

N° Ordre...../FT/UMBB/2024

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA-BOUMERDES



Faculté de Technologie

Département Ingénierie des Systèmes Electriques

Mémoire de Master

Présenté par

GUELIFET Haoua

HAMDOUN Mahdi

Filière : Automatique

Spécialité : Automatique et Informatique Industrielle

**Commande d'un pendule inversé monté sur un chariot - Application
de l'optimisation par essaim particulaire**

Soutenu le 30 /06 /2024 devant le jury composé de :

Mme Riache	Samah	MCA	UMBB	Président
M. Cherrat	Nidhal	MCB	UMBB	Examineur
Mme Gabour	Nour El Houda	MCB	UMBB	Rapporteur

Année Universitaire : 2023/2024

Remerciements

A mon professeur Mr. Messaoudi,

*J'ai eu l'honneur d'être parmi vos élèves et de bénéficier de votre riche
enseignement, Vous qualité pédagogique.*

*Veillez bien recevoir mes remerciements pour le grand honneur que vous
m'avez fait accepter l'encadrement de ce travail.*

A mon encadrant Mme. Gabour,

*Votre compétence, votre encadrement ont toujours suscité mon profond respect,
je vous remercie pour vous conseils et orientation.*

Aux membres du jury,

*Messieurs les jurys, vous nous faites un grand honneur en acceptant de juger ce
travail, je dois un remerciement à tous les enseignements de mon master pour
leurs qualités scientifiques et pédagogiques.*

Je tiens à remercier chaleureusement, tous mes proche

Dédicace

Nous remercions tout d'abord Dieu le tout puissant pour ses faveurs et ses grâces, de nous avoir donné le courage, la patience et la motivation pour mener à bien ce modeste travail.

À mes chers parents,

Je vous dédie ce modeste travail qui est le fruit de vos interminables conseils, assistance et soutien moral, dans l'espoir que vous en serez fiers.

Je remercie ma chère mère qui est toujours à mes côtés, et mon précieux père qui cherche toujours mon bien-être, je vous aime.

A mes chers frères et sœurs,

Je dédie mon travail à Mohamed et Mehdi, et à mes sœur Aya et Hadil, je vous souhaite un avenir radieux plein de réussite.

A mes chers ami(e)s,

Je dédie ce travail à tous mes chers amis qui m'ont soutenu, je vous souhaite un chemin illuminé par la réussite et que votre avenir soit empreint de prospérité et de succès.

Résumé

Ce mémoire explore la commande optimale du pendule inversé en utilisant des techniques avancées de régulation et d'optimisation. D'abord, il introduit le pendule inversé comme un modèle clé pour les systèmes non linéaires, soulignant son importance en robotique et en automatisation. Ensuite, il se concentre sur la conception et la mise en œuvre d'un régulateur linéaire quadratique (LQR) pour stabiliser le pendule, démontrant l'efficacité de cette approche pour minimiser une fonction de coût quadratique. Enfin, il présente l'optimisation par essaim particulaire (OEP) pour affiner les paramètres du LQR, illustrant comment cette technique bio-inspirée améliore significativement la performance et la stabilité du système. L'étude conclut que l'OEP est une méthode puissante pour optimiser les régulateurs dans des systèmes dynamiques complexes, avec des applications potentielles dans divers domaines technologiques.

Mots clés : Pendule inversé, Régulateur LQR, Optimisation, Non linéaire, Linéarisation, Essaim particulaire (OEP), Stabilité des systèmes.

ملخص

تستكشف هذه الأطروحة التحكم الأمثل للأنواع المقلوب باستخدام تقنيات التنظيم والتحسين المتقدمة. في البداية، يتم تقديم النواس المقلوب كنموذج رئيسي للأنظمة غير الخطية، مع التركيز على أهميته في الروبوتات والأتمتة. بعد ذلك، يتم تثبيت النواس، مما يظهر فعالية هذا النهج في تقليل دالة التكلفة التربيعية. التركيز على تصميم وتنفيذ منظم خطي تربيعي، مما يوضح كيف أن هذه التقنية المستوحاة لضبط معالم - سرب الجسيمات أخيراً، يتم تقديم تحسين أسراب الجسيمات هي طريقة قوية لتحسين المنظمات من منظم البيولوجيا تعزز بشكل كبير أداء النظام واستقراره. وتخلص الدراسة إلى أن في الأنظمة الديناميكية المعقدة، مع تطبيقات محتملة في مختلف المجالات التكنولوجية

الكلمات المفتاحية: النواس مقلوب، منظم، تحسين، غير خطي، خطية، تحسين بواسطة سرب الجسيمات، استقرار الأنظمة.

Summary

This thesis explores the optimal control of the inverted pendulum using advanced regulation and optimization techniques. It first introduces the inverted pendulum as a key model for nonlinear systems, emphasizing its importance in robotics and automation. Next, it focuses on the design and implementation of a Linear Quadratic Regulator (LQR) to stabilize the pendulum, demonstrating the effectiveness of this approach in minimizing a quadratic cost function. Finally, it presents the Particle Swarm Optimization (PSO) to fine-tune the LQR parameters, illustrating how this bio-inspired technique significantly enhances the system performance and stability. The study concludes that PSO is a powerful method for optimizing regulators in complex dynamic systems, with potential applications in various technological fields.

Keywords : Inverted Pendulum, LQR Regulator, Optimization, Nonlinear systems, Linearization, Particle Swarm Optimization (PSO), System Stability.

SOMMAIRE

Résumé.....	1
Les listes des figures.....	2
Les listes des tableaux.....	3
Les listes des abréviations	4
Les listes des symboles.....	5
Introduction Générale	8
Chapitre I Généralités sur les pendules et leur commande	10
I.1 Introduction.....	11
I.2 Définition d'un Pendule inversé.....	11
I.3 Historique d'un pendule inversé.....	11
I.4 Différence entre le pendule simple et le pendule inversé.....	13
I.5 Le système mécanique pendule inversé monté sur un chariot.....	13
I.6 Les types des pendules inversés.....	14
I.6.1 Le pendule inversé simple	14
I.6.2 Le pendule inversé simple rotatif.....	15
I.6.3 Le pendule inversé double.....	16
I.6.4 Le pendule inversé en T.....	16
I.7 Intérêt de l'étude des pendules inversés	17
I.7.1 Domaine de la Robotique.....	17
I.7.2 Domaine de l'automobile	18
I.7.3 Domaine de l'Aérospatiale	19
I.7.4 Domaine de Loisir	20
I.7.5 Domaine de la Médecine	20
I.8 Propriétés du pendule inversé	21
I.8.1 La non-linéarité	21
I.8.2 Le système holonome	21
I.8.3 La non stabilité en boucle ouvert	21
I.8.4 Le système sous-actionné	22
I.9 Stabilité du système pendule inversé monté sur un Chariot	22
I.9.1 Identification des Points d'Équilibre du système	22
I.9.2 Techniques de Stabilisation du système	23
I.9.2.1 Détection de l'Angle	23

I.9.2.2 Analyse de l'Etat	23
I.9.2.3 Calcul de la Commande	23
I.9.2.4 Application de la Commande	23
I.9.2.5 Boucle de rétroaction	23
I.10 Méthodes classiques pour la stabilité d'un pendule inversé	24
I.10.1 Commande Proportionnel-Dérivé-Intégral (PID)	24
I.10.2 Commande par Retour d'Etat Linéaire (LQR)	24
I.10.3 Commande par Retour d'État avec Observateur d'État (LQG)	24
I.10.4 Commande par Méthodes de Linéarisation par Feedback Non- linéaire.....	25
I.11 Conclusion.....	25
Chapitre II : La Commande Linéaire Quadratique.....	26
II.1 Introduction	27
II.2 Modélisation du système pendule inversé monté sur un chariot	27
II.2.1 Définitions	27
II.2.2 Analyse du système	27
II.2.3 Les équations de mouvement du système	28
II.2.4 Linéarisation des mouvements du système	29
II.2.5 Fonction de transfert des équations linéariser du système	30
II.2.6 Modèle d'état du système	31
II.2.6.1 Les matrices d'état du système	31
II.2.6.2 Les variables d'état du système	32
II.3 Etude de stabilité du système	32
II.3.1 Définition	32
II.3.2 But de l'Analyse de la Stabilité	32
II.3.3 Calculer les Valeurs Propres de la matrice A	33
II.3.4 L'Analyse des Valeurs Propres trouvé	33
II.4 Etude de la commandabilité du système	33
II.4.1 Définitions	33
II.4.2 L'importance et le but de la commandabilité	33
II.4.3 Condition de la commandabilité	34
II.4.4 La matrice de commandabilité du système	34

II.4.5 Vérification de la commandabilité du système	35
II.5 Etude de l'observabilité du système	35
II.5.1 Définitions	35
II.5.2 L'importance et le but de l'observabilité	36
II.5.3 Condition de l'observabilité	36
II.5.4 La matrice d'observabilité du système	36
II.5.5 Vérification de l'observabilité du système	37
II.6 La commande LQR du système pendule inversé monté sur un chariot.....	37
II.6.1 Définition	37
II.6.2 Objectif d'utilisation de la commande LQR	38
II.6.3 Principes de fonctionnement de la commande LQR	38
II.6.4 Définir la fonction de coût	38
II.6.5 Choisir les matrices Q et R et P	39
II.6.6 L'équation de Riccati	39
II.6.7 Le gain K	40
II.6.8 Calculer la loi de la commande U	40
II.7 Conclusion.....	41
Chapitre III : Optimisation Par Essaim Particulaire	42
III.1 Introduction	43
III.2 L'optimisation dans la commande	43
III.2.1 Définitions	43
III.2.2 Importance de l'optimisation dans divers domaines	43
III.2.3 Types des problèmes d'optimisation	43
III.2.3.1 Problèmes d'optimisation linéaire et non linéaire	44
III.2.3.2 Problèmes d'optimisation avec contraintes et sans contraintes	44
III.2.3.3 Problèmes d'optimisation mono objective vs multi objective	44
III.2.4 Concepts de minimisation ou maximisation d'une fonction objective	44
III.2.5 Les algorithmes d'optimisation évolutionnaires	45
III.2.5.1 Inspiration biologique dans l'optimisation	45
III.3 Les concepts fondamentaux de l'optimisation par essaim particulaire	45
III.3.1 L'inspiration des comportements de groupes d'animaux	46
III.3.2 L'inspiration biologique et sociales	47
III.3.2.1 Le comportements collectif des essaims d'oiseaux et bancs de poissons	47

III.3.2.2 L'influence des voisins et apprentissage collectif	47
III.3.3 Le modèle de base de l'OEP	47
III.3.3.1 Définition des particules et de l'essaim	47
III.3.3.2 La position et vitesse des particules	48
III.3.3.3 Les rôles des coefficients d'accélération cognitive et sociale	48
III.3.4 Le choix des fonctions objectif pour évaluer les solutions	48
III.3.5 Les paramètres de l'OEP	48
III.3.6 La taille et la topologie des voisinages	49
III.3.6.1 La topologie en étoile	49
III.3.6.2 La topologie en anneau	49
III.3.6.3 La topologie des rayons	50
III.4 Le fonctionnement de l'OEP	51
III.4.1 L'initialisation des populations	51
III.4.2 La mise à jour des positions et des vitesses	51
III.4.3 Le critères d'arrêt	52
III.5 Adaptation de l'OEP pour la commande du pendule inversé	52
III.5.1 La fonction objectif	52
III.5.2 Variables de décision	53
III.5.3 Bornes des Variables	54
III.5.4 Paramètres de base	54
III.5.5 Coefficients de l'algorithme	54
III.5.6 Initialisation de la population	54
III.5.7 La boucle principale de l'OEP	54
III.5.8 Mise à Jour des Meilleures Solutions Personnelles et Globales	54
III.5.9 Analyse des Résultats	54
III.6 Conclusion.....	55
Chapitre IV : Simulations et interprétations des résultats.....	56
IV.1 Introduction	57
IV.2 Les valeurs numériques des paramètres du système	57
IV.3 L'analyse du Système en Boucle Ouverte	58
IV.3.1 Le comportement du système non linéaire en boucle ouverte.....	58
IV.3.1.1 Graphe de la position du chariot (x)	59
IV.3.1.2 Graphe de l'angle du pendule (θ)	59

IV.3.2 Réponse du système linéarisé en Boucle Ouvert	59
IV.3.2.1 La représentation matricielle du système	59
IV.3.2.2 Les sorties observables du système.....	60
IV.4 Etude des performances du système.....	63
IV.4.1 La commandabilité du système	63
IV.4.2 L'observabilité du système	64
IV.4.3 Application des commandes au système	65
IV.4.3.1 La commande linéaire quadratique LQR	65
IV.4.3.2 Implémentation du régulateur LQR et simulation en Boucle Fermée	66
IV.5 La commande linéaire quadratique par l'optimisation par essaim particulière LQR -OEP	68
IV.5.1 Description du programme	68
IV.5.1.1 Définition du problème	68
IV.5.1.2 Initialisation des particules	69
IV.5.1.3 Boucle principale du OEP	69
IV.5.2 Déclaration de la fonction objectif	71
IV.5.3 Résultats de l'Optimisation OEP	71
IV.6 Conclusion	74
Conclusion Générale	75
Bibliographie.....	76

Liste des Figures

Figure I.1 : Système mécanique pendule inversé et chariot	14
Figure I.2 : Pendule inversé simple	15
Figure I.3 : Pendule inversé simple rotatif	15
Figure I.4 : Pendule inversé double.....	16
Figure I.5 : Pendule inversé en T	17
Figure I.6 : Robot inversé	18
Figure I.7 : Développement de la suspension d'automobile par un pendule inversé.....	19
Figure I.8 : Pendule gyroscopique inversé	19
Figure I.9 : La balançoire inversé	20
Figure I.10 : Illustration la stabilité du système.....	22
Figure II.1 : Le système pendule inversé monté sur un chariot.....	27
Figure III.1 : Groupe des oiseaux.....	46
Figure III.2 : Bancs de poissons.....	46
Figure III.3 : Topologie en étoile.....	49
Figure III.4 : Topologie en anneau.....	50
Figure III.5 : Topologie des rayons.....	51
Figure IV.1 : Courbe de la position du chariot en fonction du temps.....	58
Figure IV.2 : Courbe de l'angle du pendule en fonction du temps.....	58
Figure IV.3 : Schéma bloc de la réponse indicielle du système linéarisé.....	61
Figure IV.4 : La réponse indicielle du système en boucle ouverte : la position du chariot et l'angle du pendule en fonction du temps respectivement.....	62
Figure IV.5 : Schéma de bloc de la commande LQR appliquée au système.....	66
Figure IV.6 : Evolution de la position du chariot, de l'angle du pendule et de la force en fonction du temps dans le cas de la commande LQR sur le système.....	67
Figure IV.7 : Initialisation des paramètres de l'OEP.....	68
Figure IV.8 : Initialisation des particules avec leurs positions et vitesses respectives...	69
Figure IV.9 : Déroulement la boucle principale du l'OEP.....	70
Figures IV.10 : Déclaration de la fonction objectif.....	72
Figures IV.11 : Evolution de la position du chariot, de l'angle du pendule et de la force en fonction du temps dans le cas de la commande LQR-OEP sur la base de P_1	72
Figures IV.12 : Evolution de la position du chariot, de l'angle du pendule et de la force en fonction du temps dans le cas de la commande LQR-OEP sur la base de P_2	73

Liste des Tableaux

Tableau II.1 : Description des paramètres du système étudié et leurs unités.....	28
Tableau IV.1 : valeurs numériques des paramètres du système.....	57

Liste des abréviations

PID : Proportionnel-Intégral-Dérivé

LQR : La commande linéaire quadratique (Linear Quadratic Regulator)

SIRM : Simplified Inference Rule Model (Modèle de Règles d'Inférence Simplifié)

ANN : Artificial Neural Networks (Réseaux de Neurones Artificiels)

LQG : La commande linéaire quadratique gaussienne (Linear Quadratic Gaussian)

CMG : Control Moment Gyro (Girodyne de Contrôle de Moment)

OEP : L'optimisation par essaim particulaire

AOE : Les algorithmes d'optimisation évolutionnaires

OMEEO : Optimisation Multi-Objectif par Essaim de Particules

Liste des symboles

$\mathbf{u}(t)$: Commande appliquée au système.

\mathbf{Y} : Vecteur de sortie du système.

$\theta_1(t)$: Angle du premier pendule.

$\theta_2(t)$: Angle du deuxième pendule.

$\mathbf{x}_0(t)$: Position du chariot dans un pendule double.

q_1, q_2, \dots : Coordonnées généralisées du système holonome

m : La masse du pendule [kg]

M : La masse du chariot [kg]

l : La longueur de la tige du pendule [m]

g : L'accélération due à la gravité [m/s²]

$x(t)$: La position linéaire du chariot à l'instant t [m]

$\theta(t)$: L'angle du pendule par rapport à la verticale à l'instant t [rad]

$F(t)$: La force exercée sur le chariot à l'instant t [N]

$\dot{x}(t)$: La vitesse linéaire du chariot [m/s]

$\dot{\theta}(t)$: La vitesse angulaire du pendule [rad/s]

N : La force normale représentant la réaction du pendule sur le chariot [N]

b : Coefficient de frottement [Ns/m]

I : Moment d'inertie du pendule [kg·m²]

$X(s)$: Transformée de Laplace de $x(t)$

$\Phi(s)$: Transformée de Laplace de $\phi(t)$

$U(s)$: Transformée de Laplace de $F(t)$

\mathbf{X} : Vecteur d'état

u : Vecteur des entrées

y : Vecteur des sorties

C : Matrice de commandabilité

$Rang(C)$: Rang de la matrice de commandabilité

O : Matrice d'observabilité

$Rang(O)$: Rang de la matrice d'observabilité

Q : Matrice de pondération des états dans la fonction de coût

R : Matrice de pondération des entrées dans la fonction de coût

J : Fonction de coût quadratique

K : Matrice de gain de rétroaction d'état

P : Solution de l'équation de Riccati

$p(1), p(2), \dots, p(10)$: Éléments de la matrice P à optimiser (variables de décision).

Q : Matrice de poids pour la fonction objectif.

R : Valeur scalaire pour la fonction objectif.

Z : Coût à minimiser basé sur l'équation de Riccati.

ω : Coefficient d'inertie.

$C1$: Coefficient d'accélération cognitive.

$C2$: Coefficient d'accélération sociale.

$r1, r2$: Variables aléatoires uniformément distribuées entre 0 et 1.

$VarMin, VarMax$: Bornes des variables de décision.

$MaxIt$: Nombre maximum d'itérations.

$nPop$: Taille de la population (nombre de particules).

P : Matrice de Riccati solution à trouver.

K : Gain optimal du régulateur LQR.

A, ***B*** : Matrices de l'état du système.

Q, ***R*** : Matrices de coût du LQR.

c1, ***c2*** : Coefficients d'accélération cognitive et sociale spécifiques à l'OEP adaptée au LQR.

pBest : Meilleure position personnelle atteinte par une particule.

gBest : Meilleure position globale atteinte par l'ensemble de l'essaim.

Introduction Générale

La stabilité des systèmes dynamiques complexes, tels que le pendule inversé, est une préoccupation centrale dans divers domaines de l'ingénierie, de la robotique à l'automatisation industrielle. Ces systèmes, souvent caractérisés par leur nature non linéaire et leur sensibilité aux perturbations, exigent des stratégies de commande adaptées pour maintenir leur équilibre et assurer leur bon fonctionnement. L'un des défis majeurs dans la conception de systèmes de commande efficaces réside dans l'optimisation des paramètres du régulateur, notamment dans le cas du régulateur linéaire quadratique (LQR), largement utilisé pour sa capacité à stabiliser les systèmes dynamiques.

Dans cette optique, l'optimisation par essais particuliers (OEP) émerge comme une méthode prometteuse pour déterminer les paramètres optimaux des régulateurs, offrant ainsi une solution robuste pour la stabilisation des systèmes dynamiques. L'intégration de l'OEP avec le LQR permet de trouver des solutions de commande qui minimisent la fonction de coût tout en garantissant une performance optimale du système.

Ce mémoire explore ~~donc~~ l'application de l'OEP à l'optimisation des paramètres du régulateur LQR pour la stabilisation du pendule inversé. En mettant en œuvre cette approche, nous visons à démontrer l'efficacité de l'optimisation des paramètres de commande dans la stabilisation de systèmes dynamiques complexes. À travers une série de simulations et d'analyses théoriques, nous examinerons les performances du système en boucle ouverte et en boucle fermée, en mettant en évidence les avantages de l'approche OEP-LQR par rapport aux méthodes traditionnelles de commande.

Ce mémoire est structuré en quatre chapitres, chacun couvrant différents aspects de la modélisation, de l'optimisation et de la simulation du système de pendule inversé.

Nous commencerons par une introduction à la modélisation mathématique du système, en décrivant les équations différentielles qui régissent son comportement dynamique. Ensuite, nous explorerons la théorie du régulateur LQR et présenterons les concepts fondamentaux de l'optimisation par essais particuliers.

Nous passerons ensuite à la simulation des algorithmes conçus pour évaluer la performance du système.

Enfin, nous analyserons les résultats obtenus et tirerons des conclusions sur l'efficacité de l'approche OEP-LQR dans la stabilisation du pendule inversé et son potentiel pour des applications futures dans le domaine de la robotique et de l'automatisation.

Chapitre I

Généralités sur les pendules et leur commande

I.1 Introduction :

Dans ce premier chapitre, nous aborderons de manière générale les pendules inversés en explorant plusieurs aspects fondamentaux. Nous commencerons par un aperçu historique de ces systèmes, suivi d'une présentation des différents types de pendules inversés existants. Ensuite, nous discuterons sur l'importance de ces dispositifs dans divers domaines scientifiques et technologiques. Nous examinerons également le principe de fonctionnement des pendules inversés, avant de conclure par une explication des méthodes classiques de stabilisation et de modélisation de ces systèmes.

I.2 Définition d'un Pendule inversé :

Le pendule inversé est un système dynamique complexe et non linéaire qui représente un défi majeur en ingénierie de la commande. Le pendule inversé est maintenu en équilibre dans une position intrinsèquement instable, souvent à 180° degrés par rapport à la verticale. Cette caractéristique rend le pendule inversé particulièrement intéressant pour l'étude des systèmes de commande avancés. En effet, il offre un modèle parfait pour tester et affiner des stratégies de commande essentielles pour des applications pratiques comme les robots humanoïdes, les véhicules autonomes, et les systèmes aérospatiaux. Ainsi, il s'agit d'un outil crucial pour les ingénieurs souhaitant développer des techniques de stabilisation et de commande efficaces dans des systèmes où l'équilibre est difficile à maintenir. [1]

I.3 Historique d'un pendule inversé :

Le développement et l'histoire de commande de pendule inversé ont été marqués par une série d'innovations et d'approches méthodologiques visant à améliorer la performance et la robustesse de ces systèmes complexes et non linéaires.

Roberge Jarmes (1960) : Dans sa thèse intitulée "The Mechaical Seal", Roberge James a conçu avec succès un servomécanisme pour équilibrer un balai en utilisant les critères de Routh de Bode et de Nyquist, Cette première réussite a jeté les bases pour explorer le contrôle du pendule inversé avec des méthodes classiques de commande.

Prasad : Prasad a introduit l'utilisation conjointe des méthodes PID (Proportionnel-Intégral Dérivé) et LQR (Linear Quadratic Regulator) B pour stabiliser un pendule inversé. Cette approche

combinée a démontré une meilleure efficacité par rapport à l'utilisation exclusive du PID, soulignant ainsi l'importance des méthodes de commande modernes.

Yi et Yubazaki : Yi et Yubazaki, ont proposé un régulateur basé sur le modèle d'inférence floue connecté dynamiquement (SIRM) pour la commande de stabilisation des systèmes de pendule inversé. Ce régulateur innovant utilise des techniques d'inférence floue pour contrôler à la fois l'angle du pendule et sa position, en tirant parti de la flexibilité et de la robustesse de la logique floue.

Lu : Lu a exploité l'algorithme génétique pour générer automatiquement des règles floues et des facteurs de mise à l'échelle pour la commande du pendule inversé. Cette approche basée sur l'apprentissage automatique a permis de développer des stratégies de commande adaptatives et efficaces.

Margaliot et Mikukcik : Maraaliot a proposé une nouvelle approche utilisant la synthèse de Lyapunov K, pour déterminer la structure de commande floue du pendule inversé. Mikukcik quant à lui, a développé des règles floues pour la commande du pendule inversé en utilisant une méthode de regroupement flou, mettant en lumière l'importance de la modélisation floue dans ce contexte.

Saez : Saez a utilisé le contrôleur prédictif généralisé pour déterminer les paramètres du modèle flou de Takagi-Sugeno, qui est efficace pour la commande du pendule inversé en prévoyant les tendances du système.

Wong Yamakawa : Wong a appliqué l'algorithme génétique pour accorder toutes les fonctions d'appartenance d'un système flou, tandis que Yamakawa a conçu un système matériel de régulateur flou à haute vitesse, démontrant ainsi les avantages pratiques de la logique floue dans la commande en temps réel.

Kawaji : Kawaji a développé un contrôleur flou composé de deux modules de règles simples, en transformant l'information de la position du chariot en un angle cible virtuel pour stabiliser le pendule inversé.

Kyung : Kyung a présenté un contrôleur flou basé sur trois réseaux de neurones, soulignant les synergies potentielles entre les techniques de commande floue et les réseaux neuronaux.

Matsuura et Yasunobu : Matsuura et Yasunobu, ont proposé l'utilisation d'ensembles de règles floues pour générer un angle cible virtuel à partir des informations du chariot, démontrant ainsi une approche systématique pour la stabilisation du pendule inversé.

Sakai : Sakai a appliqué des méthodes d'optimisation non linéaire pour former un contrôleur flou efficace pour la stabilisation du pendule inversé, illustrant l'application de techniques avancées de commande dans ce domaine.[2]

I.4 Différence entre le pendule simple et le pendule inversé :

Un pendule simple est un système mécanique constitué d'une masse ponctuelle suspendue à un fil ou une tige sans masse, fixé à un point d'attache. La masse m est attachée à une tige ou un fil de longueur L sans masse, et le point d'attache fixe permet à la masse de se balancer librement sous l'effet de la gravité. Le mouvement du pendule simple est oscillatoire et suit une trajectoire circulaire. La position d'équilibre stable est atteinte lorsque la masse est directement sous le point d'attache ($\theta = 0$). Des perturbations autour de cette position entraînent des oscillations de faible amplitude, revenant à l'équilibre en l'absence de friction. Le pendule simple est un système passif avec une dynamique linéaire simple pour de petites oscillations. Il est souvent utilisé pour des études basiques de mouvement oscillatoire et dans les horloges pendulaires.

Un pendule inversé, en revanche, est un système où une tige rigide avec une masse à une extrémité est montée sur un pivot ou une charnière à l'autre extrémité, avec la masse placée au-dessus du point de pivot. La base du pivot peut être fixe ou mobile, permettant des systèmes comme le chariot-pendule. Le mouvement du pendule inversé est plus complexe, impliquant à la fois la rotation de la tige et le mouvement de la base si elle est mobile. Des régulateurs PID ou LQR, est souvent nécessaire pour maintenir la position verticale ($\theta = 0$). En l'absence de commande, le pendule inversé tend naturellement à tomber, et des forces de commande doivent être appliquées pour le maintenir à la position verticale. Cette instabilité naturelle en fait un excellent modèle pour les systèmes de commande et l'étude des techniques de stabilisation, avec des applications dans la modélisation de systèmes robotiques et les balanciers automatiques.[3]

I.5 Le système mécanique pendule inversé monté sur un chariot :

Le pendule inversé est généralement constitué d'un chariot se déplaçant le long d'un rail horizontal, avec un pendule attaché au chariot. Ce système mécanique relativement simple est utilisé comme banc d'essai pour développer et tester des techniques de commande dans divers domaines, notamment la robotique, l'aérospatiale et la défense. La configuration du chariot et du pendule permet d'illustrer concrètement les principes de la dynamique et de la commande des systèmes

instables. En manipulant la position du chariot à l'aide de moteurs, il est possible de modifier la trajectoire du pendule et de démontrer les techniques de stabilisation utilisées pour maintenir l'équilibre. Les expériences menées avec ces systèmes facilitent le développement de solutions pratiques pour des applications complexes, telles que la commande des satellites, les systèmes de stabilisation de drones et les exosquelettes robotiques.[4]

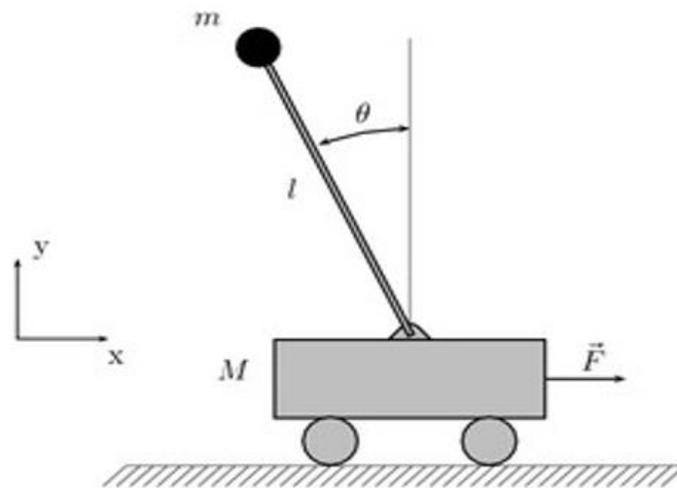


Figure I.1 : Système mécanique pendule inversé et chariot [5]

I.6 Les types des pendules inversés :

I.6.1 Le pendule inversé simple :

Le pendule inversé simple se compose d'un chariot supportant un pendule inversé articulé. Ce chariot peut se déplacer horizontalement le long d'une raille de guidage grâce à un moteur d'entraînement. La masse ponctuelle suspendue au bout d'une tige rigide peut pivoter autour d'un point fixe. Ce système présente une dynamique non linéaire et instable, nécessitant des algorithmes de commande pour maintenir sa position. Il est utilisé dans plusieurs domaines comme :

- **La Robotique** : Utilisé pour développer des algorithmes de commande et de stabilisation pour les robots autonomes. Par exemple, pour maintenir l'équilibre d'un robot à roues ou à pattes.
- **Ingénierie** : Étudié pour comprendre les principes de commande des systèmes dynamiques et des mécanismes oscillants. Il est également utilisé pour optimiser la conception des structures mécaniques.[6]

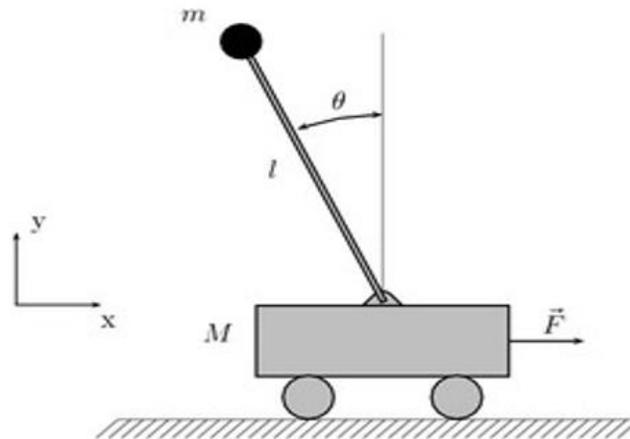


Figure I.2 : Pendule inversé simple [5]

I.6.2 Le pendule inversé simple rotatif :

Le pendule inversé simple rotatif remplace le chariot par un bras rotatif, offrant deux sorties $Y = \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix}$. En plus du mouvement pendulaire, la masse à l'extrémité peut effectuer une rotation autour de son axe, introduisant des comportements gyroscopiques dans la dynamique du système. Il est utilisé dans plusieurs domaines comme :

- **La commande de Drones et de Véhicules :** Modélisation et commande du mouvement de drones ou de véhicules nécessitant une stabilisation gyroscopique pour maintenir leur stabilité en vol.
- **La Mécanique :** Étude des propriétés gyroscopiques et des effets de la rotation dans les systèmes mécaniques. [7]

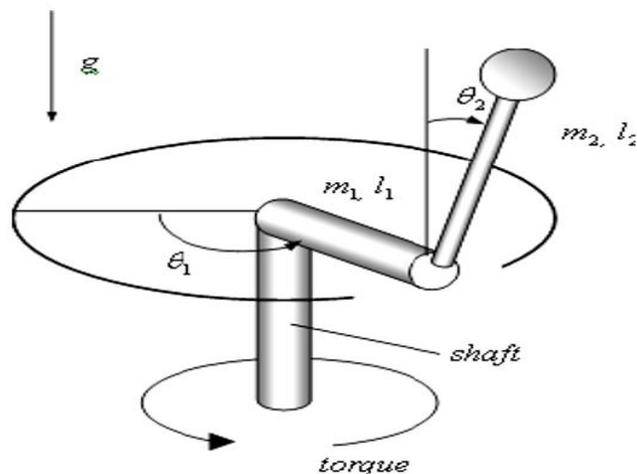


Figure I.3 : Pendule inversé simple rotatif [7]

I.6.3 Le pendule inversé double :

Le pendule inversé double est généralement commandé par une entrée $u(t)$ qui représente la

commande appliquée au système. Les sorties typiques incluent $Y = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix}$ qui représentent

respectivement la position du chariot, l'angle du premier pendule et l'angle du deuxième pendule.

Il est utilisé dans plusieurs domaines comme :

- **Robotique Avancée** : Utilisé pour modéliser et contrôler des robots bipèdes afin de reproduire des mouvements humains plus naturels et stables.
- **Recherche en Dynamique** : Étude des interactions multi-corps et des systèmes à plusieurs degrés de liberté. Par exemple, dans l'étude des mouvements des membres inférieurs dans la locomotion humaine.
- **Développement d'algorithme de commande** : Pour tester et améliorer les techniques de stabilisation et de commande dans des systèmes complexes.[8]

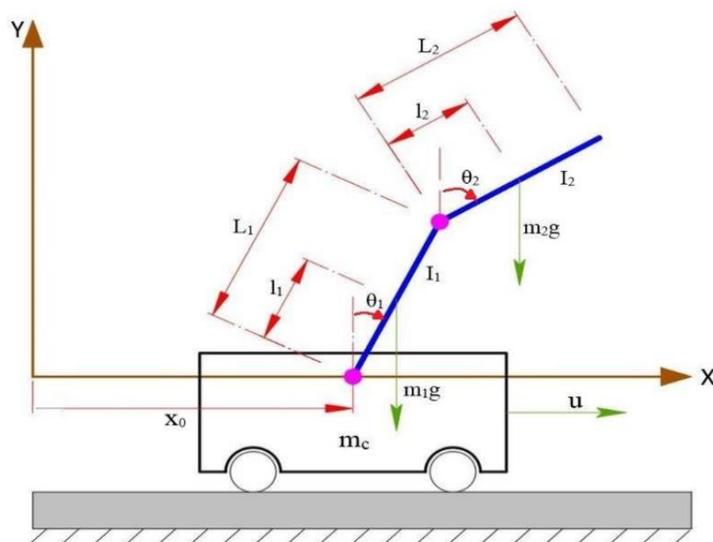


Figure I.4 : Pendule inversé double [8]

I.6.4 Le pendule inversé en T :

Le pendule inversé en T se compose d'une barre horizontale coulissante perpendiculaire à une barre verticale dont le bas tourne librement autour de son axe. Cette configuration affecte la stabilité et la dynamique du système, nécessitant une commande précise pour maintenir son équilibre.

Il est utilisé dans plusieurs domaines comme :

- **Robotique Médicale** : Modélisation des systèmes chirurgicaux robotisés pour garantir leur stabilité et leur précision lors d'interventions médicales délicates.
- **Études Biomécaniques** : Simulation des mouvements humains et des prothèses pour l'analyse et la conception ergonomique, notamment pour les membres artificiels.

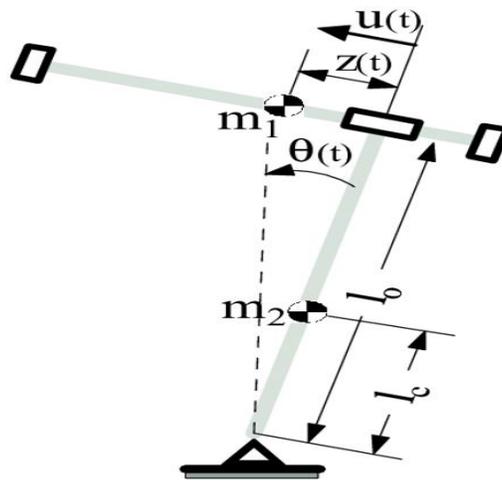


Figure I.5 : Pendule inversé en T [9]

I.7 Intérêt de l'étude des pendules inversés :

L'intérêt d'un pendule inversé peut varier selon différents domaines d'application, notamment dans la robotique, l'automobile, l'aérospatiale, les loisirs et la médecine.

I.7.1 Domaine de la Robotique :

Les pendules inversés sont souvent utilisés comme plateformes de test pour développer et évaluer des algorithmes de commande et de stabilisation. La capacité à maintenir un pendule inversé en équilibre instable illustre des techniques avancées de commande qui peuvent être appliquées à d'autres systèmes robotiques, y compris les robots bipèdes.

Les pendules inversés sont des systèmes d'apprentissage populaires en robotique pour entraîner des algorithmes d'apprentissage par renforcement. Cela permet aux robots d'apprendre à équilibrer et à contrôler efficacement des systèmes instables, ce qui est crucial pour de nombreuses applications robotiques.

Le pendule inversé correspondant à sa position verticale au cours de son déplacement et en présence d'autres perturbations. Nous citons par exemple le robot auto-balancé qui est constitué d'une plateforme solidaire de deux roues. L'axe des roues est perpendiculaire à l'axe de déplacement du robot et le principe de commande de position est basé sur le principe du pendule inversé.

La figure de gauche illustre un robot-voiture destiné aux enfants qui utilise le principe du pendule inversé pour se tenir debout.

A droite nous avons un robot auto balancé et stable pour servir les boissons comme un serveur humain.



Figure I.6 : Robot inversé [10]

I.7.2 Domaine de l'automobile :

Les principes de commandes utilisés pour stabiliser un pendule inversé peuvent être appliqués la commande dynamique de la suspension des véhicules.

En utilisant des capteurs et des actionneurs, le système peut réagir rapidement pour compenser les mouvements indésirables du châssis, offrant ainsi un meilleur confort et une meilleure tenue de route.

Un pendule inversé peut aider à réduire le roulis dans les virages en appliquant des forces opposées pour maintenir le véhicule stable. Cela améliore la sécurité et les performances de conduite, surtout dans les virages serrés ou à haute vitesse.

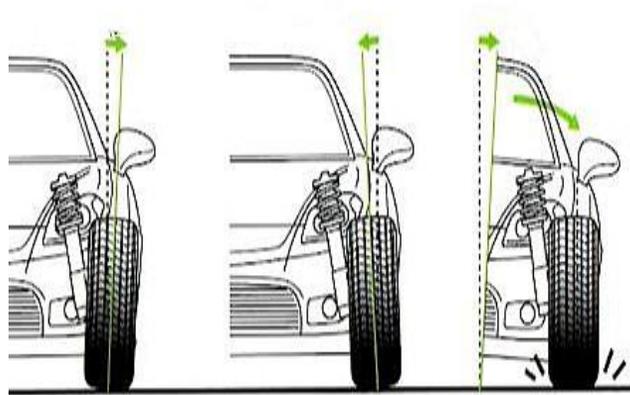


Figure I.7 : Développement de la suspension d'automobile par un pendule inversé [10]

I.7.3 Domaine de l'Aérospatiale :

Dans ce domaine, l'étude des pendules inversés a une grande importance, par exemple pour commander et stabiliser la latitude du satellite, le lancement des fusées.

Pour stabiliser la latitude d'un satellite par les actionneurs gyroscopiques. Les actionneurs gyroscopiques également appelés girodynes (CMG : Control Moment Gyro) constituent un nouveau système d'actionneurs qui permettent de générer des couples dynamiques de commande de basculement la latitude d'un satellite. L'expérience consiste à le rappeler vers la position d'équilibre (instable), il est donc considéré comme un pendule inversé.

Pour le lancement des fusées : lors de son lancement, une fusée est considérée comme un pendule inversé simple, donc il faut maintenir sa position verticale par rapport à la terre, et pour cela, des moteurs à propulsion sont installés dans les deux côtés de la fusée.

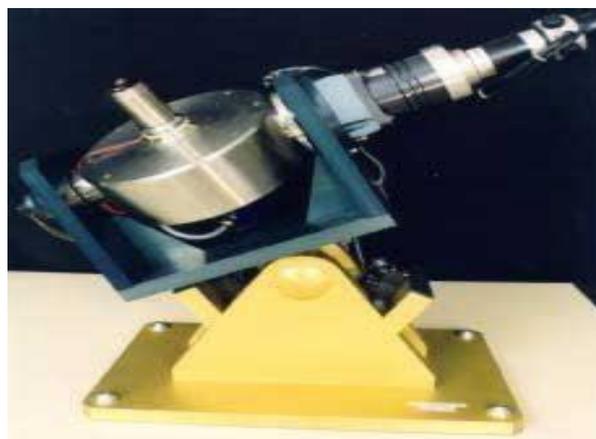


Figure I.8 : Pendule gyroscopique inversé [10]

I.7.4 Domaine de Loisir :

Les pendules inversés sont souvent utilisés comme base pour des jouets et des gadgets interactifs, comme les balançoires, hoverboards, les gyroscopes et les jouets télécommandés. Cela permet des expériences ludiques et éducatives avec la physique du mouvement et du contrôle. Dans le domaine du divertissement, les robots avec des fonctionnalités de pendule inversé peuvent être utilisés pour des performances artistiques et des spectacles. Ces robots peuvent effectuer des mouvements complexes et impressionnants qui captivent le public.



Figure I.9 : La balançoire inversé [10]

I.7.5 Domaine de la Médecine :

Les principes de commande utilisés pour stabiliser un pendule inversé peuvent être appliqués au développement de dispositifs d'assistance à la marche et à la mobilité pour les personnes ayant des problèmes d'équilibre ou de coordination.

Les pendules inversés peuvent être utilisés comme outils de rééducation et thérapie pour aider les patients à améliorer leur équilibre et leur coordination après des blessures ou des accidents neurologiques.

Quand nous sommes en position debout, nos articulations travaillent sans arrêt pour nous y maintenir. Les spécialistes qui travaillent dans le domaine de réalisation de prothèses pour les hanches (remplacement chirurgical d'un organe, la pièce ou l'appareil de remplacement) sont amenés à utiliser un double pendule inversé pour calculer l'ensemble des contraintes qui sont soumises à la prothèse. Le premier pendule est articulé à la cheville et représente les membres inférieurs considérés groupés. Le second pendule est articulé à la hanche et représente la partie supérieure du corps. On accélère en se penchant en avant et on mène le pendule inversé.

I.8 Propriétés du pendule inversé :

Malgré les différentes tailles et différents matériaux utilisés pour fabriquer des pendules, ils ont des caractéristiques communes mentionnées ci-dessous :

I.8.1 La non-linéarité :

Par définition, un système non linéaire est un système qui n'est pas linéaire, c'est-à-dire (au sens physique) qui ne peut pas être décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Un système non linéaire est un système qui ne peut pas être décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

En effet, la non linéarité peut être due à :

- Phénomène de saturation ;
- Phénomène de seuil ;
- L'hystérésis ;
- Loi entrée-sortie de chaîne cinématique non linéaire (modélisation qui contient les lois de trigonométrie) ;

I.8.2 Le système holonome :

Un système mécanique S est holonome si la position de ses différentes parties peut être caractérisée par n variables indépendantes q_1, q_2, \dots appelées coordonnées généralisées du système.

On dit alors que S est système holonome à n degrés de liberté. Le pendule inversé est également un système holonome, avec les coordonnées généralisées.

I.8.3 La non stabilité en boucle ouvert :

La position d'équilibre du pendule inversé est instable en boucle ouverte voilà pourquoi le système nécessite des capteurs pour mesurer la distance parcourue par le chariot et l'angle du pendule. Après avoir mesuré ces variables il faut les renvoyer au système de commande, créant ainsi un système en boucle fermée.

I.8.4 Le système sous-actionné :

Les systèmes mécaniques sous-actionnés sont définis comme étant des systèmes dont le nombre d'actionneurs est inférieur au nombre de degrés de liberté. Le pendule inversé stabilisé par volant d'inertie est, du fait qu'il a moins d'actionneurs que de degrés de liberté, un système mécanique sous-actions.

I.9 Stabilité du système pendule inversé monté sur un Chariot :

I.9.1 Identification des Points d'Équilibre du système :

La stabilité d'un pendule inversé monté sur un chariot, dont le point d'équilibre est désigné comme le point B, repose sur la capacité du système de commande à maintenir cet état d'équilibre intrinsèquement instable. Pour ce faire, on utilise des régulateurs capables de compenser les perturbations en ajustant les signaux de commande en temps réel. Le point d'équilibre B, situé à 180 degrés par rapport à la verticale, représente une position où toute déviation doit être corrigée immédiatement pour éviter la chute du pendule. Des techniques de rétroaction dynamique, telles que la linéarisation par retour d'état, les méthodes de placement des pôles et la commande LQR (Linear Quadratic Regulator), sont couramment employées pour concevoir des contrôleurs. Ces techniques assurent la stabilisation du pendule autour du point B, garantissant une réponse rapide et efficace face aux perturbations et permettant ainsi de maintenir l'équilibre dans des conditions dynamiques et imprévisibles.

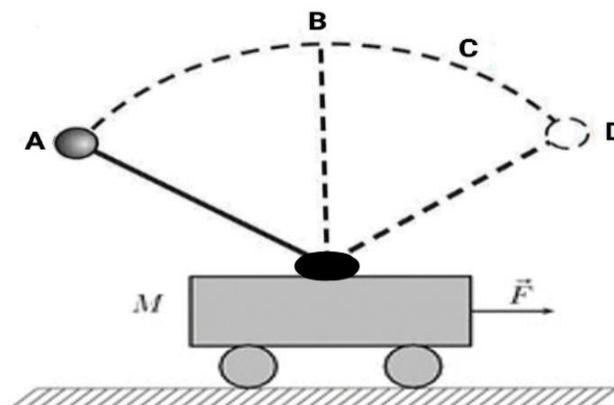


Figure I.10: Illustration la stabilité du système [5]

I.9.2 Techniques de Stabilisation du système :

Le principe de fonctionnement d'un pendule inversé implique la commande dynamique d'un pendule pour maintenir son équilibre en position verticale, malgré sa nature intrinsèquement instable. Cela peut être réalisé en utilisant des capteurs pour mesurer l'angle du pendule par rapport à la verticale et en appliquant des actions correctives appropriées à travers des actionneurs pour stabiliser le système.

I.9.2.1 Détection de l'Angle :

Des capteurs tels que des gyroscopes ou des accéléromètres sont utilisés pour mesurer l'angle du pendule par rapport à la verticale. L'angle mesuré est crucial pour déterminer l'état actuel du pendule.

I.9.2.2 Analyse de l'Etat :

L'angle mesuré est comparé à la position verticale souhaitée (généralement 0°). Cela permet de déterminer la direction et l'amplitude de l'action corrective nécessaire pour stabiliser le pendule.

I.9.2.3 Calcul de la Commande :

Un algorithme de commande, tel que la commande proportionnelle-intégrale-dérivée (PID) ou un régulateur linéaire quadratique (LQR), est utilisé pour calculer la commande de correction en fonction de l'erreur d'angle. L'objectif est de générer une commande appropriée pour ramener le pendule à sa position verticale.

I.9.2.4 Application de la Commande :

La commande calculée est transmise aux actionneurs, tels que des moteurs ou des vérins, qui appliquent la force nécessaire pour redresser le pendule. Les actionneurs doivent réagir rapidement et précisément pour maintenir le pendule en équilibre.

I.9.2.5 Boucle de rétroaction :

Le processus de détection, d'analyse, de calcul et d'application de la commande est répété en boucle continue. À chaque étape, le système ajuste la commande en fonction de l'état actuel du pendule, assurant ainsi une stabilisation continue.

I.10 Méthodes classiques pour la stabilité d'un pendule inversé :

Pour stabiliser un pendule inversé, plusieurs méthodes classiques sont utilisées, allant de techniques de commande basiques à des approches plus avancées.

I.10.1 Commande Proportionnel-Dérivé-Intégral (PID) :

Le régulateur PID est l'une des méthodes les plus simples et les plus courantes pour stabiliser un pendule inversé. Ce régulateur utilise trois termes : proportionnel (P), dérivé (D) et intégral (I). Le terme proportionnel agit en fonction de l'erreur actuelle (différence entre l'angle désiré et l'angle mesuré), le terme dérivé prédit le comportement futur de l'erreur en se basant sur sa vitesse de changement, et le terme intégral corrige l'erreur cumulative au fil du temps. Ensemble, ces trois termes permettent d'ajuster la commande pour maintenir le pendule en équilibre.

I.10.2 Commande par Retour d'Etat Linéaire (LQR) :

Le régulateur linéaire quadratique (LQR) est une méthode avancée de commande optimale qui peut être utilisée pour stabiliser un pendule inversé. Le LQR utilise une fonction coût quadratique pour minimiser l'erreur de suivi et l'effort de commande. Il calcule les gains du régulateur de manière à optimiser la performance du système tout en respectant les contraintes opérationnelles.

I.10.3 Commande par Retour d'État avec Observateur d'État (LQG) :

Le régulateur linéaire quadratique avec observateur d'état (LQG) combine le contrôle LQR avec un observateur d'état qui est utilisé pour estimer l'état non mesurable du système. Cette approche permet de stabiliser le pendule inversé en utilisant à la fois des mesures directes et des estimations de l'état du système.

I.10.4 Commande par Méthodes de Linéarisation par Feedback Non- linéaire :

Des techniques de linéarisation et de linéarisation par feedback non-linéaire peuvent également être utilisées pour stabiliser un pendule inverse. Ces méthodes visent à rendre le système plus facile à commander en le modélisant comme un système linéaire autour d'un point d'équilibre.

I.12 Conclusion :

L'étude des pendules inversés continue de stimuler l'innovation et de perfectionner les techniques de la commande dans divers secteurs. Ces systèmes offrent non seulement une opportunité d'apprentissage approfondi mais également une application directe des concepts théoriques dans des scénarios pratiques. L'avenir des pendules inversés est prometteur, avec des recherches continues visant à optimiser et à découvrir de nouvelles approches pour leur stabilisation, assurant ainsi leur pertinence et leur utilité dans les technologies émergentes.

Chapitre II
Commande Linéaire
Quadratique

II.1 Introduction :

Ce chapitre vise à explorer en profondeur les différentes facettes de ce système, de sa modélisation initiale à la conception de stratégies de commandes avancées. En démarrant par l'analyse des équations de mouvement et leur linéarisation pour obtenir des modèles simplifiés, nous plongeons dans les fondements théoriques nécessaires à la compréhension de sa dynamique. Par la suite, nous examinons la représentation d'état du système, les concepts de stabilité, de commandabilité et d'observabilité, avant de conclure avec la présentation détaillée de la commande LQR, offrant ainsi une vision complète des outils à notre disposition pour maîtriser ce système complexe.

II.2 Modélisation du système pendule inversé monté sur un chariot :

II.2.1 Définitions :

La modélisation d'un système pendule inversé monté sur un chariot implique la description des paramètres du système et la formulation des équations du mouvement de la dynamique du système.

II.2.2 Analyse du système :

Le système de pendule inversé monté sur un chariot est un exemple classique de système dynamique non linéaire utilisé pour étudier et tester diverses techniques de commande. Ce système présente des défis intéressants en matière de stabilité et de la commande, en raison de la nature intrinsèquement instable du pendule inversé. La figure suivante illustre le système étudié :

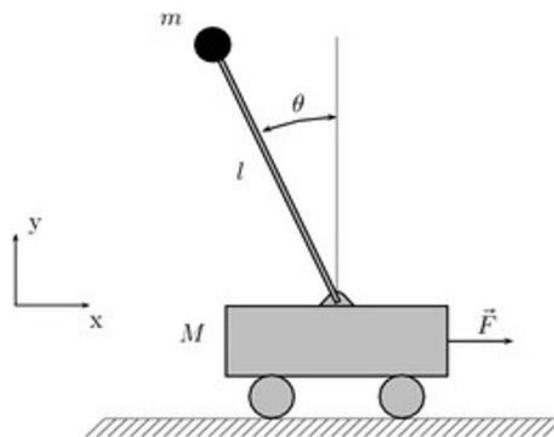


Figure II.1 : Le système pendule inversé monté sur un chariot [5]

Le tableau suivant représente les paramètres physiques et les variables dynamiques du système de pendule inversé monté sur un chariot :

Tableau II.2 : Description des paramètres du système étudié et leurs unités

Paramètres / Variables	Description	Les unites de mesure
m	La masse du pendule : Elle influe sur la dynamique du système et la force nécessaire pour stabiliser le pendule.	kilogrammes (Kg)
M	La masse du chariot : Elle détermine la réponse du système à l'application de la force et la difficulté de stabilisation du pendule.	kilogrammes (Kg)
l	La longueur de pendule . Elle affecte le moment d'inertie et la période de balancement du pendule.	Mètres (m)
g	L'Accélération due à la gravité . Elle joue un rôle crucial dans la dynamique du pendule, rendant sa position d'équilibre naturellement instable.	Mètres par seconde carrée (m/s^2)
$x(t)$	La position linéaire du chariot à l'instant t : c'est la variable d'état qui décrit le déplacement horizontal du chariot.	Mètres (m)
$\theta(t)$	L'angle du pendule par rapport à la verticale à l'instant t : Cet angle détermine la déviation du pendule par rapport à sa position d'équilibre.	Radians (rad)
$F(t)$	La force exercée sur le chariot à l'instant t : La force appliquée au chariot est la commande utilisée pour stabiliser le pendule.	Newtons (N)

II.2.3 Les équations de mouvement du système :

Pour établir les équations de mouvement, nous devons analyser les forces agissant sur le chariot et le pendule.

La force résultante agissant sur le chariot dans la direction horizontale inclut :

- ✓ La force d'inertie ($M\ddot{x}$) ;
- ✓ La force de frottement ($b\dot{x}$) ;
- ✓ Une force normale (N) qui représente la réaction du pendule sur le chariot ;

L'équation de mouvement résultante est :

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + N = F \quad (2.1)$$

En additionnant les forces dans la direction horizontale du pendule, on obtient :

$$N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (2.2)$$

En substituant cette équation dans l'équation de mouvement du chariot, on obtient :

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = F \quad (2.3)$$

Pour obtenir la deuxième équation de mouvement, on additionne les forces perpendiculaires au pendule :

$$P \sin \theta + N \cos \theta - mg \sin \theta = ml \ddot{\theta} + m\ddot{x} \cos \theta \quad (2.4)$$

En additionnant les moments autour du centre de gravité du pendule, on obtient :

$$-Pl \sin \theta + Nl \cos \theta = I\ddot{\theta} \quad (2.5)$$

En combinant ces expressions, nous obtenons la deuxième équation principale :

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = -ml\ddot{x} \cos \theta \quad (2.6)$$

II.2.4 Linéarisation des mouvements du système :

Pour utiliser des techniques d'analyse et de conception de commande linéaires, il est nécessaire de linéariser les équations de mouvement autour de la position d'équilibre verticale ($\theta=0$).

En supposant de petites déviations de l'équilibre ($\theta=0+\phi$), nous pouvons approximativement écrire :

$$\cos \theta (\pi + \phi) = -1 \quad (2.7)$$

$$\sin \theta \sin(\pi + \varnothing) = -\varnothing \quad (2.8)$$

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\varnothing}^2 = 0 \quad (2.9)$$

En substituant ces approximations dans les équations non linéaires, nous obtenons les équations de mouvement linéarisées :

$$(I + ml^2)\ddot{\varnothing} - mgl \varnothing = ml\ddot{x} \quad (2.10)$$

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\varnothing} = u \quad (2.11)$$

II.2.5 Fonction de transfert des équations linéariser du système :

En appliquant la transformée de Laplace aux équations linéarisées (en supposant des conditions initiales nulles), nous obtenons :

$$I + ml^2)\Phi(s)s^2 - mgl \Phi(s) = mlX(s)s^2 \quad (2.12)$$

$$(M + m)X(s)s^2 + bX(s)s - ml\Phi(s)s^2 = U(s) \quad (2.13)$$

Pour obtenir la fonction de transfert, nous devons éliminer (s) des équations ci-dessus :

$$X(s) = \left[\frac{I+ml^2}{ml} - \frac{g}{s^2} \right] \Phi(s) \quad (2.14)$$

En substituant dans la deuxième équation, nous obtenons la fonction de transfert :

$$(M + m) \left[\frac{I+ml^2}{ml} - \frac{g}{s^2} \right] \Phi(s)s^2 + b \left[\frac{I+ml^2}{ml} - \frac{g}{s^2} \right] \Phi(s) s - ml\Phi(s)s^2 = U(s) \quad (2.15)$$

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{\frac{ml}{q}s^2}{s^4 + \frac{b(I+ml^2)}{q}s^3 - \frac{(M+m)mgl}{q}s^2 - \frac{bmgl}{q}s} \quad (2.16)$$

Où :

$$q = [(M + m)(I + ml^2) - (ml)^2] \quad (2.17)$$

En annulant le pôle et le zéro à l'origine, la fonction de transfert devient :

$$P_{pend}(s) = \frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{\frac{ml}{q}s}{s^3 + \frac{b(I+ml^2)}{q}s^2 - \frac{(M+m)mgl}{q}s - \frac{bmgl}{q}} \left[\frac{rad}{N} \right] \quad (2.18)$$

Pour la position du chariot (s), la fonction de transfert est :

$$p_{cart}(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{(I+ml^2)s^3 - gml}{s^4 + \frac{b(I+ml^2)}{q}s^3 - \frac{(M+m)mgl}{q}s^2 - \frac{bmgls}{q}} \left[\frac{m}{N} \right] \quad (2.19)$$

II.2.6 Modèle d'état du système :

Les équations de mouvement linéarisées précédentes peuvent également être représentées sous forme d'espace d'état si on les réorganise en une série d'équations différentielles du premier ordre. Comme ces équations sont linéaires, elles peuvent alors être mises sous forme matricielle standard, comme illustré ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\varnothing} \\ \ddot{\varnothing} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(I+ml^2)b}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{m^2gl^2}{I(M+m)+Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mlb}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{mgl(M+m)}{I(M+m)+Mml^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varnothing \\ \dot{\varnothing} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I+ml^2}{I(M+m)+Mml^2} \\ 0 \\ \frac{ml}{I(M+m)+Mml^2} \end{bmatrix} u \quad (2.20)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varnothing \\ \dot{\varnothing} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2.21)$$

II.2.6.1 Les matrices d'état du système :

Les matrices d'état sont des outils essentiels dans la représentation d'état d'un système. Elles organisent de manière structurée les informations sur les variables d'état et leurs interactions dynamiques. Les matrices sont comme suit:

- ✓ **La matrice A** : La matrice A représente les coefficients des variables d'état dans l'évolution du système au fil du temps. Elle décrit la dynamique interne du système et comment les variables d'état évoluent en fonction de leur état actuel. Pour notre système, cette matrice inclut les effets de la gravité, de la friction et des interactions entre le pendule et le chariot.
- ✓ **La matrice B** : La matrice B représente les coefficients des variables d'entrée dans l'évolution du système. Elle indique comment les entrées appliquées (comme une force sur le chariot) influencent l'évolution des variables d'état. Cette matrice est essentielle pour comprendre l'effet des commandes externes sur le système.

- ✓ **La matrice C** : La matrice C est utilisée pour extraire les variables d'état observables du système. Elle définit la relation entre les variables d'état internes et les mesures ou observations disponibles. Par exemple, cette matrice peut être utilisée pour mesurer la position du chariot et l'angle du pendule.
- ✓ **La matrice D** : La matrice D décrit la relation directe entre les entrées et les sorties sans passer par les variables d'état. Dans de nombreux systèmes, cette matrice est nulle, ce qui signifie qu'il n'y a pas d'effet direct instantané des entrées sur les sorties observables.

II.2.6.2 Les variables d'état du système :

Les variables d'état sont les grandeurs qui décrivent complètement l'état d'un système à un moment donné et qui sont nécessaires pour prédire son comportement futur. Dans le cas du système pendule inversé monté sur un chariot, les variables d'état incluent :

x : La position du chariot.

\dot{x} : La vitesse du chariot.

θ : L'angle du pendule par rapport à la verticale.

$\dot{\theta}$: La vitesse angulaire du pendule.

II.3 Etude de stabilité du système :

II.3.1 Définition :

La stabilité d'un système dynamique linéaire se réfère à la capacité du système à revenir à son état d'équilibre après avoir été perturbé. En termes mathématiques, un système linéaire est dit stable si, le système revient vers son état d'équilibre lorsque la force externe cesse d'être appliquée.

II.3.2 But de l'Analyse de la Stabilité :

Le but de l'analyse de la stabilité est de garantir que le système peut opérer de manière sûre et prévisible dans des conditions réelles. Pour un pendule inversé monté sur un chariot, la stabilité signifie que le pendule peut être maintenu en position verticale malgré les perturbations. En commandant le système pour qu'il soit stable, on assure que le chariot et le pendule n'entreront pas dans des mouvements incontrôlés ou oscillatoires qui pourraient endommager le système ou causer des accidents.

II.3.3 Calculer les Valeurs Propres de la matrice A :

Pour calculer les valeurs propres de la matrice d'état A, nous utilisons la fonction $eig(A)$, ce qui nous donne :

$$eig(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1428 \\ -5.6041 \\ 5.5651 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

II.3.4 L'Analyse des Valeurs Propres trouvé :

- ✓ **Valeur Propre Positive** : La présence d'une valeur propre positive (5.5651) signifie qu'il existe une croissance exponentielle dans le système, conduisant à une instabilité.
- ✓ **Valeur Propre Nulle** : Une valeur propre nulle, indique une dynamique marginalement stable, qui pourrait se traduire par une instabilité en pratique à cause de perturbations ou d'incertitude.

Les valeurs propres de la matrice A montrent clairement que le système est instable.

II.4 Etude de la commandabilité du système :

II.4.1 Définitions :

Un système est considéré commandable s'il peut être conduit de n'importe quel état initial à n'importe quel état final souhaité en utilisant une commande appropriée. La commandabilité d'un pendule inversé se réfère à sa capacité à être entièrement commandé par des commandes externes.

II.4.2 L'importance et le but de la commandabilité :

La commandabilité est cruciale pour permettre au pendule inversé d'atteindre des positions spécifiques et de maintenir son équilibre dans différentes configurations. Cela affecte directement les performances des systèmes de commande utilisés pour stabiliser le pendule ou exécuter des mouvements précis.

Pour le pendule inversé l'objectif principal de la commandabilité c'est de fournir un moyen efficace pour la commande de son mouvement et position. Cela permet de stabiliser le pendule dans des positions désirées, de déplacer le pendule selon un chemin spécifique, ou même de le maintenir en équilibre dans des configurations instable.

II.4.3 Condition de la commandabilité :

La condition de la commandabilité est vérifiée en analysant la matrice de commandabilité du système. Si cette matrice est de plein rang, alors le système est considéré comme commandable.

II.4.4 La matrice de commandabilité du système :

La matrice de commandabilité C est donnée par la matrice des colonnes, elle est représentée comme suit :

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (2.23) \quad \text{Avec : } C \in R^{n \times (n.m)}$$

- ✓ A : C 'est la matrice des coefficients des équations différentielles.
- ✓ B : c 'est la matrice des entrées.

Pour déterminer la matrice de commandabilité C nous devons calculer les produits AB , A^2B et A^3B .

- ✓ Calcul de AB :

$$AB = \begin{bmatrix} \frac{I+ml^2}{I(M+m)+Mml^2} \\ \frac{-(I+ml^2)^2 b}{(I(M+m)+Mml^2)^2} \\ \frac{ml}{I(M+m)+Mml^2} \\ \frac{I(M+m)+Mml^2}{-(I+ml^2)(mlb)} \\ \frac{-(I+ml^2)(mlb)}{(I(M+m)+Mml^2)^2} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

- ✓ Calcul de A^2B :

$$A^2B = \begin{bmatrix} \frac{-(I+ml^2)^2 b}{(I(M+m)+Mml^2)^2} \\ \frac{(I+ml^2)^3 b^2 + (m^3 l^3 g)(I(M+m)+Mml^2)}{(I(M+m)+Mml^2)^4} \\ \frac{-(mlb)(I+ml^2)}{(I(M+m)+Mml^2)^2} \\ \frac{(mlb^2)(I+ml^2)^3 + (m^2 l^2 g)(M+m)(I(M+m)+Mml^2)}{(I(M+m)+Mml^2)^4} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

✓ Calcule de A^3B :

$$A^3B = \begin{bmatrix} \frac{(I+ml^2)^3 b^2}{(I(M+m)+Mml^2)^3} + \frac{m^3 gl^3}{(I(M+m)+Mml^2)^2} \\ \frac{\left(-(I+ml^2)^3 b^3 - m^3 l^3 gb (I(M+m)+Mml^2) \right) (I+ml^2)}{(I(M+m)+Mml^2)^8} + \frac{-(I+ml^2) m^3 l^3 gb}{(I(M+m)+Mml^2)^3} \\ \frac{(I+ml^2)^2 b^2 ml}{(I(M+m)+Mml^2)^2} + \frac{m^2 gl^2 (M+m)}{(I(M+m)+Mml^2)^2} \\ \frac{\left(-mlb^3 (I+ml^2)^3 - m^2 l^2 gb (M+m)(I(M+m)+Mml^2) \right) (I+ml^2)}{(I(M+m)+Mml^2)^8} + \frac{-m^4 l^4 gb}{(I(M+m)+Mml^2)^3} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Puis on construit la matrice de commandabilité C en concaténant les colonnes de B , AB , A^2B et A^3B .

Enfin, on calcule le *Rang* de la matrice de commandabilité C on trouve :

$$\text{Rang}(C) = 4 \quad (2.27)$$

II.4.5 Vérification de la commandabilité du système :

Pour qu'un système soit commandable, il est nécessaire que la matrice de commandabilité C soit de plein rang, c'est-à-dire que son rang soit égal au nombre de colonnes de C . Dans ce cas, le rang de C est 4, ce qui est égal au nombre de colonnes de C .

Par conséquent, puisque le rang de C est égal au nombre de colonnes de C , le système est considéré commandable. Cela signifie que le système peut être commandé de manière à atteindre n'importe quel état souhaité à partir de n'importe quel état initial en utilisant des commandes appropriées.

II.5 Etude de l'observabilité du système :

II.5.1 Définitions :

Un système est considéré comme observable s'il est possible de déterminer l'état interne du système à partir de ses sorties mesurées. Dans le contexte d'un pendule inversé, l'observabilité se réfère à la capacité de déterminer la position et la vitesse du pendule à partir des mesures disponibles.

II.5.2 L'importance et le but de l'observabilité :

L'observabilité est essentielle pour évaluer l'état actuel du pendule inversé, ce qui est crucial pour la conception de systèmes de commande. En connaissant l'état du pendule, il devient possible de prédire son comportement futur, ce qui est nécessaire pour maintenir son équilibre ou effectuer des mouvements précis.

II.5.3 Condition de l'observabilité :

La condition d'observabilité est vérifiée en analysant la matrice d'observabilité du système. Si cette matrice est de plein rang, alors le système est considéré comme observable.

II.5.4 La matrice d'observabilité du système :

La matrice d'observabilité ϑ est donnée par la matrice des lignes, elle est représentée comme suit :

$$\vartheta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.28) \quad \text{Avec : } \vartheta \in \mathbb{R}^{(p,n) \times n}$$

- ✓ A : C'est la matrice des coefficients des équations différentielles.
- ✓ C : C'est la matrice des sorties mesurées

Pour déterminer la matrice d'observabilité, nous devons calculer les produits CA , CA^2 et CA^3 .

- ✓ Calcul de CA :

$$CA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

- ✓ Calcul de CA^2 :

$$CA^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-(I+ml^2)b}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{m^2gl^2}{I(M+m)+Mml^2} & 0 \\ 0 & \frac{-mlb}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{mgl(M+m)}{I(M+m)+Mml^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

✓ Calcule de CA^3 :

$$CA^3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(I+ml^2)^2 b^2}{(I(M+m)+Mml^2)^2} & \frac{-(I+ml^2)b(m^2 gl^2)}{(I(M+m)+Mml^2)^2} & \frac{m^2 gl^2}{I(M+m)+Mml^2} \\ 0 & \frac{(mlb)(I+ml^2)b}{(I(M+m)+Mml^2)^2} & \frac{-m^3 l^3 gb}{(I(M+m)+Mml^2)^2} & \frac{mgl(M+m)}{I(M+m)+Mml^2} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Puis on construit la matrice la matrice d'observabilité ϑ en concaténant les lignes de CA , CA^2 et CA^3 .

Enfin, on calcule le *Rang* de la matrice de d'observabilité (ϑ) on trouve :

$$Rang(\vartheta) = 4 \quad (2.32)$$

II.5.5 Vérification de l'observabilité du système :

Pour qu'un système soit observable, il est nécessaire que la matrice d'observabilité (ϑ) soit de plein rang, c'est-à-dire que son rang soit égal au nombre de colonnes de (ϑ). Dans ce cas, le rang de (ϑ) est 4, ce qui est égal au nombre de colonnes de (ϑ).

Par conséquent, puisque le rang de (ϑ) est égal au nombre de colonnes de (ϑ), le système est considéré comme observable. Cela signifie que l'on peut déterminer l'état complet du système à partir des sorties mesurées et des entrées connues.

II.6 La commande LQR du système pendule inversé monté sur un chariot :

II.6.1 Définition :

La commande linéaire quadratique (LQR) est une méthode de commande optimale pour les systèmes linéaires. Elle vise à minimiser une fonction de coût quadratique afin de stabiliser et de commander les systèmes dynamiques. Cette approche permet d'optimiser les performances du système en fonction de critères définis par l'utilisateur, tels que la minimisation de l'erreur de suivi et la réduction de l'utilisation de l'énergie.

II.6.2 Objectif d'utilisation de la commande LQR :

L'objectif de la commande LQR est de déterminer une loi de commande optimale qui minimise une fonction de coût tout en garantissant la stabilité et les performances du système. Pour le système pendule inversé monté sur un chariot, cela signifie stabiliser le pendule en position verticale tout en commandant le déplacement du chariot. Les objectifs spécifiques incluent :

- ✓ Minimiser l'erreur de position du chariot et de l'angle du pendule ;
- ✓ Réduire l'utilisation de l'énergie de commande ;
- ✓ Assurer une réponse dynamique rapide sans oscillations excessives ;

II.6.3 Principe de fonctionnement de la commande LQR :

Le fonctionnement de la commande LQR repose sur la minimisation d'une fonction de coût quadratique. Cette fonction est une mesure pondérée des écarts des variables d'état (position du chariot, angle du pendule, etc.) et des efforts de commande. La minimisation de cette fonction permet d'obtenir une matrice de gain K qui est utilisée pour calculer la commande optimale u en fonction de l'état x du système.

II.6.4 Définir la fonction de coût :

La fonction de coût J est au cœur de la méthode LQR car elle définit les objectifs de performance et de stabilité du système. En choisissant judicieusement les matrices Q et R , on peut influencer le comportement du système commandé de manière à minimiser les déviations des variables d'état par rapport à leurs valeurs souhaitées (par exemple, maintenir le pendule en position verticale).

La fonction de coût J à minimiser est définie comme suit :

$$J = \int_0^{\infty} (x(t)^T Q x(t) + (u(t)^T R u(t))) dt \quad (2.33)$$

- ✓ $x(t)$ est le vecteur d'état du système ;
- ✓ $u(t)$ est le vecteur de commande ;
- ✓ Q est une matrice positive semi-définie positive pondérant les erreurs d'état ;
- ✓ R est une matrice positive définie pondérant les efforts de commande ;

II.6.5 Choisir les matrices Q et R et P :

Les matrices Q et R sont essentielles dans la méthode de commande LQR car elles déterminent comment les erreurs des variables d'état et les efforts de commande sont pondérés dans la fonction de coût. Leur choix est crucial pour atteindre les objectifs de performance du système :

- ✓ Q : La matrice Q est une matrice positive semi-définie qui pondère l'importance relative des erreurs des variables d'état. Une valeur plus élevée dans Q pour une variable signifie que cette variable est plus critique à minimiser. Pour un système pendule inversé monté sur un chariot, la matrice Q pourrait ressembler à ceci :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Dans cet exemple, les erreurs de position du chariot q_{11} et l'angle du pendule q_{11} sont pondérées, tandis que les vitesses du chariot et du pendule ne le sont pas.

- ✓ R : La matrice R est une matrice positive définie qui pondère l'effort de commande. Une valeur plus élevée dans R signifie que l'utilisation de l'actionneur est plus coûteuse. Pour un système avec une seule entrée de commande, R est un scalaire positif.

$$R = 1 \quad (2.35)$$

- ✓ P : La P matrice est la solution de l'équation de Riccati et elle est une matrice symétrique positive définie. Elle est utilisée pour calculer le gain optimal K dans la loi de commande LQR.

II.6.6 L'équation de Riccati :

L'équation de Riccati continue est une équation matricielle algébrique fondamentale dans la conception de la commande linéaire quadratique (LQR). Cette équation permet de déterminer la matrice P , qui est essentielle pour calculer le gain de rétroaction optimal K . La résolution de l'équation de Riccati assure que la loi de commande obtenue minimisera la fonction de coût quadratique tout en garantissant la stabilité du système.

Pour un système linéaire représenté par les équations d'état et la fonction de coût quadratique :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B U(t) \quad (2.36)$$

$$J = \int_0^{\infty} (x(t)^T Q x(t) + (u(t)^T R u(t))) dt \quad (2.37)$$

L'équation de Riccati continue est formulée comme suit :

$$A^T P + P A + P^T B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (2.38)$$

II.6.7 Le gain K :

Le gain K est une matrice essentielle dans la commande linéaire quadratique (LQR), déterminant la loi de commande optimale à appliquer au système. Le calcul de K permet d'obtenir une stratégie de commande qui optimise les performances du système, minimisant les erreurs des variables d'état et les efforts de commande tout en assurant la stabilité du système. L'objectif principal du calcul du gain K est d'obtenir une loi de commande qui minimise les erreurs des variables d'état, telles que la position du chariot et l'angle du pendule, réduit l'utilisation de l'énergie de commande, optimisant ainsi les efforts de l'actionneur et assure une réponse dynamique rapide sans oscillations excessives, garantissant la stabilité du système.

Le gain K est calculé à partir de la matrice P , obtenue en résolvant l'équation de Riccati continue. La relation pour calculer K est donnée par :

$$K = R^{-1} B^T P \quad (2.39)$$

II.6.8 calculer la loi de la commande U :

Une fois la matrice de gain K calculée, la commande optimale est déterminée par une relation de retour d'état. Cette loi de commande stabilise et commande les variables d'état du système en fonction des objectifs de performance définis. La commande optimal u est donnée par la relation :

$$u = -Kx \quad (2.40)$$

L'utilisation de cette loi de commande, le système pendule inversé monté sur un chariot peut être stabilisé et commandé efficacement. Cette approche minimise les erreurs de position et d'angle, optimise l'utilisation de l'énergie, et assure une réponse dynamique approprié.

II.7 Conclusion :

En examinant attentivement la commandabilité, l'observabilité, et en introduisant la commande LQR, nous avons enrichi notre compréhension des possibilités de commande de ce système complexe. Cette approche ne se limite pas à la simple stabilisation du système, mais ouvre également la voie à une optimisation de ses performances. En définissant une fonction de coût adéquate et en calculant les paramètres optimaux, nous avons pu concevoir une loi de commande qui assure non seulement la stabilisation du système, mais aussi la minimisation d'un critère de coût spécifique. Ainsi, ce chapitre offre une base solide pour aborder les défis pratiques de contrôle dans divers domaines de l'ingénierie et de la robotique, représentant une ressource inestimable pour les chercheurs et les praticiens intéressés par les systèmes dynamiques complexe.

Chapitre III

Optimisation Par Essaim

Particulaire

III.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous explorons les fondements et l'importance de l'optimisation, en particulier dans le contexte du pendule inversé. Nous introduisons les concepts clés de l'optimisation, y compris les types de problèmes, les méthodes de minimisation et de maximisation, et les algorithmes d'optimisation évolutionnaire. En mettant l'accent sur l'optimisation par essaim particulaire (OEP), nous détaillons son inspiration biologique, ses mécanismes de fonctionnement, et son application pour améliorer la performance des systèmes. Enfin, nous appliquons cette méthode pour optimiser les paramètres du régulateur LQR pour un pendule inversé, illustrant l'efficacité de l'OEP dans des scénarios pratiques.

III.2 L'optimisation dans la commande :

III.2.1 Définitions :

L'optimisation est un processus systématique visant à trouver la meilleure solution parmi un ensemble de solutions possibles pour un problème donné. Elle consiste à maximiser ou minimiser une fonction objectif en ajustant certaines variables du système tout en respectant des contraintes spécifiques.

III.2.2 Importance de l'optimisation dans divers domaines :

L'optimisation joue un rôle crucial dans divers domaines, y compris dans des applications spécifiques telles que le domaine du pendule inversé. Dans ce contexte, l'optimisation est utilisée pour améliorer les performances des systèmes de pendules inversés. En optimisant les algorithmes de la commande, on peut atteindre une meilleure capacité à maintenir l'équilibre du pendule, à réagir aux perturbations externes et à suivre des trajectoires spécifiques avec une plus grande précision. Ainsi, l'optimisation dans le domaine du pendule inversé illustre comment cette approche est essentielle pour résoudre des problèmes complexes et améliorer les systèmes dans divers secteurs industriels et technologiques.

III.2.3 Types des problèmes d'optimisation :

Les problèmes d'optimisation sont divers et peuvent être classés selon plusieurs critères, ce qui influence les méthodes et algorithmes utilisés pour les résoudre, On distingue :

III.2.3.1 Problèmes d'optimisation linéaire et non linéaire :

Les problèmes d'optimisation linéaire se caractérisent par des fonctions objectifs et des contraintes linéaires, couramment utilisés dans les systèmes linéaires où les relations entre les variables sont proportionnelles. Les problèmes non linéaires, en revanche, impliquent des relations plus complexes et non proportionnelles, souvent présentes dans les systèmes réels où les dynamiques sont non linéaires. Ces problèmes nécessitent des techniques telles que les algorithmes d'optimisation évolutionnaire ou les méthodes de gradient, pour trouver des solutions optimales. [a]

III.2.3.2 Problèmes d'optimisation avec contraintes et sans contraintes :

Les problèmes d'optimisation avec contraintes imposent des restrictions sur les valeurs pouvant être prises par les variables du système, comme les limites de tension ou de courant des actionneurs. Ces contraintes peuvent être exprimées sous forme d'équations ou d'inégalités et doivent être respectées pour garantir la sécurité et la performance du système. En revanche, les problèmes sans contraintes n'imposent aucune restriction supplémentaire, ce qui simplifie souvent la recherche de solutions. [a]

III.2.3.3 Problèmes d'optimisation mono objective vs multi objective :

Les problèmes d'optimisation mono-objectif visent à optimiser une seule fonction objectif, comme la minimisation de l'erreur de suivi dans un système. À l'inverse, les problèmes multi-objectifs cherchent à optimiser plusieurs fonctions objectif simultanément, souvent en trouvant un compromis entre des objectifs conflictuels. Par exemple, réduire l'erreur de suivi tout en minimisant la consommation d'énergie. Ces problèmes sont plus complexes et nécessitent des méthodes spéciales pour identifier les solutions Pareto-optimales, où aucune amélioration d'un objectif n'est possible sans détériorer un autre. Des algorithmes comme l'optimisation multi-objectif par essaim de particules (MOPSO) sont couramment utilisés pour résoudre ces problèmes dans le domaine de l'automatique. [11]

III.2.4 Concepts de minimisation ou maximisation d'une fonction objectif :

L'optimisation de la fonction objectif est essentielle pour améliorer les performances, la stabilité et l'efficacité des systèmes. Les concepts de minimisation et de maximisation d'une fonction objectif sont au cœur de l'optimisation, particulièrement dans des applications comme la

commande d'un pendule inversé. La fonction objectif est une expression mathématique représentant un critère de performance du système à optimiser. Pour le pendule inversé, cela pourrait inclure la minimisation de l'erreur de position du pendule, la réduction du temps de stabilisation, ou la minimisation de l'énergie consommée par l'actionneur. En maximisation, l'objectif pourrait être d'augmenter la robustesse du système ou de maximiser la stabilité.[12]

III.2.5 Les algorithmes d'optimisation évolutionnaires :

Les algorithmes d'optimisation évolutionnaires (AOEs) sont une classe de méthodes inspirées par les mécanismes de la sélection naturelle et de l'évolution biologique. Ces algorithmes sont particulièrement efficaces pour résoudre des problèmes d'optimisation complexes, tels que la commande d'un pendule inversé, où les méthodes traditionnelles peuvent échouer ou être inefficaces. Les AOEs sont capables de rechercher globalement des solutions optimales dans des espaces de solutions vastes et non linéaire.[13]

III.2.5.1 Inspiration biologique dans l'optimisation :

Les AOEs s'inspirent de concepts biologiques tels que la sélection naturelle, la mutation et le croisement.

- ✓ **La sélection naturelle** : Les meilleures solutions sont conservées pour les générations suivantes ;
- ✓ **Mutations** : Introduisent des variations aléatoires dans les solutions existantes permettant d'explorer de nouvelles solutions potentiellement meilleures ;
- ✓ **Croisement** : Combine les caractéristiques de deux solutions potentielles pour produire une nouvelle solution, permettant la recombinaison de traits bénéfiques ;

Dans le contexte de commande d'un pendule inversé, ces mécanismes permettent aux AOEs d'explorer efficacement l'espace des solutions et de converger vers des solutions optimales pour stabiliser le pendule.[14]

III.3 Les concepts fondamentaux de l'optimisation par essaim particulaire :

L'OEP est une technique d'optimisation inspirée du comportement collectif des groupes d'animaux, tels que les essaims d'oiseaux et les bancs de poissons. Cette méthode est particulièrement utile dans le domaine de l'ingénierie.[15]



Figure III.1 : Groupe des oiseaux



Figure III.2 : Bacs de poissons

III.3.1 L'inspiration des comportements de groupes d'animaux :

Le développement de l'OEP s'est basé sur l'observation des comportements de groupes d'animaux, comme les essaims d'oiseaux recherchant de la nourriture ou les bancs de poissons se déplaçant ensemble pour éviter les prédateurs. Ces comportements illustrent comment des individus simples peuvent interagir pour former un comportement collectif efficace. En observant ces groupes, les chercheurs ont remarqué que, malgré l'absence de coordination centrale, les animaux parviennent à accomplir des tâches complexes de manière harmonieuse et efficace. Cette capacité à résoudre des problèmes de manière décentralisée et adaptative a été la clé de l'inspiration derrière l'OEP.

III.3.2 L'inspiration biologique et sociales :

Les comportements collectifs des essaims et des bancs sont des exemples de systèmes auto organisés où les interactions locales entre les individus conduisent à des comportements globaux optimaux. Ce principe d'auto organisation, où de simples règles locales peuvent mener à un comportement global, est un aspect crucial de la nature que l'OEP cherche à imiter.

III.3.2.1 Le comportements collectif des essaims d'oiseaux et bancs de poissons :

Les essaims d'oiseaux et les bancs de poissons fonctionnent sans chef, chaque individu suit des règles simples basées sur la position et la vitesse de ses voisins immédiats. Ces règles de comportement comprennent des actions comme l'alignement, où les animaux ajustent leur direction pour correspondre à celle de leurs voisins, et l'attraction, où ils se rapprochent de leurs voisins tout en évitant les collisions. Ce comportement collectif permet de résoudre des problèmes de manière décentralisée et efficace, comme la recherche de nourriture ou la protection contre les prédateurs.

III.3.2.2 L'influence des voisins et apprentissage collectif :

Dans un essaim de particules, chaque particule ajuste sa position et sa vitesse en fonction de sa propre expérience et de celle de ses voisins. Cet apprentissage collectif permet à l'essaim de converger vers des solutions optimales de manière dynamique et adaptative. Les particules apprennent continuellement des expériences individuelles et collectives, ce qui les aide à explorer efficacement l'espace de recherche et à éviter les pièges des minima locaux.

III.3.3 Le modèle de base de l'OEP :

Le modèle de base du l'OEP repose sur la mise à jour itérative des positions et des vitesses des particules dans l'espace de recherche. À chaque itération, les particules ajustent leur trajectoire en fonction des meilleures solutions qu'elles ont découvertes, ainsi que des meilleures solutions découvertes par leurs voisins.[16]

III.3.3.1 Définition des particules et de l'essaim :

Chaque particule représente une solution candidate dans l'espace de recherche. Un essaim est un groupe de ces particules interagissant entre elles pour trouver la meilleure solution possible.

Chaque particule possède une position et une vitesse, et l'objectif est de trouver la position qui minimise ou maximise une fonction objectif.

III.3.3.2 La position et vitesse des particules :

Les particules se déplacent dans l'espace de recherche en ajustant leur position et leur vitesse en fonction de règles simples. Ces règles incluent l'attraction vers la meilleure position personnelle trouvée par la particule (cognitive), et l'attraction vers la meilleure position globale trouvée par l'essaim (sociale).

III.3.3.3 Les rôles des coefficients d'accélération cognitive et sociale :

Les coefficients d'accélération cognitive (C_1) et sociale (C_2) déterminent l'influence respective de la meilleure position personnelle de chaque particule et de la meilleure position globale de l'essaim. Ces coefficients permettent de régler l'équilibre entre exploration et exploitation. Un coefficient cognitif élevé encouragera une exploration individuelle, tandis qu'un coefficient social élevé encouragera la convergence vers la meilleure solution trouvée par le groupe.

III.3.4 Le choix des fonctions objectif pour évaluer les solutions :

La fonction objectif est utilisée pour évaluer la performance de chaque particule. Dans le cas d'un pendule inversé, cela pourrait inclure des critères tels que la minimisation de l'erreur de position et la réduction de l'effort de la commande. La sélection d'une fonction objectif appropriée est cruciale pour orienter l'essaim vers des solutions optimales.

III.3.5 Les paramètres de l'OEP :

Les paramètres l'OEP tels que le coefficient d'inertie (w), les coefficients d'accélération (C_1 et C_2), et les limites de l'espace de recherche (VAR_{min} et VAR_{max}), influencent la performance de l'algorithme. Le coefficient d'inertie contrôle la tendance d'une particule à maintenir sa vitesse actuelle, et les coefficients d'accélération ajustent l'influence des meilleures positions personnelle et globale sur les mises à jour de vitesse.

III.3.6 La taille et la topologie des voisinages :

La taille et la topologie de voisinage sont cruciales dans l'OEP car elles déterminent comment les particules échangent des informations, influençant ainsi la dynamique de la recherche de solutions optimales. La structure du réseau social, ou topologie de voisinage, dicte les possibilités de communication entre les particules, et différentes configurations peuvent être utilisées pour favoriser des interactions variées :

III.3.6.1 La topologie en étoile :

Une topologie de voisinage globale permet à chaque particule de considérer la meilleure position trouvée par l'ensemble de l'essaim. Cette approche, illustrée par la topologie en étoile où chaque particule est interconnectée avec toutes les autres, peut faciliter une convergence rapide vers des solutions optimales en exploitant pleinement l'information disponible. Cependant, cette configuration peut aussi conduire à une convergence prématurée vers des minima locaux, car l'influence de la meilleure particule peut dominer trop tôt, réduisant la diversité nécessaire pour explorer efficacement l'espace de recherche.[17]

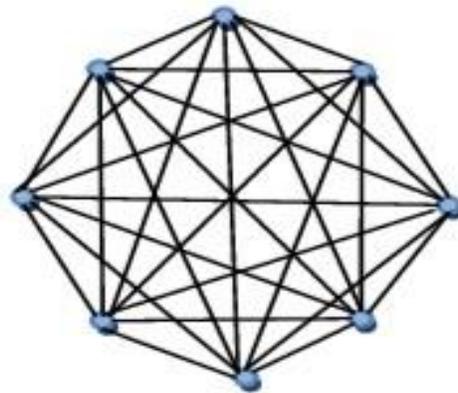


Figure III.3 : Topologie en étoile [17]

III.3.6.2 La topologie en anneau :

En revanche, une topologie locale telle que la topologie en anneau où chaque particule est connectée à un nombre fixe de voisins (généralement trois), limite l'influence aux voisins immédiats. Cette structure aide à maintenir la diversité au sein de l'essaim, permettant à différentes régions de l'espace de recherche d'être explorées indépendamment avant que l'ensemble de l'essaim

ne converge vers une solution commune. En réduisant l'influence immédiate de la meilleure solution globale, cette configuration peut éviter les pièges des minima locaux et favoriser une exploration plus exhaustive de l'espace de recherche.[17]

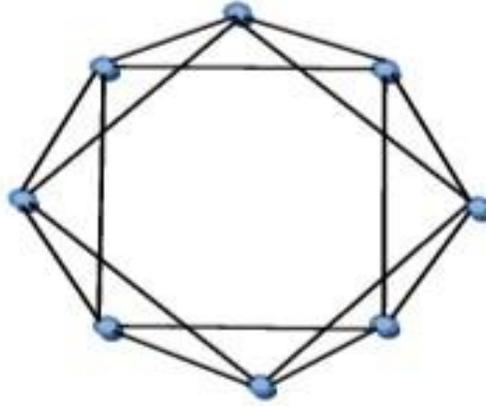


Figure III.4 : Topologie en anneau [17]

III.3.6.3 La topologie des rayons :

La topologie des rayons caractérisée par des particules communiquant exclusivement avec une particule centrale, représente une configuration intermédiaire où l'information est centralisée mais pas omniprésente. Cette topologie combine les avantages des configurations globales et locales en assurant un échange d'informations centralisé tout en maintenant une certaine indépendance dans les sous-groupes de particules.

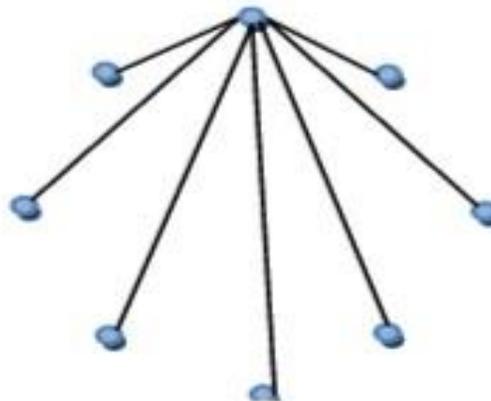


Figure III.5 : Topologie des rayons [17]

III.4 Le fonctionnement de l'OEP :

L'OEP repose sur plusieurs étapes essentielles pour trouver la solution optimale à un problème donné. Voici une description détaillée de ces étapes :

III.4.1 L'initialisation des populations :

L'initialisation des particules est une étape cruciale dans le processus l'OEP. Les positions initiales des particules sont choisies de manière aléatoire dans l'espace de recherche défini, permettant ainsi une exploration étendue des solutions potentielles. Cette diversité initiale est essentielle pour éviter de tomber prématurément dans des minima locaux et pour permettre à l'algorithme de couvrir une vaste région de l'espace de recherche. Chaque particule est placée aléatoirement dans l'espace de recherche, garantissant que l'ensemble de l'essaim a une bonne couverture initiale des solutions possible. Les vitesses initiales des particules sont fixées de manière aléatoire. Ces vitesses déterminent la direction et l'amplitude du mouvement des particules dans les itérations suivantes. L'initialisation aléatoire des vitesses favorise la diversité initiale des mouvements des particules, augmentant ainsi les chances de découvrir rapidement des régions prometteuses de l'espace de recherche.

III.4.2 La mise à jour des positions et des vitesses :

À chaque itération, les positions et les vitesses des particules sont mises à jour en fonction de deux facteurs principaux : la meilleure position personnelle atteinte par chaque particule (p_{Best}) et la meilleure position globale atteinte par l'ensemble de l'essaim (g_{Best}). Les mises à jour suivent les équations suivantes :

$$v_i(t + 1) = \omega v_i(t) + c_1 r_1 [x_{pBest}(t) - x_i(t)] + c_2 r_2 [g_{Best}(t) - x_i(t)] \quad (3.1)$$

$$x_i(t + 1) = x_i(t) + v_i(t + 1) \quad (3.2)$$

$V_i(t)$: est la vitesse de la particule i à l'itération t .

$X_i(t)$: est la position de la particule i à l'itération t .

w : est le coefficient d'inertie.

C_1 et C_2 sont les coefficients d'accélération cognitive et sociale respectivement.

r_1 et r_2 sont des variables aléatoires uniformément distribuées entre 0 et 1.

p_{Best} est la meilleure position atteinte par la particule i .

g_{Best} est la meilleure position globale atteinte par l'ensemble des particules .

III.4.3 Le critères d'arrêt :

Les critères d'arrêt déterminent quand l'algorithme doit cesser de s'exécuter. Les critères les plus courants incluent :

- ✓ Un nombre maximum d'itérations atteint.
- ✓ Une condition de convergence telle qu'une amélioration négligeable de la meilleure solution globale sur un nombre défini d'itérations consécutives.
- ✓ Un seuil de performance lorsque la fonction objectif atteint une valeur acceptable prédéfinie.

III.5 Adaptation de l'OEP pour la commande du pendule inversé :

Dans notre cas l'OEP permet de minimiser l'équation de Riccati prise comme fonction objectif. L'objectif est de calculer les éléments de la matrice P solution de l'équation de Riccati. Par la suite, cette matrice P est utilisée pour calculer le vecteur gain optimal K du régulateur LQR pour notre commande.

III.5.1 La fonction objectif :

La fonction objectif à minimiser est basée sur l'équation de Riccati. La fonction calcule les éléments de la matrice P . La matrice P est de la forme suivante :

$$P = \begin{bmatrix} p(1) & p(2) & p(3) & p(4) \\ p(2) & p(5) & p(6) & p(7) \\ p(3) & p(6) & p(8) & p(9) \\ p(4) & p(7) & p(9) & p(10) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

La matrice P est symétrique et définie positive.

Le coût Z est défini comme la minimisation des éléments de la matrice résultante de l'équation de Riccati :

$$Z = \sum \sum (Q^T + A^T \cdot P + P \cdot A - P \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot P)^2 \quad (3.4)$$

Les matrices Q et R sont définies comme suit :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\text{et } R = 1 \quad (3.6)$$

III.5.2 Variables de décision :

Le problème comporte 10 variables de décision représentant les éléments de la matrice P . Ces variables sont notées p et sont les paramètres à optimiser par l'algorithme l'OEP.

III.5.3 Bornes des Variables :

Les bornes des variables de décision sont définies pour garantir que les solutions restent dans des plages réalisables. Les bornes sont spécifiées comme suit :

- ✓ Borne inférieure des variables de décision ($VarMin = -5$).
- ✓ Borne supérieure des variables de décision ($VarMax = 35$).

III.5.4 Paramètres de base :

Les paramètres de base de l'OEP sont définis pour déterminer la taille et la durée de l'optimisation.

- ✓ Nombre maximum d'itérations ($MaxIt = 10000$).
- ✓ Taille de la population ou taille de l'essaim ($nPop = 200$).

III.5.5 Coefficients de l'algorithme :

Les coefficients de l'algorithme sont des paramètres cruciaux qui influencent la dynamique des particules dans l'algorithme. Ils déterminent la capacité des particules à explorer et à exploiter l'espace de recherche de manière efficace.

- ✓ Le coefficient d'inertie $w = 0.5$, influence l'impact de la vitesse antérieure de chaque particule sur sa future trajectoire. Il est déterminé à chaque itération en respectant une loi uniforme sur le domaine $[0,1]$.
- ✓ Le coefficient d'amortissement du coefficient d'inertie, w_{damp} est introduit pour réduire progressivement l'impact de w au fil des itérations. Une valeur typique pour w_{damp} est de

0.99, ce qui garantit une exploration continue de l'espace de recherche tout en permettant une convergence stable vers la solution optimale.

- ✓ Dans ce cas, les valeurs $c_1 = 2$ et $c_2 = 2$ sont les valeurs des coefficients d'accélération cognitive et sociale respectivement.

III.5.6 Initialisation de la population :

La population initiale est générée de manière aléatoire dans les limites définies par *VarMin* et *VarMax*, assurant une diversité suffisante des solutions de départ. Chaque particule est initialisée avec une position et une vitesse aléatoire.

III.5.7 La boucle principale de l'OEP :

La boucle principale de l'OEP consiste à mettre à jour les positions et les vitesses des particules jusqu'à ce que les critères d'arrêt soient atteints. À chaque itération, les particules ajustent leur position en fonction de leur meilleure position personnelle et de la meilleure position globale trouvée par l'essaim. (Les coûts des particules sont évalués en utilisant la fonction objectif basée sur l'équation de Riccati).

III.5.8 Mise à Jour des Meilleures Solutions Personnelles et Globales :

À chaque itération, les meilleures solutions personnelles de chaque particule sont mises à jour si une nouvelle meilleure solution est trouvée. De même, la meilleure solution globale est mise à jour si une nouvelle meilleure solution est trouvée dans l'ensemble de la population.

III.5.9 Analyse des Résultats :

Une fois l'optimisation terminée, on a accès aux meilleures solutions trouvées, y compris la matrice de Riccati P optimale et le coût associé. Cette matrice P optimale est ensuite utilisée pour calculer le gain optimal K du régulateur LQR. Le gain optimal K est appliqué à la commande pour améliorer ses performances.

III.6 Conclusion :

L'Optimisation par Essaim Particulaire (OEP) est une méthode efficace pour optimiser les systèmes complexes, comme démontré avec le pendule inversé. Inspirée des comportements collectifs naturels, elle utilise l'interaction de particules pour explorer et exploiter l'espace de recherche, trouvant ainsi des solutions optimales. L'OEP est particulièrement utile dans des domaines nécessitant précision, stabilité et efficacité. En optimisant des régulateurs comme le LQR, elle améliore les performances en minimisant les erreurs et augmentant la stabilité. L'avenir de l'OEP est prometteur avec des applications potentielles dans divers secteurs industriels et technologiques, et son intégration avec d'autres techniques d'intelligence artificielle ouvre la voie à des avancées significative.

Chapitre IV

**Simulations et interprétations
des résultats**

IV.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous commençons par introduire la représentation d'état de notre système pour décrire son comportement dynamique, puis nous examinons les matrices d'état qui définissent la dynamique interne du système, les variables d'état cruciales telles que la position du chariot et l'angle du pendule. Ensuite, nous abordons les simulations en boucle ouverte et en boucle fermée afin d'évaluer la stabilité du système et l'efficacité des stratégies de commande : commande LQR et la commande LQR-OEP. Le chapitre est conclu par une comparaison entre les différents résultats obtenus.

IV.2 Les valeurs numériques des paramètres du système :

Après avoir présenté les paramètres physiques, les variables dynamiques, et effectué la modélisation de notre système de pendule inversé monté sur un chariot, nous allons détailler les paramètres numériques utilisés pour les simulations comme suit :

Tableau IV.1 : valeurs numériques des paramètres du système

Les paramètres physique	Les paramètres numériques
$m(\text{Kg})$	0.2
$M(\text{Kg})$	0.5
$l (m)$	0.3
$I(\text{Kg. m}^2)$	0.006
b	0.1
$g(m/s^2)$	9.8

Avec :

b : Le coefficient de friction.

I : Le moment d'inertie.

IV.3 L'analyse du Système en Boucle Ouverte :

IV.3.1 Le comportement du système non linéaire en boucle ouverte :

Nous étudions le comportement du système en boucle ouverte, c'est-à-dire sans aucun retour d'information pour la stabilisation. Nous simulons le système pour observer ses réponses naturelles face aux perturbations initiales.

Suite à la simulation du système en boucle ouverte, nous illustrons son comportement à l'aide de deux graphiques suivants :

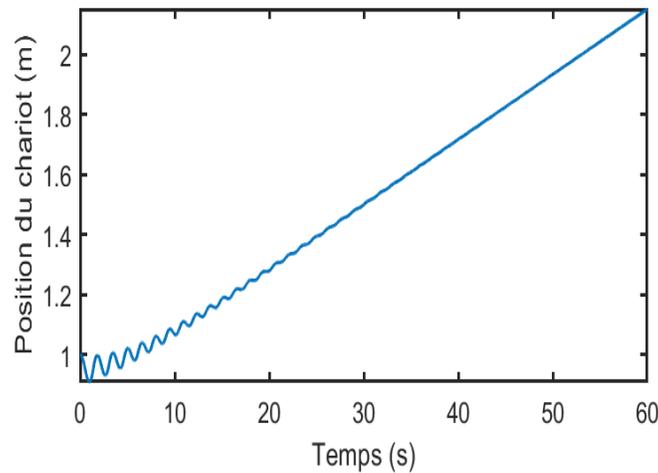


Figure IV.1 : Courbe de la position du chariot en fonction du temps

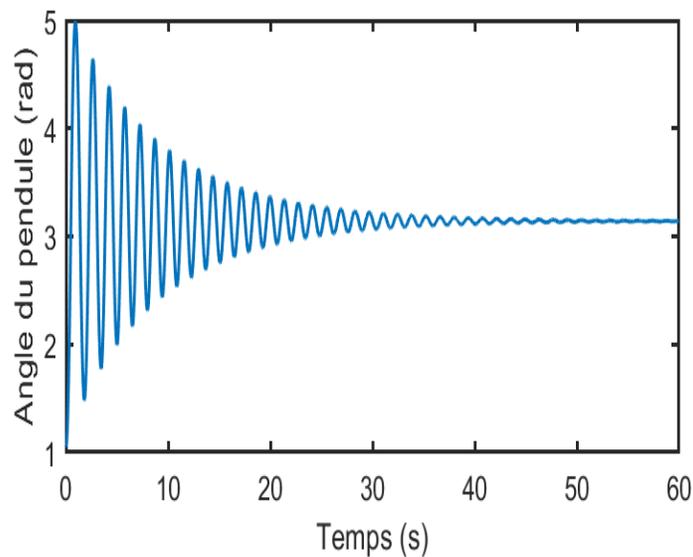


Figure IV.2 : Courbe de l'angle du pendule en fonction du temps

IV.3.1.1 Graphe de la position du chariot (x) :

- ✓ **Description** : La figure IV.2 montre l'évolution de la position du chariot en fonction du temps.
- ✓ **Interprétation** : La position du chariot (x) augmente de manière linéaire avec le temps, suggérant un déplacement constant vers l'avant. Cela indique que le chariot subit une force continue qui le pousse dans une direction donnée. Les oscillations initiales observées sont attribuées aux mouvements initiaux du pendule. Ces oscillations s'amortissent rapidement, laissant place à une progression linéaire de la position.

IV.3.1.2 Graphe de l'angle du pendule (θ):

- ✓ **Description** : La figure IV.4 montre l'évolution de l'angle du pendule (θ) en fonction du temps.
- ✓ **Interprétation** : L'angle du pendule présente des oscillations amorties. Initialement, le pendule oscille fortement, mais ces oscillations diminuent progressivement en amplitude. Le pendule étant initialement à la position verticale haute (0 rad), et étant sans commande pour le forcer à garder cette position ; il retombe vers le point d'équilibre vertical bas ($\frac{\pi}{2}$ rad) en oscillant autour de ce point jusqu'à arrêt du mouvement de la tige.

L'analyse des graphes montrent que le système, en boucle ouverte, tend vers un état d'équilibre au fil du temps malgré les oscillations initiales importantes. Un état d'équilibre non souhaité par rapport au cahier des charges du système. La position du chariot continue d'augmenter, bien que sa vitesse se stabilise. Simultanément, le pendule voit ses oscillations, tant en angle qu'en vitesse angulaire, diminuer, indiquant une tendance à l'équilibre.

IV.3.2 Réponse du système linéarisé en Boucle Ouvert :

IV.3.2.1 La représentation matricielle du système :

Cette représentation utilise des équations d'état pour décrire l'évolution des états du système au fil du temps en réponse aux entrées et aux conditions initiales.

L'expression générale :

$$\dot{x} = A x + B U \quad (4.1)$$

Après simplification :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1818 & 2.6727 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.4545 & 31.1818 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.8182 \\ 0 \\ 4.5455 \end{bmatrix} u \quad (4.2)$$

- ✓ $A_{12} = 1$: Ce coefficient indique que la vitesse du chariot est directement proportionnelle à sa position.
- ✓ $A_{22} = -0.1818$: Ce coefficient représente l'effet de la friction et autres forces de résistance.
- ✓ $A_{23} = 2.6727$: Ce coefficient montre l'influence de la position du chariot sur la vitesse angulaire du pendule.
- ✓ $A_{34} = 1$: Ce coefficient indique que la vitesse angulaire du pendule est directement proportionnelle à son angle.
- ✓ $A_{42} = -0.4545$ Ce coefficient représente l'effet de la gravité et de la position du chariot sur l'accélération angulaire du pendule.
- ✓ $A_{44} = 31.1818$ Ce coefficient représente l'effet combiné de la gravité et de la position du chariot sur l'accélération angulaire du pendule.
- ✓ $B_2 = 1.8182$ Ce coefficient l'influence la commande u sur la vitesse du chariot.
- ✓ $B_4 = 4.5455$ Ce coefficient représente l'influence de la commande u sur l'accélération angulaire du pendule.

IV.3.2.2 Les sorties observables du système :

La relation entre les sorties du système (position du chariot et angle du pendule) et les variables d'état est définie par une matrice de sortie. Cette relation est essentielle pour concevoir des stratégies de commande efficaces, car elle permet de déterminer l'influence des variables d'état sur les sorties observables.

L'expression générale :

$$Y = C x + D U \quad (4.3)$$

Après simplification :

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4.4)$$

- ✓ $C_{11} = 1$ Ce coefficient indique que la position du chariot (x) est directement liée à la première variable d'état.
- ✓ $C_{32} = 1$ Ce coefficient indique que la vitesse angulaire du pendule ($\dot{\theta}$) est directement liée à la quatrième variable d'état
- ✓ Comme le système n'a pas de relation directe entre les entrées et les sorties, la matrice D est une matrice nulle.

Ces équations montrent que les sorties observables sont la position du chariot (x) et l'angle du pendule (θ), tandis que les entrées directes n'affectent pas les sorties observables sans passer par les variables d'état.

La figure IV.4 illustre le schéma de bloc de la réponse indicielle du système linéarisé.

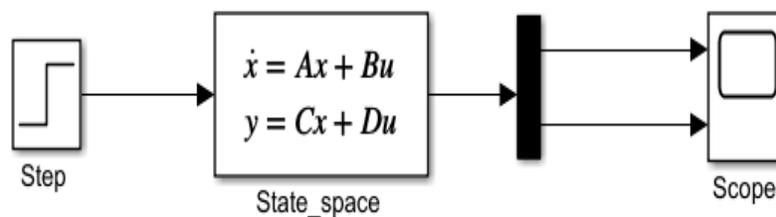


Figure IV.3 : Schéma bloc de la réponse indicielle du système linéarisé

La figure IV.4 représente la réponse indicielle, illustrant l'instabilité du système en boucle ouverte.

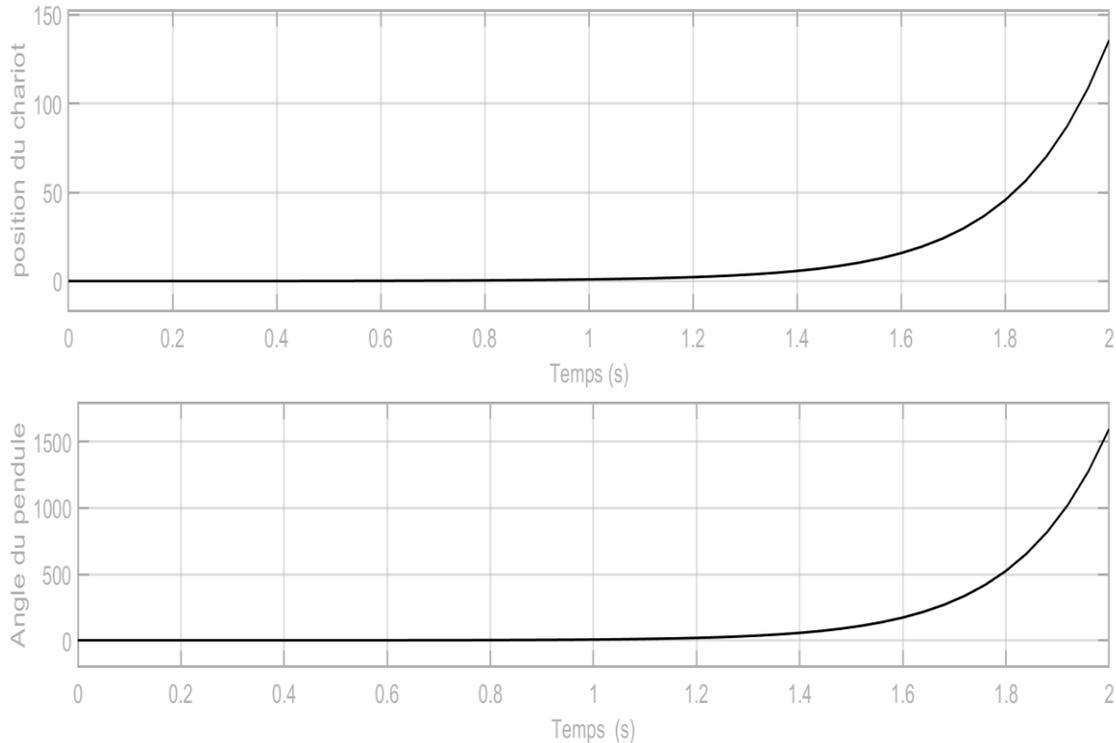


Figure IV.4 : La réponse indicielle du système en boucle ouverte : la position du chariot et l'angle du pendule en fonction du temps respectivement

Les deux courbes représentent la position du chariot et l'angle du pendule en fonction du temps respectivement.

- ✓ **États Initiaux à l'Équilibre :** Les courbes commencent toutes deux à une valeur initiale d'équilibre, avec le pendule droit et le chariot à une position initiale donnée.
- ✓ **Déviations Rapides du Pendule :** Les courbes augmentent rapidement, indiquant que le pendule inversé commence à dévier de sa position d'équilibre très rapidement après l'application du signal de marche.
- ✓ **Instabilité :** La divergence rapide des courbes témoigne de l'instabilité du système en boucle ouverte. Sans commande, le pendule n'est pas capable de maintenir sa position $\theta = 0 \text{ rad}$ et commence à tomber.
- ✓ **Réponse Rapide du Système :** Les variations significatives se produisent dans les deux premières secondes, démontrant la réactivité rapide du système à l'entrée de marche.

L'analyse des graphes de la simulation en boucle ouverte démontre une instabilité, avec des déviations rapides des variables d'état θ et $\dot{\theta}$. Cette instabilité souligne la nécessité d'une commande en boucle fermée pour stabiliser le système.

Comprendre les dynamiques intrinsèques en boucle ouverte est essentiel avant d'appliquer une stratégie de stabilisation.

IV.4 Etude des performances du système :

Pour commander un système, il est crucial de vérifier si le système est commandable et observable. Ces propriétés déterminent la capacité du système à être commandé et observé correctement.

IV.4.1 La commandabilité du système :

Calcul des Matrices :

✓ Calcule de AB :

$$AB = \begin{bmatrix} 1.8182 \\ -0.3306 \\ 4.5455 \\ -0.8264 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

✓ Calcule de A^2B :

$$A^2B = \begin{bmatrix} -0.3306 \\ 12.2089 \\ -0.8264 \\ 141.8858 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

✓ Calcule de A^3B :

$$A^3B = \begin{bmatrix} 12.2089 \\ -4.4287 \\ 141.8858 \\ -31.3196 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

On construit la matrice de commandabilité C en concaténant les colonnes de B , AB , A^2B et A^3B .

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1.8182 & -0.3306 & 12.2089 \\ 1.8182 & -0.3306 & 12.2089 & -4.4287 \\ 0 & 4.5455 & -0.8264 & 141.8858 \\ 4.5455 & -0.8264 & 141.8858 & -31.3196 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

On calcule le déterminant de la matrice de commandabilité C on trouve :

$$\det(C) \neq 0 \quad (4.9)$$

Le fait que le déterminant de la matrice de commandabilité soit non nul $\det(C) \neq 0$ indique que le système est complètement commandable. Aussi, le rang du système (4) est égal à son ordre (4). Cela signifie que chaque combinaison linéaire des états peut être atteinte en utilisant les entrées disponibles, offrant ainsi un contrôle complet sur le système.

IV.4.2 L'observabilité du système :

Calcul des Matrices :

✓ Calcule de CA :

$$CA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

✓ Calcule de CA^2 :

$$CA^2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.1818 & 2.6727 & 0 \\ 0 & -0.4545 & 31.1818 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

✓ Calcule de CA^3 :

$$CA^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0.0331 & -0.4860 & 2.6727 \\ 0 & 0.0826 & -1.2149 & 31.1818 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

On construit la matrice la matrice d'observabilité ϑ en concaténant les lignes de CA , CA^2 et CA^3

$$\vartheta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.1818 & 2.6727 & 0 \\ 0 & -0.4545 & 31.1818 & 0 \\ 0 & 0.0331 & -0.4860 & 2.6727 \\ 0 & 0.0826 & -1.2149 & 31.1818 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Pour calculer le déterminant, il est nécessaire que la matrice soit carrée. La matrice d'observabilité ϑ fournie est de dimension 8×4 , ce qui n'est pas carré. Pour vérifier l'observabilité, nous devons nous assurer que les colonnes de la matrice sont linéairement indépendantes. Une manière de faire cela est de vérifier le rang de la matrice.

On calcule le *Rang* de la matrice de d'observabilité (ϑ) on trouve :

$$\text{Rang}(\vartheta) = 4 \quad (4.14)$$

Avec un rang de 4, égal à l'ordre du système, la matrice d'observabilité (ϑ) montre que le système est pleinement observable. Cela signifie que tous les états internes du système peuvent être déduits de manière unique à partir des sorties observées, permettant une connaissance complète de l'état interne du système.

IV.4.3 Application des commandes au système :

Après avoir analysé la stabilité, la commandabilité et l'observabilité du système, il est clair que, bien qu'il soit instable, il reste commandable et observable.

Dans le but de corriger cette instabilité, l'utilisation d'un régulateur LQR est nécessaire. Les propriétés du régulateur LQR garantissent la stabilité du système en boucle fermée, ce qui va être confirmé dans les simulations qui suivent.

IV.4.3.1 La commande linéaire quadratique LQR :

Les résultats des calculs du régulateur LQR sont définis comme suit :

- ✓ **Matrice K** : Cette matrice K représente les gains du contrôleur calculés par le LQR.

$$K = [-1.0000 \quad -1.6567 \quad 18.6854 \quad 3.4594] \quad (4.15)$$

- ✓ **Matrice P** : La matrice P est la solution de l'équation de Riccati.

$$P = \begin{bmatrix} 1.5567 & 1.2067 & -3.4594 & -0.7027 \\ 1.2067 & 1.4554 & -4.6827 & -0.9467 \\ -3.4594 & -4.6827 & 31.6320 & 5.9839 \\ -0.7027 & -0.9467 & 5.9839 & 1.1397 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

- ✓ **Matrice E** : C'est le vecteur des pôles en boucles fermées

$$E = \begin{bmatrix} -0.8494 + 0.8323i \\ -0.8494 - 0.8323i \\ -5.5978 + 0.4070i \\ -5.5978 - 0.4070i \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Les parties réelles négatives soulignent la stabilisation efficace du système en boucle fermée

L'analyse des pôles des matrices P et E révèle des résultats significatifs quant à l'efficacité du contrôleur LQR. La partie réelles négatives des pôles garantit la stabilité du système en boucle fermée, validant ainsi l'approche de régulateur choisi. De plus, la présence de pôles complexes conjugués indique une dynamique amortie avec des oscillations décroissantes.

IV.4.3.2 Implémentation du régulateur LQR et simulation en Boucle Fermée :

Le régulateur LQR minimise une fonction de coût quadratique, trouvant ainsi un équilibre optimal entre les performances du système et l'effort de commande requis. Les étapes pour implémenter ce contrôleur comprennent :

- ✓ **Définition des matrices du système** : Matrices A , B , C et D .
- ✓ **Sélection des pondérations appropriées** : Pondérations des matrices Q et R .
- ✓ **Calcul des gains du contrôleur** : Utilisation de l'algorithme LQR pour déterminer les gains K .
- ✓ **Application des gains** : Générer une force corrective basée sur les états du système.

La simulation en boucle fermée est réalisée pour évaluer la performance du régulateur LQR dans la stabilisation du système. La figure IV.5 illustre le schéma de bloc de la commande LQR appliquée au système.

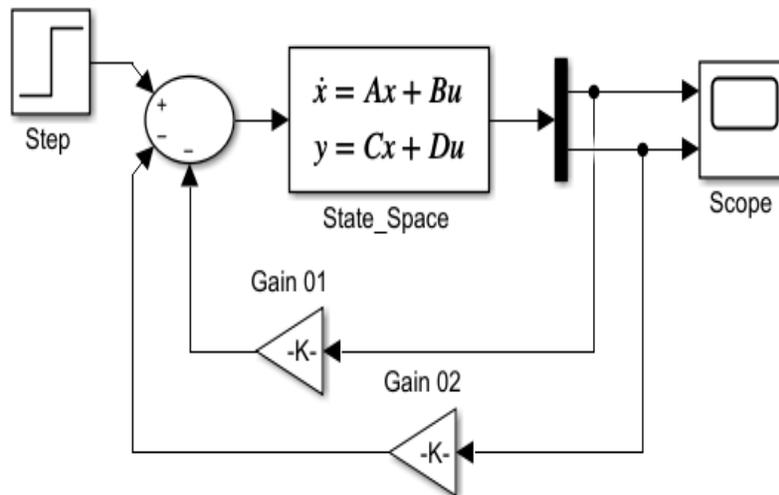


Figure IV.5: Schéma de bloc de la commande LQR appliquée au système.

La figure IV.6, illustre les résultats de l'application de la commande LQR sur le système

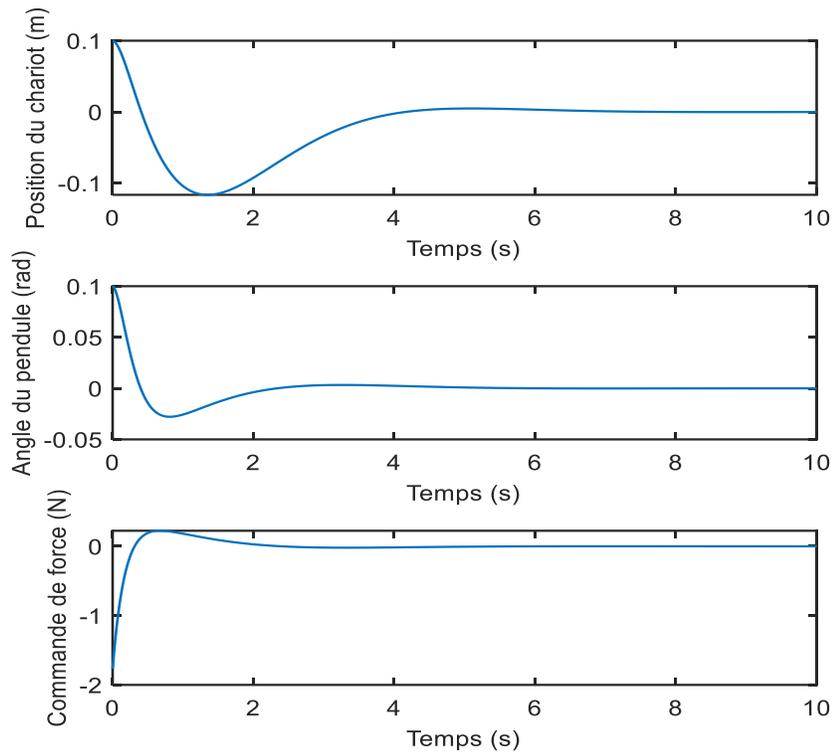


Figure IV.6 : Evolution de la position du chariot, de l'angle du pendule et de la force en fonction du temps dans le cas de la commande LQR sur le système

- ✓ **Position du Charriot (m) :** La première sous-figure présente l'évolution de la position du chariot au fil du temps. Les oscillations initiales, dues aux perturbations initiales diminuent progressivement à mesure que le régulateur stabilise le système.
- ✓ **Angle du Pendule (rad) :** La deuxième sous-figure illustre l'évolution de l'angle du pendule par rapport à la verticale au fil du temps. Un bon régulateur se traduit par une stabilisation autour de zéro, indiquant que le pendule reste vertical. Les oscillations initiales également diminuent avec le temps jusqu'à ce que le pendule se stabilise.

Ces résultats démontrent la capacité du régulateur LQR à stabiliser le système du pendule inversé monté sur un chariot. Les oscillations initiales diminuent au fil du temps, témoignant d'une amélioration progressive de la stabilité du système. Cette simulation en boucle fermée garantissant une stabilisation robuste du pendule et une gestion précise de la position du chariot.

IV.5 La commande linéaire quadratique par l'optimisation par essaim particulière LQR-OEP :

Dans notre étude sur l'amélioration des performances du système de pendule inversé, nous utilisons l'algorithme d'optimisation par essaim particulière pour trouver les paramètres optimaux de la fonction objectif (chapitre III partie 5.1). Cela vise à minimiser l'équation de Riccati par le calcul de la matrice P.

Finalement le gain optimal K du régulateur LQR est calculé pour notre système.

IV.5.1 Description du programme :

Le programme est structuré en trois parties principales pour régulateur LQR-OEP.

IV.5.1.1 Définition du problème :

Nous débutons par la définition du problème dans la première section du code. Cela inclut la spécification de la fonction objectif, du nombre de variables à optimiser, ainsi que des bornes inférieure et supérieure pour ces variables.

Les paramètres spécifiques à l'algorithme d'OEP sont également initialisés dans cette partie, tels que le nombre maximal d'itérations, la taille de la population de l'essaim, le coefficient d'inertie, et les coefficients d'accélération personnels et sociaux.

```

%% Problem Definition
CostFunction = @(t) Riccati_D(t); % Cost Function
nVar = 10; % Number of Unknown (Decision) Variables
VarSize = [1 nVar]; % Matrix Size of Decision Variables
VarMin=-5; % Lower Bound of Decision Variables
VarMax=35; % Upper Bound of Decision Variables


---


%% Parameters of PSO
MaxIt = 10000; % Maximum Number of Iterations
nPop = 200; % Population Size (Swarm Size)
w = 0.4; % Inertia Coefficient
wdamp = 0.99; % Damping Ratio of Inertia Coefficient
c1 = 2; % Personal Acceleration Coefficient
c2 = 2; % Social Acceleration Coefficient

```

Figure IV.7 : Initialisation des paramètres de l'OEP

IV.5.1.2 Initialisation des particules :

Cette section concerne l'initialisation des particules de l'essaim. Chaque particule est dotée d'une position initiale aléatoire dans l'espace des variables à optimiser, d'une vitesse initiale également aléatoire, d'un coût associé à sa position actuelle, et de valeurs optimales personnelles qui mémorisent la meilleure solution trouvée par cette particule jusqu'à présent. La meilleure position globale est également initialisée pour suivre la meilleure solution trouvée par les l'essaims.

```

%% Initialization
% the Particle Template
empty_particle.Position = [];
empty_particle.Velocity = [];
empty_particle.Cost = [];
empty_particle.Best.Position = [];
empty_particle.Best.Cost = [];
particle = repmat(empty_particle, nPop, 1);           % Create Population Array
GlobalBest.Cost = inf;                               % Initialize Global Best
% Initialize Population Members
for i=1:nPop
    particle(i).Position = unifrnd(VarMin, VarMax, VarSize); % Generate Random Solution
    particle(i).Velocity = zeros(VarSize);             % Initialize Velocity
    particle(i).Cost = CostFunction(particle(i).Position); % Evaluation
    particle(i).Best.Position = particle(i).Position; % Update the Personal Best
    particle(i).Best.Cost = particle(i).Cost;         % Update the Personal Best
    if particle(i).Best.Cost < GlobalBest.Cost       % Update the Global Best
        GlobalBest = particle(i).Best;
    end
    BestCosts = zeros(MaxIt, 1);                     % Array to Hold Best Cost Value on Each Iteration
end

```

Figure IV.8: Initialisation des particules avec leur positions et vitesses respectives

IV.5.1.3 Boucle principale du OEP :

La boucle principale du l'OEP est la partie du code où se déroule l'optimisation effective. À chaque itération de cette boucle, les vitesses et positions des particules sont mises à jour en fonction de règles de mouvement calculés par les équations définies dans chapitre III, partie 4.2, équation (3.1). Les coûts associés à chaque nouvelle position sont évalués à l'aide de la fonction objectif définie dans chapitre III, partie 5.8. Les meilleures solutions personnelles et globales sont mises à jour si de meilleures solutions sont découvertes au cours de l'optimisation.

```

%% Main Loop of PSO
for it=1:MaxIt
    for i=1:nPop
        % update velocity
        particle(i).Velocity = w*particle(i).Velocity...
            + c1*rand(VarSize).*(particle(i).Best.Position - particle(i).Position)...
            + c2*rand(VarSize).*(GlobalBest.Position - particle(i).Position);
        particle(i).Velocity = max(particle(i).Velocity, VarMin); % Apply velocity limits
        particle(i).Velocity = min(particle(i).Velocity, VarMax); % Apply velocity limits
        particle(i).Position = particle(i).Position + particle(i).Velocity; % update position
        particle(i).Position = max(particle(i).Position, MinVelocity); % Apply lower and upper bound limits
        particle(i).Position = min(particle(i).Position, MaxVelocity); % Apply lower and upper bound limits
        particle(i).Cost = CostFunction(particle(i).Position); % update personal best
        if particle(i).Cost < particle(i).Best.Cost
            particle(i).Best.Position = particle(i).Position;
            particle(i).Best.Cost = particle(i).Cost;
            if particle(i).Best.Cost < GlobalBest.Cost % Update the Global Best
                GlobalBest = particle(i).Best;
            end
        end
    end

    end
    % store the best cost value
    BestCosts(it) = GlobalBest.Cost;
    %Display iteration information
    %if ShowIterInfo
        disp(['Iteration ' num2str(it) ': Best Cost =' num2str(BestCosts(it))]);
    % end
    % Damping Inertia Coefficient
    w = w * wdamp;
end

out.pop = particle;
out.BestSol = GlobalBest;
out.BestCosts = BestCosts;

```

Figure IV.9 : Déroulement la boucle principale du l'OEP

IV.5.2 Déclaration de la fonction objectif :

Nous avons utilisé l'OEP pour trouver la matrice P optimale qui minimise l'équation de Riccati.

De ce fait, la minimisation de la matrice de Riccati représente notre la fonction objectif.

```
function z= Riccati_D(t)
p=[t(1) t(2) t(3) t(4);t(2) t(5) t(6) t(7);t(3) t(6) t(8) t(9);t(4) t(7) t(9) t(10)];
M = 0.5;
m = 0.2;
b = 0.1;
I = 0.006;
g = 9.8;
l = 0.3;
%denominator for the A and B matrices
n = I*(M+m)+M*m*l^2;

A = [0 1 0 0;0 -(I+m*l^2)*b/n (m^2*g*l^2)/n 0;0 0 0 1;0 -(m*l*b)/n m*g*l*(M+m)/n 0];
B = [0;(I+m*l^2)/n;0;m*l/n];
C = [1 0 0 0;0 0 1 0];
D = [0;0];
% Spécifications de la commande
Q=[1 0 0 0;0 0 0 0;0 0 1 0;0 0 0 0];
R = 1;
z=sum(sum((Q'+A'*p+p*A-p*B*inv(R)*B'*p).^2));
%z=max(max((Q'+A'*p+p*A-p*B*inv(R)*B'*p).^2));
end
```

Figures IV.10 : Déclaration de la fonction objectif

IV.5.3 Résultats de l'Optimisation OEP :

Contrairement à la commande LQR où le résultat est unique (la matrice P est la solution de l'équation de Riccati) ; La commande LQR-OEP trouve des matrices P qui ne sont pas solution de l'équation de Riccati mais qui stabilise le système.

Ceci est vérifié par le calcul des pôles qui sont tous à partie réelle négative.

- **Essai 1 :**

✓ La Matrice de Riccati P optimale :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1.1520 & 0.5045 & -0.2265 & -0.3522 \\ 0.5045 & 0.2170 & 0.7831 & -0.1847 \\ -0.2265 & 0.7831 & 8.0000 & 2.4329 \\ -0.3522 & -0.1847 & 2.4329 & 0.5008 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

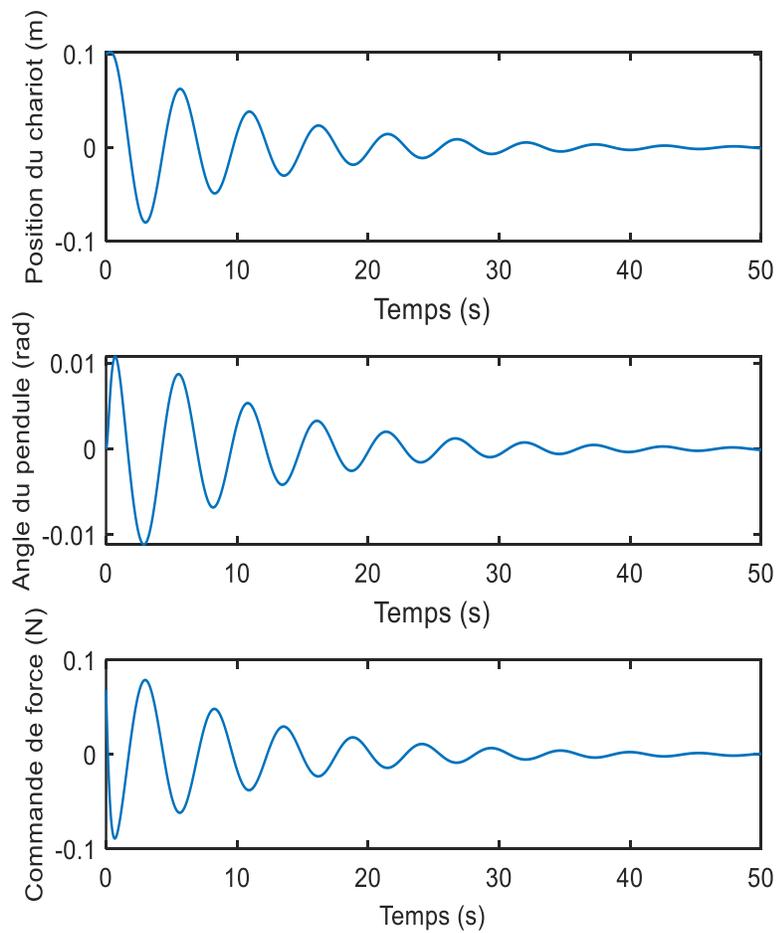
- ✓ Le calcul du gain du régulateur LQR sur la base de P_1

$$K_1 = [-0.6837 \quad -0.4449 \quad 12.4823 \quad 1.9405] \quad (4.19)$$

- ✓ Les valeurs propres de la matrice du système en boucle fermée sont :

$$eig_1 = \begin{bmatrix} -4.0040 + 2.3180i \\ -4.0040 - 2.3180i \\ -0.0927 + 1.1892i \\ -0.0927 - 1.1892i \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

La figure IV.11 illustre les résultats de l'application de la commande LQR-OEP sur la base de P_1



Figures IV.11 : Evolution de la position du chariot, de l'angle du pendule et de la force en fonction du temps dans le cas de la commande LQR-OEP sur la base de P_1

- **Essai 02 :**

- ✓ La Matrice de Riccati
- P
- optimale :

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.6364 & 0.5979 & -1.6608 & -0.4653 \\ 0.5979 & 0.1385 & 0.7922 & -0.2132 \\ -1.6608 & 0.7922 & 8.0000 & 2.4444 \\ -0.4653 & -0.2132 & 2.4444 & 0.4870 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

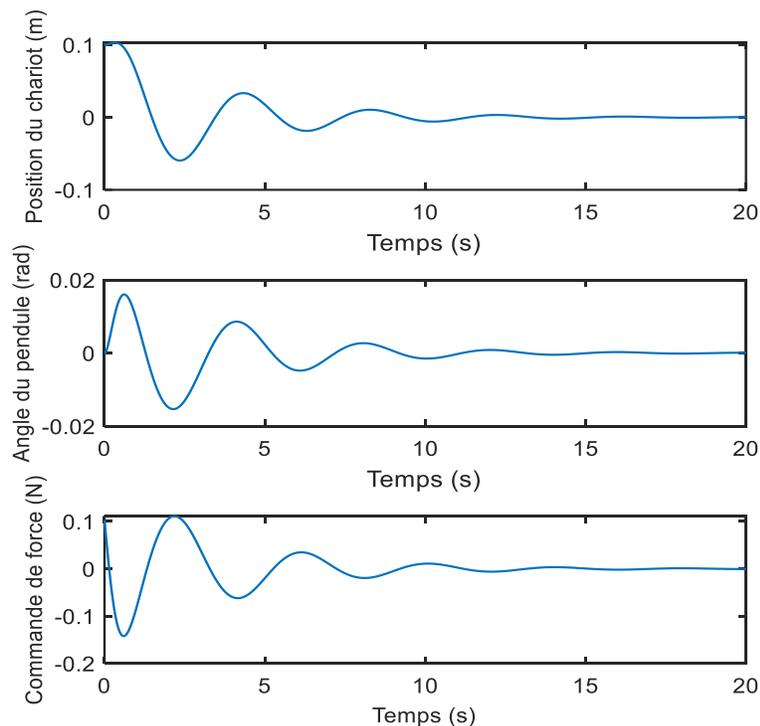
- ✓ Le calcul du gain du régulateur
- LQR
- sur la base de
- P_2
- :

$$K_2 = [-1.0278 \quad -0.7173 \quad 12.5513 \quad 1.8262] \quad (4.22)$$

- ✓ Les valeurs propres de la matrice du système en boucle fermée sont :

$$eig_2 = \begin{bmatrix} -3.2961 + 2.5806i \\ -3.2961 - 2.5806i \\ -0.2931 + 1.5896i \\ -0.2931 - 1.5896i \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

La figure IV.112 illustre les résultats de l'application de la commande LQR-OEP sur la base de P_2



Figures IV.12 : Evolution de la position du chariot, de l'angle du pendule et de la force en fonction du temps dans le cas de la commande LQR-OEP sur la base de P_2

Les résultats de l'optimisation par essaim particulaire montrent que l'algorithme a convergé vers une solution stable (figures IV.11 et IV.12) avec des pôles à partie réelle négatives en boucle fermée, confirmant ainsi sa stabilité.

Cela confirme que l'OEP a réussi à trouver une matrice de Riccati P permettant de calculer un gain K stable pour le régulateur LQR.

L'hybridation LQR-OEP offre plus de flexibilité par rapport à la commande LQR ; puisque même si l'équation de Riccati n'est pas résolue, des solutions stabilisantes ont été retrouvées.

IV.6 Conclusion :

Ce chapitre a exploré l'utilisation de l'optimisation par essais particuliers pour améliorer les performances du régulateur linéaire quadratique appliqué à la stabilisation du pendule inversé.

En déterminant la matrice P optimale, l'OEP permet de calculer un gain K stabilisant par la commande LQR, assurant ainsi la stabilité du système en boucle fermée.

Les résultats obtenus montrent que l'algorithme d'OEP converge vers une solution stable, caractérisée par des pôles à partie réelle négatives en boucle fermée, confirmant la stabilité du système.

Les résultats de cette hybridation démontrent non seulement l'efficacité de l'OEP pour cette tâche spécifique, mais également son potentiel pour d'autres applications de commande avancée, ouvrant ainsi de nouvelles perspectives dans la maîtrise des systèmes dynamiques.

Conclusion Générale

La recherche menée dans le cadre de ce mémoire a exploré l'efficacité de l'approche OEP-LQR dans la stabilisation du pendule inversé monté sur un chariot, un système dynamique complexe et non linéaire. À travers une série d'analyses théoriques et des simulations, nous avons évalué l'impact de cette méthode d'optimisation sur les performances du système.

Nos résultats ont démontré que l'optimisation par essais particuliers peut jouer un rôle crucial dans l'amélioration des performances du régulateur linéaire quadratique appliqué au pendule inversé. En trouvant les paramètres optimaux de la matrice de Riccati du régulateur LQR, l'OEP permet d'obtenir des gains de commande qui garantissent la stabilité et la robustesse du système face aux perturbations.

L'analyse approfondie des simulations a révélé que l'approche OEP-LQR conduit à une stabilisation plus rapide et plus précise du pendule inversé par rapport aux méthodes traditionnelles de commande. Les performances du système en boucle fermée ont été améliorées, avec des oscillations amorties et une réduction significative du temps de réponse.

En conclusion, cette étude confirme le potentiel de l'optimisation par essais particuliers dans le domaine de commande des systèmes dynamiques complexes. L'intégration de l'OEP avec le régulateur LQR offre une méthode robuste et efficace pour stabiliser le pendule inversé et peut être étendue à d'autres applications de commande où la précision et la réactivité sont essentielles.

Les résultats obtenus ouvrent également la voie à de nouvelles avenues de recherche, notamment l'exploration des variantes de l'algorithme d'OEP et l'application de cette approche à d'autres systèmes dynamiques complexes. En combinant des techniques d'optimisation avancées avec des méthodes de commande traditionnelles, il est possible de repousser les limites de la stabilisation des systèmes et d'ouvrir de nouvelles perspectives dans le domaine de la robotique et de l'automatisation.

Bibliographie

- [1] : N. S. Nise, K. Ogata "Modern Control Engineering" et "Control Systems Engineering"
- [2] : C Aguilar, "Approximate feedback linéarisation and sliding mode control for the single inverted pendulum," 2002.
- [3] : Herbert Goldstein."Nonlinear Dynamics and Chaos" de Steven Strogatz et "Classical Mechanics"
- [4] : Dean C. Karnopp, Donald L. Margolis, et Ronald C. Rosenberg "System Dynamics: Modeling, Simulation, and Control of Mechatronic Systems" 2008.
- [5] : M. Mihelj and M. Munih. "Double inverted pendulum optimal control - Basis for unsupported standing in paraplegia". In: *7th International Workshop on Advanced Motion Control Proceedings*, 3-5 July 2002, Maribor, Slovenia; pp .121 - 126
- [6] : "Control of Nonlinear Dynamic Systems: Theory and Applications" de Henrik Sandberg et "Advanced Modern Control System Theory and Design" de Stanley M. Shinnars.
- [7] : S. Kawaji and K. Kanazawa. "Control of double inverted pendulum with elastic joint". In: *Proceedings IROS '91: IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems '91*. 3-5 Nov 1991, Osaka, Japan; pp.946-951.
- [8] : K. H. Lundberg and J. K. Roberge. "Classical dual-inverted-pendulum control". In: *42nd IEEE International Conference on Decision and Control*. 9-12 Dec 2003, Maui, HI, USA; pp. 4399-4404
- [9] : E. Witrant. "Stabilisation des systèmes commandés par réseaux". *Thèse de doctorat*, Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, France, 2005
- [10] : A.S Shiriaev, A Pogromsky, and H Ludvigsen, "on global properties of passivity- based control of an inverted pendulum," vol. 10, no. 04, 2000.
- [11] : Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.
- [12] : Goldberg, D. E. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc.
- [13] : Simon, D. (2013). *Evolutionary Optimization Algorithms*. John Wiley & Sons.
- [14] : Eiben, A. E., & Smith, J. E. (2015). *Introduction to Evolutionary Computing* (2nd ed.). Springer.
- [15] : Kennedy, J. (2011). Particle Swarm Optimization. In C. Sammut & G. I. Webb (Eds.), *Encyclopedia of Machine Learning* (pp. 760-766). Springer.
- [16] : Eberhart, R. C., & Kennedy, J. (1995). A new optimizer using particle swarm theory. In *MHS'95. Proceedings of the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science* (pp. 39-43). IEEE.
- [17] : Antoine Dutot et Damien Olivier"Optimisation par essaim de particules Application au problème des n-Reines