

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA-BOUMERDES



Faculté des sciences

THÈSE DE DOCTORAT

Présentée par :

Soraya SALMI

En vue de l'obtention du diplôme de **DOCTORAT - LMD** en :

Filière : Physique

Spécialité : Dynamique des Fluides et Energétiques

**Etude des ondes interfaciales tridimensionnelles en présence
d'un courant parallèle**

Devant le jury composé de :

Mme	AMI	Ismahane	Professeur	UMBB	Présidente
Mr	ALLALOU	Nabil	Professeur	USTHB	Directeur de thèse
Mr	ZAMOUM	Mohamed	Professeur	UMBB	Examineur
Mr	SALHI	Yacine	Professeur	USTHB	Examineur
Mr	BOUCETTA	Rachid	MCA	UMBB	Examineur

Année Universitaire 2023/2024

ملخص

تظهر الموجات الداخلية عند الحدود الفاصلة بين طبقات السوائل ذات الكثافات المختلفة وتنتشر في الاتجاه الأفقي، حيث تغطي الطبقة الأخف والأكثر كثافة بشكل مستقر. لأكثر من عقدين، تمت دراسة الأمواج الداخلية بشكل مكثف من حيث القياسات المباشرة والحسابات ومن وجهة نظر نظرية. وقد ساهم العديد من الباحثين في تحسين فهم انتشار الأمواج في الماء، حيث تركز معظمهم تحليلاتهم على أمواج ستوكس ثنائية الأبعاد. دراسة حقول الأمواج ثلاثية الأبعاد تشكل خطوة طبيعية في تقدم المعرفة حول الأمواج، حيث تمكن من تمثيل تعقيد الظواهر الطبيعية بشكل أكثر دقة. من بين أبسط الأشكال هي الأمواج ذات القمم القصيرة. يتم تعريفها كتداخل بين موجتين تقدميتين ثنائيتين الأبعاد، ذات ترددات وشدات متساوية. تظهر هذه الأمواج على سبيل المثال عندما تصل موجة مستوية بزاوية وتنكسر على جدار رأسي. النتيجة هي موجة متكررة مزدوجة في اتجاهين متعامدين، تتحرك بشكل متوازٍ للجدار. إنها هذه الفئة من الأمواج التي نهتم بها. الهدف الرئيسي للرسالة هو فحص الأمواج الثلاثية الأبعاد للجاذبية التي تنتشر على واجهة طبقتين من السوائل ذات الكثافات المختلفة، والتي تتميز بسمك عشوائي، بوجود تيار موحد في الطبقة العليا من السائل، متوازياً مع التدفق. لحل هذه المشكلة، نقدم طريقتين للحساب في الفصل الأول: طريقة الاضطرابات وطريقة لاغرانجيان ويثام. في المرحلة الأولى، استخدمنا برنامج الحساب الرمزي مايبل للحصول على حلاً تحليلياً حتى الرتبة خمسة باستخدام طريقة الاضطرابات بعد ذلك، قمنا بتوسيع الحساب إلى الرتبة اثنان و ثلاثون. تم استخدام كسور بادى لتجاوز النقاط الفردية التي تم إنشاؤها. قمنا بحساب سمات الأمواج الفاصلة، مثل ترددها وتقديرات أقصى ارتفاع للانحناء، وكذلك ملامح واجهة السائل. تقدم الطريقة اللاغرانجية ميزة تتيح تحديد علاقة التشتت غير الخطية بناء على الانحناء، وهذه العلاقة ذات أهمية كبيرة لتقييم التيار غير الخطي. في الفصل الثاني، قمنا بإجراء دراسة حول استقرار الأمواج الثلاثية الأبعاد الفائقة التردد. لهذا الغرض، استخدمنا طريقة نوع جاليركين. تم تبسيط معادلات الحركة إلى مشكلة معممة للقيم الذاتية، حيث تم تحليل التشويش إلى أوضاع طبيعية. لاحظنا أن الاضطرابات الفائقة التردد مرتبطة بالترددات الهارمونية، ولوحظ أن التيار له تأثير تخفيف على هذه.

الكلمات المفتاحية: الموجات الواجهية ثلاثية الأبعاد، التيار، طريقة الاضطرابات، طريقة لاغرانج المتوسطة لويثام، الارتجاج الموجي، الاستقرار.

Abstract

Internal waves appear at the interface separating layers of fluids with different densities and propagate in the horizontal direction, with the lighter layer covering the denser layer in a stable configuration. For over two decades, internal waves have been the subject of highly intensive studies in terms of direct measurements, calculations, and theoretical perspectives. Numerous researchers have contributed to a better understanding of wave propagation in water, with most focusing their analyses on two-dimensional Stokes waves. The study of three-dimensional wave fields constitutes a natural progression in advancing knowledge about waves, as it allows for a more accurate representation of the complexity of natural phenomena. Among the simplest forms are short-crested waves, defined as a superposition of two progressive two-dimensional wave trains with equal frequencies and amplitudes. They are generated from the non-linear interaction of two wave trains propagating toward each other with the same characteristics. The result is a doubly periodic wave train in two orthogonal directions, moving parallel to the wall. This is the category of waves that we are interested in. The main objective of the thesis is to examine three-dimensional gravity waves propagating at the interface of two fluids layers with distinct densities, having arbitrary depths, in the presence of a uniform current in the upper fluid layer, parallel to the flow. Two calculation methods are presented in Chapter I: the perturbation method and the Lagrangian method. In the initial step, we used the symbolic computation software Maple to obtain analytical solutions up to order 5 using the perturbation method. Subsequently, we performed a numerical extension up to order 32. Padé approximants were employed to overcome generated singularities. We calculated characteristics of interfacial waves, such as their frequency, estimates of the maximum waveheight, and the interfacial profiles. The Lagrangian method has the advantage of allowing the determination of the nonlinear dispersion relation as a function of wave steepness. This relation is of crucial importance for evaluating nonlinear currents. In the second chapter, we conducted a study on the superharmonic stability of three-dimensional interfacial waves. For this purpose, we used a Galerkin-type method. The equations of motion simplified into a generalized eigenvalue problem, where perturbations were decomposed into normal modes. We observed that superharmonic instabilities were associated with harmonic resonances, and we noted that the current had an attenuating effect on these instabilities.

Keywords: Three-dimensional interfacial waves, Current, Perturbation method, Witham's average Lagrangian method, Harmonic resonance, Stability.

Résumé

Les ondes internes apparaissent à l'interface séparant les couches de fluides de densités différentes et se propagent dans la direction horizontale, avec la couche la plus légère recouvrant la couche la plus dense dans une configuration stable. Pendant plus de deux décennies, les ondes internes ont fait l'objet d'études très intensives en termes de mesures directes, de calculs et d'un point de vue théorique. De nombreux chercheurs ont contribué à une meilleure compréhension de la propagation des ondes dans l'eau la plupart concentrant leurs analyses sur les ondes de Stokes à caractère bidimensionnel. L'étude des champs d'ondes tridimensionnels constitue une étape naturelle dans l'avancement des connaissances sur les ondes, car elle permet de représenter plus fidèlement la complexité des phénomènes naturels. Parmi les formes les plus simples sont les ondes à courtes crêtes. Elles sont définies comme une superposition de deux trains d'ondes progressives à deux dimensions, de fréquences et d'amplitudes égales. Elles interviennent par exemple quand un train d'ondes planes arrive obliquement et se réfléchit sur un mur vertical. Le résultat est alors un train d'ondes doublement périodiques dans deux directions orthogonales, qui se déplace parallèlement au mur. C'est à cette catégorie d'ondes que nous nous intéressons. L'objectif principal de la thèse consiste à examiner les ondes de gravité tridimensionnelles se propageant à l'interface de deux couches de fluides de densités distinctes, ayant des épaisseurs arbitraires, en présence un courant uniforme dans la couche de fluide supérieure, parallèlement à l'écoulement. Pour résoudre ce problème, nous présentons deux méthodes de calcul dans le chapitre I : la méthode des perturbations et la méthode du Lagrangien de Whitham. En première étape, nous avons utilisé le logiciel de calcul symbolique Maple pour obtenir des solutions analytiques jusqu'à l'ordre 5 en utilisant la méthode des perturbations. Ensuite, nous avons effectué une extension numérique jusqu'à l'ordre 32. Les approximants de Padé ont été employés afin de dépasser les singularités engendrées. Nous avons calculé les caractéristiques des ondes interfaciales, telles que leur fréquence, les estimations de la hauteur maximale de la cambrure, ainsi que le profil de l'interface. La méthode Lagrangienne présente l'avantage de permettre la détermination de la relation de dispersion non linéaire en fonction de la cambrure. Cette relation revêt une importance capitale pour évaluer le courant non linéaire. Dans le second chapitre, nous avons réalisé une étude de la stabilité superharmonique des ondes interfaciales tridimensionnelles. À cette fin, nous avons utilisé une méthode de type Galerkin. Les équations du mouvement se sont simplifiées en un problème généralisé de valeurs propres, où les perturbations ont été décomposées en modes normaux. Nous avons constaté que les instabilités superharmoniques étaient associées aux résonances harmoniques, et nous avons noté que le courant avait un effet d'atténuation sur ces instabilités.

Mots Clée : Ondes interfaciales tridimensionnelles, Courant, Méthode des perturbations, Méthode du Lagrangien moyen de Whitham, Résonance harmonique, Stabilité.

Remerciement

Je débute ces remerciements en mettant en avant le rôle déterminant de mon directeur de thèse, Nabil Allalou. Je salue en particulier son expertise et la confiance qu'il a accordé en mes capacités. Je suis infiniment reconnaissante pour son mentorat attentif, ses conseils perspicaces et sa patience inébranlable et je suis honorée d'avoir eu l'opportunité de travailler à ses côtés.

Je remercie vivement madame Ismahane Ami, Professeur à l'UMBB d'avoir accepté d'être Présidente de mon jury de thèse.

Je tiens à exprimer ma sincère gratitude envers les professeurs Yacine Salhi et Mohamed Zamoum d'avoir accepté de consacrer leur temps et leur expertise à évaluer mon travail de recherche.

Je souhaite remercier chaleureusement le docteur Rachid Boucetta pour son engagement et sa contribution précieuse à l'examen de ma thèse.

Je tiens à remercier tout particulièrement les professeurs Ismahane Ami, Seddik Elhak Abaidia et Mohamed Debiane pour leurs encouragements. Leur soutien inconditionnel m'a donné la force nécessaire pour surmonter les défis et poursuivre avec détermination.

À Dalila Boughazi, Je tiens à prendre un moment pour exprimer ma profonde gratitude pour tout le soutien qu'elle m'a apporté tout au long de mon parcours de doctorat. Sa présence bienveillante, son écoute attentive et ses encouragements constants ont été d'une aide précieuse pendant les moments de doute et de fatigue.

Aucun mot ne saurait exprimer la profondeur de ma gratitude envers ma mère. Depuis le premier jour, elle a été ma plus grande partisane, ma confidente et mon rocher dans les moments de doute et de difficulté. Sa foi en mes capacités et sa conviction inébranlable en

mes rêves ont été les forces motrices derrière chaque pas que j'ai fait dans cette aventure intellectuelle.

Je suis profondément reconnaissante envers mon père pour son soutien moral et sa compréhension pendant les moments où les défis semblaient insurmontables. Sa confiance en mes capacités et sa fierté palpable à chaque étape de mon parcours ont été des moteurs puissants qui ont nourri ma détermination.

Je remercie mon époux Sofiane pour son soutien indéfectible, sa patience infini et son dévouement sans faille. Il a été non seulement mon rocher dans les moments difficiles, mais aussi celui qui a constamment placé mes rêves et la réalisation de cet objectif en priorité. Chaque succès que j'ai pu réaliser est le résultat de notre partenariat et de notre engagement mutuel. Je le remercie pour sa présence constante et pour être mon plus grand supporter.

Un grand merci à mon cher frère Anis pour sa précieuse amitié, pour chaque encouragement qu'il m'a prodigué et pour chaque moment où il a été là pour me soutenir, que ce soit en personne ou à distance. Cette thèse est le fruit de mes efforts, mais aussi le reflet de son influence positive dans ma vie.

Merci à mes soeurs Myassa, Nissa et Souad et à mon frère Ahcene. Même si ils sont jeunes, leur soutien a été d'une importance capitale pour moi. leurs sourires contagieux, leurs mots d'encouragement et leurs câlins réconfortants ont été des remèdes magiques contre le stress et les défis que j'ai pu rencontrer sur ce chemin.

Dédicaces

Á mes chers parents

Á mon cher époux Sofiane

Á mes frères et soeurs : Anis, Myassa, Nissa, Souad et Ahcene

Table des matières

Table des figures	i
Liste des tableaux	iv
Introduction Générale	4
I Analyse analytique et numérique des ondes à courte crête interfaciales en présence d'un courant uniforme	12
1 Revue de littérature	12
2 formulation du problème	19
3 Équations de base et conditions aux frontières	20
3.1 L'équation de Laplace	20
3.2 Conditions cinématiques	22
3.3 Condition dynamique	23
3.4 Conditions sur les parois latérales	24
4 Équations sans dimensions	24
5 Méthode de résolution	27
5.1 Développement en séries de puissances basé sur la méthode des perturbations :	27
5.2 Méthode du Lagrangien moyen de Whitham	34
6 Résultats et discussion	37
6.1 La limite dynamique	37
6.2 Instabilité de Kelvin-Helmholtz	38
6.3 Solutions analytiques : comparaison avec les travaux antérieurs	42
6.4 La résonance harmonique	45
6.5 Propriétés des solutions en série	52
6.6 Estimation de la cambrure maximale	57
6.7 Ondes à courte crête interfaciales en profondeurs infinies	57
6.8 Ondes à courte crête interfaciales en profondeurs finies	60

6.9	Evolution de la fréquence :	62
6.10	Les profils de l'interface	62
II Stabilité superharmonique des ondes interfaciales tridimensionnelles en présence d'un courant uniforme		73
1	Revue de littérature	73
2	Position du problème	76
3	Méthode de résolution numérique	79
4	Résultats et discussion	84
Conclusion Générale et perspectives		93
Bibliographie		95

Table des figures

.1	Profils de température, de salinité et de densité dans l’océan. Figure tirée de "Internal waves de Thierry Dauxois 2008"	5
.2	Oscillation d’une particule dans un fluide stratifié initialement à l’altitude z_0 et de masse volumique ρ_0 . Élevée de δz elle oppose à son poids la poussée d’Archimède R	7
I.1	Schéma descriptif d’une onde interfaciale.	20
I.2	Formation d’ondes à courte crête par réflexion oblique d’un train d’onde uniforme sur un mur vertical à une incidence θ par rapport à la normale au mur.	20
I.3	L’évolution de la fréquence ω en fonction de courant U en profondeurs infinies. Le courant critique U_{cl} est le point d’intersection des deux courbes ω_0^+ et ω_0^-	38
I.4	Tracé de $U_{c2}^2/U_{cl}^2 - 1$ en fonction de A_{11}^2 pour une valeur fixe de μ et différentes valeurs de θ	39
I.5	Les deux racines de l’équation de dispersion linéaire pour $\mu = 0.1$ et un angle $\theta = 40$. La courbe pleine représente les parties réelles et la courbe en pointillés représente les parties imaginaires.	40
I.6	Régions stables et instables dans le plan (U, p) . La courbe limite entre les régions stables et instables correspond aux valeurs de courant critique linéaire.	41
I.7	Profils d’onde interne tridimensionnelle non-résonnante pour $h = 0.3, d_1 = 1, d_2 = 0.7, \mu = 0.5$ et $U = 1.45$	46
I.8	Profils d’onde interne tridimensionnelle inhérente à la résonance (2, 4) pour $h = 0.3, d_1 = 1, d_2 = 0.7, \mu = 0.1$ et $U = 1.2$	47
I.9	Courbes de résonances du mode (2, 6) et du courant critique linéaire pour $d_2 = 0.5$ et diverses valeurs de d_1 et U_{cl} : (a) $U_{cl} = 0$ (b) $U_{cl} = 0.5$ (c) $U_{cl} = 1$ (d) $U_{cl} = 2$ (e) $U_{cl} = 5$ (f) $U_{cl} = 10$	50

I.10	Courbes de résonances du mode (2, 6) et du courant critique linéaire pour d_2 infini et diverses valeurs de d_1 et U_{cl} : (a) $U_{cl} = 0$ (b) $U_{cl} = 0.5$ (c) $U_{cl} = 1$ (d) $U_{cl} = 2$ (e) $U_{cl} = 5$ (f) $U_{cl} = 10$	51
I.11	Evolution des rapports c_{11}^r/c_{11}^{r+2} , c_{26}^r/c_{26}^{r+2} et ω suivant l'ordre r à l'angle de $\theta = 73^\circ$ pour les ondes interfaciales tridimensionnelles en profondeurs finies $d_1 = 1, d_2 = 0.7$ avec $\mu = 0.1$ et $U = 1.2$	54
I.12	Comparaison de la fréquence des ondes interfaciales tridimensionnelles en fonction du carré de la cambrure, avec et sans l'utilisation des approximants de Padé en profondeurs infinies $d_1 = d_2 = \infty$	56
I.13	Comparaison de la fréquence des ondes interfaciales tridimensionnelles en fonction du carré de la cambrure, avec et sans l'utilisation des approximants de Padé en profondeurs infinies $d_1 = 1, d_2 = 0.7$	56
I.14	Estimation de la cambrure maximale des ondes à courte crête en profondeurs infinies pour $U = 20$ en fonction de θ et avec un intervalle de 5°	58
I.15	Estimation de la cambrure maximale des ondes à courte crête pour $d_1 = \infty$, $d_2 = 0.7$ et $U = 20$ en fonction de θ et avec un intervalle de 5°	59
I.16	Profils de l'interface air-eau pour différentes valeurs du courant obtenu par Bontozoglou et Hanratty [1]	61
I.17	Profils d'ondes interfaciales progressives dans le cas de l'approximation de Boussinesq $\mu = 1$ (Saffman et al [2]).	61
I.18	Evolution de la fréquence ω en fonction du paramètre h^2 pour diverses valeurs de μ , θ et U en profondeurs infinies : (a) $\mu = 0, U = 0$, (b) $\mu = 0, U = 1$, (c) $\mu = 0.1, U = 0$ (d) $\mu = 0.1, U = 1$	63
I.19	Evolution de la fréquence ω en fonction du paramètre h^2 pour diverses valeurs de μ , θ et U en profondeurs finies avec $d_1 = 1, d_2 = 0.7$: (a) $\mu = 0, U = 0$, (b) $\mu = 0, U = 1$, (c) $\mu = 0.1, U = 0$ (d) $\mu = 0.1, U = 1$	64
I.20	Le signe de ω_2 dans le plan (θ, μ) , en $U = 1$, en profondeurs infinies.	65
I.21	Profils d'interfaces des ondes tridimensionnels pour $\theta = 45^\circ, h = 0.5, d_1 = d_2 = \infty, \mu = 0.99$ et divers valeurs de U : (a) $U = 0$ (b) $U = 0.05$ (c) $U = 0.1$ (d) $U = 0.15$	66
I.22	Profils d'interfaces des ondes tridimensionnels et leurs vues en coupe transversale dans les plans $X = 0$ et $Y = 0$ pour $\theta = 45^\circ, h = 0.2$ et $\mu = 0.5$ et divers valeurs de d_1, d_2 et U : (a) $d_1 = \infty, d_2 = 0.7, U = 1$ (b) $d_1 = \infty, d_2 = 0.7, U = 1.60$ (c) $d_1 = 0.7, d_2 = 1, U = 1$ (d) $d_1 = 0.7, d_2 = 1, U = 1.36$	67
II.1	Structure des matrices A et B et du vecteur u	83

II.2	Lieu des résonances harmoniques des ondes à courtes crêtes interfaciales pour $\mu = 0.1$ et $U = 1.2$ en profondeurs infinies ($d_1 = d_2 = \infty$).	86
II.3	Lieu des résonances harmoniques (2, 6) des ondes à courtes crêtes interfaciales tridimensionnelles pour $\mu = 0.1$ et pour différentes valeurs de U en profondeurs infinies ($d_1 = d_2 = \infty$).	87
II.4	(a) Fréquence, $\Re(\sigma)$, et taux d'amplification, $\Im(\sigma)$, en fonction de la cambrure de l'onde base pour $\mu = 0.1$, $\theta = 53^\circ$ et $U = 0.1$. (b) L'agrandissement au voisinage de h_0	88
II.5	Fréquence, $\Re(\sigma)$, et taux d'amplification, $\Im(\sigma)$, en fonction de la cambrure de l'onde base pour $\mu = 0.1$, $\theta = 53^\circ$ et $U = 0.5$. (b) L'agrandissement au voisinage de h_0	88
II.6	Fréquence, $\Re(\sigma)$, et taux d'amplification, $\Im(\sigma)$, en fonction de la cambrure de l'onde base pour $\mu = 0.1$, $\theta = 53^\circ$ et $U = 1.2$. (b) L'agrandissement au voisinage de h_0	89
II.7	Le taux d'amplification maximal correspondant à la résonance (2, 6) en fonction du courant U , pour $\mu = 0.1$ et $\theta = 53^\circ$	90
II.8	Évolution du taux d'amplification maximal en fonction du rapport des densités (figure tiré de Allalou et al. [3]).	91
II.9	Le taux d'amplification maximal correspondant à la résonance (2, 6) en fonction du courant U , pour deux valeurs de μ	92

Liste des tableaux

I.1	Solutions analytiques au second ordre des ondes a courtes crête interfaciales en profondeurs infinies.	42
I.2	Coefficients du second ordre obtenu dans le cas particulier $U = 0$	43
I.3	coefficients du second ordre pour $U = 0, \mu = 0$ en profondeurs infinies.	44
I.4	Angles de résonances jusqu'à l'ordre 32 pour les ondes interfaciales tridimensionnelles en profondeurs finies ($d_1 = 1, d_2 = 0.7$) pour $\mu = 0.1$ et $U = 1.2$	68
I.5	Angles de résonances jusqu'à l'ordre 32 pour les ondes interfaciales tridimensionnelles en profondeurs infinies ($d_1 = \infty, d_2 = \infty$) pour $\mu = 0.1$ et $U = 1.2$	69
I.6	Rapport entre deux coefficients successifs des variables $c_{11}^r/c_{11}^{r+2}, c_{26}^r/c_{26}^{r+2}$ et ω à l'angle de $\theta = 53^\circ$ pour les ondes interfaciales tridimensionnelles en profondeurs infinies ($d_1 = \infty, d_2 = \infty$) avec $\mu = 0.1$ et $U = 1.2$	70
I.7	Rapport entre deux coefficients successifs des variables $c_{11}^r/c_{11}^{r+2}, c_{26}^r/c_{26}^{r+2}$ et ω à l'angle de $\theta = 73^\circ$ pour les ondes interfaciales tridimensionnelles en profondeurs finies $d_1 = 1, d_2 = 0.7$ avec $\mu = 0.1$ et $U = 1.2$	71
I.8	Pôles et zéros de l'approximant de Padé [6/6] de la fréquence pour l'angle $\theta = 53^\circ, \mu = 0.1$ et $U = 1.2$ en profondeurs infinies.	72
II.1	Exemple de convergence des parties réelle et imaginaire d'une valeur propre instable en fonction de la troncature (M, N) par la méthode de Galerkin pour deux courants $U = 0.5$ et $U = 1.2$ pour $h = 0.205$ et $h = 0.191$, respectivement. Avec $\theta = 53^\circ, \mu = 0.1, d_1 = d_2 = \infty$	84

Symboles grecs

α	nombre d'onde de l'onde non perturbée suivant l'axe Ox
β	nombre d'onde de l'onde non perturbée suivant l'axe Oy
η	élévation de l'interface de l'onde à courte crête
η'	élévation de la perturbation
$\Im(\sigma)$	taux d'amplification de la perturbation
μ	rapport des densités, $\mu = \rho_1/\rho_2$
$\bar{\eta}$	élévation de l'interface de l'onde non perturbée
$\phi_i, i = 1, 2$	potentiels des vitesses
$\phi_i, i = 1, 2$	potentiels des vitesses dans le repère mobile, $\phi_i = \phi_i - ct$
$\bar{\phi}_i, i = 1, 2$	potentiels des vitesses de l'onde non perturbée
$\phi'_i, i = 1, 2$	potentiels des vitesses des perturbations
$\Re(\sigma)$	fréquence de la perturbation
ρ_1	masse volumique de la couche de fluide supérieur
ρ_2	masse volumique de la couche de fluide inférieur
θ	angle entre la direction de propagation de l'onde incidente et la normale au mur
ω	fréquence
ζ	l'interface

Caractères latins

A_{11}	amplitude de l'onde
C	constante de Bernoulli
L	longueur d'onde de l'onde incidente
L_x	longueur d'onde suivant l'axe (Ox), $L_x = L/\sin \theta$
L_y	longueur d'onde suivant l'axe (Oy), $L_y = L/\cos \theta$
P_1, P_2	la pression d'une part et d'autre de l'interface de l'onde
U	courant parallèle
U_{cl}	courant critique linéaire
U_i, V_i et W_i	composantes de la vitesse suivant les directions (OX), (OY) et (OZ)
X, Y et Z	variables pour obtenir des formes permanentes de l'onde
$\mathfrak{R}(O, x, y, z)$	repère cartésien orthonormé
$\mathfrak{R}^*(O^*, x^*, y^*, z^*, t)$	repère mobile se déplaçant à la vitesse de l'onde à courte crête
a_{mn}^r, b_{mn}^r et c_{mn}^r	composantes des coefficients des harmoniques (m, n) à l'ordre r
c	célérité de l'onde à courte crête interfaciale, $c = \omega/\alpha$
d_1	profondeur de la couche supérieure
d_2	profondeur de la couche inférieure
g	accélération de la pesanteur
h	cambrure de l'onde
k	nombre d'onde de l'onde incidente
p	nombre d'onde suivant l'axe OX, $p = \sin \theta$
p	nombre d'onde des perturbations suivant Ox^*
q	nombre d'onde suivant l'axe OY, $q = \cos \theta$
q	nombre d'onde des perturbations suivant Oy^*

r	ordre de troncature
t	temps
x, y et z	coordonnées spatiales dans le repère $\mathfrak{R}(O, x, y, z)$
x^*, y^* et z^*	coordonnées spatiales dans le repère mobile $\mathfrak{R}^*(O^*, x^*, y^*, z^*)$
\vec{i}	vecteur unitaire dans la direction x
\tilde{x}, \tilde{y} et \tilde{z}	coordonnées spatiales adimensionnelles

Introduction Générale

La présence de sauts de densité localisés au niveau d'une profondeur donnée est un phénomène souvent rencontrée dans les fluides stratifiés. Un fluide stratifié c'est un fluide dont la densité est inhomogène, généralement dépendante d'une variable qui va être soit l'altitude pour l'atmosphère ou la profondeur pour l'océan. Ainsi une thermocline peut-être observée près de la surface des lacs l'été, où la différence de densité est due principalement à un fort gradient de température. Dans l'océan, le réchauffement des couches de surface sous l'influence du rayonnement solaire et des échanges thermiques avec l'atmosphère combiné à une variation de la salinité de l'eau due à l'évaporation, est également à l'origine d'une pycnocline. Le principe est illustré à la figure .1. Cette configuration particulière des fluides stratifiés est à l'origine d'un mécanisme de génération d'ondes internes. Dans le détroit de Gibraltar, lieu de rencontre des eaux méditerranéennes chaudes, plus salées et plus denses que les eaux atlantiques coulent a des centaines de mètres de profondeurs pour ressortir ensuite dans l'océan atlantique. L'analyse détaillée du mécanisme de génération des ondes internes a permis d'apporter des éléments nouveaux utiles à la compréhension phénomène d'eaux mortes dont la découverte remonte à la fin du dix-neuvième siècle. Une première observation des ondes internes depuis un bateau se déplaçant dans l'océan arctique fut en 1893 par un explorateur Norvégien Fridtjof Nansen. Alors qu'il naviguait à proximité de l'archipel Nordenskiöld au nord de la Sibérie a bord de son navire Le *Farm*, il remarqua que ce dernier semblait être comme freiné par une force mystérieuse dans des eaux qui pourtant étaient calmes, comme si

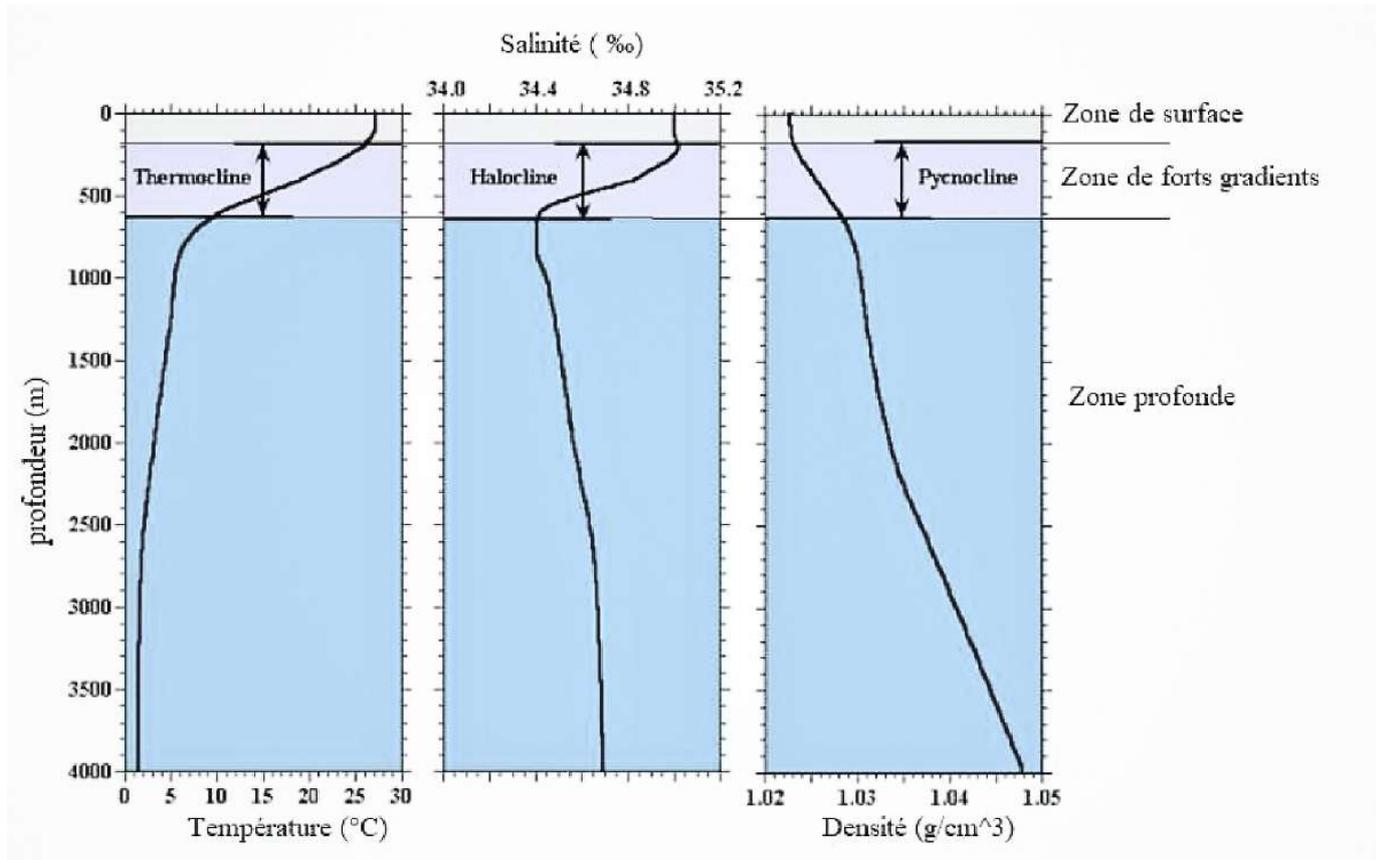


Figure .1: Profils de température, de salinité et de densité dans l'océan. Figure tirée de "Internal waves de Thierry Dauxois 2008"

le moteur ne répondait pas correctement. La mise en place de l'expérience historique du physicien et météorologue V. Walfrid Ekman, pour comprendre les observations réalisées par Nansen, a permis de comprendre que ce phénomène atypique bien connu des marins se produit là où une couche d'eau douce repose sur l'eau salée de la mer. En effet Lorsque le bateau passe dans l'eau, des vagues se créent sous la surface où des couches de différentes densités se rencontrent et interagissent avec le bateau, le ralentissant sans qu'aucune activité ne soit visible à la surface.

Les mécanismes de génération des ondes internes sont assez bien connus dorénavant, et conduisent à identifier différents types d'ondes : ondes stationnaires, ondes progressives, ondes solitaires, marées...Les caractéristiques

des ondes internes diffèrent de celles des ondes de surface. Les ondes internes ont généralement des fréquences beaucoup plus basses et des amplitudes plus élevées que les ondes de gravité de surface. Leurs longueurs d'onde varient de quelques centimètres à plusieurs kilomètres.

Soit un fluide incompressible de masse volumique variable $\rho_0(z)$ à l'équilibre (Figure.1). Dans un système de coordonnées cartésiennes d'axe $(0z)$ vertical ascendant une particule de fluide se déplace de son altitude d'équilibre z_0 à $z_0 + \delta z$ d'une distance δz (Figure .2). Elle subit donc, en plus de son poids une poussée d'Archimède proportionnelle au gradient de masse volumique. L'application de la relation fondamentale de la dynamique nous donne :

$$\rho(z_0) \frac{d^2 \delta z}{dt^2} = (\rho(z_0 + \delta z) - \rho(z_0))g$$

En considérant des petits déplacements on a donc :

$$\frac{d^2 \delta z}{dt^2} = -N^2(z)\delta z$$

où apparaît la pulsation de flottabilité ou la pulsation de Brunt-Väisälä $N(z)$ définie par :

$$N^2(z) = -\frac{g}{\rho(z_0)} \frac{\partial \rho(z_0)}{\partial z}$$

C'est ce mécanisme qui est à l'origine des ondes internes. Une particule de fluide oscille autour de sa position d'équilibre si $N^2 > 0$. Plus la valeur de N est élevée, plus la période d'oscillation est courte. En revanche, dans un fluide non stratifié, $N = 0$, et il n'y aura pas d'oscillations. Les ondes internes, bien que difficilement observable contrairement aux ondes à la surface de l'eau, leur propriété de propagation et leurs dynamique non-linéaire sont relativement compris. On peut identifier différents mécanismes générant des ondes internes. les mécanismes de génération des ondes internes sont assez bien connu dorénavant, plusieurs ont été proposés :

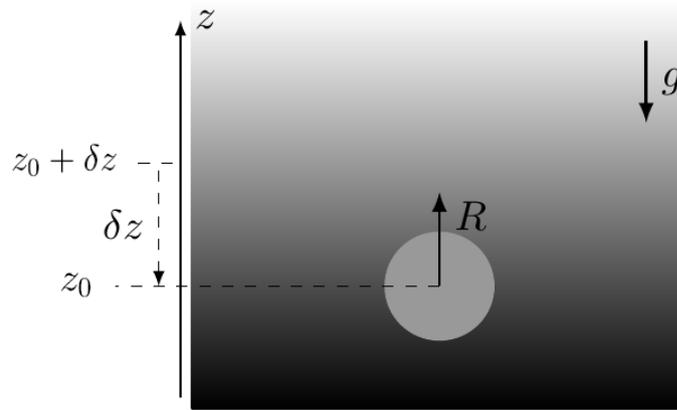


Figure .2: Oscillation d'une particule dans un fluide stratifié initialement à l'altitude z_0 et de masse volumique ρ_0 . Élevée de δz elle oppose à son poids la poussée d'Archimède R .

- Les phénomènes atmosphériques violents comme les vents et les tempêtes, qui agitent fortement la surface homogène de l'océan. Ces mouvements sont transmis à la pycnocline qui transforme ces mouvements de fluides en ondes internes.
- l'interaction entre la marée barotrope correspondant aux courants internes et la topographie du fond génère des ondes qu'on appelle marée interne.
- Un champ d'ondes internes peut être émis par le mouvement horizontal de corps solides à la surface d'un fluide stratifié. Comme par exemple, lorsqu'un bateau se déplace, une perturbation se crée à l'interface entre les deux couches de son sillage. Cela s'explique du fait que le bateau déplace verticalement un certain volume de fluide en avançant, ainsi l'écoulement crée sous et à l'opposé de la direction de mouvement du bateau génère une dépression qui entraîne une élévation de l'interface.
- le mouvement des fonds marins tels que les tremblements de terre et les glissements de terrains induisant un déplacement brusque de l'eau peut également être un mécanisme de génération d'ondes internes.

Un intérêt particulier pour l'étude des ondes internes a été suscité ces

dernières années par leur rôle important dans la pratique tel que, l'hydro-acoustique, la navigation sous marine, l'hydrobiologie, l'hydro-optique et le transport des sédiments. Elles ont un impact décisif, dans les processus de formation des échanges horizontaux et verticaux dans l'océan. Dans ce contexte, les investigations sur les ondes de gravité internes, leur mécanismes de génération, leur propagation, et en particulier les problèmes d'instabilité et de déferlement, deviennent décisives pour la compréhension de la dynamique de l'océan.

- La marée interne générée par la topographie des océans joue un rôle crucial dans le transfert d'énergie à grandes échelles océanique aux échelles de mélange turbulent. Elle est responsable de près de la moitié du mélange turbulent nécessaire au maintien de la stratification océanique. Une meilleure compréhension des processus impliqués est nécessaire pour décrire avec précision son rôle dans le maintien de la circulation méridienne. On estime qu'elle contribuerait pour environ la moitié de l'énergie nécessaire au maintien de la stratification globale.
- Les forts courants et cisaillements qui accompagnent ces ondes peuvent représenter un danger potentiel pour les opérations en mer, par exemple les procédés de forage pétroliers. Il est donc nécessaire de les quantifier.
- Le mouvement vertical important de ces ondes peut provoquer une redistribution des particules biologiques et des nutriments. Elles influencent considérablement le mélange de l'eau et le transport de gaz et d'autres substances particulières, qui constituent des mécanismes de couplage biophysique nécessaires à l'évolution du phytoplancton.
- Le déferlement des ondes internes représente un processus important dans la suspension et le transport des sédiments. Le transport des sédiments dans les zones côtières peut causer la déstabilisation de la structure des fonds marins et l'érosion des plages.

Jusqu'à présent, nous avons souligné l'importance accordée aux ondes internes par rapport aux phénomènes qu'elles représentent à grande échelle

dans la nature. À l'échelle industrielle, on les observe dans les écoulements biphasiques (gaz-liquide), tels que les champs pétroliers et géothermiques, l'industrie aéronautique, les réacteurs nucléaires et chimiques, ainsi que divers procédés de transfert de chaleur et de masse.

- L'efficacité du transfert de chaleur et de masse est influencée par les propriétés des interfaces entre les fluides. L'étude des ondes interfaciales contribue à optimiser les échangeurs de chaleur, les absorbeurs, les évaporateurs et d'autres équipements similaires.
- Les ondes interfaciales peuvent affecter la stabilité des interfaces dans les réservoirs de stockage et les pipelines. Dans les situations impliquant des écoulements multiphasiques, tels que les écoulements gaz-liquide, la gestion de ces interfaces est critique pour éviter la séparation des phases non souhaitée, la corrosion, et d'autres problèmes liés au transport et au stockage des fluides.
- Comprendre ces ondes est essentiel pour concevoir des structures capables de résister aux charges induites par les mouvements d'eau verticaux provoqué par Les ondes internes et assurer la stabilité et la sécurité des installations offshore et leurs fondations. Concrètement, la conception des fondations doit prendre en compte les charges induites par les variations de pression résultant des ondes internes.

A ce jour, l'existence des ondes de gravité interne constitue une notion fondamentale de mécanique des fluides. Leur découverte remonte au début du siècle dernier, et depuis lors, elles ont fait l'objet d'investigations théoriques et expérimentales qui ont en partie éclairci certains phénomènes dynamiques. Pour établir des liens entre les exemples concrets d'ondes internes observées et les modèles théoriques qui les décrivent, de nombreuses études ont longtemps été axées sur les champs bidimensionnels. Motivé par la capacité de résoudre de nombreux problèmes sans nécessiter l'utilisation de calculateurs puissants, leur potentiel a été mis en avant, bien que leur fonctionnement n'ait pas été complètement élucidé. En revanche, l'exploration des ondes in-

ternes tridimensionnelles offre une description plus réaliste des phénomènes ondulatoires. Parmi ces ondes, les ondes à courtes crêtes constituent la forme la plus simple. Il s'agit d'ondes périodiques qui se déplacent dans deux directions distinctes dans le plan horizontal et qui possèdent une géométrie particulière de forme orthorhombique. Notre intérêt réside dans l'étude des ondes à courtes crêtes qui émergent suite à la réflexion d'un train d'ondes uniforme sur une paroi verticale. En plus des applications importantes des ondes à courtes crêtes, il y a sans aucun doute une raison plus fondamentale de les examiner de près. Elles constituent le modèle le plus élémentaire parmi une multitude d'ondes tridimensionnelles encore largement inexploitées. Outre l'importance des applications des ondes à courtes crêtes, il existe sans aucun doute une raison plus profonde de les étudier. Elles représentent la forme la plus simple d'une vaste variété d'ondes tridimensionnelles qui n'ont pas encore été explorées en profondeur. L'analyse des ondes à courtes crêtes peut représenter une voie pour mieux comprendre le comportement d'autres types d'ondes plus compliqués.

Dans cette perspective, l'objectif principal de la thèse consiste à examiner les ondes de gravité tridimensionnelles se propageant à l'interface de deux couches de fluides de masse volumiques distinctes, ayant des épaisseurs arbitraires, en présence un courant uniforme dans la couche de fluide supérieure, parallèlement à l'écoulement. Pour résoudre ce problème, nous présentons deux méthodes de calcul dans le chapitre I : la méthode des perturbations et la méthode du Lagrangien de Whitham. En première étape, nous avons utilisé le logiciel de calcul symbolique Maple pour obtenir des solutions analytiques jusqu'à l'ordre 5 en utilisant la méthode des perturbations. Ensuite, nous avons effectué une extension numérique jusqu'à l'ordre 32. Cette approche a permis de mettre en lumière le phénomène de résonance harmonique, caractérisé par l'apparition de diviseurs nuls dans les solutions, survenant lorsque le mode fondamental et l'un de ses harmoniques se propagent à la même vi-

tesse de phase. Les approximants de Padé ont été employés afin de dépasser les singularités engendrées. Nous avons calculé les caractéristiques des ondes interfaciales, telles que leur fréquence, les estimations de la hauteur maximale de la cambrure, ainsi que le profil de l'interface. Ce travail visait à approfondir notre compréhension de l'impact des densités des deux fluides, des épaisseurs des deux couches et de l'intensité du courant sur ces propriétés. La méthode Lagrangienne présente l'avantage de permettre la détermination de la relation de dispersion non linéaire en fonction de la cambrure. Cette relation revêt une importance capitale pour évaluer le courant non linéaire.

Dans le deuxième chapitre, nous avons réalisé une étude de la stabilité superharmonique des ondes interfaciales tridimensionnelles. À cette fin, nous avons utilisé une méthode de type Galerkin. Les équations du mouvement se sont simplifiées en un problème généralisé de valeurs propres, où les perturbations ont été décomposées en modes normaux. Nous avons constaté que les instabilités superharmoniques étaient associées aux résonances harmoniques, et nous avons noté que le courant avait un effet d'atténuation sur ces instabilités.

Chapitre I

Analyse analytique et numérique des ondes à courte crête interfaciales en présence d'un courant uniforme

1 Revue de littérature

Depuis les travaux pionniers de [Stokes](#) [4], qui ont été les premiers à envisager la possibilité d'oscillations potentielles dans un fluide constitué de deux couches de densités différentes, des efforts constants ont été déployés pour améliorer en permanence la recherche expérimentale et théorique sur les ondes interfaciales bidimensionnelles. En suivant les travaux de [Levi-Civita](#) [5] sur les ondes de surface progressives, [Hunt](#) [6] s'est intéressé aux ondes interfaciales. Il a développé des approximations de troisième ordre pour les profils et des expressions quadratiques pour les fréquences dans le cas de deux couches de fluide de densité finie. [Thorpe](#) [7] a étendu les résultats de Hunt aux ondes stationnaires et aux épaisseurs finies en utilisant l'approximation de Bousinesq. Ses calculs ont révélé que la présence du fluide supérieur réduisait l'influence des harmoniques supérieures dans la solution, ce qui rendait le profil de l'interface plus sinusoïdal que celui d'une surface libre de même amplitude. De plus, la présence du fluide supérieur a entraîné une augmentation de la période des oscillations.

Davis et Acrivos [8] ont entrepris une étude expérimentale sur les ondes solitaires internes dans un fluide stratifié composé de deux couches à densité constante séparées par une fine région à densité variable. Les profils et les vitesses observés ont été comparés à ceux calculés à l'aide de méthodes analytiques et numériques. Tsuji et Nagata [9] ont appliqué la méthode des perturbations au problème des ondes progressives en profondeurs infinies. Leurs résultats ont révélé que la vitesse de phase augmentait avec l'augmentation de la cambrure de l'onde et que l'augmentation de la densité avait un effet d'aplatissement sur l'onde. Hoyler [10] a appliqué la méthode des perturbations à un ordre très élevé pour étudier les ondes progressives se déplaçant à l'interface entre deux fluides profonds de masse volumiques différentes. Ses calculs lui ont permis d'estimer la hauteur maximale de la cambrure. Pour ce faire, elle a posé que les formes limites se produisent lorsque la vitesse horizontale atteint et qui se produit à un certain endroit du fluide. Vanden-Broeck [11] a élargi les travaux de Hoyler [10] en introduisant la tension superficielle interfaciale. Il a formulé une équation différentielle intégrale pour représenter l'interface, qu'il a ensuite résolue en utilisant la méthode de Newton. Cette approche a permis de généraliser la classification des rides de Wilton aux cas des ondes interfaciales. Rottman [12] a élaboré un algorithme basé sur la méthode des perturbations pour calculer les solutions relatives aux ondes stationnaires à l'interface de deux fluides d'épaisseurs infinies. Il a réussi à obtenir des solutions jusqu'à l'ordre 21 pour cinq valeurs spécifiques du rapport de densité $(0, 10^{-3}, 0.5, 1)$. Pour chacun de ces cinq rapports de densité, la hauteur maximale de la cambrure a été estimée en se basant sur la localisation des pôles des approximants de Padé appliqués aux séries de fréquence, d'énergie, et de profil d'interface. Meiron et Saffman [2] ont utilisé une méthode numérique basée sur des séries de Fourier pour obtenir des solutions concernant les ondes interfaciales progressives proches du point de déferlement. D'autre part, Miles [13] a formulé le problème des ondes de gravité à amplitude finie en appliquant le Lagrangien à un fluide stratifié composé de N

couches. Lorsque N est égal à 2, il a constaté que l'expression reliant l'amplitude à la fréquence était identique à celle obtenue par [Thorpe \[7\]](#). [Grimshaw et Pullin \[14\]](#) ont présenté des solutions numériques pour des ondes interfaciales de grande amplitude et de forme extrême à l'interface entre deux fluides de densités différentes dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. [Părău et Dias \[15\]](#) ont utilisé un schéma numérique basé sur un développement en séries de Fourier pour explorer l'interaction entre une onde de surface et une onde interne supposées périodiques, ayant une forme permanente et une amplitude finie. [Saffman et Yuen \[16\]](#) se sont penchés sur les ondes interfaciales progressives de forme permanente se déplaçant à l'interface de deux couches de fluides infinies en présence d'un courant uniforme. Ils ont obtenu des solutions valides pour des amplitudes d'ondes faibles à modérées. Leur travail a mis en évidence l'existence d'une vitesse critique, notée U_c , au-delà de laquelle les solutions de forme permanente ne sont plus observables. De plus, leur étude a montré que le courant critique augmente avec l'augmentation de la hauteur de la cambrure. [Bontozoglou et Hanratty \[1\]](#) ont étendu l'analyse de Saffman pour prendre en compte l'effet de la profondeur du fluide. Ils ont mis en évidence que, pour certaines valeurs de l'épaisseur de la couche inférieure, la vitesse critique diminue à mesure que la hauteur de la cambrure augmente.

L'étude des champs d'ondes tridimensionnels constitue une étape naturelle dans l'avancement des connaissances sur les ondes, car elle permet de représenter plus fidèlement la complexité des phénomènes naturels. L'interaction de nombreux trains d'ondes de propriétés variables conduit à des équations particulièrement complexes, souvent sous forme d'équations aux dérivées partielles non linéaires, rendant généralement leur résolution analytique impossible. Par conséquent, il est plus judicieux de commencer par explorer des cas plus simples et spécifiques, comme celui de deux ondes similaires provenant de directions opposées. Dans ce contexte, le résultat est un champ d'ondes

à courtes crêtes. En 1924, [Jeffreys \[17\]](#) a examiné des systèmes d'ondes présentant une périodicité à la fois dans la direction de propagation et dans la direction de la crête. Il a introduit le terme "à courte crête" pour décrire ces systèmes d'ondes où les deux longueurs d'onde associées étaient de l'ordre de grandeur similaire. En s'appuyant sur les travaux de [Stokes \[4\]](#), [Fuchs \[18\]](#) ainsi que [Chappelear \[19\]](#) ont réussi à déduire des solutions de second et troisième ordres, respectivement. Cependant, malgré l'emploi d'un petit paramètre associé au rapport entre l'amplitude et la longueur d'onde dans la direction de propagation, ils n'ont pas été en mesure de calculer le cas limite des ondes stationnaires. Pour remédier à ce problème, [Hsu et al. \[20\]](#) ont développé une solution de troisième ordre en se basant sur un paramètre adimensionnel dépendant du rapport entre l'amplitude et la longueur d'onde des vagues en propagation. Leurs travaux ont conduit à l'obtention d'expressions analytiques approximatives qui restent valables pour les ondes caractérisées par une faible non-linéarité.

[Roberts et Schwartz \[21\]](#) ont proposé une méthode numérique faisant appel à des séries de Fourier tronquées pour calculer les propriétés des ondes à courte crête en profondeurs infinies. Le système algébrique non linéaire résultant a été résolu au niveau des points de collocation N^2 .

[Roberts \[22\]](#) a mené des recherches approfondies sur les ondes à courte crête en eaux profondes, utilisant la méthode des perturbations pour obtenir des solutions jusqu'à l'ordre 32. Les caractéristiques du problème, telles que l'élévation de la surface libre, la fréquence, les énergies cinétique et potentielle, ont été calculées à l'aide d'approximants de Padé. Il a également démontré que la courbure maximale des ondes tridimensionnelles pouvait être jusqu'à 60% plus élevée que celle du modèle bidimensionnel. L'un des résultats importants de cette étude a été la découverte de la résonance harmonique, qui se produit lorsque la fondamentale (1, 1) et un harmonique de mode (m, n) se propagent à la même vitesse de phase. Les approximants de Padé ont été essentiels pour obtenir des solutions convergentes près des

singularités induites par les diviseurs nuls présents dans les coefficients des harmoniques correspondants.

Par la suite, [Marchant et Roberts](#) [23] ont étendu l'étude de [Roberts](#) [22] pour inclure des profondeurs finies, en utilisant la même méthode, leur permettant de calculer des solutions jusqu'à l'ordre 35. Cette étude a conduit à la généralisation de la condition de résonance au cas des profondeurs finies. [Okamura](#) [24] a consacré ses efforts à l'analyse des vagues à crêtes courtes, qu'elles soient faiblement ou fortement non linéaires, au voisinage du cas limite des ondes stationnaires.

Les ondes de surface à courte crête de gravité-capillarité ont fait l'objet de peu d'études. [Kimmoun et al.](#) [25] ont été les premiers à mener une analyse à la fois théorique et expérimentale des ondes de surface de gravité-capillarité tridimensionnelles dans des profondeurs finies. [Huang et Jia](#) [26] ont abordé le cas de la propagation des ondes de surface de gravité-capillarité en présence d'un courant uniforme. Ils ont utilisé la méthode des perturbations pour obtenir des solutions jusqu'au deuxième ordre. De même, [Jian et al.](#) [27] ont déterminé des solutions analytiques jusqu'au troisième ordre. Leur travail a mis en évidence l'importance du courant dans l'évolution de la fréquence et dans la force de pression exercée sur une paroi verticale. Plus précisément, leurs résultats indiquent que l'onde devient plus raide à mesure que la vitesse du courant augmente. [Debiane et Kharif](#) [28] ont exploré les ondes de gravité-capillarité à courte crête dans des profondeurs infinies en utilisant la méthode du Lagrangien moyen de Whitham. Cette approche leur a permis de calculer des ondes résonnantes qui n'auraient pas pu être obtenues avec la méthode des perturbations. Dans les environnements océaniques réels, les champs d'ondes à courtes crêtes sont fréquemment influencés par des courants. [Concus](#) [29] s'est heurté au problème suivant : l'ensemble des profondeurs de fluide pour lesquelles une condition de résonance invalide l'expansion de la perturbation de l'onde stationnaire est un ensemble dense, ce qui remet en question l'ensemble de l'approche. Ce problème a fi-

nalement été résolu par [Plotnikov et Toland](#) [30] en utilisant la théorie de Nash-Moser pour surmonter le problème du petit diviseur. Pour les ondes progressives tridimensionnelles, similaires aux ondes à crête courte, [Iooss et Plotnikov](#) [31] ont résolu le problème du petit diviseur en utilisant la théorie de Nash-Moser pour les angles non résonnants. Ils ont également élaboré une expansion asymptotique formelle.

Bien que l'exploration des ondes de surface tridimensionnelles ait suscité un intérêt substantiel, Peu d'études ont été menées sur les ondes internes non linéaires tridimensionnelles. [Allalou et al.](#) [32] ont développé une solution analytique jusqu'au troisième ordre et ont étendu leur approche à un calcul numérique jusqu'à l'ordre 32 pour les ondes interfaciales à courte crête se propageant à l'interface de deux couches de fluides d'épaisseurs finies. Cette étude a permis de généraliser la condition de résonance déjà établie pour les ondes de surface. De manière similaire, [Boughazi et al.](#) [33] ont étendu les travaux de [Debiane et Kharif](#) [28] aux ondes interfaciales à courte crête associées à la gravité-capillarité. Un grand nombre de configurations intéressantes ont été calculées en utilisant cette approche. Les formes de ces vagues dépendent de différents paramètres du problème : le coefficient de tension superficielle, la profondeur de la couche de fluide, les rapports de densité et l'angle entre la direction de propagation de l'onde incidente et la normale à la paroi.

D'autres problèmes liés aux ondes interfaciales tridimensionnelles ont fait l'objet de recherches, en particulier concernant les solitons. [Oikawa](#) [34] a mené une étude sur l'interaction oblique faible de deux solitons se propageant à l'interface entre deux couches de fluide. La couche supérieure avait une profondeur infinie, tandis que l'autre couche était beaucoup plus mince par rapport aux dimensions horizontales des ondes présentes. En utilisant la méthode des perturbations, [Oikawa](#) [34] a examiné les interactions entre un soliton se propageant sur une couche de fluide d'épaisseur infinie et un autre se propageant sur une couche de fluide d'épaisseur finie. Ils ont obtenu

des solutions du premier ordre par la méthode des perturbations. Oikawa a démontré que les amplitudes des solitons ne changeaient pas après l'interaction, et que l'onde solitaire résultante présentait un déphasage constant. De leur côté, Pennel et Mirie [35] ont calculé l'expression du déphasage jusqu'au troisième ordre en reprenant l'étude d'Oikawa dans le cas où les deux couches de fluide sont très minces.

Cette thèse porte principalement sur l'analyse des ondes interfaciales tridimensionnelles progressives résultant de l'interaction de deux trains d'ondes ayant des caractéristiques similaires. Ces champs génèrent les ondes interfaciales à courtes crêtes qui se propagent à l'interface de deux couches de fluides de masse volumiques différentes et d'épaisseurs arbitraires en présence d'un courant parallèle. Deux méthodes distinctes ont été employées pour résoudre ce problème : la méthode des perturbations et la méthode variationnelle de Whitham. L'un des avantages majeurs de la méthode des perturbations réside dans sa capacité à mettre en évidence le phénomène de résonance harmonique. Nous examinons les propriétés de ces ondes à proximité de leurs singularités, puis nous explorons l'influence de certaines caractéristiques telles que le courant et le rapport de densité sur la structure des ondes interfaciales.

2 formulation du problème

Considérons un repère orthonormé $R(O, x, y, z)$, les axes (Ox) et (Oy) sont horizontaux et orientés comme indiqué par la figure (I.1) et (Oz) est vertical ascendant. L'origine est placée telle que le niveau moyen de l'interface soit contenu dans le plan horizontal (xOy) . L'onde en question dite onde a courte crête est générée par l'interaction non linéaire d'un train d'ondes sur un mur vertical (voir figure (I.2)). On admet que la réflexion est totale, ce qui implique l'égalité des amplitudes et des fréquences des ondes incidentes et réfléchies.

Supposons que l'écoulement est irrotationnel, les fluides parfaits, homogènes et incompressibles, d'épaisseurs d_1 et d_2 , en équilibre et limitées, d'en haut et d'en bas, par deux parois rigides, horizontales et imperméables. On désigne par ρ_1 et ρ_2 les masses volumiques des deux fluides avec $\rho_1 < \rho_2$ (stratification stable). Les effets de la tension superficielle sont négligés dans tout ce document. Le courant U est parallèle à l'écoulement et superposé sur la couche de fluide supérieure (voir figure(I.1)). Ces ondes ont une forme doublement périodique suivant les deux directions (Ox) et (Oy) avec des longueurs d'ondes $L_x = L/\sin \theta$ et $L_y = L/\cos \theta$ le long de ces deux axes. Ici L représente la longueur d'onde du train de vagues incident et θ l'angle entre sa direction de propagation et la normale au mur. L'interface qui sépare les deux fluides et qui est une inconnue du problème, a pour équation $z = \eta(x, y, t)$.

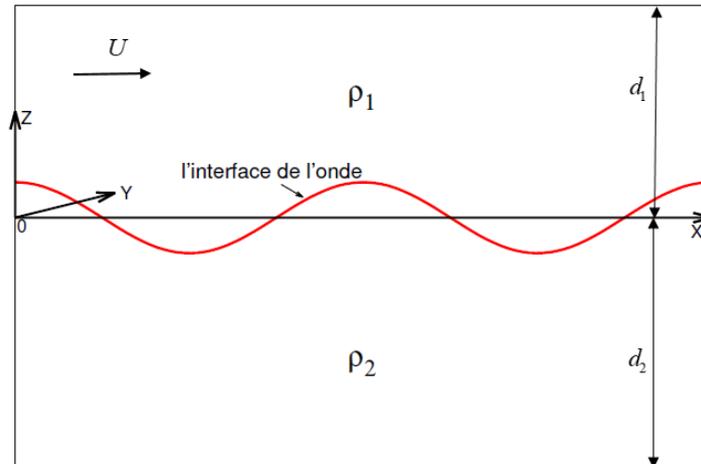


Figure I.1: Schéma descriptif d'une onde interfaciale.

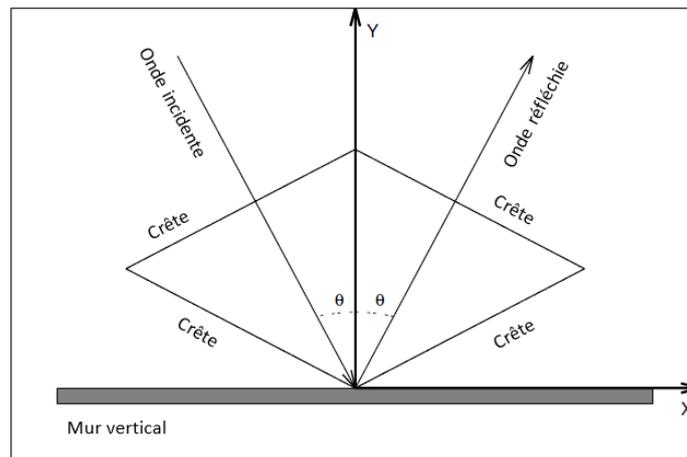


Figure I.2: Formation d'ondes à courte crête par réflexion oblique d'un train d'onde uniforme sur un mur vertical à une incidence θ par rapport à la normale au mur.

3 Équations de base et conditions aux frontières

3.1 L'équation de Laplace

On considère que l'écoulement est potentiel, c'est-à-dire que le fluide est supposé être non-visqueux, soumis à un mouvement irrotationnel. Cette hypothèse est largement utilisée dans le mouvement et la propagation des ondes. Les deux fluides étant incompressibles, ils vérifient par conséquent l'équation

suivante :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_i = 0, \quad (\text{I.1})$$

tel que, ($i = 1, 2$) représente les couches des fluides supérieure et inférieure. De plus, l'approximation selon laquelle le mouvement du fluide est irrotationnel permet d'affirmer l'existence d'un potentiel des vitesses, usuellement noté $\phi(x, y, z, t)$, vérifiant par définition :

$$\vec{V}_i = \vec{\nabla} \phi, \quad (\text{I.2})$$

On suppose l'existence d'un courant uniforme et parallèle U que pour la couche supérieure. Par conséquent, le potentiel des vitesses total ϕ de la couche supérieure est la superposition du potentiel des vitesses dus aux mouvements du fluide et du courant :

$$\vec{V}_1 = U\vec{i} + \vec{\nabla} \phi_1, \quad (\text{I.3})$$

pour la couche inférieure le vecteur vitesse est donné par :

$$\vec{V}_2 = \vec{\nabla} \phi_2, \quad (\text{I.4})$$

En introduisant les potentiel (I.3) et (I.4) dans l'équation de Laplace (I.1), vérifiée par le potentiel des vitesses, dans toute la zone occupée par le fluide :

$$\phi_{i,xx} + \phi_{i,yy} + \phi_{i,zz} = 0, \quad (\text{I.5})$$

$i = 1, 2$ Désigne, respectivement, les couches des fluides supérieure et inférieure, avec $\eta \geq z$ pour $i = 1$, et $\eta \leq z$ pour $i = 2$.

La relation (I.5) est à la fois linéaire et du second ordre. Ses solutions doivent satisfaire les conditions cinématiques et dynamique aux niveau de l'interface,

ainsi que deux conditions aux niveau des parois rigides, et aux niveau de mur de réflexion.

3.2 Conditions cinématiques

La condition cinématique stipule qu'il n'y a pas d'écoulement à travers l'interface. Autrement dit, lorsqu'une particule de fluide se trouve à un instant sur l'interface, elle demeure sur cette dernière, sa vitesse est donc tangentielle. Par conséquent, la vitesse normale du fluide en un point de l'interface est égale à celle d'une particule fluide qui s'y trouve. Pour plus de commodité, l'interface est représentée par

$$\zeta(x, y, z, t) = \eta(x, y, t) - z = 0. \quad (\text{I.6})$$

Soit $\vec{\mathbf{V}}$ la vitesse d'un point matériel $\vec{\mathbf{X}}(x, y, z, t)$ sur une interface mobile, après un temps dt on écrit la condition aux limites sous la forme :

$$\zeta(\vec{\mathbf{X}} + \vec{\mathbf{V}}, t + dt) = \zeta(\vec{\mathbf{X}}, t) + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \zeta\right) dt + O(dt)^2 \quad (\text{I.7})$$

compte tenu de l'expression (I.6), il s'ensuit que :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \zeta = 0, \quad \text{en} \quad z = \eta \quad (\text{I.8})$$

cette équation se traduit par $\frac{D\zeta}{Dt} = 0$ où on note $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$ la dérivée particulaire. les conditions cinématiques pour chaque couche de fluide s'écrivent alors comme suit :

— Pour le fluide supérieur

$$\eta_t + u_1\eta_x + U\eta_x + v_1\eta_y - w_1 = 0 \quad z = \eta(x, y, t), \quad (\text{I.9})$$

— Pour le fluide inférieur

$$\eta_t + u_2\eta_x + v_2\eta_y - w_2 = 0 \quad z = \eta(x, y, t) \quad (\text{I.10})$$

et si nous devons les traduire pour le potentiel des vitesses, elles s'écrivent :

$$\eta_t + \eta_x\phi_{1x} + U\eta_x + \eta_y\phi_{1y} - \phi_{1z} = 0 \quad z = \eta(x, y, t), \quad (\text{I.11})$$

$$\eta_t + \eta_x\phi_{2x} + \eta_y\phi_{2y} - \phi_{2z} = 0 \quad z = \eta(x, y, t), \quad (\text{I.12})$$

3.3 Condition dynamique

La condition dynamique se présente à la surface de séparation entre deux fluides immiscibles, non visqueux, elle exprime l'égalité des pressions des deux côtés de l'interface quand la longueur d'onde est assez importante pour que la tension superficielle soit négligeable. À l'interface, cette condition s'écrit alors comme suit :

$$P_2 - P_1 = 0, \quad (\text{I.13})$$

L'écoulement étant irrotationnel, les deux fluides sont considérés parfaits, le mouvement des deux fluides est régi par l'équation de Bernoulli. De ce fait, on pourra écrire :

— Pour le fluide supérieur

$$\rho_1\phi_{1t} + \rho_1g\eta + \frac{1}{2}\rho_1(\phi_{1x}^2 + \phi_{1y}^2 + \phi_{1z}^2) + U\phi_{1x} + P_1 = C_1 \quad (\text{I.14})$$

— Pour le fluide inférieur

$$\rho_2\phi_{2t} + \rho_2g\eta + \frac{1}{2}\rho_2(\phi_{2x}^2 + \phi_{2y}^2 + \phi_{2z}^2) + P_2 = C_2 \quad (\text{I.15})$$

avec : P_1 et P_2 sont les pressions d'une part et d'autre de l'interface de l'onde. ρ_1 et ρ_2 représentent les masses volumiques des deux fluides g l'accélération de pesanteur. C_1 et C_2 sont les constantes de Bernoulli. La soustraction des deux équations (I.14) et (I.15) nous donne :

$$\begin{aligned} \rho_1(\phi_{1t} + g\eta + \frac{1}{2}(\phi_{1x}^2 + \phi_{1y}^2 + \phi_{1z}^2)) &= \rho_2(\phi_{2t} + g\eta \\ &+ \frac{1}{2}(\phi_{2x}^2 + \phi_{2y}^2 + \phi_{2z}^2)) + C \quad z = \eta(x, y, t), \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

En divisant cette équation par ρ_2 , on obtient la condition dynamique exprimée en termes de rapport de densités $\mu = \rho_1/\rho_2$.

$$\begin{aligned} \phi_{2t} + g\eta + \frac{1}{2}(\phi_{2x}^2 + \phi_{2y}^2 + \phi_{2z}^2) - \mu(\phi_{1t} + U\phi_{1x} + g\eta \\ + \frac{1}{2}(\phi_{1x}^2 + \phi_{1y}^2 + \phi_{1z}^2)) &= C \quad z = \eta(x, y, t), \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

3.4 Conditions sur les parois latérales

Le fluide ne pouvant traverser le fond, supposé imperméable, on écrira comme conditions aux limites :

$$\phi_{1z} = 0 \quad z = d_1, \quad (\text{I.18})$$

$$\phi_{2z} = 0 \quad z = -d_2, \quad (\text{I.19})$$

4 Équations sans dimensions

Il est recommandé de mettre les équations gouvernantes ainsi que les conditions aux limites sous forme adimensionnelles en utilisant deux paramètres de références appropriés. Ces paramètres sont une longueur de référence, définie comme $k^{-1} = L/2\pi$, où L est la longueur de référence, et un temps de référence défini comme $(gk)^{-1/2}$, où g représente l'accélération due

à la gravité et k est le nombre d'onde du train de vagues incident.

Ensuite, nous introduisons les quantités sans dimension de la manière suivante

$$\tilde{x} = kx, \tilde{y} = ky, z\tilde{z} = kz, \tilde{d}_1 = kd_1, \tilde{d}_2 = kd_2, \tilde{t} = t\sqrt{gk}, \tilde{\eta} = k\eta, \tilde{U} = U\sqrt{k/g}.$$

Afin de simplifier la notation, nous adopterons des variables sans dimension en supprimant les symboles de tilde. La périodicité des solutions suggèrent de définir le changement de variable suivant afin d'obtenir des formes permanentes :

$$X = px - \omega t, Y = qy, Z = z. \quad (\text{I.20})$$

p et q représentent les nombres d'ondes adimensionnels suivant les directions (OX) et (OY) et sont définis par :

$$p = \sin \theta, q = \cos \theta. \quad (\text{I.21})$$

Les équations (I.5), (I.11), (I.12), (I.17), (I.18) et (I.19) s'écrivent alors :

$$p^2 \phi_{iXX} + q^2 \phi_{iYY} + \phi_{iZZ} = 0 \quad i = (1, 2),$$

(I.22)

$$(pU - \omega)\eta_X + p^2 \eta_X \phi_{1X} + q^2 \eta_Y \phi_{1Y} - \phi_{1Z} = 0 \quad Z = \eta(X, Y),$$

(I.23)

$$-\omega\eta_X + p^2 \eta_X \phi_{2X} + q^2 \eta_Y \phi_{2Y} - \phi_{2Z} = 0 \quad Z = \eta(X, Y),$$

(I.24)

$$\phi_{1Z} = 0 \quad Z = d_1,$$

(I.25)

$$\phi_{2Z} = 0 \quad Z = -d_2,$$

(I.26)

$$\mu \left\{ (pU - \omega)\phi_{1X} + \eta + \frac{1}{2}(p^2 \phi_{1X}^2 + q^2 \phi_{1Y}^2 + \phi_{1Z}^2) \right\} + \omega\phi_{2X} - \eta$$

$$- \frac{1}{2}(p^2 \phi_{2X}^2 + q^2 \phi_{2Y}^2 + \phi_{2Z}^2) + C = 0 \quad Z = \eta(X, Y),$$

(I.27)

où $\mu = \rho_1/\rho_2$ est le rapport des densités et ω est la fréquence.

On définit un petit paramètre physique h lié à la cambrure de la vague étant la demi-hauteur crête-creux et il est donnée pas la relation :

$$h = \frac{1}{2}(\eta(0, 0) - \eta(0, \pi)).$$

(I.28)

Le problème associé aux ondes à courte crête est formulé à partir des équations (I.22)-(I.27), accompagnées de condition de périodicité et de symétrie

suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(X, Y, Z) = \phi(X, -Y, Z), \\ \phi(X, Y, Z) = \phi(X, Y + 2\pi, Z), \\ \phi(X, Y, Z) = \phi(-X, Y, Z), \\ \phi(X, Y, Z) = \phi(X + 2\pi, Y, Z), \\ \phi(X, Y, Z) = \phi(\pi - X, \pi - Y, Z), \end{array} \right.$$

5 Méthode de résolution

5.1 Développement en séries de puissances basé sur la méthode des perturbations :

Dans cette section, le problème est résolu par la méthode des perturbations. Les variables inconnues du problème, à savoir $\phi_i(X, Y, Z)$, $\eta(X, Y)$, ω et C , sont développées en séries de Taylor par rapport à la variable h de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_i = \sum_{r=1}^{\infty} h^r \phi_i^{(r)}(X, Y, Z) \quad i = (1, 2), \\ \eta = \sum_{r=1}^{\infty} h^r \eta^{(r)}(X, Y), \\ \omega = \sum_{r=0}^{\infty} h^r \omega_r, \\ C = \sum_{r=1}^{\infty} h^r C^{(r)}, \end{array} \right. \quad (\text{I.29})$$

En substituant les expressions ((I.29)) dans le système d'équations (I.22)-(I.27) et en regroupant suivant les puissances de h , on obtient à l'ordre r :

$$p^2 \phi_{iXX}^{(r)} + q^2 \phi_{iYY}^{(r)} + \phi_{iZZ}^{(r)} = 0 \quad i = (1, 2), \quad (\text{I.30})$$

$$(\omega_0 - Up) \eta_X^{(r)} + \phi_{1Z}^{(r)} = A_1^{(r)} \quad Z = \eta(X, Y), \quad (\text{I.31})$$

$$\omega_0 \eta_X^{(r)} + \phi_{2Z}^{(r)} = A_2^{(r)} \quad Z = \eta(X, Y), \quad (\text{I.32})$$

$$\begin{aligned} \eta^{(r)} - (\omega_0 / (\mu - 1)) (\mu \phi_{1X}^{(r)} - \phi_{2X}^{(r)}) + (\mu p U / (\mu - 1)) \phi_{1X}^{(r)} \\ = B^{(r)} / (\mu - 1) + C^{(r)} \quad Z = \eta(X, Y), \end{aligned} \quad (\text{I.33})$$

$$\phi_{1Z}^{(r)} = 0 \quad Z = d_1, \quad (\text{I.34})$$

$$\phi_{2Z}^{(r)} = 0 \quad Z = -d_2, \quad (\text{I.35})$$

avec :

$$\left\{ \begin{aligned} A_i^{(r)} &= \sum_{s=1}^{r-1} \left\{ -\omega_{r-s} \eta_X^{(s)} + p^2 \phi_{iX}^{(r-s)} \eta_X^{(s)} + q^2 \phi_{iX}^{(r-s)} \eta_Y^{(s)} \right\} \quad i = (1, 2), \\ B^{(r)} &= \sum_{s=1}^{r-1} \left\{ \mu (\omega_{r-s} \phi_{1X}^{(s)} - (1/2) (p^2 \phi_{1X}^{(r-s)} \phi_{1X}^{(s)} + q^2 \phi_{1Y}^{(r-s)} \phi_{1Y}^{(s)} + \phi_{1Z}^{(r-s)} \phi_{1Z}^{(s)})) \right. \\ &\quad \left. - (\omega_{r-s} \phi_{2X}^{(s)} - (1/2) (p^2 \phi_{1X}^{(r-s)} \phi_{1X}^{(s)} + q^2 \phi_{1Y}^{(r-s)} \phi_{1Y}^{(s)} + \phi_{1Z}^{(r-s)} \phi_{1Z}^{(s)})) \right\}. \end{aligned} \right. \quad (\text{I.36})$$

Les conditions aux limites sont appliquées à l'interface $Z = \eta(X, Y)$, qui est a priori inconnue. Afin de surmonter cette difficulté, les conditions aux limites de l'interface sont appliquées à $Z = 0$. Ceci est accompli en développant les potentiels de vitesse ϕ_1 et ϕ_2 en série de Taylor autour de $Z = 0$:

$$\phi_i(X, Y, \eta) = \phi_i(X, Y, 0) + \phi_{iZ}|_{Z=0} \eta + \frac{1}{2} \phi_{iZZ}|_{Z=0} \eta^2 + \dots \quad (\text{I.37})$$

En insérant les equations (I.29) et (I.37) dans les équations de base (I.22)-(I.27), les équations du premier ordre des approximations deviennent

$$p^2 \phi_{iXX}^{(1)} + q^2 \phi_{iYY}^{(1)} + \phi_{iZZ}^{(1)} = 0, \quad i = (1, 2), \quad (\text{I.38})$$

$$\omega_0 \eta_X^{(1)} + \phi_{2Z}^{(1)} = 0 \quad Z = 0, \quad (\text{I.39})$$

$$(\omega_0 - pU) \eta_X^{(1)} + \phi_{1Z}^{(1)} = 0 \quad Z = 0, \quad (\text{I.40})$$

$$\omega_0 (\phi_{2X}^{(1)} - \mu \phi_{1X}^{(1)}) + (\mu - 1) \eta^{(1)} + \mu p U \phi_{1X}^{(1)} = 0 \quad Z = 0, \quad (\text{I.41})$$

$$\phi_{1Z}^{(1)} = 0 \quad Z = d_1, \quad (\text{I.42})$$

$$\phi_{2Z}^{(1)} = 0 \quad Z = -d_2 \quad (\text{I.43})$$

Le système d'équations (I.38) - (I.43) admet les solutions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta^{(1)} = \cos X \cos Y, \\ \phi_1^{(1)} = (-\omega_0 + pU) \sin X \cos Y (\cosh(Z - d_1)) / \sinh(Z - d_1), \\ \phi_2^{(1)} = \omega_0 \sin X \cos Y (\cosh(Z + d_2)) / \sinh(Z + d_2), \\ \omega_0^2 / T_2 + \mu (\omega_0 - pU)^2 / T_1 = 1 - \mu, \\ C^{(1)} = 0, \end{array} \right. \quad (\text{I.44})$$

avec : $T_1 = \tanh(d_1)$ et $T_2 = \tanh(d_1)$

Les solutions du premier ordre suggèrent que, pour tout ordre r , les solutions peuvent être exprimées de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta^{(r)} = \sum_{mn} a_{mn}^{(r)} \cos(mX) \cos(nY), \\ \phi_1^{(r)} = \sum_{mn} b_{mn}^{(r)} \sin(mX) \cos(nY) \cosh \alpha_{mn}(Z - d_1) / \sinh(Z - d_1), \\ \phi_2^{(r)} = \sum_{mn} c_{mn}^{(r)} \sin(mX) \cos(nY) \cosh \alpha_{mn}(Z + d_2) / \sinh(Z + d_2). \end{array} \right. \quad (\text{I.45})$$

où $\alpha_{mn}^2 = (mp)^2 + (nq)^2$ et m et n sont des entiers de même parité.

Le choix de l'emplacement de l'origine au niveau moyen entraîne la nullité du coefficient $a_{00}^{(r)}$. La symétrie triangulaire (I.29) des ondes à courtes crêtes fait que les coefficients dont les indices n'ont pas la même parité sont également nuls. Ces propriétés réduiront de moitié les calculs.

Puisque la dépendance en Z de $\phi_i^{(r)}$ implique le terme $\exp(\alpha_{mn}Z)$ pour différentes valeurs de α_{mn} . La détermination de ϕ_i nécessite le calcul de l'expression $\exp(\alpha_{mn}\eta(X, Y))$ sous forme d'une série de Taylor autour de $Z = 0$. Roberts [22] a défini la fonction $E_r(X, Y, \alpha_{mn})$ de sorte que :

$$\exp(\alpha_{mn}\eta(X, Y)) = \sum_{r=0}^{\infty} E_r(X, Y, \alpha_{mn}) h^r, \quad (\text{I.46})$$

où E_r est aussi une fonction de $\eta^{(r)}$ et de α_{mn} qui vérifie la relation de récurrence :

$$\begin{cases} E_0 = 1, \\ E_r(X, Y, \alpha_{mn}) = \frac{\alpha_{mn}}{r} \sum_{s=1}^r s \eta^{(s)}(X, Y) E_{r-s}(X, Y, \alpha_{mn}). \end{cases} \quad (\text{I.47})$$

Faisons intervenir les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} G_1^{(r)} = K_1(\exp(-\alpha_{mn}d_1)E_r(X, Y, \alpha_{mn}) + \exp(\alpha_{mn}d_1)E_r(X, Y, -\alpha_{mn})), \\ H_1^{(r)} = K_1(\exp(-\alpha_{mn}d_1)E_r(X, Y, \alpha_{mn}) - \exp(\alpha_{mn}d_1)E_r(X, Y, -\alpha_{mn})), \\ G_2^{(r)} = K_2(\exp(\alpha_{mn}d_2)E_r(X, Y, \alpha_{mn}) + \exp(-\alpha_{mn}d_2)E_r(X, Y, -\alpha_{mn})), \\ H_2^{(r)} = K_2(\exp(\alpha_{mn}d_2)E_r(X, Y, \alpha_{mn}) - \exp(-\alpha_{mn}d_2)E_r(X, Y, -\alpha_{mn})), \end{cases} \quad (\text{I.48})$$

avec $K_1 = 1/(2 \cosh(\alpha_{mn}d_1))$ et $K_2 = 1/(2 \cosh(\alpha_{mn}d_2))$.

Posons les fonctions dérivées suivantes :

$$\begin{cases} U_i^{(r)} = \phi_{iX}(X, Y, \eta(X, Y)), \\ V_i^{(r)} = \phi_{iX}(X, Y, \eta(X, Y)), \\ W_i^{(r)} = \phi_{iX}(X, Y, \eta(X, Y)), \end{cases} \quad (\text{I.49})$$

En substituant les expressions de $G_i^{(r)}$ et $H_i^{(r)}$ données par (I.48) dans les formes générales de $\phi_i^{(r)}$ déduites dans (I.45), il s'ensuit pour U_1

$$U_1 = \sum_{r=1} h^r \sum_{mn} \sum_{s=1}^r m b_{mn}^r \cos(mX) \cos(nY) G_1^{(r-s)}, \quad (\text{I.50})$$

de manière similaire pour U_2 , V_i et W_i on obtient :

$$\begin{cases} U_i^{(r)} = \phi_{iX}(X, Y, 0) + \overline{U}_i^{(r)}, \\ V_i^{(r)} = \phi_{iX}(X, Y, 0) + \overline{V}_i^{(r)}, \\ W_i^{(r)} = \phi_{iX}(X, Y, 0) + \overline{W}_i^{(r)}, \end{cases} \quad (\text{I.51})$$

où :

$$\begin{cases} \overline{U}_1^{(r)} = \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{mn} m b_{mn}^{(s)} \cos(mX) \cos(nY) G_1^{(r-s)}, \\ \overline{V}_1^{(r)} = - \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{mn} n b_{mn}^{(s)} \cos(mX) \cos(nY) G_1^{(r-s)}, \\ \overline{W}_1^{(r)} = \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{mn} \alpha_{mn} b_{mn}^{(s)} \cos(mX) \cos(nY) H_1^{(r-s)}, \end{cases} \quad (\text{I.52})$$

$$\begin{cases} \overline{U}_2^{(r)} = \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{mn} m c_{mn}^{(s)} \cos(mX) \cos(nY) G_2^{(r-s)}, \\ \overline{V}_2^{(r)} = - \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{mn} n c_{mn}^{(s)} \cos(mX) \cos(nY) G_2^{(r-s)}, \\ \overline{W}_2^{(r)} = \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{mn} \alpha_{mn} c_{mn}^{(s)} \cos(mX) \cos(nY) H_2^{(r-s)}. \end{cases} \quad (\text{I.53})$$

L'introduction de ces expressions dans les équations (I.31), (I.32) et (I.33)

conduit à :

$$(\omega_0 - pU)\eta_X^{(r)} + \phi_{1Z}^{(r)}(X, Y, 0) = -\overline{W}_1^{(r)} + A_1^{(r)} \quad \text{on} \quad Z = 0, \quad (\text{I.54})$$

$$\omega_0\eta_X^{(r)} + \phi_{2Z}^{(r)}(X, Y, 0) = -\overline{W}_2^{(r)} + A_2^{(r)} \quad \text{on} \quad Z = 0, \quad (\text{I.55})$$

$$\eta^{(r)} + \frac{1}{\mu - 1}(\mu(pU - \omega_0)\phi_{1X}^{(r)}(X, Y, 0) + \omega_0\phi_{2X}^{(r)}(X, Y, 0)) = \quad (\text{I.56})$$

$$\frac{B^{(r)}}{\mu - 1} + \frac{\omega_0}{\mu - 1}(\mu\overline{U}_1^{(r)} - \overline{U}_2^{(r)}) - \frac{\mu pU}{\mu - 1}\mu\overline{U}_1^{(r)} \quad \text{on} \quad Z = 0,$$

On pose :

$$\begin{cases} f_i^{(r)} = A_i^{(r)} - \overline{W}_i^{(r)}, \\ F^{(r)} = \frac{B^{(r)}}{\mu - 1} + \frac{\omega_0}{\mu - 1}(\mu\overline{U}_1^{(r)} - \overline{U}_2^{(r)}) - \frac{\mu pU}{\mu - 1}\mu\overline{U}_1^{(r)}, \end{cases} \quad (\text{I.57})$$

$f_i^{(r)}$ et $F^{(r)}$ peuvent être exprimés comme suit :

$$\begin{cases} f_i^{(r)} = \sum_{\substack{mn \\ r}} f_{i,mn}^{(r)} \sin(mX) \cos(nY) & (i = 1, 2), \\ F^{(r)} = \sum_{mn} F_{mn}^{(r)} \sin(mX) \cos(nY). \end{cases} \quad (\text{I.58})$$

En reportant les expressions ci-dessus dans les formules données par les équations (I.54), (I.55) et (I.56), on aboutit alors au système d'équation suivant :

$$\begin{cases} -ma_{mn}^{(r)}(\omega_0 - pU) - g_{mn}b_{mn}^{(r)} = f_{1,mn}^{(r)}, \\ -\omega_0ma_{mn}^{(r)} + h_{mn}c_{mn}^{(r)} = f_{2,mn}^{(r)}, \\ a_{mn}^{(r)} + m\omega_0(\mu b_{mn}^{(r)} - c_{mn}^{(r)})/(1 - \mu) - pUm\mu b_{mn}^{(r)}/(1 - \mu) = F_{mn}, \end{cases} \quad (\text{I.59})$$

avec $g_{mn} = \alpha_{mn} \tanh(\alpha_{mn}d_1)$ et $h_{mn} = \alpha_{mn} \tanh(\alpha_{mn}d_2)$.

Ce système à pour solutions :

$$a_{mn}^{(r)} = -\frac{m\mu h_{mn} f_{1,mn}^{(r)}(\omega_0 - pU) + g_{mn} h_{mn} F_{mn}(1 - \mu) + m\omega_0 f_{2,mn}^{(r)} g_{mn}}{m^2 \mu h_{mn} (pU - \omega_0)^2 + g_{mn} (m^2 \omega_0^2 + h_{mn} (\mu - 1))} \quad (\text{I.60})$$

$$b_{mn}^{(r)} = -\frac{f_{1,mn}^{(r)} + m a_{mn}^{(r)} (\omega_0 - pU)}{g_{mn}} \quad (\text{I.61})$$

$$c_{mn}^{(r)} = \frac{f_{2,mn}^{(r)} + \omega_0 m a_{mn}^{(r)}}{h_{mn}} \quad (\text{I.62})$$

Le calcul de ces coefficients permet la détermination des valeurs de $\eta^{(r)}$, $\phi_1^{(r)}$ et $\phi_2^{(r)}$ dans l'équation (I.45). En utilisant ces solutions de l'ordre (r) , nous pouvons obtenir les solutions de l'ordre $(r+1)$ correspondantes. Ce processus récursif commence au deuxième ordre, en partant des solutions linéaires (I.44) de l'ordre 1.

Lorsque $m = n = 1$, un terme séculaire se manifeste dans les coefficients fournis par (I.60), ce qui signifie que le dénominateur devient nul. Pour éliminer ce terme séculaire, nous annulons le numérateur, c'est-à-dire :

$$\mu h_{11} f_{1,11} (\omega_0 - pU) + g_{11} h_{11} F_{11} (1 - \mu) + \omega_0 f_{2,11} g_{11} \quad (\text{I.63})$$

Les fonctions $f_{1,11}^{(r)}$, $f_{2,11}^{(r)}$ et $F_{11}^{(r)}$ qui contiennent, chacune, un seul terme en ω_{r-1} peuvent être écrites sous les formes

$$\begin{cases} f_{i,11}^{(r)} = \omega_{r-1} a_{11}^1 + f_{is}^{(r)}, & (i = 1, 2) \\ F_{11}^{(r)} = \frac{(\mu b_{11}^{(r)} - c_{11}^{(r)}) \omega_{r-1}}{\mu - 1} + F_s^{(r)}, \end{cases} \quad (\text{I.64})$$

où $f_{1s}^{(r)}$, $f_{2s}^{(r)}$ et $F_s^{(r)}$ sont des termes indépendants de ω_{r-1} tel que

$$\begin{cases} f_{1s}^{(r)} = a_{11}^{(1)} pU - b_{11}^{(1)} g_{11}, \\ f_{2s}^{(r)} = c_{11}^{(1)} h_{11}, \\ F_s^{(1)} = a_{11}^{(1)} (\mu - 1) + \mu pU b_{11}^{(1)}, \end{cases} \quad (\text{I.65})$$

En reportant les expressions données par (I.64) dans l'équation (I.63) on obtient pour tout r l'expression de ω_{r-1} :

$$\omega_{r-1} = -\frac{\mu T_2(pU - \omega_0)f_{1s}^{(r)} - \omega_0 T_1 f_{2s}^{(r)} + T_1 T_2 F_s^{(r)}(\mu - 1)}{2[\mu T_2(pU - \omega_0) - T_1 \omega_0]}. \quad (\text{I.66})$$

Cela laisse $a_{11}^{(r)}$ inconnues pour les ordres impaires. Toutefois, on peut utiliser la relation (I.28) pour l'exprimer :

$$a_{11}^{(r)} = -\sum_{\substack{m \neq 1 \\ n \neq 1}}^{(r)} a_{mn}^{(r)}, \quad (\text{I.67})$$

Il est alors possible de déterminer les coefficients $b_{11}^{(r)}$ et $c_{11}^{(r)}$ en appliquant les relations (I.61) et (I.62). Cette approche, qui a été mise en œuvre à l'aide du logiciel MAPLE, a permis d'obtenir des solutions analytiques jusqu'à l'ordre cinq. Pour aller au-delà de cet ordre, les coefficients $a_{mn}^{(r)}$, $b_{mn}^{(r)}$ et $c_{mn}^{(r)}$ ont été calculés en utilisant un programme FORTRAN, et ce, pour diverses valeurs du rapport des densités et de l'intensité du courant.

5.2 Méthode du Lagrangien moyen de Whitham

Les lois physiques peuvent souvent être déduites de principes mathématiques concis stipulant que certaines intégrales atteignent des valeurs extrêmes. Par conséquent, la valeur d'une telle intégrale est stationnaire par rapport à de petites variations des paramètres dont dépend l'intégrande (principe variationnel). L'étude actuelle étend le principe variationnel pour les ondes en fluides non visqueux, initialement formulé par Luke [36] en 1967 pour les ondes de surface en deux dimensions, à l'analyse des ondes interfaciales en trois dimensions.

Pour des ondes interfaciales tridimensionnelle irrotationnelles avec un courant U et des limites inférieures et supérieures infinies,

le Lagrangienne moyenne est donnée par

$$L = - \overline{\left[\int_{-\infty}^{\eta} \frac{1}{2} (p^2 \phi_{2X}^2 + q^2 \phi_{2Y}^2 + \phi_{2Z}^2) - \omega \phi_{2X} + \eta \right] dZ} - \mu \overline{\left[\int_{\eta}^{+\infty} \frac{1}{2} \left((p\phi_{1X} + U)^2 + q^2 \phi_{1Y}^2 + \phi_{1Z}^2 \right) - \omega \phi_{1X} + \eta \right] dZ} - L_0, \quad (\text{I.68})$$

où la barre supérieure indique une moyenne temporelle ou spatiale, et L_0 est le Lagrangien l'écoulement non perturbé, elle s'écrit :

$$L_0 = - \int_{-\infty}^0 \eta dZ - \int_0^{\infty} \left(\mu \eta dZ + \frac{1}{2} \mu U^2 \right) dZ. \quad (\text{I.69})$$

Par ailleurs, les termes d'ordre principal pour le profil de l'onde et les potentiels de vitesse sont substitués dans les expressions pour L :

$$\begin{cases} \eta(X, Y) = A_{11} \cos X \cos Y + A_{22} \cos 2X \cos 2Y + A_{20} \cos 2X + A_{02} \cos 2Y, \\ \phi_1(X, Y, Z) = B_{11} \sin X \cos Y e^{-\alpha_{11}Z} + B_{22} \sin 2X \cos 2Y e^{-\alpha_{22}Z} + B_{20} \sin 2X e^{-\alpha_{20}Z}, \\ \phi_2(X, Y, Z) = C_{11} \sin X \cos Y e^{\alpha_{11}Z} + C_{22} \sin 2X \cos 2Y e^{\alpha_{22}Z} + C_{20} \sin 2X e^{\alpha_{20}Z}. \end{cases} \quad (\text{I.70})$$

Après le calcul du Lagrangien, on obtient une formule incluant les coefficients B_{11} , B_{20} , B_{22} , C_{11} , C_{20} et C_{22} que l'on élimine en appliquant :

$$\frac{\partial L}{\partial B_{11}} = \frac{\partial L}{\partial B_{20}} = \frac{\partial L}{\partial B_{22}} = \frac{\partial L}{\partial C_{11}} = \frac{\partial L}{\partial C_{20}} = \frac{\partial L}{\partial C_{22}} = 0, \quad (\text{I.71})$$

Compte tenu de la relation (I.68) et des expressions (I.70) le lagrangien moyen du système est donné par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{4p} \left(-p + p\mu + 2\omega^2 + 2\mu (\omega - pU)^2 \right) A_{20}^2 + \frac{1}{8} \left(\left(2(\omega - pU)^2 + 1 \right) \mu + 2\omega^2 + \mu - 1 \right) A_{22}^2 \\ & + \frac{1}{8} \left(\left((\omega - pU)^2 \right) \mu + \omega^2 + \mu - 1 \right) A_{11}^2 + \frac{1}{8} (p-1)(p+1) \left(\mu (\omega - pU)^2 - \omega^2 \right) A_{11}^2 A_{02} \\ & + \frac{1}{64} (-1 + 2p^3 - 4p^2) \left(\mu (\omega - pU)^2 + \omega^2 \right) A_{11}^4 + \frac{1}{16} \left(\mu (\omega - pU)^2 - \omega^2 \right) A_{11}^2 A_{22} \\ & + \frac{1}{8} (-2 + p^2 + 2p) \left(\mu (\omega - pU)^2 - \omega^2 \right) A_{11}^2 A_{20} + \frac{1}{4} (-1 + \mu) A_{02}^2 + \mathcal{O}(A_{11}^6). \end{aligned} \quad (\text{I.72})$$

Ici, l'ordre le plus bas correspondant à A_{11} fournit la relations de dispersion linéaire :

$$\omega = \omega_0 + \mathcal{O}(A_{11}^2) \quad \text{où} \quad \mu(\omega_0 - pU)^2 + \omega_0^2 + \mu - 1 = 0, \quad (\text{I.73})$$

cette relation est identique a celle obtenu par la méthode des perturbations.

Le Lagrangien moyen L a été déterminé en fonction de A_{11} , A_{22} , A_{20} et A_{02} . A_{11} peut être considéré comme un paramètre fondamentale lié a la hauteur de l'onde. Les autres coefficients sont des fonctions de A_{11} et sont déduites en tant que solutions des équations variationnelles :

$$\frac{\partial L}{\partial A_{22}} = \frac{\partial L}{\partial A_{20}} = \frac{\partial L}{\partial A_{02}} = 0, \quad (\text{I.74})$$

ce qui donne :

$$A_{22} = -\frac{1}{4} \frac{A_{11}^2 (\mu + 2\omega_0^2 - 1)}{-1 + \mu}, \quad (\text{I.75})$$

$$A_{20} = \frac{1}{4} \frac{A_{11}^2 p (-2 + p^2 + 2p) (\mu + 2\omega_0^2 - 1)}{(p-2)(-1+\mu)}, \quad (\text{I.76})$$

$$A_{02} = \frac{1}{4} \frac{A_{11}^2 (p-1)(p+1)(\mu + 2\omega_0^2 - 1)}{-1 + \mu}. \quad (\text{I.77})$$

On peut aisément vérifier que ces coefficients sont identiques a ceux calculé précédemment avec la méthode des perturbations.

En introduisant les coefficients A_{22} , A_{20} et A_{02} dans l'expression (I.72), le Lagrangien se réduit alors à une forme plus condensé et s'écrit :

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{64} \frac{A_{11}^4 p (p^2 - 2 + 2p)^2 (\mu (\omega_0 - pU)^2 - \omega_0^2)^2}{-p + p\mu + 2\omega_0^2 + 2\mu (\omega_0 - pU)^2} + \frac{1}{128} \frac{A_{11}^4 (\mu (\omega_0 - pU)^2 - \omega_0^2)^2}{2\omega_0^2 + 2\mu (\omega_0 - pU)^2 + \mu - 1} \\ & + \frac{1}{64} \frac{A_{11}^4 (p-1)^2 (p+1)^2 (\mu (\omega_0 - pU)^2 - \omega_0^2)^2}{-1 + \mu} - \frac{1}{8} A_{11}^2 (-1 + \mu + \omega^2 + \mu (\omega - pU)^2) \\ & - \frac{1}{64} A_{11}^4 (-1 - 4p^2 + 2p^3) (\omega_0^2 + \mu (\omega_0 - pU)^2) + \mathcal{O}(A_{11}^6). \end{aligned} \quad (\text{I.78})$$

La relation de dispersion non linéaire est obtenu en introduisant le lagrangien (I.78) dans la relation $\partial L / \partial A_{11} = 0$ et il vient, alors :

$$(1 - \mu) \left[1 + A_{11}^2 \left(\frac{\lambda^2 4p^5 + 4p^4 - 4p^3 - 8p^2 + 9p - 2}{8(2-p)(1-\mu)^2} - \frac{1}{4}(2p^3 - 4p^2 - 1) \right) \right], \quad \omega^2 + \mu(\omega - pU)^2 = \quad (\text{I.79})$$

où : $\lambda = \omega_0^2 - \mu(\omega_0 - pU)^2$.

6 Résultats et discussion

6.1 La limite dynamique

La limite dynamique est associée à l'existence d'un courant critique au-delà duquel le problème n'admet pas de solutions de formes permanentes. Saffman et Yuen [16] ont déterminé la valeur du courant critique dans le cas des ondes interfaciales bidimensionnelles à des profondeurs infinies. Ils l'ont calculée à la fois sous sa forme linéaire et faiblement non linéaire en utilisant la relation de dispersion. En général, le courant critique U_c est une fonction du rapport de densité μ de l'angle θ et de A_{11} qui est l'amplitude de l'onde. Nous étendrons cette étude au cas des ondes interfaciales tridimensionnelles. Lorsque $A_{11} \rightarrow 0$, l'équation (I.79) devient linéaire. Son examen pour des valeurs fixes du rapport de densité μ , du courant U et de θ montre qu'il existe deux solutions correspondant aux deux racines de l'équation quadratique en ω en fonction de μ et U . Ces deux solutions sont notées ω_0^+ et ω_0^- , où $\omega_0^+ > \omega_0^-$. Le courant critique linéaire est défini lorsque $\omega_0^+(\mu, \theta, U, A_{11}) = \omega_0^-(\mu, \theta, U, A_{11})$, il est donné par l'expression suivante :

$$U_{cl} = \frac{\sqrt{\mu(1-\mu^2)}}{\mu p}, \quad (\text{I.80})$$

l'indice "l" représente le cas linéaire. Dans ce cas, nous avons :

$$\omega_0^+ = \omega_0^- = \frac{\mu p U_{cl}}{\mu + 1}. \quad (\text{I.81})$$

Pour des valeurs de μ et θ fixes et en faisant varier la valeur du courant U , on obtient alors l'évolution de ω en fonction de U pour les deux valeurs de la vitesse de propagation linéaire : ω_0^+ et ω_0^- . Un exemple est tracé dans la figure (I.3). Le point d'intersection des deux courbes correspond à la valeur du courant critique U_c .

Pour le cas non linéaire ($A_{11} \neq 0$), l'équation (I.79) admet deux racines $\omega_+(A_{11}, \mu, U, \theta)$ et $\omega_-(A_{11}, \mu, U, \theta)$ qui dépendent de l'amplitude. Pour des valeurs fixes de A_{11} , μ et θ il existe à nouveau un courant critique U_c déterminé par l'égalité $\omega_+(A_{11}, \mu, U_c, \theta) = \omega_-(A_{11}, \mu, U_c, \theta)$, au delà duquel les solutions cessent d'exister. La valeur de U_c corrigé au second ordre est déterminé en annulant le discriminant de l'expression (I.79).

$$U_{c2} = U_{cl} \left[1 + A_{11}^2 \left(\frac{(1-\mu)^2}{8(1+\mu)^2} \frac{(9p - 8p^2 + 4p^4 + 4p^5 - 2 - 4p^3)}{2-p} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}p^3 + p^2 \right) \right]^{1/2}, \quad (\text{I.82})$$

avec :

$$\omega_{+,2} = \omega_{-,2} = \frac{\mu p U_{c2}}{1 + \mu}, \quad (\text{I.83})$$

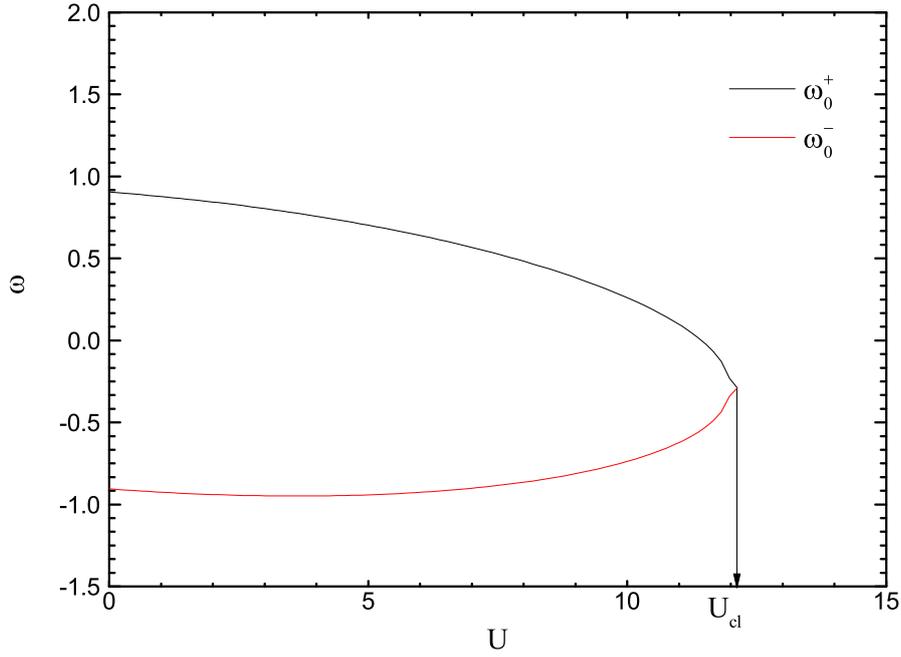


Figure I.3: L'évolution de la fréquence ω en fonction de courant U en profondeurs infinies. Le courant critique U_{cl} est le point d'intersection des deux courbes ω_0^+ et ω_0^- .

où l'indice 2 désigne l'approximation du 2^{ème} ordre.

Pour des valeurs données de μ et θ , la relation (I.82) montre que le courant critique U_{c2} augmente avec l'amplitude d'onde A_{11}^2 . Cela signifie que l'amplitude d'onde a un effet stabilisateur sur la propagation des ondes interfaciales. Cette relation est illustrée dans la figure (I.4) pour quatre valeurs différentes de θ .

6.2 Instabilité de Kelvin-Helmholtz

L'existence d'une valeur critique de U est associée à l'apparition d'instabilité, comme le sera montré par la suite. La formulation utilisée suit celle de Saffman et Yuen [16] pour le cas tridimensionnel. Ils ont démontré que, pour une amplitude d'onde très faible et des valeurs suffisamment élevées du courant, une instabilité de Kelvin-Helmholtz se produit. Ils ont également interprété ces résultats comme la non-existence d'ondes linéaires stationnaires. Retenons que les racines de l'équation (I.73) peuvent être réels ou complexes conjugués. Dans le premier cas, l'écoulement est stable. Dans le second cas, l'écoulement est instable et les parties imaginaires des solutions de cette équation en ω correspondent au taux de croissance qui augmente comme $e^{\omega_i t}$, avec $\omega_i = \Im(\omega)$.

À titre d'exemple, la figure (I.5) montre la variation des racines de la relation de dispersion linéaire par rapport au courant U pour un rapport de densité $\mu = 0.1$ et un angle $\theta = 40$. La coalescence des deux racines réelles donne lieu à l'émergence d'une instabilité correspondant à des racines complexes conjuguées. Ces racines complexes surviennent lorsque $U > U_{cl}$.

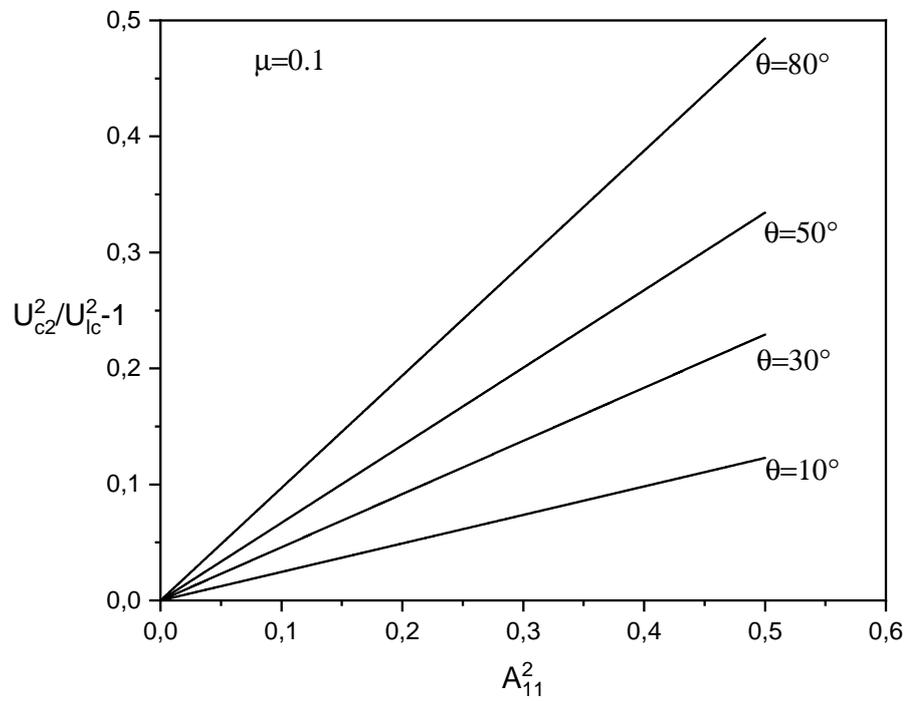


Figure I.4: Tracé de $U_{c2}^2/U_{lc}^2 - 1$ en fonction de A_{11}^2 pour une valeur fixe de μ et différentes valeurs de θ .

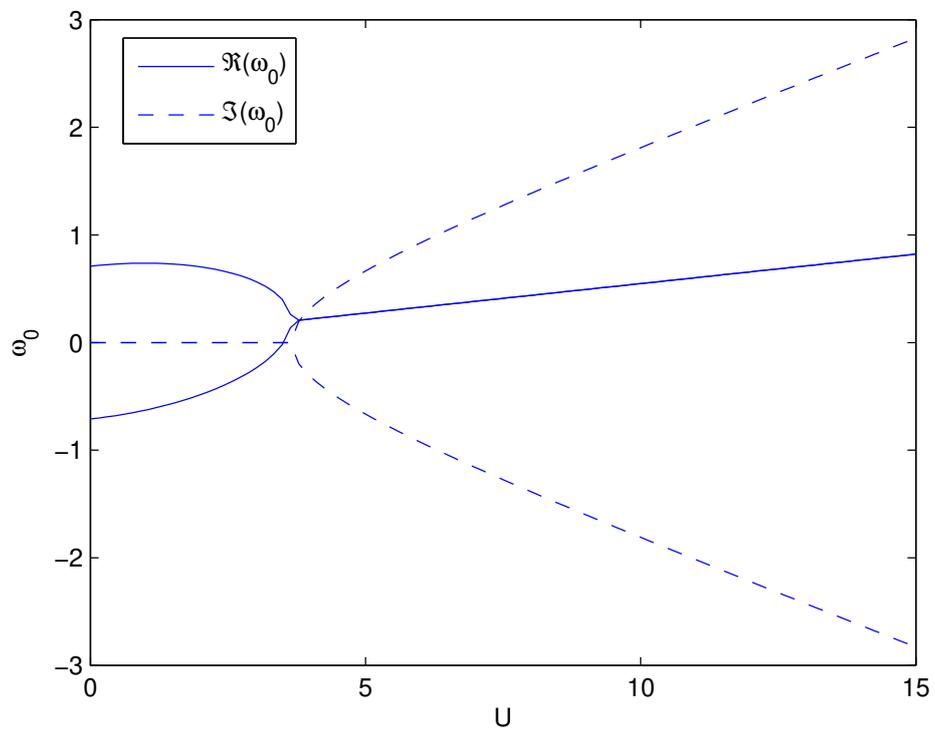


Figure I.5: Les deux racines de l'équation de dispersion linéaire pour $\mu = 0.1$ et un angle $\theta = 40$. La courbe pleine représente les parties réelles et la courbe en pointillés représente les parties imaginaires.

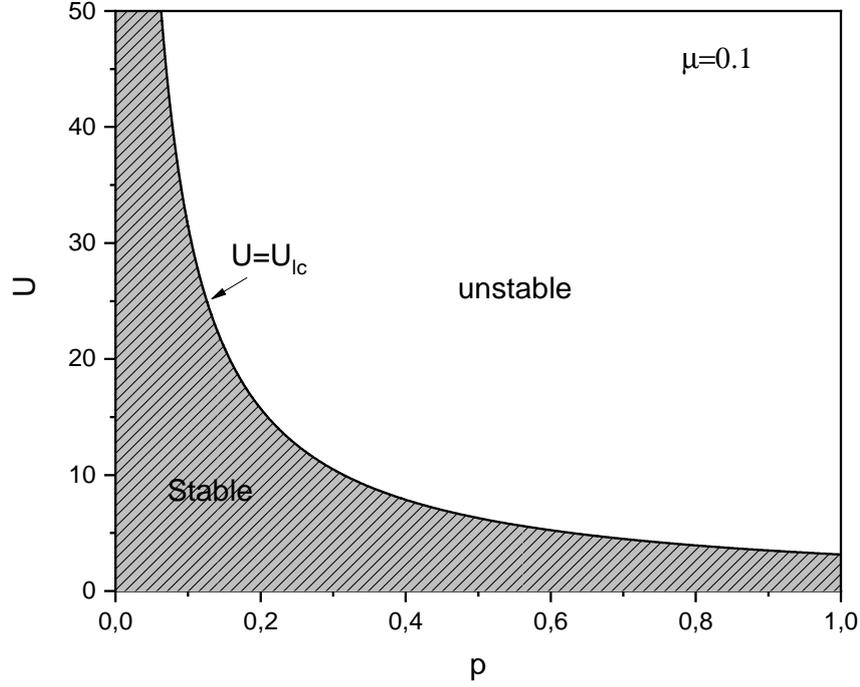


Figure I.6: Régions stables et instables dans le plan (U, p) . La courbe limite entre les régions stables et instables correspond aux valeurs de courant critique linéaire.

Il existe une région de valeurs (p, U) pour laquelle ω_i est imaginaire. Cette région est déterminée par le signe du discriminant de l'équation quadratique (I.73), qui est donné par l'expression :

$$\Delta = 4(1 - \mu^2) - 4\mu p^2 U^2. \quad (\text{I.84})$$

La figure (I.6) montre les zones stables et instables qui correspondent aux signes du discriminant. Si $\Delta > 0$, le mode est stable. Dans le cas contraire, lorsque $\Delta < 0$, le mode est considéré comme instable. La courbe qui sépare les deux zones donne les valeurs de U_{lc} . Il existe deux cas limites. Le premier est lorsque $\theta = 0^\circ$ et il correspond à des ondes interfaciales stationnaires. Dans ce cas, le courant critique linéaire $U_{lc} \rightarrow \infty$. Cela signifie physiquement que les ondes interfaciales stationnaires en présence d'un courant sont toujours stables. Le deuxième cas limite correspond $\theta = 90^\circ$ et nous obtenons les ondes progressives bidimensionnelles. Dans ce cas, il existe une valeur limite du courant où le régime devient instable et donc les ondes progressives de forme permanente ne peuvent pas être observées. Cette région est déterminée lorsque :

$$U \geq U_{lc} \quad \text{with} \quad U_{lc} = \frac{\sqrt{\mu(1 - \mu^2)}}{\mu p}. \quad (\text{I.85})$$

6.3 Solutions analytiques : comparaison avec les travaux antérieurs

La problématique que nous avons développée constitue une extension de l'étude réalisée par Allalou et al. [32], facilitant ainsi la comparaison et la confirmation de nos résultats. L'intégration d'un courant dans notre analyse a mis en lumière l'influence significative de cette variable sur la dynamique des ondes interfaciales. Les ondes à courtes crêtes de gravité en présence d'un courant uniforme ont été calculées analytiquement, au cinquième ordre, grâce à un algorithme de calcul formel, MAPLE, les solutions sont ensuite étendue jusqu'à l'ordre 32. A l'ordre cinq, les développements des potentiels des vitesses dans les deux fluides, de l'interface et de la fréquence s'écrivent :

$$\phi_1 = \sum_{r=1}^5 h^{(r)} \sum_{mn} b_{mn}^{(r)} \sin mX \cos nY \frac{\alpha_{mn}(Z - d_1)}{\alpha_{mn} d_1}, \quad (\text{I.86})$$

$$\phi_2 = \sum_{r=1}^5 h^{(r)} \sum_{mn} c_{mn}^{(r)} \sin mX \cos nY \frac{\alpha_{mn}(Z + d_2)}{\alpha_{mn} d_2}, \quad (\text{I.87})$$

$$\eta = \sum_{r=1}^5 h^{(r)} \sum_{mn} a_{mn}^{(r)} \cos mX \cos nY, \quad (\text{I.88})$$

$$\omega = \sum_{r=0}^5 h^{(r)} \omega_r, \quad (\text{I.89})$$

Les solutions analytiques du second ordre sont représenté dans les tableau suivants :

$$\begin{aligned} a_{2,2}^{(2)} &= -\frac{1}{4} \frac{-\omega_0^2 - 2\mu p U \omega_0 + \mu \omega^2 + \mu p^2 U^2}{\mu - 1 + 2\omega_0^2 + 2\mu(-\omega_0 + pU)^2}, \\ a_{02}^{(2)} &= -\frac{1}{4} \frac{(p-1)(p+1)(\mu(pU - \omega_0)^2 - \omega_0^2)}{\mu - 1}, \\ a_{20}^{(2)} &= -\frac{1}{4} \frac{p(p^2 - 2 - 2p)(\mu(pU - \omega_0)^2 - \omega_0^2)}{p(\mu - 1) + 2\omega_0^2 + 2\mu(-\omega_0 + pU)^2}, \\ b_{22}^{(2)} &= \frac{1}{4} \frac{(-\omega_0 + pU)(\mu(-\omega_0 + pU)^2) - 1 + \mu + 3\omega_0^2}{\mu - 1 + 2\omega_0^2 + 2\mu(-\omega_0 + pU)^2}, \\ b_{20}^{(2)} &= -\frac{1}{4} \frac{(-\omega_0 + pU)(\mu(p^2 - 2)(pU - \omega_0)^2 - p(p\omega_0)^2 - p + \mu p + 4\omega_0^2) + 2\omega_0^2}{p(\mu - 1) + 2\omega_0^2 + 2\mu(-\omega_0 + pU)^2}, \\ c_{22}^{(2)} &= -\frac{1}{4} \frac{\omega_0(\omega_0)^2 + 3\mu(-\omega_0 + pU)^2 + \mu - 1}{\mu - 1 + 2\omega_0^2 + 2\mu(-\omega_0 + pU)^2}, \\ c_{20}^{(2)} &= -\frac{1}{4} \frac{\mu(p^2 + 4p - 2)(-\omega_0 + pU)^2 + 2\omega_0^2 + p^2(-\omega_0^2 - 1 + \mu)}{p(\mu - 1) + 2\omega_0^2 + 2\mu(-\omega_0 + pU)^2}, \\ \omega_1 &= 0 \end{aligned}$$

Tableau I.1: Solutions analytiques au second ordre des ondes a courtes crête interfaciales en profondeurs infinies.

En raison de la longueur des expressions des coefficients $a_{mn}^{(r)}$, $b_{mn}^{(r)}$, $c_{mn}^{(r)}$ et ω_r il n'a pas été possible de donner les expressions des ordres trois, quatre et cinq. Cependant, celles de l'ordre deux en profondeurs finies sont données en Annexe.

6.3.1 Ondes interfaciales tridimensionnelles sans courant

Lorsque $U = 0$ (cas des ondes interfaciales), les coefficients $a_{mn}^{(r)}$ et ω_2 , au 2^{ème} ordre se réduisent à :

$$\begin{aligned}
 a_{2,2}^{(2)} &= \frac{1}{8} \frac{-4\omega_0^2(\mu h_{22} - p^2 g_{22}) + h_{22} g_{22}(-T_2^2 + 2\mu T_1 - 2T_2 - \mu + 1 + \mu T_1^2)}{h_{22} g_{22}(-1 + \mu) + 2\omega_0^2(\mu h_{22} + g_{22})}, \\
 b_{2,2}^{(2)} &= \frac{1}{8} \frac{-\omega_0^3 h_{22}(2\mu T_1 - 2T_2 - T_2^2 + \mu T_1^2 + 1 - \mu) - 2\omega_0 h_{22}(-1 + \mu) - 4\omega_0^3(1 + p^2)}{h_{22} g_{22}(-1 + \mu) + 2\omega_0^2(\mu h_{22} + g_{22})}, \\
 c_{2,2}^{(2)} &= \frac{1}{8} \frac{\omega_0^3 g_{22}(-2T_2 + \mu T_1^2 + 2\mu T_1 - \mu - T_2^2 + 1) - 4\mu\omega_0^3(1 + p^2) - 2p^2\omega_0 g_{22}(\mu - 1)}{h_{22} g_{22}(-1 + \mu) + 2\omega_0^2(\mu h_{22} + g_{22})}, \\
 a_{2,0}^{(2)} &= \frac{1}{8} \frac{\omega_0^2 h_{20} p g_{20}(2p^2 - 2\mu p^2 - 2T_2 - 1 - T_2^2 + 2\mu T_1 + \mu + \mu T_1^2) - 4\omega_0^2(-g_{20} + \mu h_{20} p^2)}{h_{20} p g_{20}(-1 + \mu) + 2\omega_0^2(g_{20} + \mu h_{20})}, \\
 b_{2,0}^{(2)} &= \frac{1}{8} \frac{-\omega_0^3 h_{20} p(-2p^2\mu + 2p^2 - 2T_2 + \mu - T_2^2 + \mu T_1^2 - 1 + 2\mu T_1) - 4\omega_0^3(1 + p^2) - 2p^3\omega_0 h_{20}(-1 + \mu)}{(h_{20} p g_{20}(-1 + \mu) + 2\omega_0^2(g_{20} + \mu h_{20}))p}, \\
 c_{2,0}^{(2)} &= \frac{1}{8} \frac{\omega_0^3 p g_{20}(-2p^2\mu + 2p^2 - 2T_2 + \mu - T_2^2 + \mu T_1^2 - 1 + 2\mu T_1) - 2\omega_0 p g_{20}(-1 + \mu) - 4\mu\omega_0^3(1 + p^2)}{(h_{20} p g_{20}(-1 + \mu) + 2\omega_0^2(g_{20} + \mu h_{20}))p}, \\
 a_{0,2}^{(2)} &= -\frac{1}{8} \frac{\omega_0^2(-2\mu T_1 + 2T_2 + \mu T_1^2 + 2p^2\mu - 2p^2 - T_2^2 - \mu + 1)}{\mu - 1},
 \end{aligned}$$

Tableau I.2: Coefficients du second ordre obtenu dans le cas particulier $U = 0$.

Ces solutions sont celles des coefficients obtenus par [Allalou et al. \[32\]](#).

Pour $\mu = 0$ et $T_1 = T_2 = 1$ (cas des ondes de surface en profondeurs infinies), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 a_{2,2}^{(2)} &= \frac{1}{8} \frac{4\omega_0^2 p^2 - 2}{-1 + 2\omega_0^2} \\
 b_{2,2}^{(2)} &= \frac{1}{8} \frac{2\omega_0^3 + 2\omega_0 - 4\omega_0^3(1+p^2)}{-1 + 2\omega_0^2} \\
 c_{2,2}^{(2)} &= \frac{1}{8} \frac{-2\omega_0^3 + 2p^2\omega_0}{-1 + 2\omega_0^2} \\
 a_{2,0}^{(2)} &= \frac{1}{8} \frac{\omega_0^2 p(2p^2 - 4) + 4\omega_0^2}{-p + 2\omega_0^2} \\
 b_{2,0}^{(2)} &= \frac{1}{8} \frac{-\omega_0^3 p(2p^2 - 4) - 4\omega_0^3(1+p^2) + 2p^3\omega_0}{(-p + 2\omega_0^2)p} \\
 c_{2,0}^{(2)} &= \frac{1}{8} \frac{\omega_0^3 p(2p^2 - 4) + 2\omega_0 p}{(-p + 2\omega_0^2)p} \\
 a_{0,2}^{(2)} &= \frac{1}{8} \omega_0^2 (2 - 2p^2)
 \end{aligned}$$

Tableau I.3: coefficients du second ordre pour $U = 0$, $\mu = 0$ en profondeurs infinies.

Ces expressions sont celles des coefficients obtenus par [Iouallalen \[37\]](#).

6.3.2 Ondes interfaciales progressives bidimensionnelle avec courant :

Les ondes interfaciales progressives bidimensionnelles avec un courant uniforme correspondent au cas particulier $\theta = \pi/2 (p = 1)$. Dans ce cas, $a_{2,2}^{(2)}$, le courant critique linéaire U_{cl} , le courant critique non linéaire U_{nl} et la relation de dispersion non linéaire s'écrivent, sous les formes suivantes :

$$a_2^{(2)} = -\frac{1}{8} \frac{H^2 (\omega^2 - rW^2)}{g(-1 + r_b)}, \quad (\text{I.90})$$

$$U_{cl} = \frac{\sqrt{-rkg(-1 + r_b - r + rr_b)}}{rk}, \quad (\text{I.91})$$

$$U_{nl} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{H^2 k^2 (r^2 + 1) + 4(r + 1)^2 U_{cl}}}{1 + r}, \quad (\text{I.92})$$

$$-\frac{1}{8} \frac{H ((-g + gr_b)k + \omega^2 + rW^2)}{k} + \left(-\frac{1}{64} k^2 g(-1 + r_b) - \frac{1}{64} \frac{(2\omega_0^2 + gkr_b - gk)^2}{g(-1 + r_b)} \right) H^3 = 0 \quad (\text{I.93})$$

où $W = pU - \omega_0$ et $r_b = \frac{\rho_1}{\rho_2}$,

ainsi, on retrouve les solutions obtenus par [Saffman \[16\]](#) pour la même configuration.

6.4 La résonance harmonique

Une des caractéristiques intéressantes des ondes à courte crête est l'apparition de la résonance harmonique. Ce phénomène se produit lorsque le fondamentale (1, 1) entre en interaction non linéaire avec l'harmonique (m, n) avec une même vitesse de phase. En d'autres termes cela implique la division par un nombre proche de zéro lors du calculs des coefficients $a_{mn}^{(r)}$, $b_{mn}^{(r)}$ et $c_{mn}^{(r)}$ pour certaines valeurs de l'angle θ , ou des épaisseurs des deux couches d_1 et d_2 . Provoquant une augmentation rapide des coefficients aux ordres supérieurs dans la série de perturbations.

Les formes non-résonantes présentent une régularité, signifiant que toutes les crêtes sont alignées à un même niveau, de même que tous les creux, comme illustré dans la figure (I.7).

En revanche, les ondes résonantes se caractérisent par des formes irrégulières, où les crêtes ne sont pas uniformément alignées en termes de niveau, et les creux ne partagent pas une élévation constante. L'interface correspondant à la résonance du mode (2, 4) est représentée dans la figure (I.8). L'onde se caractérise par l'apparition de deux creux secondaires suivant (Ox) et quatre creux suivant (Oy) . L'apparition des creux secondaires suivant (Ox) et (Oy) est une signature de la dominance du mode (2, 4). Nous avons généré des coupes transversales des profils à $X = 0$ et $Y = 0$ afin de mieux discerner l'inclusion de l'onde dans cette catégorie.

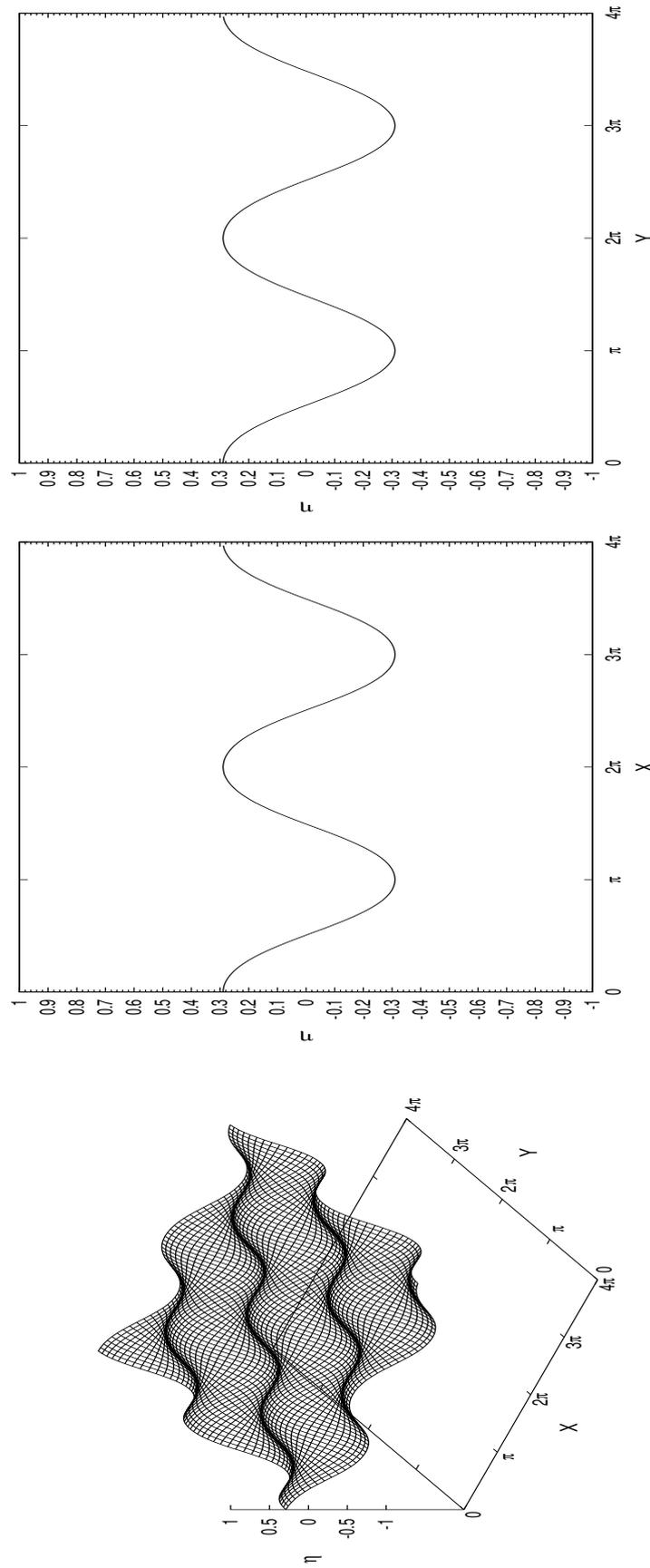


Figure I.7: Profils d'onde interne tridimensionnelle non-résonnante pour $h = 0.3, d_1 = 1, d_2 = 0.7, \mu = 0.5$ et $U = 1.45$.

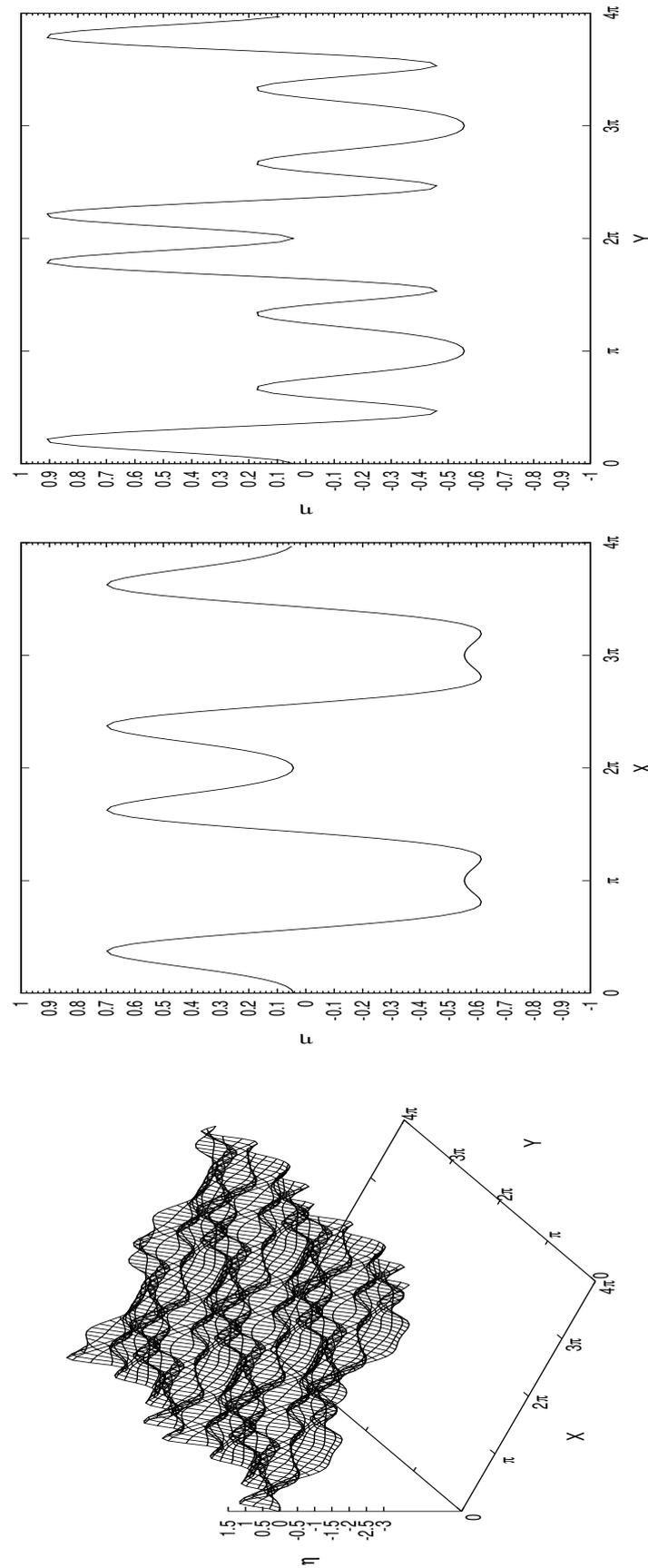


Figure I.8: Profils d'onde interne tridimensionnelle inhérente à la résonance $(2, 4)$ pour $h = 0.3$, $d_1 = 1$, $d_2 = 0.7$, $\mu = 0.1$ et $U = 1.2$.

Ces résonances se produisent dans la condition suivante :

$$m^2 \mu h_{mn} (pU - \omega_0)^2 + g_{mn} (m^2 \omega_0^2 + h_{mn} (\mu - 1)) = 0, \quad (\text{I.94})$$

où U représente le courant critique linéaire est donné par la relation suivante :

$$U = \frac{1}{p} \sqrt{\frac{(1 - \mu)(\mu T_2 + T_1)}{\mu}} \quad (\text{I.95})$$

On observe que lorsque $U = 0$, l'équation (I.94) se réduit à :

$$h_{mn} g_{mn} (\mu - 1) + m^2 \omega_0^2 (g_{mn} + \mu h_{mn}) = 0, \quad (\text{I.96})$$

Ce cas correspond aux ondes interfaciales tridimensionnelles sans courant, elle est identique à la condition de résonance de [Allalou et al. \[32\]](#).

Pour les ondes de surface tridimensionnelles sans courant c'est à dire $\mu = 0$ et $U = 0$ l'équation (I.94) se réduit à :

$$m^2 \omega_0^2 - \alpha_{mn} \tanh(\alpha_{mn} d_2) = 0, \quad (\text{I.97})$$

avec $\omega_0^2 = T_2 = \tanh(d_2)$. L'équation (I.97) est identique à la condition de résonance de [Marchant et Roberts \[23\]](#).

En profondeurs infinies $T_1 = T_2 = 1$, on a $g_{mn} = h_{mn} = \alpha_{mn}$, $\omega_0^2 = (1 - \mu)/(1 + \mu)$ et $U = 0$, l'équation (I.94) devient :

$$\cos^2 \theta_c = \frac{m^4 - m^2}{n^2 - m^2}, \quad (\text{I.98})$$

Cette condition est identique à celle retrouvé par [Roberts \[22\]](#) pour les ondes de surface tridimensionnelles en profondeurs infinies. Dans ce cas, l'angle pour lequel la résonance harmonique se produit est indépendant du rapport des densités μ .

On s'intéresse à l'étude des ondes à courte crête au voisinage de la résonance harmonique et l'effet du courant critique linéaire sur ce phénomène. Les figures (I.9) et (I.10) représentent les courbes de résonance pour l'harmonique (2, 6) et celles du courant critique linéaire U_{cl} dans le plan (μ, θ) pour certaines valeurs de d_1, d_2 . Notons que les modes (m, n) doivent être de même parité à cause de la symétrie du problème.

- La caractéristique notable lors de l'analyse des figures (I.9) et (I.10) réside dans le fait que, indépendamment des valeurs de d_1, d_2 et U_{cl} , pour $\mu = 0$, toutes les courbes de résonance intersectent l'axe θ au même point. Cela représente un exemple caractéristique d'ondes de surface tridimensionnelles, tel que décrit par l'équation (I.97).
- Lorsque $d_1 = d_2$, il est observé que l'angle de résonance demeure invariable. Cette

constance de l'angle de résonance persiste indépendamment de la valeur de μ . Cette observation caractéristique s'aligne parfaitement avec la solution formalisée par l'équation (I.98).

- Il est constaté que, pour toute valeur du courant critique, les courbes de résonance tendent vers des valeurs qui se situent exclusivement à l'intérieur de la région délimitée par le U_{cl} , sans jamais les dépasser.
- Enfin, on constate que la résonance décroît progressivement au fur et à mesure que le courant augmente, jusqu'à disparaître lorsque U_{cl} atteint une valeur maximale.

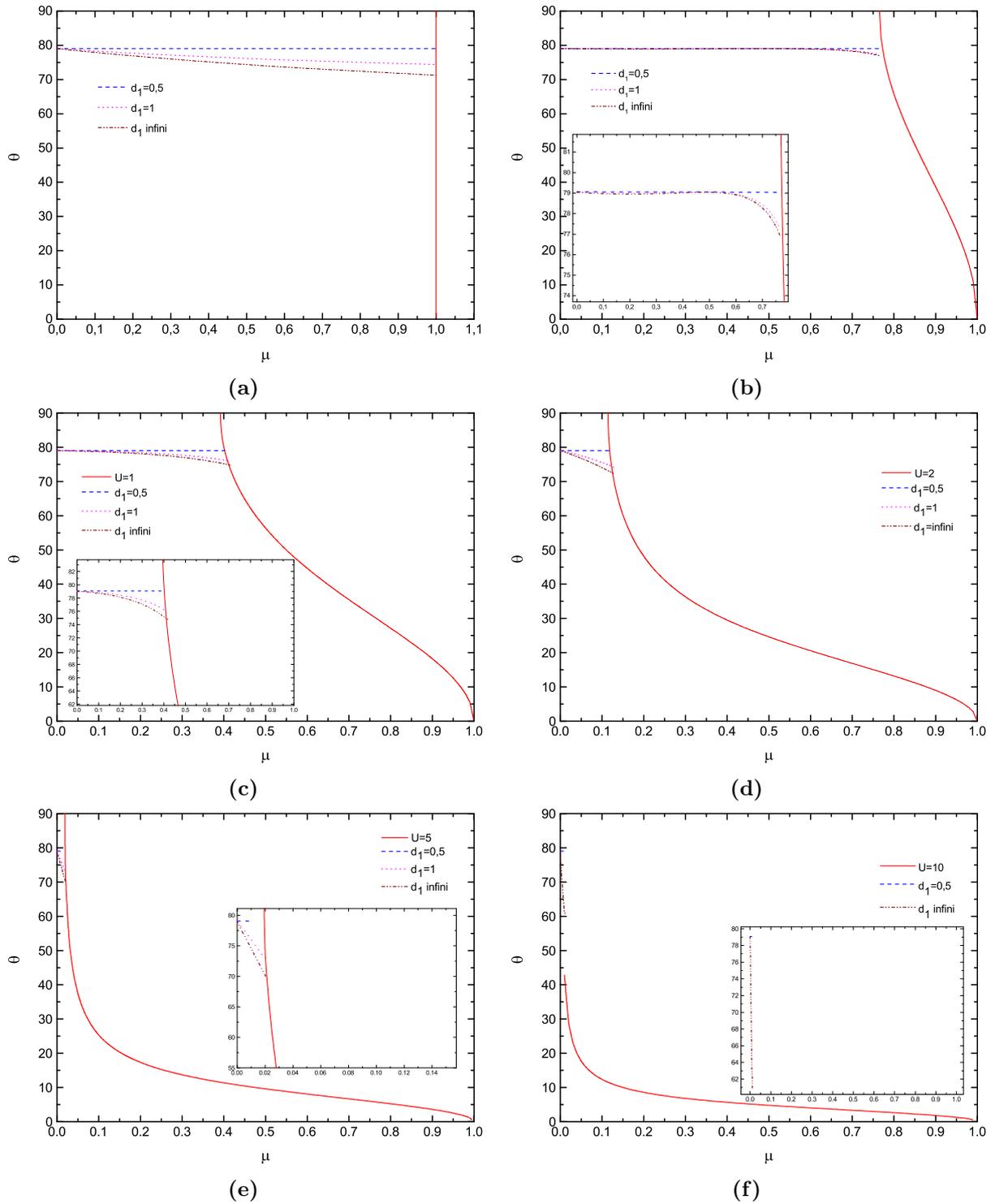


Figure I.9: Courbes de résonances du mode (2,6) et du courant critique linéaire pour $d_2 = 0.5$ et diverses valeurs de d_1 et U_{cl} : (a) $U_{cl} = 0$ (b) $U_{cl} = 0.5$ (c) $U_{cl} = 1$ (d) $U_{cl} = 2$ (e) $U_{cl} = 5$ (f) $U_{cl} = 10$.

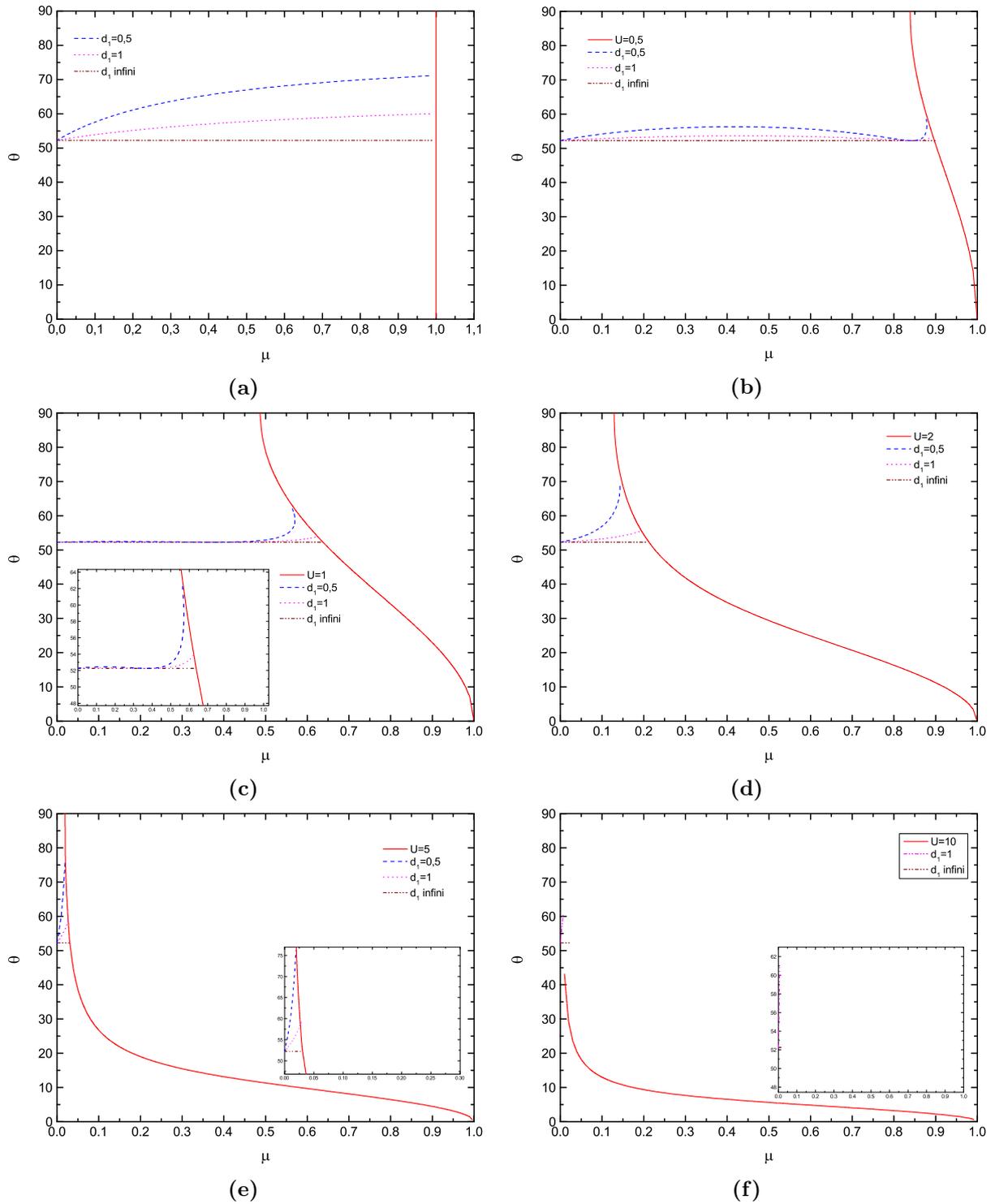


Figure I.10: Courbes de résonances du mode (2,6) et du courant critique linéaire pour d_2 infini et diverses valeurs de d_1 et U_{cl} : (a) $U_{cl} = 0$ (b) $U_{cl} = 0.5$ (c) $U_{cl} = 1$ (d) $U_{cl} = 2$ (e) $U_{cl} = 5$ (f) $U_{cl} = 10$.

Les Tableaux I.4 et I.5 illustrent les angles de résonance θ_{RH} jusqu'à l'ordre 32, pour diverses valeurs de n et m respectivement dans le cas des ondes interfaciales tridimensionnelles, en présence de d'un courant U en profondeurs finies et infinies. Pour le cas de couches infinies, la relation de résonance est indépendante de μ et U . De ce fait, le tableau I.5 correspond exactement à la Table 1 présentée par Robert [22] pour les ondes de surface. Pour des valeurs voisines des angles portés dans ces tableaux l'équation (I.94) montre que les coefficients des harmoniques correspondants ont des diviseurs nuls. La présence de ces diviseurs agit par conséquent sur tous les autres coefficients et par combinaison non-linéaire des coefficient d'ordre inférieur avec d'autres d'ordre supérieur génèrent des coefficients qui tendent vers l'infini. Par conséquent la méthode de perturbation n'est plus valable au voisinage de ces points et les solutions ont formellement un rayon de convergence nul.

6.5 Propriétés des solutions en série

La méthode asymptotique, décrite par Roberts [22], commence par la détermination analytique de solutions linéaires du premier ordre. Ces solutions sont ensuite déterminées à des ordres de plus en plus élevés, jusqu'à ce que l'expansion asymptotique soit tronquée. Par la suite, la transformation de Shanks ou l'approximation de Padé (Gilewicz [38], Bender et Orzag [39]) est utilisée pour accélérer la convergence des solutions approximatives dans la plage de cambrure $h < h^*$, et elle converge au-delà de h^* . Toutefois, il est difficile de valider ces solutions près de h^* où se trouve la singularité de résonance. Les valeurs de h^* sont proches des pôles de l'approximation de Padé correspondante.

Prenons l'expression de la fréquence $\omega(H)$, développée suivant le petit paramètre H . L'approximation de Padé d'une série tronquée de $\omega(h) = a_0 + a_1H + a_2H^2 + \dots + a_{M+N}H^{M+N}$ construit une fonction rationnelle $[M/N] = \frac{b_0 + b_1h + b_2h^2 + \dots + b_Mh^M}{c_0 + a_1h + c_2h^2 + \dots + c_Nh^N}$. L'utilisation des approximants de Padé facilite le calcul des pôles et des zéros de la fonction $\omega(H)$, en annulant respectivement le dénominateur et le numérateur. Cette méthode transforme une série entière tronquée $\omega(H)$ en une fraction de Padé $[M/N]$, offrant un moyen de prolonger analytiquement le développement en série au-delà de ses pôles, où le plus petit de ces pôles peut être considéré comme équivalent à son rayon de convergence. Par conséquent, la transformation de l'expansion en une fraction de Padé permet un raccordement continu des solutions avant et après les pôles causés par la résonance harmonique. La valeur du pôle le plus proche estime le rayon de convergence de l'expansion asymptotique, avec une certaine marge de précision due à la troncature elle-même.

Afin d'illustrer le mode d'utilisation de la méthode asymptotique complétée de l'approximation de Padé, on s'intéressera à la configuration d'ondes résonantes associées à l'harmonique (2, 6). Avec les paramètres présentés dans les tableaux I.4 et I.5, les angles de résonance liés à l'harmonique (2, 6) sont respectivement de $\theta = 73.4600^\circ$ et $\theta = 52.2388^\circ$, correspondant aux situations de profondeurs finies et infinies. On se place aux angles $\theta = 73^\circ$ et $\theta = 53^\circ$ qui sont proches des angles de résonances exactes $\theta = 73.4600^\circ$ et $\theta = 52.2388^\circ$. Tout d'abord, nous calculons des

solutions d'ordre 32 afin d'illustrer la correspondance entre les pôles de l'approximation de Padé et le rayon de convergence apparent des expansions. Les tableaux I.6 et I.7 montrent ce qui peut être vu comme une tendance vers un rayon de convergence des coefficients étudiés, si aucune autre résonance harmonique n'existait au-delà de l'ordre 32 et ce jusqu'à l'infini. L'analyse révèle plusieurs aspects clés. Premièrement, le rapport c_{11}^r/c_{11}^{r+2} , c_{26}^r/c_{26}^{r+2} correspondant au potentiel ϕ_2 converge rapidement vers une valeur approximative Rcv_{26} de l'ordre de $h^2 = 0.03647931$ en profondeurs infinies et $h^2 = 0.01059367$ en profondeurs arbitraires. Cette convergence rapide est attribuable à l'émergence d'un petit diviseur sur le coefficient $c_{r,2,6}$ au niveau de l'ordre 6, lié à la proximité de l'angle θ_c . En se propageant de proche en proche, ce coefficient contamine rapidement tous les autres coefficients de l'harmonique (2,6). Pour ce coefficient spécifique, la convergence est accrue car la division par le petit diviseur est toujours présente à tous les ordres des coefficients. Par conséquent, passé l'ordre 13, le rayon de convergence pour ce coefficient est bien déterminé. L'importance de la résonance harmonique (2,6) est confirmée par le comportement des autres variables des tableaux et . La Figure (I.11) illustre cette notion de pseudo-rayon de convergence dans le cas de configuration de profondeurs finies.

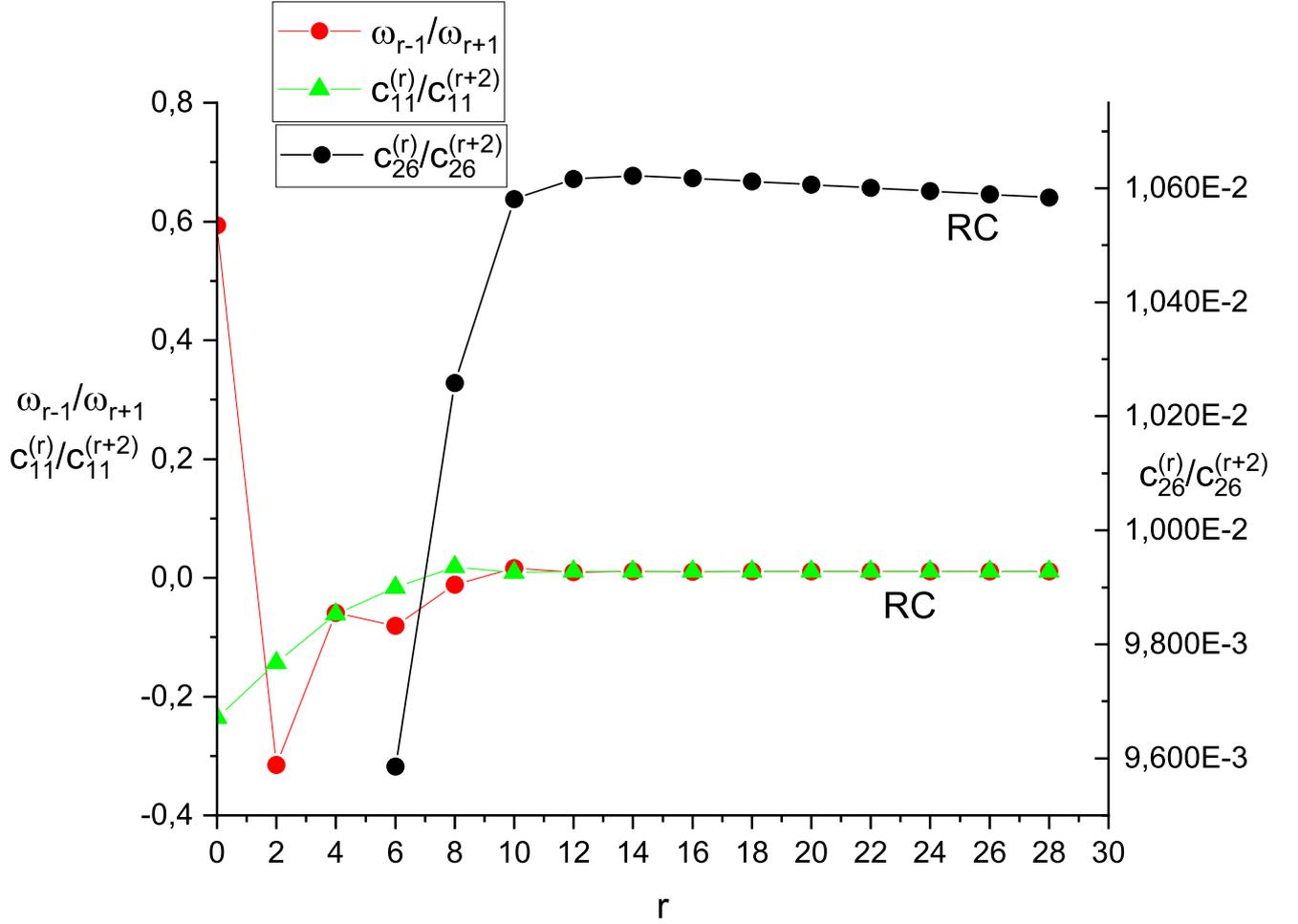


Figure I.11: Evolution des rapports c_{11}^r/c_{11}^{r+2} , c_{26}^r/c_{26}^{r+2} et ω suivant l'ordre r à l'angle de $\theta = 73^\circ$ pour les ondes interfaciales tridimensionnelles en profondeurs finies $d_1 = 1, d_2 = 0.7$ avec $\mu = 0.1$ et $U = 1.2$.

Dans la Table I.8, nous allons nous concentrer sur les pôles et les zéros positifs (car $H = h^2$ c'est le carré de la cambrure) et les réels pour leur donner une signification physique. Toutefois, on observe la présence de deux pôles complexes conjugués (En gras), dont la partie réelle est de l'ordre de grandeur de $Rcv26$ (avec une valeur de 0.0364) et qui ont une partie imaginaire non nulle, mais qui, combinés entre eux, correspondent à des pôles et zéros réels positifs ; en effet : Soient

$$\alpha_1 = a + ib$$

$$\alpha_1 = a - ib$$

les deux pôles complexes conjugués considérés. On cherche par ailleurs à résoudre : $(H - \alpha_1)(H -$

$\alpha_2) = 0$. Or après développement il vient :

$$(H - \alpha_1)(H - \alpha_2) = (H - a)^2 - b^2 = (H - (a + b))(H - (a - b))$$

Il vient :

$$H_{12} = \begin{pmatrix} a + b \\ a - b \end{pmatrix} \quad (\text{I.99})$$

Soit finalement

$$H_{12} = \begin{pmatrix} 0.0368 \\ 0.0362 \end{pmatrix} \quad (\text{I.100})$$

ou encore

$$H_{12} = \begin{pmatrix} 0.1918 \\ 0.1902 \end{pmatrix} \quad (\text{I.101})$$

Autour de la valeur prise par Rcv_{26} , on peut observer deux pôles physiques bien définis. Il semble que la correspondance soit satisfaisante. Il est également important de souligner la faible divergence entre les valeurs des zéros et celles de leurs pôles correspondants. Cela reflète les écarts entre les pôles et les zéros sont minimales, ce qui entraîne généralement leur annulation mutuelle par paires (bien que cela ne soit pas rigoureusement prouvé). Malgré cela, on peut en déduire que ces résonances harmoniques sont relativement faibles, c'est-à-dire qu'elles présentent des échelles de temps trop longues pour se manifester pleinement.

Pour finir, on identifie un autre pôle réel positif (0.5086). Ce dernier pourrait présenter une pertinence physique, car la cambrure correspondante (0.713) pourrait être associée à la cambrure maximale autorisée pour l'angle en question (Roberts [22]). En effet, près de la crête de cambrure maximale, l'onde forme une structure conique, au-delà de laquelle les solutions pourraient devenir singulières. Nous aborderons ce sujet plus en détail ultérieurement.

L'utilisation d'une méthode de prolongation analytique, telle que les approximants de Padé, rend possible l'obtention de solutions convergentes même au-delà du rayon de convergence. Les figures (I.12) et (I.13) présentent le comportement de la fréquence ω avec et sans l'usage des approximants de Padé. Grâce aux approximants de Padé, il est possible de contourner la singularité et d'obtenir des valeurs de ω calculées de manière plus précise, contrairement à la méthode asymptotique.

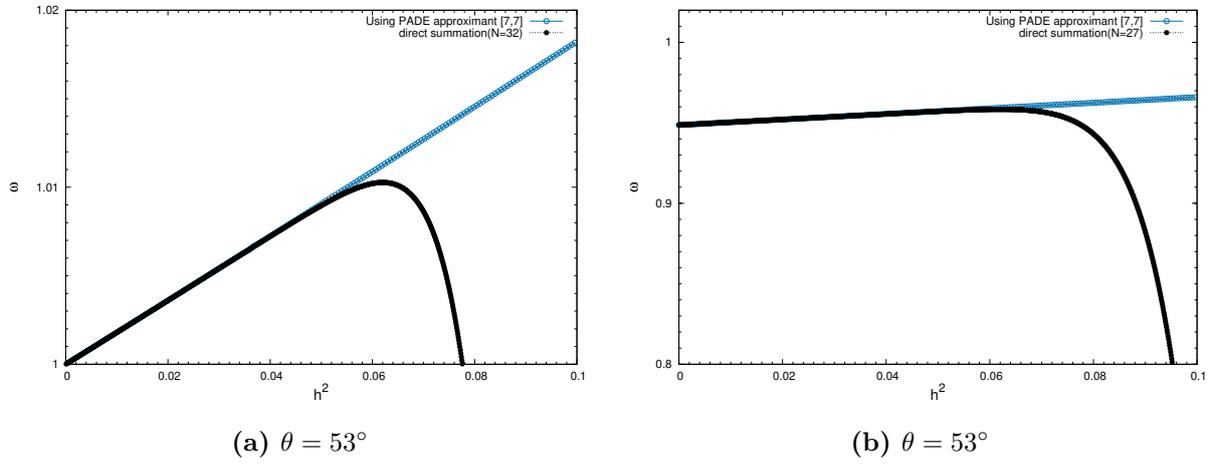


Figure I.12: Comparaison de la fréquence des ondes interfaciales tridimensionnelles en fonction du carré de la cambrure, avec et sans l'utilisation des approximations de Padé en profondeurs infinies $d_1 = d_2 = \infty$.

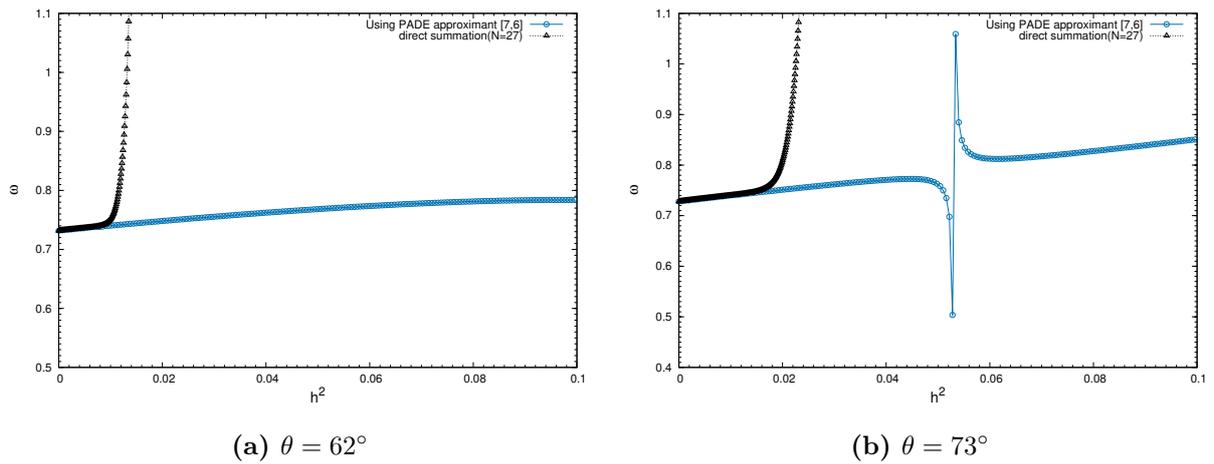


Figure I.13: Comparaison de la fréquence des ondes interfaciales tridimensionnelles en fonction du carré de la cambrure, avec et sans l'utilisation des approximations de Padé en profondeurs finies $d_1 = 1, d_2 = 0.7$.

6.6 Estimation de la cambrure maximale

Outre les informations relatives aux singularités dues à la résonance harmonique présentes dans les solutions de la méthode des perturbations, ces dernières peuvent aussi révéler des singularités associées à la hauteur de cambrure de l'onde. Ces solutions sont utiles pour estimer le seuil de cambrure au-delà duquel l'onde devient instable et se brise.

Le déferlement des vagues en surface libre joue un rôle crucial dans la transformation de l'énergie des ondes en un flux de vorticité. Parmi les nombreux problèmes complexes encore non r solv s impliquant ce mécanisme, on peut citer la suspension et le transport de sédiments, l'étude de l'impact des vagues sur les structures humaines et naturelles, et leur influence dans les interactions entre l'air et l'océan. Par ailleurs, le déferlement des ondes interfaciales favorise le mélange vertical d'eaux profondes et froides avec des eaux plus chaudes et légères dans l'océan, un processus clé dans le changement climatique.

Le déferlement peut être vu comme une manifestation de singularité dans les solutions des équations de mouvement de l'interface. En utilisant les solutions mentionnées, nous pourrions extraire des informations permettant de déterminer la valeur maximale de la cambrure. Dans notre approche, nous nous appuyerons sur les travaux de Roberts et étendrons l'étude aux ondes interfaciales tridimensionnelles, en tenant compte du courant. Nous proc derons à une analyse comparative en examinant deux cas de profondeurs : quand les deux couches sont en profondeurs infinies (figure I.14) et lorsque la couche inférieure est finie $d_1 = 0.7$ (figure I.15). Nous prendrons un cas pratique avec une densité $\mu = 10^{-3}$ et un courant uniforme $U = 20$. L'objectif principal sera d'examiner l'influence du courant U sur la limite de cambrure.

6.7 Ondes à courte crête interfaciales en profondeurs infinies

De nombreux travaux ont révélé que l'évaluation de la cambrure critique repose sur plusieurs critères. Dans le cas des ondes de surface progressives bidimensionnelles, Stokes [4] a montré que la cambrure limite comporterait un point de stagnation à sa crête dans un référentiel se déplaçant à la vitesse de l'onde, en concluant que la vague aurait une crête formant un angle de 120° . Hoyle [10], en 1979, a reconsidéré ce critère pour l'interface entre deux fluides, mettant en avant l'impossibilité d'une telle onde avec un point entraînant une vitesse infinie des particules fluides autour de la singularité, une configuration inenvisageable dans un écoulement irrotationnel. Les formes limites apparaîtraient donc lorsque la vitesse horizontale dans le fluide atteint la vitesse de phase de l'onde à un certain point. Saffman et Meiron [2], en 1983, se sont intéressés aux ondes interfaciales progressives proches du point de déferlement. Ils ont déterminé une limite géométrique et ont observé des profils en forme de champignon, illustrés dans la figure (I.17). Roberts [22], en 1983, a déterminé les cambrures maximales des ondes de surface à crête courte en eaux profondes, suggérant que la singularité limitant la hauteur de l'onde correspondrait à l'émergence de crêtes coniques. Ce phénomène entraînerait la formation d'un rayon de courbure infini au niveau du point anguleux.

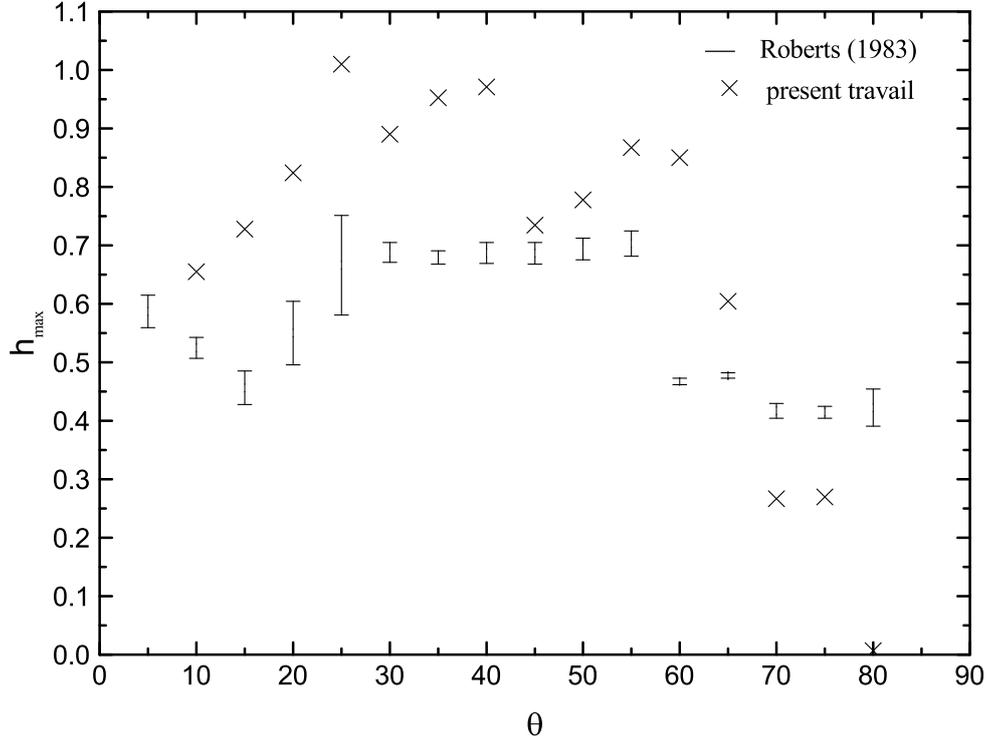


Figure I.14: Estimation de la cambrure maximale des ondes à courte crête en profondeurs infinies pour $U = 20$ en fonction de θ et avec un intervalle de 5°

Ainsi, la hauteur maximale des vagues peut être approximée en utilisant les approximations de Padé de type $[M/M]$ et $[M/M + 1]$ sous forme de fractions continues. On utilise $\eta_{XX}(0, 0)$ pour désigner l'expression proportionnelle à l'inverse du rayon de courbure de la singularité visée. Cette expression se formule comme suit :

$$\eta_{XX}(X, Y) = \sum_{r=1}^r \left(\sum_{mn}^r -m^2 a_{mn}^{(r)} \cos(mX) \sin(nY) \right) h^r, \quad (\text{I.102})$$

Par ailleurs :

$$\eta_{XX}(0, 0) = \sum_{r=1}^r \left(\sum_{mn}^r -m^2 a_{mn}^{(r)} \right) h^r, \quad (\text{I.103})$$

En posant $A_r = \left(\sum_{mn}^r -m^2 a_{mn}^{(r)} \right)$, l'expression (I.103) devient :

$$\eta_{XX}(X, Y) = \sum_{r=1}^r A_r h^r. \quad (\text{I.104})$$

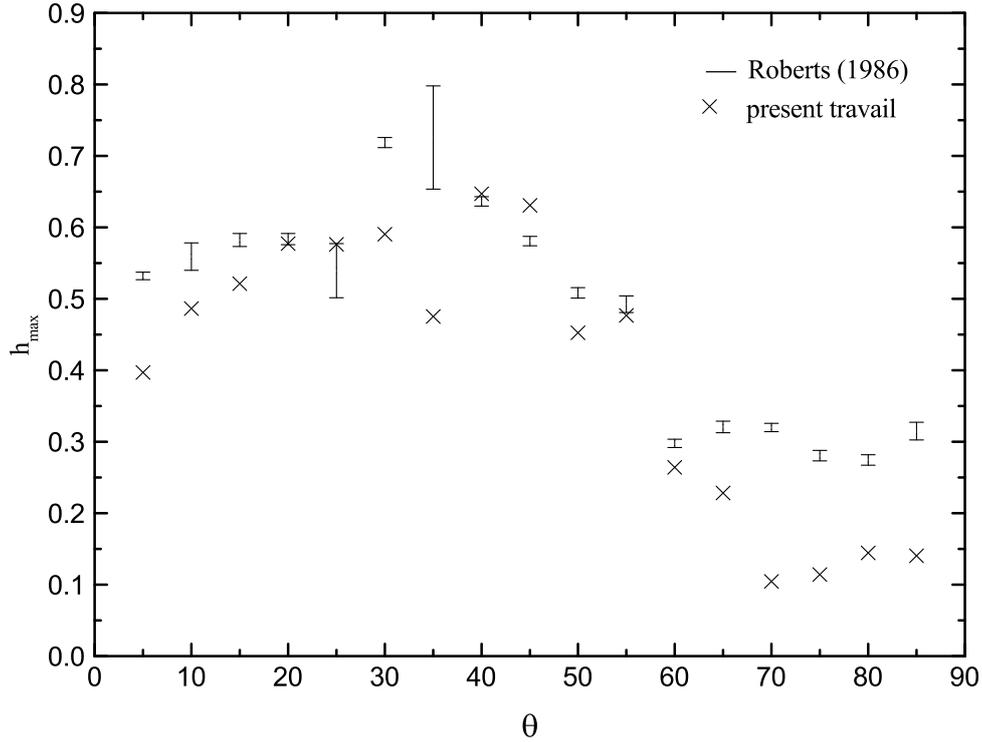


Figure I.15: Estimation de la cambrure maximale des ondes à courte crête pour $d_1 = \infty$, $d_2 = 0.7$ et $U = 20$ en fonction de θ et avec un intervalle de 5°

A cette série nous appliquerons les approximants de Padé $[M/N]$ comme suit :

$$\frac{A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \dots + A_M h^M}{B_0 + B_1 h + B_2 h^2 + \dots + B_M h^M} \quad (\text{I.105})$$

Pour estimer les cambrures maximales des ondes tridimensionnelles dans un cas pratique avec $\mu = 10^{-3}$, nous nous basons sur la localisation des pôles et des zéros des approximants de Padé [14, 15], [15, 15], [15, 16] et [16, 16]. En examinant les couples pôle-zéro, on remarque qu'ils peuvent être très proches, leur séparation étant souvent inférieure à 10^{-7} . Les paires pôle-zéro dont l'écart est moindre que 10^{-3} sont généralement attribuables aux résonances harmoniques. Parmi les pôles restants, le plus petit pôle positif constant des approximants [14, 15], [15, 15], [15, 16] et [16, 16] est pris comme une estimation de la cambrure maximale de l'onde. Okamura [24], en 2010, a calculé les cambrures limites des ondes à crête courte en eaux profondes en utilisant la méthode de Galerkin, qui se révèle efficace pour des cambrures importantes. Il a démontré que pour un angle d'incidence inférieur à 47.5° , la crête de l'onde limite forme un angle de 90° , semblable aux ondes bidimensionnelles stationnaires. Par contre, si l'angle d'incidence dépasse 47.5° , la crête de l'onde limite prend un angle de 120° , comparable aux ondes bidimensionnelles progressives. Dans une première configuration, nous estimons les cambrures limites en eaux profondes, sur un intervalle de $[0^\circ, 90^\circ]$ avec un incrément de 5° . Le courant est fixé à $U = 20$ pour un rapport de

densités de $\mu = 10^{-3}$. Les résultats sont présentés dans la figure (I.14). Sur cette figure, nous avons également inclus les résultats de Roberts [22], illustrés par des barres indiquant l'incertitude de ses calculs. L'objectif est de comparer nos résultats avec ceux de Roberts [22] en absence de courant, afin de démontrer l'impact du courant sur les cambrures maximales. L'analyse a permis d'identifier les angles correspondant aux extrêmes de l'onde. Le premier extrême, situé entre $[0^\circ - 65^\circ]$, présente un pic à $\theta = 25^\circ$, indiquant que la cambrure maximale de l'onde pour cet angle est la plus élevée parmi tous les angles d'incidence θ , caractéristique des ondes stationnaires interfaciales bidimensionnelles. La valeur minimale de l'onde se trouve entre $[70^\circ - 80^\circ]$, correspondant à un angle de $\theta = 80^\circ$, typique des ondes progressives interfaciales bidimensionnelles. Ces résultats montrent que la présence du courant amplifie la cambrure maximale pour les ondes stationnaires bidimensionnelles et tridimensionnelles ($h_{max} = 1.02$), tandis que pour les ondes progressives, en présence du courant, la cambrure diminue jusqu'à atteindre une valeur minimale ($h_{min} = 0.31$). La figure (I.14) met en évidence une baisse abrupte de la cambrure maximale entre les régions de $\theta = 60^\circ$ à $\theta = 65^\circ$ et de $\theta = 65^\circ$ à $\theta = 70^\circ$. Ces chutes dans la hauteur maximale de l'onde sont dues au fait que la solution se situe sur une branche différente des autres solutions lorsqu'on traverse les singularités associées aux résonances (2, 6) et (2, 10) respectivement.

6.8 Ondes à courte crête interfaciales en profondeurs finies

Dans la sous-section consacrée aux ondes interfaciales à courte crête en eaux peu profondes (avec une profondeur $d_2 = 0.7$), nous avons calculé les cambrures limites pour un courant constant de $U = 20$ et un rapport de densités de $\mu = 10^{-3}$. Les résultats obtenus sont illustrés dans la figure (I.15). Bontozoglou et Hanratty [1] ont élargi les recherches de Saffman et Meiron [2] aux cas de profondeur limitée, présentant des résultats pour des ondes air-eau ($\mu = 0.0013$) avec un courant horizontal dans l'une des deux couches. Ils ont analysé l'évolution de la cambrure limite en fonction du courant pour des valeurs de $U = 10$, $U = 20$, $U = 25$ et $U = 30$. La figure (I.16) montre que la forme générale des ondes est significativement modifiée par la vitesse U . À faible courant, les ondes présentent une crête pointue, similaire aux ondes de Stokes en surface libre. Cependant, avec l'augmentation de U , la crête s'aplanit et le creux devient plus marqué, un phénomène cohérent avec les observations expérimentales (Wallis et Dobson [40]). Marchant et Roberts [23] ont adopté le même critère que Roberts [22] pour déterminer la cambrure limite des ondes à courte crête en eaux peu profondes, à savoir les approximants de Padé. Leurs résultats sont également présentés dans la figure (I.15), où nous avons inclus nos propres résultats pour une étude comparative.

À première vue, les cambrures limites des ondes pleinement tridimensionnelles semblent généralement supérieures à celles des ondes bidimensionnelles, avec un pic de cambrure limite atteignant une valeur de 0.64 pour $\theta = 40^\circ$ et $d_2 = 0.7$. Comme dans le premier cas, on observe un écart notable dans la cambrure maximale entre $\theta = 55^\circ$ et $\theta = 60^\circ$, probablement dû à la résonance (2, 4). De même, la chute de la cambrure maximale jusqu'à sa valeur minimale, observée de

$\theta = 65^\circ$ à $\theta = 70^\circ$, est associée à la résonance (2, 6).

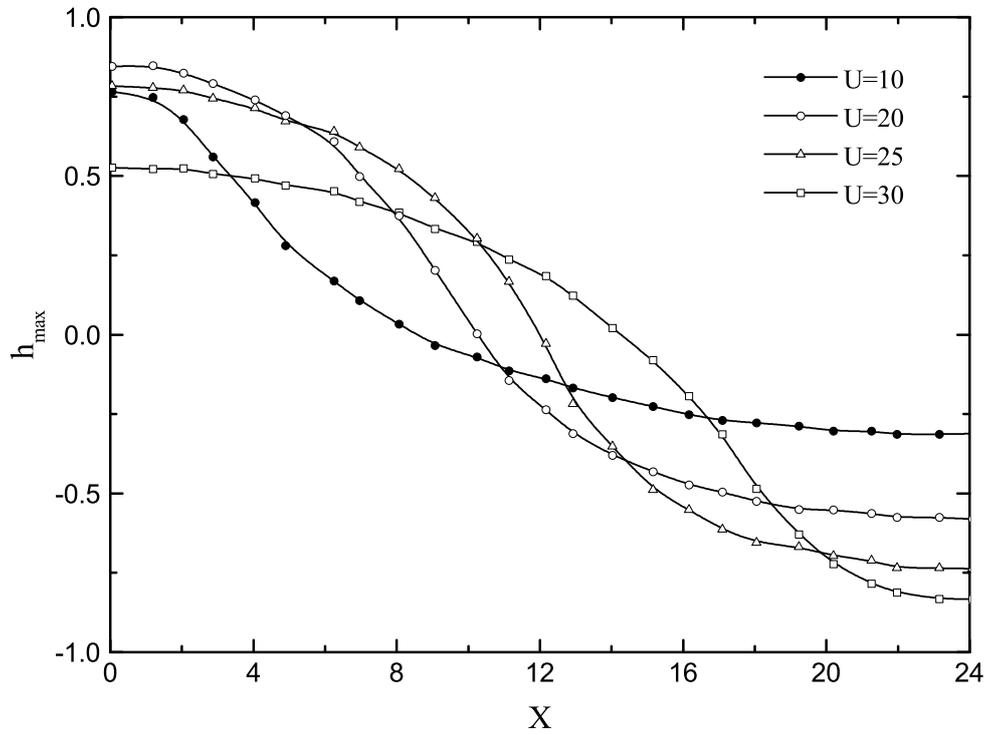


Figure I.16: Profils de l'interface air-eau pour différentes valeurs du courant obtenu par [Bontozoglou et Hanratty \[1\]](#).

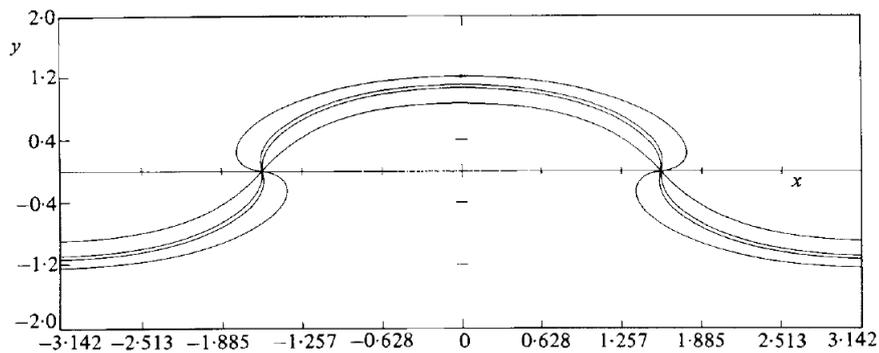


Figure I.17: Profils d'ondes interfaciales progressives dans le cas de l'approximation de Boussinesq $\mu = 1$ ([Saffman et al \[2\]](#)).

6.9 Evolution de la fréquence :

Pour calculer la fréquence ω , une série de 16 termes en h^2 a été générée à partir des solutions d'ordre 32 obtenues via la méthode des perturbations. Nous avons sélectionné quatre approximants de Padé pour cette analyse : [6, 7], [7, 7], [7, 8] et [8, 8]. Pour chaque cambrure, la moyenne des valeurs fournies par ces approximants a été calculée, excluant la valeur la plus éloignée de cette moyenne. La moyenne des trois valeurs restantes est alors retenue. Cette méthode vise à minimiser les effets des éventuelles singularités qui pourraient apparaître dans un approximant spécifique, et à garantir des solutions convergentes indépendantes d'un approximant de Padé particulier. L'erreur est estimée en calculant la somme des écarts absolus des trois résultats par rapport à leur moyenne. Si cette estimation d'erreur dépasse 5×10^{-5} , le calcul est interrompu. Les figures (I.18-I.19) présentent l'évolution de la fréquence ω pour différents angles θ dans la plage de $[0^\circ - 90^\circ]$, par intervalles de 10° , et pour diverses valeurs de μ et U , pour deux configurations. D'une part, lorsque les deux couches sont en profondeurs infinies (figure(I.18)), et d'autre part, en profondeurs finies ($d_1 = 1, d_2 = 0.7$) (figure(I.19)).

Dans le cas des ondes à courte crête en surface ($\mu = 0$) et en eaux profondes (figure(I.18a)), les cambrures proches de la limite de convergence, généralement inférieures à celles des cambrures de déferlement, se situent entre 90% et 100% des valeurs maximales illustrées dans les figures (I.14 et I.15). En eaux peu profondes (figure(I.19)), elles varient entre 80% et 100% des limites de cambrure, sauf pour $\theta = 30^\circ$ et $\theta = 40^\circ$, où le calcul est interrompu plus tôt. Les figures ((I.18)-I.19) montrent que la fréquence est monotone par rapport à la cambrure jusqu'à la limite de convergence. Pour $\mu = 0$ et $\mu = 0.1$, un changement de monotonie est observé à un angle critique θ_c situé entre 20° et 30° . Cet angle critique correspond à ω_2 , indiquant que la relation de dispersion est presque indépendante de la cambrure. Pour préciser la valeur de θ_c , nous avons tracé le signe de ω_2 dans le plan (μ, θ) , comme illustré sur la figure (figure(I.20)). Cette même figure représente également la limite dynamique, soit la limite d'existence des solutions permanentes. Pour $U = 1$ et $\mu = 0$, un angle critique $\theta_c = 22.1^\circ$ est identifié pour lequel $\omega_2 = 0$. Cela marque une modification dans le type de variation de la fonction $\omega = f(h^2)$. Ainsi, la fréquence ω augmente ou diminue en fonction du signe de ω_2 . En eaux peu profondes (figure(I.19)), pour $\mu = 0$ et $\mu = 0.1$, la fréquence est une fonction croissante de θ pour toutes les valeurs de θ .

6.10 Les profils de l'interface

Nous allons désormais étudier l'effet du courant sur la forme des ondes interfaciales pleinement tridimensionnelles (à un angle $\theta = 45^\circ$). Nous examinons le cas des profondeurs infinies sous l'approximation de Boussinesq ($\rho_1 \approx \rho_2$), où les masses volumiques des fluides inférieur et supérieur sont proches. Quatre valeurs de courant sont considérées, $U(0, 0.05, 0.1, 0.15)$, sans excéder le courant critique $U_{cl} = 0.2$, avec une cambrure modérée $h = 0.5$. Les figures ((I.21a)-(I.21d)) illustrent graphiquement l'influence du courant sur la forme des ondes à courte crête interfaciales. On constate que la forme de l'onde est significativement affectée par U . Pour des valeurs faibles

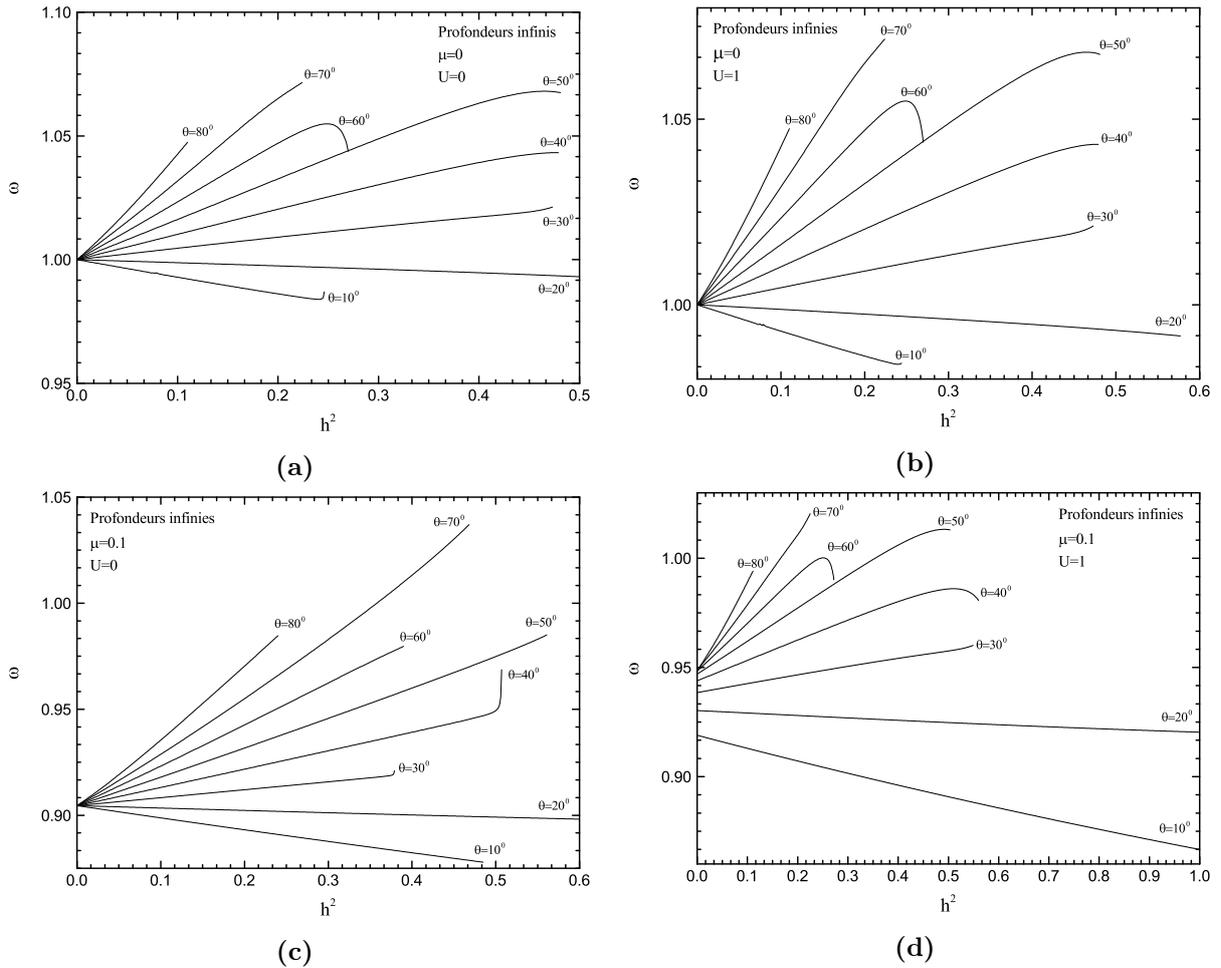


Figure I.18: Evolution de la fréquence ω en fonction du paramètre h^2 pour diverses valeurs de μ , θ et U en profondeurs infinies : (a) $\mu = 0, U = 0$, (b) $\mu = 0, U = 1$, (c) $\mu = 0.1, U = 0$ (d) $\mu = 0.1, U = 1$.

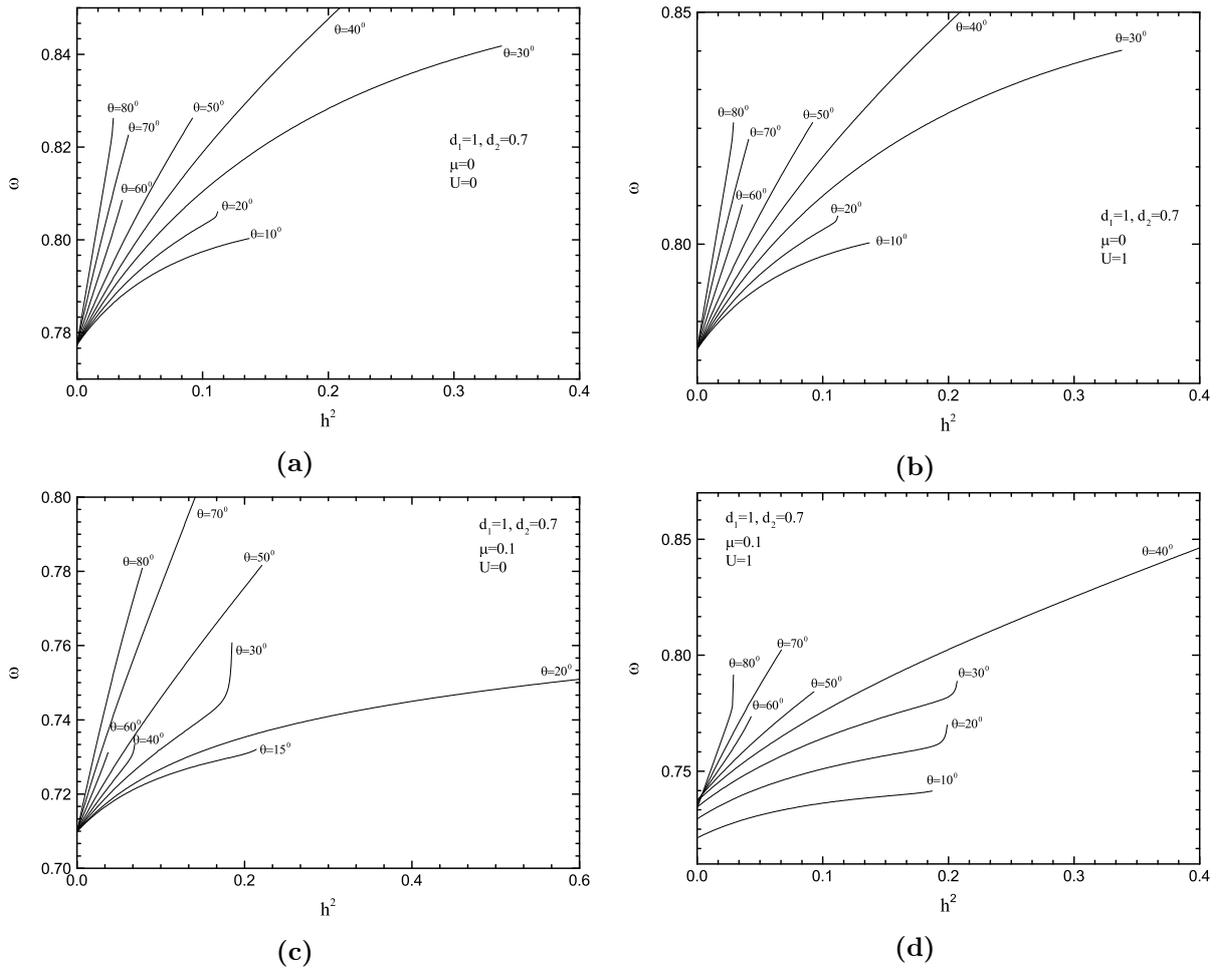


Figure I.19: Evolution de la fréquence ω en fonction du paramètre h^2 pour diverses valeurs de μ , θ et U en profondeurs finies avec $d_1 = 1, d_2 = 0.7$: (a) $\mu = 0, U = 0$, (b) $\mu = 0, U = 1$, (c) $\mu = 0.1, U = 0$ (d) $\mu = 0.1, U = 1$.

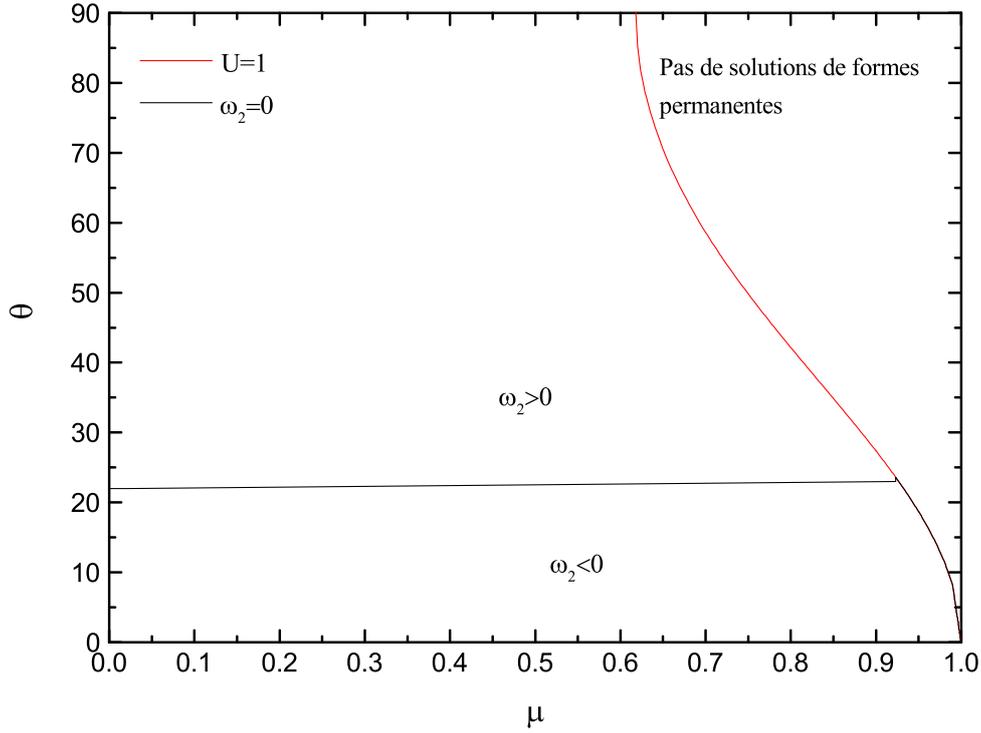


Figure I.20: Le signe de ω_2 dans le plan (θ, μ) , en $U = 1$, en profondeurs infinies.

de U ($U = 0$), figure (I.21a)), le profil est typique d'une onde avec une crête arrondie et un creux pointu, en accord avec les résultats de l'article d'Allalou en absence de courant. Cependant, à mesure que le courant augmente, la crête et le creux deviennent de plus en plus pointus, comme le montre $U = 0.15$ (figure (I.21d)).

Les figures ((I.22a)-(I.22d)) présentent les profils d'interface des ondes tridimensionnelles et leurs coupes transversales dans les plans $X = 0$ et $Y = 0$. Nous étudions l'effet de deux paramètres sur ces profils : le courant et l'épaisseur des couches. Les figures ((I.22a)-(I.22b)) montrent les profils typiques pour une couche supérieure infinie et une couche inférieure de profondeur finie. Les figures((I.22c)-(I.22d)) illustrent les cas où les deux couches sont finies. Pour $U = 1$, l'interface présente des crêtes plus pointues que les creux (figure (I.22a)), cette asymétrie étant moins marquée lorsque les épaisseurs des deux couches sont similaires (figure (I.22c)). Il en résulte que le profil de l'onde est plus pointu du côté de la couche la plus épaisse. Sur ces figures, on peut également observer que les crêtes tendent à s'aplatir avec l'augmentation du courant (figures (I.22b)-(I.22d)). Ces résultats concordent avec ceux de Saffman et Yuen pour les ondes interfaciales bidimensionnelles en eaux profondes.

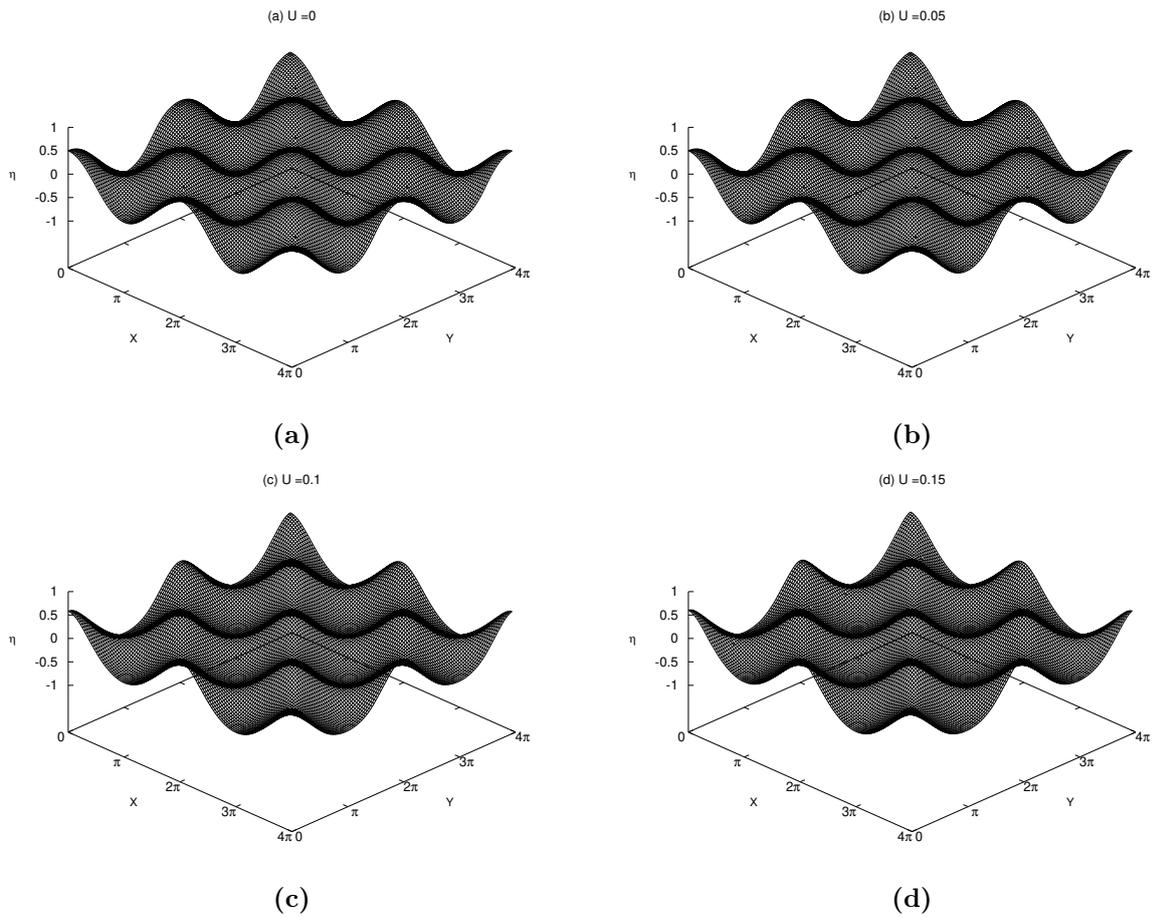


Figure I.21: Profils d'interfaces des ondes tridimensionnels pour $\theta = 45^\circ$, $h = 0.5$, $d_1 = d_2 = \infty$, $\mu = 0.99$ et divers valeurs de U : (a) $U = 0$ (b) $U = 0.05$ (c) $U = 0.1$ (d) $U = 0.15$.

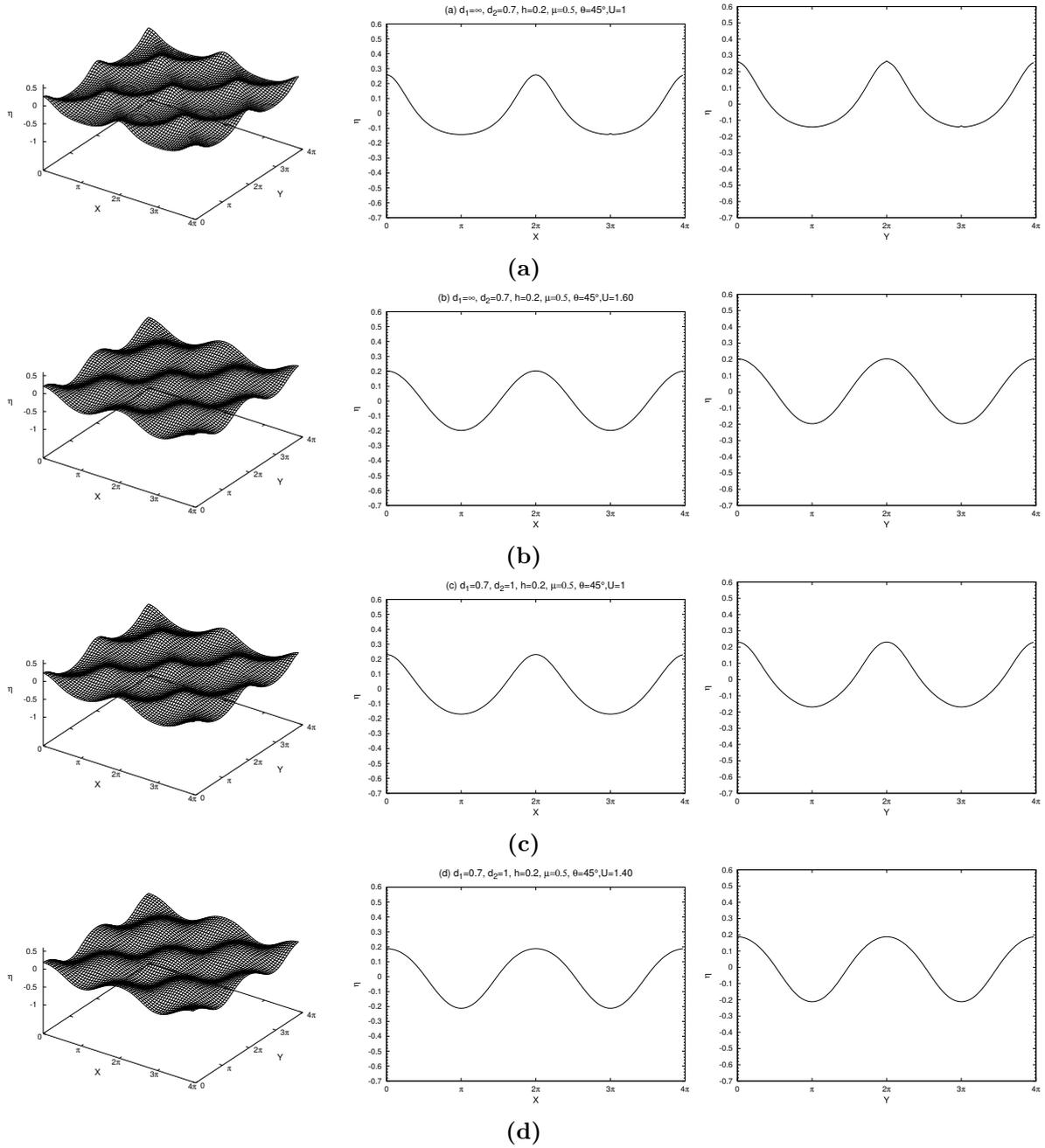


Figure I.22: Profils d'interfaces des ondes tridimensionnels et leurs vues en coupe transversale dans les plans $X = 0$ et $Y = 0$ pour $\theta = 45^\circ, h = 0.2$ et $\mu = 0.5$ et divers valeurs de d_1, d_2 et U : (a) $d_1 = \infty, d_2 = 0.7, U = 1$ (b) $d_1 = \infty, d_2 = 0.7, U = 1.60$ (c) $d_1 = 0.7, d_2 = 1, U = 1$ (d) $d_1 = 0.7, d_2 = 1, U = 1.36$.

Tableau I.4: Angles de résonances jusqu'à l'ordre 32 pour les ondes interfaciales tridimensionnelles en profondeurs finies ($d_1 = 1, d_2 = 0.7$) pour $\mu = 0.1$ et $U = 1.2$.

n	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
3	90°				
4		62.4281°			
5	90°				
6		73.4600°			
7	90°		44.0471°		
8		77.9838°			
9	90°		57.4728°		
10		80.5210°		14.3764°	
11	90°		64.3941°		
12		82.1594°		38.9072°	
13	90°		68.7690°		
14		83.3092°		48.9245°	
15	90°		71.8219°		
16		84,1623°		55.2543°	
17	90°		74.0865°		28.5375°
18		84.8210°		59.7504°	
19	90°		75.8386°		38.9366°
20		85.3454°		63.1513°	
21	90°		77.2371°		45,6142°
22		85.7728°		65.8309°	
23	90°		78.3807°		50.4999°
24		86.1281°		68.0048°	
25	90°		79.3339°		54.3024°
26		86.4281°		69.8082°	
27	90°		80.1410°		57.3758°
28		86,6848°		71.3307°	
29	90°		80.8336°		59.9260°
30		86.9070°		72.6347°	
31	90°		81.4345°		62.0838°
32		87.1013°		73.7649°	

Tableau I.5: Angles de résonances jusqu'à l'ordre 32 pour les ondes interfaciales tridimensionnelles en profondeurs infinies ($d_1 = \infty, d_2 = \infty$) pour $\mu = 0.1$ et $U = 1.2$.

n	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
3	90°				
4		00.0000°			
5	90°				
6		52.2388°			
7	90°				
8		63.4349°			
9	90°		00.0000°		
10		69.2952°			
11	90°		36.6992°		
12		72.9761°			
13	90°		47.8696°		
14		75.5225°			
15	90°		54.7356		
16		77.3956°		00.0000°	
17	90°		59.5296		
18		78.8342°		28.0260°	
19	90°		63.1108°		
20		79.9750°		37.7612°	
21	90°		65.9052°		
22		80.9026°		44.2654°	
23	90°		68.1546°		
24		81.6719°		49.1066°	
25	90°		70.0084°		00.0000°
26		82.3206°		52.9133°	
27	90°		71.5651°		22.6046°
28		82.8749		56.0121°	
29	90°		72.8919°		30.9637°
30		83.3544°		58.5972°	
31	90°		74.0374°		36.8086°
32		83.7731°		60.7940°	

Tableau I.6: Rapport entre deux coefficients successifs des variables c_{11}^r/c_{11}^{r+2} , c_{26}^r/c_{26}^{r+2} et ω à l'angle de $\theta = 53^\circ$ pour les ondes interfaciales tridimensionnelles en profondeurs infinies ($d_1 = \infty, d_2 = \infty$) avec $\mu = 0.1$ et $U = 1.2$.

Ordre r	$c_{r,1,1}/c_{r+2,1,1}$	$c_{r,2,6}/c_{r+2,2,6}$	$\omega_{r-1}/\omega_{r+1}$
1	-21.75938991		5.55733910
2			
3	0.13162354		7.05353477
4			
5	0.36263334		-1.29442755
6		0.03271199	
7	0.05412771		0.07096900
8		0.03636866	
9	0.03714766		0.04316636
10		0.03644813	
11	0.03649007		0.03689736
12		0.03646029	
13	0.03645305		0.03652674
14		0.03646327	
15	0.03645270		0.03650022
16		0.03646560	
17	0.03645481		0.03650045
18		0.03646788	
19	0.03645707		0.03650264
20		0.03647016	
21	0.03645934		0.03650496
22		0.03647244	
23	0.03646162		0.03650730
24		0.03647473	
25	0.03650965		0.03646390
26		0.03647702	
27	0.03646618		0.03651200
28		0.03647931	
29	.03646847		0.03651435

Tableau I.7: Rapport entre deux coefficients successifs des variables c_{11}^r/c_{11}^{r+2} , c_{26}^r/c_{26}^{r+2} et ω à l'angle de $\theta = 73^\circ$ pour les ondes interfaciales tridimensionnelles en profondeurs finies $d_1 = 1$, $d_2 = 0.7$ avec $\mu = 0.1$ et $U = 1.2$.

Ordre r	$c_{r,1,1}/c_{r+2,1,1}$	$c_{r,2,6}/c_{r+2,2,6}$	$\omega_{r-1}/\omega_{r+1}$
1	-0.23550059		0.59351129
2			
3	-0.14304863		-0.31516947
4			
5	-0.06121026		-0.05916199
6		0.00958547	
7	-0.01616548		-0.08070124
8		0.01025832	
9	0.01818000		-0.01144107
10		0.01058069	
11	0.00904254		0.01612469
12		0.01061640	
13	0.01098033		0.00928249
14		0.01062227	
15	0.01054681		0.01085527
16		0.01061795	
17	0.01064888		0.01051412
18		0.010612378	
19	0.01061749		0.01059641
20		0.01060653	
21	0.01061820		0.01057046
22		0.01060070	
23	0.01061065		.01057030
24		0.01059491	
25	0.01060525		0.01056348
26		0.01058919	
27	0.01059936		0.01055844
28		0.01058353	
29	0.01059367		0.01055301

Tableau I.8: Pôles et zéros de l'approximant de Padé [6/6] de la fréquence pour l'angle $\theta = 53^\circ$, $\mu = 0.1$ et $U = 1.2$ en profondeurs infinies.

Zéros		Pôles	
<i>Partie réelle</i>	<i>Partie imaginaire</i>	<i>Partie réelle</i>	<i>Partie imaginaire</i>
-0.63747538E+02	0.00000000E+00	55861692E+01	0.00000000E+00
-0.83137660E+00	0.81858813E+00	-0.82827250E+00	0.81198056E+00
-0.83137660E+00	-0.81858813E+00	-0.82827250E+00	-0.81198056E+00
0.50740262E+00	0.00000000E+00	0.50866788E+00	0.00000000E+00
-0.11421172E+00	0.00000000E+00	-0.11421172E+00	0.00000000E+00
0.36466863E-01	0.28946655E-03	0.36466871E-01	0.28946629E-03
0.36466863E-01	-0.28946655E-03	0.36466871E-01	-0.28946629E-03

Chapitre II

Stabilité superharmonique des ondes interfaciales tridimensionnelles en présence d'un courant uniforme

1 Revue de littérature

Dans ce chapitre nous traiterons la stabilité linéaire superharmonique des ondes à courte crête interfaciales soumises à des perturbations infinitésimales en présence d'un courant parallèle. Il s'agit d'étendre les travaux d'Allalou [3] en incluant le courant afin de mieux comprendre l'effet de ce dernier sur la stabilité linéaire des ondes à courte crête interfaciales en incluant le courant. Les principaux résultats sur la stabilité linéaire des ondes interfaciales bidimensionnelles ont été confirmés par des simulations numériques, en particulier celles réalisées par Tanaka [41] en utilisant l'équation cubique de Schrödinger, il a expliqué comment un train d'ondes faiblement non linéaire évolue dans le temps. Il a appliqué cette équation pour examiner la stabilité des ondes interfaciales à différentes profondeurs et a découvert que la présence d'une couche supérieure réduit l'étendue de la zone instable dans l'espace des paramètres du problème. Yuen [42] étendit la stabilité des ondes de surfaces entreprise par McLean et al. [43] aux ondes interfaciales en présence d'un courant parallèle à la direction de la propagation. En utilisant la même technique élaboré par McLean et al. [43], comme pour les ondes de surface tridimensionnelles il distingua deux types d'instabilités suivant deux classes de résonances. Pour les faibles cambrures les instabilités dominantes sont de classe *I*. L'autre, désignée comme instabilité de classe *II*, est principalement tridimensionnelle et devient dominante lorsque la cambrure de l'onde est suffisamment grande. L'instabilité de classe *I* dans le cas particulier d'une perturbation avec une cambrure faible peut être étudiée analytiquement à partir de l'équation d'évolution non linéaire, elle se compose de l'équation de Schrödinger non linéaire couplée avec l'équation du potentiel moyen de vitesse. Une étude similaire de la stabilité linéaire des ondes interfaciales a été entre-

prise par [Grimshaw et Pullin \[44\]](#) dans une première partie de leur article. Les résultats sont présentés pour deux cas de profondeurs de deux fluides superposés. Leurs conclusions indiquent que la zone d'instabilité dépend de deux paramètres, du rapport des densités ρ_1/ρ_2 , de kd_1 et de kd_2 où k est le nombre d'onde de l'onde de base. Lorsque $kd_1 = kd_2 = \infty$, les nombres d'onde dominants sont bidimensionnels, tandis que les instabilités dominantes sont tridimensionnelles à des profondeurs arbitraires. Une analyse numérique de la stabilité correspondante dans le cas particulier de l'approximation de Boussinesq $\rho_1 = \rho_2$ et d'une épaisseur infinie de la couche du fluide inférieur $kd_2 = \infty$ a été effectuée dans la deuxième partie des travaux de [Grimshaw et Pullin \[45\]](#). Comme nouveaux résultats, ils montrèrent que pour les cambrures faibles à modérées, les instabilités dominantes sont de classe $I m = 1$. En revanche, pour les cambrures élevées, l'instabilité la plus importante est de type Kelvin-Helmholtz. [Pulin et Grimshaw \[14\]](#) établirent une extension des deux articles ci-dessus pour les ondes de gravité interfaciales se propageant sur un cisaillement de courant de base, dans laquelle des résultats analytiques et numériques sont présentés. Il montrèrent :

1. Pour $ka < 0.1$, les résultats obtenus en démarrant de l'ordre le plus faible de l'équation de Schrödinger non linéaire, comme [Longuet-Higgins \[46\]](#), les ondes de Stokes soumises à des perturbations superharmoniques étaient stables jusqu'à une cambrure limite. Ici, k est le nombre d'ondes et a est l'amplitude de l'onde.

2. Pour $ka > 0.15$ la prédiction de l'équation de Schrödinger non linéaire n'est pas en accord avec les résultats obtenus par [Longuet-Higgins \[46\]](#), mais il a été montré qu'une amélioration de ces résultats relatifs à la stabilité d'une onde d'amplitude finie peut être obtenue en étendant l'analyse des perturbations en ajoutant le terme d'ordre $\mathcal{O}(h^4)$ dans l'équation de Schrödinger non linéaire. [Dixon \[47\]](#) dans un article consacré à l'étude de la stabilité des ondes interfaciales en profondeurs arbitraires, a obtenu deux types d'instabilités en utilisant l'équation de Zakharov. Le premier type est causé par l'interaction de quatre ondes (type quartet), semblables à celles que l'on trouve dans les ondes de surface. Le deuxième type correspond à l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, qui se produit avec un nombre d'ondes élevé et des cambrures modérées. Cette instabilité ne se produit que lorsque le paramètre de Boussinesq $\alpha = (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)$ est faible. [Zhou et al \[48\]](#) ont dérivé l'équation de Zakharov du quatrième ordre pour les ondes interfaciales en profondeurs finies pour inclure les interactions quintet. Cette nouvelle équation a permis d'étudier l'instabilité de classe I et de classe II ainsi que la bifurcation d'une onde interfaciale de Stokes bidimensionnelle en une onde stable tridimensionnelle.

[Christodoulides et Dias \[49\]](#) ont considéré le cas des ondes capillarité-gravité bidimensionnelles périodiques dans le temps et dans l'espace à l'interface de deux fluides de densités différentes. Sur la base d'une formulation variationnelle (hamiltonienne), la relation entre la fréquence et l'amplitude des différents modes est obtenue par une analyse faiblement non linéaire du problème. Trois types d'ondes périodiques sont étudiées : ondes progressives et stationnaires, ainsi que les ondes mixtes. La stabilité des ondes progressives et stationnaires vis-à-vis des modulations tridimensionnelles est ensuite étudiée. En utilisant la méthode des échelles multiples, une analyse de

stabilité des ondes interfaciales de gravité capillarité bidimensionnelles par rapport à de petites modulations tridimensionnelles détaillée est effectué. Les principaux résultats pour les modulations obliques révèlent un effet stabilisant du rapport de densité pour les ondes progressives et un effet déstabilisant pour les ondes stationnaires.

Ioualalen et Kharif [50] ont été les premiers à entreprendre numériquement des travaux sur la stabilité des ondes à courtes crêtes de surfaces et de gravité. Ils ont conduit à des nouveaux résultats fondamentaux sur le problème d'instabilités associés aux résonances harmoniques. L'équation aux valeurs propres dérivée de l'analyse de stabilité des ondes tridimensionnelles est résolue numériquement à l'aide de deux méthodes ; la méthode de collocation et celle de Galerkin. Les deux méthodes sont comparées et il est montré que la méthode de Galerkin est plus efficace pour traiter les modèles d'ondes tridimensionnels. Une classification des instabilités est réalisée, les instabilités sous-harmoniques et subharmoniques sont comparées et les taux de croissance et les fréquences maximales sont calculés. Ioualalen et Kharif [50] démontrèrent que les résonances harmoniques des ondes à courte crête détectées en utilisant les approximants de Padé correspondent à des instabilités superharmoniques de classe *I*. Les bulles d'instabilités obtenues sont sporadiques avec un taux d'amplification maximal faible, toujours inférieur à h^{2j} avec $j \geq 2$ et c'est pour cela que ces auteurs ont qualifié ces ondes de "quasi-observable". C'est par la suite que des calculs détaillés concernant les instabilités sous-harmoniques pour des cambrures inférieures à 0.3 ont été présentés par Ioualalen et Kharif [51]. Ils ont constaté que dans la direction de la propagation de l'onde de base ou dans une direction oblique c'est les instabilités sous-harmoniques qui dominent et appartiennent à la classe *I*. Aux fortes cambrures, c'est les instabilités de la classe qui peuvent devenir dominantes. Badulin et al. [52] Kimmoun et al. [25] ont étudié le problème des ondes à courtes crêtes de gravité, avec deux approches différentes. La première est une approche analytique qui consiste à résoudre les équations de Zakharov. La seconde est une extension de celle développée par Ioualalen et Kharif [51] aux cambrures élevées. Ils ont montré que les instabilités de classe *II* deviennent dominantes pour les ondes entièrement tridimensionnelles et pour les ondes proches des vagues progressives. Ioualalen et al. [53] ont élargi leur étude de la stabilité des ondes à courte crête pour y inclure celles aux cas de profondeur finie. Ioualalen et al. [54] ont constaté que pour des profondeurs en dessous de 0.5, les instabilités superharmoniques s'étendent à l'ensemble du régime d'écoulement tridimensionnel, les taux de croissance maximaux se produisant pour les ondes "proches" des ondes stationnaires. A mesure que la profondeur diminue, les instabilités modulationnelles sous-harmoniques deviendront plus faibles que celles en profondeurs infinies. Ioualalen et al. [53] ont mené une étude sur l'instabilité des ondes à courte crête en profondeurs finies et l'ont limitée aux valeurs de cambrure inférieures à 0,23 en raison des interactions entre les zones instables. Ils ont examiné trois cas spécifiques selon la profondeur. Ils ont constaté que pour les ondes stationnaires $\theta = 10^\circ$, pour une profondeur adimensionnelles $d > 1$ ce sont les instabilités de classe *I* qui dominent, et appartiennent à la classe *II* pour des profondeurs $d < 1$. Pour les ondes entièrement tridimensionnelles $\theta = 45^\circ$, la classe *I* est prédominante sur toutes les profondeurs. Enfin, pour les ondes progressives, $\theta = 80^\circ$, les instabilités sont classées suivant une

cambrure critique h_c dépendante de la profondeur d . Lorsque $h < h_c$, la classe I domine. Pour des valeurs de cambrure supérieures à h_c , les instabilités de classe II deviennent dominantes et sont bloquées avec l'onde de base.

chikhi et debianne [55] en partant du principe que l'onde considéré est une onde a courte crête générées par la réflexion oblique d'un train d'ondes bidimensionnel sur un mur vertical. Ils ont pris en compte l'effet du rapport de densité μ et du nombre de Bond δ sur la stabilité des ondes de gravité-capillarité tridimensionnelles. Pour une cambrure égale à 0.25, ils ont observé que l'étendue des régions instables et le taux de croissance maximal sont inversement proportionnels à μ et à δ , en effet, lorsque ces derniers augmentent, le taux d'amplification maximal diminue ainsi que les régions instables. Ils ont également constaté que l'instabilité dominante appartient à la classe Ib , comparable au cas des ondes de gravité de surface en profondeurs infinies.

Un examen attentif des travaux précédents nous a conduit a effectuer des calculs supplémentaires pour étendre les résultats sur la stabilité superharmonique des ondes interfaciales tridimensionnelles en incluant le courant.

2 Position du problème

On part du système d'équations ((I.22)-(I.27)) qui prend en compte le courant. Nous considérons le problème de la stabilité des ondes de gravité se propageant à l'interface de deux fluides homogènes, de profondeurs infinies, non-visqueux et incompressibles avec un courant uniforme sur la couche supérieure. On choisit de travailler dans un repère mobile $\mathfrak{R}^*(O^*, x^*, y^*, z^*, t)$ qui se déplace à la vitesse de l'onde de base $C = \omega/\alpha$ par rapport au repère fixe $\mathfrak{R}(O, x, y, z, t)$. Pour analyser la stabilité linéaire des ondes interfaciales à courte crete en présence d'un courant, on utilise une méthode similaire à celle décrite par allalou et al (2016). Ainsi, on définit les variables x^*, y^* et z^* et on effectue les changements suivants :

$$\begin{cases} x^* = x - ct \\ y^* = y \\ z^* = z \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Notons que (ϕ_i, η) et (ϕ_i^*, η^*) les potentiels des vitesses et l'élévation de l'interface de l'onde exprimés dans \mathfrak{R} et \mathfrak{R}^* . ϕ_i^* est le potentiel des vitesses définit dans le repère mobile \mathfrak{R}^* et s'exprime par :

$$\phi_i^* = \phi_i - cx^* \quad (i = 1, 2) \quad (\text{II.2})$$

Pour exprimer le système d'équations (I.22)-(I.27) dans \mathfrak{R}^* , il est nécessaire d'établir les relations suivantes.

$$\begin{cases} \phi_{ix^*} = \phi_{ix^*}^* + c; \phi_{iy^*} = \phi_{iy^*}^*; \phi_{iz^*} = \phi_{iz^*}^*; \phi_{it|\mathfrak{R}} = \phi_{it|\mathfrak{R}^*} - c\phi_{ix^*}^* - c^2 \\ \eta_x = \eta_{x^*}^*; \eta_y = \eta_{y^*}^*; \eta_t|\mathfrak{R} = \eta_t|\mathfrak{R}^* - c\eta_{x^*}^* \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Pour simplifier on élimine les astérisques, on obtient alors le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{ixx} + \phi_{iyy} + \phi_{izz} = 0 \quad z \geq \eta \text{ pour } i=1 \text{ et } z \leq \eta \text{ pour } i=2 \\ \eta_t + \phi_{1x}\eta_x + U\eta_x + \phi_{1y}\eta_y - \phi_{1z} = 0 \quad \text{pour } z = \eta \\ \eta_t + \phi_{2x}\eta_x + \phi_{2y}\eta_y - \phi_{2z} = 0 \quad \text{pour } z = \eta \\ \mu \left[\phi_{1t} + \eta + U\phi_{1x} + \frac{1}{2}(\phi_{1x}^2 + \phi_{1y}^2 + \phi_{1z}^2) - \frac{1}{2}(\omega/\alpha)^2 \right] - \\ \left[\phi_{2t} + \eta + \frac{1}{2}(\phi_{2x}^2 + \phi_{2y}^2 + \phi_{2z}^2) - \frac{1}{2}(\omega/\alpha)^2 \right] = 0 \quad \text{pour } z = \eta \\ \phi_{1z} = 0 \quad \text{pour } z \rightarrow \infty \text{ et } \phi_{2z} = 0 \quad \text{pour } z \rightarrow -\infty \end{array} \right. \quad (\text{II.4})$$

L'étude de la stabilité linéaire des ondes interfaciales de gravité, consiste à supposer que l'élévation de l'interface et les potentiels de vitesses $(\bar{\eta}, \bar{\phi}_i)$ sont soumises à l'influence de perturbations instationnaires périodiques et d'amplitudes infinitésimales (η', ϕ'_i) . Dans le référentiel $\mathfrak{R}^*(O, x, y, z, t)$, repère se déplaçant à la vitesse de l'onde de base, le mouvement peut être décomposé en une solution permanente et une perturbation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta(x, y, t) = \bar{\eta}(x, y) + \eta'(x, y, t) \\ \phi_i(x, y, z, t) = \bar{\phi}_i(x, y, z) + \phi'_i(x, y, z, t) \quad (i=1,2) \end{array} \right. \quad (\text{II.5})$$

où $\bar{\eta}(x, y)$ et $\bar{\phi}_i(x, y, z)$ sont les solutions de formes permanentes dans \mathfrak{R}^* et $\eta'(x, y, t)$ et $\phi'_i(x, y, z, t)$ les perturbations infinitésimales avec :

$$\eta'(x, y, t) \ll \bar{\eta}(x, y) \quad \text{et} \quad \phi'_i(x, y, z, t) \ll \bar{\phi}_i(x, y, z) \quad (\text{II.6})$$

Les potentiels des vitesses ϕ_1 et ϕ_2 sont développés autour de $z = \bar{\eta}(x, y)$ ainsi que leurs dérivées spatiales et temporelles. En ne gardant que les termes d'ordres 0 et 1, on obtient pour les potentiels :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_i = \bar{\phi}_i + \eta' \bar{\phi}_{iz} + \phi'_i \\ \phi_{it} = \phi'_{it} \\ \phi_{ix} = \bar{\phi}_{ix} + \eta' \bar{\phi}_{ixz} + \phi'_{ix} \\ \phi_{iy} = \bar{\phi}_{iy} + \eta' \bar{\phi}_{iyz} + \phi'_{iy} \\ \phi_{iz} = \bar{\phi}_{iz} + \eta' \bar{\phi}_{izz} + \phi'_{iz} \end{array} \right. \quad (\text{II.7})$$

et pour l'élévation de l'interface :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_t = \underbrace{\bar{\eta}_t}_0 + \eta'_t \\ \eta_x = \bar{\eta}_x + \eta'_x \\ \eta_y = \bar{\eta}_y + \eta'_y \end{array} \right. \quad (\text{II.8})$$

En introduisant ces expressions dans le système (II.4), on obtient à l'ordre 0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\phi}_{ixx} + \bar{\phi}_{iyy} + \bar{\phi}_{izz} = 0 \quad z \leq \bar{\eta} \text{ pour } i = 1 \text{ et } z \leq \bar{\eta} \text{ pour } i = 2 \\ \eta_t + \bar{\phi}_{1x}\bar{\eta}_x + U\bar{\eta}_x + \bar{\phi}_{1y}\bar{\eta}_y - \bar{\phi}_{1z} = 0 \quad \text{pour } z = \bar{\eta} \\ \eta_t + \bar{\phi}_{2x}\bar{\eta}_x + \bar{\phi}_{2y}\bar{\eta}_y - \bar{\phi}_{2z} = 0 \quad \text{pour } z = \bar{\eta} \\ \mu \left[\bar{\phi}_{1t} + \eta + U\bar{\phi}_{1x} + \frac{1}{2}(\bar{\phi}_{1x}^2 + \bar{\phi}_{1y}^2 + \bar{\phi}_{1z}^2) - \frac{1}{2}(\omega/\alpha)^2 \right] - \\ \left[\bar{\phi}_{2t} + \eta + \frac{1}{2}(\bar{\phi}_{2x}^2 + \bar{\phi}_{2y}^2 + \bar{\phi}_{2z}^2) - \frac{1}{2}(\omega/\alpha)^2 \right] = 0 \quad \text{pour } z = \bar{\eta} \\ \bar{\phi}_{1z} = 0 \quad \text{pour } z \rightarrow \infty \text{ et } \bar{\phi}_{2z} = 0 \quad \text{pour } z \rightarrow -\infty \end{array} \right. \quad (\text{II.9})$$

Ce système d'équations est équivalent au système d'équations (I.22)-(I.27). L'un est appliqué dans \mathfrak{R}^* et l'autre dans \mathfrak{R} .

Au premier ordre, nous pouvons dériver un système d'équations pour les perturbations :

$$\phi'_{ixx} + \phi'_{iyy} + \phi'_{izz} = 0 \quad \text{pour } z \geq \bar{\eta} \text{ et } i = 1, 2 \quad (\text{II.10})$$

$$\begin{aligned} \phi'_{1z} - (\bar{\eta}_x \phi'_{1x} + \eta'_x \bar{\phi}_{1x}) - (\bar{\eta}_y \phi'_{1y} + \eta'_y \bar{\phi}_{1y}) - \eta'(\bar{\eta}_x \bar{\phi}_{1xz} + \bar{\eta}_y \bar{\phi}_{1yz}) \\ - U\eta'_x + \eta' \bar{\phi}_{zz} - \eta'_t = 0 \quad \text{pour } z = \bar{\eta}(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

$$\begin{aligned} \phi'_{2z} - (\bar{\eta}_x \phi'_{2x} + \eta'_x \bar{\phi}_{2x}) - (\bar{\eta}_y \phi'_{2y} + \eta'_y \bar{\phi}_{2y}) - \eta'(\bar{\eta}_x \bar{\phi}_{2xz} + \bar{\eta}_y \bar{\phi}_{2yz}) \\ + \eta' \bar{\phi}_{zz} - \eta'_t = 0 \quad \text{pour } z = \bar{\eta}(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

$$\begin{aligned} \mu [\eta' + \eta' U \bar{\phi}_{1xz} + U \phi'_{1x} + \phi'_{1t} + \bar{\phi}_{1x} \phi'_{1x} + \bar{\phi}_{1y} \phi'_{1y} + \bar{\phi}_{1z} \phi'_{1z} + \eta' (\bar{\phi}_{1x} \bar{\phi}_{1xz} + \bar{\phi}_{1y} \bar{\phi}_{1yz} + \bar{\phi}_{1z} \bar{\phi}_{1zz})] \\ - [\eta' + \phi'_{2t} + \bar{\phi}_{2x} \phi'_{2x} + \bar{\phi}_{2y} \phi'_{2y} + \bar{\phi}_{2z} \phi'_{2z} + \eta' (\bar{\phi}_{2x} \bar{\phi}_{2xz} + \bar{\phi}_{2y} \bar{\phi}_{2yz} + \bar{\phi}_{2z} \bar{\phi}_{2zz})] = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

$$\phi'_{1z} = 0 \quad \text{pour } z \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \phi'_{2z} = 0 \quad \text{pour } z \rightarrow -\infty \quad (\text{II.14})$$

Afin d'analyser les instabilités superharmoniques des ondes interfaciales tridimensionnelles, on cherche des solutions des équations de Laplace (II.10) vérifiant les conditions aux limites (II.11), (II.12), (II.13) et (II.14). On choisit des solutions ayant les formes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta' = e^{-i\sigma t} \sum_{J=-\infty}^{J=\infty} \sum_{K=-\infty}^{K=\infty} a_{JK} e^{i(J\alpha x + K\beta y)} \\ \phi'_1 = e^{-i\sigma t} \sum_{J=-\infty}^{J=\infty} \sum_{K=-\infty}^{K=\infty} b_{JK} e^{i(J\alpha x + K\beta y)} e^{-\gamma_{JK} Z} \\ \phi'_2 = e^{-i\sigma t} \sum_{J=-\infty}^{J=\infty} \sum_{K=-\infty}^{K=\infty} c_{JK} e^{i(J\alpha x + K\beta y)} e^{\gamma_{JK} Z} \end{array} \right. \quad (\text{II.15})$$

avec $\gamma_{JK} = [(p + J\alpha)^2 + (q + K\beta)^2]^{1/2}$. α est le nombre d'onde longitudinal, β le nombre d'onde transversal de la perturbation de l'onde non perturbée.

3 Méthode de résolution numérique

Pour obtenir des longueurs d'onde égales à 2π dans les directions longitudinale et transversale, il est pratique d'effectuer un changement de variables suivant

$$X = \alpha x; \quad Y = \beta y; \quad Z = z$$

Les équations (II.10)-(II.14) sont maintenant exprimées sous les formes :

$$\alpha^2 \phi'_{iXX} + \beta^2 \phi'_{iYY} + \phi'_{iZZ} = 0 \quad Z \geq \bar{\eta} \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad (\text{II.16})$$

$$\begin{aligned} & \phi'_{1Z} - \alpha^2(\bar{\eta}_X \phi'_{1X} + \eta'_X \bar{\phi}_{1X}) - \beta^2(\bar{\eta}_Y \phi'_{1Y} + \eta'_Y \bar{\phi}_{1Y}) - \eta'(\alpha^2 \bar{\eta}_X \bar{\phi}_{1XZ} + \beta^2 \bar{\eta}_Y \bar{\phi}_{1YZ}) \\ & + \eta' \bar{\phi}_{1ZZ} - \alpha U \eta'_x - \eta'_t = 0 \quad \text{pour } z = \bar{\eta}(X, Y) \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

$$\begin{aligned} & \phi'_{2Z} - \alpha^2(\bar{\eta}_X \phi'_{2X} + \eta'_X \bar{\phi}_{2X}) - \beta^2(\bar{\eta}_Y \phi'_{2Y} + \eta'_Y \bar{\phi}_{2Y}) - \eta'(\alpha^2 \bar{\eta}_X \bar{\phi}_{2XZ} + \beta^2 \bar{\eta}_Y \bar{\phi}_{2YZ}) \\ & + \eta' \bar{\phi}_{2ZZ} - \eta'_t = 0 \quad \text{pour } z = \bar{\eta}(X, Y) \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

$$\begin{aligned} & \mu [\eta' + \alpha U \eta' \bar{\phi}_{1xz} + \alpha U \phi'_{1x} + \phi'_{1t} + \alpha^2 \bar{\phi}_{1X} \phi'_{1X} + \beta^2 \bar{\phi}_{1Y} \phi'_{1Y} + \bar{\phi}_{1Z} \phi'_{1Z} \\ & + \eta' (\alpha^2 \bar{\phi}_{1X} \bar{\phi}_{1XZ} + \beta^2 \bar{\phi}_{1Y} \bar{\phi}_{1YZ} + \bar{\phi}_{1Z} \bar{\phi}_{1ZZ})] - \\ & [\eta' + \phi'_{2t} + \alpha^2 \bar{\phi}_{2X} \phi'_{2X} + \beta^2 \bar{\phi}_{2Y} \phi'_{2Y} + \bar{\phi}_{2Z} \phi'_{2Z} \\ & + \eta' (\alpha^2 \bar{\phi}_{2X} \bar{\phi}_{2XZ} + \beta^2 \bar{\phi}_{2Y} \bar{\phi}_{2YZ} + \bar{\phi}_{2Z} \bar{\phi}_{2ZZ})] = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

$$\phi'_{1Z} = 0 \quad \text{pour } z \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \phi'_{2Z} = 0 \quad \text{pour } z \rightarrow -\infty \quad (\text{II.20})$$

et les expressions (II.15) deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta' = e^{-i\sigma t} \sum_{J=-\infty}^{J=\infty} \sum_{K=-\infty}^{K=\infty} a_{JK} e^{i(JX+KY)} \\ \phi'_1 = e^{-i\sigma t} \sum_{J=-\infty}^{J=\infty} \sum_{K=-\infty}^{K=\infty} b_{JK} e^{i(JX+KY)} e^{-\gamma_{JK} z} \\ \phi'_2 = e^{-i\sigma t} \sum_{J=-\infty}^{J=\infty} \sum_{K=-\infty}^{K=\infty} c_{JK} e^{i(JX+KY)} e^{\gamma_{JK} z} \end{array} \right. \quad (\text{II.21})$$

En insérant les séries (II.21) et leurs dérivées spatiales et temporelles, tronquées aux ordres M et N , dans les équations aux perturbations (II.17), (II.18) et (II.19), et en employant une méthode numérique de type Galerkin, la résolution des équations se réduit à celle d'un problème aux valeurs propres généralisé :

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = i\sigma\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (\text{II.22})$$

où $\mathbf{u} = [a_{JK}, b_{JK}, c_{JK}]^t$ est le vecteur propre correspondant à la valeur propre σ . Les matrices complexes \mathbf{A} et \mathbf{B} dépendent de l'onde de base. Généralement, deux méthodes numériques sont employées pour résoudre ce problème. La méthode de **Galerkin** a été introduite par [Zhang](#)

et Melville [56] pour l'analyse de la stabilité des ondes de surface bidimensionnelles gravité-capillarité. Cette approche a été aussi utilisée par Allalou [3] pour étudier la stabilité des ondes à courtes crêtes interfaciales en profondeurs infinies. Celle de **collocation** a été utilisée par (Ioualalen et Kharif [51], Ioualalen et al. [54], Ioualalen et al. [53], Ioualalen et Okamura [57], Ioualalen et al. [58]) pour l'étude de la stabilité des ondes de surface à courtes crêtes et par chikhi [55] pour celle des ondes interfaciales tridimensionnelles gravité-capillarité en profondeurs infinies. Nous proposons, ici, une extension de la méthodes de Galerkin aux cas des ondes interfaciales tridimensionnelles en présence d'un courant parallèle.

3.0.1 Méthode de Galerkin

Cette méthode fournit une représentation spectrale de la surface physique en prenant la transformée de fourrier des équations (II.21) dans les deux directions horizontales (Ox) et (Oy) :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{J=-M}^M \sum_{K=-N}^N R_{JK}^{(1)} a_{JK} + \sum_{J=-M}^M \sum_{K=-N}^N U_{JK}^{(1)} b_{JK} \right] e^{-i(lX+rY)} dXdY \\
 &= i\sigma \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{J=-M}^M \sum_{K=-N}^N T_{JK}^{(1)} a_{JK} \right] e^{-i(lX+rY)} dXdY \\
 & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{J=-M}^M \sum_{K=-N}^N R_{JK}^{(2)} a_{JK} + \sum_{J=-M}^M \sum_{K=-N}^N S_{JK}^{(2)} c_{JK} \right] e^{-i(lX+rY)} dXdY \\
 &= i\sigma \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{J=-M}^M \sum_{K=-N}^N T_{JK}^{(2)} a_{JK} \right] e^{-i(lX+rY)} dXdY \\
 & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{J=-M}^M \sum_{K=-N}^N R_{JK}^{(3)} a_{JK} + \sum_{J=-M}^M \sum_{K=-N}^N U_{JK}^{(3)} b_{JK} + \sum_{J=-M}^M \sum_{K=-N}^N S_{JK}^{(3)} c_{JK} \right] e^{-i(lX+rY)} dXdY \\
 &= i\sigma \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{J=-M}^M \sum_{K=-N}^N (T_{1JK}^{(3)} b_{JK} + T_{2JK}^{(3)} c_{JK}) \right] e^{-i(lX+rY)} dXdY
 \end{aligned}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 R_{JK}^{(1)} = [\alpha^2 \bar{\eta}_X \bar{\phi}_{1XZ} + \beta^2 \bar{\eta}_Y \bar{\phi}_{1YZ} - \bar{\phi}_{1ZZ} + iJ\alpha^2 \bar{\phi}_{1X} + iK\beta^2 \bar{\phi}_{1Y} + i\alpha UJ] e^{i(JX+KY)} \\
 U_{JK}^{(1)} = [iJ\alpha^2 \bar{\eta}_X + iK\beta^2 \bar{\eta}_Y + \gamma_{JK}] e^{i(JX+KY)} e^{-\gamma_{JK}\bar{\eta}} \\
 T_{JK}^{(1)} = e^{i(JX+KY)} \\
 R_{JK}^{(2)} = [\alpha^2 \bar{\eta}_X \bar{\phi}_{2XZ} + \beta^2 \bar{\eta}_Y \bar{\phi}_{2YZ} - \bar{\phi}_{2ZZ} + iJ\alpha^2 \bar{\phi}_{2X} + iK\beta^2 \bar{\phi}_{2Y}] e^{i(JX+KY)} \\
 S_{JK}^{(2)} = [iJ\alpha^2 \bar{\eta}_X + iK\beta^2 \bar{\eta}_Y - \gamma_{JK}] e^{i(JX+KY)} e^{\gamma_{JK}\bar{\eta}} \\
 T_{JK}^{(2)} = e^{i(JX+KY)} \\
 R_{JK}^{(3)} = [(1 + \alpha^2 \bar{\phi}_{2X} \bar{\phi}_{2XZ} + \beta^2 \bar{\phi}_{2Y} \bar{\phi}_{2YZ} + \bar{\phi}_{2Z} \bar{\phi}_{2ZZ}) - \\
 \mu(1 + \alpha U \bar{\phi}_{1XZ} + \alpha^2 \bar{\phi}_{1X} \bar{\phi}_{1XZ} + \beta^2 \bar{\phi}_{1Y} \bar{\phi}_{1YZ} + \bar{\phi}_{1Z} \bar{\phi}_{1ZZ})] e^{i(JX+KY)} \\
 U_{JK}^{(3)} = -\mu[\alpha U iJ + i\alpha^2 J \bar{\phi}_{1X} + i\beta^2 K \bar{\phi}_{1Y} - \gamma_{JK} \bar{\phi}_{1Z}] e^{i(JX+KY)} e^{-\gamma_{JK}\bar{\eta}} \\
 S_{JK}^{(3)} = [i\alpha^2 J \bar{\phi}_{2X} + i\beta^2 \bar{\phi}_{2Y} + \gamma_{JK} \bar{\phi}_{2Z}] e^{i(JX+KY)} e^{\gamma_{JK}\bar{\eta}} \\
 T_{1JK}^{(3)} = -\mu e^{-\gamma_{JK}\bar{\eta}} e^{i(JX+KY)} \\
 T_{2JK}^{(3)} = e^{\gamma_{JK}\bar{\eta}} e^{i(JX+KY)}
 \end{array} \right. \quad (\text{II.23})$$

Ce système, de $(6M + 3) \times (6N + 3)$ équations peut se mettre sous la forme matricielle :

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = i\sigma\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (\text{II.24})$$

Dans l'équation (II.24), les matrices complexes A et B ont une taille de $(6M + 3) \times (6N + 3)$, tandis que le vecteur u a une dimension de $(6M + 3) \times (6N + 3)$. Les valeurs des matrices peuvent être déterminées une fois que le flux de base a été établi.

En inversant les ordres de sommations du plan physique et du plan spectral, la discrétisation en $(n_X \times n_Y)$ points uniformément répartis sur l'intervalle $[2\pi, 2\pi]$, d'abscisses ($X_u = 2\pi u/n_X$ $u \in [0, n_x - 1]$) et d'ordonnées ($Y_u = 2\pi v/n_Y$ $v \in [0, n_y - 1]$), permet d'obtenir pour les ordres M et N ($-M..0..M; -N..0..N$) le système suivant :

$$\sum_{J=-M}^M \sum_{K=-N}^N F_{J-l, K-r} \left[R_{JK}^{(1)} / T_{JK}^{(1)} \right] a_{JK} + \sum_{J=-M}^M \sum_{K=-N}^N F_{J-l, K-r} \left[U_{JK}^{(1)} / T_{JK}^{(1)} \right] b_{JK} = i\sigma a_{lr} \quad (\text{II.25})$$

$$\sum_{J=-M}^M \sum_{K=-N}^N F_{J-l, K-r} \left[R_{JK}^{(2)} / T_{JK}^{(1)} \right] a_{JK} + \sum_{J=-M}^M \sum_{K=-N}^N F_{J-l, K-r} \left[S_{JK}^{(2)} / T_{JK}^{(1)} \right] c_{JK} = i\sigma a_{lr} \quad (\text{II.26})$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{J=-M}^M \sum_{K=-N}^N F_{J-l, K-r} \left[R_{JK}^{(3)} / T_{JK}^{(1)} \right] a_{JK} + \sum_{J=-M}^M \sum_{K=-N}^N F_{J-l, K-r} \left[U_{JK}^{(3)} / T_{JK}^{(1)} \right] b_{JK} + \\
 & \sum_{J=-M}^M \sum_{K=-N}^N F_{J-l, K-r} \left[S_{JK}^{(3)} / T_{JK}^{(1)} \right] c_{JK} = i\sigma \left[\sum_{J=-M}^M \sum_{K=-N}^N F_{J-l, K-r} \left[T_{1JK}^{(3)} / T_{JK}^{(1)} \right] b_{JK} + \right. \\
 & \left. \left[\sum_{J=-M}^M \sum_{K=-N}^N F_{J-l, K-r} \left[T_{2JK}^{(3)} / T_{JK}^{(1)} \right] c_{JK} \right] \right] \quad (\text{II.27})
 \end{aligned}$$

Les fonctions $F_{J-l,K-r}[f_{JK}^{(i)}] = \sum_{u=0}^{n_x-1} \sum_{v=0}^{n_y-1} f_{JK}^{(i)} e^{i\alpha(J-l)x_u} e^{i(J-r)y_v}$ sont calculées à l'aide d'un algorithme de *Transformée de Fourier Rapide bidimensionnelle*. La résolution numérique du système d'équations (II.25), (II.26) et (II.27) est effectuée avec l'algorithme **QZ**. La structure des matrices complexes **A** et **B** et du vecteur **u** sont représentés dans le diagramme de la figure (II.1). Les ordres de troncature M et N sont incrémenté jusqu'à ce que les valeurs propres convergent. L'examen des valeurs propres associées aux instabilités (tableau (II.1)) a permis de montrer la dépendance d'une valeur propre sur l'ordre de troncature. Il apparaît que pour un courant faible ($U = 0.5$), les erreurs relatives données par la méthode de Galerkin sont de l'ordre de 10^{-3} et 10^{-7} pour les ordres de troncatures (8, 8) et (10, 10), respectivement. Dans le cas où U est plus grand ($U = 1.2$), cette méthode converge très rapidement avec les précisions relatives de 10^{-4} et 10^{-8} pour les ordres de troncatures (8, 8) et (10, 10), respectivement. En comparant ces valeurs il apparaît que la précision s'améliore lorsque l'ordre de troncature croit, dans ce cas, la valeur propre devient indépendante de l'ordre de troncature.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} F_{u,v} \left[\frac{R_{JK}^{(1)}}{T_{JK}^{(1)}} \right] & \vdots & F_{u,v} \left[\frac{U_{JK}^{(1)}}{T_{JK}^{(1)}} \right] & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{u,v} \left[\frac{R_{JK}^{(2)}}{T_{JK}^{(1)}} \right] & \vdots & 0 & \vdots & F_{u,v} \left[\frac{S_{JK}^{(2)}}{T_{JK}^{(1)}} \right] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{u,v} \left[\frac{R_{JK}^{(3)}}{T_{JK}^{(1)}} \right] & \vdots & F_{u,v} \left[\frac{U_{JK}^{(3)}}{T_{JK}^{(1)}} \right] & \vdots & F_{u,v} \left[\frac{S_{JK}^{(3)}}{T_{JK}^{(1)}} \right] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & & & & \\ & \ddots & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & \vdots & F_{u,v} \left[\frac{T_{1JK}^{(3)}}{T_{JK}^{(1)}} \right] & \vdots & F_{u,v} \left[\frac{T_{2JK}^{(3)}}{T_{JK}^{(1)}} \right] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} = [a_{-J-K} \dots a_{JK}, b_{-J-K} \dots b_{JK}, c_{-J-K} \dots c_{JK}]^t$$

Figure II.1: Structure des matrices **A** et **B** et du vecteur **u**.

Tableau II.1: Exemple de convergence des parties réelle et imaginaire d'une valeur propre instable en fonction de la troncature (M, N) par la méthode de Galerkin pour deux courants $U = 0.5$ et $U = 1.2$ pour $h = 0.205$ et $h = 0.191$, respectivement. Avec $\theta = 53^\circ$, $\mu = 0.1$, $d_1 = d_2 = \infty$.

$U = 0.5$			$U = 1.2$		
$M = N$	$\Im(\sigma)$	$\Re(\sigma)$	$M = N$	$\Im(\sigma)$	$\Re(\sigma)$
6	-	-	6	0	0.10150565E-03
7	0	0.37790719E-03	7	0.14401847E-03	0
8	0.58272668E-04	0	8	0.23976886E-04	0
9	0.79133578E-04	0	9	0.38617910E-04	0
10	0.79223665E-04	0	10	0.38785186E-04	0
11	0.79157698E-04	0	11	0.38783623E-04	0
12	0.79166867E-04	0	12	0.38783789E-04	0

4 Résultats et discussion

La stabilité des ondes interfaciales permanentes est représentée par des solutions qui combinent des fonctions temporelles sous forme exponentielle et des fonctions spatiales périodiques, c'est-à-dire qu'elles sont proportionnelles à $e^{i\sigma}$. Dans l'analyse de stabilité, il est essentiel de déterminer l'ensemble des valeurs propres σ et leurs vecteurs propres associés, relatifs aux coefficients a_{JK} , b_{JK} , et c_{JK} . Cette analyse dépend de la partie imaginaire de σ , notée $\Im(\sigma)$. Selon que $\Im(\sigma)$ soit positive, nulle ou négative, le mode correspondant est considéré comme instable, marginalement stable ou stable. Étant donné que le système d'équations (II.16)-(II.20) est basé sur des valeurs réelles, les valeurs propres se manifestent en paires de complexes conjugués. Par conséquent, une instabilité est caractérisée par une valeur de $\Im(\sigma)$ différente de zéro.

Dans cette étude, notre attention se porte sur les instabilités superharmoniques, c'est-à-dire lorsque les perturbations affichent des longueurs d'onde longitudinales et transversales égales à celles de l'onde originale non perturbée. Cette situation est caractérisée par les relations $p = N\alpha$ et $q = M\beta$, où M et N représentent des nombres entiers naturels. L'instabilité associée à la résonance harmonique survient lorsque les harmoniques $(\pm J, K)$ entrent en résonance avec l'onde de base $(\pm 1, 1)$. En raison de la structure harmonique des modes impliqués dans l'instabilité, seuls les modes avec $K \geq 0$ sont pris en compte dans les expressions de perturbation (II.15). Ioualalen et Kharif [50], ainsi que Ioualalen et al. [54], ont démontré que les résonances harmoniques, résultant de la collision de deux modes superharmoniques (J, K) et $(-J, K)$ à une fréquence nulle, sont liées à des instabilités superharmoniques qui sont faibles et sporadiques. Lorsque la courbure de l'onde non perturbée est nulle $h = 0$, on a $\bar{\eta} = 0$. Les vitesses dans les couches de fluide dans le repère fixe \mathfrak{R} sont nulles : $\phi_i = 0$ avec $(i = 1, 2)$. Par conséquent, dans le repère mobile \mathfrak{R}^* elles sont données par : $\bar{\phi}_1 = -c_0x$ et $\bar{\phi}_2 = -c_0x$, où c_0 est la vitesse de l'onde. De

cette manière, les valeurs propres s'écrivent :

$$\sigma_{JK}^s = s (\gamma_{JK} R)^{\frac{1}{2}} - c_0 (J\alpha), \quad s = \pm 1 \quad (\text{II.28})$$

avec $\gamma_{JK} = [(J\alpha)^2 + (K\beta)^2]^{1/2}$, $c_0 = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \right)^{\frac{1}{2}}$ et $R = \omega_0^2 = \frac{1-\mu}{1+\mu}$. D'une manière générale l'émergence d'instabilités pour une cambrure non nulle correspond à la fusion de deux modes de signatures opposées et de même fréquence :

$$\sigma_{J_1 K_1}^s(h) = \sigma_{J_2 K_2}^{-s}(h) \quad (\text{II.29})$$

En substituant la relation (II.28) dans (II.29) et si l'on considère qu'une résonance harmonique (J, K) correspond à la collision de deux modes (J, K) et $(-J, K)$, c.a.d. $K_1 = K_2 = K$ et $J_1 = -J_2 = J$, on aboutit à la perte de stabilité :

$$\left[(J\alpha)^2 + (K\beta)^2 \right]^2 = J^2 \quad (\text{II.30})$$

Cette équation peut être ré-écrite sous la forme suivante :

$$\cos(\theta) = \frac{J^4 - J^2}{K^2 - J^2} \quad (\text{II.31})$$

Cette condition est similaire à la condition de résonance (I.98).

Cette étude se focalise sur l'instabilité superharmonique des ondes interfaciales à courte crête, en présence d'un courant associée à la résonance harmonique (2, 6). Initialement, les pôles de la série d'expansion de l'onde non perturbée ω sont calculés via les approximants de Padé. Nous procédons ensuite à des analyses de stabilité autour de ces pôles. Finalement, nous déterminerons le taux d'amplification maximal et la dimension de la zone d'instabilité en résolvant le problème des valeurs propres.

L'approche des approximants de Padé a facilité le calcul des pôles des séries tronquées. Ces pôles se manifestent aux cambrures où les harmoniques $(\pm j, k)$ interagissent avec l'onde fondamentale $(\pm 1, 1)$, générant ainsi des termes séculaires (voir chapitre 1). La localisation des résonances harmoniques (2, 6), (2, 8), (2, 10), (3, 11) et (3, 13) des ondes à courte crête interfaciales en présence d'un courant est illustrée dans le plan (θ, h) par la figure (II.2). Ces lieux ont été déterminés en analysant les pôles persistants des approximants de Padé [8, 8], [8, 7], [7, 7] et [7, 6] de la série ω . Notre intérêt s'est particulièrement porté sur la résonance (2, 6), la plus forte pour des épaisseurs infinies. La figure (II.3) montre les lieux de la résonance (2, 6) pour différentes valeurs du courant U . À mesure que le courant augmente, les pôles sont détectés pour un angle θ légèrement supérieur à la valeur exacte de l'angle de résonance, θ_{HR} . Les perturbations superharmoniques (2, 6) sont spécifiquement recherchées dans les environs de ces pôles.

La figure (II.4) illustre la fréquence, $\Re(\sigma)$, et le taux d'amplification, $\Im(\sigma)$, de la perturbation (2, 6) en fonction de la cambrure pour un angle $\theta = 53^\circ$, proche de l'angle de résonance

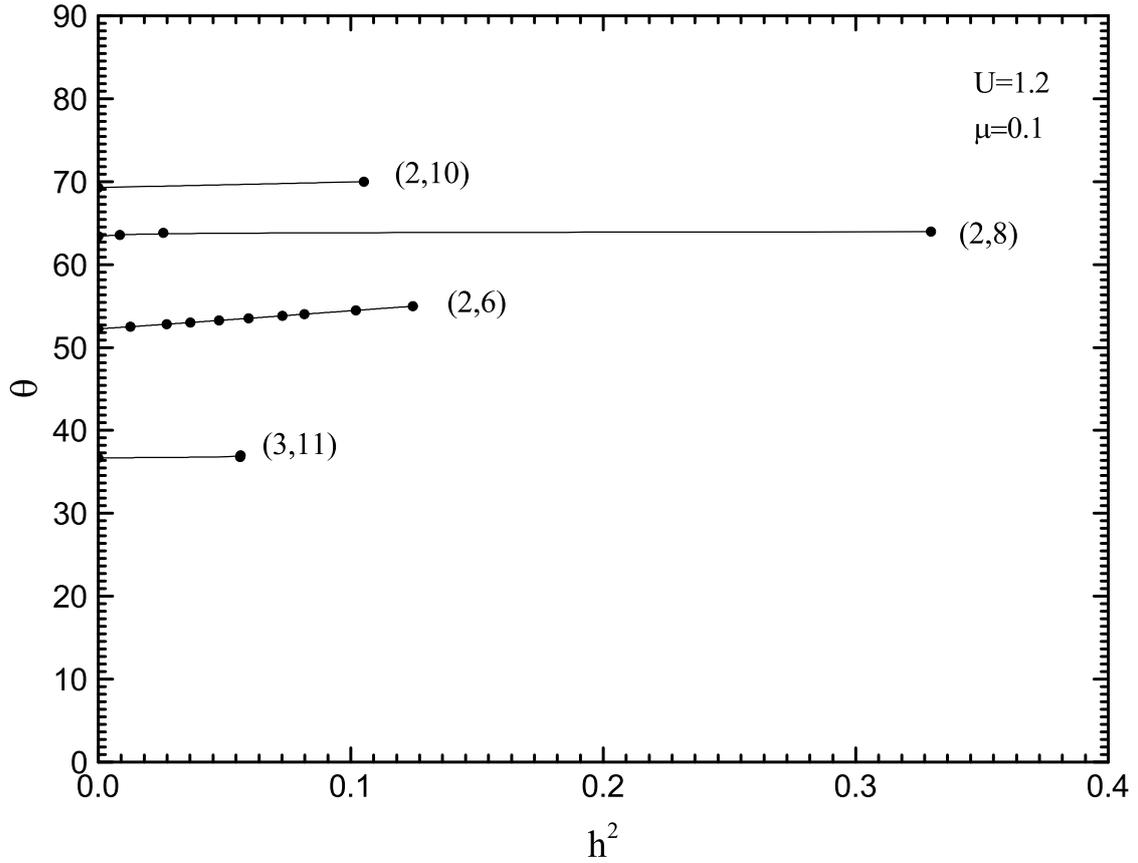


Figure II.2: Lieu des résonances harmoniques des ondes à courtes crêtes interfaciales pour $\mu = 0.1$ et $U = 1.2$ en profondeurs infinies ($d_1 = d_2 = \infty$).

harmonique $\theta_{HR} = 52.2388^\circ$, avec un courant $U = 0.1$. Lorsque l'amplitude de l'onde parvient à $h = 0.2319$, une instabilité se manifeste en conséquence de la coalescence des deux valeurs propres associées aux perturbations $(2, 6)$ et $(-2, 6)$. Cette instabilité se caractérise par une fréquence proche de zéro par rapport à l'onde de base.

La figure (II.4) présente un élargissement du voisinage de (h_0) . La taille de la bulle d'instabilité est d'environ $\Delta h \approx 0,003$, tandis que le taux d'amplification maximal est d'environ 1.49×10^{-4} . Cette instabilité est donc faible, et la largeur de la bande d'instabilité suggère qu'elle est sporadique.

La figure (II.5) présente la bulle d'instabilité résultant de la convergence des valeurs propres $(2, 6)$ et $(-2, 6)$ pour un courant de $U = 0.5$ et un angle $\theta = 53^\circ$. Cette fusion engendre une instabilité à partir d'une cambrure de $h = 0.2056$, qui persiste jusqu'à une cambrure approximative de $h = 0.2069$, avec un pic d'amplification d'environ 7.9223×10^{-5} aux alentours de $h = 0.2062$. L'étendue de cette zone d'instabilité est d'environ $\Delta h = 0.0013$.

La figure (II.6) démontre la formation d'une bulle d'instabilité issue de la combinaison des modes $(2, 6)$ et $(-2, 6)$ sous l'effet d'un courant $U = 1.2$, qui se rapproche de la valeur critique

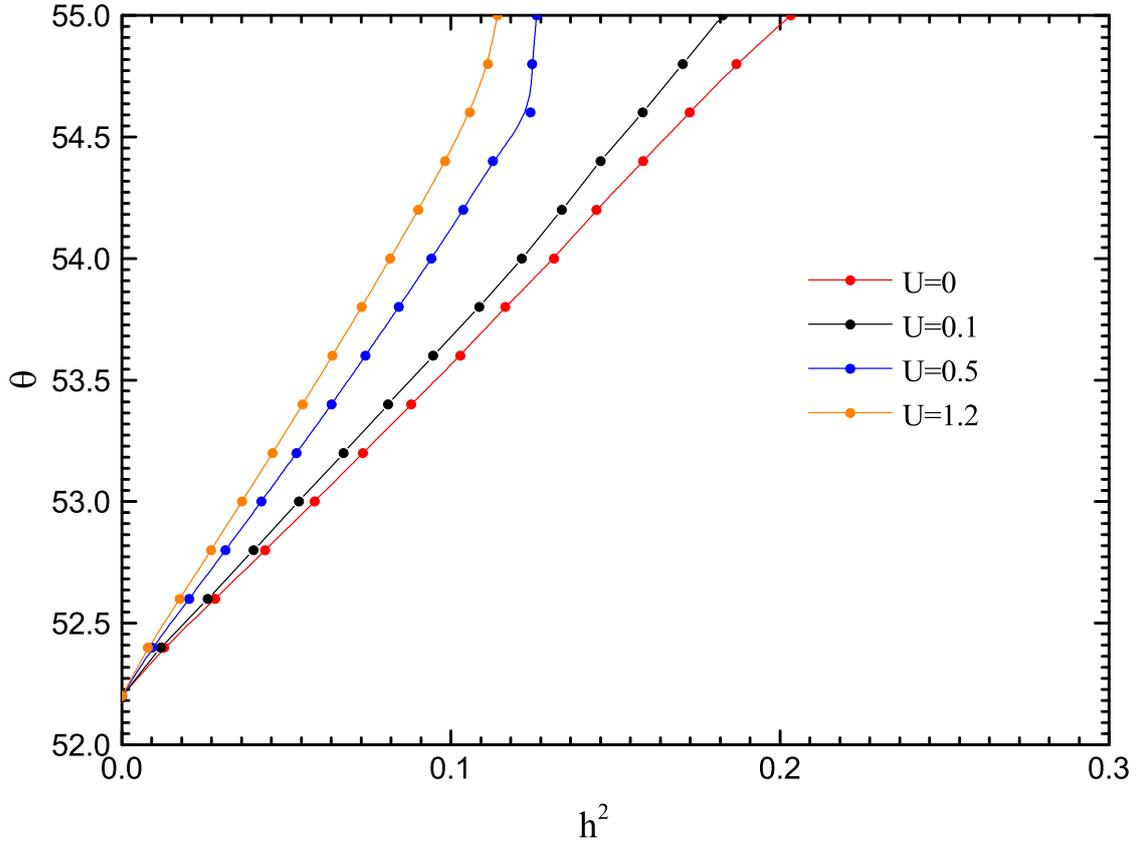


Figure II.3: Lieu des résonances harmoniques (2, 6) des ondes à courtes crêtes interfaciales tridimensionnelles pour $\mu = 0.1$ et pour différentes valeurs de U en profondeurs infinies ($d_1 = d_2 = \infty$).

$U_c = 1.2458$ pour $\mu = 0.1$. Cette fusion se produit autour d'une cambrure de $h = 0.1909$ et continue jusqu'à une cambrure de $h = 0.19149$. Dans ce cas, on observe que la taille de la bulle d'instabilité est plus faible que dans les cas précédents, approximativement de l'ordre de $\Delta h \approx 5 \times 10^{-4}$, et son taux d'amplification maximal est de 3.878×10^{-5} .

Pour mieux comprendre l'impact du courant sur le taux d'amplification, nous avons tracé la courbe du taux d'accroissement maximal de la résonance (2, 6) en fonction du courant U , avec un rapport de densité constant $\mu = 0.1$ (figure (II.7)). Il est à noter que pour un courant $U = 0$, correspondant au cas des ondes interfaciales tridimensionnelles, le taux d'amplification maximal est de 1.745×10^{-4} , ce qui est conforme aux résultats obtenus par Allalou [3]. En examinant les graphiques des figures (II.4), (II.5) et (II.6), on constate qu'à mesure que le courant augmente, la taille de la zone d'instabilité (et donc l'étendue de l'instabilité elle-même) diminue. Le taux d'amplification maximal atteint une valeur minimale d'environ 3.878×10^{-5} à l'approche du courant critique. On en déduit que l'introduction d'un courant, même faible, tend à réduire l'instabilité. On peut en conclure que le courant exerce un effet stabilisateur sur le développement des instabilités superharmoniques.

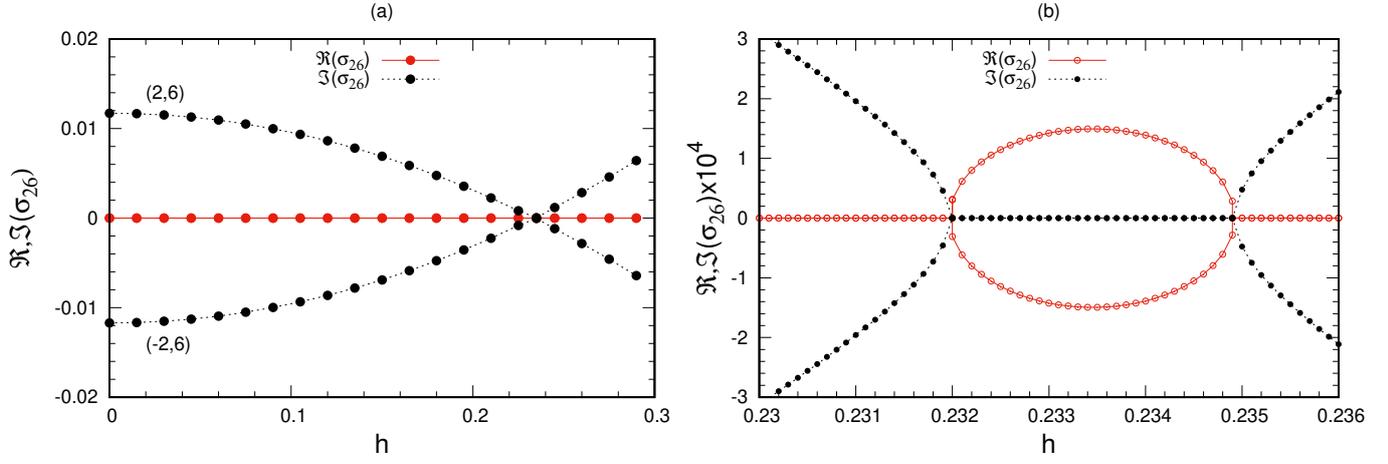


Figure II.4: (a) Fréquence, $\Re(\sigma)$, et taux d'amplification, $\Im(\sigma)$, en fonction de la cambrure de l'onde base pour $\mu = 0.1$, $\theta = 53^\circ$ et $U = 0.1$. (b) L'agrandissement au voisinage de h_0 .

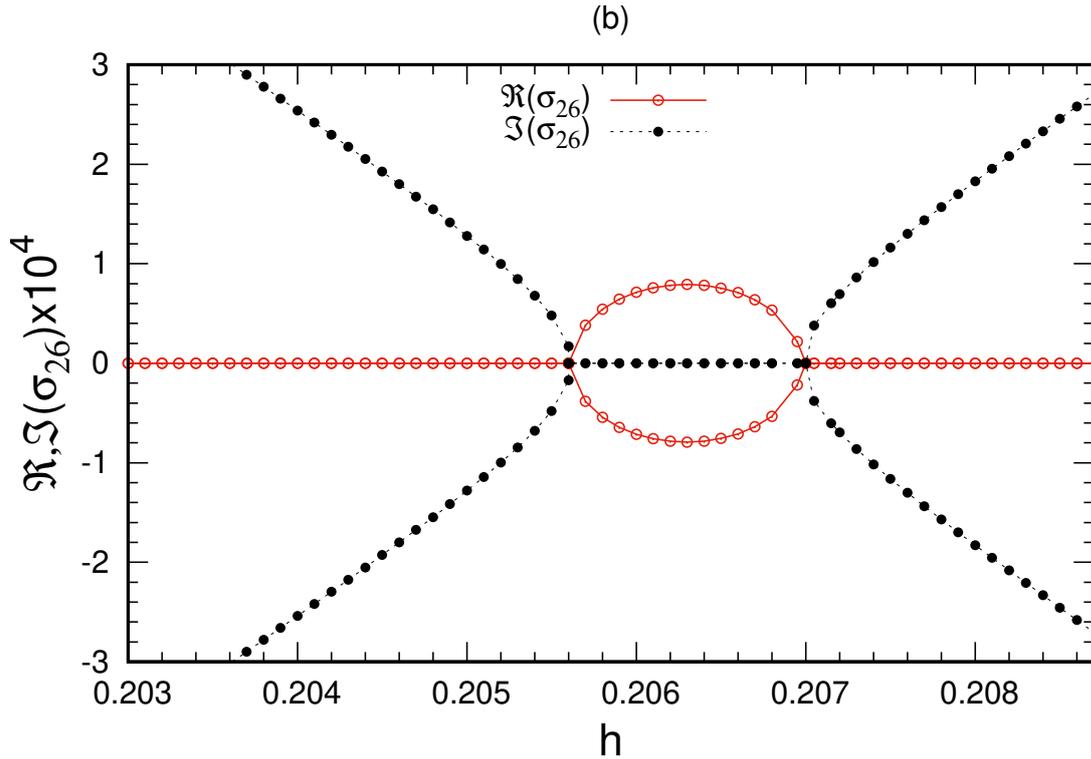


Figure II.5: Fréquence, $\Re(\sigma)$, et taux d'amplification, $\Im(\sigma)$, en fonction de la cambrure de l'onde base pour $\mu = 0.1$, $\theta = 53^\circ$ et $U = 0.5$. (b) L'agrandissement au voisinage de h_0 .

La figure (II.8) montre le diagramme de stabilité obtenu par Allalou [3] dans le plan (μ, θ) pour deux cambrures de l'onde de base, $h = 0.1$ et $h = 0.2$. Avec des taux d'amplifications maxi-

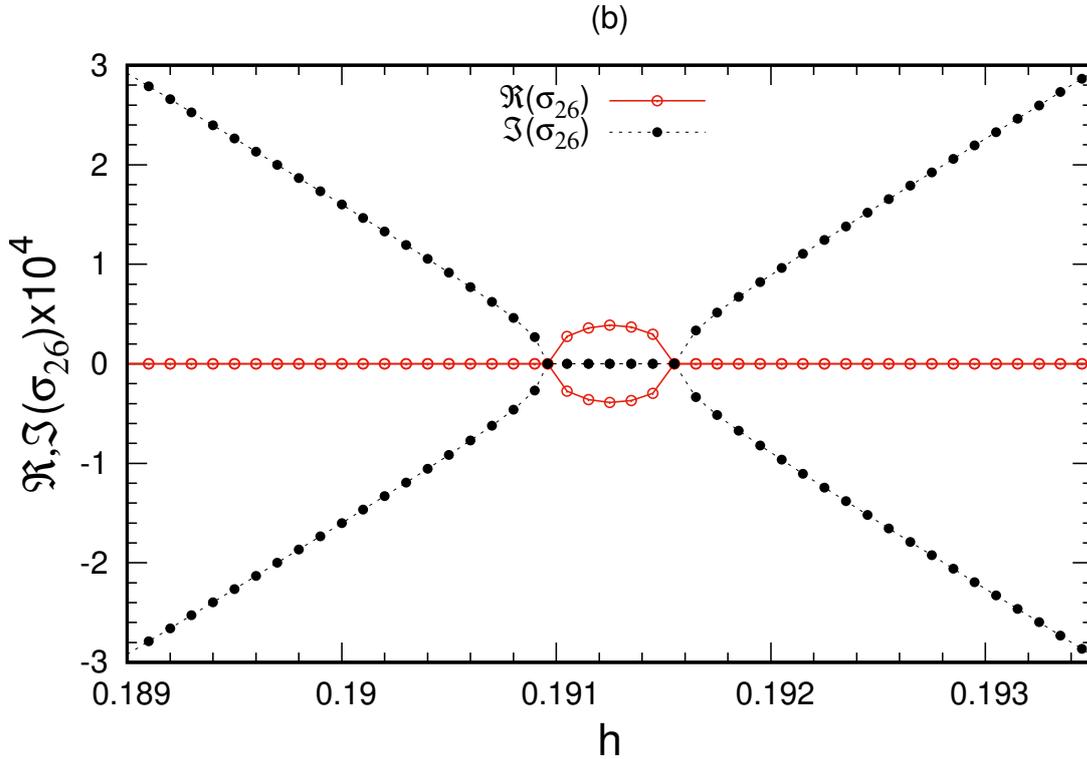


Figure II.6: Fréquence, $\Re(\sigma)$, et taux d'amplification, $\Im(\sigma)$, en fonction de la cambrure de l'onde base pour $\mu = 0.1$, $\theta = 53^\circ$ et $U = 1.2$. (b) L'agrandissement au voisinage de h_0 .

maux qui sont de l'ordre de $\mathcal{O}(h^6)$, les résultats obtenus montrent qu'une première instabilité à taux de croissance maximal se développe pour un rapport des densités $\mu = 0.08$ et se produit sporadiquement. une restabilisation se produit ensuite lorsque la valeur de μ atteint 0.34. Un second maximum du taux d'amplification est détecté pour un rapport des densités $\mu = 0.66$. En conclusion, quelque soit la valeur de la cambrure, le taux d'amplification demeure maximal pour les deux valeurs de ($\mu = 0.08$ et 0.66). Dans la figure (II.9), nous avons représenté, pour la résonance (2, 6) et pour deux valeurs du rapport des densités ($\mu = 0.08$ et 0.66), l'évolution du taux d'amplification maximal en fonction du courant U . L'examen des courbes révèle que l'instabilité reste maximale quelque soit la valeur de U dans les deux configurations. Par ailleurs, pour $\mu = 0.34$, le taux de croissance maximal est négligeable. Par conséquent, à cette valeur, les ondes interfaciales à courtes crêtes demeurent stables face aux perturbations superharmoniques.

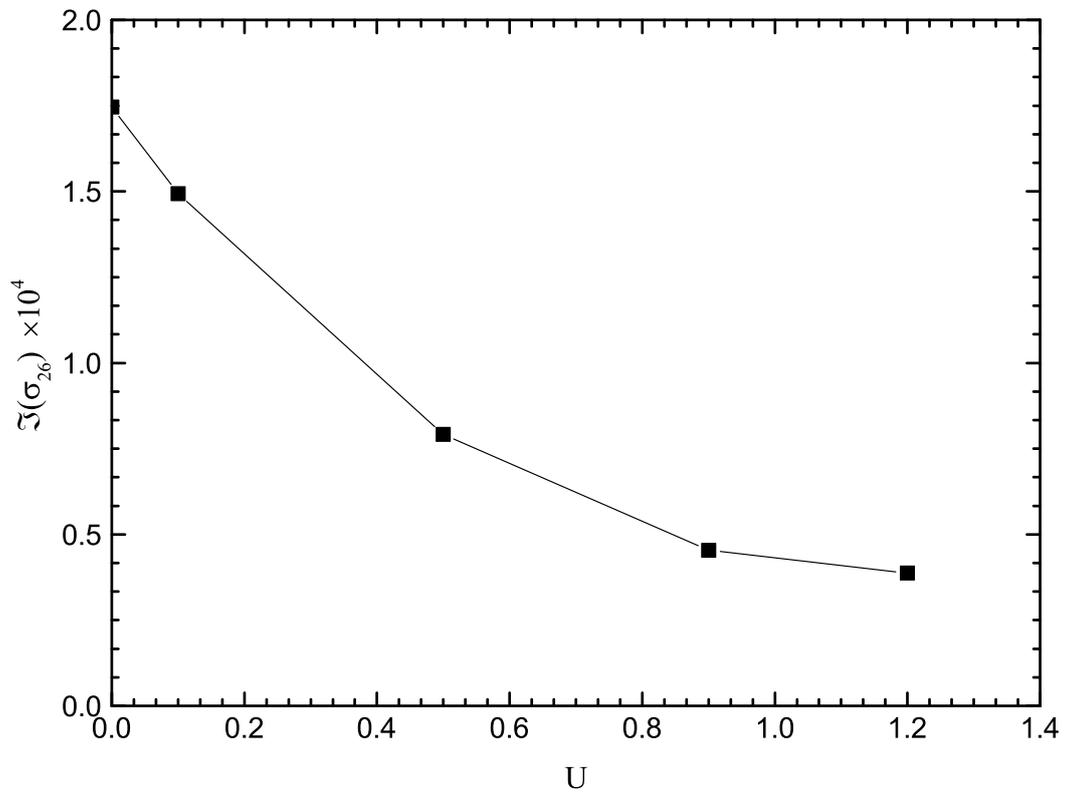


Figure II.7: Le taux d'amplification maximal correspondant à la résonance (2,6) en fonction du courant U , pour $\mu = 0.1$ et $\theta = 53^\circ$.

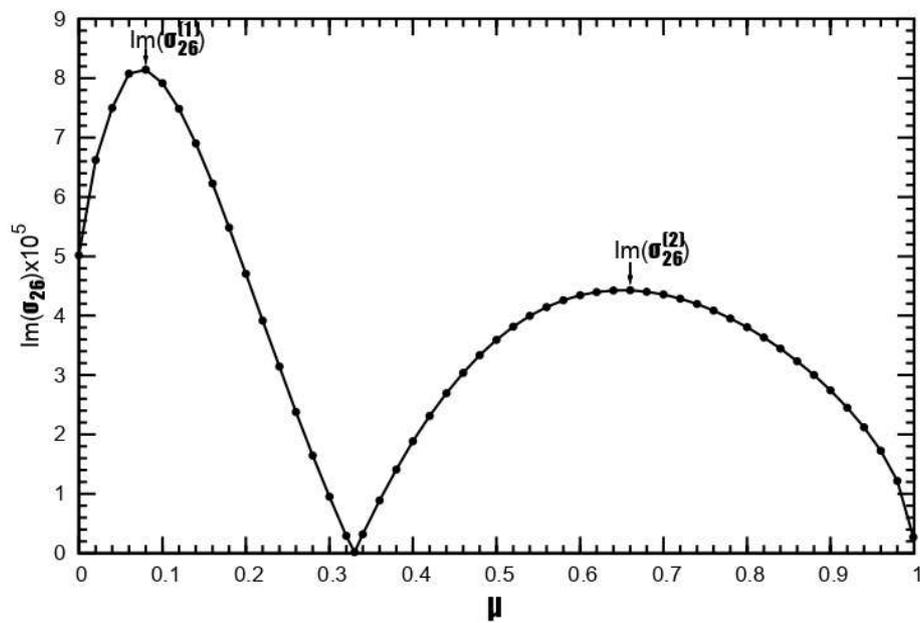


Figure II.8: Évolution du taux d'amplification maximal en fonction du rapport des densités (figure tiré de Allalou et al. [3]).

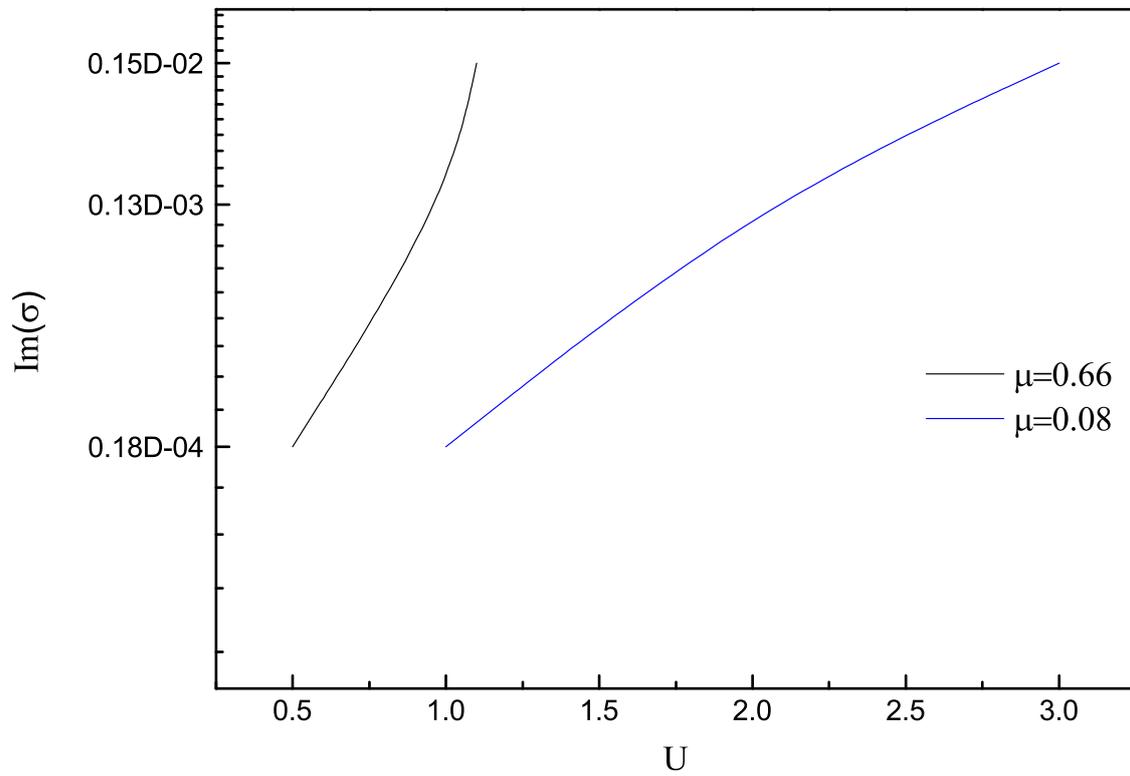


Figure II.9: Le taux d'amplification maximal correspondant à la résonance (2,6) en fonction du courant U , pour deux valeurs de μ .

Conclusion Générale et perspectives

Dans la première section, nous avons abordé le sujet des ondes interfaciales tridimensionnelles qui se déplacent à l'interface de deux couches fluides de différentes épaisseurs, sous l'effet d'un courant dans la couche supérieure. L'étude s'est focalisée sur les ondes à crêtes courtes, engendrées par l'interaction de deux ondes de mêmes caractéristiques. Pour analyser ces ondes, deux méthodes ont été présentées. La première est basée sur l'expansion en série de puissances de la cambrure, utilisant la technique des perturbations.

Pour réaliser cette étude, un programme a été développé en utilisant le langage de programmation formel MAPLE, permettant de dériver des solutions analytiques jusqu'au cinquième ordre. Ces solutions ont par la suite été étendu jusqu'au 32^{eme} ordre en utilisant un code FORTRAN. Un des avantages de la méthode des perturbations est la capacité à mettre en évidence la résonance harmonique. Nous avons réussi à obtenir et à confirmer la relation de résonance harmonique, qui s'avère être une extension des cas spécifiques déjà mentionnés dans les travaux scientifiques, incluant les ondes interfaciales bidimensionnelles progressives et stationnaires, ainsi que les ondes à courtes crêtes de surface.

Nous avons également exploré la limite dynamique, précédemment étudiée uniquement dans des contextes bidimensionnels. Notre recherche a élargi les travaux de Saffman, Yuen, Bontozoglou et Hanratty aux scénarios tridimensionnels, considérant des profondeurs à la fois finies et infinies. Il a été démontré que la configuration générale des ondes est significativement affectée par le courant. À travers l'analyse des résultats, nous avons étudié l'effet de tridimensionnalité sur les valeurs extrêmes de cambrure que peuvent prendre l'onde. Dans des profondeurs infinies, l'amplitude maximale est similaire à celle des ondes stationnaires interfaciales bidimensionnelles, tandis que la valeur minimale de l'onde semble correspondre aux ondes progressives interfaciales bidimensionnelles. Nous avons conclu que le courant amplifie la cambrure maximale des ondes stationnaires bidimensionnelles et des ondes tridimensionnelles. Par contre, pour les ondes progressives, la présence du courant conduit à des valeurs minimales de cambrure. Dans le cas de profondeurs finies, il est apparu que les cambrures limites des ondes pleinement tridimensionnelles dépassent généralement celles des ondes bidimensionnelles.

Nous avons ensuite démontré comment le courant affecte les caractéristiques des ondes. Il a été observé que, avec l'augmentation du courant, les crêtes et les creux des ondes deviennent progressivement plus aigus, en particulier dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. En

utilisant la méthode variationnelle de Whitham, nous avons pu établir une relation de dispersion quadratique pour les ondes à courtes crêtes influencées par le courant. À partir de cette relation, nous avons dérivé une formule explicite pour le courant critique non-linéaire, en fonction des différents paramètres du problème.

Dans la deuxième partie de notre étude, nous avons examiné la stabilité des ondes interfaciales en présence d'un courant, en particulier lorsqu'elles sont soumises à de petites perturbations tridimensionnelles. Pour analyser l'instabilité superharmonique, nous avons utilisé la méthode de Galerkin. Cette méthode permet de déterminer les zones d'instabilité et les taux d'amplification correspondants. Notre focus principal a été l'impact du courant sur ces instabilités. Nous avons conclu que même un courant faible avait un effet significatif, conduisant à la suppression de l'instabilité.

Concernant les perspectives à donner à ce travail, nous pensons qu'il est intéressant :

- D'appliquer la méthode des perturbations pour calculer des solutions numériques dans le cas des ondes interfaciales de gravité-capillarité en présence d'un courant uniforme.
- Une autre suite envisageable est d'effectuer l'analyse de la stabilité des ondes interfaciales en présence d'un courant dans le cas où les épaisseurs des deux fluides sont finies.
- D'entreprendre une étude de la stabilité des ondes interfaciales en présence d'un courant lorsqu'elles sont soumises à des perturbations tridimensionnelles sous-harmoniques.
- D'utiliser la méthode variationnelle de Whitham afin de déterminer une relation de dispersion quadratique dans le cas des ondes à courtes crêtes où les épaisseurs des deux fluides sont finies. Cette relation permettra de déduire une relation explicite du courant critique non-linéaire en fonction des paramètres du problème.

Bibliographie

- [1] V. Bontozoglou et T.J. Hanratty. Effects of finite depth and current velocity on large amplitude kelvin-helmholtz waves. *J. Fluid Mech.*, 196 :187–204, 1988.
- [2] D. J. Meiron et P. G. Saffman. Overhanging interfacial gravity waves of large amplitude. *J. Fluid Mech.*, 129 :213–218, 1983.
- [3] N. Allalou , M. Debian et C. Kharif. On the superharmonic instability of nonlinear three-dimensional interfacial waves of two infinite layers. *Eur. J. Mech. B/Fluids.*, 59 :135–139, 2016.
- [4] G. G. Stokes. On the theory of oscillatory waves. *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 8(10) :441–455, 1847.
- [5] T. Levi-Civita. Détermination rigoureuse des ondes permanentes d’ampleur finie. *Math. Ann.*, 93 :264–314, 1925.
- [6] J. N. Hunt. Interfacial waves of finite amplitude. *Houille Blanche.*, 16 :515–531, 1961.
- [7] S. A. Thorpe. On standing internal gravity waves of finite amplitude. *J. Fluid Mech.*, 32 :484–528, 1968.
- [8] R. Davis et A. Acrivos. Solitary internal waves in deep water. *J. Fluid Mech.*, 29 :593–607, 1967.
- [9] Y. Tsuji et Y. Nagata. Stokes expansion of internal deep water waves to the fifth order. *J. Ocean. Soc. Japan.*, 29 :61–69, 1973.
- [10] J. Y. Holyer. Large amplitude progressive interfacial waves. *J. Fluid Mech.*, 93 :433–448, 1979.
- [11] J. M. Vanden-Broeck. Numerical calculation of gravity-capillary interfacial waves of finite amplitude. *Phys. Fluids.*, 23 :1723–1726, 1980.
- [12] J. W. Rottman. Steep standing waves at a fluid interface. *J. Fluid Mech.*, 124 :283–306, 1982.
- [13] J. W. Miles. Weakly nonlinear waves in a stratified fluid. *J. Fluid Mech.*, 172 :499–512, 1986.
- [14] R. H. J. Grimshaw et D. I. Pullin. Extrem interfacial waves. *Phys. Fluids.*, 29 :2802–2807, 1968.

-
- [15] E. I. Părău et F. Dias. Interfacial periodic waves of permanent form with free-surface boundary conditions. *J. Fluid Mech.*, 437 :325–336, 2000.
- [16] P.G. Saffman et H. Yuen. Finite-amplitude interfacial waves in the presence of a current. *J. Fluid Mech.*, 123 :459–476, 1982.
- [17] H. Jeffreys. On water waves near the shore. *Lond. Edinb. Dublin philos. mag. j. sci.*, 48 :1941–5982, 1924.
- [18] R. A. Fuchs. On the theory of short-crested oscillatory gravity waves. *US Natl Bur. Stand. Circular.*, 521 :187–200, 1952.
- [19] J. E. Chappellear. On the description of short crested waves. *Beach Erosion Board, US Army Corps Engrs Tech.*, page page Memo 125, 1961.
- [20] J. R.C. Hsu , Y. Tsushiya et R. Silvester. Third-order approximation to short-crested waves. *J. Fluid Mech.*, 90 :179–196, 1979.
- [21] A. J. Roberts et L. W. Schwartz. The calculation of nonlinear short-crested gravity waves. *Phys. fluids.*, 26 :2388–2392, 1983.
- [22] A. J. Roberts. Highly nonlinear short-crested water waves. *J. Fluid. Mech.*, 135 :301–321, 1983.
- [23] T.R. Marchant et A.J. Roberts. Properties of short-crested waves in water of finite depth. *J. Aust. Math. Soc.*, B 29 :103–125, 1987.
- [24] M. Okamura. Notes on short-crested waves in deep water. *J. Phys. Soc. Japan.*, 65 :2841–2845, 1996.
- [25] O. Kimmoun , M. Ioualalen et C. Kharif. Instabilities of steep short-crested surface waves in deep water. *Phys. Fluids*, 11 :1679–1681, 1999.
- [26] J. Fu et H. Huang. The patterns of surface capillary-gravity short-crested waves with uniform current fields in coastal waters. *Acta Mechanica Sinica.*, 22 :433–441, 2006.
- [27] Y.J. Jian Q.Y. Zhu , J. Zhang et Y.F. Wang. Third order approximation to capillary gravity short crested waves with uniform currents. *Appl. Math. Model.*, 33 :2035–2053, 2009.
- [28] M. Debiane et C. Kharif. Calculation of resonant short-crested waves in deep water. *Physics of Fluids.*, 21 :062106–062106–12, 2009.
- [29] P. Concus. Standing capillary-gravity waves of finite amplitude : Corrigendum. *J. Fluid Mech.*, 19 :264–266, 1964.
- [30] P.I. Plotnikov et J.F. Toland. Nash-moser theory for standing water waves. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 159, 2001.
- [31] G. Iooss et P. Plotnikov. Asymmetrical three-dimensional travelling gravity waves. *Arch Rational Mech Anal.*, 200 :789–880, 2011.
- [32] N. Allalou , M. Debian et C. Kharif. Three-dimensional periodic interfacial gravity waves : Analytical and numerical results. *Eur J Mech B Fluids-B/Fluids.*, 30 :371–386, 2011.

-
- [33] D. Boughazi , M. Debiane et N. Allalou. Interfacial capillary-gravity short-crested waves. *Comptes Rendus. Mécanique.*, 351 :315–334, 2023.
- [34] M. Oikawa. On the weak interactions of the benjamin-ono solitons. *Bull. Res. Inst. Appl. Mech. Kyushu Univ.*, 60 :467–472, 1984.
- [35] S. Pennel et R. M. Mirie. Weak oblique collisions of interfacial solitary waves. *Wave Motion.*, 21 :385–404, 1995.
- [36] J.C.Luke. A variational principle for a fluid with a free surface. *J. of Fluid Mechanics.*, 27(2) :395–397., 1967.
- [37] M. Ioualalen. Étude de la stabilité linéaire d’onde de gravité progressives et tridimensionnelles en profondeur infinie. *PhD thesis, Univ. Aix-Marseille II.*, 1990.
- [38] J. Gilewicz. Approximants de padé. *Springer, New York.*, 667, 1987.
- [39] C. M. Bender et S. A Orszag. Advanced mathematical methods for scientists and engineers. *McGraw-Hill .*, 1987.
- [40] G. B. Wallis et J. E. Dobson. Prediction of the initiation of slugs with linear stability criterion. *Int. J. Multiphase Flow.*, 1 :173–193, 1973.
- [41] M. Tanaka. Nonlinear self-modulation of interfacial waves. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 51 :2016–2023, 1982.
- [42] H. C. Yuen. Nonlinear dynamics of interfacial waves. *Physica 12D*, pages 71–82, 1984.
- [43] D.U. Martin P. G. Saffman et H. C. Yuen. J. M. McLean, D. U. Ma. Three-dimensional instability of finite amplitude water waves. *Phys. Rev. Letts.*, 46 :817–820, 1981.
- [44] R. H. J. Grimshaw et D. I. Pullin. Stability of finite-amplitude interfacial waves. part 1. modulational instability for small-amplitude waves. *J. Fluid Mech.*, 160 :297–315, 1985.
- [45] R. H. J. Grimshaw et D. I. Pullin. Stability of finite-amplitude interfacial waves. part 2. numerical results. *J. Fluid Mech.*, 160 :317–336, 1985.
- [46] M.S.Longuet-Higgins. The instabilities of gravity waves of finite amplitude in deep water, i. superhrmonics. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 360 :471–488, 1978.
- [47] A. Dixon. A stability analysis for interfacial waves using a zakharov equation. *J. Fluid Mech.*, 214 :185–210, 1990.
- [48] C. P. Zhou , J. H. W Lee et Y. K. Cheung. Instabilities and bifurcations of interfacial water waves. *Phys. Fluids.*, 4 :1428–1438, 1992.
- [49] P. Christodoulides et F. Dias. Stability of capillary-gravity interfacial waves between two bounded fluids. *Phys. Fluids.*, 7(12) :3013–3027, 1995.
- [50] M. Ioualalen et C. Kharif. Stability of three-dimensional progressive gravity waves on deep water to superharmonic disturbances. *Eur. J. Mech. B/Fluids.*, 12 :401–414, 1993.
- [51] M. Ioualalen et C. Kharif. On the subharmonic instabilities of steady three-dimensional deep water waves. *J. Fluid .Mech.*, 262 :265–291, 1994.

-
- [52] S. I. Badulin, V.I. Shrira, C. Kharif et M. Ioualalen. On two approaches to the problem of instability of short crested water waves. *J. Fluid Mech.*, 303 :297–326, 1995.
- [53] M. Ioualalen, A. J. Roberts et C. Kharif. Stability regimes of finite depth short-crested water waves. *J. Phys. Oceanogr.*, 29 :2318–2331, 1999.
- [54] M. Ioualalen, A. J. Roberts et C. Kharif. On the observability of finite-depth short-crested water waves. *J. Fluid Mech.*, 322 :1–19, 1996.
- [55] S. Chikhi et M. Debiane. On the sub-harmonic instabilities of three-dimensional interfacial gravity–capillary waves in infinite depths. *Comptes Rendus. Mécanique.*, 350 :2318–191–203, 2022.
- [56] J. Zhang et W. K. Melville. Three-dimensional instabilities of nonlinear gravity-capillary waves. *J. Fluid Mech.*, 174 :187–208, 1987.
- [57] M. Ioualalen et M. Okamura. Structure of the instability associated with harmonic resonance of short-crested waves. *J. Phys. Oceanogr.*, 32 :1331–1337, 2002.
- [58] M. Ioualalen, C. Kharif, M. Okamura, S. Cornier, et A. J. Roberts. Computation of short-crested deepwater waves. *J. Waterw. Port C.-ASCE.*, 132 :157–167, 2004.

Annexe

Les expressions des coefficients dans $\phi_1^{(2)}$, $\phi_2^{(2)}$ et $\eta^{(2)}$ sont données par :

$$\begin{aligned}
 a_{2,2}^{(2)} &= \frac{1}{8D_{2,2}} [(-4\mu p^2 U^2 h_{22} + 8\mu pU\omega_0 h_{22} - 4\mu\omega_0^2 h_{22} + 4p^2\omega_0^2 g_{22} + 2\omega_0 pU g_{22} \\
 &\quad - 2\omega_0 p^3 U g_{22} - \omega_0^2 T_2^2 h_{22} g_{22} + 2\mu p^2 U^2 T_1 h_{22} g_{22} + 2\mu pU\omega_0 h_{22} g_{22} + \mu T_1^2 p^2 U^2 h_{22} g_{22} \\
 &\quad + 2\mu\omega_0^2 T_1 h_{22} g_{22} - 2\omega_0^2 T_2 h_{22} g_{22} - \mu\omega_0^2 h_{22} g_{22} + \omega_0^2 h_{22} g_{22} - \mu p^2 U^2 h_{22} g_{22} + \mu T_1^2 \omega_0^2 h_{22} g_{22} \\
 &\quad - 4\mu pU T_1 \omega_0 h_{22} g_{22} - 2\mu^2 pU\omega_0 h_{22} g_{22})] \\
 b_{2,2}^{(2)} &= \frac{1}{8D_{2,2}} [(2\omega_0^3 T_2 h_{22} - 2pU h_{22} - 2\mu\omega_0 h_{22} + 6p^3 U\omega_0^2 + 2p^2 U^2 \omega_0 + 2pU\omega_0^2 - 2p^4 U^2 \omega_0 \\
 &\quad - 3p^2 U^2 \mu T_1^2 \omega_0 h_{22} + \mu\omega_0^3 h_{22} + \omega_0^3 T_2^2 h_{22} + 6pU\mu\omega_0^2 T_1 h_{22} + 2\mu pU h_{22} - \omega_0^3 h_{22} \\
 &\quad + 3pU\mu T_1^2 \omega_0^2 h_{22} - 6p^2 U^2 \mu T_1 \omega_0 h_{22} + 2\omega_0 h_{22} - \mu T_1^2 \omega_0^3 h_{22} - 2\mu\omega_0^3 T_1 h_{22} \\
 &\quad - 4p^2 \omega_0^3 - 2pU\omega_0^2 T_2 h_{22} + 2p^3 U^3 \mu T_1 h_{22} - 3pU\mu\omega_0^2 h_{22} + 3p^2 U^2 \mu \omega_0 h_{22} \\
 &\quad - 4\omega_0^3 + p^3 U^3 \mu T_1^2 h_{22} - pU\omega_0^2 T_2^2 h_{22} - p^3 U^3 \mu h_{22} + pU\omega_0^2 h_{22})] \\
 c_{2,2}^{(2)} &= \frac{1}{8D_{2,2}} [(2pU\mu\omega_0^2 g_{22} + \omega_0^3 g_{22} - 4\mu\omega_0^3 - 4pU\mu\omega_0^2 T_1 g_{22} - \omega_0^3 T_2^2 g_{22} + pU g_{22} + 6pU\mu\omega_0^2 \\
 &\quad - 2\omega_0^3 T_2 g_{22} - \mu\omega_0^3 g_{22} + p^3 U\mu g_{22} - 2p^2 \omega_0 \mu g_{22} - 4p^2 \omega_0^3 \mu + 10p^3 \omega_0^2 \mu U - 8p^4 \omega_0 \mu U^2 \\
 &\quad - p^2 U^2 \mu \omega_0 g_{22} + 2p^2 \omega_0 g_{22} - pU\mu g_{22} - p^3 U g_{22} + 2\mu\omega_0^3 T_1 g_{22} + \mu T_1^2 \omega_0^3 g_{22} - 2p^3 U^3 \mu \\
 &\quad + 2p^5 U^3 \mu - 2pU\mu T_1^2 \omega_0^2 g_{22} + 2p^2 U^2 \mu T_1 \omega_0 g_{22} + p^2 U^2 \mu T_1^2 \omega_0 g_{22})] \\
 a_{2,0}^{(2)} &= \frac{1}{8D_{2,0}} [(4\omega_0^2 g_{20} - 2\omega_0 pU g_{20} + 2\omega_0 p^3 U g_{20} + 2p^3 \omega_0^2 h_{20} g_{20} - \omega_0^2 h_{20} p g_{20} - 4\mu h_{20} p^4 U^2 \\
 &\quad - 4\mu h_{20} p^2 \omega_0^2 - \omega_0^2 T_2^2 h_{20} p g_{20} + 4\mu p^4 U\omega_0 h_{20} g_{20} + 2\mu p^3 U^2 T_1 h_{20} g_{20} + \mu T_1^2 p^3 U^2 h_{20} g_{20} \\
 &\quad - 2\mu p^2 U\omega_0 h_{20} g_{20} + 2\mu\omega_0^2 T_1 h_{20} p g_{20} - 2\omega_0^2 T_2 h_{20} p g_{20} + \mu\omega_0^2 h_{20} p g_{20} - 2\mu p^5 U^2 h_{20} g_{20} \\
 &\quad - 2\mu p^3 \omega_0^2 h_{20} g_{20} + \mu T_1^2 \omega_0^2 h_{20} p g_{20} + \mu p^3 U^2 h_{20} g_{20} - 4\mu p^2 U T_1 \omega_0 h_{20} g_{20} - 2\mu T_1^2 p^2 U\omega_0 h_{20} g_{20} \\
 &\quad + 8\mu h_{20} \omega_0 p^3 U)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{2,0}^{(2)} = & \frac{1}{8D_{2,0}} [(2p^4U^2\omega_0 + 6pU\omega_0^2 - \mu\omega_0^3h_{20}p - 2\mu h_{20}\omega_0p^3 - 2p^2U^2\omega_0 + 2p^4U\mu h_{20} - 2p^4Uh_{20} \\
& + 2p^3U\omega_0^2 + 2p^4U\omega_0^2h_{20} - p^2U\omega_0^2h_{20} + \omega_0^3h_{20}p - 2p^2U\omega_0^2T_2h_{20} + 2\mu p^3\omega_0^3h_{20} \\
& - p^2U\omega_0^2T_2^2h_{20} - 2p^6U^3\mu h_{20} + 2p^3\omega_0h_{20} - 3p^3U^2\mu T_1^2\omega_0h_{20} - 2\mu\omega_0^3T_1h_{20}p - 3p^3U^2\mu\omega_0h_{20} \\
& + p^4U^3\mu h_{20} + \omega_0^3T_2^2h_{20}p + 3p^2U\mu T_1^2\omega_0^2h_{20} - 4p^2\omega_0^3 - 2p^3\omega_0^3h_{20} - \mu T_1^2\omega_0^3h_{20}p \\
& + 2p^4U^3\mu T_1h_{20} + 3p^2U\mu\omega_0^2h_{20} + 6p^2U\mu\omega_0^2T_1h_{20} + 6p^5U^2\mu\omega_0h_{20} + p^4U^3\mu T_1^2h_{20} \\
& + 2\omega_0^3T_2h_{20}p - 6p^4U\mu\omega_0^2h_{20} - 4\omega_0^3 - 6p^3U^2\mu T_1\omega_0h_{20})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{2,0}^{(2)} = & \frac{1}{8D_{2,0}} [(-4p^2\omega_0^3\mu + 2\omega_0pg_{20} - 2p^5U^3\mu + 2p^3U^3\mu + 2p^3\omega_0^3g_{20} + p^4Ug_{20} - \omega_0^3pg_{20} - p^2Ug_{20} \\
& + \mu T_1^2\omega_0^3pg_{20} + p^3U^2\mu\omega_0g_{20} - 2p^5U^2\mu\omega_0g_{20} + 2\mu\omega_0^3T_1pg_{20} + 4p^4U\mu\omega_0^2g_{20} - p^4U\mu g_{20} \\
& - 2p^2U\mu\omega_0^2g_{20} + \mu\omega_0^3pg_{20} - \omega_0^3T_2^2pg_{20} + p^2U\mu g_{20} - 4\mu\omega_0^3 + 6p^3U\mu\omega_0^2 - 2\omega_0^3T_2pg_{20} \\
& - 2\mu p^3\omega_0^3g_{20} - 2\omega_0\mu pg_{20} - 8\omega_0\mu p^2U^2 + 10\mu pU\omega_0^2 + p^3U^2\mu T_1^2\omega_0g_{20} - 2p^2U\mu T_1^2\omega_0^2g_{20} \\
& + 2p^3U^2\mu T_1\omega_0g_{20} - 4p^2U\mu\omega_0^2T_1g_{20})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{0,2}^{(2)} = & \frac{-1}{8(\mu-1)} (4\mu pU T_1\omega_0 - 2\mu\omega_0^2T_1 + 2\omega_0^2T_2 + \mu T_1^2p^2U^2 - 2\mu T_1^2pU\omega_0 + \mu T_1^2\omega_0^2 \\
& + 2\mu p^2\omega_0^2 - 2p^2\omega_0^2 + 2\mu p^4U^2 - 4\mu p^3U\omega_0 - \mu p^2U^2 - \omega_0^2T_2^2 - \mu\omega_0^2 - 2\mu p^2U^2T_1 \\
& + 2\mu pU\omega_0 + \omega_0^2)
\end{aligned}$$

$$D_{2,2} = 2\mu p^2U^2h_{22} - 4\mu pU\omega_0h_{22} + 2\mu\omega_0^2h_{22} + 2\omega_0^2g_{22} - h_{22}g_{22} + \mu h_{22}g_{22}$$

$$D_{2,0} = 2\omega_0^2g_{20} - h_{20}pg_{20} + 2\mu\omega_0^2h_{20} + \mu h_{20}pg_{20} + 2\mu h_{20}p^2U^2 - 4\mu h_{20}pU\omega_0$$