République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
**Université M'hamed BOUGARA**
**Faculté des Sciences**

**MÉMOIRE**
**Présenté Pour L'Obtention Du Diplome De Master**
**En : RECHERCHE OPÉRATIONNELLE**
**Spécialité :RECHERCHE OPÉRATIONNELLE ,OPTIMISATION ET MANAGEMENT STRATEGIQUE**

Par : **MEHDI KHELIF**
**et SAID BELAID**

**théme**

# Optimisation d'un schéma de livraison de carburant optimale : cas NAFTAL

Soutenue le 08/07/2023 devant le jury composé de :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mr | O.BENAMARA | Maitre de conférence/A à l'UMBB | **Président** |
| Mr | S.TAHARBOUCHET | Maitre de conférence/B à l'UMBB | **Promoteur** |
| Mr | F.CHEURFA | Maitre de conférence/B à l'UMBB | **Examinateur** |

**Anne universitaire :2022/2023**

# *Remerciements*

Nous exprimons notre gratitude à Allah, de nous avoir donné le courage, la force et la volonté pour mener à bien ce mémoire. Nos sincères remerciements vont à Mr Taharbouchet de l'UMBB et à Mme SNOUSI de NAFTAL. Nous tenons à leur exprimer notre profonde reconnaissance, l'un pour nous avoir guidé tout au long de cette étude, et l'autre pour avoir fourni toutes les informations dont nous avions besoin. Nous remercions également les membres du jury qui ont généreusement accepté de lire cette mémoire afin d'évaluer et d'apprécier notre travail. Nous supposerons qu'ils seront satisfaits. Nous sommes également reconnaissants envers les personnes qui nous ont guidés tout au long de ce projet, ainsi que tous les enseignants qui nous ont formés à l'UMBB pendant notre parcours universitaire. Nous n'oublions pas nos collègues et amis qui ont été présents et soutenants. pour finir , nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce mémoire.

# Dédicace

Je souhaite dédier ce travail modeste

A mes parents bien-aimés, qui sont la source de mon éducation, de mes connaissances et de mes valeurs.

Je dédie également ce travail à mes grands-parents, mes oncles, mes tantes, mes cousins et cousines sont également inclus dans cette dédicace et à toutes ma familles et mes amis. Enfin je souhaite exprimer ma gratitude à toutes les personnes que j'aime et dont je n'ai pas mentionné les noms.

KHELLIF Mehdi

# Dédicace

Je dédie ce mémoire

A mes chers parents ma mère et mon père

Pour leur patience, leur amour, leur soutien et leur encouragements.

A mes frères.

A mes amies et mes camarades.

Sans oublier tout les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.

BELAID Said

# Table des matières

# Table des figures

# Introduction générale

La recherche opérationnelle (RO), également appelée science du management ou science de la décision, est une discipline qui a pour objectif d'aider les gestionnaires à prendre des décisions en utilisant des modèles et des méthodes scientifiques appropriés. Elle trouve ses origines pendant la Deuxième Guerre mondiale, lorsque l'État-major britannique a fait appel à des équipes de mathématiciens et de physiciens pour résoudre des problèmes stratégiques tels que le développement de réseaux de radars et l'organisation de convois maritimes. Après la guerre, cette approche méthodique et scientifique de la prise de décision s'est étendue au monde de l'économie et de l'industrie, où elle a connu de nombreux succès. Au fil du temps, de nouvelles méthodes et de nouveaux domaines d'application ont émergé.

Dans notre domaine d'étude, nous nous intéressons aux problèmes associés au transport des carburants pour les stations-service. Le transport de marchandises joue un rôle crucial dans l'industrie, car sans une gestion du transport fiable, réactif, flexible et économique, les entreprises doivent mobilisateur d'importantes ressources en termes d'espace, de manutention, de stockage et de systèmes d 'information pour satisfaire les besoins des consommateurs. Au cours des dernières décennies, la demande de carburants a atteint des niveaux sans précédent, ce qui a entraîné une augmentation significative des dépenses liées aux coûts de transport pour les entreprises.

Dans ce contexte, l'entreprise NAFTAL, spécialisée dans le transport et la distribution de produits pétroliers, est intéressée par l'investissement dans l'étude et l'amélioration des systèmes de gestion des flux de transport. L'objectif est de trouver des solutions d'optimisation de plus en plus performantes.Après avoir bien défini notre problématique et effectué notre modélisation, nous constatons que notre problème est une généralisation du problème (MC-VRP-C) "tournée de véhicules multi-compartiments avec capacité hétérogènes", qui fait partie des variantes du (VRP). Dans ce type de problème, un ou plusieurs véhicules de capacités différentes doivent parcourir un réseau de transport pour effectuer des livraisons aux clients ou couvrir les itinéraires de ce réseau.

L'impact des activités de transport sur les coûts des entreprises est devenu si important qu'il est maintenant essentiel de mettre en place des mesures d'optimisation.

Dans le cadre de notre activité, nous avons pour objectif de transporter des quantités prédéterminées de produits à un ensemble de clients en partant d'un point de départ (l'entrepôt) où nos véhicules sont stationnés. Notre priorité est de minimiser les distances parcourues et les temps de conduite afin de réduire les coûts. Pour ce faire, nous devons déterminer les clients desservis par chaque véhicule et l'ordre dans lequel ils seront visités.

Dans nos opérations de transport chez NAFTAL, nous utilisons principalement des camions-citernes compartimentés et de type différent pour effectuer les livraisons. Chaque compartiment est spécifiquement dédié à un seul produit, qui doit être entièrement livré à un client selon ses exigences. La recherche sur les problèmes liés aux itinéraires de véhicules compartimentés (MC-VRP-C) est limitée dans la littérature, et il convient de souligner que la plupart des études menées dans ce domaine se concentrent principalement sur l'approvisionnement et la distribution de carburants. Notre étude porte sur le transport de deux produits incompatibles au sein de l'entreprise NAFTAL d'EL HARRACH 16A, qui possède un dépôt et 85 stations à approvisionner,afin de faciliter la compréhension de notre travail, nous avons établi le plan de travail ci-dessous :

-Le premier chapitre, nous fournissons une présentation détaillée de l'organisme d'accueil, sur la société, la Société Nationale de Distribution et de Commercialisation des Produits Pétroliers NAFTAL, dans laquelle nous avons effectué notre stage pratique durant ces cinq derniers mois. Cette présentation comprendra des informations sur son historique, sa mission, sa structure organisationnelle, ses activités principales ainsi que sa position et son rôle dans le secteur de la distribution des produits pétroliers.

-Le deuxième chapitre,Nous présentons notre problématique ainsi que toutes les caractéristiques du problème, et nous concluons en exposant toutes les contraintes de notre objectif.

-Troisième chapitre, nous abordons un rappel théorique nécessaire pour notre document en commençant par la théorie des graphes et l'optimisation combinatoire, le problème VRP et ses variantes, en terminant par la complexité algorithmique.

-Quatrième chapitre,nous présentons la modélisation mathématique de notre problème en commençant par introduire les notations et indices utilisés, puis en décrivant les variables de décision employées. Ensuite, nous exposons la formulation mathématique de chaque contrainte. Enfin, nous présentons le programme mathématique linéaire visant à minimiser le coût de transport.

-Cinquième chapitre,nous exposons les méthodes de résolution que nous avons choisie pour résoudre notre problème : le recuit simulé, l'heuristique du plus proche voisin, le swap, le déplacement de sommets et le véhicule exchange. Nous commençons par faire un rappel théorique sur chacune de ces méthodes, puis nous expliquons comment nous les avons adaptées tous ensemble. Enfin, nous présentons ci-dessous l'algorithme général de notre problème.

-Sixième chapitre,nous présentons l'implémentation. On commence par présenter le programme que nous avons choisi, ensuite on donne les raisons de notre choix, et on termine par donner les résultats de notre problème.

# Chapitre 1

# Présentation de l'entreprise

## 1.1 Introduction :

Ce chapitre présente une description générale de la société NAFTAL, car avant de résoudre un problème, il est important de connaître le contexte dans lequel il se trouve. Cette dernière permettra de mieux connaître l'envergure du problème étudié.

Pour bien cerner notre sujet d'étude, nous commencerons par présenter une image synthétique, relative à son champ d'application. C'est ainsi qu'on va essayer tout au long de ce chapitre, d'exposer l'essentiel des éléments pouvant donner une présentation de la société nationale de distribution et de commercialisation des produits pétroliers (NAFTAL). Ces éléments porteront sur l'historique de la société, son organisation interne, ses missions, son potentiel humain et matériel ainsi que son marché.

## 1.2 Présentation de NAFTAL

NAFTAL est une entreprise pétrolière algérienne, filiale à 100% du groupe SONATRACH. spécialisée dans la distribution des produits pétroliers.

Elle est aussi spécialisée dans la conception, l'élaboration et la distribution de lubrifiants pour moteurs (deux-roues, automobiles et autres véhicules) ainsi que pour l'industrie.

## 1.3 Historique de la société

Filiale de SONATRACH (Société National pour la recherche, Transport, production, transformation, la commercialisation des hydrocarbures), l'entreprise nationale de raffinage et de distribution de produits pétroliers (ERDP) a été créé par le décret N°80- 101 datant du 06 Avril 1980. Entrée en activité le 01 Janvier 1982, elle fut chargée de l'industrie de raffinage et de la distribution de produits pétroliers. Le 04 Mars 1985, les districts suivants carburants, lubrifiants, pneumatiques et bitumes ont été regroupés sous le nom UND (Unité NAFTAL de Distribution).

En 1987, ≪ l'ERDP NAFTAL ≫ a été restructurée et modifiée par le décret N°87/189 en deux entreprises :

- NAFTEC chargée du raffinage du pétrole ;

- NAFTAL chargée de la distribution et la commercialisation des produits pétroliers. Filiale à 100% de la SONATRACH, NAFTAL est passée à l'autonomie le 18 Avril 1998 suite à l'abrogation du monopole de l'Etat sur le commerce extérieur et l'ouverture aux opérateurs privés du marché de ≪gros≫ des produits pétroliers en 1997.

Son capital est de 6,65 milliards de DA. La création de STPE, société chargée du transport des produits énergétiques par chemin de fer, en partenariat avec SNTF le 21 Décembre 1999.

Le 29 Juillet 2002 il y'avait une augmentation du capital social de l'entreprise NAFTAL de 6,65 milliards de DA à 15,65 milliards de DA conformément à la résolution de l'AGEX. Puis en 2018 ils ont fait une autre augmentation de capital social de 15,65 milliards de DA à 40 milliards de DA. Chiffre d'affaire : pour l'année 2015, les activités de la société ont engrangé un chiffre d'affaire de 333.2 milliards de DA, en légère hausse par rapport à celui réalisé en 2014 332.7 milliards de DA.

Figure 1.1 – logo NAFTAL

- Label : produit pétroliers

- Les cinq lignes : qui représentent les cinq branches à savoir : carburants, commercialisation, Activités internationales et partenariat, lubrifiant, pneumatique, bitumes et GPL.

- Deux couleurs :

- Le bleu : pour les deux lettres et label (NAFTAL), synonymes de largeur et d'horizon.
- Le jaune : pour le fond du logo, symbole du sérieux [16].

## 1.4 L'organisation de NAFTAL

A l'ère de l'économie de marché, NAFTAL a jugé indispensable la mise en place d'une nouvelle organisation qui répond aux strictes exigences économiques de la mondialisation, afin de se préparer à évoluer dans un marché concurrentiel de plus en plus ouvert. La société NAFTAL a adopté une organisation basée sur le principe de la spécialisation par ligne de produit et la décentralisation des activités opérationnelles. Le schéma d'organisation de NAFTAL proposé (voir Figure 2), traduit et anticipe les mutations et répond au double objectif suivant :

– Le renforcement de la direction générale dans son rôle de conception et d'orientation stratégique.

– La décentralisation réelle des activités opérationnelles. NAFTAL suit un schéma d'organisation qui s'articule autour de 3 pôles :

– La direction générale

– Les directions fonctionnelles

– Les activités opérationnelles

### 1.4.1 La direction générale :

Elle est assurée par un président directeur général assisté par :

– Un comité exécutif

– Un comité directeur

– Le staff

### 1.4.2 Les directions fonctionnelles :

Elles élaborent les stratégies et politiques de la société et veillent à la coordination et la cohérence d'ensemble. Elles sont organisées en trois types de directions : Direction exécutive, centrale et soutiens.

### 1.4.3 Les activités opérationnelles :

Elles exercent la responsabilité des métiers de la société dans le cadre des objectifs stratégiques de la présidence. Elles sont placées sous l'autorité d'un directeur de Branche, elles sont au nombre de cinq :

– La branche Carburant.

– La branche GPL

– La branche commercialisation.

– La branche LPB (Lubrifiant, Pneumatiques et Bitume)

– La branche activités internationale et partenariats.

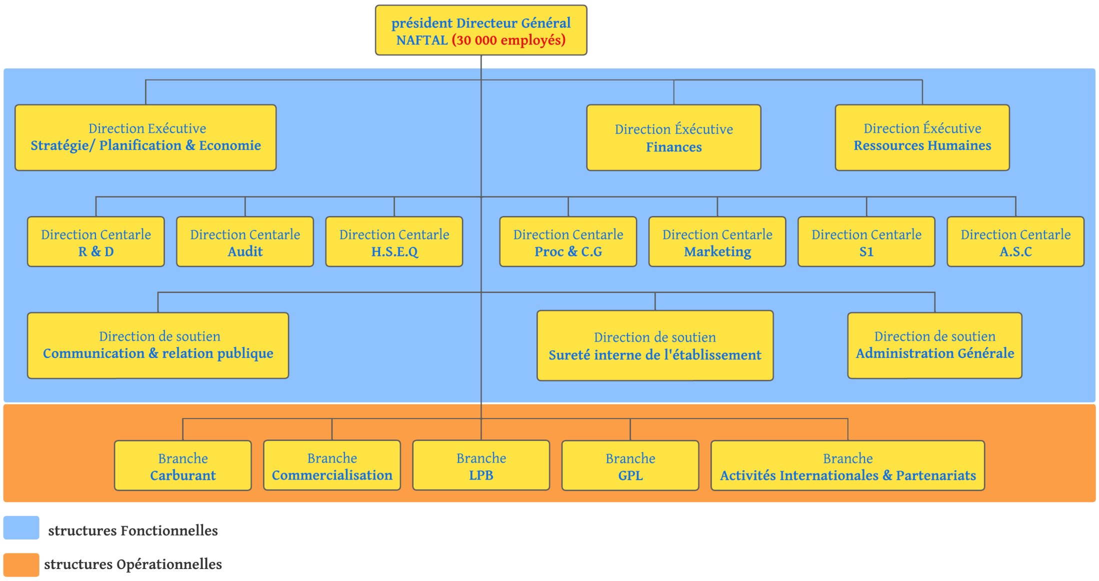



FIGURE 1.2 – organigramme organisation NAFTAL

## 1.5 Les missions de l'entreprise :

NAFTAL est chargée de la commercialisation et la distribution des produits pétroliers y compris ceux destinés à l'aviation, à la marine, le GPL, les combustibles, les lubrifiants, les bitumes et pneumatiques. Les activités de NAFTAL consistent à commercialiser les produits pétroliers à travers l'organisation et la gestion d'un réseau de distribution sur l'ensemble du territoire national. Ces principales missions sont :

- Organiser et développer l'activité de commercialisation et de distribution des produits pétroliers et dérivés.
- Stocker et transporter tout produit pétrolier commercialisé sur le territoire national.
- Veiller à l'application et au respect des mesures relatives à la sécurité industrielle, la sauvegarde et la protection de l'environnement en relation avec les organismes concernés.
- Procéder à une étude du marché en matière d'utilisation et de consommation des produits pétroliers.
- Définir et développer une politique en matière d'Audit, concevoir et mettre en œuvre des systèmes intégrés d'informations.
- Développer et mettre en œuvre les actions visant à une utilisation optimale et rationnelle des infrastructures.
- Veiller à l'application et au respect des mesures liées à la sécurité interne de la société conformément à la réglementation.
- Identifier et recenser les infrastructures, équipements et autres moyens matériels camions, canalisation) relevant de l'activité carburants du district, les structures d'organisation (services, maintenance, installations fixes, surveillance et entretien canalisations, reconnais-

sance produits, etc.) et les moyens humains œuvrant pour l'activité carburants.

- Assurer la formation et l'assistance continue aux utilisateurs.
- Elaborer et diffuser les procédures d'utilisation des ressources informatiques ;
- Assurer la configuration des postes de travail des utilisateurs [18]

## 1.6 Les moyens de l'entreprise NAFTAL :

Avec un personnel de 31583 agents ; Effectif au 2018, NAFTAL est le premier et seul distributeur de produit pétroliers en Algérie. Elle contribue à 51 % de l'énergie finale en fournissant plus de 10 million de tonnes de produits pétroliers par an sous forme de :

– Carburants (8 millions de TM).

– Gaz de pétrole liquéfiés (plus de 1.6 million de TM).

– Bitumes (plus de 0.5 million de TM).

– Lubrifiants (plus de 70 000 TM).

Pour cela NAFTAL dispose de :

- 67 centres et dépôts de distribution et stockage carburant. Lubrifiants et pneumatique.

- 55 dépôts d'avitaillement d'aéronefs, centres et point de ventes à la mer.

- 45 centres d'emballage Gol transport aéreos d'une capacité d'enfutage de 1.2 million de tonnes/an.

- 59 dépôts relais de stockage GPL.

- 09 centres vrac GPL.

- 16 unités de formulation de bitumes de 360.000 tonnes/an.

- 3500 véhicules de distribution et 1800 engins de manutention et de maintenance. 380 km de pipe-lines multi produits carburants et GPL. Et son réseau de distribution s'étend sur :

- 1732 stations de service dont 328 en gestion directe par NAFTAL.

- 124 points de vente d'essence sans plomb.

- 268 points de vente GPL/CARBURANT.

- 14550 points de vente GPL.

La couverture des besoins du marché national en produit pétroliers implique des transports massifs de carburants et GPL depuis les sources de production vers les zones de consommation qui sont les districts.

Pour assurer cet équilibre entre l'offre et la demande, NAFTAL met à contribution plusieurs modes de transport :

- Cabotage pipe : pour l'approvisionnement des entreprises à partir des raffineries. Rail/chemin de fer : pour le ravitaillement des dépôts de l'intérieure du pays à partir des entrepôts.

• Route : pour la livraison des clients et le ravitaillement des dépôts non desservis par le rail. Pour accomplir sa mission de distribution des pétroliers, NAFTAL dispose d'un parc dépassant les 3 mille véhicules de distribution constitue de :

- Tracteur routier.

- Semi-remorques plateaux.

- Semi-remorques citernes.

- Camion citernes.

-Camion plateaux.

- Camion porte palettes.

Cela permet d'assurer 70 à 75 % des livraisons clients, le reste étant assuré par les transporteurs tiers ou par les clients eux-mêmes.

Par ailleurs, NAFTAL dispose de sept (07) barges pour le soutage des navires et affrète en permanence auprès des entreprises publiques de transport :

- 160 citernes carburantes (SNTR).

- 960 wagons-citernes (SNTF).

- 04 caboteurs (SNTM/HYPROC) [17].

## 1.7 Clientèle réseaux et consommateurs

### 1.7.1 Clientèle réseaux :

Une station de service est le point de rencontre avec les clients, ces stations sont des points de vente agréé qui commercialise les produits suivants :

-Les carburants Terre.

- Lubrifiants.

- Pneumatiques.

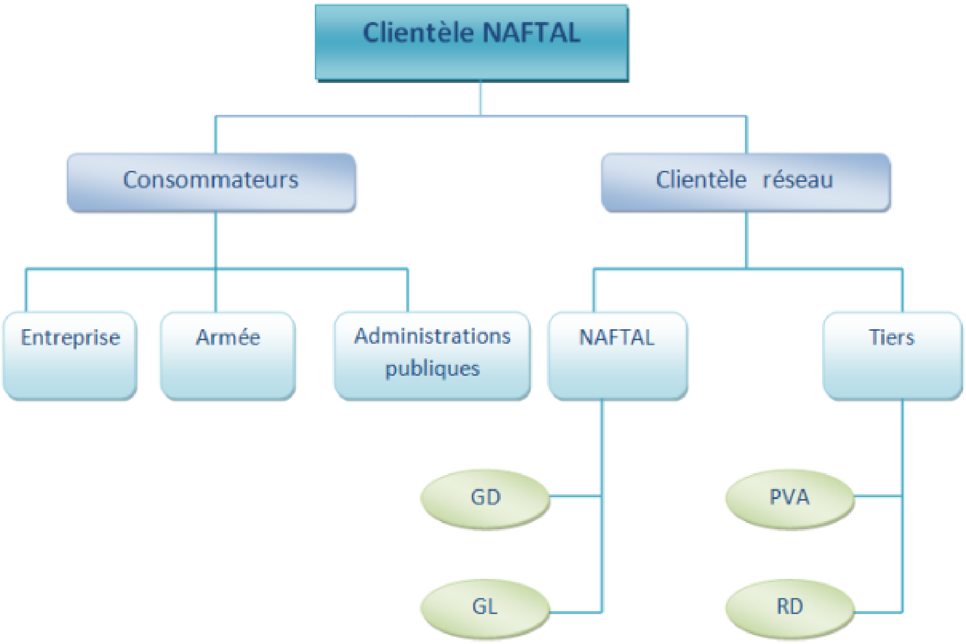
Elle se divise en deux parties en fonction de ses liens juridiques avec NAFTAL.

**Les stations de service du patrimoine NAFTAL :**

Ces stations sont la propriété entière de NAFTAL, on distingue deux types qui se diffère par leur mode de gestion.

•GD : gestion directe ce sont des stations gérées directement par NAFTAL, infrastructure et les produits commercialisés sont propres à NAFTAL et les personnels sont payés par NAFTAL.

•GL : gestion libre ce sont des stations en location, la gestion est confiée des gérants libres.




.png

FIGURE 1.3 – organigramme clientèle NAFTAL

**Les stations de service appartenant à des tiers :**

•PVA : ces stations sont appelées (Points de Vente Agrée), ce sont des stations gérées par des particuliers (privée).

•RD : Revendeur distributeur : ce sont des clients qui ont des camions de capacité ne dépassant pas 15m3 qui prélève uniquement le Gasoil, puis ils le revendent par la suite pour leurs propres clients.

### 1.7.2 Consommateurs :

Ils font des contrats avec NAFTAL qui leur fournit le produit, ils enlèvent le Gasoil pour leurs propres comptes (pour leurs consommation) comme les entreprises, Armée, administrations publiques, etc.[19]

## 1.8 Les Produits NAFTAL :

Les produits pétroliers présentent plusieurs variétés, selon leurs natures et leurs utilisations. NAFTAL commercialise différentes familles de produits :

• La Famille des Gaz du Pétrole Liquéfiés (GPL) qui comprend le propane commercial et le Butane commercial.

• La Famille des Carburants et Combustibles Terre qui comprend : le GPL/C, les Essences (Normal, Super et Sans Plomb), la Gasoil moteur, le Fuel-oil Lourd et le Kérosène

(Jet déclassé).

• La Famille des Carburants et Combustibles Aviation et Marine qui comprend : le carburéacteur Jet-A1, l'AV-GAS 100LL, le Gas-oil marine, le fuel-oil Bunker/C et les inter-fuels.

• La Famille des Lubrifiants terres qui comprend les huiles motrices, les huiles industrielles, les huiles de transmission et les graisses.

• La Famille des Lubrifiants Aviation et Marine.

• La Famille des Bitumes qui comprend les bitumes purs, les bitumes oxydés, les bitumes fluidifiés et les émulsions.

• La Famille des Produits Spéciaux terre qui comprend les solvants, les cires, les paraffines et les extraits aromatiques.

• La Famille des produits spéciaux aviation et marine qui comprend le Methymix et les autres produits spéciaux. Chaque famille de produits comprend une multitude de produits qui se distinguent par leur nature physico-chimique, leur utilisation et leur mode de commercialisation. [18]

## 1.9 Branche commercialisation :

Elle fait partie des 5 branches opérationnelles de NAFTAL et c'est elle qui s'occupe des livraisons des dépôts secondaires vers les stations de services (la clientèle).

# Chapitre 2

# Eléments de théorie des graphes

## 2.1 Introduction

La théorie des graphes est une branche des mathématiques qui étudie les graphes, qui sont des structures abstraites composées de nœuds (ou sommets) reliés par des arêtes (ou des arcs). Les graphes sont utilisés pour modéliser des relations entre des objets ou des événements dans de nombreux domaines, tels que les réseaux sociaux, la logistique, la biologie, la physique, l'informatique et bien d'autres encore.

La théorie des graphes étudie les propriétés des graphes, telles que leur connectivité, leur planarité, leur coloration, leurs cycles, leurs chemins et leurs flots, ainsi que les algorithmes pour résoudre des problèmes sur les graphes, tels que le parcours de graphes, le calcul du plus court chemin, le flot maximal, la recherche de cycles, la recherche de sous-graphes, etc.

Un des premiers résultats importants de la théorie des graphes est apparu dans les articles de Leonhard Euler avec le problème des sept ponts de Königsberg, publié en 1736. Il est aussi considéré comme un des premiers résultats topologiques en géométrie ; en effet, il ne dépend d'aucune mesure. Ces faits caractérisent la relation profonde qui existe entre la théorie des graphes et la topologie.

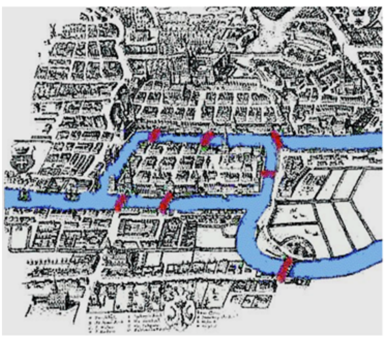


FIGURE 2.1 – Les sept ponts de Königsberg

## 2.2 Notions fondamentaux :

Toutes les notions et les définitions citées dans cette section sont tirées à partir de ces livres : Lavoisier [1], Vanderbei [2], Lawler [3]

**Graphe**

Un graphe G est un couple formé de deux ensembles $(X, E)$ tel que :

- X ensemble dont les éléments sont appelés sommets, (aussi appelés nœuds, points ou vertex)

$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ avec $|X| = n$.

-$E$ ensemble des arrêtes, (aussi appelées liens ou lignes), qui sont des paires de sommets (c.-à-d. qu'une arête est associée à deux sommets distincts).

$E$={ $e_1, e_2, ..., e_n$ } avec $|E| = m$

Une arête e de l'ensemble E est définie par une paire de sommets, appelés extrémités. Si l'arête e relie deux sommets $x_i$ et $x_j$, on dira que ces sommets sont adjacents ou incidents avec e ou bien que l'arête e est incidente avec les sommets $x_i$ et $x_j$.

.Une arête ayant une orientation est plus souvent appelée arc, qui est représenté par une flèche.

### 2.2.1 Graphe non orienté

Un graphe non orienté est un graphe dont les arêtes ne sont pas orientées et chaque arête (e) est définie comme suit : $e = (x_i; x_j)$

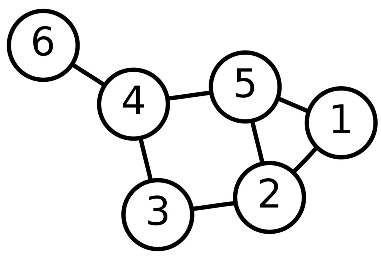



FIGURE 2.2 – Représentation d'un graphe non orienté

### 2.2.2 Graphe orienté

Un graphe orienté est un graphe dont chaque arc (e) tel que $e = (x_i; x_j)$ possède une extrémité initiale $I(e) = x_i$ et une extrémité terminal $T(e) = x_j$.

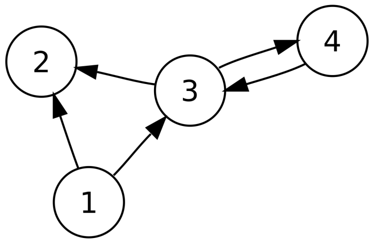



FIGURE 2.3 – Représentation d'un graphe orienté

### 2.2.3 Degré et Ordre

Soit $G = (X, E)$ un graphe.

- Le degré d'un sommet $x$ de $G$, noté $d_G(x)$ (ou $d(x)$), est égal au nombre de ses voisins, autrement dit $d_G(x)= |N_G(x)|$

- $|X| = n$ dit l'ordre de graphe $G$.

### 2.2.4 Boucle

Une boucle est une arête(arc) d'un graphe ayant pour extrémités le même sommet.

### 2.2.5 Successeurs, Prédécesseurs

- L'ensemble des successeurs d'un sommet $x_i$ est l'ensemble de toutes les arcs sortants du sommet $x_i$ noté par $\Gamma^+(x_i)$ tel que :

$\Gamma^+(x_i) = \{x_j \in X/(x_i; x_j) \in E\}$

- L'ensemble des prédécesseurs d'un sommet $x_i$ est l'ensemble de toutes les arcs entrants au sommet $x_i$ noté par $\Gamma^-(x_i)$ tel que :

$\Gamma^-(x_i) = \{x_j \in X/(x_j; x_i) \in E\}$

1.3 Chemin, cycle, Chaîne et circuit :

### 2.2.6 Chaîne

Une chaîne dans un graphe est une suite $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ tel que $x_i$ $\forall i \in \{1, 2, ..., k\}$ est relié par une arête de $x_{i-1}$ et une arête a $x_{i+1}$.

### 2.2.7 Chaine simple

Est une chaine ne passant pas deux fois par une même arête, c'est-à-dire dont toutes les arêtes sont distinctes.

### 2.2.8 Chaine élémentaire

Est une chaine ne passant pas deux fois par un même sommet, c'est-'a-dire dont tous les sommets sont distincts.

### 2.2.9 Chemin

Dans un graphe orienté, un chemin d'origine $x$ et d'extrémité $y$, note $\mu[x, y]$, est défini par une suite finie d'arcs consécutifs, reliant $x$ à $y$.

Le nombre d'arcs d'un chemin détermine **la longueur du chemin**.

Un **chemin élémentaire** est un chemin ne passant pas deux fois par un même sommet, c'est-à-dire dont tous les sommets sont distincts.

Un **chemin simple** est un chemin ne passant pas deux fois par un même arc, c'est-à-dire dont tous les arcs sont distincts.

### 2.2.10 Cycle

Dans un graphe non orienté, un cycle est une chaine simple dont les deux sommets extrémités sont identiques.

### 2.2.11 Circuit

Dans un graphe orienté, on appelle circuit un chemin dont les deux sommets extrémités sont identiques. La notion correspondante dans les graphes non orientés est celle de cycle. On parle parfois de cycle orienté.

### 2.2.12 Quelques classes de graphes

#### Graphe complet

Un graphe complet est un graphe simple dont tous les sommets sont adjacents deux à deux, c'est-à-dire que tout couple de sommets disjoints est relié par une arête

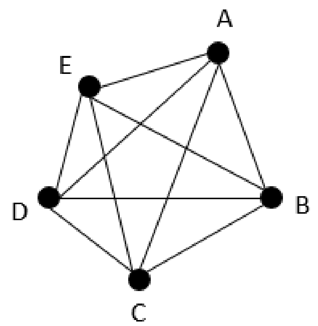


FIGURE 2.4 – Graphe complet

### Graphe connexe

Un graphe non orienté $G = (X, E)$ est dit connexe si quels que soient les sommets $x$ et $y$ de $X$ il existe une chaîne reliant $x$ à $y$.

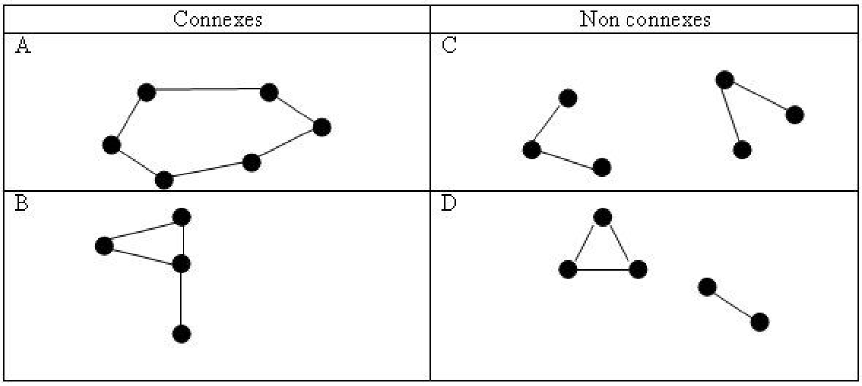



FIGURE 2.5 – Graphes connexes

### Graphe biparti

Un graphe est dit biparti si on peut partager son ensemble de sommets en deux parties $S_1$ et $S_2$ tels qu'il n'y ait aucune arête entre éléments de $S_1$ et aucune arête entre éléments de $S_2$.

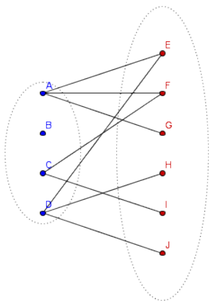


FIGURE 2.6 – Graphe biparti

### Arbre

Un arbre est un graphe non orienté, connexe, et sans cycle. Il est dénommé ainsi car, représenté dans le plan, sa forme évoque les ramifications d'une branche.

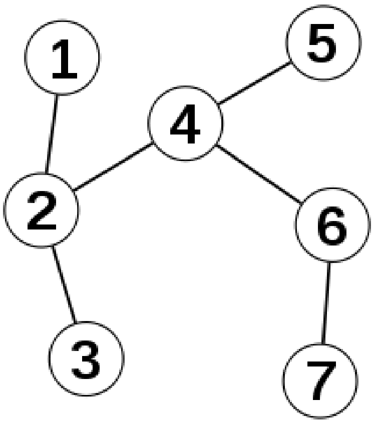



Figure 2.7 – Arbre

### 2.2.13 Mode de représentation graphique

**Matrice d'adjacence**

Soit $G = (X, E)$ un graphe d'ordre n, avec $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ On appelle matrice d'adjacence de G de taille $n \times n$ la matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i x_j \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.1}$$

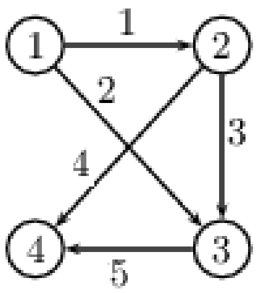
La matrice d'adjacence d'un graphe est symétrique, ayant pour éléments 0 et 1, avec des 0 sur la diagonale principale

**Matrice d'incidence**

Soit $G = (X, E)$ un graphe orienté avec $|X| = n$ et $|E| = m$. On appelle matrice d'incidence du graphe $G$ la matrice $A = (a_{ij})$ comportant $n$ lignes et m colonnes telle que :[1]

$$a_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{si l'arc j admet le sommet i comme extrémité initiale} \\ -1 & \text{si l'arc j admet le sommet i comme extrémité terminale} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \tag{2.2}$$

**Exemple :**




$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

FIGURE 2.8 – Exemple pour la matrice d'incidence pour un graphe orienté

## 2.3 Optimisation combinatoire

### 2.3.1 Introduction

L'Optimisation Combinatoire consiste à trouver la meilleure solution parmi un nombre fini (mais souvent très grand) de choix. C'est une branche de la « Programmation Mathématique » qui recouvre les méthodes qui servent à déterminer l'optimum d'une fonction sous des contraintes données. Il s'agit donc de minimiser une fonction sur un ensemble fini, mais éventuellement très grand, et dont les propriétés mathématiques ne sont pas facilement caractérisables. La recherche de ces caractérisations, et des algorithmes d'optimisation qui les utilisent, constitue l'essentiel du travail de l'équipe. Nous nous basons sur notre expertise pour cerner de nouveaux problèmes, théoriques ou appliqués, et les analyser pour en extraire les propriétés fondamentales qui permettront de les résoudre ou de montrer que leur résolution est difficile. De plus, nous utilisons et développons des outils théoriques qui permettent de traiter ces problèmes avec des méthodes appropriées (exactes, heuristiques, algorithmes d'approximation, etc.), qui peuvent être « ad hoc » ou « génériques ».

La spécificité principale d'un problème d'optimisation est la minimisation (maximisation) d'une fonction objective, la fonction à minimiser avec contraintes peut être défini comme suit :

$$\begin{gathered} \min f(x), \\ x \in X \end{gathered} \tag{2.3}$$

Où :

- $X$ : est l'ensemble des solutions réalisables, qui traduit les contraintes du problème.
- $x$ : représente le n-vecteur des variables de décisions.
- $f$ : est la fonction objectif (ou le critère) à minimiser.

Dans le cas de plusieurs critères, on parle d'un problème d'optimisation combinatoire multi objectif, qui est formulé comme suit :

$$\min f(x) = [f_1(x),\ f_2(x), ..., f_k(x)] \tag{2.4}$$

### 2.3.2 Variable de décision

La variable de décision dans la programmation linéaire est une variable qui représente une quantité inconnue que l'on cherche à déterminer pour résoudre un problème d'optimisation. Les variables de décision sont les variables sur lesquelles on peut agir pour atteindre l'objectif de l'optimisation.

### 2.3.3 Fonction objectif

Le terme fonction objectif ou fonction économique, est utilisée en optimisation mathématique et en recherche opérationnelle pour désigner une fonction qui sert de critère pour déterminer la meilleure solution ‘a un problème d'optimisation. Concrètement, elle associe une valeur a une instance d'un problème d'optimisation

### 2.3.4 Espace de recherche (Contraintes)

L'espace de recherche est une collection de solutions possibles à un problème. Un tel espace incorpore une notion de distance entre les solutions possibles. Une solution correcte sera proche du point optimal de cet espace, qui peut être visualisé comme possédant une dimension pour chaque variable. Il peut être défini par des variables discrètes ou continues. La notion d'espace de recherche inclut les contraintes liées au problème, qu'elles soient d´définies comme de simples bornes pour les variables ou comme des contraintes non-linéaires

### 2.3.5 Ensemble des solutions réalisables

L'ensemble des solutions réalisables est l'ensemble des valeurs possibles que peuvent prendre les variables de décision dans un problème de programmation linéaire tout en satisfaisant toutes les contraintes du problème.

Il est important de noter que l'ensemble des solutions réalisables peut être vide, ce qui signifie qu'il n'y a pas de combinaison de valeurs des variables de décision qui réalise toutes les contraintes du problème. Dans ce cas, le problème est considéré comme non réalisable.

### 2.3.6 Heuristique

Le mot "heuristique" vient du grec ancien "heuriskein" qui signifie "trouver, découvrir".

Les heuristiques sont des méthodes de résolution de problèmes qui ne garantissent pas une solution optimale, mais fournissent généralement une solution satisfaisante dans un temps raisonnable et à un coût acceptable. Les heuristiques de construction sont utilisées pour générer une solution initiale qui peut ensuite être améliorée avec des heuristiques d'amélioration. La qualité de la solution finale dépend en grande partie de la qualité de la solution initiale, ce qui souligne l'importance de la recherche d'heuristiques de construction. En outre, lorsque plusieurs heuristiques sont combinées dans un algorithme, cela crée une heuristique composite. Dans l'ensemble, les heuristiques sont une alternative pratique lorsque l'optimalité n'est pas primordiale et peuvent offrir des solutions de bonne qualité dans de nombreux cas. [6]

### 2.3.7 Méta-heuristique

Le terme "méta-heuristique" est un néologisme formé à partir de deux racines grecques : "meta", qui signifie "au-delà" ou "après", et "heuristique", qui signifie "qui permet de trouver". Ainsi, le terme "méta-heuristique" peut être compris comme "ce qui va au-delà des heuristiques" ou "ce qui vient après les heuristiques".

Le terme "méta-heuristique" a été introduit dans la littérature scientifique en 1986 par Fred Glover. [7]

Une méta-heuristique peut être considérée comme une heuristique "puissante et évoluée", dans la mesure où elle est généralisable à plusieurs problèmes d'optimisation. On classe souvent les méta-heuristiques en fonction du nombre de solutions qu'elles manipulent. Celles à solution unique (recherche tabou, descente du gradient), et celles à population de solutions (algorithmes génétiques et colonies de fourmis). De plus les méthodes approchées doivent trouver un équilibre entre deux tendances opposées : l'intensification (ou exploitation) et la diversification (ou exploration). L'intensification de la recherche signifie que celle-ci se concentre autour des meilleures solutions rencontrées, considérées prometteuses. Alors que la diversification incite davantage la recherche à explorer des nouvelles zones de l'espace de solutions. Ainsi les méta-heuristiques à solution unique ont plus tendance à l'exploitation du voisinage de la solution en question, et les approches à base de population de solutions ont plutôt tendance à l'exploration [8]

### 2.3.8 Les problèmes classiques de l'optimisation combinatoire

Dans cette section on va présenter quelque problèmes d'optimisation combinatoire les plus connus. Toutes les notions et les définitions citées dans cette section sont tirées à partir de ces références : Aardal et al.[4], Lawler [3], Lavoisier [1], M. AKLI [15], Karp [5]

#### Problème de sac à dos

Ce problème fait partie des 21 problèmes NP-complets identifiés par Richard Karp en 1972 [5]. Ces 21 problèmes sont réputés comme les problèmes les plus difficiles en optimisation combinatoire. Un grand nombre d'autres problèmes NP-complets peuvent se ramener à ces 21 problèmes de base.

Le problème du sac à dos modélise une situation analogue au remplissage d'un sac à dos, ne pouvant supporter plus d'un certain poids, avec tout ou partie d'un ensemble donné d'objets ayant chacun un poids et une valeur. Les objets mis dans le sac à dos doivent maximiser la valeur totale, sans dépasser le poids maximum.

Etant donné $n$ objets ayant chacun un poids $a_i$ et une utilité $c_i$, et soit $b$ le poids de sac.

**Variable de décision :**

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si on emporte l'objet i} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.5}$$

Le problème se formule comme suit :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b, \qquad x_i \in \{0,1\}, \quad \forall i = \overline{1,n} \\ Z(\max) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \end{cases} \tag{2.6}$$

**Problème d'affectation**

Le problème d'affectation est un problème d'optimisation combinatoire qui consiste à assigner un certain nombre d'objets à un certain nombre de ressources, en maximisant ou minimisant une certaine fonction objective. Chaque objet doit être assigné à une et une seule ressource, et chaque ressource ne peut être assignée qu'à un seul objet.

Le problème d'affectation est souvent rencontré dans des domaines tels que la planification de la production, la logistique, l'affectation de personnel et la gestion de projet.

. Etant donnés n taches et n ouvriers. Une affectation consiste à affecter la tâche $i$ à l'ouvrier $j$ de façon chaque ouvrier j ait une et une seule tâche, et Chaque tâche i est affectée à un seul ouvrier, avec un cout d'affectation $c_{ij}$

**Variable de décision :**

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la tâche i est affectée à l'ouvrier j} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.7}$$

**Contraintes :** Chaque ouvrier est affecté à une seule tâche :

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \ \forall j = \overline{1,n} \tag{2.8}$$

Chaque tâche est affectée à un seul ouvrier :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \ \forall i = \overline{1,n} \tag{2.9}$$

Le variable de décision est bivalent :

$$x_{ij} = \{0,1\}, \forall i = \overline{1,n}, \forall j = \overline{1,n} \tag{2.10}$$

**Fonction objectif :** Le but est d'obtenir une affectation en minimisant le cout total d'affectation associé :

$$Z(\min) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{2.11}$$

**Le modèle :**

$$\begin{cases} Z(\min) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \ \forall j = \overline{1,n} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \ \forall i = \overline{1,n} \\ x_{ij} = \{0,1\}, \forall i = \overline{1,n}, \forall j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{2.12}$$

**Problème de Voyageur-commerce**

Le problème du voyageur de commerce ou TSP (Traveling-Salesman Problem), étudié depuis le 19e siècle, est l'un des plus connus dans le domaine de la recherche opérationnelle, il consiste pour un graphe donné de déterminer un cycle hamiltonien dont la longueur est minimale.

Pas juste des villes et des distances : le TSP peut se rencontrer dans d'autres contextes, et/ou comme sous-problème : problèmes de logistique, de transport, d'ordonnancement, etc.

Ce problème d'optimisation combinatoire appartient à la classe des problèmes NP-Complets.

**Modélisation :**
- $G = (X, E)$ : Un graphe orienté telque $X$ est l'ensemble des villes, $E$ l'ensemble des routes possibles entre les villes.
- $d_{ij}$ la distance entre la ville $i$ vers la ville $j$.

**variable de décision :**

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la ville } j \text{ est visité immédiatement aprés la ville } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.13}$$

**Les contraintes :** Chaque ville doit être visitée une seule fois :

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \ \forall j \in X \tag{2.14}$$

le voyageur doit quitter la ville i et aller a une autre ville

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \ \forall i \in X \tag{2.15}$$

l'élimination de sous tours :

$$\sum_{i \in S, j \notin S}^{n} x_{ij} \geq 1, \ \ \forall S \subset X, S \neq \emptyset \tag{2.16}$$

Le variable de décision est bivalent :

$$x_{ij} = \{0, 1\}, \forall i \in X, \forall j \in X \tag{2.17}$$

**La fonction objectif :** L'objectif est de minimiser la distance totale parcourus :

$$Z(\min) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} \tag{2.18}$$

**Le modèle :**

$$\begin{cases} Z(\min) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \ \forall j = \overline{1,n} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \ \forall i = \overline{1,n} \\ \sum_{i \in S, j \notin S}^{n} x_{ij} \geq 1, \ \ \forall S \subset X, S \neq \emptyset \\ x_{ij} = \{0,1\}, \forall i = \overline{1,n}, \forall j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{2.19}$$

**Problème de plus court chemin**

Un problème des plus courants en optimisation combinatoire est celui de la recherche de plus courts chemins dans un graphe. Ce problème se présente comme suit : étant donné un graphe et une fonction coût sur les arcs, le problème consiste à trouver le chemin le moins coûteux d'un sommet choisi à un autre.

**Problème de transport**

Le problème de transport peut être défini comme l'action de transporter des marchandises ou des produits fabriqués par $m$ origines (ou dépôts) vers $n$ destinations (ou clients), d'une manière que le coût total de transport soit minimale.

Supposons qu'on veut transporter un produit de $m$ dépôts vers $n$ clients, on a les informations suivantes :

– La disponibilité de chaque dépôt $i$ est $a_i$ avec $i = \overline{1,m}$
– La demande de chaque client j est $b_j$ avec $j = \overline{1,n}$
– Le cout de transport unitaire de dépôt $i$ vers le client $j$ est $c_{ij}$ unité monétaire.

**Variable de décision :**

$$x_{ij} : \ \text{La quantité à transporter de l'origine } i \text{ vers la destination } j \text{ où } i = \overline{1,m} \text{ et } \ j = \overline{1,n} \tag{2.20}$$

**Fonction objectif :** L'objectif est de déterminer la quantité à transporter d'une façon le coût total soit minimal :

$$Z(\min) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{2.21}$$

**Les contraintes :** La disponibilité : la quantité demandée ne doit pas dépasser la disponibilité pour chaque dépôt :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \ \ \forall i = \overline{1,m} \tag{2.22}$$

La demande : la demande de chaque client doit être satisfaite :

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \ \ \forall j = \overline{1,n} \tag{2.23}$$

**Le modèle :**

$$\begin{cases} Z(\min) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \ \ \forall i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \ \ \forall j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{2.24}$$

## 2.4 Problème de routage de véhicules (VRP)

### 2.4.1 Introduction et histoire

Le VRP a des racines dans l'histoire ancienne. En effet, le problème de la distribution de nourriture aux soldats de l'armée romaine a été l'un des premiers exemples connus de VRP. Les Romains ont développé des systèmes sophistiqués pour organiser la distribution de nourriture à leurs soldats, en utilisant des chariots et des chevaux pour livrer les provisions sur les champs de bataille.

Au fil du temps, le VRP est devenu un sujet de recherche important en optimisation mathématique. Les premières solutions exactes ont été développées dans les années 1960, mais ces méthodes étaient souvent trop lentes pour être utilisées en pratique.

Dans les années 1980, les chercheurs ont commencé à développer des algorithmes d'approximation qui pouvaient résoudre le VRP en temps raisonnable. Depuis lors, de nombreuses variantes du VRP ont été proposées, telles que le VRP avec fenêtres de temps, le VRP avec capacités limitées, le VRP avec plusieurs dépôts, etc.

### 2.4.2 Définition

Le VRP (Vehicle Routing Problem) ou problème de tournées de véhicules consiste à déterminer la meilleure façon de livrer un ensemble de n clients en utilisant une flotte de m véhicules. Le but est de construire un ensemble de tournés qui visite les clients en minimisant une fonction objectifs donnée et en tenant compte d'un ensemble de contraintes.

Les objectifs les plus communs du VRP sont la minimisation de la distance totale parcourue par les véhicules ou la minimisation du temps total de parcours des tournées. Toute fois d'autres objectifs peuvent être considérés, on cite :

– Minimisation du nombre de véhicules nécessaires pour servir tous les clients.
– Minimisation du temps total.
– Minimiser le coût de transport global en fonction de la distance globale parcourue ainsi que les coûts fixes associés aux véhicules d'occasion et aux chauffeurs.
– Maximisation du gain engendrés par les tournées.

Le VRP a des applications pratiques dans de nombreux domaines, tels que la logistique, le transport, la distribution, la planification des opérations, etc.

### 2.4.3 Formulation mathématique

**Modélisation :**

Le VRP est représenté par un graphe orienté complet $G = (X, E)$ tel que $X$ est l'ensemble des clients et $E$ représente l'ensemble des route entre les clients.

Soit les notations suivantes :

– $n$ : nombre de clients.
– $m$ : nombre de véhicules.
– $d_{ij}$ : la distance entre le client $i$ et le client $j$
– $c_{ij}$ : le coût de déplacement de client $i$ vers le client $j$
– $q_i$ : la demande du client $i$
– $t_{ijk}$ : le temps mis par le véhicule $k$ pour aller du sommet $x_i$ vers $x_j$
– $t_{ik}$ : le temps d'arrêt du véhicule k au sommet $x_i$
– $q_k$ la capacité de véhicule $k$.
– $a_i$ la demande de client $i$

**Variable de décision**

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si le client } j \text{ est servi immédiatement aprés le client } i \text{ par le véhicule } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.25}$$

**La fonction objective :**

l'objectif est de minimiser le coût totale de deplacement :

$$Z(\min) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_{ij} \sum_{k=1}^{m} x_{ijk} \tag{2.26}$$

**Les contraintes :**

Les deux contraintes suivantes assurent que chaque client n'est servi qu'une et seule fois et par un et un seul véhicule :

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{n} x_{ijk} = 1, \;\; \forall j \in X \tag{2.27}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} x_{ijk} = 1, \;\; \forall i \in X \tag{2.28}$$

Assure la conservation de flot, le client visité doit être quitté une fois est servi.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=0}^{n} x_{irk} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{rjk}, \;\; \forall k = \overline{1,m} \tag{2.29}$$

L'élimination de sous tours, c'est-à-dire le véhicule ne doit pas revenir au dépôt avant de terminer sa tournée

$$\sum_{i \in S}\sum_{\substack{j \in S \\ i \neq j}} x_{ijk} \leq |S| - 1, \forall S \subset X \backslash \{x_0\}, |S| \;\; \geq 2 \;\; \forall k = \overline{1,m} \tag{2.30}$$

La variable de décision est bivalent :

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \forall i,j,k : 0 \leq i,j \leq n, 1 \leq k \leq m \tag{2.31}$$

**Remarque :** D'autres contraintes pourraient être ajoutées selon le problème de VRP envisagé.

### 2.4.4 Variantes du problème VRP

Dans le tableau suivant on résume quelques paramètres selon lesquels VRP soit classé :

| paramètres | Les possibilités |
|---|---|
| Type de flotte | -homogène<br>-hétérogène |
| departure | - un seul dépôt<br>- multi dépôts |
| Taille de flotte | - un seul véhicule<br>- plusieurs véhicules |
| Nature de la demande | - déterministe<br>- scholastique |
| Horaires de livraison | - indéfinie<br>- défini d'une manière bien précis |
| Coût | - en fonction de temps<br>- en fonction de distance parcourus |
| Nombre de tournées | - unique<br>- multiple |
| Demande de clients | - statique<br>- dynamique |

### 2.4.5 Contraintes liées à la flotte de véhicules

#### CVRP (Capacitated Vehicle Routing Problem)

Est un VRP dans lequel des véhicules à capacité de charge limitée doivent ramasser ou livrer des articles à divers endroits. Les articles ont une quantité, telle qu'un poids ou un volume, et les véhicules ont une capacité maximale qu'ils peuvent transporter. On peut l'exprimer par les contraintes suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\sum_{j=1}^{n} x_{ijk}) \leq q_k, \ \ \forall k = \overline{1, m} \tag{2.32}$$

#### VRP-FL (Vehicle Routing Problem with Full Truckload)

Il s'agit ici d'un problème VRP dans lequel on utilise la capacité complète de véhicule, ce qui est exprimé par les contraintes suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\sum_{j=1}^{n} x_{ijk}) = q_k, \;\; \forall k = \overline{1,m} \tag{2.33}$$

### VRP-HF (Vehicle Routing Problem with Heterogeneous Fleet)

Est un problème consistant à déterminer simultanément la composition et l'itinéraire d'une flotte hétérogène de véhicules afin de desservir un ensemble prédéfini de clients avec des demandes de livraison connues à partir d'un dépôt central.

### O-VRP (Open Vehicle Routing Problem)

Le problème de routage de véhicules ouvert (OVRP) diffère du problème de routage de véhicules classique (VRP) car soit les véhicules ne sont pas obligés de retourner au dépôt, soit ils doivent revenir en revisitant les clients qui leur sont assignés dans l'ordre inverse. Par conséquent, les itinéraires des véhicules ne sont pas des chemins fermés mais des chemins ouverts. On peut exprimer ces détails par les contraintes suivantes :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{0jk} \neq 1, \;\; \forall k = \overline{1,m} \tag{2.34}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i0k} \neq 1, \;\; \forall k = \overline{1,m} \tag{2.35}$$

### VRP-B (Vehicle Routing Problem Back)

Le problème de VRPB diffère du problème de routage de véhicules classique (VRP) par l'exigence de retour des véhicules vers le dépôt. Ce qui peut être exprimé par les contraintes suivantes :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{0jk} = 1, \;\; \forall k = \overline{1,m} \tag{2.36}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i0k} = 1, \;\; \forall k = \overline{1,m} \tag{2.37}$$

### MC-VRP (Multi-Compartment Vehicle Routing Problem)

Le problème MCVRP se pose dans de nombreux secteurs d'activité. L'objectif principal du processus de livraison est de minimiser la distance totale parcourue par les camions utilisés. La configuration du problème est décrite par un ensemble préfixé de camions avec plusieurs compartiments et un ensemble de clients avec des demandes et des livraisons préfixées.

Compte tenu de ces données, la minimisation de la distance totale parcourue est soumise à des contraintes d'affectation et de routage qui expriment les limites de capacité du compartiment de chaque camion.[11]

### 2.4.6 Contraintes liées à la demande des clients

#### DVRP (VRP à demande deterministe)

Le DVRP est un problème de livraison dans lequel les commandes sont préalablement connues par le livreur au moment de son départ du dépôt, ce qui lui permet de savoir la quantité à livrer à chacun de ses clients.

#### SVRP (VRP à Demande Stochastique)

Il s'agit ici d'un problème qui requiert des visites répétées chez un client afin de répondre pleinement à sa demande. De manière inhabituelle, la demande du client peut dépasser la capacité du véhicule.

#### SDVRP (Split Delivery Vehicle Routing Problem)

Dans le cadre de ce problème, il est possible de satisfaire la demande d'un client en utilisant plusieurs tournées. Cette condition est utile dans les cas où la demande d'un ou plusieurs clients, dépasse la capacité maximale du véhicule effectuant une tournée.

#### VRPPD (Vehicle Routing Problem Pick-up and Deliveries)

Est une variante du problème classique de VRP dans lequel une flotte de véhicules doit desservir un ensemble de clients situés à différents endroits, avec l'exigence supplémentaire que chaque client ait un article spécifique à ramasser à un certain endroit et livré à un autre emplacement.

### 2.4.7 Contraintes liées aux dépôts

#### 1-DVRP (1 –Depot Vehicle Routing Problem)

Le problème de tournées de véhicules à un seul dépôt 1DVRP est une variante du problème de tournées de véhicules classique (VRP) dans lequel une flotte de véhicules doit desservir un ensemble de clients à partir d'un seul dépôt.

**MD-VRP (Multi Depots-Vehicle Routing Problem)**

Le problème de tournées de véhicules à multiple dépôt MD-VRP est une variante du problème de tournées de véhicules classique (VRP) dans lequel Il y a plusieurs dépôts répartis géographiquement, ce qui signifie que les véhicules peuvent être approvisionnés à partir de différents dépôts. Les véhicules peuvent partir de n'importe quel dépôt pour desservir les clients, mais doivent retourner à leur dépôt d'origine à la fin de leur trajet.

### 2.4.8 Contraintes liées au temps

**VRPTW (Vehicle Routing Problem with Time Windows)**

Le problème de tournées des véhicules avec fenêtres de temps (VRPTW) est un problème important dans le système logistique qui a fait l'objet de nombreuses recherches ces dernières années. Le problème peut être décrit comme le choix d'itinéraires pour un nombre limité de véhicules afin de desservir un groupe de clients dans les fenêtres horaires. Chaque véhicule a une capacité limitée. La tournée démarre de dépôt et se termine au dépôt, et chaque tournée ne doit pas dépasser la durée maximale pour chaque tournée. Chaque client doit être servi exactement une fois. L'objectif du VRPTW est de minimiser les coûts totaux de transport.

On peut exprimer les contraintes de temps comme suit :

$$\sum_{i=0}^{n} t_{ik} \sum_{j=1}^{n} x_{ijk} + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} t_{ik} x_{ijk} \leq T_k \,; \;\; \forall k = \overline{1, m} \tag{2.38}$$

## 2.5 Complexité algorithmique

### 2.5.1 Introduction

La calculabilité s'attache à connaître ce qu'on peut résoudre par algorithme quel que soit le temps d'exécution. Or dans les années 1960, si les gros ordinateurs se sont diffusés, il n'en reste pas moins qu'ils sont très lents et ne disposent pas de beaucoup de mémoire. Les chercheurs s'intéressent donc naturellement à l'efficacité des algorithmes : quel algorithme puis-je faire tourner sur cette machine sans que le résultat mette un an à arriver ? Quel algorithme– puis-je faire tourner sans dépasser la capacité de la mémoire de la machine ?

La complexité algorithmique est une estimation du nombre d'opérations élémentaires pour résoudre un problème en fonction de la taille des données d'entrée, notée n.

### 2.5.2 Algorithme

#### Définition

De manière informelle, un algorithme est une procédure de calcul bien définie qui prend une valeur ou un ensemble de valeurs en entrée et produit une valeur ou un ensemble de valeurs en sortie. Un algorithme est donc une séquence d'étapes de calcul qui transforme l'entrée en sortie.

Nous pouvons également considérer un algorithme comme un outil pour résoudre un problème de calcul bien spécifié. L'énoncé du problème précise en termes généraux la relation entrée/sortie. L'algorithme décrit une procédure de calcul spécifique pour obtenir cette relation entrée/sortie.

#### Itération

Dans l'algorithmique, une itération fait référence à une exécution répétée d'un bloc d'instructions ou d'un processus. Lorsqu'un algorithme nécessite une répétition de certaines étapes pour atteindre son objectif, chaque exécution de ces étapes est considérée comme une itération.

Par exemple, si vous écrivez un algorithme pour trouver la somme de tous les nombres d'une liste, vous pouvez utiliser une boucle pour itérer à travers chaque nombre de la liste et ajouter la valeur à une variable de somme. Dans ce cas, chaque itération de la boucle correspond à une étape de l'algorithme où vous ajoutez un nombre à la somme totale.

### 2.5.3 Notation de Big O

La notation de big $O$, également connue sous le nom de notation asymptotique, est utilisée pour décrire la complexité temporelle ou spatiale d'un algorithme en fonction de la taille de son entrée. Elle est utilisée dans l'analyse de l'efficacité des algorithmes et fournit une indication de la façon dont le temps d'exécution ou l'espace requis par l'algorithme croît lorsque la taille de l'entrée augmente.

La notation de big $O$ est notée $O(f(n))$, où $f(n)$ est une fonction qui décrit la croissance de l'algorithme en fonction de la taille de l'entrée n. Elle représente la borne supérieure de la complexité de l'algorithme, c'est-à-dire que l'algorithme ne peut pas être plus inefficace que $O(f(n))$.

Par exemple, si un algorithme a une complexité de temps de $O(n^2)$, cela signifie que le temps d'exécution de l'algorithme est proportionnel au carré de la taille de l'entrée. Si la taille de l'entrée double, le temps d'exécution sera multiplié par quatre.

#### Définition mathématique

Soit $f$, la fonction à estimer, une fonction à valeurs réelles ou complexes et soit $g$, la fonction de comparaison, une fonction à valeurs réelles. Soient les deux fonctions être définies sur un sous-ensemble illimité de nombres réels positifs, et $g(x)$ être strictement positif pour toutes les valeurs suffisamment grandes de $x$. On écrit :

$$f(x) = O(g(x)) \text{ quand } x \to \infty$$

Et c'est lu " $f(x)$ est big $O$ de $g(x)$" si la valeur absolue de $f(x)$ est au plus un multiple positif constant de $g(x)$ pour toutes les valeurs suffisamment grandes de $x$. C'est-à-dire $f(x) = O(g(x))$ s'il existe un nombre réel positif $M$ et un nombre réel tel que :

$$|f(x)| \le M.g(x) \text{ pour tout } x \ge x_0$$

### 2.5.4 Les classes de la complexité

#### La classe P

On dit qu'un algorithme est de complexité polynomial si elle est de la forme $C \times O(n)$, autrement dit, si, pour tout $n$, pour des données ne prenant pas plus de $n$ octets, l'algorithme s'exécute en moins de $C \times n^k$ opérations élémentaires (les constantes $C$ et $k$ étant bien sûr indépendantes de $n$).

#### La classe NP

La classe NP possède une définition moins naturelle que celle de P, et son nom est trompeur : il ne signifie pas "non polynomial", mais polynomial non-déterministe. La classe NP est donc une extension de la classe P, en autorisant des choix non déterministes pendant l'exécution de l'algorithme.

#### La classe NP-Complet

Les problèmes NP-complets sont considérés comme les plus difficiles de la classe NP. Un problème NP-complet est un problème de décision pour lequel toute instance du problème peut être transformée en une instance d'un autre problème NP-complet en temps polynomial, de sorte que la solution du premier problème peut être utilisée pour résoudre le deuxième problème en temps polynomial. En d'autres termes, si l'on pouvait trouver un algorithme en temps polynomial pour résoudre un seul problème NP-complet, alors tous les problèmes NP-complets pourraient être résolus en temps polynomial. C'est pourquoi la plupart des chercheurs pensent que les problèmes NP-complets sont intrinsèquement difficiles, car il n'existe probablement pas d'algorithme en temps polynomial pour les résoudre tous.

#### La classe NP-Difficile

La classe NP-difficile dans la théorie de la complexité est la propriété définissant une classe de problèmes qui sont informellement ≪ au moins aussi difficiles que les problèmes les plus difficiles dans NP », c'est-à-dire les problèmes qui peuvent être vérifiés en temps polynomial, mais pas nécessairement résolus en temps polynomial.[10]

# Chapitre 3

# Problématique et modélisation mathématique

## 3.1 Introduction

La gestion du transport peut doubler les bénéfices d'une entreprise, ce qui explique les efforts entrepris par de nombreuses entreprises pour réorganiser leur service de transport ces dernières années. Cette organisation met en évidence l'importance croissante du transport dans une entreprise, car il peut influencer le prix de revenu et devenir un moyen d'entrer sur un marché concurrentiel, ainsi qu'un élément clé de la distribution.

C'est pourquoi NAFTAL, leader de la distribution de produits pétroliers en Algérie, accorde une grande importance à la distribution de ses carburants pour répondre aux besoins de sa clientèle sur tout le territoire. La société cherche toujours à trouver le schéma de livraison optimal pour satisfaire ses clients.

Dans ce chapitre, nous allons présenter la problématique de l'entreprise et ses caractéristiques, ensuite nous présentons la modélisation mathématique pour notre problème.

## 3.2 Problématique

### 3.2.1 Prise de position

Dans le cadre de notre problème, nous allons nous concentrer sur l'entrepôt d'EL HARRACH 16A, qui utilise plusieurs camions appartenant à NAFTAL pour réaliser ses livraisons. Cependant, ces camions ne peuvent pas satisfaire toutes les livraisons, ce qui oblige NAFTAL à utiliser d'autres camions appartenant à des tiers pour satisfaire toutes les commandes. Pour gérer la distribution, l'entrepôt d'EL HARRACH 16A utilise le programme Dispatching, qui établit un programme de distribution pour chaque période de la journée. Le dispatcheur dispose d'une flotte d'attelages (composée de citernes appartenant à NAFTAL et de tracteurs appartenant à NAFTAL ou à des tiers), qui doivent être au parc au début et à la fin de chaque période. Le dispatcheur recense toutes les commandes des clients et doit élaborer des tournées pour chaque attelage en prenant en compte les spécificités de chacun, tout en respectant et satisfaisant les commandes des clients dans un ordre précis. Cependant, le programme Dispatching ne prend pas en compte la différence entre les camions appartenant à NAFTAL et ceux appartenant à des tiers, ce qui peut entraîner des coûts supplémentaires pour l'entreprise. En effet, l'entreprise privée qui travaille sur la livraison impose un coût assez conséquent, et NAFTAL doit payer l'entreprise tiers pour chaque kilomètre cube transporté. De plus, certains clients spéciaux, comme l'armée algérienne, exigent l'utilisation de camions appartenant à NAFTAL pour leur livraison. En outre,Certains clients sont situés dans des zones géographiquement contraignantes, telles que les régions montagneuses, où seuls les camions de faible capacité peuvent être déployés, tandis que les véhicules de grande taille sont incapables de pénétrer ces environnements inaccessibles.L'objectif de notre étude est donc d'appliquer les méthodes de la recherche opérationnelle pour aider à établir des tournées de distribution des carburants aux clients à partir d'un dépôt, en utilisant des camions citernes. Nous devons trouver un schéma de livraison des carburants qui satisfait au mieux la demande des clients tout en minimisant les coûts et le temps, en respectant les capacités des citernes, le nombre de camions disponibles, l'état des camions et les priorités.

### 3.2.2 Caractéristiques du problème

- L'activité du dépôt est assurée par trois équipes de fonctionnaires, travaillant chacune 8 heures d'affilées :

– La $1^{\text{ère}}$ équipe travaille de 06h jusqu'à 14h.
– La $2^{\text{ème}}$ équipe travaille de 14h jusqu'à 22h.
– La $3^{\text{ème}}$ équipe travaille de 22h jusqu'à 06h.

-Heure de travail :Au sein de la flotte de Naftal, trois équipes de travail sont opérationnelles chaque jour, chacune d'entre elles travaillant pendant une durée réglementée de 8 heures. Il est essentiel de respecter cette limite horaire. En revanche, dans la flotte tiers, une disponibilité continue est assurée.

-Stockage :*Le dépôt d'El HARACH 16A possède une capacité totale de stockage de 19.900$m^3$.

-Tableau des capacités stockage du dépôt par produits :

| Type de carburant | Gasoil | Essence |
|---|---|---|
| Capacité de stockage dans le dépôt en $m^3$ | 11.700$m^3$ | 8.200$m^3$ |

-Produits :Au sein du dépôt, deux types de produits sont disponibles, à savoir le diesel et le sans plomb.

-Véhicules :Le dépôt d'El HARACH 16A dispose d'une flotte de 22 véhicules. Cette flotte comprend plusieurs véhicules de capacités et de types différents.

| L'appartenance du véhicule (flotte) | le véhicule n | Capacité du véhicule en $m^3$ | L'état du véhicule |
|---|---|---|---|
| NAFTAL :13 véhicules | 1 | 30 | Bon état |
| | 2 | 30 | Bon état |
| | 3 | 30 | Bon état |
| | 4 | 30 | Bon état |
| | 5 | 30 | Bon état |
| | 6 | 27 | Bon état |
| | 7 | 27 | Bon état |
| | 8 | 27 | Bon état |
| | 9 | 25 | moyen état |
| | 10 | 25 | moyen état |
| | 11 | 15 | Bon état |
| | 12 | 15 | Bon état |
| | 13 | 15 | Bon état |
| tiers : 9 véhicules | 1 | 30 | Bon état |
| | 2 | 30 | Bon état |
| | 3 | 30 | Bon état |
| | 4 | 30 | Bon état |
| | 5 | 30 | Bon état |
| | 6 | 27 | Bon état |
| | 7 | 27 | Bon état |
| | 8 | 27 | Bon état |
| | 9 | 27 | Bon état |

-Tableau de repartissement des compartiments dans les camions

| Capacité du véhicule en $m^3$ | 30 | 27 | 25 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| Capacité du 1 compartiment en $m^3$ | 8 | 7 | 10 | 4 |
| Capacité du 2 compartiment en $m^3$ | 8 | 7 | 5 | 4 |
| Capacité du 3 compartiment en $m^3$ | 7 | 7 | 5 | 4 |
| Capacité du 4 compartiment en $m^3$ | 7 | 6 | 5 | 3 |

(3.1)

- Le dépôt 16A a 85 clients repartis entre les 4 wilayas d'ALGER ,BOUMERDES, BLIDA et BOUIRA.

Le tableau suivant represente un echantillon de 15 stations :

| CODE CLIENT | ADRESSE | DISTANCE DU DEPOT (KM) |
|---|---|---|
| 216$A$3949 | ROUTE PRINCIPALE BOUDOUAOU | 30 |
| 216$A$7097 | LOT 306 BERAKI ALGER | 10 |
| 216$A$9995 | 18 BD KHEMISTI DAR EL BEIDA | 10 |
| 216$B$6058 | ROUTE DE L'ARBAA MEFTAH | 20 |
| 216$B$8632 | RTE NLE N29 K.E.K | 27 |
| 216$B$8886 | ROUTE DE L'ARBAA SIDI MOUSSA | 15 |
| 216$B$9775 | RUE DJEBAR BRAHIM K.E.K | 27 |
| 216$C$3820 | ROUTE DE MEFTAH L'ARBAA | 20 |
| 216$C$4853 | 07 RUE COLONEL AMIROUCHE | 10 |
| 216$C$5949 | B EL BAHRI | 17 |
| 216$C$7377 | RUE PRINCIPALE ZEMMOURI | 51 |
| 216$D$4394 | 07 RUE ALI KHODJA AIN TAYA | 22 |
| 216$I$1229 | N\| 01 BLIDA TESSALA MERDJA BIRTOUTA | 23 |
| 216$I$1917 | 3EME ZONE URBAINE N\| 94 BORDJ | 65 |
| 216$I$2061 | RN N\| 4 CITE ALLELIGUIA BOUMERDES | 40 |

### 3.2.3 Les contraintes

Notre problème est soumis aux contrainte suivante :

- Un camion contient 4 compartiment de capacité différente selon sa capacité générale.

- Un compartiment ne peut pas contenir 2 produits différents.

- La flotte NAFTAL ont une durée de travail qui dépasse pas les 8h et s'ils les dépassent sa seras comptabilise comme des heures supplémentaires.

- Certain clients ne peuvent pas être livre par des camions de grands capacités car ils sont à difficile accès, et les grands camions ne peuvent pas y accéder.

-L'armée algérienne sont des clients de NAFTAL et leurs exige un camion de leur flotte.

- Le dépôt d'El Harrach 16A contient 2 produits et leurs stockages est de (11.700m$^3$ pour le diesel et 8.200m$^3$ pour le sans plan)

- L'entrepôt d'EL Harrach à sa disposition (14 camion pour la flotte NAFTAL, et 9 camion pour la flotte tiers)

-Une station peut être desservis par 2 camion diffèrent si sa quantité de demande est supérieure à celle du camion.

- Les capacités des citernes des camions sont différentes ( 25 m$^3$, 15m$^3$, 27m$^3$, 30m$^3$)

### 3.2.4 L'objectif

Dans cette perspective, notre étude vise à mettre en place une méthode scientifique permettant de déterminer les camions à utiliser pour approvisionner chaque station de manière à minimiser le coût total résultant de l'utilisation des camions externes.

## 3.3 Modélisation mathématique

### 3.3.1 Modelisation du problème

La modélisation mathématique, est un processus par lequel les mathématiques sont utilisées pour représenter, analyser des phénomènes réels. Cela implique la création de modèles mathématiques qui décrivent les relations entre les différentes variables et paramètres d'un système donné.

La recherche sur les problèmes de tournée de véhicules a suscité un grand intérêt parmi les chercheurs pendant plus de deux décennies. Les multiples modèles développés reflètent la diversité des applications, des objectifs et des contraintes propres à chaque domaine. Grâce aux avancées technologiques et aux progrès scientifiques.

Dans ce qui suit, nous présentons le modèle mathématique pour notre problématique.

#### Formulation du problème

Nous représentons le réseau routier par un graphe orienté $G = (X, U)$, où :

- $X$, est l'ensemble des sommets du graphe $G$, représente les clients et le dépôt $X = N \cup \{0\}$et ($|X| = n + 1$).
- $U$, est l'ensemble des arcs du graphe $G$, représente les chemins reliant les clients entre eux et au dépôt

Dans cette représentation, il est possible d'attribuer des pondérations aux sommets afin de représenter la quantité demandée par chaque client ainsi que la durée du service associée à ce sommet. De plus, une autre pondération peut être attribuée aux arcs pour représenter la distance séparant deux clients et le temps de déplacement entre eux.

#### Indices

. $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ : Indices des sommets.

. $k = 1, \ldots, K$ : Indice des camions.

. $l = 1, \ldots, L_k$ : Indice des tournées.

. $p \in \{1, 2\}$ : Indice des produits.

. $q \in \{1, 2, 3, 4\}$ : Indice des compatiments.

#### Les données

. $n$ : Nombre de clients.

. $K$ : Nombre de camions (NAFTAL ou tiers).

. $T_k$ : La durée de travail maximale du camion $k$ par journée.

. $s_i$ : La durée de service du sommet $i$.

. $C_{kq}$ : La capacité du compartiment $q$ du camion $k$.

. $t_{ijk}$ : La durée de trajet du sommet $i$ vers $j$ effectué par le camion $k$.

. $c_{ijk}$ : Le coût de trajet de sommet $i$ vers $j$ effectué par le camion $k$.

**Variables de décisions**

$$x_{ijk}^{l} = \begin{cases} 1 & \text{Si le camion } k \text{ parcourt l'arc } (ij) \text{ lors de la tournée } l. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$L_k =$ Le nombre de tournées effectuées par le camion $k$.

$y_{ikpq}^{l} =$ La quantité de produit $p$ livrée au client $i$ par le compartiment $q$ du camion $k$ lors de la tournée $l$.

$$z_{pkq} \begin{cases} 1 & \text{Si le produit } p \text{ se trouve dans le compartiment } q \text{ du camion } k. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Les contraintes :**

• La contrainte (3.2) garantit que la durée de service de chaque camion ne dépasse pas sa durée de travail maximale.

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{l=1}^{L_k} (t_{ijk} + s_i)\, x_{ijk}^{l} \leq T_k, \quad \forall k = 1, \ldots, K. \tag{3.2}$$

• La contrainte (3.3) assure que la capacité du compartiment $q$ du camion $k$ ne sera pas dépassée

$$\sum_{P=1}^{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0, j\neq i}^{n} x_{jik}^{l} y_{ikpq}^{l} \leq C_{kq}, \quad \forall k = 1, \ldots, K, \forall l = 1, \ldots, L_k, \forall q = 1, \ldots, 4. \tag{3.3}$$

• Les contraintes (3.4) et (3.5) garantissent qu'un camion ne visite pas la même station plus d'une fois au cours d'une même tournée.

$$\sum_{j=0, j\neq i}^{n} x_{ijk}^{l} \leq 1, \quad \forall k = 1, ..., K, \forall l = 1, ..., L_k, \forall i = 0, \ldots, n. \tag{3.4}$$

$$\sum_{i=0, i\neq j}^{n} x_{ijk}^{l} \leq 1, \quad \forall k = 1, \ldots, K, \forall l = 1, ..., L_k, \forall j = 0, \ldots, n. \tag{3.5}$$

• La contrainte (3.6) garantit que chaque compartiment d'un camion contient au maximum un seul type de produit.

$$\sum_{p=1}^{2} z_{pkq} \leq 1, \quad \forall k = 1, \ldots, K, \forall q = 1, \ldots, 4. \tag{3.6}$$

- La contrainte (3.7) garantit la continuité des tournées.

$$\sum_{i=0}^{n} x_{isk}^{l} - \sum_{i=0}^{n} x_{sik}^{l} = 0, \quad \forall k = 1, \ldots, K, \forall l = 1, ..., L_k, \forall s = 1, \ldots, n. \tag{3.7}$$

- La contrainte (3.8) garantit l'élimination des sous-tours.

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ijk}^{l} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subset \{0, ..., n\} \text{ et } 2 \leq |S| \leq n-1, \ \forall k = 1, \ldots, K, \forall l = 1, ..., L_k. \tag{3.8}$$

- La contrainte (3.9) garantit la satisfaction des demandes de chaque station.

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L_k} \sum_{q=1}^{4} y_{ikpq}^{l} z_{pkq} = Dem_{ip}, \quad \forall p \in \{1, 2\}. \tag{3.9}$$

**La fonction objectif** Notre objectif est de minimiser le coût total des trajets effectués par tous les camions.

$$\min(z) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L_k} x_{ijk}^{l} c_{ijk}$$

**Le modèle général**

En rassemblant la fonction objectif et les contraintes décrites ci-dessus, on obtient le programme linéaire suivant :

$$
(PL)\left\{
\begin{array}{c}
\min(z) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L_k} x_{ijk}^{l} c_{ijk} \\
\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{l=1}^{L_k} (t_{ijk}+s_i)\, x_{ijk}^{l} \leq T_k, \quad \forall k=1,\dots,K. \\
\sum_{P=1}^{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} x_{jik}^{l} y_{ikpq}^{l} \leq C_{kq}, \quad \forall k=1,\dots,K, \forall l=1,\dots,L_k, \forall q=1,\dots,4. \\
\sum_{j=0,\ j\neq i}^{n} x_{ijk}^{l} \leq 1, \quad \forall k=1,...,K, \forall l=1,...,L_k, \forall i=0,\dots,n. \\
\sum_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} x_{ijk}^{l} \leq 1, \quad \forall k=1,\dots,K, \forall l=1,...,L_k, \forall j=0,\dots,n. \\
\sum_{p=1}^{2} z_{pkq} \leq 1, \quad \forall k=1,\dots,K, \forall q=1,\dots,4. \\
\sum_{i=0}^{n} x_{isk}^{l} - \sum_{i=0}^{n} x_{sik}^{l} = 0, \quad \forall k=1,\dots,K, \forall l=1,...,L_k, \forall s=1,\dots,n. \\
\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} x_{ijk}^{l} \leq |S|-1, \quad \forall S \subset \{0,...,n\} \text{ et } 2 \leq |S| \leq n-1,\ \forall k=1,\dots,K, \forall l=1,...,L_k. \\
\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}\sum_{q=1}^{4} y_{ikpq}^{l} z_{pkq} = Dem_{ip}, \quad \forall p \in \{1,2\}. \\
x_{ijk}^{l} \in \{0,1\}, \quad \forall i,j,k,l. \\
z_{pkq} \in \{0,1\}, \quad \forall p,k,q. \\
L_k \in \mathbb{N}, \quad \forall k. \\
y_{ikpq}^{l} \in \mathbb{R}, \quad \forall i,k,p,q,l.
\end{array}
\right.
$$

## 3.4 conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons fait une présentation de problématique et ses caractéristiques, et nous avons effectué une modélisation mathématique de notre problème. pour que dans le chapitre suivant, nous aborderons les différentes méthodes proposées pour résoudre ce problème.

# Chapitre 4

# Méthodes de résolution

## 4.1 Introduction

Le problème de tournées de véhicules est facile à modéliser en un programme mathématique, mais les méthodes exactes pour le résoudre sont très délicates, car elles nécessitent beaucoup de temps et d'espace mémoire pour l'obtention d'une solution optimale. Par conséquent, des méthodes approximatives telles que les heuristiques et les méta-heuristiques sont souvent utilisées pour générer des solutions de haute qualité dans un délai raisonnable. Il existe de nombreuses méthodes disponibles pour résoudre le VRP (et ses variantes) en fonction de sa complexité.

Ce chapitre se concentre sur la résolution de notre problème en utilisant une méta-heuristique adaptée à notre situation, que l'on peut considérer comme une généralisation du problème de tournées de véhicules à compartiments multiples (MC-VRP).

Étant donné que le problème de tournées de véhicules à compartiments multiples (MC-VRP) est connu pour être NP-difficile [11], il est évident que nous ne pouvons pas résoudre notre problème avec une méthode exacte en raison de sa complexité.

Nous avons choisi d'utiliser la méta-heuristique du recuit simulé pour résoudre ce problème. Notre approche repose sur un algorithme de construction basé sur le principe du plus proche voisin, tandis que nous utilisons trois heuristiques (swap, déplacement de sommets et changement de véhicule) pour améliorer les solutions. Dans la suite, nous examinerons en détail l'algorithme du recuit simulé.

## 4.2 Algorithme de recuit simulé

Le recuit simulé (Simulated Annealing) est une méta-heuristique a solution unique proposé par S. Kirkpatrick et al. en 1983 [12] , cette méthode éte inspirée du recuit des métaux en métallurgie.

Le recuit est un processus de traitement thermique dans lequel les défauts des matériaux sont réduits par un chauffage et un refroidissement contrôlés des matériaux. Le recuit simulé est donc dérivé de la métallurgie. Dans le recuit simulé, les solutions les plus mauvaises sont rejetées en raison de la probabilité de refroidissement.

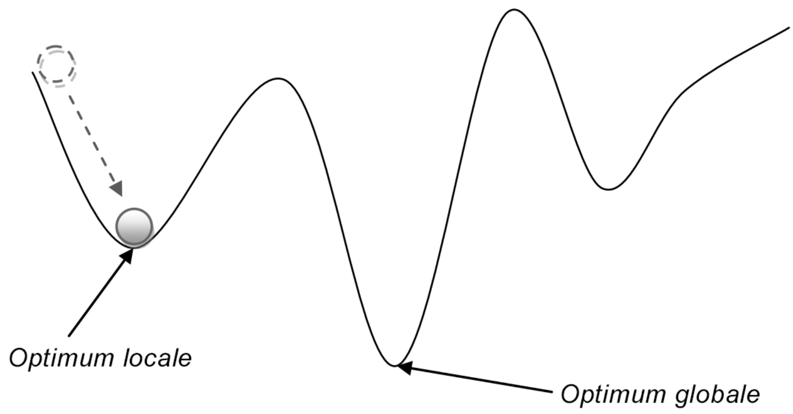



FIGURE 4.1 – Le parcours de l'algorithme recuit simulé

### 4.2.1 Principe de recuit simulé

La méthode du recuit simulé commence par une solution initiale admissible et explore l'espace des solutions voisins en effectuant de légères perturbations sur la solution actuelle. Si la nouvelle solution obtenue est meilleure, elle est acceptée. Si elle est moins bonne selon le critère d'optimisation, elle est acceptée avec une probabilité inversement proportionnelle au nombre d'itérations (principe de Metropolis). Le recuit simulé présente l'avantage de couvrir une plus grande zone de recherche et d'éviter une convergence prématurée vers un optimum local.[12]. dans ce qui suit on présente l'organigrame génerale de recuit simulé :

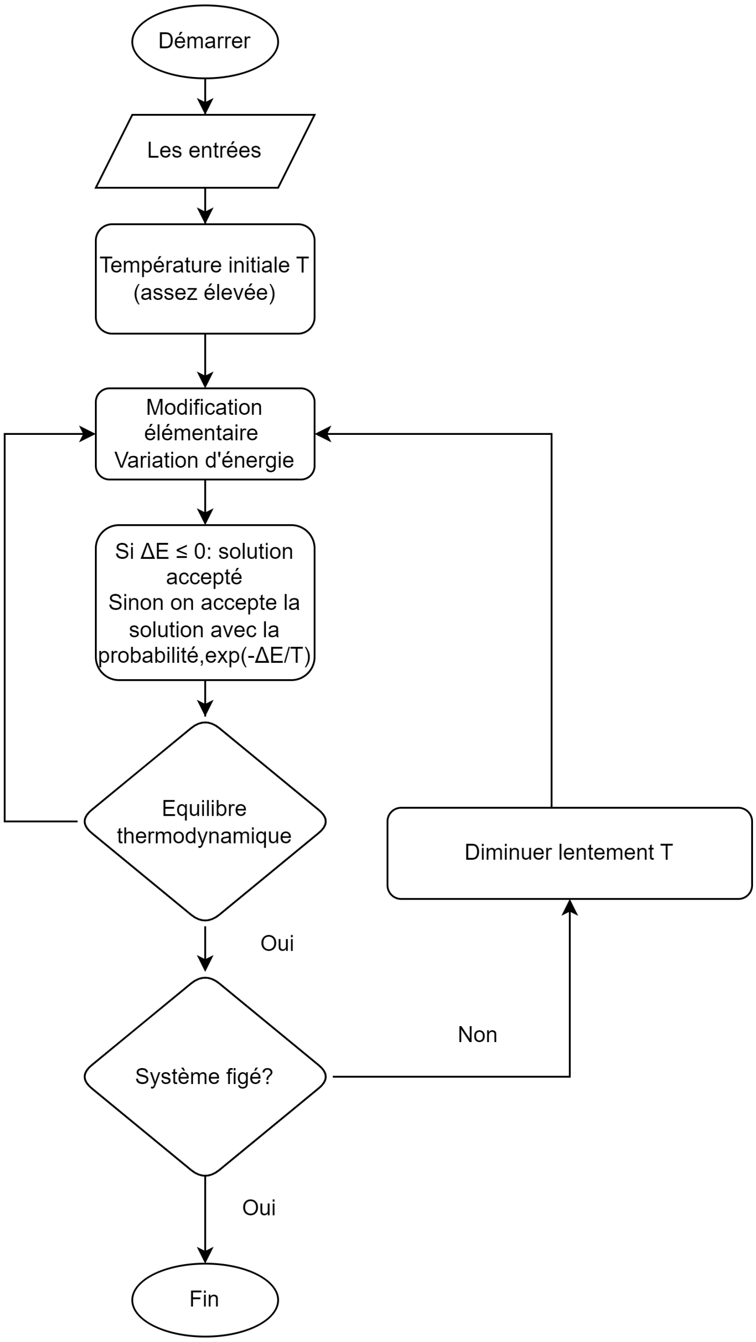



Figure 4.2 – Diagrame du recuit simulé

### 4.2.2 Avantages

**1- Exploration de l'espace de recherche :** Le recuit simulé permet d'explorer efficacement l'espace de recherche en acceptant des solutions moins bonnes dans le but d'éviter de rester bloqué dans des optima locaux.

**2- Flexibilité des paramètres :** Le recuit simulé offre une flexibilité quant aux paramètres du processus, tels que la température initiale, le taux de refroidissement et les critères d'arrêt. Cela permet d'adapter l'algorithme à différents problèmes et d'optimiser sa performance.

**3- Adaptation :** le recuit simulé peut être adapté pour les problèmes d'optimisation combinatoires de grande instances, il montre des bonnes performances.

**4- Facile à implementer et à programmer.**

### 4.2.3 Inconvinients

**1- Sensibilité aux paramètres :** Le recuit simulé peut être sensible aux réglages de ses paramètres. Le choix d'une température initiale, d'un taux de refroidissement inapproprié ou de critères d'arrêt inadéquats peut avoir un impact significatif sur les performances de l'algorithme.

**2- Piège d'optima loacale :** Le recuit simulé présente l'inconvénient majeur de rester piégé dans les optima locaux. Malgré sa capacité à explorer différentes régions de l'espace de recherche, il ne garantit pas de trouver la meilleure solution globale. Parfois, l'algorithme peut converger vers un optimum local sous-optimal et ne parvient pas à s'échapper de cette région de l'espace de recherche.

## 4.3 Adaptation du recuit simulé a notre problème

Le recuit simulé se distingue par deux principales qualités : sa simplicité de mise en œuvre et sa vitesse d'exécution, qui la place en avantage par rapport à d'autres méthodes similaires. De plus, cette approche offre des bonnes résultats pour de nombreux problèmes d'optimisation combinatoire [14].

La premier utilisation de recuit simulé été en 1983 sur le problème de PVC (voyageur de commerce) [12] plusieurs applications du recuit simulé sont apparues par la suite, (ARP),

I ZIDI et al. [14], proposent une méthode hybride de recuit simulé avec la recherche tabou pour résoudre un problème d'ARP (Ambulance Routing Problem), qui est une variante du problème VRP. Leur objectif est d'offrir une solution de routage efficace aux véhicules ambulanciers lorsqu'il y a des demandes d'urgence simultanées causées par une catastrophe ou plusieurs accidents.

Pour utiliser le recuit simulé, nous devons générer une solution initiale qui sera obtenue à l'aide de l'heuristique de construction du plus proche voisin.

### 4.3.1 Heuristique de construction

#### Plus proche voisin

L'heuristique "Plus proche voisin" est une méthode de construction simple utilisée pour résoudre le problème de tournée de véhicules. Bien qu'elle permette d'obtenir rapidement une solution réalisable, elle ne garantit généralement pas la solution optimale. Cette heuristique est de type glouton, car elle prend une décision à chaque étape sans remettre en question cette décision.

Les tournées sont construites de manière séquentielle en utilisant l'heuristique du plus proche voisin. Le processus commence par le dépôt, et à chaque itération, le client le plus proche de la dernière étape est ajouté à la séquence de la tournée, à condition que les contraintes de capacité et de durée soient respectées. Lorsqu'une des contraintes est violée, la tournée est refermée en ajoutant à nouveau le dépôt. Ces opérations sont répétées tant qu'il reste des clients non affectés à une tournée. La construction des tournées se termine lorsque tous les clients sont affectés à une tournée [20].

**Algorithme 4.1: Heuristique** *Plus proche voisin*

**Entrées** : $G = (X, U)$; $K$; $T_k$; $s_i$; $C_{kq}$; $t_{ijk}$; $c_{ijk}$.
**Sorties** : $tournée_1, tournée_2, \ldots, tournée_K$
**Début**
    **tant que** $X \neq \emptyset$**faire**
        *choisir un camion* $k \in K$;    $tournée_k := \{0\}$;
        **tant que** $tournée_k$ *n'est pas cloturé* **faire**
            *i :=le plus proche voisin (Fin[tourée*$_k$]; $X$);
            **si** ($durée(tournée_k \cup \{i, 0\}) > T_k$) **alors**
                $tourée_k := tournée_k \cup \{0\}$;
            **sinon**
                **pour** $p := 1$ *à* 2 **faire**
                    **si** $capacité(tournée_k \cup \{i_p\})$ *et* ($coût\,(tournée_k \cup \{i_p\}) \neq +\infty$) **alors**
                        $tournée_k := tournée_k \cup \{i_p\}$;   $X := X - i_p$;
                        **si** $X = \emptyset$ **alors**
                            $tournée_k := tournée_k \cup \{0\}$;
                        **fin**
                    **fin**
                **fin**
            **fin**
        **fin**
        $K := K - k$;
    **fin**
**Fin.**

### Exemple

Voici une représentation visuelle des distances entre cinq villes sous forme d'un graphe :

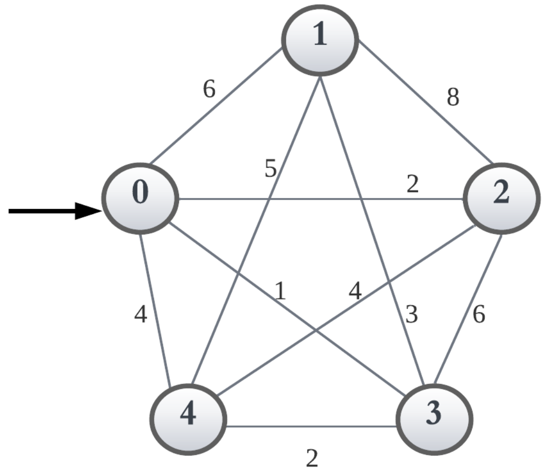



FIGURE 4.3 – Exemple de l'heuristique du plus proche voisin

La tournée trouvée par l'heuristique du plus proche voisin est :

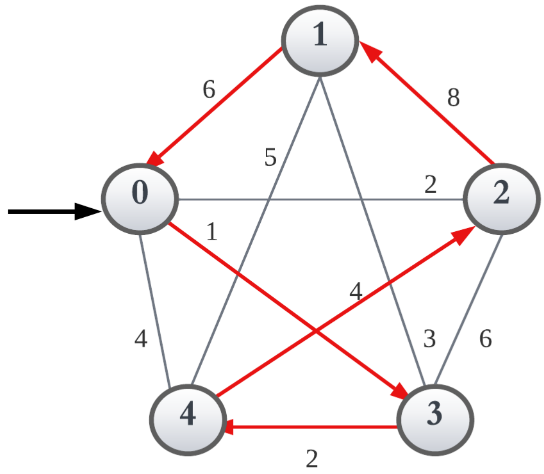



FIGURE 4.4 – resolution de l'exemple de l'heuristique du plus proche voisin

### 4.3.2 Heuristique d'amélioration

Les heuristiques d'amélioration sont des méthodes qui visent à améliorer une solution initiale en explorant de manière itérative l'espace des solutions. Ces heuristiques se concentrent sur la recherche de solutions de meilleure qualité en utilisant des opérations de voisinage pour effectuer des modifications locales sur la solution courante

### Le Swap

L'heuristique "Le Swap" consiste à échanger la position de deux clients au sein d'une même tournée. L'objectif est de réduire le coût total des tournées tout en respectant les contraintes de capacité et la durée de travail maximale du camion responsable de cette tournée.

L'idée est de trouver une paire de clients dans une tournée où l'échange de leur position améliorerait la solution globale. Cette méthode peut aider à améliorer l'efficacité des tournées, réduire les distances parcourues par les véhicules. Cependant, il est important de noter que cette heuristique ne garantit pas d'atteindre la solution optimale, mais elle peut fournir des améliorations significatives par rapport à une solution initiale [21].

---

**Algorithme 4.2: Heuristique** *Le Swap*

---

**Entrées** : tournée .
**Sorties** : tournée .
**Début**
  **pour chaque** $x_i, x_j \in$ *tournée tels que* $i \neq j$ **faire**
    **si** *Conditions de changement* $(x_i, x_j)$ **alors**
      permuter $(x_i, x_j)$ ;
      stopper l'heurstique ;
    **fin**
  **fin**
**Fin.**

---

### Exemple

On applique l'heuristique du Swap à la solution déjà obtenue grâce à l'heuristique du plus proche voisin. En permutant le sommet 1 avec le sommet 2, nous obtenons une nouvelle solution.

le nouveau chemin est : $0 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 0$

$$Sa' = 1 + 2 + 5 + 2 + 8 = 18$$

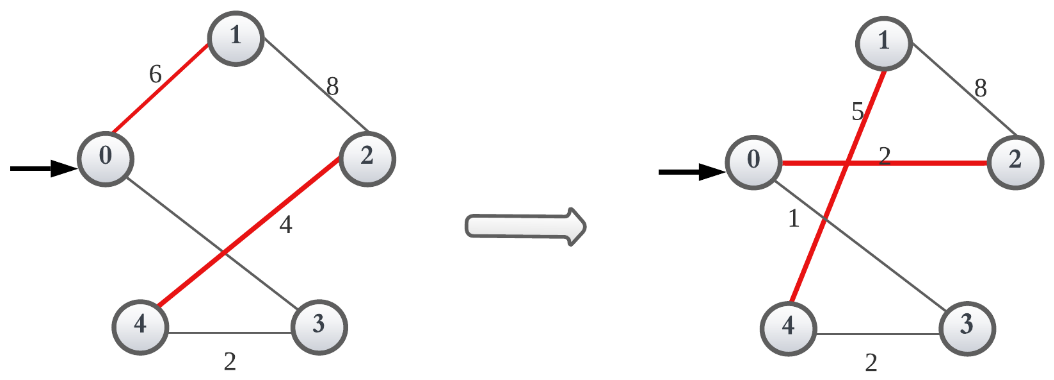


FIGURE 4.5 – Exemple de l'heuristique Le Swap

### Déplacement de sommet

L'heuristique du "Déplacement de sommet" consiste à déplacer un sommet d'une tournée vers une autre tournée, dans le but de réduire à la fois le nombre total de tournées et le coût global. Ce déplacement de sommet est effectué en respectant les contraintes de capacité et de durée maximale de travail du camion responsable de la tournée à laquelle le nouveau sommet est attribué. Ainsi, lorsque l'insertion d'un sommet dans une tournée ne viole pas ces contraintes, le sommet est inséré dans la tournée où il permet d'obtenir la meilleure amélioration [22].

**Algorithme 4.3: Heuristique** *Déplacement de sommet*

**Entrées :** tournée$^{[1]}$; *tournée*$^{[2]}$.
**Sorties :** tournée$^{[1]}$; *tournée*$^{[2]}$.
**Début**
  **pour chaque** $x_i \in$ *tournée*$^{[1]}$ **faire**
    **si** *Conditions de déplacement* $\left(x_i, \textit{tournée}^{[2]}\right)$ **alors**
      Déplacer le sommet $\left(x_i, \text{tournée}^{[2]}\right)$ ;
      stopper l'heurstique ;
    **fin**
  **fin**
**Fin.**

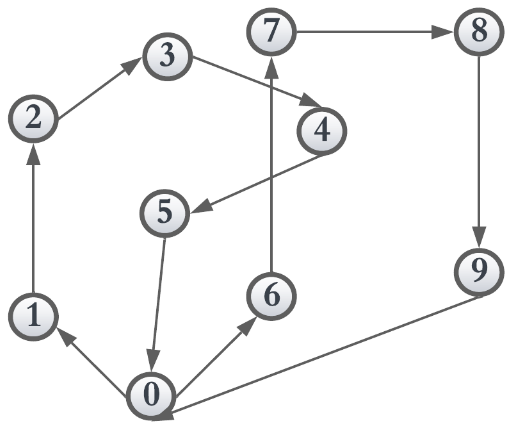



FIGURE 4.6 – Exemple de Deplacement de sommets

### Véhicule Exchange

L'heuristique "Véhicule Exchange" consiste à attribuer une tournée d'un camion à un autre camion qui n'est pas en repos. Son objectif est de réduire le nombre total de camions et les coûts, tout en respectant les contraintes de capacité et de durée maximale de travail du camion responsable de la tournée qui lui a été attribuée.

**Algorithme 4.4: Heuristique** *Véhicule Exchange*

**Entrées** : *tournée* ; $k'$ ; $L_k$ .
**Sorties** : *tournée* ; $k'$ .
**Début**
  Camion non libre:= $\{1 \leq k \leq K \ / \ L_k \neq 0$ et $k \neq k'\}$ ;
  **pour chaque** $k \in$ *Camion non libre* **faire**
    **si** *Codition* (*tournée*, $k$) **alors**
      Affecter *tournée* au camion $k$;  $k' := k$;
      stopper l'heurstique ;
    **fin**
  **fin**
**Fin.**

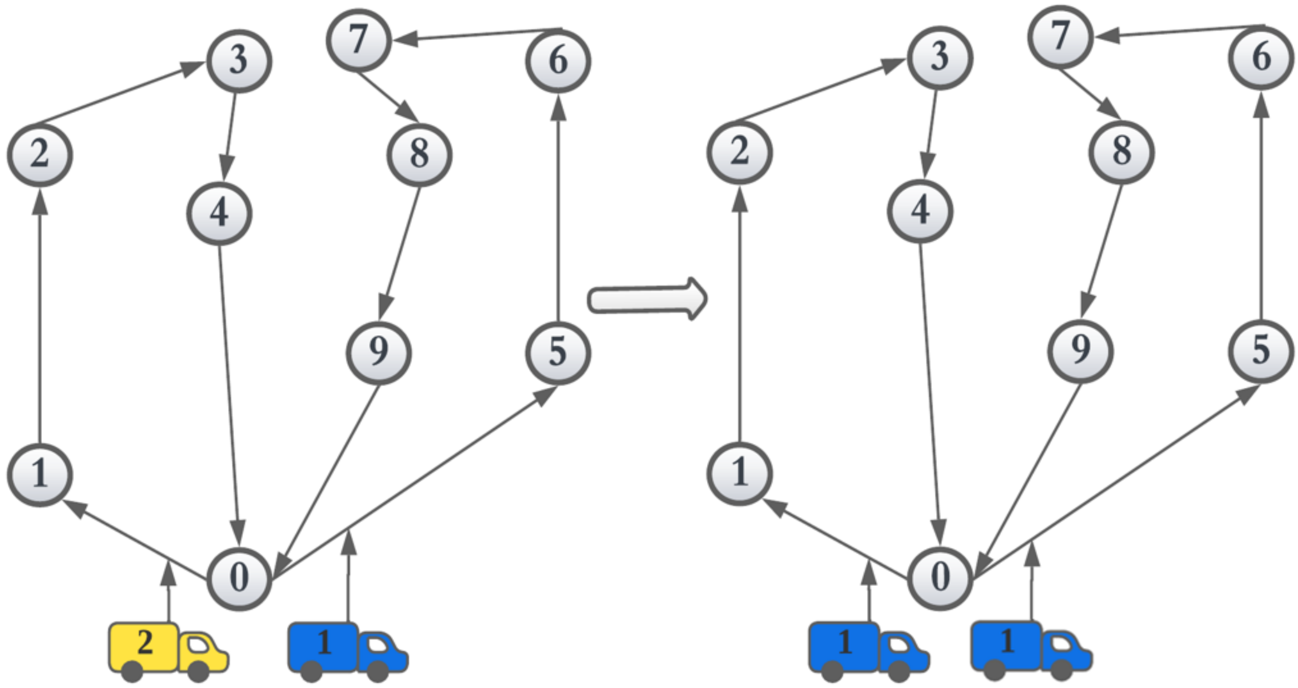



FIGURE 4.7 – Exemple de Vehicule Exchange

Dans la partie prochaine nous présentons l'algorithme de recuit simulé utilisé pour notre problème.

### 4.3.3 Application de recuit simulé

Après avoir exposé les différentes heuristiques que nous avons utilisées pour construire et améliorer une solution, nous allons maintenant présenter le pseudo-code de l'algorithme complet :

**Algorithme 4.5: Algorithme** *Recuit simuler*

**Début**

choisir une température initaile $T_i > 0$

choisir une température finale $T_f > 0$

choisir le nombre d'ittération $nb$

choisir le coéfficient de diminution de la température $\alpha \in ]0, 1[$

$S_i$ :=*Plus proche voisin ;* $S_{best} := S_i$;

$T = T_i$

**tant que** $T > T_f$ **faire**

choisir le nombre d'ittération $nb$

**pour** $k := 1$ *à* $nb$ **faire**

$S$ :=Choisir(*Le Swap*($S_i$) ; *Déplacement de sommet*($S_i$) ; *Véhicule Exchange*($S_i$));

**si** $F(S) < F(S_i)$ **alors**

$S = S_i$;

**si** $F(S_i) < F(S_{best})$ **alors**

$S_{best} = S_i$;

**fin**

**sinon**

Choisir aléatoirement $r \in [0, 1]$ ;

**si** $r < e^{\frac{F(S)-F(S_i)}{T}}$ **alors**

$S = S_i$;

**fin**

**fin**

**fin**

$T := T \times \alpha$;

**fin**

**Fin.**

# Chapitre 5

# Implémentation

Ce chapitre est dédié à notre choix d'utiliser Python comme langage de programmation principal pour développer notre solution visant à résoudre notre problème VRP. Nous commencerons par présenter le logiciel, puis nous aborderons la résolution du problème de tournées de véhicules avec capacité et plusieurs compartiments (MC-VRP). L'objectif de cette résolution sera de minimiser la distance totale parcourue, en utilisant l'algorithme du recuit simulé implémenté en Python.

### Python

Python est un langage de programmation créé par Guido van Rossum, dont la première version a été publiée en 1991. Depuis lors, Python est devenu l'un des langages les plus utilisés dans le monde.

Python est un langage polyvalent utilisé dans de nombreux domaines. Dans le domaine du développement web, il est largement utilisé pour la création de sites web dynamiques et d'applications. Il est également très utilisé dans le domaine de l'analyse de données. Python est devenu un choix privilégié en raison de ses bibliothèques puissantes telles que NumPy, pandas et matplotlib, ainsi que scikit-learn, qui permet des fonctionnalités avancées dans ces domaines. Cela fait de Python une plateforme de choix pour de nombreuses tâches.[23]

## 5.1 Choix de Python

Python est un choix judicieux pour l'implémentation de notre solution en raison de sa simplicité, de sa flexibilité et de sa richesse en bibliothèques et modules spécialisés dans la résolution de problèmes d'optimisation. Il offre également une syntaxe claire et concise, ce qui facilite la compréhension et la maintenance du code.

L'implémentation en Python nous permettra d'exprimer efficacement les contraintes et les objectifs du VRP pour résoudre notre problème. Nous pourrons également bénéficier de la communauté Python active et des ressources disponibles en ligne, ce qui facilitera le développement, le débogage et l'optimisation de notre solution.

## 5.2 L'interface de programme

Dans cette partie, nous allons donner des captures d'écran de notre application et nous expliquerons comment ça fonctionne.

Lorsque nous lançons l'application, nous voyons une fenêtre qui est l'interface principale du programme :

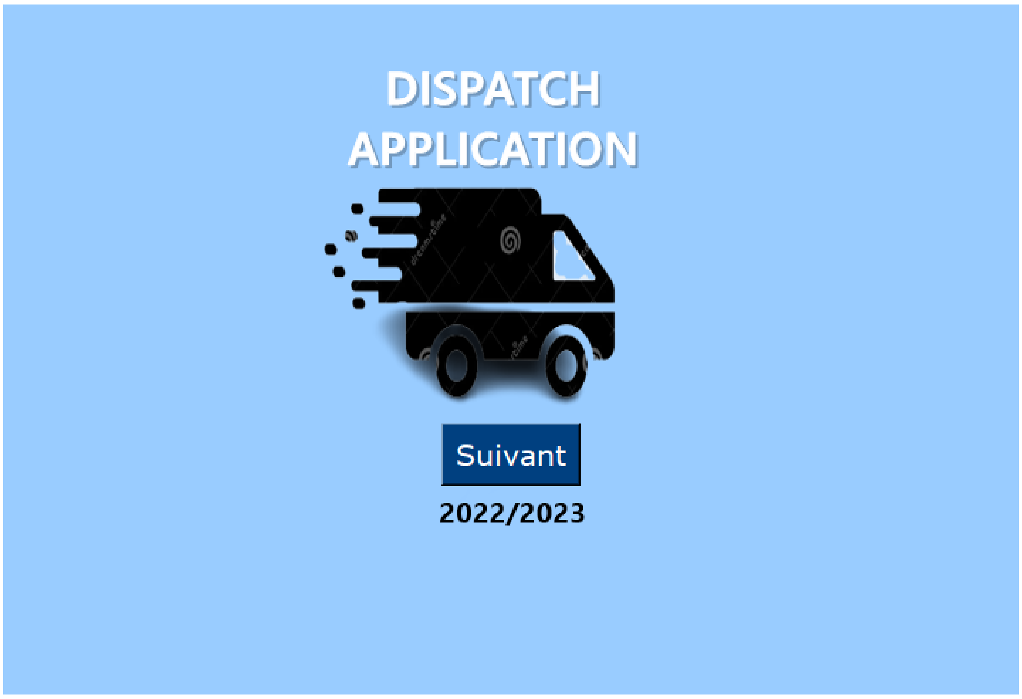



FIGURE 5.1 – l'interface principale du programme

Après avoir cliqué sur le bouton "Suivant", le programme nous redirigera vers la page dans laquelle nous nous demanderons d'entrer le nombre de clients qui ont des commandes :

FIGURE 5.2 – L'interface de demandes des clients

Aprés avoir choisir le nombre de clients qui ont des commandes, on remplit les informations suivantes : code de client, la demande du produit Gasoil en mètres cubes, la demande du produit Sans plomb en mètres cubes. Aprés avoir remplir les informations on clique sur le bouton "Suivant" :

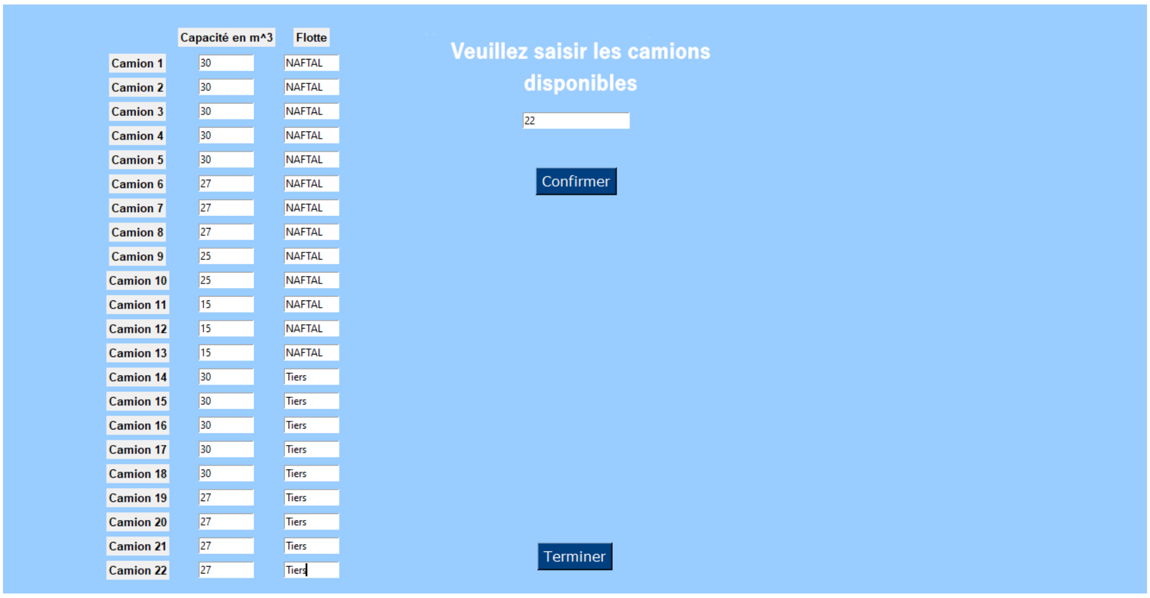



FIGURE 5.3 – l'interface pour les informations des camions disponibles

Dans cette étape, on doit entrer le nombre de camions disponibles, leur capacité et leur type (NAFTAL ou bien tiers), en cliquant sur le bouton "Terminer", nous obtiendrons les résutats finales :

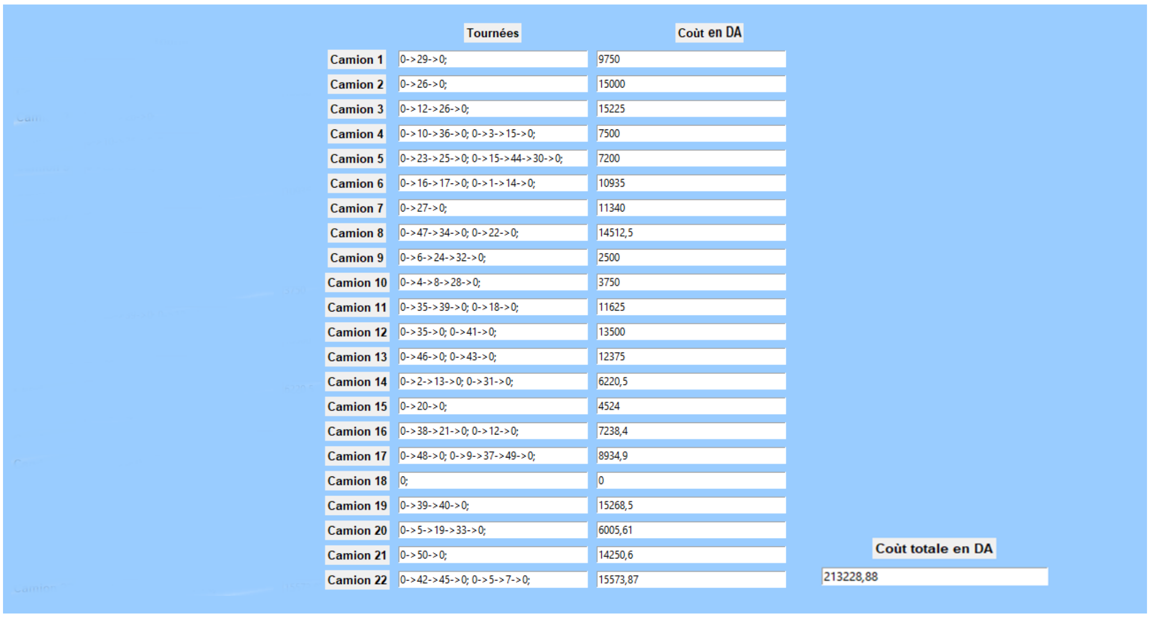



FIGURE 5.4 – l'interface de résultats

Les résulats finales sont l'ensemble de tournées pour chaque camions, le coût des tournées parcourus par le camion, et le coût totale, tout cela est en DA (Dinars Algérien)

## 5.3 Conclusion

Dans ce chapitre on a implémenter l'algorithme de recuit simulé adapté à notre problème en utilisant la language de programmation Python.

# Conclusion générale

La présente mémoire se concentre principalement sur une généralisation du problème (MC-VRP-C) "tournée de véhicules multi-compartiments avec capacité hétérogènes" du problème de tournée de véhicules. Dans ce type de problème, notre objectif est de visiter un ensemble de clients dans un réseau afin de fournir des carburants aux stations-service en utilisant des véhicules multi-compartiments et de capacité limitée et differente. L'objectif de cette étude était de réduire les coûts de transport et de résoudre le problème de distribution optimale des carburants (Sans plomb, Gasoil) pour le centre d'EL HARRACH 16A.

Tout d'abord, nous avons donné une introduction pour donner une idée générale de notre mémoire à tous les lecteurs. Ensuite, nous avons présenté l'entreprise où nous avons effectué notre stage et notre étude.Par la suite, nous avons enchaîné en présentant notre problématique avec toutes ses caractéristiques et contraintes. Après, nous avons évoqué la partie théorique sur la théorie des graphes, le problème VRP et ses variantes (mentionner les variantes spécifiques évoquées dans la partie théorique). Après cela, nous avons présenté notre modélisation qui est représentée par un modèle mathématique.

L'algorithme adoptée pour résoudre notre problème est l'algorithme du recuit simulé, en lui introduisant une heuristique de construction (Le plus proche voisin) et des heuristique d'améliorations (Vehicule Exchange,Le Déplacement De Sommet et Swap) pour ameliorer les résultat .Cette combinaison a conduit à la création d'un nouvel algorithme (recuit simulé adapté), qui est présenté en détail dans le cinquième chapitre.

# Bibliographie

[1] Gondran, M., & Minoux, M. (2009). Graphes et algorithmes (4e ed.). Lavoisier.

[2] Vanderbei, R. J. (2008). Linear programming : foundations and extensions. Allemagne : Springer US.

[3] Lawler, E. (2012). Combinatorial Optimization : Networks and Matroids. États-Unis : Dover Publications.

[4] Aardal, K., Nemhauser, G. L., Weismantel, R., & Wolsey, L. (2019). Introduction to Combinatorial Optimization. Wiley.

[5] Karp, R. M. (1972). Reducibility Among Combinatorial Problems. In R. E. Miller & J. W. Thatcher (Eds.), Complexity of Computer Computations (pp. 85-103). New York : Plenum Press.

[6] Talbi, E. G. (2009). An introduction to heuristics. Springer.

[7] Glover, F. & Kochenberger, G. A. (2003). Handbook of Metaheuristics. Springer.

[8] IK. Altinel and T. Öncan. A new enhancement of the clarke and wright savings heuristic for the capacitated vehicle routing problem. Journal of the Operational Research Society, pages 954–961, 2005.

[9] E. G. Coffman, G. Galambos, S. Martello, D. Vigo, *Bin packing approximation algorithms : Combinatorial analysis*. In Handbook of combinatorial optimization 151-207. Springer 1999, Boston, MA.

[10] Perifel, S. (2014). Complexité algorithmique. France : Ellipses.

[11] Yahyaoui, H., Kaabachi, I., Krichen, S., & Dekdouk, A. (2020). Two metaheuristic approaches for solving the multi-compartment vehicle routing problem. Operational Research, 20, 2085-2108.

[12] Kirkpatrick, S., Gelatt Jr, C. D., & Vecchi, M. P. (1983). Optimization by simulated annealing. science, 220(4598), 671-680.

[13] HEMMAK Allaoua Support de cours d'optimisation combinatoire. Juin 2017 – page 35 ,36

[14] Bouajaja, S., & Dridi, N. (2017). Méthode de Recuit Simulé pour l'optimisation de l'affectation d'opérateurs sur une ligne de production.

[15] Meriem AKLI, problème de tournées de véhicules avec contraintes et fenêtre de temps, thèse de magister, université de Mouloud Mameri Tizi Ouzou (2013)

[16] T. Kherimeche, la communication marketing au lancement d'un nouveau produit cas : ≪ carte à puce NAFTAL card≫ diplôme de Master en sciences de gestion (2018).

[17] Bounouala Nada Mezaghchia Amel ,La faisabilité du polycarbonate comme un nouveau matériaux pour la bouteille du gaz GPL, ,memoire de master,Universite de Annaba

[18] BENSAID Houssyn et SAYOUD Mohamed Schéma optimal d'un centre carburant au port d'Alger ,diplome de master , USTHB ,2008,

[19] Boulissia Hanane et Zerrouni Lylia ,Gestion d'approvisionnement des stations services en carburants au niveau du centre de distribution 215C NAFTAL,mémoire de master,universite de Boumerdes (2017)

[20] BEKADA Karima Amina ; Une Methode de Resolution d'un Probleme d'Optimisation Combinatoire(memoire de master, 2015) ;UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

[21] DP Panagopoulou, NM Matsatsinis, IM Chassiakos,A survey on vehicle routing problem and its variants : From classic to swarm intelligence algorithms Source : European Journal of Operational Research Année : 2016 Volume : 248 Pages

[22] Ruiz, Rubén and Maroto et les autres,A survey of heuristics for the vehicle routing problem with heterogeneous flotte and routing costs,European Journal of Operational Research (2013),pages : 483-513

[23] Chollet, F. (2020). L'apprentissage profond avec Python. France : machinelearning.fr.