_1	7	3	12
U_2	2	2	8
U_3	1	1	14
U_4	6	4	16
Demandes	40	10	50

En utilisant la méthode du coin nord ouest, on obtient la solution du tableau 75.

Tableau 75 : Solution de base obtenue par la méthode du coin nord ouest.

12	
8	
14	
6	10

$$\delta_{1.2} = 3 - 4 + 6 - 7 = -2$$
$$\delta_{2.2} = 2 - 4 + 6 - 2 = 2$$
$$\delta_{3.2} = 1 - 4 + 6 - 1 = 2.$$

Les coûts réduits montrent qu'on peut améliorer cette solution.

Tableau 76 : Amélioration de la solution de base obtenue par la méthode du coin nord ouest.

2	10
8	
14	
16	

$$\delta_{2.2} = 2 - 3 + 7 - 2 = 4$$
$$\delta_{3.2} = 1 - 3 + 7 - 1 = 4$$
$$\delta_{4.2} = 4 - 3 + 7 - 6 = 2.$$

Tous les coûts réduits de la solution du tableau 76 sont positifs. La solution de ce tableau est donc optimale. Pour trouver la solution optimale du problème initiale, on réintroduit la colonne que nous avons éliminée dans les phases précédentes. On obtient le tableau 77.

Tableau 77 : Affectation de la solution optimale.

	SV_1	SV_2	SV_3	Disponibilités
U_1	7 2	8	3 10	12
U_2	3	2 8	2	8
U_3	1 14	4	1	14
U_4	9	6 16	4	16
Demandes	4 0		10	50

Le coût minimal de transport est donc égal à :

$$Z = 2.7 + 10.3 + 8.2 + 14.1 + 16.6 = 170.$$

4 – 6 – Problème de dégénérescence

Puisque l'algorithme de transport n'est qu'un cas particulier de la programmation linéaire, il peut alors se présenter le phénomène de dégénérescence. Concrètement, cette situation peut se produire lorsqu'il y a égalité entre une disponibilité et une demande ou, lorsque la somme des capacités provenant de **x** origines (**x** < **n**) est égale à la somme de **y** destinations (**y** < **m**). Généralement, on constate qu'il y a un problème de dégénérescence lorsque le nombre de

cases utilisées pour une solution est inférieur à (**m** + **n** - **1**) ou plus de (**m** - **1**)**x**(**n** - **1**) cases vides.
Comme dans un programme linéaire, l'éventualité de dégénérescence dans un modèle de transport peut entraîner le risque de cyclage, c'est-à-dire qu'après plusieurs itérations, on peut aboutir à une solution déjà évaluée.

Pour éviter le risque de cyclage, il suffit de faire varier légèrement les disponibilités et demandes. Il existe plusieurs méthodes pour effectuer ces petites variations, nous en présentons une seule qui est due à A. Orden et qui consiste à faire varier les disponibilités et demandes telles que :

$$A_i' = A_i + \varepsilon \qquad i = 1 \text{ à } n$$
$$D_j' = D_j \qquad j = 1 \text{ à } (m-1)$$
$$D_m' = D_m + n.\varepsilon$$

Avec A_i qui représente les disponibilités et D_j les demandes.

Application.

Soit le tableau 78 représentant le transport de marchandises de trois origines vers quatre destinations.
Tableau 78 : Tableau de transport.

Destinations / Origines	1	2	3	4	Disponibilités
I	40	60	50	70	200
II	20	30	40	50	400
III	10	30	20	10	500
Demandes	100	300	200	500	1 100

En utilisant la méthode du coin nord-ouest, on obtient la solution de base du tableau 79.
Tableau 79 : Solution de base obtenue par la méthode du coin nord-ouest.

Destinations / Origines	1	2	3	4	Disponibilités
I	100	100			200
II		200	200		400
III				500	500
Demandes	100	300	200	500	1 100

Nous constatons que cette solution est dégénérée puisqu'il y a seulement cinq cases non nulles alors qu'il en faudrait 6, en effet ($m + n - 1 = 6$) ou $(n - 1).(m - 1) = 6$. Afin d'être sûr d'éviter un cycle, on va calculer la solution optimale en faisant varier les disponibilités et les demandes.

On commence par remplir la dernière colonne qui correspond aux disponibilités $A_i' = A_i + \varepsilon$. Ensuite la dernière ligne $D_j' = D_j$, puis $D'_m = D_m + n\varepsilon$ (avec $j = 1$ à $m - 1$). Pour respecter les contraintes, on doit terminer d'équilibrer la matrice centrale.

Tableau 80 : Tableau de transport transformé.

Destinations / Origines	1	2	3	4	Disponibilités
I	100 - ε	100 - ε			200 + ε
II		200+ ε	200		400 + ε
III	ε			500	500 + ε
Demandes	100	300	200	500+3 ε	1 100 +3 ε

Le coût correspondant à cette solution est de :

$$(100 - \varepsilon).40 + (100 - \varepsilon).60 + 3\varepsilon.70 + (200 + \varepsilon).30 + 200.40 + \varepsilon.10 + 500.10 =$$
$$= 29\,000 + 150\varepsilon.$$

En utilisant la méthode de stepping stone on va calculer la solution optimale de ce modèle.

$\delta_{I.3} = 50 - 40 + 30 - 60 = -20$ 　　 $\delta_{I.4} = 70 - 10 + 30 - 60 = 20$

$\delta_{II.1} = 20 - 30 + 60 - 40 = 10$ 　　 $\delta_{II.4} = 50 - 10 + 20 - 40 = 20$

$\delta_{III.1} = 10 - 10 + 70 - 40 = 30$ 　　 $\delta_{III.2} = 30 - 60 + 70 - 10 = 30$

$\delta_{III.3} = 20 - 10 + 50 - 40 = 20$.

Seul le coût réduit $\delta_{I.3}$ est négatif (- 20). La quantité à transférer est de (**100 - ε**) et on obtient le tableau 81.

Tableau 81 : Tableau de transport transformé.

Destinations / Origines	1	2	3	4	Disponibilités
I	100 - ε		100 - ε	3ε	200+ ε
II		300	100+ ε		400+ ε
III	ε			500	500+ ε
Demandes	100	300	200	500+3 ε	1 100+3 ε

Le coût correspondant à cette solution est de (**2 700** + **170ε**).
Il peut y avoir une autre amélioration, car le coût réduit $\delta_{II.1}$ est négatif (**- 10**), *on vous laisse le soin de calculer tous les autres coûts réduits.*

Tableau 82 : Tableau de transport transformé.

Destinations / Origines	1	2	3	4	Disponibilités
I			200 - 2ε	3ε	200 + ε
II	100 - ε	300	2ε		400 + ε
III	ε			500	500 + ε
Demandes	100	300	200	500+3 ε	1 100 +3 ε

Le coût correspondant à cette solution est de **26 000** + **180ε**.

En calculant les coûts réduits correspondants à cette solution, on constate qu'ils sont tous positifs. La solution optimale de ce modèle est donc de **26 000** puisqu'on attribue la valeur zéro à la variable **ε**.

Remarque.

Cette solution aurait pu être obtenue sans variation des variables. Comme pour les programmes linéaires, lorsque le modèle de transport est énoncé d'une façon très précise, il ne présente pas de risque de cyclage. Ce qui est généralement le cas. Le cyclage de dégénérescence n'est alors qu'un problème didactique.

5 – Problème d'affectation : La méthode hongroise

Nous allons aborder une autre application du modèle de transport que nous rencontrons assez souvent dans la pratique, il s'agit du problème d'affectation.

La particularité de ce modèle de transport est que toutes les disponibilités et toutes les demandes sont égales à 1. À cette particularité, nous pouvons ajouter la caractéristique que le nombre d'origines est égal au nombre de destinations, c'est-à-dire que chaque source est associée à une seule destination.

Comme exemple de problème d'affectation, nous pouvons considérer les cas suivants.

- Le cas le plus classique est celui d'affecter **n** individus à **n** postes de travail et ainsi répondre au principe de « L'homme qu'il faut, à la place qu'il faut. ». Chaque affectation est liée à un coût que nous représentons dans une matrice carré (**n x n**). Ce coût peut être remplacé par la productivité de chaque individu.

- Une unité industrielle dispose de **n** facteurs de production à affecter pour l'exécution de **n** tâches différentes, sachant qu'un facteur précis ne peut être affecté qu'à une tâche précise. Dans ce cas, la matrice (**n x n**) peut représenter les coûts de réalisation d'un facteur de production à une tâche précise, ou le temps nécessaire à effectuer une tâche par un facteur de production. La matrice peut donc représenter un coût ou du temps. Que ce soit un coût ou du temps, le problème est une minimisation.

Comme le modèle de transport est un cas particulier de la programmation linéaire, on peut écrire alors le problème d'affectation sous forme de programme linéaire, en considérant la minimisation des coûts d'affectation. La fonction objective est égale à :

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij}\, x_{ij}.$$

La première contrainte concerne les disponibilités qui doivent être égales à **1**, d'où :

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = 1.$$

Et la seconde contrainte concerne les demandes qui doivent aussi être égales à **1**, d'où :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1.$$

Dans ce programme linéaire, il ne s'agit pas de variables positives ou nulles, les variables doivent être égales à **0** ou **1**. Il s'agit plus précisément de programme linéaire en nombres entiers.

Donc, on a pour dernières contraintes :

$$x_{ij} = 0 \quad \text{ou} \quad x_{ij} = 1 \qquad \text{avec } i = j = 1 \text{ à } n.$$

$x_{ij} = 1$ si il existe une relation directe entre i et j,

$x_{ij} = 0$ si il n'y a pas de relation entre i et j.

On pourrait résoudre ce programme linéaire par une méthode adaptée à la programmation linéaire en nombres entiers. Cependant, puisque chaque coefficient est égal à **0** ou **1**, la matrice d'affectation comporte plusieurs **0** et que chaque colonne de la matrice a seulement deux éléments égaux à **1** (les autres étant nuls), il est possible de résoudre ce problème d'affectation par un algorithme plus adapté qui simplifie les calculs. Il s'agit de la méthode Hongroise[3], appelée aussi algorithme de Kuhn.

Dans ce qui suit, nous présentons la résolution d'un problème d'affectation par cette méthode, en s'appuyant sur un exemple numérique.

La méthode Hongroise se compose de cinq étapes successives.

1 – Obtention de 0.

2 – Élaboration d'une solution.

3 – Recherche du nombre minimum de lignes et colonnes comportant des zéros.

4 – Permutation de certains éléments.

5 – Obtention de la solution optimale.

5 – 1 – Première étape

Obtention de 0. *Et surtout, évitez d'atteindre cet objectif lors d'un examen, choisissez plutôt le 20 sur 20.*

À tous les éléments d'une même colonne, on soustrait le plus petit élément de la colonne. Puis, à partir de ce tableau, on enlève à tous les éléments d'une même ligne le plus petit élément de la ligne. On obtient alors un tableau des coûts qui contient au moins un zéro par ligne ou colonne.

Considérons pour application le problème le plus classique de l'affectation qui consiste à affecter cinq ouvriers à cinq machines différentes. Soit la matrice des coûts d'affectation du tableau **83**.

Tableau 83 : Matrice des coûts d'affectation.

	1	2	3	4	5
I	12	8	6	3	9
II	6	5	14	8	7
III	9	3	8	2	10
IV	12	15	8	9	12
V	6	8	2	14	7

[3] Hongroise, car il s'agit de la nationalité du scientifique qui a développé cette méthode.

Concernant le tableau **295a**, on soustrait de toutes les lignes de la matrice le plus petit élément de chaque ligne.
Pour la première ligne, le plus petit élément est égal à **3**. On retranche donc 3 unités de toute la ligne et on obtient :

12 – 3 = **3**,
8 – 3 = **5**,
6 – 3 = **3**,
3 – 3 = **0**,
et 9 – 3 = **6**.

On procède de même pour toutes les autres lignes.

Tableau 84 : Obtention de **0**.

Tableau **84a**

9	5	3	0	6
1	0	9	3	2
7	1	6	0	8
4	7	0	1	4
4	6	0	12	5

⇒

Tableau **84b**

8	5	3	0	4
0	0	9	3	0
6	1	6	0	6
3	7	0	1	2
3	6	0	12	3

Après avoir retranché le plus petit élément de chaque ligne de tous les autres éléments de la ligne correspondante, on va retrancher le plus petit élément de chaque colonne de tous les autres éléments de la colonne correspondante.

Considérons le tableau **84a**. Le plus petit élément de la première colonne est égal à **1**, on retranche donc une unité de tous les éléments de cette colonne et on obtient :

pour la case **I.1** le nombre **8** = 9 – 1,
pour la case **II.1** le nombre **0** = 1 – 1,
pour la case **III.1** le nombre **6** = 7 – 1,
pour la case **IV.1** le nombre **3** = 4 – 1,
et pour la case **V.1** le nombre **3** = 4 – 1.

Pour la seconde colonne, le plus petit élément est le nombre zéro, donc la colonne n'est pas modifiée. Concernant les colonnes **3** et **4**, il n'y a pas aussi de modification puisque le plus petit élément est égal à zéro. Le plus petit élément de la dernière colonne est égal à **2**, on retranche alors 2 unités de tous les éléments de la colonne et on obtient :

6 – 2 = **4**,
2 – 2 = **0**,
8 – 2 = **6**,
4 – 2 = **2**,
et 5 – 2 = **3**.

Les résultats de toutes ces transformations sont inscrits dans le tableau **84b**.

5 – 2 – Deuxième étape

Élaboration d'une solution.

À partir du tableau précédent **84b**, on va calculer une solution. Celle-ci peut être optimale, si elle correspond à un coût total de valeur nulle.

Pour élaborer une solution, on suit la procédure suivante.

On considère tout d'abord la ligne (ou l'une des lignes) comportant le moins de zéros. On encadre un des zéros de cette ligne, et on barre les zéros (s'il y en a) qui se trouvent sur la même ligne ou colonne.
On répète à partir des lignes restantes le même processus, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus encadrer de zéro.

Reprenons notre exemple.

Tableau 85 : Élaboration d'une solution.

	1	2	3	4	5
I	8	5	3	$\boxed{0}$	4
II	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	9	3	$\cancel{0}$
III	6	1	6	$\cancel{0}$	6
IV	3	7	$\boxed{0}$	1	2
V	3	6	$\cancel{0}$	12	3

Dans cette matrice, on peut déjà éliminer provisoirement la deuxième ligne qui contient trois zéros. Il reste les quatre autres lignes où il y a un seul zéro. Commençons par encadrer le zéro de la première ligne. À ce zéro, corresponds un autre zéro de la colonne dans la colonne correspondante dans la case **III.4**, on le barre. On encadre ensuite le zéro de la quatrième ligne. À la colonne **3**, correspondante à ce zéro, existe encore un autre zéro dans la ligne **V** que l'on barre. La ligne suivante qui contient plus d'un zéro est la deuxième ligne. On encadre donc le zéro de la première colonne et on barre les zéros situés dans la même ligne. Dans cette première colonne, il n'y a pas de zéro, donc rien à barrer.
Les zéros encadrés correspondent à une affectation. On peut remarquer que celle-ci n'est pas optimale puisque les ouvriers **III** et **V** n'ont pas d'affectation, alors que les machines **2** et **5** sont sans ouvrier pour les faire fonctionner. Puisque l'affectation n'est pas optimale, on passe à l'étape suivante.

5 – 3 – Troisième étape

Recherche du nombre minimum de lignes et colonnes comportant des zéros.

Cette étape se compose de plusieurs phases.

a – Marquez d'une étoile toutes les lignes qui ne contiennent pas de zéro encadré.

b – Marquez d'une étoile toute colonne qui a un ou plusieurs zéros barrés sur une ou plusieurs lignes marquées.

c – Marquez toute ligne qui a un zéro encadré dans une colonne marquée.

d – Refaire les phases (**b**) et (**c**) jusqu'à ce que l'on ne puisse plus marquer de ligne, ou colonne.

e – Barrez d'un trait toute ligne non marquée et toutes colonnes marquées. Ces lignes et colonnes correspondent au nombre minimal de lignes et colonnes contenant tous les zéros de la matrice du tableau **84b**.

Tableau 86 : Troisième étape de la méthode hongroise.

	1	2	3	4	5	
I	8	5	3	$\boxed{0}$	4	☆⑤
II	$\boxed{0}$	~~0~~	9	3	~~0~~	
III	6	1	6	~~0~~	6	☆①
IV	3	7	$\boxed{0}$	1	2	☆⑥
V	3	6	~~0~~	12	3	☆②
			☆③	☆④		

Pour la première phase, concernant le marquage des lignes qui ne contiennent pas de **0** encadré, on a les lignes **III** et **V** répondant à la condition du marquage (opérations ① et ②).

Puis pour la phase (**b**), les colonnes qui ont un zéro sur les lignes marquées sont les colonnes **3** et **4** (opérations ③ et ④).

La phase (**c**) consiste à marquer toute ligne qui a un zéro encadré dans une colonne marquée. Dans notre exemple, il s'agit des lignes **I** et **IV** (opérations ⑤ et ⑥).

La phase (**d**) consiste à répéter les phases (**b**) et (**c**). Dans notre cas, pour la phase (**b**), cela correspond aux colonnes **3** et **4** qui sont déjà marquées. Ainsi, on ne peut plus faire de marquage. On passe à la phase suivante. On barre d'un trait la ligne **II** qui n'est pas marquée, puis les colonnes **3** et **4** qui sont marquées.

Cette étape étant terminée, on passe à la suivante.

5 – 4 – Quatrième étape

Permutation de certains éléments.

On considère les éléments du tableau qui ne sont pas traversés d'un trait. On choisit le plus petit élément de ce tableau partiel. On soustrait ce nombre aux éléments des colonnes non barrées et on l'ajoute aux cases correspondantes à l'intersection de deux rangées barrées.
Dans notre exemple, le tableau partiel est présenté en pointillé (tableau 87).

Tableau 87 : Permutation de certains éléments.

	1	2	3	4	5
I	8	5	3	0	4
II	0	0	9	3	0
III	6	1	6	0	6
IV	3	7	0	1	2
V	3	6	0	12	3

Le plus petit élément de ce tableau est 1. On soustrait ce chiffre aux éléments des colonnes non barrées, et on obtient (tableau 88**a**) pour la première colonne :

8 – 1 = **7**, 6 – 1 = **5**, 3 – 1 = **2** et 3 – 1 = **2**.

Pour la seconde colonne, on a :

5 – 1 = **4**, 1 – 1 = **0**, 7 – 1 = **6** et 6 – 1 = **5**.

Et pour la dernière colonne 5, on a :

4 – 1 = **3**, 6 – 1 = **5**, 2 – 1 = **1** et 3 – 1 = **2**.

L'affectation n'est pas optimale puisque l'ouvrier 5 n'a pas de poste de travail. On barre la colonne 2 et on effectue encore la soustraction du plus petit élément du tableau partiel correspondant aux cases non barrées.

Tableau 88 : Permutation de certains éléments.

Tableau 88a

7	4	3	0	3
0	0	0	4	0
5	0	6	0	5
2	6	0	1	1
2	5	0	12	2

⇒

Tableau 88b

6	4	3	0	2
0	1	11	5	0
4	0	6	0	4
1	6	0	1	0
1	5	0	12	1

La plus petite valeur est égale à **1** que nous retranchons de toutes les cases non barrées (tableau **88b**).
Considérons la première ligne, on a les deux cases **I.1** et **I.5** qui vont subir des modifications. Ainsi, pour la case **I.1** on a (7 – 1 = **6**) et pour la case **I.5**, on a (3 – 1 = **2**). Concernant la troisième ligne, la case **III.1** est égale à (5 – 1 = **4**), et la case **III.5** égale à (5 – 1 = **4**). Dans la quatrième ligne, on a la case **IV.1** qui est égale à (2 – 1 = **1**) et la case **IV.5** qui est égale à (1 – 1 = **0**). Puis, pour la dernière ligne, on a la case **V.1** qui est égale à (2 – 1 = **1**) et la case **V.5** qui est égale à (2 – 1 = **1**).

5 – 5 – Cinquième étape

Obtention de la solution optimale.

A partir du dernier tableau **88b**, on vérifie si la solution est optimale. On procède selon l'étape **2**. Dans le cas où cette solution n'est pas optimale, on répète le processus à partir de la phase (**b**).

Tableau 89 : Affectation optimale.

	1	2	3	4	5
I	6	4	3	0	2
II	0	1	11	5	0
III	4	0	6	0	4
IV	1	6	0	1	0
V	1	5	0	12	1

La solution est optimale avec l'affectation de l'ouvrier **I** à la machine **4**, l'affectation de l'ouvrier **II** à la machine **1**, l'affectation de l'ouvrier **III** à la machine **2**, l'affectation de l'ouvrier **IV** à la machine **5** et l'ouvrier **V** à la machine **3**.

Le coût de cette affectation est égal à :

3 + 6 + 3 + 12 + 2 = 26 U.M.

A retenir : المهم

A retenir

1 – Le modèle de transport est un cas particulier de la programmation linéaire où la production, ou marchandise, considérée est homogène.

2 – Dans le modèle de transport au sens strict du terme, il s'agit de minimiser un coût (ou du temps) de transport de marchandises à partir de plusieurs sources vers différentes destinations. Il existe dans ce modèle des contraintes liées à l'offre, à la demande et aux coûts des marchandises transportées. Dans ce modèle, l'offre doit être égale à la demande.

3 – Dans le modèle de transport au sens large du terme, peut être considéré l'affectation optimale de matière première dans un programme de production, ou celle d'un personnel à des postes de travail.

4 – Les données chiffrées du modèle de transport peuvent être représentées dans un tableau récapitulatif appelé tableau du transport.

5 – Comme le modèle de transport est un cas particulier de la programmation linéaire, il peut alors s'écrire sous forme de programme linéaire.

6 – La résolution d'un problème de transport s'effectue en deux phases : tout d'abord calculer une solution de base, puis ensuite l'améliorer par itérations successives jusqu'à optimisation.

7 – Les principales méthodes pour le calcul d'une solution de base sont : la méthode du coin nord-ouest, la méthode du meilleur coin nord ouest et la méthode de Houthaker.

8 – Les principale méthodes pour l'amélioration d'une solution de base sont : la méthode de stepping stone, la méthode des coûts duaux et la méthode heuristique (méthode de Vogel).

9 – Dans le modèle de transport existe plusieurs cas particuliers : le modèle de transport non équilibré, le problème de transbordement, le modèle de transport avec itinéraires interdits, le modèle de transport avec itinéraires imposés, le modèle de transport avec centres liés et le problème de dégénérescence. Ces problèmes peuvent être résolus par l'algorithme du transport qui subit quelques modifications spécifiques à chaque cas.

10 – Le modèle de transport est dit déséquilibré lorsque la somme des disponibilités n'est pas égale à la somme des demandes. Il suffit de faire quelques transformations dans le tableau du transport pour pouvoir utiliser l'algorithme du transport.

11 – Le problème de transbordement consiste à ajouter une extension aux deux niveaux considérés (origine et destination). Il s’agit d’un troisième niveau (ou même plus) composé de regroupage et d’éclatement intermédiaires.

12 – Le modèle de transport est avec itinéraires interdits lorsque certains « chemins » ne sont pas praticables.

13 – Le modèle de transport est avec itinéraires imposés lorsque la marchandise transportée doit obligatoirement suivre un (ou plusieurs) chemin (s) prédéterminé (s).

14 – Le modèle de transport avec centre lié correspond au cas où plusieurs sources ont un même dépôt appelé « centre lié ». Cela peut aussi être le cas de deux ou plusieurs dépôts qui s’unissent pour établir une commande commune.

15 – Concrètement, il peut y avoir un problème de dégénérescence dans le modèle de transport lorsqu’il y a égalité entre une disponibilité et une demande, ou lorsque la somme des capacités provenant de x origines est égal à la somme de y destinations.

Questionnaire à Choix Multiples

À chaque questionnaire peut correspondre 0, 1, 2, 3 ou 4 propositions correctes. Comme ce chapitre traite de transport et affectation, il vous suffira alors de transporter ou affecter cette petite étoile rouge ☆ à côté de la (ou les) proposition (s) correcte (s). Et comme on a prévu le cas où vous pouvez être trop fatigué pour faire une quelconque affectation, on a alors prévu aussi le cas de questionnaires sans réponse correcte, c'est-à-dire le cas où vous n'aurez aucun transport à effectuer, donc aucun effort à fournir.

1 – Le modèle de transport est un cas particulier :

A – de la méthode du simplexe ;
B – du théorème des écarts complémentaires ;
C – de la programmation linéaire ;
D – de la dualité.

2 – L'algorithme du transport est un modèle :

A – d'application très fréquente ;
B – d'application très rare ;
C – plus simple à résoudre que la méthode du simplexe ;
D – d'un intérêt certain.

3 – L'objectif(s) du modèle de transport est(sont) :

A – la minimisation d'un coût de transport ;
B – la maximisation d'un profit ;
C – l'affectation optimale d'une matière première dans un programme de production ;
D – la minimisation d'un temps de transport.

4 – La représentation graphique d'un modèle de transport visualise dans un schéma :

A – les quantités de produits disponibles ;
B – les coûts de transport d'une origine vers une destination ;
C – les coûts de transport d'une destination vers une origine ;
D – la qualité du produit transporté.

5 – Le tableau du transport représente dans un tableau récapitulatif :

A – le coût de transport d'un point à un autre ;
B – les quantités de produits transportés d'une origine vers une destination ;
C – les demandes de chaque origine ;
D – les disponibilités de chaque destination.

6 – Dans un tableau de transport les quantités de marchandises des :

A – disponibilités doivent être égales aux quantités demandées ;
B – disponibilités doivent toujours être supérieures aux quantités demandées ;
C – disponibilités doivent toujours être inférieures aux quantités demandées ;
D – disponibilités doivent toujours être différentes aux quantités demandées.

7 – Dans le cas où dans un tableau de transport, la demande est supérieure à la disponibilité :

A – on ajoute au tableau une ligne représentant une destination fictive ;
B – on ajoute au tableau une colonne représentant une destination fictive ;
C – on ajoute au tableau une ligne représentant une origine fictive ;
D – on ajoute au tableau une colonne représentant une origine fictive.

8 – Dans le cas où dans un tableau de transport, la disponibilité est supérieure à la demande :

A – on ajoute au tableau une ligne représentant une destination fictive ;
B – on ajoute au tableau une colonne représentant une destination fictive ;
C – on ajoute au tableau une ligne représentant une origine fictive ;
D – on ajoute au tableau une colonne représentant une origine fictive.

9 – Dans un tableau du transport, les origines et destinations fictives sont équivalentes dans un programme linéaire :

A – aux variables artificielles ;
B – aux variables d'écart ;
C – aux variables positives ;
D – aux variables libres.

10 – Le modèle de transport est un cas particulier de la programmation linéaire. La particularité de ce modèle est :

A – l'hétérogénéité du produit étudié ;

B – l'homogénéité du produit étudié ;
C – l'optimisation d'une fonction objective ;
D – la maximisation d'un coût de transport.

11 – Le modèle de transport peut s'écrire sous forme de programme linéaire où :

A – la fonction objective représente la maximisation du coût de transport ;
B – la fonction objective représente la minimisation du coût de transport ;
C – la fonction objective représente la minimisation du produit transporté ;
D – la fonction objective représente la minimisation du temps de transport.

12 – Les variables X_{ij} d'un programme linéaire correspondent dans un modèle de transport aux :

A – coefficients techniques de la matrice centrale du tableau du simplexe ;
B – quantités transportées de l'origine **i** vers la destination **j** ;
C – quantités transportées de la destination **i** vers l'origine **j** ;
D – coefficients de la fonction objective.

13 – La fonction objective d'un programme linéaire représentant un problème de transport correspond à :

A – la maximisation des quantités de produits à transporter ;
B – la minimisation des quantités de produits à transporter ;
C – la minimisation des coûts de transport des produits transportés ;
D – la maximisation des coûts de transport des produits transportés.

14 – Les contraintes d'un programme linéaire représentant un problème de transport correspondent à :

A – l'égalité entre les produits disponibles et les produits demandés ;
B – l'égalité entre la demande et la quantité distribuée vers les différentes destinations ;
C – l'égalité entre la disponibilité et la quantité distribuée depuis les différentes origines ;
D – la positivité des variables étudiées.

15 – Dans un problème de transport, le nombre de contraintes fonctionnelles représentées dans un programme linéaire est :

A – supérieur à la somme du nombre de points d'origines par le nombre de points de destination ;

B – inférieur à la somme du nombre de points d'origines par le nombre de points de destination ;

C – égal à la somme du nombre de points d'origines par le nombre de points de destination ;

D – différent à la somme du nombre de points d'origines par le nombre de points de destination.

16 – Dans un problème de transport, le nombre de variables représentées dans un programme linéaire est :

A – égal au produit du nombre de points d'origine par le nombre de points de destination ;

B – supérieur au produit du nombre de points d'origine par le nombre de points de destination ;

C – inférieur au produit du nombre de points d'origine par le nombre de points de destination ;

D – différent du produit du nombre de points d'origine par le nombre de points de destination.

17 – La résolution d'un modèle de transport s'effectue en :

A – cinq phases ;

B – six phases ;

C – deux phases ;

D – une seule phase.

18 – Comme pour la résolution d'un programme linéaire, le modèle de transport consiste à calculer une solution de base puis améliorer cette solution. Les principales méthodes pour le calcul d'une solution de base sont :

A – la méthode du coin nord-ouest ;

B – la méthode du meilleur coin-nord est ;

C – la méthode du coin sud-ouest modifiée ;

D – la méthode de Houthaker.

19 – Les principaux algorithmes pour l'amélioration d'une solution de base dans un modèle de transport sont :

A – l'algorithme de stepping stone ;

B – la méthode des coûts duaux ;

C – l'algorithme primal-dual ;

D – l'algorithme de Hogel.

20 – Une méthode heuristique permet :

A – d'obtenir la solution optimale en un minimum d'itération ;
B – d'obtenir une solution optimale lorsque le problème est dégénéré ;
C – d'éviter les cycles de la dégénérescence ;
D – d'obtenir une solution très proche de la solution optimale.

21 – La méthode du coin nord-ouest consiste tout d'abord à considérer :

A – la première case supérieure droite de la matrice des coûts de transport ;
B – la première case supérieure gauche de la matrice des coûts de transport ;
C – la première case inférieure droite de la matrice des coûts de transport ;
D – la première case inférieure gauche de la matrice des coûts de transport.

22 – Après avoir choisi la première case de la matrice des coûts du tableau de transport dans la méthode du coin nord-ouest, on :

A – affecte à cette case la plus grande valeur correspondante soit à la demande de la même colonne ou soit à la disponibilité de la même ligne ;
B – affecte à cette case la plus petite valeur correspondante soit à la demande de la même colonne ou soit à la disponibilité de la même ligne ;
C – ne tient plus compte de cette case dans la suite des calculs ;
D – affecte à cette case la plus grande valeur du tableau de transport.

23 – Concernant la méthode du coin nord-ouest, lorsque la demande est supérieure à la disponibilité dans la première case du tableau de transport :

A – on sature une ligne ;
B – on sature une colonne ;
C – on sature simultanément une ligne et une colonne ;
D – il n'y a pas de saturation (ni ligne, ni colonne).

24 – Concernant la méthode du coin nord-ouest, lorsque la disponibilité est supérieure à la demande dans la première case du tableau de transport :

A – on sature une ligne ;
B – on sature une colonne ;
C – on sature simultanément une ligne et une colonne ;
D – il n'y a pas de saturation (ni ligne, ni colonne).

25 – Concernant la méthode du coin nord-ouest, lorsque la disponibilité est égale à la demande dans la première case du tableau de transport :

A – on sature une ligne ;
B – on sature une colonne ;
C – on sature simultanément une ligne et une colonne ;
D – il n'y a pas de saturation (ni ligne, ni colonne).

26 – Dans la méthode du coin nord-ouest, après avoir choisi un trajet possible dans le tableau du transport, pour trouver la solution, on doit :

A – faire la somme de toutes les quantités obtenues dans le tableau du transport ;
B – faire le produit de toutes les quantités obtenues dans le tableau du transport ;
C – faire la somme du produit des quantités obtenues dans le tableau du transport par leurs coûts respectifs ;
D – diviser les quantités obtenues dans le tableau du transport par leurs coûts respectifs.

27 – L'inconvénient de la méthode du coin nord-ouest est :

A – qu'elle est très difficile à appliquer dans la mesure où les opérations à effectuer sont complexes et demande une bonne connaissance de la théorie des matrices ;
B – qu'elle ne prend pas en considération les quantités transportées ;
C – qu'elle ne prend pas en considération les coûts de transport ;
D – qu'elle ne considère dans ses calculs que les coûts de transport.

28 – L'inconvénient de la méthode du coin nord-ouest a pour conséquence :

A – l'obtention d'une solution de base sans coût ;
B – l'obtention d'une solution de base parfois éloignée de la solution optimale ;
C – d'effectuer assez souvent un nombre élevé d'itération dans la phase d'optimisation ;
D – de n'effectuer aucune itération dans la phase d'optimisation.

29 – Dans la méthode du meilleur coin nord-ouest la première case à choisir dans le tableau du transport correspond :

A – au plus faible coût de transport ;
B – au coût de transport le plus élevé ;
C – à l'intersection de la plus petite demande et de la plus grande disponibilité ;
D – à l'intersection de la plus grande demande et de la plus petite disponibilité.

30 – Dans la méthode du meilleur coin nord-ouest, on affecte dans la première case choisie :

A – la valeur la plus grande entre la demande et la disponibilité ;
B – la valeur la plus petite entre la demande et la disponibilité ;
C – la somme de la demande et de la disponibilité (ou vice versa selon le cas) ;
D – la différence entre la demande et la disponibilité.

31 – Dans la méthode de Houthaker, il s'agit de saturer en priorité :

A – les cases où le coût de transport est le plus bas dans la ligne et la colonne correspondante ;
B – les cases où le coût de transport est le plus élevé dans la ligne et la colonne correspondante ;
C – les cases où le coût de transport est nul dans la ligne correspondante ;
D – les cases où le coût de transport est nul dans la colonne correspondante.

32 – La méthode de stepping stone pour l'amélioration d'une solution de base a été développée par :

A – Charnes ;
B – Copernic ;
C – Dantzing ;
D – Prokofiev.

33 – Le terme de stepping stone est anglais et signifie :

A – escalier ;
B – amélioration ;
C – marchepied ;
D – optimisation.

34 – La méthode de stepping stone permet d'améliorer une solution de base :

A – par élimination successive jusqu'à la dernière variable ;
B – par itération successive jusqu'à obtention de la solution optimale ;
C – en reliant les coûts de transport minimaux avec les valeurs des plus petites quantités demandées ;
D – en reliant les coûts de transport maximaux avec les valeurs des plus petites quantités disponibles.

35 – La méthode de stepping stone consiste à :

A – augmenter le coût de transport unitaire, appelé coût réduit, en modifiant l'affectation d'une solution de base ;

B – diminuer le coût de transport unitaire, appelé coût réduit, en modifiant l'affectation d'une solution de base ;

C – modifier l'affectation d'une solution de base en éliminant les demandes les plus élevées ;

D – modifier l'affectation d'une solution de base en éliminant les disponibilités les plus élevées.

36 – Dans la méthode de stepping stone, pour pouvoir obtenir une affectation à un moindre coût, il faut :

A – examiner tous les chemins qui n'ont pas été utilisés lors du calcul de la solution de base ;

B – examiner tous les chemins correspondants aux cases vides du tableau de transport ;

C – examiner toutes les variables hors base si on écrit le problème sous forme de programme linéaire ;

D – éliminer tous les chemins dont les demandes sont supérieures aux disponibilités.

37 – Aux chemins choisis dans la question précédente :

A – on attribut une unité dans toutes les cases tout en respectant les différentes contraintes du problème ;

B – on attribut une unité dans toutes les cases tout en respectant les demandes et les disponibilités ;

C – on soustrait une unité dans toutes les cases vides tout en respectant les différentes contraintes du problème ;

D – on soustrait une unité dans toutes les cases vides tout en respectant les demandes et les disponibilités.

38 – Dans le cas où un coût réduit de la nouvelle affectation, dans la méthode de stepping stone, est :

A – positif, cela signifie qu'un gain est peut être possible et qu'on peut améliorer la solution de base ;

B – nul, cela signifie qu'aucun changement n'est possible dans la solution de base, donc on ne la prend pas en considération ;

C – négatif, d'où une perte, donc cela ne nous intéresse pas ;

D – positif, cela signifie une dépense supplémentaire, donc cela ne convient pas pour une amélioration de la solution de base.

39 – Dans la méthode de stepping stone, la quantité maximale à affecter dans un nouveau trajet est :

A – le minimum entre la demande et la disponibilité des cases où il y a eu réduction d'une unité ;
B – le maximum entre la demande et la disponibilité des cases où il y a eu réduction d'une unité ;
C – le minimum entre la demande et la disponibilité des cases où il y a eu augmentation d'une unité ;
D – le maximum entre la demande et la disponibilité des cases où il y a eu augmentation d'une unité.

40 – Dans la méthode de stepping stone, lorsqu'un coût réduit est nul, cela signifie :

A – qu'aucun changement n'est possible dans la solution de base ;
B – qu'il existe un autre trajet aboutissant au même coût de transport ;
C – qu'il existe une solution optimale multiple si il n'existe pas de coût réduit négatif ;
D – qu'il n'existe pas de solution optimale.

41 – La méthode des coûts duaux :

A – permet de simplifier les calculs pour l'obtention d'une solution optimale ;
B – utilise les propriétés du théorème des écarts complémentaires ;
C – permet d'obtenir la solution après une seule itération ;
D – est une méthode heuristique.

42 – En considérant X_{op} la solution d'un programme linéaire primal, Y_{op} la solution optimale du programme linéaire dual associé et le théorème des écarts complémentaires, on a $X_{op.ij} > 0 \Rightarrow y_{opi} + z_{opj} = C_{ij}$. Il ne peut y avoir de solution pour le programme linéaire dual que si :

A – $C_{ij} - (y_i - z_j) \geq 0$;
B – $C_{ij} \geq y_i + z_j$;
C – $C_{ij} - (y_i - z_j) \leq 0$;
D – $C_{ij} \leq y_i - z_j$.

43 – La méthode de Vogel est aussi appelée :

A – méthode de Ballas ;
B – méthode de Hammer ;
C – méthode de Ballas-Hammer ;

D – méthode de la différence minimale.

44 – La méthode de Vogel consiste à calculer pour chaque :

A – ligne de la matrice des coûts de transport, la différence entre les deux coûts les plus faibles ;

B – colonne de la matrice des coûts de transport, la différence entre les deux coûts les plus faibles ;

C – ligne de la matrice des coûts de transport, la différence entre les deux coûts les plus élevés ;

D – colonne de la matrice des coûts de transport, la différence entre les deux coûts les plus élevés.

45 – Les nombres de Vogel dans la méthode qui porte le même nom, sont égaux à :

A – la différence entre les deux coûts les plus faibles d'une même ligne ;

B – la différence entre les deux coûts les plus faibles d'une même colonne ;

C – la somme des deux coûts les plus faibles d'une même ligne ;

D – la somme des deux coûts les plus faibles d'une même colonne.

46 – Les nombres de Vogel sont inscrits :

A – à droite et au-dessous de la matrice des coûts ;

B – à droite et au-dessus de la matrice des coûts ;

C – à gauche et au-dessous de la matrice des coûts ;

D – à gauche et au-dessus de la matrice des coûts.

47 – Au plus grand nombre de Vogel :

A – on sélectionne dans la ligne correspondante, la case du coût minimum ;

B – on sélectionne dans la ligne correspondante, la case du coût maximum ;

C – on sélectionne dans la colonne correspondante, la case du coût minimum ;

D – on sélectionne dans la colonne correspondante, la case du coût maximum.

48 – La case de la question précédente étant choisie, on alloue à celle-ci :

A – la plus petite valeur entre la demande et la disponibilité ;

B – la plus grande valeur entre la demande et la disponibilité ;

C – la plus petite valeur des demandes ;

D – la plus grande valeur des disponibilités.

49 – Le problème de transport est dit non équilibré lorsque :

A – les capacités d'offre sont supérieures aux capacités des demandes ;
B – les capacités de demande sont supérieures aux capacités des offres ;
C – il existe de très grandes variations de coût entre deux trajets ;
D – le nombre de points d'origine n'est pas égal au nombre de points d'arrivée.

50 – Lorsque dans un modèle de transport déséquilibré les disponibilités sont supérieures aux demandes :

A – les demandes sont totalement satisfaites ;
B – les demandes ne sont pas totalement satisfaites ;
C – il reste une certaine quantité de produits qui est égal à la différence entre la somme des demandes et la somme des disponibilités ;
D – il reste une certaine quantité de produits qui est égale à la différence entre la somme des disponibilités et la somme des demandes.

51 – Lorsque les disponibilités sont supérieures aux demandes dans un modèle de transport :

A – on affecte les quantités disponibles restantes à un centre de consommation fictif ;
B – on affecte les quantités disponibles restantes à une source fictive ;
C – on affecte un coût nul aux quantités transférées dans un centre de consommation fictif ;
D – on affecte un coût nul aux quantités transférées vers une source fictive.

52 – Lorsque les disponibilités sont inférieures aux demandes dans un modèle de transport :

A – on crée une source fictive pour combler le déficit ;
B – on crée une destination fictive pour absorber le déficit ;
C – on attribue un coût de transport négatif pour les quantités transférées de la source fictive vers les centres de consommation ;
D – on attribue un coût de transport positif très grand pour les quantités transférées de la source fictive vers les centres de consommation.

53 – Dans un modèle de transport, le problème de transbordement consiste à :

A – envisager une extension aux deux niveaux considérés dans un modèle de transport simple (origine et destination), en ajoutant un autre niveau ;
B – considérer plusieurs destinations intermédiaires ;
C – considérer des destinations intermédiaires à la fois comme origines et comme destinations ;

D – considérer des destinations intermédiaires comme des origines seulement.

54 – Le modèle de transport avec itinéraires interdits est le cas où :

A – certains trajets ne sont pas praticables ;

B – il existe au moins un trajet du réseau considéré où la liaison est interdite ;

C – les coûts de transport sont si élevés qu'on élimine ces trajets ;

D – les coûts de transport de certains trajets sont nuls.

55 – Le modèle de transport avec itinéraires imposés est caractérisé par le cas où :

A – la quantité de marchandises demandée est égale à la quantité disponible ;

B – la quantité de marchandises disponible est supérieure à la quantité de marchandises demandée ;

C – la quantité de marchandises transportée doit impérativement suivre un chemin prédéterminé ;

D – il n'y a qu'une seule origine et une seule destination.

Exercices sur le modèle du transport

Nous débutons cette série d'exercices par des applications classiques, afin de vous familiariser avec les techniques utilisées dans le modèle de transport.

Exercice 1 : Transport de marchandises (1).

Soit le transport de marchandises à partir de quatre usines (**I** à **IV**) vers six entrepôts (**1** à **6**). Les quantités disponibles des usines sont de 18 unités pour l'usine **I**, de 32 unités pour l'usine **II**, de 14 unités pour l'usine **III** et de 9 unités pour l'usine **IV**. Les possibilités de stockage des entrepôts sont de 9 unités pour l'entrepôt **1**, de 11 unités pour l'entrepôt **2**, de 28 unités pour l'entrepôt **3**, de 6 unités pour l'entrepôt **4**, de 14 unités pour l'entrepôt **5** et de 5 unités pour l'entrepôt **6**.
La matrice des coûts unitaires des marchandises des usines vers les entrepôts est donnée dans le tableau **90**.

Tableau 90 : Matrice des coûts.

U \ E	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	Dispo.
U_I	12	27	61	49	83	35	18
U_{II}	23	39	78	28	65	42	32
U_{III}	67	56	92	24	53	54	14
U_{IV}	71	43	91	67	40	49	9
Dem.	9	11	28	6	14	5	73

Le problème est de planifier les quantités à transporter, afin de minimiser les dépenses pour le transport des marchandises des quatre usines vers les six entrepôts.
1 - Écrire le programme linéaire correspondant à ce problème.
2 - Déterminez une solution de base par la méthode de Vogel.
3 - Optimisez la solution obtenue en (2) par la méthode de stepping stone.

Exercice 2 : Transport de marchandises (2).

Dans cet exercice, les énoncés sont les mêmes que l'exercice **1**, mais la matrice des coûts est différente, ainsi que les quantités disponibles et demandées.

Tableau 91 : Matrice des coûts.

U \ E	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	Disponi.
U_I	4,5	6	4,5	3	4,5	5	250
U_{II}	3,5	1,5	3,5	3,5	2,5	2,5	300
U_{III}	3	2,5	4,5	5,5	3,5	5,5	100
U_{IV}	3	4	5,5	1	1	5	450
Dem.	200	150	350	100	200	100	1 100

1 - Écrire le programme linéaire correspondant à ce problème.
2 - Déterminez une solution de base par la méthode de Houthaker, puis la méthode de Vogel.
3 - Améliorez la meilleure solution obtenue en (2) en utilisant la méthode des coûts duaux.

Exercice 3 : Transport de marchandises (3).

Dans cet exercice, les énoncés sont les mêmes que l'exercice 1, mais la matrice des coûts est différente, ainsi que les quantités disponibles et demandées.

Tableau 92 : Matrice des coûts.

U \ E	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	Dispon.
U_I	9	12	9	6	9	10	5
U_{II}	7	3	7	7	5	5	6
U_{III}	6	5	9	11	3	11	2
U_{IV}	6	8	11	2	2	10	9
Dem.	4	4	6	2	4	2	22

1 - Écrire le programme linéaire correspondant à ce problème.
2 - Déterminez une solution de base par la méthode du meilleur coin nord-ouest, puis par la méthode de Vogel.
3 - Optimisez la meilleure solution obtenue en (2) par la méthode de stepping stone.

Exercice 4 : Affectation d'ambulances.

Lors d'une catastrophe accidentelle ou naturelle (séisme par exemple) on a un besoin urgent, dans une région donnée, d'un certain nombre d'ambulances supplémentaires. Aux points **A**, **B**, **C** et **D**, on a respectivement besoin de **1**, **3**, **2** et **3** ambulances additionnelles. Ces **9** voitures proviennent des garages **G_1**, **G_2** et **G_3** de centres médicaux de la région dans lesquels sont stationnées respectivement **3**, **4** et **2** ambulances prêtent pour de telles urgences. Sachant que dans ces situations, le gain de temps est primordial, le responsable chargé de la répartition des véhicules voudrait répartir ces voitures de telle manière que le total des temps de parcours entre les garages et les destinations finales soit minimal. Dans le tableau **93** est donné le temps, en minutes, pour les différents trajets entre les garages et chacune des destinations.

Tableau 93 : Tableau récapitulatif.

Destinations / Garages	A	B	C	D	Disponibilités
G_1	15	3	5	8	3
G_2	10	5	4	2	4
G_3	3	9	9	3	2
Demandes	1	3	2	3	

1 - Écrire le programme linéaire représentant la minimisation des durées de parcours des ambulances.
2 - Déterminez une solution de base par la méthode de Houthaker.
3 - Optimisez la solution obtenue en (**2**) par la méthode de stepping stone.
4 - Cette répartition doit se faire avant ou après l'événement ?
Justifiez votre réponse.

Exercice 5 : Société sidérurgique.

Pour son programme de production prévisionnelle, le groupe sidérurgique **SIDER** doit importer cinq minerais que nous nommons **M_1**, **M_2**, **M_3**, **M_4** et **M_5**. Ces minerais peuvent être achetés chez quatre fournisseurs étrangers que nous nommons **F_1**, **F_2**, **F_3** et **F_4**.

Les quantités maximales du groupe **SIDER** peuvent importer sont respectivement pour les cinq minerais de **150**, **100**, **75**, **250** et **200** tonnes. Les quantités disponibles chez les fournisseurs sont respectivement de **300**, **250**, **150** et **200** tonnes.

Les teneurs en métal des minerais disponibles chez les quatre fournisseurs sont données dans le tableau **94**.

Tableau 94 : Tableau du transport.

F \ M	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	Disponi.
F_1	2	3	2	4	1	300
F_2	3	4	1	2	4	250
F_3	2	3	4	1	2	150
F_4	3	4	2	3	2	200
Dema.	150	100	75	250	200	$775 \neq 900$

Le problème pour les responsables du groupe **SIDER** est d'instaurer un calendrier de commande afin de maximiser les quantités de métaux contenus dans les minerais achetés.
Résoudre ce problème en utilisant, pour le calcul d'une solution de base, la méthode de Vogel, et pour l'amélioration de la solution la méthode de stepping stone.

Exercice 6 : Société pétrolière.

Soit une société pétrolière disposant de cinq raffineries **R_1**, **R_2**, **R_3**, **R_4** et **R_5** dont les capacités de raffinage sont respectivement de 50, 75, 30, 25 et 60 tonnes (l'unité est **10^5**). Le pétrole brut alimentant les raffineries provient de quatre régions différentes **E_I**, **E_{II}**, **E_{III}** et **E_{IV}**. Les quantités envoyées des quatre différentes régions vers les raffineries sont respectivement de 60, 40, 75 et 25 tonnes (Unité : **10^5**).

Tableau 95 : Tableau du transport.

E \ R	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	Disponi.
E_I	110	120	100	105	115	60
E_{II}	165	155	150	180	175	40
E_{III}	200	210	203	206	209	75
E_{IV}	130	125	127	132	133	25
Dema.	50	75	30	25	60	$240 \neq 200$

Connaissant les coûts de transport des origines vers les destinations (tableau 306), établir un plan de transport qui minimise les dépenses de la société.
Utilisez la méthode du meilleur coin nord-ouest pour le calcul d'une solution de base, et la méthode de stepping stone pour son amélioration.

Exercice 7 : Problème d'affectation (1).

Soit le problème classique d'affectation suivant : le responsable des ressources humaines d'un ministère doit affecter cinq fonctionnaires (**i** = **I** à **V**) à cinq postes de travail (**j** = **1** à **5**). Le coût d'affectation d'un fonctionnaire **i** à un poste de travail **j** est donné dans le tableau **96**.

Tableau 96 : Tableau du transport

P \ F	F_I	F_{II}	F_{III}	F_{IV}	F_V
P_1	12	8	7	15	4
P_2	7	9	17	14	10
P_3	9	6	12	6	7
P_4	7	6	14	6	10
P_5	9	6	12	10	6

Quelle est la répartition optimale de ces cinq fonctionnaires qui minimise les coûts d'affectation ?
Pour cette affectation, utilisez l'algorithme hongrois.

Exercice 8 : Problème d'affectation (2).

Soit le même énoncé que l'exercice précédent, mais avec la matrice du tableau **97** qui indique que certains postes de travail ne peuvent être affectés à certains fonctionnaires. À ces affectations impossibles, on attribue une valeur infinie (∞).

Tableau 97 : Tableau du transport.

P \ F	F_I	F_{II}	F_{III}	F_{IV}	F_V
P_1	7	3	5	7	10
P_2	6	∞	∞	8	7
P_3	6	5	1	5	∞
P_4	11	4	∞	11	15
P_5	∞	4	5	2	10

Quelle est la répartition optimale de ces cinq fonctionnaires qui minimise les coûts d'affectation ? Pour cette affectation, utilisez l'algorithme hongrois.

Exercice 9 : **Stages pratiques.**

Six étudiants de fin de cycle en économie ont terminé leurs cours théoriques et s'apprêtent à partir en stage pour la préparation de leur mémoire de fin d'études. Nous symboliserons ces six étudiants par les chiffres arabes de **1** à **6**. Le service des stages de leur établissement les informe que six entreprises sont disposées à les accueillir pour une durée de quatre mois. Ces entreprises sont situées dans différentes villes du territoire national (**Alger**, **Boumerdes**, **Constantine**, **Dellys**, **El oued** et **Frenda**). Selon les étudiants, les avis diffèrent quant à l'intérêt d'une ville par rapport à une autre (éloignement, climat, domaine d'activité de l'entreprise selon la ville, …). Pour une affectation rationnelle de ces étudiants, le responsable du service de stage établit un tableau où sont reportées les préférences de chaque étudiant. Ces préférences sont symbolisées par une note variant de **0** à **20** dans le tableau **98**.

Tableau 98 : Tableau du transport.

Etudiants \ Villes	A	B	C	D	E	F
1	4	8	16	20	12	0
2	16	20	8	0	4	12
3	0	12	4	16	20	8
4	4	0	16	12	20	8
5	12	16	0	8	20	4
6	20	16	12	0	4	8

À partir de ce tableau, proposez la meilleure affectation possible pour ces étudiants, où la somme des satisfactions soit maximale.

Exercice 10 : **Transport Alger-Biskra.**

Le service chargé du transport par camion-citerne de l'entreprise nationale **N.A.F.T.A.L** assure le transfert régulier de carburant entre **Alger** et **Biskra**. Pour ces déplacements, l'entreprise veut recruter cinq chauffeurs.

Les horaires des départs et arrivées dans ces deux villes sont donnés dans le tableau **99**.

Tableau 99 : Tableau récapitulatif.

Horaires / N°ligne	Départ d'Alger	Arrivée à Biskra	Horaires / N°ligne	Départ de Biskra	Arrivée à Alger
1	5.00	12.00	6	5.30	12.30
2	7.30	14.30	7	08.30	15.30
3	10.30	17.30	8	14.00	21.00
4	18.00	01.00	9	17.30	00.30
5	23.00	06.00	10	00.00	07.30

Unité : heure

Le responsable des plannings doit minimiser le temps d'absence des chauffeurs hors de leurs domiciles fixes, et pour cela, il doit connaître les résidences des chauffeurs et quelles lignes ils doivent assurer.
Pour ce planning, deux contraintes doivent être respectées, chaque chauffeur :

- ne dois pas attendre plus de 24 heures après une livraison,
- dois bénéficier d'au moins 5 heures de repos après chaque livraison.

D'après ces données, il vous est demandé de déduire, d'après l'algorithme hongrois, les résidences des chauffeurs, les lignes qu'ils doivent assurer et le temps minimum total d'attente pour la meilleure affectation.

Solution du Questionnaire à Choix Multiples

1 – C.	2 – A, C, D.	3 – A, C, D.	4 – A, B.	5 – A, B, C, D.
6 – A.	7 – B.	8 – C.	9 – B.	10 – B, D.
11 – B, D.	12 – B.	13 – C.	14 – A, B, C, D.	15 – C.
16 – A.	17 – C.	18 – A, B, D.	19 – A, B.	20 – D.
21 – B.	22 – B.	23 – A.	24 – B.	25 – C.
26 – C.	27 – C.	28 – B, C.	29 – A.	30 – B.
31 – A.	32 – A, C.	33 – A, C.	34 – B.	35 – B.
36 – A, B, C.	37 – A, B.	38 – D.	39 – Aucune.	40 – B, C.
41 – A, B.	42 – B.	43 – D.	44 – A, B.	45 – A, B.
46 – A.	47 – A, C.	48 – A.	49 – A, B.	50 – A, D.
51 – A, C.	52 – A.	53 – A, B, C, D.	54 – A, B.	55 – C.

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1 : Transport de marchandises (1).

1 - Ecriture du problème sous forme de programme linéaire.

Comme il s'agit de minimiser des d, on a la fonction objective et les contraintes ci-dessous où a_i représentent les quantités de marchandises produites par les usines, et b_j les quantités de marchandises pouvant être stockées dans les dépôts. Dans cette fonction x_{ij} représentent les quantités de marchandises transportées de l'usine **i** vers le dépôt **j**.

La fonction objective est la suivante : **min** $Z = 12x_{I.1} + 27x_{I.2} + 61x_{I.3} + 49x_{I.4} + 83x_{I.5} + 35x_{I.6} + 23x_{II.1} + 39x_{II.2} + 78x_{II.3} + 28x_{II.4} + 65x_{II.5} + 42_{II.6} + 67x_{III.1} + 56x_{III.2} + 92x_{III.3} + 24x_{III.4} + 53x_{III.5} + 54x_{III.6} + 71x_{IV.1} + 43x_{IV.2} + 91x_{IV.3} + 67x_{IV.4} + 40x_{IV.5} + 49x_{IV.6}$.

Et les contraintes sont :

$$\sum_{j=1}^{6} x_{I.j} = 18 \qquad \sum_{j=1}^{6} x_{II.j} = 32 \qquad \sum_{j=1}^{6} x_{III.j} = 14 \qquad \sum_{j=1}^{6} x_{IV.j} = 9$$

$$\sum_{i=I}^{IV} x_{i.1} = 9 \qquad \sum_{i=I}^{IV} x_{i.2} = 11 \qquad \sum_{i=I}^{IV} x_{i.3} = 28$$

$$\sum_{i=I}^{IV} x_{i.4} = 9 \qquad \sum_{i=I}^{IV} x_{i.5} = 14 \qquad \sum_{i=I}^{IV} x_{i.6} = 5.$$

La première contrainte concernant l'égalité entre les demandes et les disponibilités est respectée, en effet : 18 + 32 + 14 + 9 = 9 + 11 + 28 + 6 + 14 + 5 = 75.

2 – Calcul de la solution de base par la méthode de Vogel.

Tableau 100 : Tableau du transport de la première affectation.

Dépôts / Usines	1	2	3	4	5	6	a_i	Nombres de Vogel
I	12	27	61	49	83	35	18	27 – 12 = 15
II	23	39	78	28	65	42	32	28 – 23 = 5
III	67	56	92	24	53	54	14	24 – 53 = 29
IV	71	43	91	67	40	49	9	43 – 40 = 3
b_j	9	11	28	6	14	5	73	
Nb de Vogel	11	12	17	4	13	7		

Dans ce premier tableau du transport le plus grand nombre de Vogel étant **29**, on affecte donc dans la case **III.4** la quantité **6** c'est-à-dire le minimum entre 6 et 14. Dans la suite des calculs, on ne prend plus en compte la colonne **4** puisque sa demande a été saturée.

Tableau 101 : Tableau du transport de la deuxième affectation.

Dépôts / Usines	1	2	3	5	6	a_i	Nombres de Vogel
I	12	27	61	83	35 ←	18	15
II	23	39	78	65	42	32	16
III	67	56	92	53	54	8	1
IV	71	43	91	40	49	9	3
b_j	9	11	28	14	5	67	
Nb de Vogel	11	12	17	13	7		

Dans ce deuxième tableau du transport, le plus grand nombre de Vogel est égal à **17** et correspond à la troisième colonne. Le plus petit coût de cette colonne étant égal à **61**, on y affecte alors la quantité **18**, qui représente le min(18, 28). La première ligne est saturée, c'est-à-dire que l'usine **I** ne dispose plus de marchandise à livrer. On ne prend plus en considération cette ligne dans les tableaux qui suivent.

Tableau 102 : Tableau du transport de la troisième affectation.

Dépôts / Usines	1	2	3	5	6	a_i	Nombres de Vogel
II	23	39	78	65	42	32	16
III	67	56	92	53	54	8	1
IV	71	43	91	40	49	9	3
b_j	↑ 9	11	10	14	5	49	
Nb de Vogel	44	4	13	13	7		

Dans ce troisième tableau du transport, le plus grand nombre de Vogel est égal à **44** et correspond à la première colonne. Le plus petit coût de cette colonne est égal à **23**, on y affecte la quantité **9**.

Tableau 103 : Tableau du transport de la quatrième affectation.

Dépôts / Usines	2	3	5	6	a_i	Nombres de Vogel
II	39	78	65	42	23	3
III	56	92	53	54	8	1
IV	43	91	40	49	9	3
b_j	11	10	14	5	40	
Nb de Vogel	4	13	13	7		

Dans ce quatrième tableau du transport, nous avons une égalité entre deux nombres de Vogel (13) correspondant aux colonnes 3 et 5. On peut alors effectuer deux affectations simultanément, c'est-à-dire 10 à la case II.3 et 9 à la case IV.5. Dans ce tableau, il y a saturation de la troisième colonne et de la quatrième ligne.

Tableau 104 : Tableau du transport de la cinquième affectation.

Dépôts / Usines	2	5	6	a_i	Nombres de Vogel
II	39	65	42	13	3
III	56	53	54	8	1
b_j	11	5	5	21	
Nb de Vogel	17	12	12		

Dans ce tableau, le plus grand nombre de Vogel étant égal à 17, on affecte alors dans la case II.2 la quantité 11.

Tableau 105 : Tableau du transport de la sixième affectation.

Dépôts / Usines	5	6	a_i	Nombres de Vogel
II	65	42	2	13
III	53	54	8	1
b_j	5	5	10	
Nb de Vogel	12	12		

Dans ce tableau, le plus grand nombre de Vogel étant égal à 13, on affecte alors dans la case II.6 la quantité 2. En éliminant la deuxième ligne, il reste alors un tableau avec une seule ligne dans la matrice centrale.

Tableau 106 : Tableau du transport de la septième affectation.

Dépôts / Usines	5	6	a_i	Nombres de Vogel
III	53	54 ←	8	1
b_j	5	3	8	
Nb de Vogel	0	0		

Dans ce dernier tableau, on affecte 5 unités à la case III.5 et 3 unités dans la case III.6. Toutes les affectations étant faites, on peut alors établir un tableau récapitulatif.

Tableau 107 : Tableau récapitulatif.

U \ E	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	Dispo.
U_I			18				18
U_{II}	9	11	10			2	32
U_{III}				6	5	3	14
U_{IV}					9		9
Dem.	9	11	28	6	14	5	73

Le coût correspondant à cette affectation est égal à :

$$18.61 + 9.23 + 11.39 + 10.78 + 2.42 + 6.24 + 5.53 + 3.54 + 9.40 = 3\,529 \text{ U.M.}$$

3 – Optimisation de la solution de base par la méthode de stepping stone.

Calcul des coûts réduits.

$\delta_{I.1} = 6$ $\delta_{I.2} = 5$ $\delta_{I.4} = 56$ $\delta_{I.5} = 51$ $\delta_{I.6} = 10$

$\delta_{II.4} = 18$ $\delta_{II.5} = 26$

$\delta_{III.1} = 48$ $\delta_{III.2} = 21$ $\delta_{III.3} = 18$

$\delta_{IV.1} = 73$ $\delta_{IV.2} = 29$ $\delta_{IV.3} = 38$ $\delta_{IV.4} = 56$ $\delta_{IV.6} = 8$.

Comme tous les coûts réduits sont positifs, la solution de base est aussi la solution optimale.
Le coût de transport minimum est donc de 3 529 **U.M** en respectant l'affectation suivante :

18 unités de marchandises de l'usine **I** sont transportées vers l'entrepôt **3**,
9 unités de marchandises de l'usine **II** sont transportées vers l'entrepôt **1**,
11 unités de marchandises de l'usine **II** sont transportées vers l'entrepôt **2**,
10 unités de marchandises de l'usine **II** sont transportées vers l'entrepôt **3**,
2 unités de marchandises de l'usine **II** sont transportées vers l'entrepôt **6**,
6 unités de marchandises de l'usine **III** sont transportées vers l'entrepôt **4**,
5 unités de marchandises de l'usine **III** sont transportées vers l'entrepôt **5**,
3 unités de marchandises de l'usine **III** sont transportées vers l'entrepôt **6**,
9 unités de marchandises de l'usine **IV** sont transportées vers l'entrepôt **5**.

Solution de l'exercice 2 : Transport de marchandises (2).

1 - Écriture sous forme de programme linéaire.

- Définition des variables. Soient x_{ij} qui représentent les quantités de marchandises transportées de l'usine **i** vers le dépôt **j**.

- Fonction objective.

$$\begin{aligned}\min Z = {} & 4{,}5x_{I.1} + 6x_{I.2} + 4{,}5x_{I.3} + 3x_{I.4} + 4{,}5x_{I.5} + 5x_{I.6} + 3{,}5x_{II.1} + 1{,}5x_{II.2} + 3{,}5x_{II.3} + 3{,}5x_{II.4} \\ & + 2{,}5x_{II.5} + 2{,}5x_{II.6} + 3x_{III.1} + 2{,}5x_{III.2} + 4{,}5x_{III.3} + 5{,}5x_{III.4} + 3{,}5x_{III.5} + 5{,}5x_{III.6} + 3x_{IV.1} \\ & + 4x_{IV.2} + 5{,}5x_{IV.3} + 1x_{IV.4} + 1x_{IV.5} + 5x_{IV.6}.\end{aligned}$$

- Contraintes.

$$\sum_{j=1}^{6} x_{I.j} = 250 \qquad \sum_{j=1}^{6} x_{II.j} = 300 \qquad \sum_{j=1}^{6} x_{III.j} = 100 \qquad \sum_{j=1}^{6} x_{IV.j} = 450$$

$$\sum_{i=I}^{IV} x_{i.1} = 200 \qquad \sum_{i=I}^{IV} x_{i.2} = 150 \qquad \sum_{i=I}^{IV} x_{i.3} = 350$$

$$\sum_{i=I}^{IV} x_{i.4} = 100 \qquad \sum_{i=I}^{IV} x_{i.5} = 200 \qquad \sum_{i=I}^{IV} x_{i.6} = 100.$$

La première contrainte concernant l'égalité entre les demandes et les disponibilités est respectée, en effet :

$$350 + 300 + 100 + 450 = 200 + 150 + 350 + 100 + 200 + 100 = 1\,100.$$

2 – Calcul d'une solution de base.

- Calcul de la solution de base par la méthode de Houthaker.

Tableau 108 : Solution de base obtenue par la méthode de Houthaker.

U \ E	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	Disponi.
U_I			250				250
U_{II}		150	50			100	300
U_{III}	100						100
U_{IV}	100		50	100	200		450
Dem.	200	150	350	100	200	100	1 100

Le coût de cette affectation est égal à :

250.45 + 150.1,5 + 50.3,5 + 100.2,5 + 100.3 + 10.3 + 50.5,5 + 100.1 + 100.1 =

= 2 950.

- Calcul de la solution de base par la méthode de Vogel.

Tableau 109 : Tableau du transport de la première affectation.

Usines \ Dépôts	1	2	3	4	5	6	a_i	Nb de Vogel
I	4,5	6	4,5	3	4,5	5	250	1,5
II	3,5	1,5	3,5	3,5	2,5	2,5	300	1
III	3	2,5	4,5	5,5	3,5	5,5	100	0,5
IV	3	4	5,5	1	1	5	450	0
b_j	200	150	350	100	200	100	1 100	
Nb de Vogel	1	1	1	2	1,5	2,5		

Dans ce premier tableau du transport le plus grand nombre de Vogel étant égal à 2,5, on affecte donc dans la case II.6 la quantité 100, c'est-à-dire le minimum entre 100 et 300. La sixième colonne n'est donc plus prise en compte dans la suite des calculs, et on obtient le tableau 110 composés de quatre lignes et cinq colonnes.

Tableau 110 : Tableau du transport de la deuxième affectation.

Usines \ Dépôts	1	2	3	4	5	a_i	Nb de Vogel
I	4,5	6	4,5	3	4,5	250	1,5
II	3,5	1,5	3,5	3,5	2,5	300	1
III	3	2,5	4,5	5,5	3,5	100	0,5
IV	3	4	5,5	1	1	450	0
b_j	200	150	350	100	200	1 000	
Nb de Vogel	0	1	1	2	1,5		

Dans ce deuxième tableau du transport, le plus grand nombre de Vogel est égal à 2 et correspond à la quatrième colonne.

Tableau 111 : Tableau du transport de la troisième affectation.

Usines \ Dépôts	1	2	3	5	a_i	Nb de Vogel
I	4,5	6	4,5	4,5	250	0
II	3,5	1,5	3,5	2,5	300	1
III	3	2,5	4,5	3,5	100	0,5
IV	3	4	5,5	1	350	2
b_j	200	150	350	200	900	
Nb de Vogel	0	1	1	1,5		

Dans ce troisième tableau du transport, le plus grand nombre de Vogel est égal à 2 et correspond à la quatrième ligne.

Tableau 112 : Tableau du transport de la quatrième affectation.

Usines \ Dépôts	1	2	3	a_i	Nb de Vogel
I	4,5	6	4,5	250	0
II	3,5	1,5	3,5	200	2
III	3	2,5	4,5	100	0,5
IV	3	4	5,5	150	1
b_j	200	150	350	700	
Nb de Vogel	0	1	1		

Dans ce quatrième tableau du transport, le plus grand nombre de Vogel est égal à 2 et correspond à la deuxième ligne.

Tableau 113 : Tableau du transport de la cinquième affectation.

Dépôts / Usines	1	3	a_i	Nb de Vogel
I	4,5	4,5	250	0
II	3,5	3,5	50	0
III	3	4,5	100	1,5
IV	3	5,5	150	2,5
b_j	200	350	550	
Nb de Vogel	0	1		

Tableau 114 : Tableau du transport de la sixième affectation.

Dépôts / Usines	1	3	a_i	Nb de Vogel
I	4,5	4,5	250	0
II	3,5	3,5	50	0
III	3	4,5	100	1,5
b_j	50	350	400	
Nb de Vogel	0,5	1		

Tableau 115 : Tableau du transport de la septième affectation.

Dépôts / Usines	3	a_i
I	4,5	250
II	3,5	50
III	4,5	50
b_j	350	350

Dans ce dernier tableau, on affecte **50** unités à la case **II.3** et **3** unités dans la case **III.3**. On affecte aussi les dernières unités **250** dans la case **I.3**. Toutes les affectations étant faites, on peut alors établir un tableau récapitulatif.

Tableau 116 : Tableau récapitulatif.

E / U	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	Disponi.
U_I			250				250
U_{II}		150	50			100	300
U_{III}	50		50				100
U_{IV}	150			100	200		450
Dem.	200	150	350	100	200	100	1 100

Le coût correspondant à cette affectation est donc égal à :

250.4,5 + 150.1,5 + 50.3,5 + 10.2,5 + 50.3 + 50.4,5 + 150.3 + 100.1 + 200.1 = 2 900 U.M.

Cette solution nous donne une solution plus proche de l'optimum que la solution obtenue par la méthode de Houthaker (**2 950 U.M**). C'est donc la solution obtenue par la méthode de Vogel qui va servir de base pour l'optimisation.

3 – Optimisation de la solution de base par la méthode de stepping stone.

Calcul des coûts réduits.

$\delta_{I.1} = 1{,}5$ $\delta_{I.2} = 3{,}5$ $\delta_{I.4} = 3$ $\delta_{I.5} = 4{,}5$
$\delta_{II.1} = 1{,}5$ $\delta_{II.4} = 4{,}5$ $\delta_{II.5} = 3{,}5$
$\delta_{III.2} = 1{,}5$ $\delta_{III.4} = 5{,}5$ $\delta_{III.5} = 3{,}5$ $\delta_{III.6} = 2$
$\delta_{IV.2} = 3$ $\delta_{IV.3} = 2{,}5$ $\delta_{IV.6} = 4$.

Comme tous les coûts réduits sont positifs, la solution de base est aussi la solution optimale.

Le coût de transport minimum est donc de **2 900 U.M** en respectant l'affectation suivante :
250 unités de marchandises de l'usine **I** sont transportées vers l'entrepôt **3**,
150 unités de marchandises de l'usine **II** sont transportées vers l'entrepôt **2**,
50 unités de marchandises de l'usine **II** sont transportées vers l'entrepôt **3**,
100 unités de marchandises de l'usine **II** sont transportées vers l'entrepôt **6**,
50 unités de marchandises de l'usine **III** sont transportées vers l'entrepôt **1**,
50 unités de marchandises de l'usine **III** sont transportées vers l'entrepôt **3**,
150 unités de marchandises de l'usine **IV** sont transportées vers l'entrepôt **1**,
100 unités de marchandises de l'usine **IV** sont transportées vers l'entrepôt **4**,
200 unités de marchandises de l'usine **IV** sont transportées vers l'entrepôt **5**.

Solution de l'exercice 3 : Transport de marchandises (3).

1 - Écriture sous forme de programme linéaire.

- Définition des variables. Soient x_{ij} qui représentent les quantités de marchandises transportées de l'usine **i** vers le dépôt **j**.

- Fonction objective.

$$\min Z = 9x_{I.1} + 12x_{I.2} + 9x_{I.3} + 6x_{I.4} + 9x_{I.5} + 10x_{I.6} + 7x_{II.1} + 3x_{II.2} + 7x_{II.3} + 7x_{II.4} + 5x_{II.5} + 5x_{II.6} + 6x_{III.1} + 5x_{III.2} + 9x_{III.3} + 11x_{III.4} + 3x_{III.5} + 1x_{III.6} + 6x_{IV.1} + 8x_{IV.2} + 11x_{IV.3} + 2x_{IV.4} + 2x_{IV.5} + 10x_{IV.6}.$$

- Contraintes.

$$\sum_{j=1}^{6} x_{I.j} = 5 \qquad \sum_{j=1}^{6} x_{II.j} = 6 \qquad \sum_{j=1}^{6} x_{III.j} = 2 \qquad \sum_{j=1}^{6} x_{IV.j} = 9$$

$$\sum_{i=I}^{IV} x_{i.1} = 4 \qquad \sum_{i=I}^{IV} x_{i.2} = 4 \qquad \sum_{i=I}^{IV} x_{i.3} = 6$$

$$\sum_{i=I}^{IV} x_{i.4} = 2 \qquad \sum_{i=I}^{IV} x_{i.5} = 4 \qquad \sum_{i=I}^{IV} x_{i.6} = 2.$$

La première contrainte concernant l'égalité entre les demandes et les disponibilités est respectée, en effet :

$$18 + 32 + 14 + 9 = 9 + 11 + 28 + 6 + 14 + 5 = 75.$$

2 – Calcul de la solution de base.

- Méthode du meilleur coin nord ouest.

Tableau 117 : Solution de base obtenue par la méthode du meilleur coin nord ouest.

U \ E	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	Disp.
U_1			5				5
U_2		3	1			22	6
U_3	1	1					2
U_4	3			2	4		9
Dem.	4	4	6	2	4	22	22

Le coût de cette solution est égal à :

$$5.9 + 3.3 + 1.7 + 2.5 + 1.6 + 1.5 + 3.6 + 2.2 + 4.2 = 112 \text{ U.M.}$$

- Méthode de Vogel.

Tableau 118 : Tableau du transport de la première affectation.

Dépôts / Usines	1	2	3	4	5	6	a_i	Nb de Vogel
I	9	12	9	6	9	10	5	3
II	7	3	7	7	5	5	6	2
III	6	5	9	11	3	1	2	2
IV	6	8	11	2	2	10	9	0
b_j	4	4	6	2	4	2	22	
Nb de Vogel	1	2	2	4	1	5		

Tableau 119 : Tableau du transport de la deuxième affectation.

Dépôts / Usines	1	2	3	4	5	a_i	Nb de Vogel
I	9	12	9	6	9	5	3
II	7	3	7	7	5	4	2
III	6	5	9	11	3	2	2
IV	6	8	11	2	2	9	0
b_j	4	4	6	2	4	20	
Nb de Vogel	0	2	2	4	1		

Tableau 120 : Tableau du transport de la troisième affectation.

Dépôts / Usines	1	2	3	5	a_i	Nb de Vogel
I	9	12	9	9	5	0
II	7	3	7	5	4	2
III	6	5	9	3	2	2
IV	6	8	11	2	7	4
b_j	4	4	6	4	18	
Nb de Vogel	0	2	2	1		

Tableau 121 : Tableau du transport de la quatrième affectation.

Dépôts / Usines	1	2	3	a_i	Nb de Vogel
I	9	12	9	5	0
II	7	3	7	4	4
III	6	5	9	2	1
IV	6	8	11	7	2
b_j	4	4	6	14	
Nb de Vogel	0	2	2		

Tableau 122 : Tableau du transport de la cinquième affectation.

Dépôts / Usines	1	3	a_i	Nb de Vogel
I	9	9	5	0
III	6	9	2	3
IV	6	11	3	5
b_j	4	6	10	
Nb de Vogel	0	1		

Tableau 123 : Tableau du transport de la sixième affectation.

Dépôts / Usines	1	3	a_i	Nb de Vogel
I	9	9	5	0
III	6	9	2	3
b_j	1	6	7	
Nb de Vogel	3	0		

Dans ce sixième tableau, nous avons une égalité entre deux nombres de Vogel (3) qui correspondent à la ligne 3 et la colonne 1. On peut alors effectuer deux affectations simultanément, c'est-à-dire 1 à la case III.1 et 1 à la case III.3. Dans ce tableau, il y a saturation de la première colonne.

Tableau 124 : Tableau du transport de la septième affectation.

Dépôts / Usines	3	a_i
I	9	5
III	9	1
b_j	6	6

Dans ce dernier tableau, on affecte 1 unité à la case III.3 et 5 unités dans la case I.3.

Tableau 125 : Tableau récapitulatif.

E / U	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	Dispo
U_I			5				5
U_{II}		4				2	6
U_{III}	1		1				2
U_{IV}	3			2	4		9
Dem	4	4	6	2	4	2	22

Le coût correspondant à cette affectation est égal à :

$$5.9 + 4.3 + 2.5 + 1.6 + 1.9 + 3.6 + 2.2 + 4.2 = 112 \text{ U.M.}$$

On constate que la valeur de cette solution de base est égale à celle obtenue par la méthode du meilleur coin nord-ouest. *On est en droit de se demander alors pourquoi on l'a calculée, mais peu importe, il ne faut pas oublier que nos neurones ont besoin de musculation.*

3 – Optimisation de la solution de base par la méthode de stepping stone.

Comme les solutions de base obtenues sont égales (**112**), on peut utiliser l'une ou l'autre pour l'optimisation.

Calcul des coûts réduits.

$\delta_{I.1} = 3$ $\delta_{I.2} = 7$ $\delta_{I.4} = 6$ $\delta_{I.5} = 9$ $\delta_{I.6} = 3$

$\delta_{II.1} = 3$ $\delta_{II.3} = 0$ $\delta_{II.4} = 10$ $\delta_{II.5} = 5$

$\delta_{III.2} = 0$ $\delta_{III.4} = 11$ $\delta_{III.5} = 3$ $\delta_{III.6} = 4$

$\delta_{IV.2} = 6$ $\delta_{IV.3} = 2$ $\delta_{IV.6} = 3$.

Comme on a deux coûts nuls, cela signifie que la solution est optimale mais pas unique. Il existe une autre affection. Celle-ci consiste à ajouter une unité dans la case **II.3** et **III.2**, puis diminuer d'une unité aussi dans les cases **II.2** et **III.3**. Le coût de transport minimum est donc de **112 U.M** en respectant l'une des deux affectations qui suivent.

- Première affectation.

5 unités de marchandises de l'usine **I** sont transportées vers l'entrepôt **3**,
4 unités de marchandises de l'usine **II** sont transportées vers l'entrepôt **2**,
2 unités de marchandises de l'usine **II** sont transportées vers l'entrepôt **6**,
1 unité de marchandises de l'usine **III** est transportée vers l'entrepôt **1**,
1 unité de marchandises de l'usine **III** est transportée vers l'entrepôt **3**,
3 unités de marchandises de l'usine **IV** sont transportées vers l'entrepôt **1**,
2 unités de marchandises de l'usine **IV** sont transportées vers l'entrepôt **4**,
4 unités de marchandises de l'usine **IV** sont transportées vers l'entrepôt **5**.

- Deuxième affectation.

5 unités de marchandises de l'usine **I** sont transportées vers l'entrepôt **3**,
3 unités de marchandises de l'usine **II** sont transportées vers l'entrepôt **2**,
1 unité de marchandises de l'usine **II** est transportée vers l'entrepôt **3**,
2 unités de marchandises de l'usine **II** sont transportées vers l'entrepôt **6**,
1 unité de marchandises de l'usine **III** est transportée vers l'entrepôt **1**,
1 unité de marchandises de l'usine **III** est transportée vers l'entrepôt **2**,
3 unités de marchandises de l'usine **IV** sont transportées vers l'entrepôt **1**,
2 unités de marchandises de l'usine **IV** sont transportées vers l'entrepôt **4**,
4 unités de marchandises de l'usine **IV** sont transportées vers l'entrepôt **5**.

Solution de l'exercice 4 : Affectation d'ambulances.

1 - Écriture sous forme de programme linéaire.

- Définition des variables.

Soient x_{ij} qui représentent le nombre d'ambulances partant du garage **i** vers la destination finale **j**.
- Fonction objective.

$$\min Z = 15x_{I.1} + 3x_{I.2} + 5x_{I.3} + 8x_{I.4} + 10x_{II.1} + 5x_{II.2} + 4x_{II.3} + 2x_{II.4} + 3x_{III.1} + 9x_{III.2} + 9x_{III.3} + 3x_{III.4}.$$

- Contraintes.

$$\sum_{j=1}^{4} x_{I.j} = 3 \qquad \sum_{j=1}^{4} x_{II.j} = 4 \qquad \sum_{j=1}^{4} x_{III.j} = 2$$

$$\sum_{i=I}^{III} x_{i.1} = 1 \qquad \sum_{i=I}^{III} x_{i.2} = 3 \qquad \sum_{i=I}^{III} x_{i.3} = 2 \qquad \sum_{i=I}^{III} x_{i.4} = 3.$$

La contrainte concernant l'égalité entre les demandes et les disponibilités est respectée.

$$3 + 4 + 2 = 1 + 3 + 2 + 3 = 9.$$

2 – Calcul de la solution de base par la méthode de Houthaker.

Tableau 126 : Solution de base obtenue par la méthode de Houthaker.

Régions / Garages	A	B	C	D	Disponibilités
G_I		3			3
G_{II}			1	3	4
G_{III}	1		1		2
Demandes	1	3	2	3	9

Dans notre exemple, le plus petit temps en ligne et en colonne est 2, correspondant à la case située à l'intersection du garage G_{II} et la région **D**. On affecte donc à ce chemin (G_{II} - **D**) le minimum entre 4 et 3, c'est-à-dire **3**. La demande dans la région **D** est alors totalement satisfaite et il reste seulement dans le garage G_{II} une ambulance. Le temps le plus petit suivant est **3** correspondant à la case située à l'intersection du garage G_I et la région **B**. On affecte donc à ce chemin (G_I - **B**) trois ambulances, et ainsi la région **B** a reçue le nombre de véhicules nécessaires. On a un temps de **3** minutes aussi pour la case correspondante au trajet du garage G_{III} et la région **A**, on y affecte alors une ambulance (le minimum entre 1 et 2). Le temps le plus petit suivant est **4** correspondant à la case située à l'intersection du garage G_{II} et la région **C**. On affecte donc à ce chemin une ambulance, la seule disponible du garage G_{II}

puisque les trois autres ont déjà été affectées à la région **D**. Il ne reste que la région **C** à qui il manque une ambulance, on lui affecte donc la dernière disponible provenant du garage G_{III}.
Le temps minimum pour cette affectation est alors égal à :

$$Z_1 = 3.3 + 1.4 + 3.2 + 1.3 + 1.9 = 31 \text{ minutes}.$$

3 – Optimisation de la solution de base par la méthode de stepping stone.

Calcul des coûts réduits :

$\delta_{I.1} = 18$ $\delta_{I.3} = 2$ $\delta_{I.4} = 8$

$\delta_{II.1} = 12$ $\delta_{II.2} = 2$ $\delta_{III.2} = 18$ $\delta_{III.4} = -4$.

La case $G_{III.4}$ correspond à un coût réduit négatif. On va donc effectuer une autre affectation. Ainsi, on ajoute une ambulance dans les trajets $G_{II.3}$ et $G_{III.4}$. Pour équilibrer, on diminue d'une ambulance aussi les trajets $G_{II.4}$ et $G_{III.3}$. On obtient l'affectation qui suit.

Tableau 127 : Nouvelle affectation.

Garages \ Régions	A	B	C	D	Disponibilités
G_I		3			3
G_{II}			2	2	4
G_{III}	1			1	2
Demandes	1	3	2	3	9

$\delta_{I.1} = 18$ $\delta_{I.3} = 2$ $\delta_{I.4} = 8$

$\delta_{II.1} = 12$ $\delta_{II.2} = 2$ $\delta_{III.2} = 18$ $\delta_{III.3} = 4$.

Le temps correspondant à cette affectation est égal à :

$$Z_2 = 3.3 + 2.4 + 2.2 + 1.3 + 1.3 = 27 \text{ minutes}.$$

Les coûts réduits de cette affectation sont tous positifs, il s'agit donc de l'affectation optimale.

3 ambulances du garage G_I sont affectées dans la région **B**,
2 ambulances du garage G_{II} sont affectées dans la région **C**,
2 ambulances du garage G_{II} sont affectées dans la région **D**,
1 ambulance du garage G_{III} est affectée dans la région **A**,
1 ambulance du garage G_{III} est affectée dans la région **D**.

4 – Cette affectation ne peut se faire ni avant, ni après l'évènement mais théoriquement durant l'évènement. Si on connaît à l'avance les disponibilités, on ne connaît jamais avec certitude les demandes, c'est-à-dire les besoins, lors d'une catastrophe naturelle. Évidemment ce n'est pas dans l'urgence que les gestionnaires vont s'appliquer à faire un modèle de transport et l'optimiser. Pour cela, des simulations doivent se faire à l'avance pour habituer les responsables à de telles situations.

Solution de l'exercice 5 : Société sidérurgique.

Calcul de la solution de base par la méthode de Vogel.

Tableau 128 : Premier tableau du transport de la méthode de Vogel.

Minerais / Fournisseurs	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	Dispo.	Nb de Vogel
F_I	2	3	2	4	1	0	300	1
F_{II}	3	4	1	2	4	0	250	1
F_{III}	2	3	4	1	2	0	150	1
F_{IV}	3	4	2	3	2	0	200	2
Demandes	150	100	75	250	200	125	900	
Nb de Vogel	0	0	1	1	1	0		

Tableau 129 : Deuxième tableau du transport de la méthode de Vogel.

Minerais / Fournisseurs	M_1	M_2	M_4	M_5	M_6	Dispo.	Nb de Vogel
F_I	2	3	4	1	0	300	1
F_{II}	3	4	2	4	0	250	1
F_{III}	2	3	1	2	0	150	1
F_{IV}	3	4	3	2	0	125	2
Demandes	150	100	250	200	125	825	
Nb de Vogel	0	0	1	1	0		

Tableau 130 : Troisième tableau du transport de la méthode de Vogel.

Minerais / Fournisseurs	M_1	M_2	M_4	M_5	M_6	Dispo.	Nb de Vogel
F_I	2	3	4	1	0	300	1
F_{II}	3	4	2	4	0	250	1
F_{III}	2	3	1	2	0	150	1
Demandes	150	100	250	75	125	700	
Nb de Vogel	0	0	1	1	0		

Tableau 131 : Quatrième tableau du transport de la méthode de Vogel.

Minerais / Fournisseurs	M_1	M_2	M_4	M_6	Dispo.	Nb de Vogel
F_I	2	3	4	0	225	1
F_{II}	3	4	2	0	250	1
F_{III}	2	3	1	0	150	1
Demandes	150	100	250	125	625	
Nb de Vogel	0	1	1	0		

Tableau 132 : Cinquième tableau du transport de la méthode de Vogel.

Minerais / Fournisseurs	M_1	M_2	M_6	Dispo.	Nb de Vogel
F_I	2	3	0	225	1
F_{III}	2	3	0	150	1
Demandes	150	100	125	375	
Nb de Vogel	0	0	0		

Tableau 133: Sixième tableau du transport de la méthode de Vogel.

Minerais / Fournisseurs	M_2	M_6	Dispo.
F_I	3	0	75
F_{III}	3	0	150
Demandes	100	125	225

Tableau 134 : Tableau récapitulatif.

M / F	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	Disponi.
F_I	150	75			75		300
F_{II}				250			250
F_{III}		25				125	150
F_{IV}			75		125		200
Dem.	150	100	75	250	200	125	900

Le coût de cette affectation est de :

$$150.2 + 75.3 + 7\,5.1 + 250.2 + 25.3 + 125.0 + 75.2 + 125.2 = 1\,575.$$

On va optimiser cette affectation par la méthode de stepping stone, évidemment si elle n'est pas déjà optimale. Dans ce cas, pour augmenter les teneurs en métal, il faudrait que les coûts réduits soient positifs ou nuls.

Calcul des coûts réduits.

$\delta_{I.3} = 1$	$\delta_{I.4} = 3$	$\delta_{I.6} = 0$	
$\delta_{II.1} = 3$	$\delta_{II.2} = 3$	$\delta_{II.3} = 0$	$\delta_{II.5} = 3$
$\delta_{III.1} = 0$	$\delta_{III.3} = 3$	$\delta_{III.4} = -1$	$\delta_{III.5} = 1$
$\delta_{IV.1} = 0$	$\delta_{IV.2} = 3$	$\delta_{IV.4} = 3$	$\delta_{IV.6} = 0$.

Le coût réduit du trajet F_{III} vers M_4 est négatif (-1), donc cette affectation n'est pas optimale et on peut l'améliorer. On affecte dans cette case 125 unités, d'où la nouvelle affectation du tableau 135.

Tableau 135 : Tableau d'une nouvelle affectation.

F \ M	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	Disponi.
F_I	150	75			75		300
F_{II}				125		125	250
F_{III}		25		125			150
F_{IV}			75		125		200
Dem.	150	100	75	250	200	125	900

Le coût de cette affectation est de :

$$150.2 + 75.3 + 7\,5.1 + 125.2 + 125.0 + 25.3 + 125.1 + 75.2 + 125.2 = 1\,450.$$

Pour savoir si cette solution est optimale, on va calculer les coûts réduits correspondants à cette affectation.

$\delta_{I.3} = 1$	$\delta_{I.4} = 3$	$\delta_{I.6} = 3$	
$\delta_{II.1} = 3$	$\delta_{II.2} = 3$	$\delta_{II.3} = 0$	$\delta_{II.5} = 5$
$\delta_{III.1} = 0$	$\delta_{III.3} = 3$	$\delta_{III.5} = 2$	$\delta_{III.6} = 1$
$\delta_{IV.1} = 1$	$\delta_{IV.2} = 3$	$\delta_{IV.4} = 4$	$\delta_{IV.6} = 2$.

Comme il y a deux coûts réduits nuls, on a donc deux affectations optimales, en plus de celle du tableau 135.

On présente ces affectations dans les tableaux 136 et 137 qui suivent.

Tableau 136 : Tableau d'une nouvelle affectation.

F \ M	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	Disponi.
F_I	125	100			75		300
F_{II}				125		125	250
F_{III}	25			125			150
F_{IV}			75		125		200
Dem.	150	100	75	250	200	125	900

Tableau 137 : Tableau d'une nouvelle affectation.

F \ M	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	Disponi.
F_I	150	75			75		300
F_{II}			75	50		125	250
F_{III}		25		125			150
F_{IV}				75	125		200
Dem.	150	100	75	250	200	125	900

Si vous avez calculé le coût de l'affectation du tableau 136, c'est que vous n'avez pas encore bien assimilé le cours sur le problème des affectations, alors relire le cours attentivement.
Les coûts des affectations des tableaux 135, 136 et 137 sont égaux puisqu'il s'agit dans les trois cas d'une affectation optimale. Le coût de ces affectations est donc de 1 450. *Et, si vous en doutez, ne vous gênez pas pour faire les calculs.*

L'importation de minerais du groupe **SIDER** se fera comme suit si l'on considère le tableau 135.

150 unités de minerais M_1 proviennent du fournisseur F_1,
75 unités de minerais M_2 proviennent du fournisseur F_1,
75 unités de minerais M_5 proviennent du fournisseur F_I,
125 unités de minerais M_4 proviennent du fournisseur F_{II},
125 unités de minerais M_6 proviennent du fournisseur F_{II},
25 unités de minerais M_2 proviennent du fournisseur F_{III},
125 unités de minerais M_4 proviennent du fournisseur F_{III},

75 unités de minerais M_3 proviennent du fournisseur F_{IV},
125 unités de minerais M_3 proviennent du fournisseur F_{IV}.

Pour l'affectation du tableau 136, l'importation de minerais du groupe **SIDER** se fera comme suit.

125 unités de minerais M_1 proviennent du fournisseur F_1,
100 unités de minerais M_2 proviennent du fournisseur F_1,
75 unités de minerais M_5 proviennent du fournisseur F_I,
125 unités de minerais M_4 proviennent du fournisseur F_{II},
125 unités de minerais M_6 proviennent du fournisseur F_{II},
25 unités de minerais M_1 proviennent du fournisseur F_{III},
125 unités de minerais M_4 proviennent du fournisseur F_{III},
75 unités de minerais M_3 proviennent du fournisseur F_{IV},
125 unités de minerais M_5 proviennent du fournisseur F_{IV}.

Et pour l'affectation du tableau 137, l'importation de minerais du groupe **SIDER** se fera comme suit.

150 unités de minerais M_1 proviennent du fournisseur F_1,
75 unités de minerais M_2 proviennent du fournisseur F_I,
75 unités de minerais M_5 proviennent du fournisseur F_I,
75 unités de minerais M_3 proviennent du fournisseur F_{II},
50 unités de minerais M_4 proviennent du fournisseur F_{II},
125 unités de minerais M_6 proviennent du fournisseur F_{II},
25 unités de minerais M_2 proviennent du fournisseur F_{III},
125 unités de minerais M_4 proviennent du fournisseur F_{III},
75 unités de minerais M_4 proviennent du fournisseur F_{IV},
125 unités de minerais M_5 proviennent du fournisseur F_{IV}.

Solution de l'exercice 6 : Société pétrolière.

Comme on peut le constater dans le tableau 95, la somme des disponibilités n'est pas égale à la somme des demandes, mais inférieure. On doit donc ajouter une ligne supplémentaire au tableau du transport, représentant symboliquement une région où la demande qui ne peut être satisfaite sera absorbée.
Évidemment, le coût de transport vers cette région fictive est nul puisque cette région n'existe pas.

Calcul de la solution de base par la méthode de Vogel.

Tableau 138 : Premier tableau du transport de la méthode de Vogel.

Raffineries / Endroits	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	a_i	Nb de Vogel
E_I	110	120	100	105	115	60	5
E_{II}	165	155	150	180	175	40	5
E_{III}	200	210	203	206	209	75	3
E_{IV}	130	125	127	132	133	25	5
E_V	0	0	0	0	0	40	0
b_j	50	75	30	25	60	240	
Nb de Vogel	20	5	27	27	18		

Dans ce premier tableau, on a deux nombres de Vogel égaux à 27, on affecte donc une double affectation dans les cases I.3 et I.4 avec respectivement 30 et 25 unités

Tableau 139 : Deuxième tableau du transport de la méthode de Vogel.

Raffineries / Endroits	R_1	R_2	R_5	a_i	Nb de Vogel
E_I	110	120	115	5	5
E_{II}	165	155	175	40	10
E_{III}	200	210	209	75	9
E_{IV}	130	125	133	25	5
E_V	0	0	0	40	0
b_j	50	75	60	185	
Nb de Vogel	20	5	18		

Tableau 140 : Troisième tableau du transport de la méthode de Vogel.

Raffineries / Endroits	R_1	R_2	R_5		a_i	Nb de Vogel
E_{II}	165	155	175		40	10
E_{III}	200	210	209		75	9
E_{IV}	130	125	133	←	25	5
E_V	0	0	0		40	0
b_j	45	75	60		180	
Nb de Vogel	35	30	42			

Tableau 141 : Quatrième tableau du transport de la méthode de Vogel.

Raffineries / Endroits	R_1	R_2	R_5		a_i	Nb de Vogel
E_{II}	165	155	175	←	40	10
E_{III}	200	210	209		75	9
E_V	0	0	0		40	0
b_j	45	75	35		155	
Nb de Vogel	35	55	34			

Tableau 142 : Cinquième tableau du transport de la méthode de Vogel.

Raffineries / Endroits	R_1	R_2	R_5	a_i	Nb de Vogel
E_{III}	200	210	209	75	9
E_V	0	0	0	40	0
b_j	45	35	35	115	

Le plus grand nombre de Vogel étant égal à 9, on affecte alors dans la case **III.1** la quantité 45, puis ensuite 30 dans la case **III.5**, 35 dans la case **V.2** et finalement 5 dans la case **V.5**.

<u>Tableau 143</u> : Tableau récapitulatif.

Raffineries / Endroits	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	a_i
E_I	5		30	25		60
E_{II}		40				40
E_{III}	45				30	75
E_{IV}					25	25
E_V		35			5	40
b_j	50	75	30	25	60	240

Le coût de cette affectation est égal à :

$$Z_1 = 550 + 3\,000 + 2\,625 + 6\,200 + 9\,000 + 6\,270 + 3\,325 = 30\,970 \text{ U.M.}$$

Pour optimiser cette solution de base, on va utiliser la méthode de stepping stone.

$\delta_{I.2} = 13$ $\delta_{I.5} = 7$

$\delta_{II.1} = 20$ $\delta_{II.3} = 15$ $\delta_{II.4} = 40$ $\delta_{II.5} = 21$

$\delta_{III.2} = 9$ $\delta_{III.3} = 4$ $\delta_{III.4} = 7$

$\delta_{IV.1} = 6$ $\delta_{IV.2} = -8$ $\delta_{IV.3} = 9$ $\delta_{IV.4} = 11$

$\delta_{V.1} = 10$ $\delta_{V.3} = 20$ $\delta_{V.4} = 15$.

<u>Tableau 144</u> : Amélioration de la solution de base.

Raffineries / Endroits	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	a_i
E_I	5		30	25		60
E_{II}		40				40
E_{III}	45				30	75
E_{IV}		25				25
E_V		10			30	40
b_j	50	75	30	25	60	240

Le coût de cette affectation est égal à :

$$Z_2 = 5.110 + 30.100 + 25.105 + 40.155 + 45.200 + 30.209 + 25.125 + 10.0 + 30.0 =$$

$$Z_2 = 550 + 3\,000 + 2\,625 + 6\,200 + 9\,000 + 6\,270 + 3\,125 = 30\,770 \text{ U.M.}$$

Calcul des coûts réduits pour une éventuelle amélioration de cette affectation :

$\delta_{I.2} = 13$ $\delta_{I.5} = 7$
$\delta_{II.1} = 20$ $\delta_{II.3} = 15$ $\delta_{II.4} = 40$ $\delta_{II.5} = 21$
$\delta_{III.2} = 9$ $\delta_{III.3} = 4$ $\delta_{III.4} = 7$
$\delta_{IV.1} = 6$ $\delta_{IV.3} = -8$ $\delta_{IV.4} = 9$ $\delta_{IV.5} = 11$
$\delta_{V.1} = 10$ $\delta_{V.3} = 20$ $\delta_{V.4} = 15$.

Comme on a un coût réduit négatif, on peut améliorer la solution précédente en ajoutant **5** unités dans les cases **I.5** et **III.1**, puis en retranchant **5** unités aussi dans les cases **III.5** et **I.1**.

Tableau 145 : Nouvelle affectation.

Raffineries / Endroits	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	a_i
E_I			30	25	5	60
E_{II}		40				40
E_{III}	50				25	75
E_{IV}		25				25
E_V		10			30	40
b_j	50	75	30	25	60	240

Le coût de cette affectation est égal à :

$$Z_3 = 30.100 + 25.105 + 5.115 + 40.155 + 50.200 + 25.209 + 25.125 + 10.0 + 30.0 =$$
$$\mathbf{Z_3 = 3\,000 + 2\,625 + 575 + 6\,200 + 10\,000 + 5\,225 + 3\,125 = 30\,750\ U.M.}$$

Calcul des coûts réduits pour une éventuelle amélioration de cette affectation :

$\delta_{I.1} = 63$ $\delta_{I.2} = 15$
$\delta_{II.1} = 20$ $\delta_{II.3} = 15$ $\delta_{II.4} = 40$ $\delta_{II.5} = 25$
$\delta_{III.2} = 20$ $\delta_{III.3} = 13$ $\delta_{III.4} = 11$
$\delta_{IV.1} = 15$ $\delta_{IV.3} = 22$ $\delta_{IV.4} = 22$ $\delta_{IV.5} = 8$
$\delta_{V.1} = 10$ $\delta_{V.3} = 20$ $\delta_{V.4} = 15$.

Comme tous les coûts réduits sont positifs, on ne peut donc plus améliorer la solution précédente, il s'agit de l'affectation optimale qui est la suivante :

La raffiner $\mathbf{R_1}$ sera alimentée à partir de la région $\mathbf{E_{III}}$,
La raffiner $\mathbf{R_2}$ sera alimentée à partir des régions $\mathbf{E_{II}}$ et $\mathbf{E_{IV}}$,
La raffiner $\mathbf{R_3}$ sera alimentée à partir de la région $\mathbf{E_I}$,
La raffiner $\mathbf{R_4}$ sera alimentée à partir de la région $\mathbf{E_I}$,
La raffiner $\mathbf{R_5}$ sera alimentée à partir des régions $\mathbf{E_I}$ et $\mathbf{E_{III}}$.

Le coût total de cette affectation est égal à **30 750 U.M**.

Solution de l'exercice 7 : Problème d'affectation (1).

La première étape de l'algorithme hongrois consiste à diminuer de chaque ligne (puis de chaque colonne) de la matrice le plus petit élément (0 est le plus petit élément). On obtient alors les deux matrices représentées dans les tableaux **146a** et **146b**.

Tableau 146 : Premiers tableaux de l'algorithme hongrois.

Tableau 146a : soustraction du plus petit élément de chaque ligne.

P \ F	F_I	F_{II}	F_{III}	F_{IV}	F_V
P_1	8	4	3	11	0
P_2	0	2	10	7	3
P_3	3	0	6	0	1
P_4	1	0	8	0	4
P_5	3	0	6	4	0

Tableau 146b : soustraction du plus petit élément de chaque colonne.

P \ F	F_I	F_{II}	F_{III}	F_{IV}	F_V
P_1	8	4	$\boxed{0}$	11	$\cancel{0}$
P_2	$\boxed{0}$	2	7	7	3
P_3	3	$\cancel{0}$	3	$\boxed{0}$	1
P_4	1	$\boxed{0}$	5	$\cancel{0}$	4
P_5	3	$\cancel{0}$	3	4	$\boxed{0}$

La matrice du tableau **146b** contient au moins un zéro par ligne ou colonne. Le tableau **146b** ne diffère du tableau **146a** que par la troisième colonne puisque les autres colonnes contiennent déjà un zéro dans le tableau **146a**. On peut encadrer et barrer les **0** du tableau **146b**.

À partir du tableau **146b**, on peut élaborer la matrice booléenne correspondante.

Tableau 147 : Tableau de la matrice booléenne.

P \ F	F_I	F_{II}	F_{III}	F_{IV}	F_V
P_1	0	0	1	0	0
P_2	1	0	0	0	0
P_3	0	0	0	1	0
P_4	0	1	0	0	0
P_5	0	0	0	0	1

Dans la mesure où chaque poste de travail correspond à un fonctionnaire, cette solution est donc optimale. Le coût de cette affectation est égal à :

$$\mathbf{Z = 7 + 7 + 6 + 6 + 6 = 32}.$$

L'affectation optimale est la suivante :

Le fonctionnaire $\mathbf{F_{I}}$ est affecté au poste $\mathbf{P_{2}}$,
Le fonctionnaire $\mathbf{F_{II}}$ est affecté au poste $\mathbf{P_{4}}$,
Le fonctionnaire $\mathbf{F_{III}}$ est affecté au poste $\mathbf{P_{1}}$,
Le fonctionnaire $\mathbf{F_{IV}}$ est affecté au poste $\mathbf{P_{3}}$,
Le fonctionnaire $\mathbf{F_{V}}$ est affecté au poste $\mathbf{P_{5}}$.

Solution de l'exercice 8 : Problème d'affectation (2).

Soient les deux matrices représentées par les tableaux **148a** et **148b**.

Tableau 148 : Premiers tableaux de l'algorithme hongrois.

Tableau 148a : soustraction du plus petit élément de chaque colonne.

P \ F	F_{I}	F_{II}	F_{III}	F_{IV}	F_{V}
P_{1}	1	0	4	5	3
P_{2}	0	∞	∞	6	0
P_{3}	0	2	0	3	∞
P_{4}	5	1	∞	9	8
P_{5}	∞	1	4	0	3

Tableau 148b : soustraction du plus petit élément de chaque ligne.

P \ F	F_{I}	F_{II}	F_{III}	F_{IV}	F_{V}
P_{1}	1	$\cancel{0}$	4	5	3
P_{2}	$\cancel{0}$	∞	∞	6	$\boxed{0}$
P_{3}	$\cancel{0}$	2	$\boxed{0}$	3	∞
P_{4}	4	$\boxed{0}$	∞	8	7
P_{5}	∞	1	4	$\boxed{0}$	3

On peut encadrer et barrer les **0** du tableau **148b**.

A partir du tableau **148b**, on peut élaborer la matrice booléenne correspondante.

Tableau 149 : Tableau de la matrice booléenne.

P \ F	F_I	F_{II}	F_{III}	F_{IV}	F_V
P_1	0	0	0	0	0
P_2	0	0	0	0	1
P_3	0	0	1	0	0
P_4	0	1	0	0	0
P_5	0	0	0	1	0

Comme il n'y a aucune affectation au poste **P**$_1$, cette solution n'est pas optimale. On passe donc à l'étape suivante du marquage.

Tableau 150 : Amélioration de la solution.

P \ F	F_I	F_{II}	F_{III}	F_{IV}	F_V	
P_1	1	$\cancel{0}$	4	5	3	×
P_2	$\cancel{0}$	∞	∞	6	$\boxed{0}$	
P_3	$\cancel{0}$	2	$\boxed{0}$	3	∞	
P_4	4	$\boxed{0}$	∞	8	7	×
P_5	∞	1	4	$\boxed{0}$	3	
		×				

Il n'y a encore pas d'affectation au poste **P**$_1$, cette solution n'est pas optimale. On passe à l'étape suivante du marquage.

Tableau 151 : Amélioration de la solution.

P \ F	F_I	F_{II}	F_{III}	F_{IV}	F_V
P_1	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	3	4	2
P_2	$\cancel{0}$	∞	∞	6	$\boxed{0}$
P_3	$\cancel{0}$	3	$\boxed{0}$	3	∞
P_4	3	$\boxed{0}$	∞	7	6
P_5	∞	2	4	$\boxed{0}$	3

Dans cette solution, on constate que chaque poste correspond à un fonctionnaire, il s'agit donc d'une affectation optimale. Le coût de cette affectation est donc égal à :

$$Z = 7 + 7 + 1 + 4 + 2 = 21.$$

L'affectation optimale est la suivante :

Le fonctionnaire F_I est affecté au poste P_1,
Le fonctionnaire F_{II} est affecté au poste P_4,
Le fonctionnaire F_{III} est affecté au poste P_3,
Le fonctionnaire F_{IV} est affecté au poste P_5,
Le fonctionnaire F_V est affecté au poste P_2.

Solution de l'exercice 9 : Stages pratiques.

Nous allons utiliser l'algorithme hongrois pour ce problème d'affectation. Comme l'algorithme hongrois utilise des minimisations, on va transformer le tableau des affectations en utilisant le complémentaire de **20**, c'est-à-dire $x_{ij}' = 20 - x_{ij}$, avec x_{ij} qui symbolise la préférence de l'étudiant **i** pour la ville **j**.

En calculant ces complémentaires, on obtient le tableau **152**.

Tableau 152 : Tableau du transport.

Villes / Etudiants	A	B	C	D	E	F
1	16	12	4	0	8	20
2	4	0	12	20	16	8
3	20	8	16	4	0	12
4	16	20	4	8	0	12
5	8	4	20	12	0	16
6	0	4	8	20	16	12

Dans ce tableau, seules les colonnes **C** et **F** doivent subir des modifications, d'où le tableau **153** suivant.

Tableau 153 : Amélioration de la solution.

Villes / Etudiants	A	B	C	D	E	F	
1	16	12	~~0~~	$\boxed{0}$	8	12	
2	4	$\boxed{0}$	8	20	16	~~0~~	
3	20	8	12	4	$\boxed{0}$	4	×
4	16	20	$\boxed{0}$	8	~~0~~	4	
5	8	4	16	12	~~0~~	8	×
6	$\boxed{0}$	4	4	20	16	4	

À partir de ce tableau, on va encadrer les zéros et établir les marquages.
Le tableau de la matrice booléenne est présenté dans le tableau **154**.

Tableau 154 : Tableau de la matrice booléenne.

Villes / Etudiants	A	B	C	D	E	F
1	0	0	0	1	0	0
2	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	1	0
4	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0

Ce tableau montre bien que la solution optimale n'est pas encore atteinte dans la mesure où l'étudiant 5 n'a aucune affectation. On va effectuer d'autres permutations et nous obtenons le tableau 155.

Tableau 155 : Amélioration de la solution.

Villes / Etudiants	A	B	C	D	E	F
1	16	12	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	12	12
2	4	$\cancel{0}$	8	20	20	$\boxed{0}$
3	16	4	8	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$
4	16	20	$\boxed{0}$	8	4	4
5	4	$\boxed{0}$	12	8	$\cancel{0}$	4
6	$\boxed{0}$	4	4	20	20	4

Puisque chaque ligne et colonne correspondent à un zéro encadré, cette solution est optimale. La meilleure affectation est donc la suivante :

L'étudiant 1 reçoit son affectation pour la ville de Dellys,
L'étudiant 2 reçoit son affectation pour la ville de Frenda,
L'étudiant 3 reçoit son affectation pour la ville d'El oued,
L'étudiant 4 reçoit son affectation pour la ville de Constantine,
L'étudiant 5 reçoit son affectation pour la ville de Boumerdes,
L'étudiant 6 reçoit son affectation pour la ville d'Alger.

Solution de l'exercice 10 : Transport Alger-Biskra.

Pour l'application de l'algorithme hongrois, il nous faut au minimum une matrice. Or dans l'énoncé de cet exercice, le tableau **310** ne représente pas une matrice. *Alors, on va essayer de la créer, pas avec une baguette magique, mais avec un peu de logique.* Comme on doit minimiser le temps d'attente, on va élaborer une matrice qui représente les temps d'attente d'un chauffeur entre deux livraisons. Nous avons dix départs correspondants à dix lignes numérotés de **1** à **10** : cinq départs (**1** à **5**) à partir d'**Alger** vers **Biskra** à différents horaires et cinq autres (**6** à **10**) de **Biskra** vers **Alger**, toujours à des horaires différents. Tout d'abord, nous allons élaborer deux tableaux, représentants les temps d'attente. Dans le tableau **367a**, nous considérons les chauffeurs résident à Alger, et dans le tableau **367b** les chauffeurs qui résident à **Biskra**.

Tableau 156 : Premiers tableaux de l'algorithme hongrois.

Tableau 156a : chauffeurs résidant à Alger

Lignes	6	7	8	9	10
1	17.30	20.30	20.00	5.30	12.00
2	15.00	18.00	23.30	3.00	9.30
3	12.00	15.00	20.30	0.00	6.30
4	4.30	7.30	13.00	16.30	23.00
5	23.30	2.30	8.00	11.30	18.00

Tableau 156b : Chauffeurs résidant à Biskra

Lignes	6	7	8	9	10
1	16.30	13.30	8.00	4.30	22.00
2	19.00	16.00	10.30	7.00	0.30
3	0.30	19.00	13.30	10.00	3.30
4	5.30	2.30	21.30	17.30	11.00
5	10.30	7.30	2.00	22.30	16.00

Élaboration de la première ligne du tableau **156a**.

Le chauffeur résidant à **Alger** démarre d'**Alger** à **5** heures du matin et arrive à **Biskra** à **12** h. Pour retourner à son domicile, il a le choix entre cinq horaires de départ :

- S'il prend le départ de la ligne **6** de **Biskra** à **5 h 30**, il devra attendre dans cette ville **17 h 30**, c'est-à-dire de **12** h à **5** h **30** du matin,

- S'il prend le départ de la ligne **7** de **Biskra** à **8 h 30**, il devra attendre dans cette ville **20 h 30**, de **12** h à **8** h **30** du matin,

- S'il prend le départ de la ligne **8** de **Biskra** à **14 h**, il devra attendre dans cette ville **2 h**, de **12** à **14** h,

- S'il prend le départ de la ligne **9** de **Biskra** à **17 h 30**, il devra attendre dans cette ville **5 h 30**, de **12** h à **17** h **30**,

- S'il prend le départ de la ligne **10** de **Biskra** à **00 h 30**, il devra attendre dans cette ville **12 h**, de minuit à midi.

Ces chiffres correspondent aux temps d'attente inscrits dans la première ligne de la matrice du tableau **156a**. Les autres chiffres sont obtenus par des calculs similaires.

Comme dans cet exercice, il nous est demandé le choix de résidence des chauffeurs, on va choisir celle qui présente le moins de temps d'attente, tout en respectant la contrainte **2**, c'est-à-dire qu'entre deux voyages, le chauffeur doit prendre une pause d'au moins **5** heures.

On va faire une fusion entre ces deux tableaux pour obtenir un troisième tableau **368** où l'on inscrira le temps d'attente minimum entre le tableau **156a** et **156b**.

Tableau 157 : Fusion des tableaux **156a** et **156b**.

Lignes	6	7	8	9	10
1	16.30	13.30	8.00	5.30	12.00
2	15.00	16.00	10.30	7.00	9.30
3	12.00	15.00	13.30	10.00	6.30
4	5.30	7.30	13.00	16.30	11.00
5	10.30	7.30	8.00	11.30	16.30

Ainsi, pour le trajet **1.6**, si le chauffeur réside à **Alger**, son temps d'attente est de **17 h 30**, par contre s'il réside à **Biskra**, son temps d'attente n'est que de **16 h 30**, on va alors inscrire dans ce troisième tableau le temps d'attente du tableau **156b**. Le raisonnement est le même pour les autres cases du tableau **157**. Il faut toutefois préciser qu'on ne prend pas en considération les temps d'attente inférieurs à **5** heures (deuxième contrainte).

C'est à partir de cette matrice du tableau **157** que nous allons utiliser l'algorithme hongrois. Dans ce tableau, est inscrit en rouge les temps d'attente des chauffeurs résidants à **Alger** et en vert les temps d'attente des chauffeurs résidants à **Biskra**.

En créant des zéros par soustraction dans chaque ligne et colonne, on obtient le tableau **158**.

Tableau 158 : Amélioration de la solution.

Lignes	6	7	8	9	10
1	11.00	6.30	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	5.30
2	8.00	7.00	1.00	$\boxed{0}$	1.30
3	6.30	7.30	5.30	4.00	$\boxed{0}$
4	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	5.00	11.00	4.30
5	5.00	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	6.00	9.30

Puisque nous avons obtenu un zéro encadré pour chaque ligne et colonne, la solution est donc optimale où le temps minimal d'attente est égal à :

Z = 8.00 + 7.00 + 6.30 + 5.30 + 7.30 = 34.30 heures.

Pour cette solution optimale, le nombre de chauffeurs qui devront résider à **Biskra** est de **4** et de **1** pour le nombre de chauffeurs résidants à **Alger**.
Nous présentons un tableau récapitulatif de la meilleure affectation.

Tableau 159 : Tableau récapitulatif.

Chauffeur	Domicile	Départ	Retour	Tps d'attente
1	Biskra	14.00	5.00	8.00
2	Biskra	17.30	7.30	7.00
3	Alger	10.30	00.00	6.30
4	Biskra	5.30	18.00	5.30
5	Biskra	8.30	23.00	6.00

Ce tableau nous renseigne sur les résidences des cinq chauffeurs qui devront travailler dans cette entreprise, les horaires de départ et d'arrivée, ainsi que les temps d'attente.
Ainsi, pour le chauffeur **A**, il devra résider à **Biskra**, démarrer à **14** h et retourner, après **8** h d'attente, à **5** h.

Bibliographie

[1] M. Aidene et B. Oukacha : *Recherche opérationnelle*. Édition Pages bleues, Alger, 2005.
[2] S. Aïvazian, I. Enukov et L. Mechalkine : *Eléments de modélisation et traitement primaire des données*. Édition, Moscou, 1986.
[3] J.P. Ancot et J.P. Paelinck : *Modèles et choix. Une initiation à la modélisation pour pays en développement*. Édition Economica, 1990.
[4] M. Angers : *Initiation pratique à la méthodologie des sciences humaines*. C T R. Casbah Université, Alger 1997.
[5] J. P. Aubin, P. Neponiastchy et A.M. Charles : *Méthodes explicites de l'optimisation.* Éditeur Dunod, 1982.
[6] P. Azoulay et P. Dassonville : *Recherche opérationnelle de gestion*. Tome 1, Presse Universitaire de France, 1976.
[7] R. Benayoun : *La pratique de l'optimisation dans l'entreprise*. Presse Universitaire de France, 1974.
[8] A. M. Benghezal : *Programmation linéaire*. Office des Publications Universitaires, Alger, 2000.
[9] B. Benmazouz : *Recherche opérationnelle de gestion*. Atlas Éditions, Alger, 1995.
[10] M. Blang : *La méthodologie économique*. Édition Economica, 1994.
[11] J. L. Boursin : *La statistique du quotidien*. Vuibert, 1992.
[12] J. L. Boursin : *La décision rationnelle*. Édition Economica, 1996.
[13] J. L. Brissard et M. Polizzi : *Gérer la production industrielle : outils et méthodes*. Éditions Mare Nostrum, 1996.
[14] W. Broad et N. Wade : *La souris truquée : enquête sur la fraude scientifique*. Éditions du Seuil, 1997.
[15] I.D. J. Bross : *Prévision et décisions rationnelles*. Éditeur Dunod, 1961.
[16] J. P. Bross, R. Faure et A. Le Garff : *La recherche opérationnelle*. Collection Que sais-je, Presse Universitaire de France, 1980.
[17] D. Brunel et J. C. Goaër : *La théorie des jeux et les tests statistiques*. Éditeur Dunod Economica, 1972.
[18] P. Caron, A. Juhel et F. Vandevelde : *Programmation linéaire, méthodes et applications*. Éditeur Dunod, 1988.
[19] A. M. Chauvel : *Résoudre un problème. Méthode et outil pour une meilleure qualité*. Éditeur Dunod, 1992.
[20] P. Chretienne, Y. Pesqueux et J. C. Grandjean : *Algorithme et pratique de programmation linéaire*. Édition Technip, Paris, 1980.
[21] A. David, A. hatchuel et R. Laufer : *Les nouvelles fondations des sciences de gestion*. Éditeur Vuibert, 2000.
[22] Roseaux (nom collectif) : *Exercices et problèmes résolus de recherche opérationnelle*. Tome 3, Édition Masson, 1991.

[23] M. Simonnard : *Programmation linéaire. Technique du calcul économique*. Tome 1, Éditeur Dunod, 1972.
[24] J. Sohier : *La logistique*. Librairie Vuibert, Paris, 1999.
[25] J. Sordet : *La programmation linéaire appliquée à l'entreprise*. Éditeur Dunod, 1970.
[26] A. Spalanzani : *Précis de gestion industrielle et de production*. Office des Publications Universitaires, Alger, 1994.
[27] J. Thépot : *Gestion et théorie des jeux*. Éditeur Vuibert, 1998.
[28] H.Thiriez : *Comprendre et utiliser les modèles en gestion*. Édition d'Organisation, Paris, 1982.
[29] H.Thiriez : *Initiation au calcul économique*. Éditeur Dunod, 1987.
[30] S. Vajda : *Leçons sur la programmation mathématique*. Éditeur Dunod, 1965.
[31] S. Vajda : *Théorie des jeux et programmation linéaire* Éditeur Dunod, 1968.
[32] T. P. Vedrine : *Techniques quantitatives de gestion*. Vuibert Gestion, 1985.
[33] P. Vizzavona : *Pratique de gestion*. Tome 2 et 3, Éditions Berti, Tipaza, 1991.
[34] M. Yebbal : *Introduction à la publicité*. Éditions ANEP, Rouiba, 2000.