République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

Université M'hamed Bougara de BOUMERDES
Faculté des science
Département de mathématiques

L'influence des coefficients d'un système d'équations d'ondes couplées par des termes du second ordre sur sa stabilisation

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de

Master en Analyse Mathématique

par
AMIAR Sofiane

Soutenu le 08 Juillet 2023 devant le jury composé de

Mechrouk Salima	MCA	UMBB	Présidente
Benakmoum Saliha	MCB	UMBB	Examinatrice
Karima Laoubi	MCA	UMBB	Encadreur

Année Universitaire 2022/2023

Table des matières

Remerciement

A mon père AMIAR Saadi et ma chère mère, pour leurs amour inestimable,leurs sacrifices, leurs confiance et leurs soutient
A ma femme Hanane et mes enfants Mehdi, Yasmine et Abderrahime les plus grandes sources de mon bonheur
A toutes ma famille et mes camarades de l'université
En premier lieu je remercie ELLAH le tout puissant de m'avoir donné la force pour finir ce travail.
J'exprime mes profonds remerciements à ma directrice de thèse Madame LAOUBI Karima, pour sa patience, sa disponibilité et ses conseils
Je voudrais aussi remercie les membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir accepté et examiné ce travail ainsi que tous les enseignants du département mathématique
Enfin un grand merci pour mes collègues pour leurs soutiens moral.

Résumé

Le but de ce travail est d'étudier la contrôlabilité et la stabilisation forte d'une équation d'onde couplée du second ordre par le laplacien avec un amortissement localement interne. Tout d'abord, en utilisant la théorie des semi groupes, nous prouvons que notre système admet une solution unique. En se servant ensuite d'un théorème de contnuité, on montre que ce problème est fortement stable sans aucune condition géométrique. Un résultat de contrôlabilité sera donné dans la dernière partie de ce travail.

Introduction

On considère les deux équations d'ondes suivantes couplées via le Laplacien avec un seul amortissement local :

$$\begin{cases} u_{tt} - a\Delta u + c\Delta y + d(x)u_t = 0, \;\; dans \;\; \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ y_{tt} - \Delta y) + c\Delta u = 0 \quad dans \;\; \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = y = 0 \quad sur \;\; \Gamma \times \mathbb{R}^+ \\ u(x;0) = u_0(x); \;\; y(x;0) = y_0(x); \;\; u_t(x;0) = u_1(x) \\ y_t(x;0) = y_1(x) \end{cases} \tag{0.0.1}$$

avec :

$$u = \; u(x;t) \quad et \quad y = \; y(x;t)$$

$$a \geq 0, \qquad c \in \mathbb{R}^* \;\; telle \;\; que \;\; a \geq c^2 \;\; et \;\; d \in L^2(\Omega)$$

Et lorsque

$$a \geq c^2 \;\; alors, \;\; \exists b \geq 0 \;\; telle \;\; que \;\; a = b + c^2$$

Plusieurs méthodes ont été développées pour montrer la convergence forte et la contrôlabilité de différents problèmes d'évolutions. Parmi celles ci on peut citer : la méthode d'estimation de l'énergie en utilisant la technique des multiplicateurs et la méthode des bases de Riez basée sur une analyse de Fourier (Réf.[07] et [11].

En particulier et en utilisant une méthode de multiplicateurs par morceaux, on prouve que, pour un temps T suffisamment grand l'observation de la trace de la dérivée normal de la première composante de la solution sur une partie de la frontière permet de récupérer une énergie affaiblie de la donnée initiale. Par conséquent, en utilisant la Méthode d'unicité de Hilbert Réf[11], on montre que notre système est exactement contrôlable.

L'objectif de ce travail, est de montrer que notre problème ce décroit fortement puis contrôlable en utilisant la théorie des semi groupes et une méthode basée sur la technique des multiplicateurs (Méthode d'intégration par partie

en choisissant un multiplicateur approprié).
ce travail est réparti en quatre chapitres :

Chapitre 1 : L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques résultats préliminaires sur l'analyse fonctionnelle.
Dans la $1^{e}re$ section, on rappelle quelques notions sur les espaces de sobolev, on a donné quelques théorèmes fondamentaux a savoir : Théorème de Poincaré, Théorème de trace et le Théorème de Lax Milgram.
Dans la $2^{e}me$ section, nous rassemblons quelques définitions sur les opérateurs non bornés, l'ensemble résolvant et on donne également des propriétés générales sur les opérateurs maximaux dissipatifs.
La $3^{e}me$ section a été consacré à la théorie spectrale des opérateurs, Rayon Spectrale et Image Spectrale.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre, nous commençons par donner les étapes essentielles de la théorie des semi groupes utilisées dans l'existence et l'unicité de la solution, on va donc présenter quelques Théorèmes fondamentaux (Théorème de Hille Yosida et Lumer Philips) qui relies les propriétés de dissipation de l'énergie d'un opérateur non borné à l'existence et l'unicité des solutions.

En se servant ensuite de cette théorie, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution des deux équations des ondes couplées sous l'action d'un amortissement local avec conditions de Dirichlet homogène sur toute la frontière.

Chapitre 3 : Dans ce travail, nous proposons l'étude de la stabilisation forte des deux équations des ondes couplées sous l'action d'un contrôleur local .

Chapitre 4 : Ce dernier chapitre traite de quelques inégalités d'observabilité et du problème de contrôlabilité du problème principal en termes d'existence et d'unicité de solutions associées au problème homogène.

1

Rappels et Préliminaires

Dans ce chapitre, on présente quelques définitions et théorèmes utiles le long de ce mémoire.(Voir [04],[05],[13],[16],[17],[21],[22]).

1.1 Analyse fonctionnelle

1.1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel, on appelle produit scalaire noté $\langle .,. \rangle$ l'application de $E \times E$ dans le corp $K = \mathbb{C}$ vérifiant :*

1.

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v; u\rangle}, \ \textit{pour tout} \ u, v \in E$$

2.

$$\langle \lambda u_1 + u_2, v\rangle = \lambda \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle \,, \ \textit{pour tout} \ u, v \in E, \textit{ et } \lambda \in \mathbb{C}$$

3.

$$\langle u, \lambda v\rangle = \overline{\lambda} \langle u, v\rangle \,, \ \textit{pour tout} \ \lambda \in \mathbb{C}$$

4.

$$\langle u, u\rangle \geq 0 \textit{ et } \langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

Définition 1.1.2 *Un espace de Hilbert est un espace de Banach* ($(E; \|.\|_E)$ *espace normé complet) muni d'un produit scalaire pour la norme associée :*

$$||u||_E = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}} \,(i.e)||u||_E^2 = \langle u, u\rangle \,.$$

Définition 1.1.3 *(Système orthonormé) Soit E un espace de Hilbert, la suite* $\{e_n\}_{n\geq 1} \subset E$ *est appelée un système orthonormé si*

$$\langle e_n, e_m\rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 \ \textit{si} \ n = m \\ 0 \ \textit{si} \ n \neq m \end{cases}$$

1. *Si* $e_n \perp e_m$ *on dit que le système* $\{e_n\}_{n\geq 1}$ *est orthogonal.*
2. *Si le système* $\{e_n\}_{n\geq 1}$ *est orthogonal alors le système* $\left\{\frac{e_n}{||e_n||}\right\}_{n\geq 1}$ *est orthonormé.*

Définition 1.1.4 *(Base Hilbertienne) Soit E un espace de Hilbert pour le produit scalaire* $\langle .,.\rangle$ *On appelle base Hilbertienne (dénombrable) de E une famille dénombrable* $\{e_n\}_{n\geq 1}$ *d'éléments de E orthonormée telle que l'espace vectoriel engendré par cette famille est dense dans E.*

Définition 1.1.5 *(Espace séparable) Un espace vectoriel normé qui contient une partie dénombrable dense est dit espace séparable.*

Exemple 1.1.1 *Les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont séparables (par exemple, $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble dénombrable dense dans $\mathbb{R}$).*

Théorème 1.1.6 *Tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne.*

Proposition 1.1.7 *Soit E un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle$, soit $(e_n)_{n\geq 1}$ une base Hilbertienne de E, il existe une suite unique $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par*

$$U_n = (U, e_n)$$

, telle que la somme partielle $\sum_{n=1}^{p} u_n e_n$ converge vers u quand p tend vers l'infinie. De plus on a

$$||u||^2 = \langle u, u \rangle = \sum_{n\geq 1} |(u, e_n)|^2$$

alors, on écrit

$$u = \sum_{n\geq 1} (u, e_n) e_n$$

Théorème 1.1.8 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite bornée dans l'espace de Hilbert E, alors on peut extraire une sous-suite qui converge.*

Théorème 1.1.9 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite qui converge faiblement vers u et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une autre suite converge faiblement vers v ; alors :*

$$\lim_{n\to\infty} \langle v_n, u_n \rangle = \langle v, u \rangle$$

.

Proposition 1.1.10 *Soit E et F deux espaces de Hilbert, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in E$ une suite qui converge faiblement vers $u \in E$, soit $A \in \mathbb{L}(\mathbb{E};\mathbb{F})$. Alors la suite $(Au_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers Au dans F.*

1.1.2 Analyse Hilbertienne

Espace pré-hilbertiens

Définition 1.1.11 *Étant donnés un espace vectoriel X sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et une application $(,) : X \times X \to \mathbb{K}$, on dit que $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur X si*

(i) $\forall u, v, w \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$$

(linéarité par rapport à la première composante)

(ii) $\forall u, v \in X$,

$$(v, u) = (u \bar{,} v)$$

(hermitivité)

(iii) $\forall u \in X\ 0$,

$$(u, u) > 0$$

(positivité).

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace pré-hilbertien.

Lemme 1.1.12 *(Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soit X un espace pré-hilbertien, alors*

$$|(u,v)| \leq \sqrt{(u,u)}\sqrt{(v,v)}, \forall u,v \in X.$$

Preuve 1.1.1 *Si u ou v est égal à 0 l'inégalité est immédiate. Sinon, on pose $w := u = \frac{(u,v)}{(v,v)}v$ et par positivité on doit avoir $(w,w) \geq 0$. En développant on obtient*

$$0 \leq (w,w) = (u,u) + \frac{|(u,v)|^2}{(v,v)^2}(v,v) - 2\frac{|(u,v)|^2}{(v,v)}$$

de sorte que $(u,u) \geq \frac{|(u,v)|^2}{(v,v)}$, ce qui entraine la conclusion.

Espace de Hilbert

Définition 1.1.13 *Un espace de Hilbert est un espace pré-hilbertien complet.*

Proposition 1.1.14 *Soit E est un pré-hilbertien et $x, y_i nE$ alors :*

1. $x \perp y \Leftrightarrow ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2; si\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *(Le théorème de Pythagore)*
2. $x \perp y \Leftrightarrow ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ *et* $||x+iy||^2 = ||x||^2 + ||y||^2;$ *si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

1.1.3 Théorème de représentation de Riesz

Définition 1.1.15 *Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé. On note par E^* son dual, i.e.l'espace vectoriel des formes linéaires continues $f : E \to \mathbb{K}$. Cet espace est muni de la norme*

$$||f|| = sup|f(x)|; ||x|| \leq 1$$

.

Théorème 1.1.16 *Soit H un espace de Hilbert. Alors*

1. *L'application ϕ est une isométrie i.e. pour tout $y \in H, ||\phi(y)|| = ||y||$.*
2. *Soit f est forme linéaire continue i.e. $f \in H^*$, alors il existe un unique $y \in H$ tel que $f = \phi_y$ et $||f|| = ||y||$.*

Preuve 1.1.2

1. *Il suffit de supposer que $y \neq 0$, alors de l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a $||\phi_y|| \leq ||y||$, d'autre part $\phi_y(y) = ||y||^2$, entraîne $||\phi_y|| \geq ||y||$, d'où $||\phi_y|| = ||y||$.*
2. *Soit $f \in H^*$, si $f = 0$, alors $f = \phi_0$. Maintenant si $f \neq 0$, on pose $F = kerf$,comme f est continue ker f est un sous-espace vectoriel fermé de H,et on a $F^\perp \neq 0$. Il en résulte l'existence de $y_0 \in F^\perp - 0$,alors $f(y_0) \neq 0$. On peut supposer quitte à diviser par le scalaire $f(y_0)$, que $f(y_0) = 1$. Soit $x \in H$, on vérifie directement que $x - f(x)y_0 \in F$ d'où $\langle x - f(x)y_0, y_0 \rangle = 0$ et ainsi $\langle x, y_0 \rangle = f(x)||y_0||^2$, finalement $f(x) = \left\langle x, \frac{y_0}{||y_0||^2} \right\langle hx = \langle x, y \rangle$ avec $y = \frac{y_0}{||y_0||^2}$.*

1.1.4 Théorie Spectrale des opérateurs compacts auto adjoints

Le spectre d'un opérateur

Soit E est un espace vectoriel sur

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}$$

ou

$$\mathbb{C}$$

, et T un endomorphisme de E. On appelle

- Spectre de T, l'ensemble

$$\sigma_p(T) := \lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - T \ \ ne \ \ soit \ \ pas \ \ inversible$$

- Spectre ponctuel de T, l'ensemble

$$\sigma_p(T) := \lambda \in \sigma(T) : ker(\lambda I - T) \neq 0$$

.

Opérateur auto adjoint

Soit T est un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert, soit $T \in \mathbb{L}(H)$, l'opérateur adjoint $T^* \in \mathbb{L}(H)$ est définie par

$$\langle T^* x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$$

pour $x, y \in H$. Un opérateur $T \in \mathbb{L}(H)$ est dit auto-adjoint si $T^* = T$, i.e

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \,, x, y \in H$$

.

Diagonalisation des opérateurs auto adjoints compacts

Théorème 1.1.17 *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ et $T \in K(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors, il existe une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T.*

1.1.5 Formulation variationnelle

Analyse variationnelle

Exemple 1-D

Soit à résoudre le problème :

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \qquad a < x < b \qquad (18) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

où f, c des fonctions données continues sur $[a, b]$, on supposera de plus que la fonction c est strictement positive sur $[a, b]$

Un telle problème est appelé problème aux limites.

Définition 1.1.18 *Une solution classique (ou* ***solution forte****) de $(\mathcal{P})$ est* *une fonction* $\mathcal{C}^2([a,b])$ *telle que :*

$$u(a) = u(b) = 0 \ et \ \forall x \in]a,b[, \ -u''(x) + c(x)u(x) = f(x)$$

En faisant le produit scalaire $L^2(]a,b[)$ de l'équation différentielle avec une fonction test $v \in \mathcal{D}(]a,b[)$ on a :

$$-\int_a^b u''(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b c(x)u(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\mathrm{d}x$$

soit en intégrant par partie le premier terme :

$$\int_a^b u'(x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_a^b c(x)u(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\mathrm{d}x$$

car $v(a) = v(b) = 0$ chaque terme de cette équation a en fait un sens dès que $v \in H_0^1(]a,b[)$

De plus $\mathcal{D}(]a,b[)$ est dense dans $H_0^1(]a,b[)$, cette équation est vérifiée pour tout $v \in H_0^1(]a,b[)$

On peut donc définir le nouveaux problème :

$$(\psi) = \begin{cases} Trouver\ u \in H_0^1(]a,b[)\ telque \qquad (19) \\ \int_a^b u'(x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_a^b c(x)u(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\mathrm{d}x \qquad \forall v \in H_0^1(]a,b[) \end{cases}$$

Ce problème est la **formulation variationnelle** du problème $(\mathcal{P})$

Toute solution de (ψ) est appelée **solution faible**

Exemple 2-D

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, on veut résoudre le problème :

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} -\Delta u + u = f \qquad \text{dans } \Omega \qquad (20) \\ \partial_n u = 0 \qquad \text{dans } \partial\Omega \end{cases}$$

Un solution forte de ce problème est une solution de $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ vérifiant (20) en tout point de Ω, on voit que ceci impose que f soit $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ et toute solution forte vérifiée alors :

$$\forall v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \quad \int_\Omega -\Delta uv + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$

soit par intégration par parties : $\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv$ puisque $\partial_n u = 0$ sur $\partial\Omega$

Donc on peut définir le nouveaux problème :

$$(\psi) = \begin{cases} Trouver\ u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \qquad (21) \\ \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

On voit que ce problème est définit dès que $f \in L^2(\Omega)$

Remarque

Une formulation plus générale est la suivante :

Trouver $u \in V,$ tel que : $\quad a(u, w) = l(w) \qquad \forall w \in W \qquad (22)$

Où $a(.,.)$ est une forme bilinéaire sur $V \times W$ et $l(.)$ est une forme linéaire sur W

Existence et unicité de la solution

(i) **Continuité**

Soit V, W des espaces de Hilbert

Définition 1.1.19 *Une forme linéaire $l(u)$ sur V est* ***continue*** *ssi il existe une constante K telle que :*

$$|l(u)| \leq K||u||_V \; \forall u \in V$$

Une forme bilinéaire $a(u,w)$ sur $V \times W$ est ***continue*** *ssi il existe une constante M telle que :*

$$|a(u,w)| \leq M||u||_V||w||_W \qquad \forall (u,w) \in V \times W$$

(ii) **Théorème de Lax-Milgram**

On ce place dans le cas de $V = W$ et on va introduire un outil important pour assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème.

Définition 1.1.20 *Une forme bilinéaire $a(u,v)$ sur $V \times V$ est* ***coercive*** *(ou* ***V-elliptique****) ssi il existe une constante $\alpha \geq 0$ telle que :*

$$a(u,v) \geq \alpha||u||^2, \qquad \forall u \in V$$

Théorème 1.1.21 *Soit V un espace de Hilbert,soit a une forme bilinéaire coercible sur V et soit l une forme continue sur V, alors il existe une unique $u \in V$ tel que $a(u,v) = l(v), \qquad \forall v \in V$*
(Et de plus l'application linéaire $l(u)$ est continue)

La démonstration général de ce théorème peut être trouvée par exemple dans Raviart et Thomas (1983)

Résumé

-On est parti d'un problème $(\mathcal{P})$ et on a introduit sa formulation variationnelle (ψ).

-On a montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible avec le théorème de Lax-Milgram.
Toute solution forte est aussi une solution faible

1.2 Espace de Sobolev

1.2.1 Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note $H^1(\Omega)$ l'éspace des distributions $L^2(\Omega)$ ayant toutes leurs dérivées partielles d'ordre 1 appartenant à $L^2(\Omega)$. Donc en notant les dérivées partielles (au sens des distribution) $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ nous posons :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \partial_\alpha u \in L^2(\Omega), \alpha = 1...n\}$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (uv + \nabla v \nabla v)dx$$

On notera $||.||_{H^1(\Omega)}$ la norme associée

1.2.2 L'espace $H_0^1(\Omega)$ et l'inégalité de Poincaré

On définit l'éspace $H_0^1(\Omega)$ comme l'adhérence des fonctions de $D(\Omega)$

pour la norme $H^1(\Omega)$, ces fonctions vérifiant une inégalité fondamentale dite Inégalité de Poincaré sur l'espace

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u/\partial\Omega = 0\}$$

1.2.3 Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de Ω telle que :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), ||u||_{L^2(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{L^2(\Omega)}.$$

l'espace $H^m(\Omega)$ est défini par :

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

ou

$$\partial^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|v}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}} et|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$$

cet espace est un espace de Hilbert séparable pour le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx$$

et la norme associé est notée $||.||_{H^m(\Omega)}$

1.2.4 Théorème de trace dans $H^1(\Omega)$

Soit (Ω) un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ de classe C^1 par morceaux, alors l'application de trace défini par :

$$\begin{aligned} \gamma_0 : D(\bar{\Omega}) &\rightarrow C^0(\Gamma) \\ v &\rightarrow \gamma_0(v) = v/\Gamma \end{aligned}$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$.

Cela implique en particulier :

$$\exists c > 0,\ \forall v \in H^1(\Omega) : ||\gamma_0(v)||_{L^2(\Gamma)} \leq c||v||_h^1\Omega$$

Pour plus de détails voir les références [6] et [14]

1.3 Équations aux dérivées partielles

1.3.1 Qu'est-ce q'une EDP ?

Soit u une fonction de plusieurs variables indépendantes $(x, y, ...)$ en nombre fini. Une équation aux dérivées partielles (**EDP** en abrégé) pour la fonction u est une une relation qui lie :

• Les variables indépendantes $(x, y, ...)$.

• La fonction "inconnue" u.

• Un nombre fini de dérivées partielles de u.

$$\Rightarrow F(x, y, ..., u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}, ...) = 0$$

1.3.2 Généralités sur les EDP

Classification des EDP

On distingue trois grands catégories d'**EDP** :

• Les équations de type **elliptique** qui interviennent très souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaires (c'est à dire n'évoluant pas au cours du temps). Le prototype d'équation elliptique est **l'équation de Laplace**

$$-\Delta u = f$$

d'inconnue $u(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ et de donnée f.

• Les équations de type **parabolique**, qui modélisent souvent l'évolution transitoire de phénomènes irréversibles associés à des processus de diffusion. **L'équation de la chaleur** en est un prototype :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$$

d'inconnue $u(x,t)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t > 0$ et de donnée f.

• Les équations de type **hyperbolique** qui modélisent des phénomènes dépendant du temps, de transport ou de propagation d'ondes. On identifie deux prototypes pour cette classe d'EDP :

- **L'équation du transport**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

d'inconnue $u(x,t)$, $t > 0$ et $x\mathbb{R}$.

- **L'équation des ondes**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} - \Delta u = f$$

d'inconnue $u(x,t)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t > 0$ et de donnée f.

D'ou vient le nom "elliptique", "parabolique", "hyperbolique" ?

Plaçons nous dans le cas particulier des équations de deuxième ordre dans $\mathbb{R}$ L'inconnue est la fonction $u(x,y)$, qui satisfait l'équation

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

Pour simplifier, on suppose les coefficients A, B, ..., G constants. Le type de l'EDP dépend du signe de $B^2 - 4AC$.

- Si $B^2 - 4AC > 0$, l'EDP est dite hyperbolique.
- Si $B^2 - 4AC = 0$, l'EDP est dite parabolique.
- Si $B^2 - 4AC < 0$, l'EDP est dite elliptique.

Ordre et linéarité d'une EDP

Définition 1.3.1 *On appelle ordre d'une EDP l'ordre le plus élevés des dérivées partielles dans l'EDP.*

Définition 1.3.2 *Si u et ses dérivées partielles apparaissent séparément et à la puissance 1 dans l'EDP, celle si est dite* ***linéaire****.*

Exemple 1.3.1 *Soit u une fonction de deux variables.*

- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ *est une EDP linéaire de premier ordre.*
- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \sin u = 0$ *est une EDP non-linéaire de premier ordre.*
- $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial u}{\partial y}u = 0$ *est une EDP non-linéaire de deuxième ordre.*

1.3.3 Conditions aux limites d'une EDP

Se donner les conditions aux limites, c'est donner des renseignements sur la fonction u ou ses dérivées sur le bord du domaine. Ils peuvent être de différents types, voyons les principaux :

Condition de Diriclet

En mathématiques, une condition aux limites de **Dirichlet** est imposée à une équation différentielle ordinaire ou à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs que la solution doit vérifier sur les frontières/limites du domaine.
Pour une équation différentielle ordinaire, par exemple

$$y'' + y = 0$$

la condition aux limites de Dirichlet sur l'intervalle $[a, b]$ s'exprime par :

$$y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta$$

où ? et ? sont deux nombres donnés.
Pour une équation aux dérivées partielles, par exemple

$$\Delta y + y = 0$$

où Δ est le Laplacien (opérateur différentiel), la condition aux limites de Dirichlet sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s'exprime par :

$$y(x) = f(x) \qquad \forall x \in \partial\Omega$$

où f est une fonction connue définie sur la frontière $\partial\Omega$.

Condition de Neumann

En mathématiques, une condition aux limites de **Neumann** est imposée à une équation différentielle ou à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs des dérivées que la solution doit vérifier sur les frontières/limites du domaine.
Pour une équation différentielle, par exemple :

$$y'' + y = 0$$

la condition aux limites de Dirichlet sur l'intervalle $[a, b]$ s'exprime par :

$$y'(a) = \alpha, \qquad y'(b) = \beta$$

où α et β sont deux nombres donnés.
Pour une équation aux dérivées partielles, par exemple

$$\Delta y + y = 0$$

la condition aux limites de Dirichlet sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s'exprime par :

$$\frac{\partial y}{\partial \vec{n}} = f(x) \qquad \forall x \in \partial\Omega$$

où f est une fonction connue définie sur la frontière $\partial\Omega$ et $\vec{n}$ est le vecteur normal à la frontière $\partial\Omega$. La dérivée normale dans le membre de gauche de l'équation, est définie par

$$\frac{\partial y}{\partial \vec{n}}(x) = \overrightarrow{grad}\ y(x).\vec{n}(x)$$

Condition de Robin

En mathématique, une condition aux limites de **Robin** (ou de troisième type) est un type de condition aux limites . Elle est également appelée condition aux limites de Fourier. Imposée à une équation différentielle ordinaire ou à une équation aux dérivées partielles, il s'agit d'une relation linéaire entre les valeurs de la fonction et les valeurs de la dérivée de la fonction sur le bord du domaine . Une condition aux limites de Robin est une combinaison pondérée d'une condition aux limites de Dirichlet et d'une condition aux limites de Neumann. Si Ω est un domaine dans lequel une équation doit être résolue, et si $\partial\Omega$ désigne le bord du domaine, la condition aux limites de Robin est de la forme :

$$au + b\frac{\partial u}{\partial n} = g \qquad \text{sur } \partial\Omega,$$

où a , b et g sont des fonctions définies sur $\partial\Omega$. Ici, u est la solution définie dans Ω que l'on cherche à déterminer et $\frac{\partial u}{\partial n}$ désigne la dérivée par rapport à la normale extérieure sur le bord.

En dimension un, si, par exemple, $\Omega = [0, 1]$, la condition aux limites de Robin s'écrit sous la forme :

$$au(0) - bu'(0) = g(0),$$

$$au(1) + bu'(1) = g(1).$$

2

Étude du problème principal

Dans cette partie on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution des deux équations d'ondes couplées entre elles par le laplacien avec un amortissement localement interne.

Considérons le problème cité dans l'introduction suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - a\Delta u + c\Delta y + d(x)u_t = 0, \ dans \ \ \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ y_{tt} - \Delta y) + c\Delta u = 0 \quad dans \ \ \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = y = 0 \quad sur \ \ \Gamma \times \mathbb{R}^+ \\ u(x;0) = u_0(x); \ y(x;0) = y_0(x); \ u_t(x;0) = u_1(x) \\ y_t(x;0) = y_1(x) \end{cases} \tag{2.0.1}$$

avec :

$$u = \ u(x;t) \ \ et \ \ \ y = \ y(x;t)$$

$$a \geq 0, \qquad c \in \mathbb{R}^* \ \ telle \ \ que \ \ a \geq c^2 \ \ et \ \ d \in L^2(\Omega)$$

Et lorsque

$$a \geq c^2 \ \ alors, \ \ \exists b \geq 0 \ \ telle \ \ que \ \ a = b + c^2$$

2.0.1 Domaine d'étude du problème

$$H = \left(H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)\right)^2$$

H est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire définit par :

$$\langle U, V \rangle_H = \int_\Omega [b\nabla u \nabla \overline{u_1} + v\overline{v_1} + (c\nabla u - \nabla y)(c\nabla \overline{u_1} - \nabla \overline{y_1}) + z\overline{z_1}] \, \mathrm{d}x$$

avec $U = (u, v, y, z)$ et $V = (u_1, v_1, y_1, z_1)$

2.0.2 Reformulation du problème

On va essayé d'écrire notre problème (2.0.1) sous forme d'un problème de Cauchy :

$Y_t(t) = AY(t)$, pour cela posons :

$$Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Telle que : $u = u,\ v = u_t,\ y = y,\ z = y_t$

Alors :

$$Y_t = \begin{pmatrix} u_t = v \\ v_t = u_{tt} = a\Delta u - c\Delta y - dv \\ y_t = z \\ z_t = y_{tt} = \Delta y - c\Delta u \end{pmatrix}$$

Donc :

$$Y_t = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & Id & 0 & 0 \\ a\Delta & -d & -c\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id \\ -c\Delta & 0 & \Delta & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u \\ v \\ y \\ z \end{pmatrix} = AY(t)$$

Le problème est donc équivalent aux problème de Cauchy :

$$\begin{cases} Y_t(t) = AY(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

Telle que : $Y_0 = (u_0, y_0, u_1, y_1)$ et A l'opérateur défini sur :

$D(A) = \{(u, v, y, z),$ tels que $v, z \in H_0^1(\Omega)$ et $\Delta u, \Delta v \in L^2(\Omega)\}$

Par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & Id & 0 & 0 \\ a\Delta & -d & -c\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id \\ -c\Delta & 0 & \Delta & 0 \end{pmatrix}$$

2.0.3 Existence et unicité de la solution

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.0.1), nous utilisons la théorie des semi groupes.

Ci après les étapes essentielles de cette théorie :(voir,[06],[14],[16],[20]).

Définition 2.0.1 *Soit E un espace de Banach, une famille à un paramètre G(t),* $0 \leq t < +\infty$ *d'éléments de* $\mathcal{L}(E)$ *est appelée semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur E si :*

1. *G(0) = I*
2. *G(t + s) = G(t).G(s)* $\forall t, s \geq 0$

• Un tel semi groupe est dit uniformément continu si :

$$\lim_{t \to 0} ||G(t) - I|| = 0$$

On dit dans ce cas que $G(t)$ est un C_0 semi groupe [1].

Définition 2.0.2 *Le générateur infinitésimal A d'un* C_0*-semi groupe* $S(t)$ *est définie par :*

$$A\,x = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t}[S(t)x - x]$$

De domaine :

$$D(A) = \left\{ x \in H,\ \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t}[S(t)x - x]\ existe \right\}$$

2.0.4 Théorème de Hille-Yosida

Soit A un opérateur linéaire (non nécessairement borné) dans un espace de Banach E. Alors A est générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contraction si et seulement si :

1. A est fermé à domaine dense.
2. L'ensemble résolvant $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - A \text{ est inversible de } D(A) \to E\}$ contient $\mathbb{R}_+^*$, de plus $\forall \lambda > 0$, on a

$$||R(\lambda, A)|| = ||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{\lambda}$$

2.0.5 Théorème de Lumer-Philips

Soit A un opérateur linéaire à domaine dense dans un espace de Banach E, alors :

1. Si A est dissipatif et qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $Im(\lambda_0 - A) = E$ Alors A est générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contraction.
2. Si A est générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contraction Alors
   $Im(\lambda_0 - A) = E$, et $\lambda_0 > 0$ et A est dissipatif.

De plus : $\forall x \in D(A)$, $\forall x^* \in F(x)$:

$$Re < x^*, Ax > \leq 0$$

Preuve 2.0.1 *([06],[16])*

i/- A dissipatif $\Longrightarrow ||(\lambda - A)x|| \geq \lambda.||x||$, $\forall x \in D(A) \Longrightarrow \lambda I - A$ *injectif*

En particulier pour λ_0 *:*

- $\lambda_0 I - A$ *est bijectif et de plus :* $||(\lambda_0 I - A)^{-1}|| \ \leq \frac{1}{\lambda_0}$

  donc $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ *borné et continue et A est fermé.*

  En utilisant le théorème de Hille-Yosida, on en déduit que A est G.I d'un $\mathcal{C}_0$ *semi-groupe de contraction. (Car* $\frac{1}{\lambda_0} < 1$*)*

- $\Lambda = \{\lambda > 0 \ : \ Im(\lambda I - A) = E\} \ \subset]0, +\infty[$.

  $\lambda \in \Lambda \ \ Longrightarrow \lambda \in \rho(A) \ \Longrightarrow \ \exists \underbrace{V(\lambda)}_{ouvert} \subset \rho(A)$

  D'où $V(\lambda) \cap]0, +\infty[\subset \rho(A)$ *est un voisinage de* λ *dans* $]0, +\infty[$ *et* Λ *est ouvert*

- *On démontre que* Λ *est fermé : Soit* $\lambda_n \in \Lambda$, $\lambda_n \longrightarrow \lambda > 0$

  étant donné : $y \in E, \ \forall n, \ \exists x_n \in D(A) \ / \ \lambda x_n - Ax_n = y$ *d'après la surjectivité On a* $||x_n|| \leq \frac{1}{\lambda_n}.||y|| \leq C.$ *de plus*

$$\begin{aligned} A_m||x_n - x_m|| &\leq ||\lambda_m(x_n - x_m)|| - ||A(x_n - x_m)|| \\ &= |\lambda_n - \lambda_m|.|x_m| \\ &\leq C|\lambda_n - \lambda_m| \end{aligned}$$

Car

$$\begin{aligned} \lambda_m(x_n - x_m) - A(x_n - x_m) &= \lambda_m x_n - Ax_n - \underbrace{\lambda_m x_m - Ax_m}_{y} \\ &= \lambda_m.x_n - \lambda_n.x_n - y \end{aligned}$$

λ_n *étant une suite de Cauchy donc* x_n *est une suite de Cauchy, et* *on a* $x_n \overset{C.V}{\longrightarrow} x$

$$\begin{cases} Ax_n = -y + \lambda x_n \longrightarrow -y + \lambda x \\ x_n \longrightarrow x \end{cases} \quad A\ fermé \Rightarrow x \in D(A)\ et\ Ax = -y+\lambda x$$

$$\Longrightarrow \lambda \in \Lambda$$

C.S : $Im(\lambda I - A) = E, \quad \forall \lambda > 0.$

A dissipatif $\Longrightarrow$ $Im(\lambda I - A)$ *injectif* $\forall \lambda > 0. \Longrightarrow (\lambda I - A)^{-1}$ *existe et*

$$||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Le théorème m de H.Y $\Longrightarrow$ *A est G.I d'un* $\mathcal{C}_0$ $\frac{1}{2}$*-groupe de contraction.*

- *Reste à montrer : Re* $< x^*, Ax > \leq 0$

$$x \in D(A), \qquad x^* \in F(x)$$

$$\begin{aligned} | < G(t)x, x^* > | &\leq ||G(t)x||.||x^*|| \\ &\leq ||x||.||x^*|| = ||x||^2 \end{aligned}$$

$$< G(t)x - x, x^* > = < G(t)x, x^* > - \underbrace{< x, x^* >}_{||x||^2} \leq 0$$

Donc Re $< G(t)x - x, x^* > \leq 0$. *On divise par* $t > 0$ *et on fait tendre* $t \to \infty$, *on obtient*

$$Re < Ax, x^* > < 0.$$

Corollaire 2.0.1 *Soit A fermé à domaine dense si A et* A^* *sont deux opérateurs* *continues dissipatifs, alors : A est G.I d'un $\mathcal{C}_0$ semi-groupe de contraction.*

Preuve 2.0.2 $\lambda = 1, \quad Im(I-A) = E$, *On suppose que* $Im(I-A) \neq E$, *on applique le théorème de Hann Banach. comme* $Im(I-A)$ *est un sous espace vectoriel fermé de* E *:*

$$\exists x^* \in E^* \ , \ x^* \neq 0 \quad et \quad x^* \ (Im(I-A)) = \{0\}$$

$$x^* \in D(A^*) \ \ et \quad < x^* - Ax^*, x >= 0 \quad \forall x \in D(A).$$

$D(A)$ *dense alors* $x^* - Ax^* = 0$

A^* *dissipatif donc* $I - A^*$ *est injectif et* $(I - A^*)x^* = 0$ *implique que* $x^* = 0$, *on aboutit donc à une contradiction et* $Im(I-A) = E$

Revenons donc sur notre problème.

Il suffit de montrer que A est maximal dissipatif

1. A dissipatif ?

   Soit $Y = (u, v, y, z) \in D(A)$:

$$\text{A dissipatif} \iff Re\langle AY, Y\rangle \leq 0 \qquad \forall Y \in D(A)$$

$$
\begin{aligned}
\langle AY, Y\rangle &= \int_\Omega \nabla v \nabla u \mathrm{d}x + \int_\Omega (a\Delta u - c\Delta y - dv) v \mathrm{d}x + \int_\Omega zy \mathrm{d}x + \int_\Omega (\Delta y - c\Delta u) z \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \nabla v \nabla u \mathrm{d}x + a\int_\Omega \Delta uv \mathrm{d}x - c\int_\Omega \Delta yv \mathrm{d}x - \int_\Omega dv^2 + zy\, \mathrm{d}x \\
&+ \int_\Omega \Delta yz \mathrm{d}x - c\int_\Omega \Delta uz \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \nabla v \nabla u \mathrm{d}x + a[\underbrace{\nabla uv}_{=0}]_\Omega - a\int_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x - c[\underbrace{\nabla yv}_{=0}]_\Omega + c\int_\Omega \nabla y \nabla v \mathrm{d}x - \int_\Omega dv^2 \mathrm{d}x \\
&+ \int_\Omega \nabla z \nabla y \mathrm{d}x + [\underbrace{\nabla yz}_{=0}]_\Omega - \int_\Omega \nabla y \nabla z \mathrm{d}x - c[\underbrace{\nabla uz}_{=0}]_\Omega + c\int_\Omega \nabla u \nabla z \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x - a\int_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x + c\int_\Omega \nabla y \nabla v \mathrm{d}x + c\int_\Omega \nabla u \nabla z \mathrm{d}x - \int_\Omega dv^2 \mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega dv^2 \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Car :

$$
\begin{aligned}
c\int_\Omega \nabla y \nabla v \mathrm{d}x + c\int_\Omega \nabla y \nabla z \mathrm{d}x &= c\int_\Omega z \nabla v \mathrm{d}x + c\int_\Omega v \nabla z \mathrm{d}x \\
&= c\int_\Omega (vz)' \mathrm{d}x = 0
\end{aligned}
$$

Et :

$\int_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x = 0$

Donc :

$$\langle AY, Y\rangle = -\int_\Omega dv^2 \mathrm{d}x \leq 0 \text{ car} \qquad d > 0$$

Alors A est dissipatif.

2. A est maximal ?

   Puisque A est dissipatif il suffit de montrer que $\lambda I - A$ est surjectif pour tout $(\lambda > 0)$

Soit : $F = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \\ p \end{pmatrix} \in H$

la question est : $\exists ? Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ y \\ z \end{pmatrix} \in D(A)$ telle que $(\lambda I - A)Y = F$

On prend : $\lambda = 1$

$$(\lambda I - A)Y = F \iff \begin{pmatrix} Id & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Id & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & Id & 0 & 0 \\ a\Delta & -d & -c\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id \\ -c\Delta & 0 & \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \\ p \end{pmatrix}$$

Alors on trouve le système suivant :

$$\begin{cases} u - v = f \\ -a\Delta u + v + dv + c\Delta y = g \\ y - z = h \\ c\Delta u - \Delta y + z = p \end{cases}$$

Mais : $-a\Delta u + c\Delta y + dv = -\Delta u$ et $c\Delta u - \Delta y = -\Delta y$

Après remplacement on trouve :

$$\begin{cases} u - v = f \qquad (1) \\ -\Delta u + v = g \qquad (2) \\ y - z = h \qquad (3) \\ -\Delta y + z = p \qquad (4) \end{cases}$$

$(1) + (2)$ donne : $\; -\Delta u + u = f + g \qquad (*)$

et $(3) + (4)$ donne : $\; -\Delta y + y = h + p \qquad (**)$

Étude du problème variationnel

Soit $\varphi \in H^1(\Omega)$ vérifiant les mêmes conditions que u, multiplions l'équation (*) par φ et intégrons sur Ω on trouve :

$$\int_\Omega (-\Delta u + u)\varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega (f + g)\varphi \, \mathrm{d}x$$

$$\int_\Omega -\Delta u\varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega u\varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega (f + g)\varphi \, \mathrm{d}x$$

$$\int_\Omega u\varphi \mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \mathrm{d}x - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \varphi \nabla u}_{=0} = \int_\Omega (f + g) \, \mathrm{d}x$$

on obtient

$$\begin{cases} a(u, \varphi) = \int_\Omega (u\varphi + \nabla u \nabla \varphi) \mathrm{d}x \\ \mathcal{L}(\varphi) = \int_\Omega (f + g)\varphi \mathrm{d}x \end{cases}$$

Pour montrer que cette formulation variationnelle possède une unique solution, on utilise le théorème de Lax Milgram.

Plus précisément, nous vérifions les conditions suivantes :

h_1- $a(.,.)$ est continue

h_2- $a(u, u)$ est coercive

h_3- $\mathcal{L}(.)$ est continue

h_1-

$$\begin{aligned}
|a(u,\varphi) &= |\int_\Omega (u\varphi + \nabla u \nabla \varphi)\mathrm{d}x| \\
&\leq |\int_\Omega u\varphi \mathrm{d}x| + |\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \mathrm{d}x| \\
&\leq ||u||_{L^2(\Omega)}||\varphi||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||_{L^2(\Omega)}||\nabla \varphi||_{L^2(\Omega)} \\
&\leq (||u||^2 + ||\nabla u||^2)^{1/2} + (||\varphi||^2 + ||\nabla \varphi||^2)^{1/2} \\
&\leq 2||u||_{H_0^1(\Omega)}||\varphi||_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

donc $a(.,.)$ est continue

h_2- $a(u,u) = |\int_\Omega (u^2 + (\nabla u)^2)\mathrm{d}x \geq ||u||^2_{H_0^1(\Omega)}$

donc $a(u,u)$ est coercive

h_3- $|\mathcal{L}(\varphi)| = |\int_\Omega (f+g)\varphi \mathrm{d}x| \leq ||f+g||_{L^2(\Omega)}||\varphi||_{L^2(\Omega)}$

On a $||f+g||$ est fini car $f, g \in L^2(\Omega)$ et :

$||\varphi||_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}||\varphi||_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}||\varphi||_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}||\varphi||_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}c||\nabla\varphi||_{L^2(\Omega)}$

Donc :

$$|\mathcal{L}(\varphi)| \leq ||f+g|| \times max(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}c)||\varphi||_{H_0^1(\Omega)}$$

$$|\mathcal{L}(\varphi)| \leq M||\varphi||_{H_0^1(\Omega)} \qquad \text{donc continue}$$

$a(.,.)$ bilinéaire, continue et coercive et $\mathcal{L}(.)$ est continue donc d'après le théorème de Lax Milgram, il existe une solution unique faible telle que :

$a(u,\varphi) = \mathcal{L}(\varphi) \qquad \forall \varphi \in H$

Montrons que $Y \in D(A)$.

On a $-\Delta u + u = f + g \in L^2(\Omega)$ et comme $f, g \in L^2(\Omega)$ alors $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et $v = u - f \in L^2(\Omega)$

D'où : il existe : $Y \in D(A)$ vérifiant $(\lambda I - A)Y = F$, pour $\lambda > 0$ et $F \in H$

En conclusion, comme A est maximal-dissipatif, alors, A est un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$ semi groupe de contraction :

$$S(t)Y_0 = Y(t) = \mathrm{e}^{tA}Y_0$$

vérifiant le problème de Cauchy : $Y_t(t) = AY(t)$ et $Y(0) = Y_0$

de plus :

$S(t)Y_0 = Y(t) \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, H) \cap \mathcal{C}^0([0, +\infty[, D(A))$

3

Stabilité forte

Dans cette partie on va étudier la stabilité forte du système (2.0.1)

Définition 3.0.1 *Un système d'évolution est dit fortement stable si l'énergie $E(t)$ associée vérifie :*

$$\lim_{t \to 0} E(t) = 0$$

Soit (u, y) une solution régulière de ce système, on définit l'énergie associée par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|u_t|^2 + b|\nabla u|^2 + |y_t|^2 + (|c\nabla u - \nabla y|^2) \right) \mathrm{d}x$$

Lemme 3.0.2 *L'énergie $E(t)$ est dissipative, c.à.d :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) = -\int_\Omega d(x)|u_t|^2\mathrm{d}x < 0$$

Le système est donc dissipatif au sens où E est décroissante.

Preuve 3.0.1 *Multiplions la première équation et la deuxième équation de notre système par $\overline{u}$ et $\overline{y}$ respectivement, faisons une intégration par partie. Pour la partie réelle, on trouve :*

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_\Omega |u_t|^2\mathrm{d}x + a\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\right) - cRe\left(\int_\Omega \nabla y.\nabla\overline{u_t}\mathrm{d}x\right) + \int_\Omega d(x)|u_t|^2\mathrm{d}x = 0 \qquad (3.1)$$

Et :

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_\Omega |y_t|^2\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla y|^2\mathrm{d}x\right) - cRe\left(\int_\Omega \nabla u.\nabla\overline{y_t}\mathrm{d}x\right) = 0 \qquad (3.2)$$

Utilisons le fait que $a = b + c^2$ dans (3.1), On obtient :

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_\Omega |u_t|^2\mathrm{d}x + b\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\right) \\ +c^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x - cRe\left(\int_\Omega \nabla y.\nabla\overline{u_t}\mathrm{d}x\right) \\ +\int_\Omega d(x)|u_t|^2\mathrm{d}x = 0 \qquad (3.3)\end{gathered}$$

(3.2) *et* (3.3) *donnent le résultat demandé.*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) = -\int_\Omega d(x)|u_t|^2\mathrm{d}x < 0$$

Maintenant, on est en mesure de montrer la stabilité forte du système

(2.0.1)

$$\begin{cases} Y_t(t) = AY(t) \\ Y(0) = Y_0 \in H \end{cases}$$

Comme la résolvante de l'opérateur A est compacte, d'après [07], [09] et [15], il suffit de montrer que A n'admet pas de valeurs propres imaginaires.

On suppose qu'il existe une constante $\delta \geq 0$ et un point $x_0 \in \mathbb{R}^N$ telle que : $m(x) = x - x_0$ vérifiant :

$$\begin{cases} (m, \upsilon) \geq \delta & \forall x \in \Gamma_1 \\ (m, \upsilon) \leq 0 & \forall x \in \Gamma_0 \end{cases}$$

Telle que :

$\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, et $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma$

Proposition 3.0.3 *Supposons que d assez petit, Alors l'opérateur A n'admet pas de valeurs propres imaginaires pures.*

Preuve 3.0.2 *Soit* $i\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ *une valeur propre de A,* $U(u, v, y, z) \in D(A)$ *le vecteur propre associe, Alors on a :*

$$AU = i\lambda U \qquad (3.1)$$

de l'équation (3.1) on déduit que :

$$Re(AU, U) = -\int_\Omega \mathrm{d}|v|^2 \mathrm{d}x = Re\{i\lambda ||U||_H^2\} = 0$$

D'où : $v = 0$ *sur* Γ *et on utilise le fait que :* $U \in D(A)$ *on déduit que :*

$u_t = 0 \ sur \ \Gamma$

Écrivons notre équation (3.1) sous la forme détaillée suivante :

$$\begin{cases} v = i\lambda u \qquad sur \ H_0^1(\Omega) \qquad (3.2) \\ a\Delta u - c\Delta y - dv = i\lambda v \qquad sur \ L^2(\Omega) \qquad (3.3) \\ z = i\lambda y \qquad sur \ H_0^1(\Omega) \qquad (3.4) \\ \Delta y - c\Delta u = i\lambda z \qquad sur \ L^2(\Omega) \qquad (3.5) \end{cases}$$

(1)- *si $\lambda = 0$, alors : $v = z = 0$ puis on obtient le système suivant :*

$$\begin{cases} a\Delta u - c\Delta y = 0 \qquad dans \, \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \Delta y - c\Delta u = 0 \qquad dans \, \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} (a - c^2)\Delta u = 0 \qquad dans \, \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = 0 \qquad dans \, \Gamma \times \mathbb{R}^+ \qquad (*) \end{cases}$$

Car : $a - c^2 = b \geq 0$ et on a aussi :

$$\begin{cases} \Delta y = 0 \qquad dans \, \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ y = 0 \qquad dans \, \Gamma \times \mathbb{R}^+ \qquad (**) \end{cases}$$

Il est claire que notre système (*) et (**) admet $u = 0$ et $y = 0$ comme unique solution ce qui contredit l'hypothèse : $U \neq 0$

(2)- *On suppose que : $\lambda \neq 0$*

Utilisons (3.4) on obtient

$$y = 0, \ sur \, \Gamma \qquad (3.6)$$

et en éliminant v et z dans (3.2) , (3.3), (3.4) et (3.5), et, en se servant de (3.6) on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a\Delta u - c\Delta y - d(i\lambda u) = i\lambda(i\lambda u) \qquad sur\, L^2(\Omega) \\ \Delta y - c\Delta u = i\lambda(i\lambda y) \qquad sur\, L^2(\Omega) \\ u = 0 \qquad sur\, \Gamma \\ y = 0 \qquad sur\, \Gamma \end{cases}$$

où encore

$$\begin{cases} a\Delta u - c\Delta y + (\lambda^2 - i\lambda d)u = 0 \qquad sur\, L^2(\Omega) \qquad (3.7) \\ \Delta y - \lambda^2 y - c\Delta u = 0 \qquad sur\, L^2(\Omega) \qquad (3.8) \\ u = 0 \qquad sur\, \Gamma \qquad (3.9) \\ y = 0 \qquad sur\, \Gamma \qquad (3.10) \end{cases}$$

On divise la démonstration sur plusieurs étapes :

***Étape 1** :*

On reécrit le système précedent, on trouve

$$\begin{cases} (a - c^2)\Delta u + (\lambda^2 - i\lambda d)u + c\lambda^2 y = 0 \qquad sur\, L^2(\Omega) \qquad (3.11) \\ (a - c^2)\Delta y - a\lambda^2 y + c(\lambda^2 - i\lambda d)u = 0 \qquad sur\, L^2(\Omega) \qquad (3.12) \\ u = 0 \qquad sur\, \Gamma \\ y = 0 \qquad sur\, \Gamma \end{cases}$$

Multiplions (3.12) par $\bar{u}$, puis après avoir utiliser la formule de Green et les conditions aux bords on obtient :

$$\int_\Omega (a-c^2)\Delta y\bar{u}\mathrm{d}x - a\lambda^2\int_\Omega y\bar{u}\mathrm{d}x \\ + c\lambda^2\int_\Omega |u|^2\mathrm{d}x \\ - ic\lambda\int_\Omega d|u|^2\mathrm{d}x = 0$$

Donc :

$$-a\lambda^2\int_\Omega y\bar{u}\mathrm{d}x + c\lambda^2\int_\Omega |u|^2\mathrm{d}x \\ + ic\lambda\int_\Omega d|u|^2\mathrm{d}x \\ - (a-c^2)\int_\Omega \nabla y\nabla\bar{u}\mathrm{d}x = 0 \qquad (3.13)$$

Multiplions (3.11) par $\bar{y}$, la formule de Green donne :

$$\int_\Omega (a-c^2)\Delta u\bar{y}\mathrm{d}x + c\lambda^2\int_\Omega |y|^2\mathrm{d}x \\ - i\lambda\int_\Omega du\bar{y}\mathrm{d}x \\ - (a-c^2)\int_\Omega \nabla u\nabla\bar{y}\mathrm{d}x = 0 \qquad (3.14)$$

En additionnant les parties imaginaires de (3.13) et (3.14) on obtient :

$$c\lambda\int_\Omega d|u|^2\mathrm{d}x = \lambda\int_\Omega du\bar{y}\mathrm{d}x$$

C'est-à-dire :

$$\int_\Omega c|u|^2\mathrm{d}x = \int_\Omega u\bar{y}\mathrm{d}x \qquad (3.15)$$

***Étape 2** :*

Multiplions (3.12) par $\bar{y}$ on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega (a-c^2)\Delta y\bar{y}\mathrm{d}x - a\lambda^2 \int_\Omega |y|^2\mathrm{d}x \\ + c\lambda^2 \int_\Omega u\bar{y}\mathrm{d}x \\ - i\lambda \int_\Omega du\bar{y}\mathrm{d}x = 0\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}-a\lambda^2 \int_\Omega |y|^2\mathrm{d}x - (a-c^2)\int_\Omega |\nabla y|^2\mathrm{d}x \\ + \int_\Omega c^2\lambda^2|u|^2\mathrm{d}x \\ = Re\{i\int_\Omega \lambda du\bar{y}\mathrm{d}x\} \qquad (3.16)\end{aligned}$$

Étape 3 *:*

Multiplions (3.12) par $2(m\nabla\bar{y})$ on obtient :

$$\begin{aligned}2\int_\Omega (a-c^2)(m\nabla\bar{y})\Delta y\mathrm{d}x - a\lambda^2 \int_\Omega 2(m\nabla\bar{y})y\mathrm{d}x \\ + 2c\lambda^2 \int_\Omega (m\nabla\bar{y})u\mathrm{d}x \\ - 2ci\lambda \int_\Omega (m\nabla\bar{y})du\mathrm{d}x = 0 \qquad (3.17)\end{aligned}$$

La régularité de $(u,v,y,z)\in D(A)$ est suffisante pour effectuer des intégrations dans la première intégrale de l'équation (3.17) :

Alors :

$$2\int_\Omega (a-c^2)(m\nabla\bar{y})\Delta y\mathrm{d}x = -2(a-c^2)\int_\Omega \nabla y\nabla(m\nabla\bar{y})\mathrm{d}x + 2\int_\Gamma \partial_v y(m\nabla\bar{y})\mathrm{d}\Gamma$$

La deuxième intégrale à droite de l'équation est nul donc :

$$-2Re\{(a-c^2)\int_\Omega \nabla y \nabla(m\nabla\bar{y})\mathrm{d}x\} = (N-2)(a-c^2)\int_\Omega |\nabla y|^2\mathrm{d}x \tag{3.18}$$

Injectons (3.18) dans (3.17), on obtient :

$$\begin{aligned}2Re\{i\lambda c\int_\Omega du(m\nabla\bar{y})\mathrm{d}x &= 2(a-c^2)Re\{\int_\Omega \Delta y(m\nabla\bar{y})\mathrm{d}x\}\\ &- 2a\lambda^2 Re\{\int_\Omega y(m\nabla\bar{y})\mathrm{d}x\}\\ &+ 2c\lambda^2 Re\{\int_\Omega u(m\nabla\bar{y})\mathrm{d}x\}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}2Re\{i\lambda c\int_\Omega du(m\nabla\bar{y})\mathrm{d}x &= (2-N)(a-c^2)\int_\Omega |\nabla y|^2\mathrm{d}x\\ &- a\lambda^2 N\int_\Omega |y|^2\mathrm{d}x\\ &+ c\lambda^2 N\int_\Omega |u|^2\mathrm{d}x \qquad (3.19)\end{aligned}$$

Multiplions maintenant (3.16) par $(1-N)$ *on trouve :*

$$\begin{aligned}(1-N)Re\{i\int_\Omega \lambda du\bar{y}\mathrm{d}x &= -(1-N)(a-c^2)\int_\Omega |\nabla y|^2\mathrm{d}x\\ &- (1-N)a\lambda^2\int_\Omega |y|^2\mathrm{d}x\\ &+ (1-N)c^2\lambda^2\int_\Omega |u|^2\mathrm{d}x \qquad (3.20)\end{aligned}$$

Combinons (3.19) et (3.20) :

$$\begin{aligned} Re\{i\lambda \int_\Omega [2cdu(m\nabla\bar{y}) + du\bar{y}(1-N)]\mathrm{d}x = (a-c^2)\int_\Omega |\nabla y|^2\mathrm{d}x \\ - a\lambda^2 \int_\Omega |y|^2\mathrm{d}x \\ + (1-N)c^2\lambda^2 \int_\Omega |u|^2\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Calculons maintenant la deuxième partie à droite de l'équation avec l'utilisation de la règle de Poincaré et (3.15) :

$$a\lambda^2 \int_\Omega |y|^2\mathrm{d}x \leq R(a-c^2)\int_\Omega |y|^2\mathrm{d}x + (N-1)\lambda^2 \int_\Omega |y|^2\mathrm{d}x$$

Comme

$$||y||^2_{H^1_0(\Omega)} \leq R||\nabla y||^2_{H^1_0(\Omega)} \; et \; R > 0$$

et

$$\int_\Omega c|u|^2\mathrm{d}x = \int_\Omega u\bar{y}\mathrm{d}x$$

Alors

$$\int_\Omega |y|^2\mathrm{d}x \leq \left[\frac{R(a-c^2)}{a\lambda^2} + \frac{(N-1)}{a}\right]\int_\Omega |y|^2\mathrm{d}x$$

D'où :

$$\int_\Omega |y|^2\mathrm{d}x = 0 \qquad (3.21)$$

Donc après avoir combiner (3.21) et (3.16) on obtient :

$u = 0$ *puis de (3.2) et (3.4) :* $v = z = 0$, *Soit donc :*

$U = 0$, *On obtient ainsi une contradiction et la démonstration est finie.*

Enfin l'opérateur A n'admet pas de valeurs propres imaginaires pures

Soit alors pour toutes données initiales $U_0 \in H$ *l'énergie* $E(t)$ *du système (2.0.1) décroit vers zéro :*

$$lim_{t\to+\infty} E(t) = 0$$

4

Contrôlabilité exacte frontière du système multidimensionnel de l'équation des ondes

Soit Ω un domaine borné non vide de $\mathbb{R}^N$de frontière régulière Γ de classe C^2.J-L-Lions,(voir,[11]).

Soit $T > 0$ un temps positif donné, nous considérons le système d'équation des ondes couplées suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - a\Delta u + c\Delta y + d(x)u_t = 0 \ , dans \ \ \Omega\times]0,T[\\ y_{tt} - \Delta y + c\Delta u = 0 \quad dans \ \ \Omega\times]0,T[\\ u = y = 0 \quad sur \ \ \Gamma\times]0,T[\\ u = y = v \quad sur \ \ \Gamma_1\times]0,T[\\ u(x;0) = u_0(x); \ \ y(x;0) = y_0(x); \ \ u_t(x;0) = u_1(x); \ \ y_t(x;0) = y_1(x) \end{cases} \tag{4.0.1}$$

avec :

$$u = \ u(x;t) \ \ et \ \ \ y = \ y(x;t)$$

$$a \geq 0, \qquad c \in \mathbb{R}^* \ \ telle \ \ que \ \ a \geq c^2 \ \ et \ \ d \in L^2(\Omega)$$

lorsque

$$a \geq c^2 \ \ alors, \ \ \exists b \geq 0 \ \ telle \ \ que \ \ a = b + c^2$$

la fonction v désigne le contrôle du système

4.1 Méthode HUM pour la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes

La méthode HUM (méthode d'unicité de Hilbert), développée par J.L.Lions [11] permet d'étudier la contrôlabilité des solutions d'équations aux dérivées partielles. cette méthode consiste à prouver un théorème d'unicité, en utilisant une majoration de l'énergie qui nous permet de construire des espaces de données pour lesquelles il existe un contrôle permettant de ramener la solution du système à l'état d'équilibre.

Le problème : Étant donné un temps $T > 0$, pour des données initiales u_0, y_0, u_t, y_t dans un espace de Hilbert convenable, on cherche **un contrôle** v, telle que la solution (u, y) du système (2.0.1) vérifie :

$$(u, y)(T) = (u_t, y_t)(T) = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega$$

C'est-à-dire trouver un contrôle v qui ramène le système à l'état d'équilibre $(0, 0)$ à l'instant T.

Ce type de problème est appelé problème de **contrôlabilité exacte interne** puisque l'action du contrôle v est exercée dans une partie de $\Omega\times]0, T[$

Il est bien connu que l'équation des ondes modélise de nombreux phénomènes physiques comme les petites vibrations des corps élastiques et la propagation du son.

Dans ([09])et ([11]), Alabau et Lions, ont étudié l'observabilité indirecte d'un système d'équations des ondes faiblement couplées, par une méthode de multiplicateurs, l'auteur a montrer que pour un temps T assez grand, l'observation de la dérivée normal $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ sur le bord Γ_1 permet de restituer une énergie affaiblie de la donnée initial.

Ammar Khodja et Bader (voir[02]), ont étudié les problèmes de stabilité d'un système de deux équations des ondes mono dimensionnel sous l'effet d'un seul contrôle interne, ils ont démontré que le contrôle interne qui agit seulement sur une des équations ne donne pas la stabilité exponentielle si les vitesses de propagation sont différentes.

Dans ce chapitre, nous étudions la contrôlabilité exacte du système (2.0.1). nous considérons le problème homogène associé à (2.0.1) et nous montrons que ce dernier a une solution unique.

Puis, par une méthode de multiplicateurs adaptée, on montre les inégalités d'observabilités suivantes :

$$E(0) \leq c_1 \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\frac{\partial \psi}{\partial \nu}|^2 \mathrm{d}\Gamma \mathrm{d}t \qquad \forall T > M \tag{4.1}$$

$$E(0) \geq c_2 \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\frac{\partial \psi}{\partial \nu}|^2 \mathrm{d}\Gamma \mathrm{d}t \qquad \forall T > M \tag{4.2}$$

Où c_1, c_2 sont des constantes positives et

$$\Phi(x,t) = (\varphi(x,t), \psi(x,t), \xi(x,t), \varrho(x,t))$$

est l'état du système homogène associé à (2.0.1).

Enfin, pour un temps $T > 0$ assez grand et des données initiales u_0, u_1, y_0, y_1 convenables, nous montrons qu'il existe un contrôle v telle que la solution du système (2.0.1) satisfait la condition :

$$u(T,v) = u_t(T,v) = y(T,v) = y_t(T,v) = 0 \tag{4.3}$$

Autrement dit, il s'agit d'étudier l'existence d'un contrôle v qui ramène le système a l'état d'équilibre au temps T_0.

Système homogène :

Dans cette partie on considère le système homogène associe à (2.0.1)

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - a\Delta\varphi + c\Delta\psi + d(x)\varphi_t = 0 \qquad \text{dans} \qquad \Omega \times \mathbb{R}^+ \qquad (4.4) \\ \psi_{tt} - \Delta\psi + c\Delta\varphi = 0 \qquad \text{dans} \qquad \Omega \times \mathbb{R}^+ \qquad (4.5) \\ \varphi = \psi = 0 \qquad \text{sur} \qquad \Gamma \times \mathbb{R}^+ \qquad (4.6) \end{cases} \tag{4.1.1}$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$\varphi(x,0)=\varphi_0(x), \qquad \varphi_t(x,0)=\varphi_1(x)$$

$$\psi(x,0)=\psi_0(x), \qquad \psi_t(x,0)=\psi_1(x), \qquad x\in\Omega \qquad (4.7)$$

Soit (φ,ψ) une solution régulière du système (4.4), (4.7) on défini l'énergie associe par :

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(|\varphi_t|^2+b|\nabla\varphi|^2+|\psi_t|^2+(|c\nabla\varphi-\nabla\psi|^2)\right)\mathrm{d}x \qquad (4.8)$$

On va formuler le problème (4.4), (4.7) dans un espace de Hilbert, pour cela on défini l'espace de l'énergie comme suit :

$$H=(H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega))^2 \qquad (4.9)$$

muni du produit scalaire suivant :

$$\begin{cases}(\Phi.\tilde{\Phi})_H=\int_\Omega\left(b\nabla\varphi.\nabla\tilde{\varphi}+\xi\tilde{\xi}+(c\nabla\varphi-\nabla\psi)(c\nabla\tilde{\varphi}-\nabla\tilde{\psi})+\varrho\tilde{\varrho}\right)\mathrm{d}x\\ \Phi=(\varphi,\xi,\psi,\varrho), \qquad \tilde{\Phi}=(\tilde{\varphi},\tilde{\xi},\tilde{\psi},\tilde{\varrho})\in H \qquad (4.10)\end{cases}$$

Pour donner un sens convenable au système (4.4), (4.7), on défini l'opérateur A par :

$$D(A)=\Phi=(\varphi,\xi,\psi,\varrho)\in H,\ \varphi,\psi\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),\ \text{et}\ \xi,\varrho\in H_0^1(\Omega) \qquad (4.11)$$

$$A\Phi=(\xi,a\Delta\varphi-d\xi-c\Delta\psi,\varrho,\Delta\psi-c\Delta\varphi), \qquad \forall\Phi=(\varphi,\xi,\psi,\varrho)\in D(A) \qquad (4.12)$$

Le système (4.4), (4.7) sous forme d'une équation abstraite du premier ordre s'écrit :

$$\begin{cases} \Phi_t = A\Phi \\ \Phi(0) = \Phi_0 \in H \qquad (4.13) \end{cases}$$

Où :

$$\Phi(x,t) = (\varphi(x,t), \varphi_t(x,t), \psi(x,t), \psi_t(x,t))$$

est l'état du système (4.4),(4.7)

Proposition 4.1.1 *L'opérateur A défini dans (4.11),(4.12) est m-dissipatif dans l'espace d'énergie H.*

Preuve 4.1.1 *Soit* $\Phi \in D(A)$ *en utilisant (4.12) on obtient :*

$$(A\Phi.\Phi)_H = 0$$

il reste à démontrer que : $R(I-A) = H$ *pour cela, soit* $f = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in H$ *et on doit chercher :*

$$\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) \in D(A) \qquad \textit{telle que} : \Phi - A\Phi = f$$

Alors on a le problème suivant :

$$\begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 = f_1 \qquad (4.14) \\ -a\Delta\varphi_1 + \varphi_2 + d\varphi_2 + c\Delta\varphi_3 = f_2 \qquad (4.15) \\ \varphi_3 - \varphi_4 = f_3 \qquad (4.16) \\ c\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_3 + \varphi_4 = f_4 \qquad (4.17) \end{cases}$$

en éliminant φ_2 *et* φ_4 *on obtient le système suivant :*

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1 + \varphi_1 = f_1 + f_2 & (4.18) \\ -\Delta\varphi_3 + \varphi_3 = f_3 + f_4 & (4.19) \end{cases}$$

Soit $(\theta_1, \theta_2) \in (H_0^1(\Omega))^2$ *une fonction test, en multipliant (4.18) par* θ_1 *et (4.19) par* θ_2 *et en utilisant la formule de Green dans les équations obtenues, on trouve :*

$$\int_\Omega (\varphi_1\theta_1 + \nabla\varphi_1\nabla\theta_1 + \varphi_3\theta_2 + \nabla\varphi_3\nabla\theta_2)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega ((f_1 + f_2)\theta_1 + (f_3 + f_4)\theta_2)\,\mathrm{d}x$$

On défini la forme bilinéaire a par :

$$a((\varphi_1, \varphi_3); (\theta_1, \theta_2)) = \int_\Omega (\varphi_1\theta_1 + \nabla\varphi_1\nabla\theta_1 + \varphi_3\theta_2 + \nabla\varphi_3\nabla\theta_2)\,\mathrm{d}x = \qquad (4.20)$$

et la forme linéaire L par :

$$L(\theta_1, \theta_2) = \int_\Omega ((f_1 + f_2)\theta_1 + (f_3 + f_4)\theta_2)\,\mathrm{d}x \qquad (4.21)$$

Par un calcul simple on démontre que a est continue, coercive sur $(H_0^1(\Omega))^2$ *et L est continue sur* $H_0^1(\Omega)$*. D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe* $(\varphi_1, \varphi_2) \in (H_0^1(\Omega))^2$ *tel que :*

$$a((\varphi_1, \varphi_3); (\theta_1, \theta_2)) = L(\theta_1, \theta_2) \qquad \forall(\theta_1, \theta_2) \in (H_0^1(\Omega))^2 \qquad (4.22)$$

En particulier, si $(\theta_1, \theta_2) \in (D(\Omega))^2$*, l'équation :*

$$a((\varphi_1, \varphi_3); (\theta_1, \theta_2)) = L(\theta_1, \theta_2) \qquad \forall(\theta_1, \theta_2) \in (D(\Omega))^2 \qquad (4.23)$$

admet une solution (φ_1, φ_3). *Enfin, en utilisant (4.18) et (4.19)on obient*

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) \in D(A)$$

Théorème 4.1.2 ***Existence et unicité***

i- Soit $\Phi_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in D(A)$*, alors le système (4.13) admet une solution* $\Phi(t)$ *satisfait :*

$$\Phi(t) \in C^0(\mathbb{R}^+; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H)$$

ii- Soit $\Phi_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in H$*, le système (4.13) admet une solution faible* $\Phi(t)$ *satisfait :*

$$\Phi(t) \in C^0(\mathbb{R}^+; H)$$

De plus on a :

$$||\Phi_0||_H^2 = ||\Phi(t)||_H^2, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Preuve 4.1.2 *(1) soit*$\Phi_0 \in D(A)$*, alors d'après le théorème de Hille-Yosida, le problème (4.13) admet une solution* $\Phi = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)$ *telle que*

$$\Phi \in C^0(\mathbb{R}^+; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H)$$

(2) Soit $\Phi_0 \in H$*,alors d'après le théorème de Hille-Yosida le problème (4.13) admet une solution unique faible* $\Phi = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)$ *telle que :*

$$\varphi(t), \psi(t) \in C^0(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)), \ \varphi_t(t), \psi_t(t) \in C^0(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$$

Ceci achève la démonstration.

Conclusion générale

Dans ce travail, on a démontré l'existence et l'unicité de la solution d'un problème d'évolution sous l'action d'un contrôleur dynamique.
On a réussi ensuite à prouvé que notre système est fortement stable, et enfin en utilisant une technique multiplicateurs on a montré que notre système est contrôlable sans aucune restriction sur la vitesse de propagation des ondes (c'est à dire si les deux équations d'ondes se propagent à la même vitesse ou non)

Bibliographie

[01] A.Haraux. Une remarque sur la stabilisation de certains systèmes du deuxième ordre en temps, Portugaliae mathematica, 46(3) :245-258,1989

[02]AMMAR-Khodja ;Bader,stability of systems of one dimensional wave équation by tnternal or boundary control force ,SIAM.J optim vol 39 N°06 (2001).

[03]A.Wehbe ;W.Youssef,observabilité contrôlabilité exacte interne indirectes d'un système hyperbolique faiblement couplée,CR-ACAD,Sci paris,ser I 348 (2010).

[04] Cours d'analyse fonctionnels,Institut de mathématique de Marseille site :www.i2m.univ-amu.fr

[05] Cours Espaces de Sobolev,master analyse mathématique,Mme SEBA Djamila

[06] Cours semi groupe, master 2 analyse mathématique, madame Laoubi Karima

[07] F. Abdallah, S. Nicaise, J. Valein and A. Wehbe, Stability results for the approximation of weakly coupled wave equations, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 350 (2012), no. 1-2, pp.29-34.

[08] F. Abdallah, S. Nicaise, J. Valein and A. Wehbe, Uniformly exponentially or polynomially stable approximations for second order evolution equations

and some applications, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 19 (2013), no. 3, pp. 844 ?887.

[09] F.Alabou,P.Cannarsa and V.Komornik, Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equation, J.Evol.Equ. 2,127150(2002).

[10] Imen Ellouze. Etude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes à retard et des systèmes impulsifs. Optimisation et contrôle [math.OC]. Université Paul Verlaine-Metz ; Université de Sfax, 2010. Français. NNT : 2010METZ038S. tel-01749052.

[11] J.L.Lions. Contrôlabilité exacte ,perturbation et stabilisation de système distribués,Tome 2,volume 9,de recherches en mathématique appliquées [Research in applied Mathematics],Masson,Paris, 1988,Perturbations,[Perturbations].

[12] K. LAOUBI. Contrôle et stabilisation dynamique d'un problème hyperbolique. Thèse de Doctorat.

[13] Marie thèse Lacroix-Sonrier, Espace de Sobolev.

[14] Mémoire Master Academique, Équations différentielles à retard et semi-groupes associés.

[15] Module Eléments finis et Applications-Master Analyse Mathématiques madame Laoubi Karima.

[16] Opérateurs non Bornés et Théorie Spectrale-Master Analyse Mathématiques, madame Laoubi Karima.

[17] P.A Raviat et J.M.Thomas, Introduction a l'analyse numérique des équation aux dérivées partielles, Masson, 1988.

[18] *Perturbations of positive Semigroups with Applications* : Jacek BENASIAK,School of mathematical Sciences,University of Kwazulu-Natal,South Africa ;and Luisa ARLOTTI,University of Udine,Italy.

[19] Polynomial stability for wave equations with Wentzell boundary conditions, Article in Journal of Nonlinear and Convex Analysis · January 2017.

[20] S. LUBKIN, C0-Semi groups and applications, Elsevier Science B. V. 2003.

[21] Thèse master analyse mathématique,Monsieur BARRY Kalifa Lassana

[22] Théorie spectrale, Stéphane Maingot David Manceau.