

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA BOUMERDES



Faculté de Technologie

Département Génie Mécanique

Mémoire de Master

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

**Analyse du comportement en flexion et vibration des
plaques composites stratifiées**

Réalisé par :

BENZEKKOUR Abderahmane

LAABANI Ibrahim

Promoteur : Mr. AGUIB Salah

Co-Promoteur : Mr. MELOUSSI Mounir

Année Universitaire : 2023/2024

Dédicace

AU NOM D'ALLAH

*TOUT d'abord Je dédie ce modeste travail accompagné d'un profond
amour à
famille qui m'a doté d'une éducation digne, aucune dédicace ne saurait
exprimer mon respect,
ma considération pour les sacrifices que vous avez consentis pour mon
bien être*

*Particulièrement à ma chère Maman qui m'a arrosé d'espoir à cette
guerrière qui m'a bénie
par ces prières. A mon cher Papa qui m'a soutenu et m'a dirigé vers le
chemin de la réussite.*

Que dieu vous garde pour moi.

*À mes sœurs et mes frères qui m'ont soutenu, donnent toujours de la
force qui ont toujours été là pour moi dans les bons comme dans les
pires.*

*À mes fidèles amies, A tous mes amis de promotion 2024 de la
spécialité Construction Mécanique grâce à vous j'ai passée des
moments inoubliables que je porterai à jamais dans mon cœur.*

A tous ceux qui m'aime.

Dédicaces

C'est avec profonde gratitude et sincère mots, que nous dédions ce modeste travail de fin d'étude à mes chers parents :

Vous êtes La raison pour laquelle je suis ici aujourd'hui, et que j'ai atteint ce point, et que me tiens devant vous avec fierté est due à vous, après dieu.

Merci beaucoup pour votre confiance en moi.

Vous êtes mon soutien dans ce monde et ma force après dieu.

Vous êtes le cadeau que dieu m'a donnée, et que je souhaite qu'il sauvera pour moi et prolongera votre vie.

Je souhaite que dieu me permettra de vous rendre votre bonté, même si c'est un peu, et me permettra d'être à la hauteur de vos attentes

Nous dédions aussi ce travail à mes frères Zaki, Abderaaouf,

Et mes petites sœurs serine et Lydia vous êtes ma force, mes amis sans excipient, tout nous professeur qui nous enseigner et à tous ceux qui nous sent chers.

REMERCIEMENTS

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

En premier lieu, je souhaite remercier chaleureusement mon promoteur, Mr. Salah AGUIB pour son soutien constant, ses précieux conseils, son expertise et ses encouragements et sa patience ont été essentiels à la réussite de ce travail.

Je remercie également mes professeurs et le personnel de l'Université M'Hamed Bougara Boumerdès, dont les enseignements et les ressources ont été d'une grande aide tout au long de mon parcours universitaire.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à mes collègues et amis pour leurs encouragements et leur soutien moral. Vos discussions et vos critiques constructives ont grandement enrichi ce travail.

Un grand merci à ma famille, pour leur amour inconditionnel, leur soutien financier et moral, et leur confiance en moi. Leur présence a été une source constante de motivation.

Enfin, je n'oublie pas tous les participants à mon travail, sans qui ce mémoire n'aurait pas pu voir le jour. Merci pour le temps et la précieuse contribution.

Merci infiniment à toutes et à tous.

الملخص:

تقدم هذه الدراسة السلوك الميكانيكي للانحناء والاهتزاز لصفحة مصنوعة من مادة مركبة ذات الياف موجهة. لتحسين قوة الانحناء للوحة، يتم توجيه ألياف الكربون على النحو التالي $0/90/0/90$ لكل طبقة. تم تطوير نموذج تحليلي لتحديد أوضاع التشوه وتردداتها الطبيعية. ومن أجل التحقق من النتائج التي تم الحصول عليها باستخدام النموذج التحليلي ومقارنتها، تم إجراء التحليل باستخدام طريقة العناصر المحدودة باستعمال تطبيق برنامج أباكوس (logiciel Abaqus). النتائج التي تم الحصول عليها بالطريقتين تم مناقشتها مع وجود خطأ مقبول. يمكن لهذه المواد المركبة ذات الياف موجهة أن تفتح فرصًا جديدة في مجالات مختلفة مثل الطيران، الفضاء، الهندسة الميكانيكية والهندسة المدنية.

كلمات المفتاحية: المواد المركبة، صفحة، الانحناء، الاهتزاز.

Résumé :

Cette étude présente le comportement mécanique en flexion et vibratoire d'une plaque en matériau composite stratifié. Afin d'améliorer la résistance en flexion de la plaque, les fibres de carbone sont orientées à $0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / 90^\circ$ par couche. Un développement analytique a été réalisé pour déterminer les modes de déformation et leurs fréquences naturelles. Afin de vérifier et de confronter les résultats obtenus par l'approche analytique, une analyse à l'aide de la méthode des éléments finis sous le code de calcul Abaqus a été faite. Les résultats obtenus par les deux méthodes sont discutés et confortés avec une erreur admissible. Ces structures en matériau composite stratifié pourraient ouvrir de nouvelles opportunités dans différents domaines aéronautique, aérospatial, génie mécanique et génie civil.

Mots clés : Matériaux composites, Plaques, Flexion, Vibration.

Abstract :

This study presents the mechanical behavior in bending and vibration of a plate made of laminated composite material. To improve the bending strength of the plate, the carbon fibers are oriented at $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$ per layer. Analytical development was carried out to determine the deformation modes and their natural frequencies. In order to verify and compare the results obtained by the analytical approach, an analysis using finite element method using Abaqus software was carried out. The results obtained by the two methods are discussed and confirmed with an acceptable error. These laminated composite material structures could open up new opportunities in different fields of aeronautics, aerospace, mechanical engineering and civil engineering.

Keywords: Composite materials, Plates, Bending, Vibration.

TABLE DES MATIERES

Dédicace	i
Dédicace	ii
Remerciements	iii
ملخص	iv
Résumé	v
Abstract	vi
Table des matières	vii
Liste des tableaux	xi
Liste des figures	xiv

Introduction générale 1

Chapitre I : Généralités sur les matériaux et structures composites 2

I.1.	Introduction	3
I.2.	Définition des matériaux composites	3
I.3.	Avantage des matériaux composites	3
I.4.	Les constituants du matériau composite	3
I.4.1.	Les renforts	4
I.4.2.	Principaux renforts	4
I.4.2.1.	Fibres de verre	4
I.4.2.1.1.	Avantages de la fibre de verre	5
I.4.2.1.2.	Inconvénients de la fibre de verre	5
I.4.2.2.	Fibres de carbone	5
I.4.2.2.1.	Avantages de la fibre de carbone	5
I.4.2.2.2.	Inconvénients de la fibre de carbone	6
I.4.2.3.	Fibres d'aramide	6
I.4.2.3.1.	Avantages de la fibre d'aramide	7
I.4.2.3.2.	Inconvénient de la fibre d'Aramide	7
I.4.2.4.	Fibres de céramiques	8
I.4.3.	La disposition géométrique des fibres	8
I.4.3.1.	Les Mats	8
I.4.3.2.	Tissées	8
I.4.3.3.	Les matrices	9
I.4.3.3.1.	Les matrices organiques	9
I.4.3.3.2.	Les matrices thermodurcissables	9
I.4.3.3.3.	Les matrices thermoplastiques	10
I.4.4.	Les stratifiés à base de tissus unidirectionnels	11
I.4.5.	Les sandwichs	11
I.5.	Mise en œuvre des matériaux composites	12
I.6.	Moulage à Basse pression	13
I.6.1.	Moulage au contact	13
I.6.1.1.	Avantages	13
I.6.1.2.	Inconvénient	13
I.6.2.	Moulage par projection simultanée	14
I.6.2.1.	Avantages	14
I.6.2.2.	Inconvénient	14
I.6.3.	Moulage par injection de mélange (résine-renfort)	14
I.6.4.	Moulage par pultrusion	15
I.6.5.	Moulage par centrifugation	15

I.6.5.1.	Avantages	16
I.6.5.2.	Inconvénient	16
I.6.6.	Moulage par enroulement filamenteux (ou bobinage)	16
I.7.	Domaine d'application des matériaux composites	17
I.7.1.	Secteur aéronautique	17
I.7.2.	Secteur Spatial	17
I.7.3.	Les composites dans l'industrie automobile	18
I.7.4.	Matériaux composites anticorrosion dans l'industrie	18
I.7.5.	Secteur des travaux publics et bâtiments	18
I.7.6.	Secteur médical	19
I.7.7.	Secteur de l'énergie renouvelable	19
I.7.8.	Secteur du sport	19
I.7.9.	Secteur d'électricité et d'électronique	19
I.8.	Conclusion	20
Chapitre II: Caractéristiques et caractérisation mécanique des matériaux composites		21
II.1.	Introduction	22
II.2.	Les caractéristiques du mélange renfort-matrice	22
II.2.1.	La teneur en masse de renfort	22
II.2.2.	La teneur en volume de renfort	22
II.2.3.	La masse volumique	23
II.2.4.	Coefficient de poisson	23
II.2.5.	Épaisseur du pli unidirectionnel (UD)	23
II.2.6.	Modules d'élasticité du pli unidirectionnel	23
II.2.6.1.	Module d'élasticité dans le sens des fibres	23
II.2.6.2.	Module d'élasticité dans le sens travers des fibres	24
II.2.6.3.	Module de glissement	24
II.2.6.4.	Module d'élasticité dans une direction quelconque	24
II.2.7.	Résistance à la rupture d'un pli unidirectionnel	25
II.2.8.	Résistance à la rupture d'un pli UD dans une direction quelconque	25
II.2.9.	Les coefficients de dilatation thermique	25
II.2.10.	Facteur de concentration de contraintes	25
II.2.11.	Modules d'élasticité et coefficient de poisson du pli tissé	26
II.2.12.	Modules d'élasticité et coefficient de poisson du pli chargé avec des mats	27
II.3.	Description de l'arrangement des fibres dans la matrice	27
II.4.	Notions classiques de la mécanique des milieux continus	28
II.4.1.	Etat de contraintes en un point	29
II.4.2.	Etat de déformation en un point	29
II.4.3.	Milieu élastique linéaire	29
II.4.4.	Milieu homogène	29
II.4.5.	Nombre de coefficients	29
II.4.6.	Matériau isotrope	30
II.4.7.	Matériau orthotrope	31
II.4.8.	Matériau quasi isotrope	32
II.4.9.	Matériau isotrope transverse	32
II.4.10.	Matrices de rigidité et de souplesse	33
II.3.11.	Constantes de rigidité et de souplesse en fonction des modules d'élasticité	34
II.5.12.	Comportement mécanique du pli unidirectionnel (UD)	35

II.5.1.	Le comportement mécanique dans les directions d'orthotrope	35
II.5.2.	Le comportement mécanique dans une direction quelconque	35
II.5.2.1.	Comportement et coefficients de souplesse	35
II.5.2.2.	Comportement et coefficients de raideur	36
II.6.	Conclusion	37
<i>Chapitre III : Analyse du comportement en flexion et vibratoire des plaques composites stratifiées</i>		38
III.1.	Introduction	39
III.2.	Flexion d'une plaque stratifiée composite	39
III.3.	Théorie des stratifié	39
III.3.	Vibrations d'une plaque stratifiée composite	44
III.4.	Application numérique	49
III.5.	Conclusion	51
<i>Chapitre IV : Simulation numérique du comportement des plaques composites stratifiées</i>		52
IV.1.	Introduction	53
IV.2.	Analyse numérique par éléments finis	53
IV.3.	Modèle géométrique de la plaque	54
IV.4.	Simulation numérique par MEF	55
IV.5.	Comparaison des résultats et discussions	57
IV.6.	Conclusion	59
	Conclusion générale	60
	Références bibliographiques	61

Liste des tableaux

Tableau I.1	Caractéristiques en traction des fibres de verre	5
Tableau I.2	Caractéristiques des fibres de carbone	6
Tableau I.3	Caractéristiques des fibres d'aramides	7
Tableau I.4	Caractéristiques des matrices thermodurcissables	10
Tableau I.5	Caractéristiques des matrices thermoplastiques	11
Tableau II.1	Les modules d'élasticité et coefficient de poisson des fibres	24
Tableau III.1	Propriétés du tissu NCF de carbone et de résine époxy	49
Tableau III.2	Fréquence naturelle en Hz	49
Tableau IV.1	Présente les propriétés mécaniques du composite Carbone-Epoxy	56
Tableau IV.2	Comparaison des fréquences naturelles	57

Liste des figures

Figure I.1	Différents types de renforts	4
Figure I.2	Bobine de fibre de verre	5
Figure I.3	Bobine de fibre carbone	6
Figure I.4	Bobine de fibre d'aramide	7
Figure I.5	Différents tissus. A) Tissu de fibre de carbone, B) Tissu taffetas de verre, C) Tissu mat de verre	8
Figure I.6	Différents types de matrices	9
Figure I.7	Constitution d'un stratifié	11
Figure I.8	Nid d'abeilles	12
Figure I.9	Matériaux sandwichs à âmes pleines	12
Figure I.10	Matériaux sandwichs à âmes creuses	12
Figure I.11	Principe du moulage au contact	13
Figure I.12	Principe du moulage par projection simultanée (Source Okeanos-France Fabrication d'une piscine)	14
Figure I.13	Principe du moulage par injection de mélange (résine-renfort)	15
Figure I.14	Principe de moulage par pultrusion	15
Figure I.15	Principe de fabrication d'un tuyau par centrifugation	16
Figure I.16	Principe du moulage par enroulement filamentaire (source site CNES)	17
Figure I.17	Répartition des secteurs d'application des matériaux composites	20
Figure II.1	Pli unidirectionnel à direction quelconque	25
Figure II.2	Concentration des contraintes dans une plaque trouée	26
Figure II.3	Des coupes transversales des composites unidirectionnels	27
Figure II.4	Arrangement carré et cellule élémentaire	28
Figure II.5	Arrangement hexagonal et cellule élémentaire	28
Figure II.6	Référence du pli	35
Figure III.1	Plaque stratifiée composite en flexion	39
Figure III.2	Variation des fréquences naturelles en fonction des modes de vibration	50
Figure III.3	Visualisation des premiers modes de vibration de la plaque	50
Figure IV.1	Modèle global d'analyse vibratoire par la méthode des éléments finis	53
Figure IV.2	Simulation numérique par éléments finis Abaqus	54
Figure IV.3	Modèle géométrique de la plaque sans maillage	55
Figure IV.4	Modèle géométrique de la plaque avec maillage - Élément hexaédrique à 8 nœuds (C3D8R)	55
Figure IV.5	Différents modes de déformation	56
Figure IV.6	Comparaison des fréquences naturelles en fonction des modes trouvées par l'approche analytique et la méthode des éléments finis	57
Figure IV.7	Les six premiers modes de vibration de la plaque avec leurs fréquences associées	59

Introduction générale

Afin de préserver les structures mécaniques contre la fatigue et rupture, il est indispensable de caractériser et ensuite de contrôler leur comportement vibratoire l'une des causes de rupture est la fatigue structurale due aux ondes vibratoires ou acoustiques et l'ampleur des amplitudes en réponse à une excitation forcée déterministe ou aléatoire. L'étude ou l'analyse des vibrations n'est pas une science récente pourtant elle connaît depuis quelques années un regain d'intérêt pour les besoins de conception et dimensionnement des structures répondant aux meilleures conditions de fonctionnement de sécurité, d'esthétique et d'isolation acoustique. Face à ces exigences les matériaux composites en structures stratifiées montrent une solution idéale grâce à leur multifonctionnalité intégrée. On s'y intéresse fortement dans les nombreux secteurs industriels tels que l'aéronautique, l'aérospatial, la construction navale, la construction automobile, le génie civil, le génie nucléaire et bien d'autres. Pour réduire et contrôler l'amplitude des vibrations, ce travail constitue une contribution à l'étude du comportement en flexion et vibratoire des structures composites. Les structures composites constituent des atouts majeurs dans le domaine industriel. Leurs propriétés mécaniques spécifiques en termes de rigidité et légèreté, permettant plusieurs certaines de pour cent de déformation élastique, et de viscoélasticité linéaire assurant la capacité à amortir les vibrations, justifient leur utilisation dans plusieurs applications industrielles. Le domaine d'étude des plaques composites est un sujet multidisciplinaire dans lequel l'intervention des différentes branches scientifiques est nécessaire pour contribuer à une maîtrise du sujet.

Ce travail de mémoire a pour objectif de proposer un développement analytique, ce développement analytique est complété par une simulation numérique.

Ce mémoire est constitué de quatre chapitres :

Un premier chapitre est consacré à introduire des généralités sur les matériaux composites, les matériaux composites stratifiés et en fin de chapitre nous mettons l'accent sur les structures en plaques composites stratifiées.

Un chapitre deux est consacré à la présentation de différentes méthodes de caractérisation d'un matériau composite.

Dans le troisième chapitre, nous présentons un rappel de la théorie des matériaux composites et faisons un modèle analytique des plaques stratifiées composites afin de bien définir les équations régissent le comportement en flexion et vibratoire.

Au chapitre quatre, nous développons une simulation numérique par la méthode des éléments finis sous le code de calcul Abaqus et à la fin du chapitre une étude comparative entre l'approche analytique et le modèle éléments finis développé par le code Abaqus est discutée.

Chapitre I

Généralités sur les matériaux et structures composites

I.1. Introduction

Les matériaux composites sont des assemblages de deux ou plusieurs matériaux non miscibles, dont la combinaison permet d'obtenir des propriétés supérieures à celles des constituants pris individuellement. Ils sont composés d'un renfort, généralement sous forme des fibres. Dans ce chapitre nous allons donner une brève recherche sur les différents types des matériaux composites et leurs constituants matrice-renfort.

I.2. Définition des matériaux composites

Un matériau composite est constitué de l'assemblage d'au moins deux matériaux non miscibles (mais ayant une forte capacité d'adhésion) et de nature différente, se complétant et permettant d'obtenir un matériau dont les performances globales sont améliorées, vis-à-vis d'un besoin spécifique, par rapport à celles de ses constituants élémentaires ». Un matériau composite est constitué de différentes phases nommées « renforts » et « matrice ». Chacun des deux constituants jouent un rôle particulier dans la tenue mécanique du matériau. La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à recevoir toutes les sollicitations et répartir les efforts dans tout le matériau afin de protéger le renfort. Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues, leur rôle est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts, et confère à la matrice des propriétés qu'elle ne possède pas seule. L'arrangement des fibres, leur orientation permet de renforcer les propriétés mécaniques de la structure.

I.3. Avantage des matériaux composites

Réduire la masse des produits, ce qui entraîne une économie de carburant.

Meilleures caractéristiques mécaniques et haute rigidité spécifique et résistance spécifique.

Faible vieillissement sous l'action de réaction chimique.

Insensibles aux produits chimiques comme les graisses, huiles, liquides hydrauliques, peintures, pétrole.

Obtention de formes complexes (réduction des coûts d'assemblages).

I.4. Les constituants du matériau composite

Nous présentons les différents types des éléments constituant un matériau composite qui sont les renforts et les matrices.

Le renfort se présente sous forme de fibres continues ou discontinues qui a dont le

rôle est d'assurer la résistance mécanique du matériau composite. La matrice assure la protection chimique et la répartition de la charge mécanique appliquée à la structure. Ces deux éléments constitutifs principaux reçoivent des additifs ou charges qui sont des produits qui peuvent être incorporés à la résine pour lui conférer des caractéristiques particulières ou en réduire le coût (catalyseur, durcisseur etc....).

I.4.1. Les renforts

Les renforts sont tous produits qui permettent d'améliorer les propriétés de la matrice (mécanique, thermique, chimique...) et assurer des meilleures propriétés mécaniques du matériau composite à élaborer.

Les fibres sont disponibles sur le marché en fonction des coûts de revient recherchés pour la structure réalisée. Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes : linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus, complexes, tissage directionnel ou plus). Les différents classements des renforts sont indiqués sur la figure I.1.

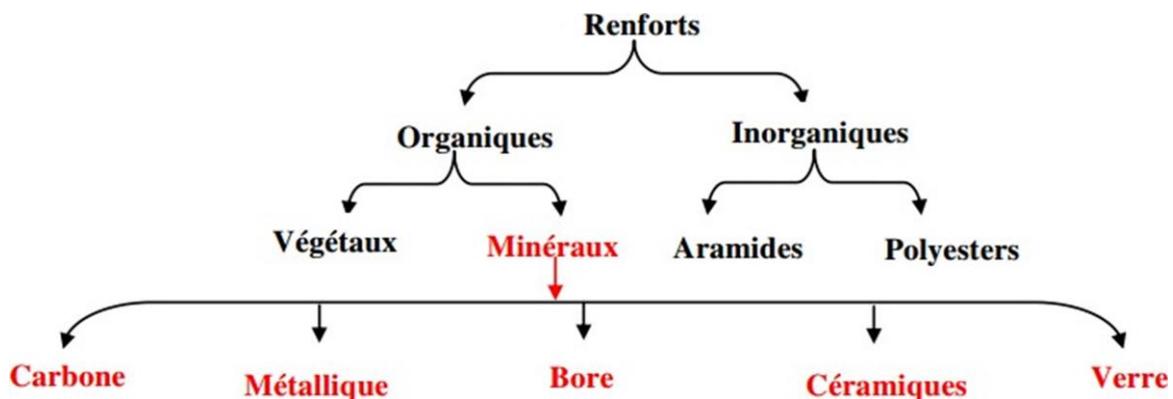


Fig.I.1. Différents types de renforts

I.4.2. Principaux renforts

I.4.2.1. Fibres de verre

Les fibres de verre ont un excellent rapport performance-prix. C'est les renforts les plus utilisés actuellement dans la construction de structures composites. On distingue trois types de fibres de verre :

Verre E : pour les composites à grande diffusion.

Verre S : pour les applications d'électricité.

Verre R : pour les composites à haute performance.

I.4.2.1.1. Avantages de la fibre de verre

- Compatibilité avec les matrices organiques.
- Bonnes propriétés diélectriques.
- Faible coût.

I.4.2.1.2. Inconvénients de la fibre de verre

- Faible module d'élasticité (par rapport aux fibres de carbone et l'aramide).
- Vieillessement au contact de l'eau.

Tableau I.1. Caractéristiques en traction des fibres de verre

Type des fibres de verre	Verre E	Verre R	Verre S
Résistance à la rupture (MPa)	3400-3500	4400	4600
Module de Young (GPa)	73	86	87
Allongement à la rupture (%)	4.6-4.8	5.2	5.4
Masse volumique (g/cm ³)	2.54	2.55	2.54



Fig.I.2. Bobine de fibre de verre

I.4.2.2. Fibres de carbone

- C'est la fibre la plus utilisées dans les applications hautes performances.
- Elle est obtenue par carbonisation de la fibre de PAN (Polyacrylonitrile).
- Selon la température de combustion, on distingue deux types de fibres :
- Fibres haute résistance (HR) : pour une combustion de 1000 à 1500 °C.
- Fibres haut module (HM) : pour une température de combustion de 1800 à 2000 °C.

I.4.2.2.1. Avantages de la fibre de carbone

- Bonnes propriétés mécaniques.

- Dilatation thermique très faible.
- Bonne tenue à l'humidité.
- Faible densité.

I.4.2.2.2. Inconvénients de la fibre de carbone

- Prix très élevé.
- Fragilité au choc.
- Adhésion difficile avec les résines.



Fig.I.3. Bobine de fibre carbone

Tableau I.2. Caractéristiques des fibres de carbone

Type des fibres de carbone	HR		HM	
Caractéristique	(1)	(2)	(1)	(2)
Resistance a la rupture (Mpa)	3000 à 3500	4000 à 4500	1800 à 2500	2000 à 4200
Module de Young (GPa)	220 à 240	275 à 300	350 à 500	350 à 500
Allongement a la rupture (%)	1.2 à 1.5	1.4 à 1.6	0.5 à 0.7	0.3 à 0.5
Masse volumique (g/cm ³)	1.75 à 1.8	1.75 à 1.8	1.8 à 1.95	1.8 à 1.95
(1) Qualité standard (1 ^{er} génération), (2) qualité très performante.				

I.4.2.3. Fibres d'aramide

Les fibres d'aramide sont des fibres synthétiques à base de polyamide aromatiques dont les premières applications reviennent à l'année 1972.

Ces fibres sont généralement développées pour renforcer les pneumatiques.

Ils en-existent deux types principaux :

La fibre haute module Kevlar 49 et Twaron HM.

La fibre standard Kevlar 29 et Twaron HM 50.

Les fibres d'aramide présentent la même particularité que les fibres de carbone, elles ont un coefficient de dilatation linéique négative dans le sens axial.



Fig.I.4. Bobine de fibre d'aramide

I.4.2.3.1. Avantages de la fibre d'aramide

- Bonne résistance spécifique à la traction.
- Dilatation thermique nulle.
- Absorption des vibrations et des chocs.
- Bonne inertie chimique vis-à-vis des carburants.
- Faible densité.

I.4.2.3.2. Inconvénient de la fibre d'Aramide

- Tenue limitée en compression.
- Reprise d'humidité importante.
- Prix élevé.
- Adhésion difficile avec les résines.

Tableau I.3. Caractéristiques des fibres d'aramides

Caractéristique	Haut module	Standard
Resistance a la rupture (MPa)	> 3000	>2760
Module de Young (GPa)	120 à 130	60 à 70
Allongement a la rupture (%)	1,9 à 2,5	4 à 4,4
Masse volumique (g/cm ³)	1,45	1,44

I.4.2.4. Fibres de céramiques

Les matériaux composites en céramique sont souvent constitués de renforts et de matrice en céramique. Les fibres sont fabriquées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fils support. Ces fibres sont rencontrées dans des applications où la température est très élevée entre 500 °C et 2000 °C. Ces matériaux sont utilisés notamment dans les parties chaudes des moteurs d'avion.

Les types de fibres céramiques sont :

Les fibres de carbure de silicium.

Les fibres de Bore.

I.4.3. La disposition géométrique des fibres

Suivant l'utilisation des matériaux composites les renforts peuvent se présenter sous plusieurs formes.

I.4.3.1. Les Mats

Les mats sont des nappes de fils continus ou discontinus, disposés dans un plan sans aucune orientation préférentielle. Ils sont maintenus ensemble par un liant soluble ou non dans les résines, suivant la mise en œuvre. L'absence d'orientation préférentielle des fibres conduit à une isotropie des propriétés mécaniques du mat dans son plan. La différence entre les mats à fils coupés et les mats à fils continus se situe essentiellement au niveau de leur propriété de déformabilité

I.4.3.2. Tissus

Les tissus sont des renforts qui se présentent sous la forme de tissus (cf. norme NF G 07-154). Ils sont généralement bidirectionnels (figures I.5).

Un tissu comprend des fils de chaîne (suivant la direction d'enroulement sur son support) et des fils de trame disposés perpendiculairement.



Fig.I.5. Différents tissus. A) Tissu de fibre de carbone, B) Tissu taffetas de verre, C) Tissu mat de verre

I.4.3.3. Les matrices

Le rôle de la matrice est de transmettre les efforts mécaniques aux fibres (résistance à la flexion ou à la compression) et d'assurer leurs protections chimiques et de donner la forme au produit réalisé. On distingue différents types de matrice (figure I.6).

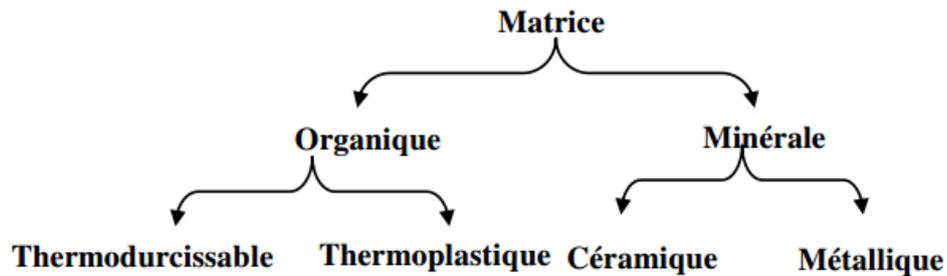


Fig.I.6. Différents types de matrices

I.4.3.3.1. Les matrices organiques

I.4.3.3.2. Les matrices thermodurcissables

Les résines thermodurcissables présentent et possèdent la propriété de passer de façon irréversible d'un état liquide à un état solide. Elles ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible. Ces résines ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois. On distingue donc trois types de matrices thermodurcissables :

Les résines polyesters.

Les résines de condensation.

Les résines époxydes.

Tableau I.4. Caractéristiques des matrices thermodurcissables

Caractéristiques	Type de matrice				
	Epoxyde	Polyester	Polycarbonate	Vinylester	Silicone
Masse volumiques (kg/m ³)	1200	1200	1200	1150	1100
Module d'élasticité longitudinal (MPa)	4500	4000	2400	3300	2200
Module de cisaillement (MPa)	1600	1400	800	1000	900
Coefficient de Poisson	0,4	0,4	0,35	0.35	0,5
Contrainte de rupture en traction (MPa)	130	80	60	75	35
Allongement à rupture %	2	2,5	3	4	2
Coefficient de dilatation thermique	$5 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-5}$

I.4.3.3.3. Les matrices thermoplastiques

Les résines thermoplastiques présentent la propriété de passer de façon réversible de l'état solide à l'état pâteux. La mise en œuvre rapide est possible par thermoformage. Elles présentent la possibilité de soudage et de recyclage du fait de la réversibilité.

On cite les exemples suivantes :

PolyPropylène (PP).

PolySulfure de Phénylène (PPS).

Polycarbonate Polyamide (PA).

PolyEther-Sulfone (PES).

PolyEther-Imide (PEI).

PolyEther-Ether-Kétone (PEEK).

Tableau I.5. Caractéristiques des matrices thermoplastiques

Caractéristiques	Type de matrice					
	PP	PPS	PA	PES	PEI	PEEK
Masse volumiques (Kg /m ³)	900	1300	1100	1350	1150	1300
Module d'élasticité longitudinal (MPa)	1200	4000	2000	3000	3300	4000
Coefficient de Poisson	0,4	0,35	0,35	0.4	0.35	0.36
Coefficient de dilation thermique	9	5	8	6	6	5
Contrainte de ruptures en traction (MPa)	30	65	70	85	105	50
Allongement à la rupture (%)	20 à 400	100	200	60	60	50

I.4.4. Les stratifiés à base de tissus unidirectionnels

Les stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels constituent un type de stratifié de base auquel peut se ramener en théorie tout autre type de stratifié. Ces stratifiés sont constitués (figure I.7) de couches de fils ou de tissus unidirectionnels, dont la direction est décalée dans chaque couche. On distingue différents types des stratifiés :

Stratifiés symétriques.

Stratifiés symétriques miroir.

Séquences.

Stratifiés hybrides.

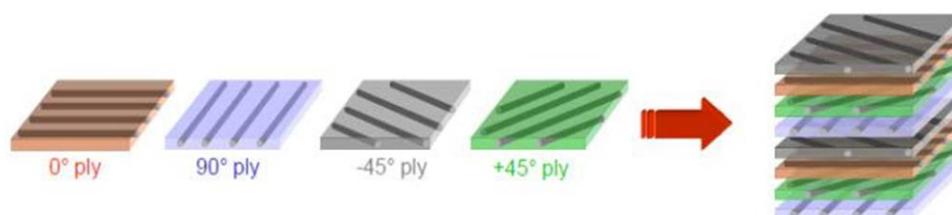


Fig.I.7. Constitution d'un stratifié

I.4.5. Les sandwichs

Une structure sandwich est composée d'une âme et de deux peaux en matériaux composites. L'assemblage est réalisé par collage à l'aide d'une résine compatible avec les matériaux en présence. Les âmes les plus utilisées sont de type nid d'abeilles, âme ondulée ou mousse. Les peaux sont généralement constituées de structures stratifiées. Une âme nid d'abeilles est présentée sur la figure I.8.

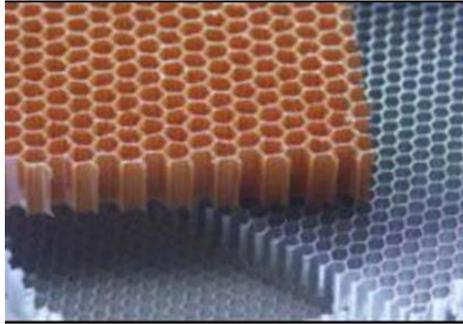


Fig.I.8. Nid d'abeilles

Ces structures ont une grande rigidité en flexion et en torsion. L'âme de la structure sandwich résiste principalement aux contraintes de cisaillement et de compression hors plan. Les peaux inférieures et supérieures supportent quant à elles les efforts dans leur plan. Les figures 1.9 et 1.10 présentent quelques types de sandwichs.

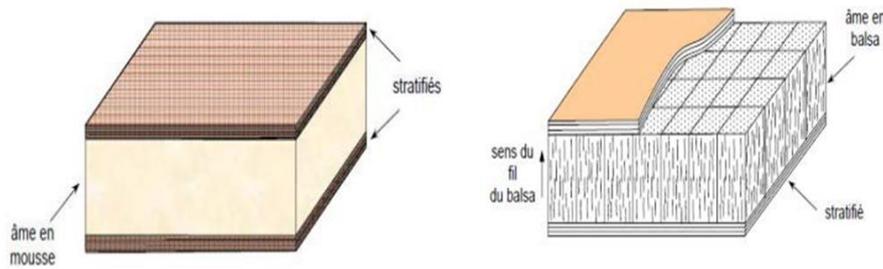


Fig.I.9. Matériaux sandwichs à âmes pleines

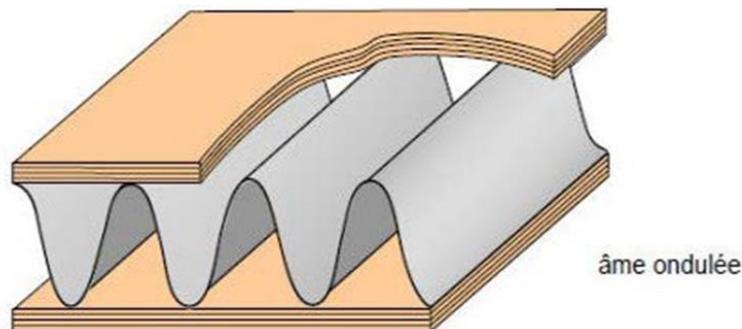


Fig.I.10. Matériaux sandwichs à âmes creuses

I.5. Mise en œuvre des matériaux composites

Le but de cette partie est de connaître les principes des différents processus de mise en œuvre des matériaux composites. La plupart des techniques de mise en œuvre consistent à élaborer des pièces en matériaux composites par couches successives comportant matrice et renfort.

Cette technique générale appelée la stratification, conduit à l'élaboration de stratifiés, cela

nous amènera ensuite à nous intéresser à l'architecture des matériaux composites. Il existe de nombreuses méthodes et variantes de fabrication des matériaux composites.

I.6. Moulage à Basse pression

I.6.1. Moulage au contact

C'est un procédé manuel (figure I.11) pour la réalisation des pièces à partir de résines thermodurcissables, à température ambiante et sans pression. Les renforts sont déposés sur le moule et imprégnés de résine liquide, accélérées et catalysées. Après durcissement de la résine, la pièce est démoulée. Ce procédé est utilisé pour les petites séries, de 1 à 1000 pièces/année et pour la construction de pièces de grandes dimensions ainsi que pour les revêtements sur des supports divers.

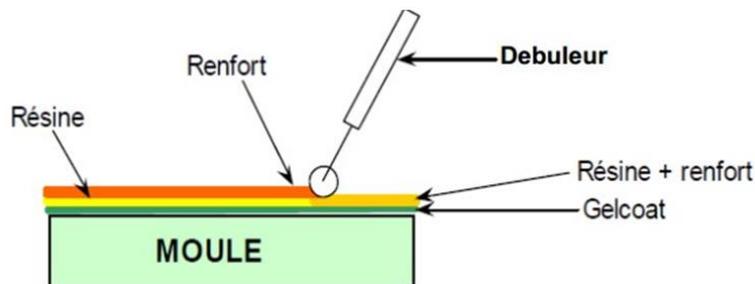


Fig.I.11. Principe du moulage au contact

I.6.1.1. Avantages

- Très larges possibilités de forme.
- Pas de limite dimensionnelle, Une surface lisse gelotée (aspect, tenue à la corrosion). Propriétés mécaniques moyennes à bonnes.
- Investissements spécifiques très faibles.
- Moules simples, peu onéreux, rapides à réaliser en interne.

I.6.1.2. Inconvénients

- Une seule face lisse.
- Nécessité de finition (détourage, perçage...).
- Qualité tributaire de la main d'œuvre.
- Faible cadence de production par moule, espace de travail important.
- Conditions de travail médiocres.

I.6.2. Moulage par projection simultanée

Le moulage est effectué par projection simultanée de fibres coupées et résine catalysée sur un moule (figure I.12). L'équipement à projeter est constitué d'une machine à couper le stratifié et d'un pistolet projetant la résine et les fibres coupées, l'ensemble fonctionnant par air comprimé. La couche de fibres imprégnées de résine est ensuite compactée et débarrassée des bulles au rouleau cannelé.



Fig.I.12. Principe du moulage par projection simultanée (Source Okeanos-France
Fabrication d'une piscine)

I.6.2.1. Avantages

- Travail simplifié, suppression de la mise en forme obtenue directement par la projection.
- Très larges possibilités de forme et des dimensions.
- Investissements très modérés.
- Moules simples, peu onéreux, rapides à réaliser en interne.

I.6.2.2. Inconvénients

- Propriétés mécaniques moyennes.
- Une seule face lisse.
- Qualité tributaire de la main d'œuvre.
- Conditions de travail très médiocres si absence d'agencements nécessaires.

I.6.3. Moulage par injection de mélange (résine-renfort)

Généralement cette technique (figure I.17) est utilisée pour obtenir les matériaux du type « plastiques renforcés ». Elle est adaptée pour la production des pièces en très grandes séries. Dans ce procédé exige un malaxeur avec une masse à mouler constituée de résine, de

charges et d'adjuvants divers, renfort (fibres courtes, sphères (billes), etc...). Le compound est moulé à chaud (130 - 150 °C) par injection (principalement) entre moule et contre-moule en acier usiné. La pression de fermeture du moule est de (50 à 100 bars) .

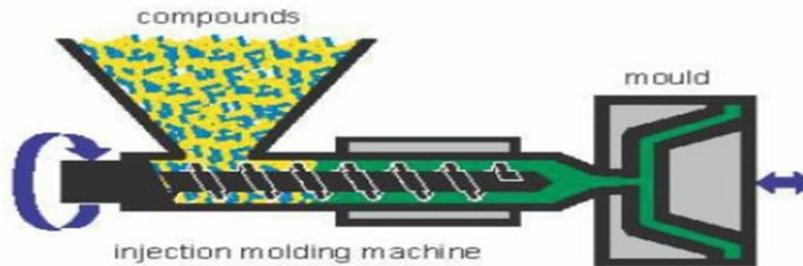


Fig.I.17. Principe du moulage par injection de mélange (résine-renfort)

I.6.4. Moulage par pultrusion

Ce procédé (figure I.18) assure une grande série de production (vitesse de défilement jusqu'à 20 m/h). Cette technique est destinée pour la fabrication des pièces de profilés de sections constantes. Ce procédé est utilisé dans le type des renforts (continus, rowings divers, des bondes de mats et tissus en bandes de largeurs appropriées), et les résines de types (thermoplastiques et thermodurcissables). Il est possible d'obtenir des profils de caractéristiques mécaniques plus élevées

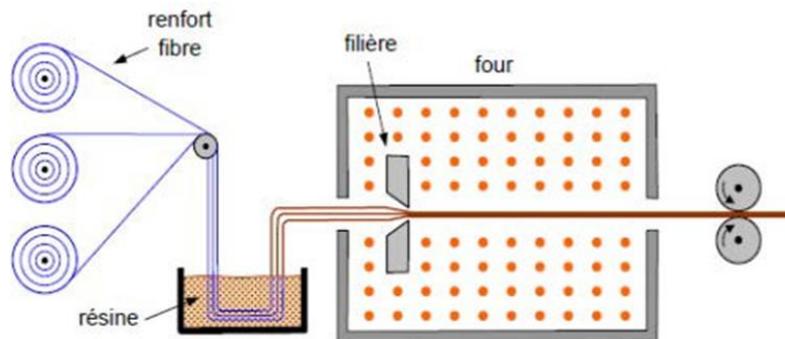


Fig.I.18. Principe de moulage par pultrusion

I.6.5. Moulage par centrifugation

C'est un procédé de moulage (figure I.19) limité aux enveloppes cylindriques. A l'intérieur d'un moule cylindrique en rotation à basse vitesse, on dépose des fils coupés à partir de mat, de la résine catalysée et accélérée et éventuellement des charges granulaires. Ensuite on augmente la vitesse de rotation du moule pour densifier et dé buller la matière. Après durcissement de la résine, éventuellement accélérée par un apport thermique, on peut extraire

très facilement la pièce du moule :

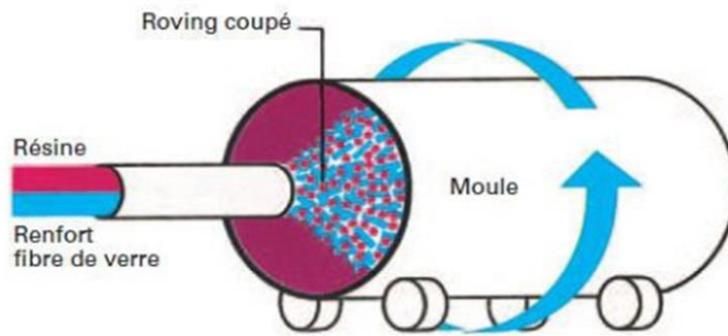


Fig.I.19. Principe de fabrication d'un tuyau par centrifugation

I.6.5.1. Avantages

Aucune perte de matière.

Deux faces parfaitement lisses.

Matériau de très bonne qualité (pas de bulles d'air).

I.6.5.2. Inconvénients

Seulement les formes cylindriques.

Pas de possibilité de variation d'épaisseur.

Caractéristiques mécaniques moyennes perpendiculairement à la surface fabriquée.

I.6.6. Moulage par enroulement filamentaire (ou bobinage)

Cette technique adaptée (figure I.20) pour la fabrication des pièces de grandes dimensions aux formes cylindriques et sphériques avec des surfaces internes lisses et une résistance plus élevée. Le renfort aux formes de fil continu, ruban, imprégné de résine catalysée est enroulé avec une légère tension, sur un mandrin cylindrique ou de révolution en rotation. Suivant les mouvements relatifs du mandrin et du système d'orientation des renforts,

On distingue :

L'enroulement circonférentiel.

L'enroulement hélicoïdal.

L'enroulement polaire



Fig.I.20. Principe du moulage par enroulement filamentaire (source site CNES)

I.7. Domaine d'application des matériaux composites

Les matériaux composites sont largement utilisés dans l'industrie, parce qu'ils présentent de bonnes caractéristiques telles la rigidité, la légèreté et la résistance à des contraintes d'origine mécanique et thermique.

I.7.1. Secteur aéronautique

L'aéronautique fait office de pionnier dans l'utilisation des composites à hautes performances (à base de fibres de carbone, kevlar et verre) assemblés assez souvent par collage, avec des hautes performances et ceci depuis plusieurs dizaines d'années. Cette méthode d'assemblage a en effet été mise à profit et développée en raison de son efficacité, de la solidité des assemblages et de l'allègement des structures qu'elle procure. Ainsi, le secteur aéronautique est à l'origine de nombreuses innovations que ce soit pour la formulation de nouveaux adhésifs, le développement de procédés de mise en œuvre, de méthodes de test des assemblages collés ou des matériaux de construction (nids d'abeilles).

L'utilisation des matériaux composites dans la construction aéronautique a débuté vers 1970. Depuis, la proportion des pièces composites a rapidement progressé, en nombre et en importance, d'abord sur les avions militaires, puis sur les avions civils à partir du début des années 1980.

Le secteur aéronautique reste novateur dans ce domaine et doit être considéré comme une source de transfert de technologies vers les autres secteurs industriels, notamment l'automobile, la construction navale, l'armement, et la mécanique.

I.7.2. Secteur Spatial

Les matériaux composites sont utilisés dans l'industrie des satellites, des réservoirs militaires, tuyères, corps de rentrée d'atmosphère, etc.

I.7.3. Les composites dans l'industrie automobile

Les matériaux composites sont apparus dans l'industrie automobile au milieu des années 1950. À cette époque, les matériaux et les procédés de transformation étaient peu nombreux : essentiellement des matrices polyesters thermodurcissables renforcées par des fibres de verre courtes, mises en œuvre manuellement dans des moules ouverts ou fermés suivant le procédé SMC (Sheet Moulding Compound).

Les matrices peuvent être thermoplastiques (polypropylène, polyamide, polyuréthane,) ou thermodurcissables (polyester, vinylester, époxy, polydicyclopentadiène...).

Les fibres de renforcement peuvent être en verre, aramide, carbone, thermoplastique, voire végétales, utilisées sous forme coupée court ou longue, continue, tissée, tressée, tricoté.

I.7.4. Matériaux composites anticorrosion dans l'industrie

Les stratifiés à base de polyesters insaturés, de vinylesters, d'époxydes, de polymères thermoplastiques divers, grâce à leurs excellentes performances (physiques, mécaniques...) et à leur résistance chimique et à la corrosion sont utilisés dans toutes les industries où l'on a besoin de résister à l'eau, à la corrosion ainsi qu'aux nombreux produits chimiques utilisés.

L'industrie automobile où les carrosseries doivent résister aux intempéries et à la corrosion.

L'industrie mécanique où les matériaux doivent résister aux huiles et aux graisses, voire à d'autres fluides.

L'industrie agroalimentaire où les matériaux doivent résister à certains

Produits agressifs, vinaigre, sauces, produits acides.

La construction navale, où les matériaux doivent résister à l'eau de mer pendant de très longues durées.

I.7.5. Secteur des travaux publics et bâtiments

Différentes technologies de réparation et de maintenance des ouvrages sont couramment utilisées depuis de nombreuses années. Le traitement du béton peut faire l'objet d'opérations de ragréage par application de couches de peinture ou de mortier hydraulique ou polymérique après traitement de la poutre dégradée.

Les zones fissurées font l'objet d'injection de polymères.

Les différentes techniques de renforcement structurel correspondent soit à la projection de béton fibré ou non fibré, soit au collage de tôles d'acier suivant le procédé l'Hermitte, soit à l'application d'une précontrainte additionnelle par câbles métalliques ou composites.

I.7.6. Secteur médical

Les applications des composites dans le domaine médical et de sécurité sont très récentes et concernent plutôt les composites à hautes performances, à matrice époxy et fibres de carbone, ou à matrice thermoplastique et fibres longues de verre ou de carbone d'autre part

I.7.7. Secteur de l'énergie renouvelable

Etant donné que l'énergie éolienne participe durablement à la lutte contre la pollution atmosphérique, les gaz à effet de serre et les divers déchets industriels, l'intérêt pour le développement technologique d'éoliennes est de plus en plus puissant et devient aujourd'hui une préoccupation majeure pour les constructeurs mondiaux.

Dans l'industrie moderne des pales d'éoliennes en matériaux composites à base de fibres occupent une place prépondérante. En effet, ces matériaux présentent des avantages attractifs résidants principalement dans les bonnes caractéristiques mécaniques en termes de rigidité et de résistance spécifiques.

I.7.8. Secteur du sport

Le domaine du sport utilise des composites de haute performance avec un taux de renforts de plus de 70 %. Les composites permettent d'augmenter sur mesure les performances, et la fiabilité des articles de sport. Les applications rencontrées concernent les raquettes de tennis et de squash, cannes à pêche, skis, planches à voiles, arcs, flèches, javelots, cadres de bicyclette, casques de protection, clubs de golf, avirons, surf, ...etc...

I.7.9. Secteur d'électricité et d'électronique

Les matériaux composites sont utilisés dans les supports de circuits imprimés, Disjoncteurs

Isolant, Coffrets, ...etc.

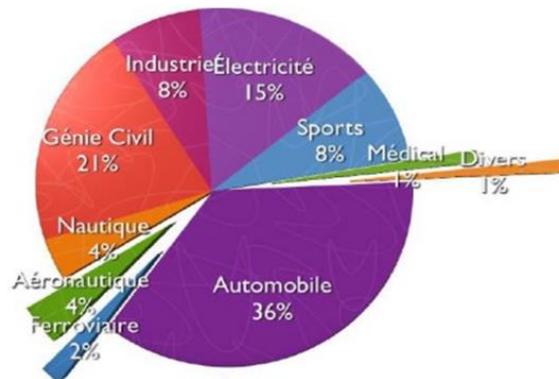


Fig.I.21. Répartition des secteurs d'application des matériaux composites.

I.8. Conclusion

Les structures composites sont des matériaux formés par la combinaison de deux ou plusieurs matériaux distincts afin de créer un nouveau matériau avec des propriétés améliorées. Ces matériaux se composent généralement d'une matrice (résines) et d'un renfort (fibres).

Les matériaux composites ayant plusieurs avantages par rapport aux matériaux classiques incluent une grande résistance mécanique, une légèreté, une résistance à la corrosion et une flexibilité dans la conception.

Chapitre II

Caractéristiques et caractérisation mécanique des matériaux composites

II.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter différents comportements matériaux composites dans repère local ou principal.

Deux parties sont à distinguer :

La première concerne la présentation du comportement d'un composite d'ordre général.

La seconde concerne une présentation du comportement d'un pli unidirectionnel.

II.2. Les caractéristiques du mélange renfort-matrice

On qualifie couramment du nom de pli le demi-produit (renfort + résine) présenté sous forme quasi bidimensionnelle, ce peut être :

- Un unidirectionnel + matrice.
- Un tissu (chaîne+trame) +matrice.
- Un mat + matrice.

II.2.1 La teneur en masse de renfort

On appelle ainsi le rapport :

$$M_f = \frac{\text{masse de renfort}}{\text{masse totale}} \quad (\text{II.1})$$

En conséquence, la teneur en masse de matrice est telle que :

$$M_m = \frac{\text{masse de matrice}}{\text{masse totale}} \quad (\text{II.2})$$

Ou encore :

$$M_m = 1 - M_f \quad (\text{II.3})$$

II.2.2. La teneur en volume de renfort

On appelle ainsi le rapport :

$$V_f = \frac{\text{volume de renfort}}{\text{volume totale}} \quad (\text{II.4})$$

En conséquence, la teneur en volume de matrice est telle que :

$$V_m = \frac{\text{volume de matrice}}{\text{volume totale}} \quad (\text{II.5})$$

Ou encore :

$$V_m = 1 - V_f \quad (\text{II.6})$$

On peut passer du taux en masse au taux en volume, et réciproquement :

$$V_f = \frac{\frac{M_f}{\rho_f}}{\frac{M_f}{\rho_f} + \frac{M_m}{\rho_m}} \quad (\text{II.7})$$

$$M_f = \frac{V_f \rho_f}{V_f \rho_f + V_m \rho_m} \quad (\text{II.8})$$

II.2.3. La masse volumique

C'est, pour le mélange (renfort + matrice) le rapport :

$$\rho = \frac{\text{masse totale}}{\text{volume total}} \quad (\text{II.9})$$

Soit encore :

$$\rho = \rho_f V_f + \rho_m V_m \quad (\text{II.10})$$

II.2.4. Coefficient de poisson

Il caractérise la contraction dans le sens transverse (T) du pli lorsqu'on le sollicite en traction suivant le sens long (L) :

$$\vartheta_{LT} = \vartheta_f V_f + \vartheta_m V_m \quad (\text{II.11})$$

II.2.5. Epaisseur du pli unidirectionnel (UD)

On définit sous le terme de grammage la masse (m_{of}) de renfort par mètre carré. L'épaisseur d'un pli notée (h), est alors telle que :

$$h = \frac{m_{of}}{V_f \rho_f} \quad (\text{II.12})$$

On peut également exprimer l'épaisseur à partir de la teneur en masse de renfort au lieu de la teneur en volume :

$$h = m_{of} \left(\frac{1}{\rho_f} + \frac{1}{\rho_m} \left(\frac{1-m_f}{m_f} \right) \right) \quad (\text{II.13})$$

II.2.6. Modules d'élasticité du pli unidirectionnel

II.2.6.1. Module d'élasticité dans le sens des fibres

Il est bien approché par la relation :

$$E_L = E_f V_f + E_m V_m \quad (\text{II.14})$$

Ou encore :

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (\text{II.15})$$

En pratique ce module dépend essentiellement du module longitudinal de la fibre (E_f)

II.2.6.2. Module d'élasticité dans le sens travers des fibres

Dans la relation ci-dessous, (E_{ft}) représente le module d'élasticité de la fibre dans le sens transverse à la fibre telle qu'il figure dans le tableau II.1.

$$E_L = E_m \left(\frac{1}{(1-V_f) \frac{E_m V_f}{E_{ft}}} \right) \quad (\text{II.16})$$

Tableau II.1. Les modules d'élasticité et coefficient de poisson des fibres

	Verre « E »	Kevlar	Carbone « HM »	Carbone « HM »
E_{fL} (MPa)	74000	130000	230000	390000
E_{fT} (MPa)	74000	5400	15000	6000
G_{fLT} (MPa)	300000	12000	50000	20000
ν_{fLT}	0.25	0.4	0.3	0.35

II.2.6.3. Module de glissement

Un ordre de grandeur de ce module difficile à approcher par le calcul est donné par l'expression suivante, dans laquelle (G_{ft}) représente le module de cisaillement de la fibre.

$$G_{LT} = G_m \left(\frac{1}{(1-V_f) \frac{G_m V_f}{G_{ft}}} \right) \quad (\text{II.17})$$

II.2.6.4. Module d'élasticité dans une direction quelconque

Il est possible d'évaluer les modules d'élasticité dans des directions autres que le sens long (L) et travers (T) :

$$E_x = \frac{1}{\frac{c^4}{E_L} + \frac{s^4}{E_t} - 2c^2 s^2 \left(\frac{1}{2G_{LT}} - \frac{\theta_{LT}}{E_L} \right)} \quad (\text{II.18})$$

$$c = \cos \theta, s = \sin \theta$$

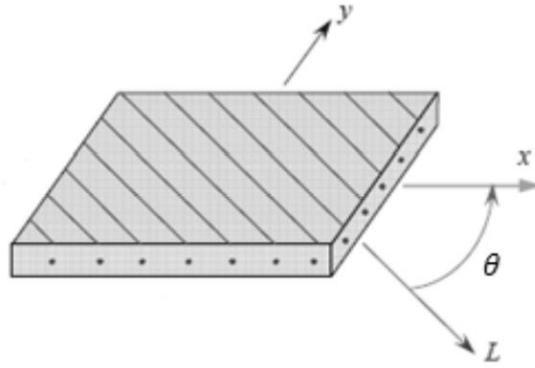


Fig.II.1. Pli unidirectionnel à direction quelconque

II.2.7. Résistance à la rupture d'un pli unidirectionnel

Lorsque les fibres se rompent avant la matrice, on obtient pour le mélange et pour une sollicitation dans la direction (L) :

$$\sigma_{Lrupt} = \sigma_{frupt} v_f + \sigma_{Lmrupt} V_m \quad (\text{II.19})$$

$$\sigma_{Lrupt} = \sigma_{frupt} \left(v_f + (1 - v_f) \frac{E_m}{E_j} \right) \quad (\text{II.20})$$

II.2.8. Résistance à la rupture d'un pli UD dans une direction quelconque

On note la décroissance rapide de cette résistance lorsqu'on s'écarte de la direction des fibres, elle est donnée par la relation qui suit :

$$\sigma_xrupt = \frac{1}{\sqrt{\frac{c^4}{\sigma_{Lrupt}^2} + \frac{s^4}{\sigma_{Trupt}^2} + \left(\frac{1}{\sigma_{LTrupt}^2} + \frac{1}{\sigma_{Lrupt}^2} \right)}} \quad (\text{II.21})$$

$$c = \cos, \quad s = \sin \theta$$

II.2.9. Les coefficients de dilatation thermique

Les coefficients de dilatation thermique longitudinal (L) et suivant le sens travers (T):

$$\alpha_L = \frac{\alpha_f E_f V_f + \alpha_m E_m V_m}{E_f V_f + E_m V_m} \quad (\text{II.22})$$

$$\alpha_T = \alpha_m V_m + \alpha_f V_f + \frac{(\alpha_f E_m - \alpha_m E_f)}{\frac{E_m}{V_f} + \frac{E_f}{V_m}} (\alpha_f - \alpha_m) \quad (\text{II.23})$$

II.2.10. Facteur de concentration de contraintes

Le facteur de concentration de contraintes est le rapport de la contrainte maximale (σ_{\max})

observée à la racine de l'incident de forme sur la contrainte nominale (σ_{nom}) à laquelle la structure est soumise, figure (II.2). Ce facteur, noté (K_t), est donné par les relations (II.24 et II.25):

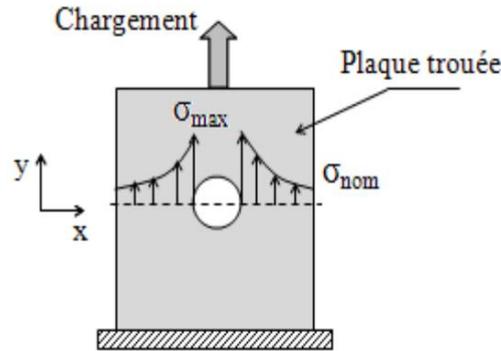


Fig.II.2. Concentration des contraintes dans une plaque trouée

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \quad (II.24)$$

$$K_t = 1 + \sqrt{2 \left(\sqrt{\frac{E_x}{E_y}} - \nu_{XY} \right) + \frac{E_x}{G_{XY}}} \quad (II.25)$$

II.2.11. Modules d'élasticité et coefficient de poisson du pli tissé

Le pli tissé est alors remplacé par un seul pli unidirectionnel anisotrope qui aura le même taux volumique (V_f) de renfort et d'épaisseur h_i , (x) étant la direction de la chaîne et (y) celle de la trame, on a alors:

$$K = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \quad (II.26)$$

n_1 : Nombre de fils de chaîne par mètre.

n_2 : Nombre de fils de trame par mètre.

$$E_x \approx KE_L + (1 - K)E_t \quad (II.27)$$

$$E_y \approx KE_T + (1 - K)E_i \quad (II.28)$$

$$G_{xy} = G_{LT} \quad (II.29)$$

$$\nu_{xy} = \frac{\nu_{LT}}{K + (1 - K)\frac{E_L}{E_T}} \quad (II.30)$$

II.2.12. Modules d'élasticité et coefficient de poisson du pli chargé avec des mats

Les mats sont des renforts bidimensionnels à fibres coupées (longueur comprise entre 5 et 10 cm). Les mats sont isotrope dans leur plan (x,y), ils peuvent donc être caractérisés par deux constantes élastiques seulement:

$$E_{mat} \approx \frac{3}{8} E_L + \frac{5}{8} E_T \quad (\text{II.31})$$

$$\nu_{mat} \approx 0.3 \quad (\text{II.32})$$

$$G_{mat} \approx \frac{E_{mat}}{2(1+\nu_{mat})} \quad (\text{II.33})$$

Avec :

E_L et E_T : les modules élastiques (sens long et sens travers) de l'unidirectionnel qui aura le même taux volumique (V_f) de renfort que le pli de mat.

II.3. Description de l'arrangement des fibres dans la matrice

Dans le cas des composites à matrice organique et renfort fibreux, la distribution des fibres dans la matrice n'est jamais parfaitement homogène, figure (2.3). Cette dernière dépend notamment de l'aptitude au mouillage de la fibre par la matrice et du procédé de mise en œuvre.

Un examen de la microstructure du composite révèle ainsi systématiquement des fluctuations locales de la fraction de renfort avec des zones plus ou moins riches en fibres.

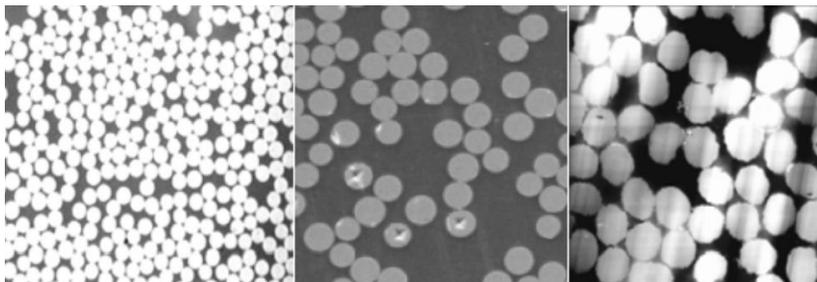


Fig.II.3. Des coupes transversales des composites unidirectionnels

Dans de nombreux problèmes micromécaniques, notamment celui de la détermination des modules élastiques, il est cependant nécessaire de schématiser la structure du composite en considérant des arrangements périodiques permettant de mener à bien les calculs. Les configurations de type hexagonal ou carré sont les plus usitées.

Dans le cas d'un arrangement carré, figure (II.4), la fraction volumique de renfort peut être reliée au diamètre (d) de la fibre et au côté (c) de la cellule élémentaire par la relation (II.34).

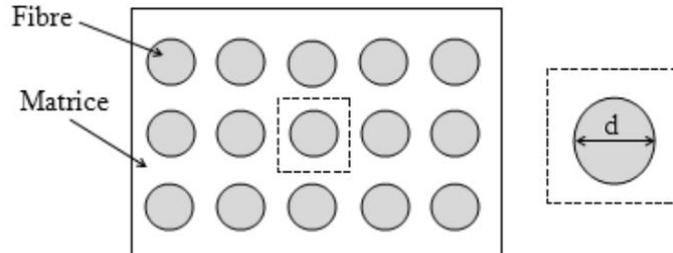


Fig.II.4. Arrangement carré et cellule élémentaire

$$V_f = \frac{n}{4} \left(\frac{d}{c} \right)^2 \quad (\text{II.34})$$

La fraction volumique maximale de fibres est donc obtenue en posant ($c = d$) soit :

$$V_{fmax} = \frac{\pi}{4} \quad (\text{II.35})$$

Dans le cas d'un arrangement hexagonal, figure (II.5), la fraction volumique de renfort peut être reliée au diamètre (d), de la fibre et à la distance (R), entre la fibre centrale et ses plus proches voisins.

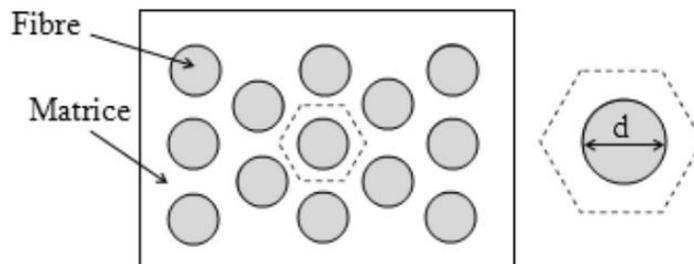


Fig.II.5. Arrangement hexagonal et cellule élémentaire

$$V_f = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left(\frac{d}{R} \right)^2 \quad (\text{II.36})$$

La fraction volumique de fibres maximale est obtenue pour $R=d$ soit :

$$V_{fmax} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \quad (\text{II.37})$$

II.4. Notions classiques de la mécanique des milieux continus

Nous considérons comme acquises les notions et notations classiques de mécanique des

milieux continus.

II.4.1. Etat de contraintes en un point

Il est défini par un tenseur du second ordre noté (σ). La matrice à 3 lignes et 3 colonnes qui lui est associée est symétrique. Il y a donc dans cette matrice 6 termes distincts qui seront notés (σ_{ij}):

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II.38})$$

II.4.2. Etat de déformation en un point

Il est défini par un tenseur du second ordre noté (ε). La matrice à 3 lignes et 3 colonnes qui lui est associée est symétrique, par écriture des petites déformations. Elle contient donc 6 termes distincts qui seront notés (ε_{ij}) :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II.39})$$

La densité d'énergie interne de déformation s'écrit :

$$Tr[\sigma\varepsilon] = \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + 2[\sigma_{23}\varepsilon_{23} - \sigma_{13}\varepsilon_{13} + \sigma_{12}\varepsilon_{12}] \quad (\text{II.40})$$

II.4.3. Milieu élastique linéaire

Les déformations sont des fonctions linéaires et homogènes des contraintes. Les relations correspondantes sont notées:

$$\varepsilon_{ij} = \varphi_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (\text{II.41})$$

II.4.4. Milieu homogène

Les grandeurs (φ_{ijkl}) caractérisant le comportement élastique du milieu considéré ne sont pas des fonctions de point, elles sont les mêmes quel que soit l'endroit du milieu que l'on considère.

II.4.5. Nombre de coefficients

Écrivons la relation du comportement élastique précédente sous forme matricielle:

On écrit traditionnellement la matrice des rigidités $\{C\}$ sous la forme:

$$\{C\} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.47})$$

Dans laquelle λ et μ sont les modules de Lamé.

On écrit la matrice des souplesses sous la forme :

$$\{S\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \quad (\text{II.48})$$

$$\frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \quad (\text{II.49})$$

Dans laquelle (E) est le module d'Young, (ν) le coefficient de Poisson et (G) le module de rigidité au cisaillement ou module de Coulomb. Bon nombre de métaux, d'alliages ou de composites constitués de renforts répartis aléatoirement (composites à fibres courtes par exemple) répondent au schéma élastique isotrope.

II.4.7. Matériau orthotrope

On appelle matériau orthotrope un matériau élastique homogène présentant en tout point deux symétries du comportement mécanique, chacune par rapport à un plan, les deux plans étant orthogonaux. Le nombre de constants élastiques indépendants est réduit à 9. La loi de comportement exprimée dans les axes dits «d'orthotropie », définis au moyen du trièdre construit sur les deux plans orthogonaux et leur intersection, peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{32} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & \lambda & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E_3} & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.50})$$

Avec :

E_1, E_2 et E_3 : les modules d'élasticité.

G_{23}, G_{13} et G_{12} : les modules de cisaillement.

$\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, \nu_{21}, \nu_{31}$ et ν_{32} : les coefficients de poisson.

La symétrie de la matrice de la loi de comportement élastique entraîne les égalités:

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1} \quad \text{et} \quad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2} \quad (\text{II.51})$$

II.4.8. Matériau quasi isotrope

On appelle matériau quasi isotrope un matériau invariant par rotation de 90° autour de l'un quelconque des axes du repère d'orthotropie. Les trois axes sont donc équivalents et la matrice des rigidités se simplifie pour prendre la forme :

$$\{C\} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{11} & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{II.52})$$

Un matériau quasi isotrope est caractérisé par trois modules d'élasticité indépendants. Un composite 3D (trois directions orthogonales de renforts par exemple) à fibres de carbone et matrice de carbone est un matériau quasi isotrope.

II.4.9. Matériau isotrope transverse

On appelle matériau isotrope transverse un matériau linéairement élastique, homogène, pour lequel tout plan contenant une direction privilégiée est un plan de symétrie mécanique. La loi de comportement ne fait intervenir que cinq coefficients élastiques indépendants. La relation de comportement s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{T'T'} \\ \gamma_{TT'} \\ \gamma_{LT'} \\ \gamma_{LT} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_T}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & -\frac{\nu_T}{E_T} & \frac{1}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{LT}}{E_L} & -\frac{\nu_T}{E_T} & \frac{1}{E_T} & \frac{(1+\nu_T)}{E_T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{T'T'} \\ \tau_{TT'} \\ \tau_{LT'} \\ \tau_{LT} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.53})$$

Avec :

E_L : le module d'élasticité dans le sens long.

E_T : le module d'élasticité dans le sens travers.

G_{LT} : le module de cisaillement.

ν_T et ν_{LT} : les coefficients de poisson.

La symétrie de la matrice de la loi de comportement élastique entraîne légalité:

$$\frac{\nu_{LT}}{E_L} = \frac{\nu_{TL}}{E_T} \quad (\text{II.54})$$

II.4.10. Matrices de rigidité et de souplesse

Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope est décrit en introduisant soit les constantes de rigidité (C_{ij}), soit les constantes de souplesse (S_{ij}) compte tenu des relations établis, la loi de Hooke s'écrit suivant l'une des formules matricielles:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{11} & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.55})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{11} & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.56})$$

Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope est donc caractérisé par (9) coefficients indépendants, les matrices de rigidité et de souplesse étant inverses l'une de l'autre, nous avons :

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{\Delta S}, \quad C_{22} = \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}^2}{\Delta S}, \quad C_{33} = \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{\Delta S} \\
C_{12} &= \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{\Delta S}, \quad C_{13} = \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{\Delta S}, \quad C_{23} = \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{\Delta S} \\
C_{44} &= \frac{1}{S_{44}}, \quad C_{55} = \frac{1}{S_{55}}, \quad C_{66} = \frac{1}{S_{66}}
\end{aligned} \tag{II.57}$$

$$\Delta S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{23}S_{13} \tag{II.58}$$

Le composite unidirectionnel est un cas particulier de matériau orthotrope dit orthotrope de révolution, pour le quel :

$$C_{13} = C_{12}, \quad C_{33} = C_{22}, \quad C_{44} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}), \quad C_{55} = C_{66} \tag{II.59}$$

$$S_{13} = S_{12}, \quad S_{33} = S_{22}, \quad S_{55} = S_{66}, \quad S_{44} = 2(S_{22} - S_{23}) \tag{II.60}$$

II.3.11. Constantes de rigidité et de souplesse en fonction des modules d'élasticité

Les expressions des constantes de souplesse et de rigidité s'obtiennent à partir des relations :

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{1}{E_1}, \quad S_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad S_{33} = \frac{1}{E_3}, \quad S_{44} = \frac{1}{G_{23}}, \quad S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad S_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} \\
S_{55} &= \frac{1}{G_{13}}, \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}}, \quad S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}
\end{aligned} \tag{II.61}$$

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta}, \quad C_{44} = G_{23}, \quad C_{55} = G_{13}, \quad C_{66} = G_{12}, \quad C_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2E_3\Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_3\Delta} \\
C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta}, \quad C_{13} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1E_2\Delta} \\
C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta}, \quad C_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1E_2\Delta}
\end{aligned} \tag{II.62}$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_2E_3} \tag{II.63}$$

II.5.12. Comportement mécanique du pli unidirectionnel (UD)

Pour étudier le comportement d'un stratifié constitué de plusieurs plis d'orientations différentes, il est nécessaire de connaître le comportement de chaque pli qui le compose, et ce dans des directions autres que les directions d'orthotropie du pli, figure (II.6).

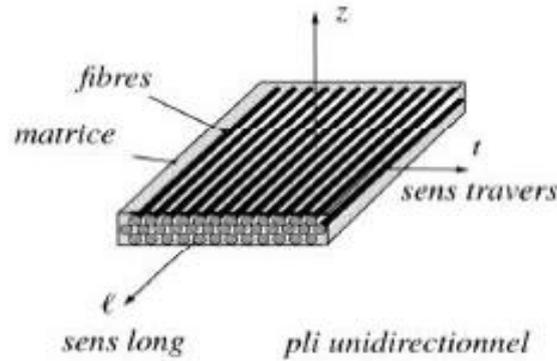


Fig.II.6. Référence du pli

II.5.1. Le comportement mécanique dans les directions d'orthotropie

Pour un pli unidirectionnel on utilise le comportement isotrope transverse, limité au comportement plan dans le plan (L, T).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & \frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.64})$$

II.5.2. Le comportement mécanique dans une direction quelconque

La relation de comportement mécanique peut ainsi être exprimée sous forme technique dans les axes (x,y) faisant l'angle (θ) avec les axes (L,T) (eq.II.65).

On y a fait apparaître les modules élastiques et coefficients de poisson relatif à ces directions.

II.5.2.1. Comportement et coefficients de souplesse

Le comportement d'un pli dans une direction quelconque est donné par l'équation (II.65).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{\nu_{yx}}{E_y} & 0 \\ \frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.65})$$

On pose : $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$

$$E_x(\theta) = \frac{1}{\frac{c^4}{E_L} + \frac{s^4}{E_T} + c^2 s^2 \left(\frac{1}{G_{LT}} - 2 \frac{\vartheta_{TL}}{E_T} \right)} \quad (\text{II.66})$$

$$E_y(\theta) = \frac{1}{\frac{s^4}{E_L} + \frac{c^4}{E_T} + c^2 s^2 \left(\frac{1}{G_{LT}} - 2 \frac{\vartheta_{TL}}{E_T} \right)} \quad (\text{II.67})$$

$$G_{xy}(\theta) = \frac{1}{4c^2 s^2 \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} + 2 \frac{\vartheta_{TL}}{E_T} \right) + \frac{(c^2 - s^2)^2}{G_{LT}}} \quad (\text{II.68})$$

$$\frac{\vartheta_{yx}}{E_y}(\theta) = \frac{\vartheta_{TL}}{E_T} (c^4 + s^4) - c^2 s^2 \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}} \right) \quad (\text{II.69})$$

$$\frac{n_{xy}}{G_{xy}}(\theta) = -2cs \left(\frac{c^2}{E_L} - \frac{s^2}{E_T} + (c^2 - s^2) \left(\frac{\vartheta_{TL}}{E_T} - \frac{1}{2G_{LT}} \right) \right) \quad (\text{II.70})$$

$$\frac{\mu_{xy}}{G_{xy}}(\theta) = -2cs \left(\frac{s^2}{E_L} - \frac{c^2}{E_T} - (c^2 - s^2) \left(\frac{\vartheta_{TL}}{E_T} - \frac{1}{2G_{LT}} \right) \right) \quad (\text{II.71})$$

II.5.2.2. Comportement et coefficients de raideur

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} & \bar{E}_{13} \\ \bar{E}_{21} & \bar{E}_{22} & \bar{E}_{23} \\ \bar{E}_{31} & \bar{E}_{32} & \bar{E}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.72})$$

$$\bar{E}_L = \frac{E_L}{(1 - \vartheta_{LT} \vartheta_{TL})}, \quad \bar{E}_T = \frac{E_T}{(1 - \vartheta_{LT} \vartheta_{TL})} \quad (\text{II.73})$$

On pose : $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$

$$\bar{E}_{11}(\theta) = c^4 \bar{E}_L + s^4 \bar{E}_T + 2c^2 s^2 (\vartheta_{LT} \bar{E}_L + 2G_{LT}) \quad (\text{II.74})$$

$$\bar{E}_{22}(\theta) = s^4 \bar{E}_L + c^4 \bar{E}_T + 2c^2 s^2 (\vartheta_{LT} \bar{E}_L + 2G_{LT}) \quad (\text{II.75})$$

$$\bar{E}_{33}(\theta) = c^2 s^2 (\bar{E}_L + \bar{E}_T - 2\vartheta_{TL} \bar{E}_L) + (c^2 - s^2)^2 G_{LT} \quad (\text{II.76})$$

$$\bar{E}_{12}(\theta) = c^2 s^2 (\bar{E}_L + \bar{E}_T - 4G_{TL}) + (c^4 + s^4) \vartheta_{LT} \bar{E}_L \quad (\text{II.77})$$

$$\bar{E}_{13}(\theta) = -cs(c^2 \bar{E}_L - s^2 \bar{E}_T - (c^2 - s^2)(\vartheta_{TL} \bar{E}_L + 2G_{LT})) \quad (\text{II.78})$$

$$\bar{E}_{23}(\theta) = -cs(s^2 \bar{E}_L - c^2 \bar{E}_T + (c^2 - s^2)(\vartheta_{TL} \bar{E}_L + 2G_{LT})) \quad (\text{II.79})$$

II.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le comportement mécanique de différent matériau composite, en concentrant spécialement sur le comportement d'un matériau composite orthotrope qui sera utile pour la suite du travail.

Chapitre III

***Analyse du comportement en flexion et
vibratoire des plaques composites stratifiées***

III.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier la vibration d'une plaque stratifiée composite à quatre couches.

Deux grands volets sont à distinguer :

Le premier concerne le développement analytique des équations régissant le comportement en flexion et le mouvement vibratoire de la plaque.

Le second concerne une application numérique en déterminant les fréquences et les modes de vibration.

III.2. Flexion d'une plaque stratifiée composite

La plaque à une forme rectangulaire ou carrée de dimensions a_1 et a_2 est en appui libre suivant la direction de son contact (Fig.III.1). Elle est uniquement soumise sur sa face supérieure à la densité surfacique de force $q(x_1, x_2)\vec{x}_3$.

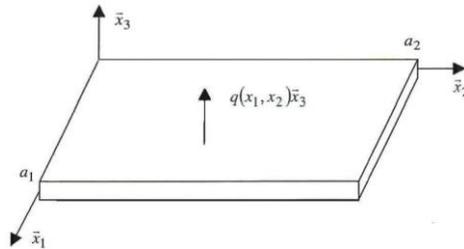


Fig.III.1. Plaque stratifiée composite en flexion

III.3. Théorie des stratifié

Les rigidités globales du stratifié sont telles que :

$$\begin{aligned} A_{16} = A_{26} = 0, \quad D_{16} = D_{26} = 0, \\ B_{11} = B_{22} = B_{12} = B_{66} = 0. \end{aligned}$$

La loi de comportement global du stratifié s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{B_{16}} & B_{26} & 0 \\ 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{26} & 0 \\ 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & 0 \\ B_{16} & B_{B_{26}} & 0 & 0 & 0 & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_6^0 \\ K_1 \\ K_2 \\ K_6 \end{bmatrix} \quad (\text{III.1})$$

$$\begin{aligned} \text{Avec :} \quad \varepsilon_1^0 &= \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}, & \varepsilon_2^0 &= \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2}, & \varepsilon_6^0 &= \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \\ \kappa_{K_1 K_2} &= -\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2}, & \kappa_{K_2} &= -\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2}, & \kappa_{K_6} &= -2 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} \end{aligned}$$

Par report des efforts globaux de cohésion :

$$\begin{aligned}
N_1 &= A_{11} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + A_{12} \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} - 2B_{16} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} \\
N_2 &= A_{12} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + A_{22} \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} - 2B_{26} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} \\
N_6 &= A_{66} \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right) - BB_{16} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} - B_{26} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2}
\end{aligned} \tag{III.2}$$

Et :

$$\begin{aligned}
M_1 &= B_{16} \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right) - D_{11} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} - D_{12} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \\
M_2 &= B_{26} \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right) - D_{12} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} - D_{22} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \\
M_6 &= B_{16} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + B_{26} \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} - 2D_{66} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2}
\end{aligned}$$

Dans les équations d'équilibre global :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_6}{\partial x_2} &= 0 \\
\frac{\partial N_6}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} &= 0 \\
\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_6}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} + q &= 0
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
A_{11} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_2^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1 \partial x_2} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x_1^2 \partial x_2} - B_{26} \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x_2^3} &= 0 \\
(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1 \partial x_2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1^2} + A_{22} \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_2^2} - B_{16} \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x_1^3} - 3B_{26} \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2^2} &= 0 \\
D_{11} \frac{\partial^4 u_3^0}{\partial x_1^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 u_3^0}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 u_3^0}{\partial x_2^4} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u_1^0}{\partial x_1^2 \partial x_2} - 3B_{26} \frac{\partial^3 u_1^0}{\partial x_2^3} \dots \\
\dots - B_{16} \frac{\partial^3 u_2^0}{\partial x_1^3} - 3B_{26} \frac{\partial^3 u_2^0}{\partial x_1 \partial x_2^2} &= q \cdot q
\end{aligned}$$

Les conditions aux limites pour un bord en appui libre suivant la direction de celui-ci sont :

- Pour $x_1 = 0$ et $x_1 = a_1$:

$$\begin{aligned}
u_3^0 &= 0, M_1 = B_{16} \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right) - D_{11} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} - D_{12} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} = 0 \\
u_1^0 &= 0, N_6 = AA_{66} \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right) - B_{16} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} - B_{26} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} = 0
\end{aligned} \tag{III.3}$$

- Pour $x_2 = 0$ et $x_2 = a_2$:

$$u_3^0 = 0, M_2 = B_{26} \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right) - D_{12} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} - D_{22} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} = 0$$

$$u_2^0 = 0, N_6 = A_{66} \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right) - B_{16} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} - B_{26} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} = 0$$

Le champ des déplacements de la plaque soumise au chargement en double sinus :

$$q_{m_1 m_2} \sin \frac{m_1 \pi x_1}{a_1} \sin \frac{m_2 \pi x_2}{a_2}$$

Qui vérifie les équations d'équilibre global et les conditions aux limites est de la forme :

$$u_1^0 = U^1_{m_1 m_2} \sin \frac{m_1 \pi x_1}{a_1} \cos \frac{m_2 \pi x_2}{a_2}$$

$$u_2^0 = U^2_{m_1 m_2} \sin \frac{m_1 \pi x_1}{a_1} \cos \frac{m_2 \pi x_2}{a_2}$$

$$u_3^0 = U^3_{m_1 m_2} \sin \frac{m_1 \pi x_1}{a_1} \cos \frac{m_2 \pi x_2}{a_2}$$

En reportant ces expressions dans les équations d'équilibre global, on obtient, après simplification, le système en $U^1_{m_1 m_2}$ et $U^2_{m_1 m_2}$ et $U^3_{m_1 m_2}$:

$$\left[\left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 A_{11} + \left(\frac{m_1 \pi}{a_2} \right)^2 A_{66} \right] U^1_{m_1 m_2} + \frac{m_1 \pi}{a_1} \frac{m_2 \pi}{a_2} (A_{12} + A_{66}) U^2_{m_1 m_2}$$

$$\dots - \frac{m_2 \pi}{a_2} \left[3 \left(\frac{m_1 \pi}{a_2} \right)^2 B_{16} + \left(\frac{m_2 \pi}{a_2} \right)^2 B_{26} \right] U^3_{m_1 m_2} = 0$$

$$\frac{m_1 \pi}{a_1} \frac{m_2 \pi}{a_2} (A_{12} + A_{66}) U^1_{m_1 m_2} + \left[\left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 A A_{66} + \left(\frac{m_2 \pi}{a_2} \right)^2 A_{A_{11}} \right] U^2_{m_1 m_2} \dots$$

$$\dots - \frac{m_1 \pi}{a_1 a_2} \left[\left(\frac{m_1 \pi}{a_2} \right)^2 B B_{16} + 3 \left(\frac{m_2 \pi}{a_2} \right)^2 B_{26} \right] U^3_{m_1 m_2} = 0 \quad (\text{III.4})$$

$$- \frac{m_2 \pi}{a_2} \left[3 \left[\left(\frac{m_1 \pi}{a_2} \right)^2 B_{16} + \left(\frac{m_2 \pi}{a_2} \right)^2 B_{26} \right] U^1_{m_1 m_2} - \frac{m_1 \pi}{a_1} \left[\left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 B_{16} \dots \right. \right.$$

$$\dots + 3 \left. \left(\frac{m_2 \pi}{a_2} \right)^2 B_{26} \right] U^2_{m_1 m_2} + \left\{ \left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^4 D D_{11} \dots \right.$$

$$\left. \dots + 2 \left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 \left(\frac{m_2 \pi}{a_2} \right)^2 (D_{12} + 2D_{66}) + \left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \frac{m_2 \pi}{a_2} \right)^4 D_{22} \right\} U^3_{m_1 m_2} = q_{m_1 m_2}$$

Qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{12} & H_{22} & H_{23} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^1_{m_1 m_2} \\ U^2_{m_1 m_2} \\ U^3_{m_1 m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{m_1 m_2} \end{bmatrix},$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 H_{11} &= \left(\frac{m_1\pi}{a_1}\right)^2 A_{11} + \left(\frac{m_2\pi}{a_2}\right)^2 A_{66} \\
 H_{22} &= \left(\frac{m_1\pi}{a_1}\right)^2 A_{66} + \left(\frac{m_2\pi}{a_2}\right)^2 A_{22} \\
 H_{33} &= \left(\frac{m_1\pi}{a_1}\right)^4 D_{11} + 2\left(\frac{m_2\pi}{a_2}\right)^2 \left(\frac{m_2\pi}{a_2}\right)^2 (D_{12} + 2D_{66}) + \left(\frac{m_2\pi}{a_2}\right)^4 D_{22}, \\
 H_{12} &= \frac{m_1\pi}{a_1} \frac{m_2\pi}{a_2} (A_{12} + A_{66}), \\
 H_{13} &= -\frac{m_2\pi}{a_2 a} \left[3\left(\frac{m_1\pi}{a_1}\right)^2 B_{16} + \left(\frac{m_2\pi}{a_2}\right)^2 B_{26} \right], \\
 H_{23} &= -\frac{m_1\pi}{a_1} \left[\left(\frac{m_1\pi}{a_1}\right)^2 B_{16} + 3\left(\frac{m_2\pi}{a_2}\right)^2 B_{26} \right]
 \end{aligned}$$

Le déterminant du système et les déterminants associés aux trois inconnues sont égaux à :

$$\begin{aligned}
 \Delta m_1 m_2 &= (H_{11}H_{12} - H_{12}^2)H_{33} + 2H_{12}H_{13}H_{23} - H_{22}H_{23}^2 - H_{22}H_{13}^2 \\
 \Delta^1 m_1 m_2 &= (H_{12}H_{23} - H_{13}H_{22})q_{m_1 m_2}, \\
 \Delta^2 m_1 m_2 &= (H_{12}H_{23} - H_{11}H_{23})q_{m_1 m_2}, \\
 \Delta^3 m_1 m_2 &= (H_{11}H_{22} - H_{12}^2)q_{m_1 m_2},
 \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 \Delta m_1 m_2 &= \pi^8 \left\{ \left[\left(\frac{m_1\pi}{a_1}\right)^2 A_{11} + \left(\frac{m_2\pi}{a_2}\right)^2 A_{66} \right] \left[\left(\frac{m_1\pi}{a_1}\right)^2 A_{66} + \left(\frac{m_2\pi}{a_2}\right)^2 A_{22} \right] \dots \right. \\
 &\dots - \left(\frac{m_1\pi}{a_1}\right)^2 \left(\frac{m_2\pi}{a_2}\right)^2 (A_{12} + A_{66})^2 \left. \left[\left(\frac{m_1\pi}{a_1}\right)^4 D_{11} + 2\left(\frac{m_1\pi}{a_1}\right)^2 \left(\frac{m_2\pi}{a_2}\right)^2 (D_{12} + 2D_{66}) \dots \right. \right. \\
 &\dots + \left(\frac{m_2\pi}{a_2}\right)^4 D_{22} \left. \right] + 2\left(\frac{m_1\pi}{a_1}\right)^2 \left(\frac{m_2\pi}{a_2}\right)^2 (D_{12} + D_{66}) \left[3\left(\frac{m_1\pi}{a_1}\right)^2 B_{16} + \left(\frac{m_2\pi}{a_2}\right)^2 B_{26} \right] \dots \\
 &\dots \times \left(\frac{m_1\pi}{a_1}\right)^2 B_{16} + 3\left(\frac{m_2\pi}{a_2}\right)^2 B_{26} \left. \right\} \dots \quad (III.5) \\
 \Delta^2 m_1 m_2 &= \pi^5 \frac{m_1\pi}{a_1} \left\{ \left[\left(\frac{m_1\pi}{a_1}\right)^2 A_{11} + \left(\frac{m_2\pi}{a_2}\right)^2 A_{66} \right] \left[\left(\frac{m_1\pi}{a_1}\right)^2 B_{16} + 3\left(\frac{m_2\pi}{a_2}\right)^2 B_{26} \right] \dots \right. \\
 &\dots - \left(\frac{m_2\pi}{a_2}\right)^2 (A_{12} + A_{66}) \left[3\left(\frac{m_1\pi}{a_1}\right)^2 B_{16} + \left(\frac{m_2\pi}{a_2}\right)^2 B_{26} \right] \left. \right\} q_{m_1 m_2}, \\
 \Delta^3 m_1 m_2 &= \pi^4 \left\{ \left[\left(\frac{m_1\pi}{a_1}\right)^2 A_{11} + \left(\frac{m_2\pi}{a_2}\right)^2 A_{66} \right] \left[\left(\frac{m_2\pi}{a_2}\right)^2 A_{66} + \left(\frac{m_2\pi}{a_2}\right)^2 A_{22} \right] \dots \right. \\
 &\dots - \left(\frac{m_1\pi}{a_1}\right)^2 \left(\frac{m_2\pi}{a_2}\right)^2 (A_{12} + A_{66})^2 \left. \right\} q_{m_1 m_2}
 \end{aligned}$$

$$U^1 m_1 m_2 = \frac{\Delta^1 m_1 m_2}{\Delta m_1 m_2}, U^2 m_1 m_2 = \frac{\Delta^2 m_1 m_2}{\Delta m_1 m_2}, U^3 m_1 m_2 = \frac{\Delta^3 m_1 m_2}{\Delta m_1 m_2}$$

Pour un chargement du type :

$$q(x_1, x_2) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} q \sin \frac{m_1 \pi}{a_1} \sin \frac{m_2 \pi}{a_2}$$

On a les déplacements :

$$\begin{aligned} u_1^0 &= \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} U^1 m_1 m_2 \sin \frac{m_1 \pi}{a_1} \cos \frac{m_2 \pi}{a_2} \\ u_2^0 &= \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} U^2 m_1 m_2 \cos \frac{m_1 \pi}{a_1} \sin \frac{m_2 \pi}{a_2} \\ u_3^0 &= \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} U^3 m_1 m_2 \sin \frac{m_1 \pi}{a_1} \sin \frac{m_2 \pi}{a_2} \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

à partir desquels on obtient les déformations et les contraintes et lorsque le nombre de couches est important, on peut prendre $B_{16} = B_{26} = 0$. Les formules précédentes donnent.

$$\begin{aligned} u_1^0 &= u_2^0 = 0, \\ u_3^0 &= \frac{1}{\pi^4} \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \frac{q_{m_1 m_2} \sin \frac{m_1 \pi}{a_1} \sin \frac{m_2 \pi}{a_2}}{\left(\frac{m_1 \pi}{a_1}\right)^4 D_{11} + 2 \left(\frac{m_1 \pi}{a_1}\right)^2 \left(\frac{m_2 \pi}{a_2}\right)^2 (D_{12} + 2D_{66}) + \left(\frac{m_2 \pi}{a_2}\right)^4 D_{22}} \end{aligned}$$

Les résultats précédents pour une plaque carrée de côté a et pour le chargement :

$$q = q_{11} \sin \frac{m_1 \pi}{a_1} \sin \frac{m_2 \pi}{a_2}$$

deviennent :

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= \left(\frac{\pi}{a}\right)^8 \{[(A_{11} + A_{66})(A_{66} + A_{22}) - (A_{12} + A_{66})^2]D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22}\} \dots \\ &\dots + 2(A_{12} + A_{66})(3B_{16} + B_{26})(B_{16} + 3B_{26}) - (A_{66} + A_{22})(3B_{16} + B_{26})^2 \dots \\ &\dots - (A_{11} + A_{66})(B_{16} + 3B_{26})^2\}, \\ \Delta_{11}^1 &= \left(\frac{\pi}{a}\right)^5 [(A_{66} + A_{22})(3B_{16} + B_{26}) - (A_{12} + A_{66})(B_{16} + 3B_{26})]q_{11}, \\ \Delta_{11}^2 &= \left(\frac{\pi}{a}\right)^5 [(A_{11} + A_{66})(B_{16} + 3B_{26}) - (A_{12} + A_{66})(3B_{16} + B_{26})]q_{11}, \\ \Delta_{11}^3 &= \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 [(A_{11} + A_{66})(A_{66} + A_{22}) - (A_{12} + A_{66})^2]q_{11}, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} u_1^0 &= \frac{\Delta_{11}^1}{\Delta_{11}} \sin \frac{\pi x_1}{a_1} \cos \frac{\pi x_2}{a_2}, \\ u_2^0 &= \frac{\Delta_{11}^2}{\Delta_{11}} \cos \frac{\pi x_1}{a_1} \sin \frac{\pi x_2}{a_2}, \\ u_3^0 &= \frac{\Delta_{11}^3}{\Delta_{11}} \sin \frac{\pi x_1}{a_1} \sin \frac{\pi x_2}{a_2}. \end{aligned}$$

Lorsque B_{16} et B_{26} sont très petits, on a :

$$\begin{aligned} u_1^0 &= u_2^0 = 0 \\ u_3^0 &= \frac{a^4 q_{11} \sin \frac{\pi x_1}{a_1} \sin \frac{\pi x_2}{a_2}}{\pi^4 [D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22}]} \end{aligned}$$

III.3. Vibrations d'une plaque stratifiée composite

La plaque rectangulaire de dimensions a_1 et a_2 est en appui libre suivant la direction de son contour. Elle n'est soumise à aucun effort extérieur donné.

En reportant les efforts globaux de membrane :

$$\begin{aligned} N_1 &= A_{11} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + A_{12} \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} - 2B_{16} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} \\ N_2 &= A_{12} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + A_{22} \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} - 2B_{26} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} \\ N_6 &= A_{66} \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right) - B_{16} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} - B_{26} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Et de flexion :

$$\begin{aligned} M_1 &= B_{16} \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right) - D_{11} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} - D_{12} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \\ M_2 &= B_{26} \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right) - D_{12} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} - D_{22} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \\ M_6 &= B_{16} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + B_{26} \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} - 2D_{66} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} \end{aligned}$$

Dans les équations des vibrations globales :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_6}{\partial x_2} &= I_0 \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_6}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} &= I_0 \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_6}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} &= I_0 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial t^2} \end{aligned}$$

On obtient les trois équations :

$$\begin{aligned}
A_{11} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_2^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1 \partial x_2} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x_1^2 \partial x_2} - B_{26} \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x_2^3} &= I_0 \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} \\
(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1 \partial x_2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1^2} + A_{22} \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_2^2} - B_{16} \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x_1^3} - 3B_{26} \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2^2} &= I_0 \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial t^2} \\
D_{11} \frac{\partial^4 u_3^0}{\partial x_1^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 u_3^0}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 u_3^0}{\partial x_2^4} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u_1^0}{\partial x_1^2 \partial x_2} - 3B_{26} \frac{\partial^3 u_1^0}{\partial x_2^3} \dots & \\
\dots - B_{16} \frac{\partial^3 u_2^0}{\partial x_1^3} - 3B_{26} \frac{\partial^3 u_2^0}{\partial x_1 \partial x_2^2} + I_0 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial t^2} &= 0
\end{aligned} \tag{III.8}$$

Les conditions aux limites d'une plaque en appui libre suivant la direction du contour sont :

- Pour $x_1 = 0$ et $x_1 = a_1$:

$$\begin{aligned}
u_3^0 = 0, M_1 = B_{16} \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right) - D_{11} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} - D_{12} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} &= 0 \\
u_1^0 = 0, N_6 = A_{66} \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right) - B_{16} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} - B_{26} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} &= 0
\end{aligned}$$

- Pour $x_2 = 0$ et $x_2 = a_2$:

$$\begin{aligned}
u_3^0 = 0, M_2 = B_{26} \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right) - D_{12} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} - D_{22} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} &= 0 \\
u_2^0 = 0, N_6 = A_{66} \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right) - B_{16} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} - B_{26} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} &= 0
\end{aligned}$$

Le champ des déplacements défini par :

$$\begin{aligned}
u_1^0 &= U_{m_1 m_2}^1 \sin \frac{m_1 \pi x_1}{a_1} \cos \frac{m_2 \pi x_2}{a_2} \sin(\omega_{m_1 m_2} t + \varphi_{m_1 m_2}) \\
u_2^0 &= U_{m_1 m_2}^2 \cos \frac{m_1 \pi x_1}{a_1} \sin \frac{m_2 \pi x_2}{a_2} \sin(\omega_{m_1 m_2} t + \varphi_{m_1 m_2}) \\
u_3^0 &= U_{m_1 m_2}^3 \sin \frac{m_1 \pi x_1}{a_1} \sin \frac{m_2 \pi x_2}{a_2} \sin(\omega_{m_1 m_2} t + \varphi_{m_1 m_2})
\end{aligned}$$

Vérifie les conditions sur le bord et les équations de mouvement.

Par report de ces relations dans les équations des vibrations globales, on obtient, après simplification, le système suivant en $U_{m_1 n_2}^1, U_{m_1 m_2}^2$ et $U_{m_1 m_2}^3$:

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 A_{11} + \left(\frac{m_2 \pi}{a_2} \right)^2 A_{66} - I_0 \omega_{m_1 m_2}^2 \right] U_{m_1 m_2}^1 + \frac{m_1 \pi}{a_1} \frac{m_2 \pi}{a_2} (A_{12} + A_{66}) U_{m_1 m_2}^2 \dots \\
& \dots - \frac{m_1 \pi}{a_1} \left[3 \left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 B_{16} + \left(\frac{m_2 \pi}{a_2} \right)^2 B_{26} \right] U_{m_1 m_2}^3 = 0 \\
& \frac{m_1 \pi}{a_1} \frac{m_2 \pi}{a_2} (A_{12} + A_{66}) U_{m_1 m_2}^1 + \left[\left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 A_{66} + \left(\frac{m_2 \pi}{a_2} \right)^2 A_{22} - I_0 \omega_{m_1 m_2}^2 \right] U_{m_1 m_2}^2 \dots \\
& \dots - \frac{m_1 \pi}{a_1} \left[\left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 B_{16} + 3 \left(\frac{m_2 \pi}{a_2} \right)^2 A_{26} \right] U_{m_1 m_2}^3 = 0 \tag{III.9} \\
& - \frac{m_2 \pi}{a_2} \left[3 \left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 B_{16} + \left(\frac{m_2 \pi}{a_2} \right)^2 B_{26} \right] U_{m_1 m_2}^1 - \frac{m_1 \pi}{a_1} \left[\left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 B_{16} \dots \right. \\
& \dots + 3 \left. \left(\frac{m_2 \pi}{a_2} \right)^2 B_{26} \right] U_{m_1 m_2}^2 + \left\{ \left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^4 D_{11} \dots \right. \\
& \left. \dots + 2 \left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 \left(\frac{m_2 \pi}{a_2} \right)^2 (D_{12} + 2D_{66}) + \left(\frac{m_2 \pi}{a_2} \right)^4 D_{22} - I_0 \omega_{m_1 m_2}^2 \right\} U_{m_1 m_2}^3 = 0
\end{aligned}$$

Qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} H_{11} - I_0 \omega_{m_1 m_2}^2 & H_{12} & H_{13} \\ H_{12} & H_{22} - I_0 \omega_{m_1 m_2}^2 & H_{23} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} - I_0 \omega_{m_1 m_2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{m_1 m_2}^1 \\ U_{m_1 m_2}^2 \\ U_{m_1 m_2}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
H_{11} &= \left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 A_{11} + \left(\frac{m_2 \pi}{a_2} \right)^2 A_{66} \\
H_{22} &= \left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 A_{66} + \left(\frac{m_2 \pi}{a_2} \right)^2 A_{22}, \\
\text{Avec : } H_{33} &= \left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^4 D_{11} + 2 \left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 \left(\frac{m_2 \pi}{a_2} \right)^2 (D_{12} + 2D_{66}) + \left(\frac{m_2 \pi}{a_2} \right)^4 D_{22} \\
H_{12} &= \frac{m_1 \pi}{a_1} \frac{m_2 \pi}{a_2} (A_{12} + A_{66}). \\
H_{13} &= - \frac{m_2 \pi}{a_2} \left[3 \left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 B_{16} + \left(\frac{m_2 \pi}{a_2} \right)^2 B_{26} \right] \\
H_{23} &= - \frac{m_1 \pi}{a_1} \left[\left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 B_{16} + 3 \left(\frac{m_2 \pi}{a_2} \right)^2 B_{26} \right]
\end{aligned}$$

Ce système algébrique admet une solution autre que la solution banale $U_{m_1 m_2}^1 = U_{m_1 m_2}^2 = U_{m_1 m_2}^3 = 0$ pour les valeurs de $\omega_{m_1 m_2}$ qui annule le déterminant :

$$\begin{vmatrix} H_{11} - I_0 \omega_{m_1 m_2}^2 & H_{12} & H_{13} \\ H_{12} & H_{22} - I_0 \omega_{m_1 m_2}^2 & H_{23} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} - I_0 \omega_{m_1 m_2}^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
& (H_{11} - I_0 \omega_{m_1 m_2}^2)(H_{22} - I_0 \omega_{m_1 m_2}^2)(H_{33} - I_0 \omega_{m_1 m_2}^2) + 2H_{12}H_{13}H_{23} \dots \\
& H_{13}^2 - (H_{33} - I_0 \omega_{m_1 m_2}^2)H_{12}^2 = 0 \\
& \dots - (H_{11} - I_0 \omega_{m_1 m_2}^2)H_{23}^2 - (H_{22} - I_0 \omega_{m_1 m_2}^2)
\end{aligned}$$

Qui s'écrit sous la forme :

$$-A\omega_{m_1, m_2}^6 + B\omega_{m_1, m_2}^4 - C\omega_{m_1, m_2}^2 + D = 0$$

Avec :

$$\begin{aligned} A &= I_0^3, \\ B &= (H_{11} + H_{22} + H_{33})I_0^2, \\ C &= (H_{11}H_{22} + H_{22}H_{33} + H_{33}H_{11} - H_{12}^2 - H_{13}^2 - H_{23}^2)H_0, \\ D &= (H_{11}H_{22} - H_{12}^2)H_{33} + 2H_{12}H_{13}H_{23} - H_{11}H_{23}^2 - H_{22}H_{13}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \left\{ \left(\frac{m_1\pi}{a_1} \right)^2 (A_{11} + A_{66}) + \left(\frac{m_2\pi}{a_2} \right)^2 (A_{22} + A_{66}) + \left(\frac{m_1\pi}{a_1} \right)^4 D_{11} \dots \right. \\ &\dots + 2 \left(\frac{m_1\pi}{a_1} \right)^2 \left(\frac{m_2\pi}{a_2} \right)^2 (D_{12} + 2D_{66}) + \left. \left(\frac{m_2\pi}{a_2} \right)^4 D_{22} \right\} I_0^2 \\ C &= \left\{ \left(\frac{m_1\pi}{a_1} \right)^2 (A_{11} + A_{66}) + \left(\frac{m_2\pi}{a_2} \right)^2 (A_{22} + A_{66}) \right\} \left\{ \left(\frac{m_1\pi}{a_1} \right)^4 D_{11} \dots \right. \\ &\dots + 2 \left(\frac{m_1\pi}{a_1} \right)^2 \left(\frac{m_2\pi}{a_2} \right)^2 (D_{12} + 2D_{66}) + \left. \left(\frac{m_2\pi}{a_2} \right)^4 D_{22} \right\} + \left[\left(\frac{m_1\pi}{a_1} \right)^4 A_{11} \dots \right. \\ &\dots + \left. \left(\frac{m_2\pi}{a_2} \right)^4 A_{22} \right] A_{66} + \left(\frac{m_1\pi}{a_1} \right)^2 \left(\frac{m_2\pi}{a_2} \right)^2 [A_{11}A_{22} - A_{12}(A_{12} + 2A_{66})] \dots \\ &\dots - \left(\frac{m_2\pi}{a_2} \right)^2 \left[3 \left(\frac{m_1\pi}{a_1} \right)^2 B_{16} + \left(\frac{m_2\pi}{a_2} \right)^2 B_{26} \right]^2 \dots \end{aligned}$$

Ou encore :

$$\dots - \left(\frac{m_1\pi}{a_1} \right)^2 \left[\left(\frac{m_1\pi}{a_1} \right)^2 B_{16} + 3 \left(\frac{m_2\pi}{a_2} \right)^2 B_{26} \right]^2 I_0 \quad (\text{III.10})$$

$$\begin{aligned} D &= \left\{ \left[\left(\frac{m_1\pi}{a_1} \right)^4 A_{11} + \left(\frac{m_2\pi}{a_2} \right)^4 A_{22} \right] A_{66} \dots \right. \\ &\dots + \left. \left(\frac{m_1\pi}{a_1} \right)^2 \left(\frac{m_2\pi}{a_2} \right)^2 [A_{11}A_{22} - A_{12}(A_{12} + 2A_{66})] \right\} \dots \\ &\dots \times \left\{ \left(\frac{m_1\pi}{a_1} \right)^4 D_{11} + 2 \left(\frac{m_1\pi}{a_1} \right)^2 \left(\frac{m_2\pi}{a_2} \right)^2 (D_{12} + 2D_{66}) + \left(\frac{m_2\pi}{a_2} \right)^4 D_{22} \right\} \dots \\ &\dots + 2 \left(\frac{m_1\pi}{a_1} \right)^2 \left(\frac{m_2\pi}{a_2} \right)^2 (A_{12} + A_{66}) \left[3 \left(\frac{m_1\pi}{a_1} \right)^2 B_{16} + \left(\frac{m_2\pi}{a_2} \right)^2 B_{26} \right] \dots \\ &\dots \times \left[\left(\frac{m_1\pi}{a_1} \right)^2 B_{16} + 3 \left(\frac{m_2\pi}{a_2} \right)^2 B_{26} \right] \dots \end{aligned}$$

$$\dots - \left(\frac{m_1\pi}{a_1} \right)^2 \left[\left(\frac{m_1\pi}{a_1} \right)^2 A_{11} + \left(\frac{m_2\pi}{a_2} \right)^2 \frac{m_2\pi}{a_2} \frac{m_2\pi}{66} \right] \left[\left(\frac{m_1\pi}{a_1} \right)^2 B_{16} + 3 \left(\frac{m_2\pi}{a_2} \right)^2 B_{26} \right]^2$$

$$\dots - \left(\frac{m_2\pi}{a_2} \right)^2 \left[\left(\frac{m_1\pi}{a_1} \right)^2 A_{66} + \left(\frac{m_2\pi}{a_2} \right)^2 A_{22} \right] \left[3 \left(\frac{m_1\pi}{a_1} \right)^2 B_{16} + \left(\frac{m_2\pi}{a_2} \right)^2 B_{26} \right]^2$$

Pour chaque valeur du couple (m_1, m_2) , on obtient trois pulsations propres.

Dans le cas où les inerties de membranes $I_0 \frac{\partial^2 uu_1^0}{\partial t^2}$ et $I_0 \frac{\partial^2 uu_2^0}{\partial t^2}$ sont négligeables, le système précédent s'écrit :

$$\begin{bmatrix} H_{H_{11}} & H_{H_{12}} & H_{H_{13}} \\ H_{H_{11}} & H_{H_{22}} & H_{H_{23}} \\ H_{H_{13}} & H_{23} & H_{H_{33}} - I_0 \omega_{m_1 m_2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^1 m_1 m_2 \\ U^2 m_1 m_2 \\ U^3 m_1 m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Avec les valeurs précédentes des termes H_{ij} , le déterminant devient :

$$\begin{vmatrix} H_{H_{11}} & H_{H_{12}} & H_{H_{13}} \\ H_{H_{12}} & H_{H_{22}} & H_{H_{23}} \\ H_{H_{13}} & H_{H_{23}} & H_{H_{33}} - I_0 \omega_{m_1 m_2}^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(H_{11}H_{22} - H_{12}^2)(H_{33} - I_0 \omega_{m_1 m_2}^2) - 2H_{12}H_{13}H_{23} - H_{11}H_{23}^2 - H_{22}H_{13}^2 = 0$$

Pour chaque couple (m_1, m_2) . On obtient la pulsation propre :

$$\omega_{m_1 m_2}^2 = \frac{1}{I_0} \left(H_{33} + \frac{2H_{12}H_{13}H_{23} - H_{11}H_{23}^2 - H_{22}H_{13}^2}{H_{11}H_{22} - H_{12}^2} \right)$$

Soit :

$$\omega_{m_1 m_2}^2 = \frac{\pi^4}{I_0} \left(P_1 + \frac{P_2}{P_3} \right)$$

Avec :

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(\frac{m_1}{a_1}\right)^4 D_{11} + 2 \left(\frac{m_1}{a_1}\right)^2 \left(\frac{m_2}{a_2}\right)^2 (D_{12} + 2D_{66}) + \left(\frac{m_2}{a_2}\right)^4 D_{22} \\ P_2 &= 2 \left(\frac{m_1}{a_1}\right)^2 \left(\frac{m_2}{a_2}\right)^2 (A_{12} + A_{66}) \left[3 \left(\frac{m_1}{a_1}\right)^2 B_{16} + \left(\frac{m_2}{a_2}\right)^2 B_{26} \right] \dots \\ &\dots \times \left[\left(\frac{m_1}{a_1}\right)^2 B_{16} + 3 \left(\frac{m_2}{a_2}\right)^2 B_{26} \right] \dots \\ &\dots - \left(\frac{m_1}{a_1}\right)^2 \left[\left(\frac{m_1}{a_1}\right)^2 A_{11} + \left(\frac{m_2}{a_2}\right)^2 A_{66} \right] \left[\left(\frac{m_1}{a_1}\right)^2 B_{16} + 3 \left(\frac{m_2}{a_2}\right)^2 B_{26} \right]^2 \dots \\ &\dots - \left(\frac{m_2}{a_2}\right)^2 \left[\left(\frac{m_1}{a_1}\right)^2 A_{11} + \left(\frac{m_2}{a_2}\right)^2 A_{66} \right] \left[3 \left(\frac{m_1}{a_1}\right)^2 B_{16} + \left(\frac{m_2}{a_2}\right)^2 B_{26} \right]^2 \\ P_3 &= \left[\left(\frac{m_1}{a_1}\right)^4 A_{11} + \left(\frac{m_2}{a_2}\right)^4 A_{22} \right] A_{66} + \left(\frac{m_1}{a_1}\right)^2 \left(\frac{m_2}{a_2}\right)^2 [A_{11}A_{22} - A_{12}(A_{12} + 2A_{66})] \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Lorsque B_{16} et B_{26} sont négligeables, l'expression précédente se réduit à :

$$\omega_{m_1 m_2}^2 = \pi^4 \frac{\left(\frac{m_1}{a_1}\right)^4 D_{11} + 2 \left(\frac{m_1}{a_1}\right)^2 \left(\frac{m_2}{a_2}\right)^2 (D_{12} + 2D_{66}) + \left(\frac{m_2}{a_2}\right)^4 D_{22}}{I_0}$$

III.4. Application numérique

Le matériau utilisé est un composite carbone époxy. Les fibres de carbone et la résine est de type époxy. Les propriétés des fibres de carbone et de la résine sont illustrées respectivement sur les tableaux III.1 et III.2. Des plaques de dimension $30 \times 30 \text{cm}^2$ sont étudiés.

Tableau III.1. Propriétés de la fibre de carbone

Masse surfacique g/m^2	534
Masse Volumique g/cm^3	1.78
Orientation	$0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$
Propriétés de la résine époxy	
T°C	212
Masse Volumique g/cm^3	1.31

La densité de masse est supposée uniforme dans le sens de l'épaisseur, c'est-à-dire que ρ_1 , ρ_2 et, ρ_3 sont identiques, où la masse volumique du composite est de l'ordre de 1590kg/m^3 .

Les fréquences propres sont données par le tableau III.3.

Tableau III.2. Fréquence naturelles en Hz

Mode 1-1	108.2400
Mode 1-2	297.0900
Mode 1-3	913.7700
Mode 2-2	1536.215
Mode 2-3	1539.052
Mode 2-4	4753.480
Mode 3-3	4784.591
Mode 3-4	5623.771

La figure III.2 montre la variation des fréquences naturelles en fonction des modes de vibration. On constate que les fréquences naturelles augmentent en fonction de l'augmentation des modes. On observe une augmentation rapide de la fréquence naturelle du mode 5 au mode 6, sauf ce cas les fréquences des autres modes ont variées d'une manière progressive.

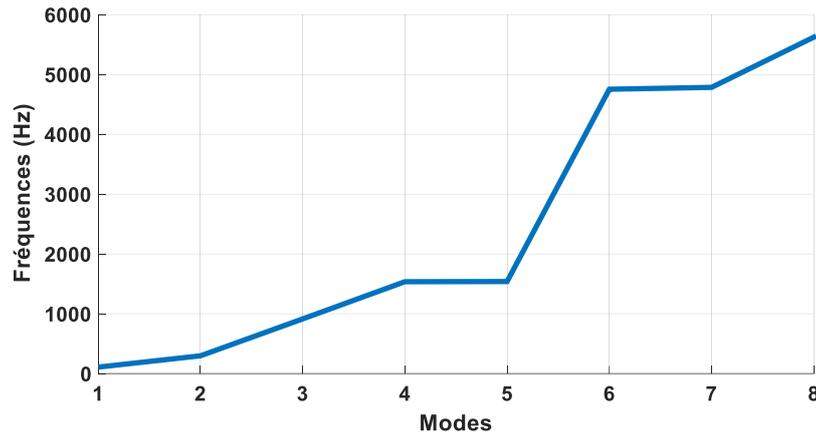


Fig.III.2. Variation des fréquences naturelles en fonction des modes de vibration
 Les premiers modes de vibration de la plaque sont présentés à la figure III.3.

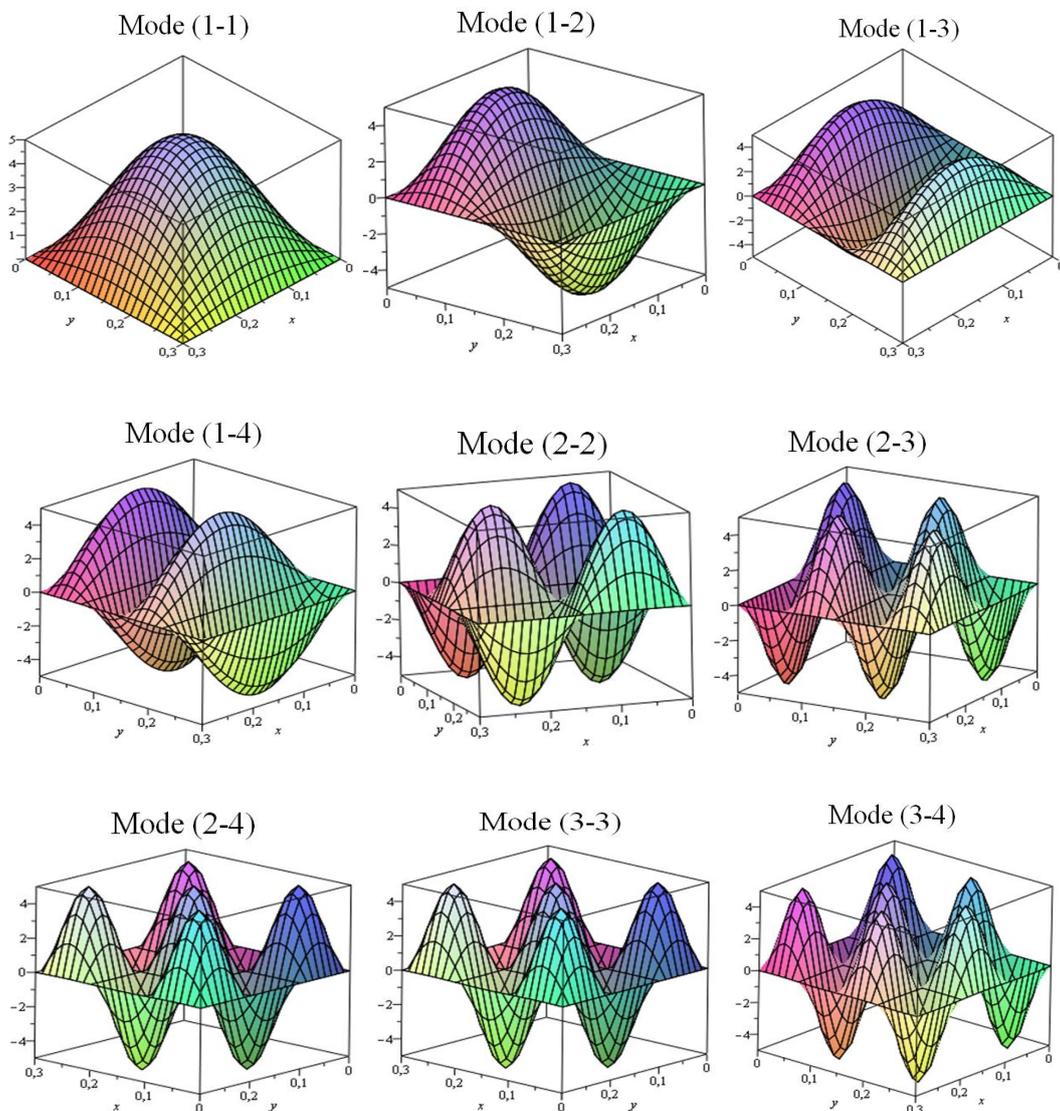


Fig.III.3. Visualisation des premiers modes de vibration de la plaque

III.5. Conclusion

Dans ce chapitre, l'approche analytique du comportement en flexion et la vibration d'une plaque composite stratifiée à quatre couches a été présentée. L'évaluation des fréquences naturelles de la structure et leurs modes de déformation ont été abordées.

Chapitre IV

***Simulation numérique du comportement
des plaques composites stratifiées***

IV.1. Introduction

Ce chapitre a pour objectif d'étudier le comportement mécanique en flexion et vibratoire de la plaque composite stratifiée ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$) par éléments finis sous le code de calcul Abaqus. Nous allons comparer les résultats obtenus par l'approche analytique à ceux obtenus par la méthode des éléments finis.

IV.2. Analyse numérique par éléments finis

Le modèle global de l'analyse vibratoire par la méthode des éléments finis de la structure a été présenté par la figure IV.1. Dans le cas de l'analyse par éléments finis, plus le maillage était dense, plus le résultat de calcul était précis. En raison de la complexité et d'anisotropie des matériaux composites, plus les éléments étaient denses, ce qui a entraîné le résultat de la non-convergence. Par conséquent, la densité des mailles doit être divisée de manière appropriée. Une petite taille de maillage augmenterait le nombre d'éléments, un long temps de calcul et une difficulté possible de convergence.

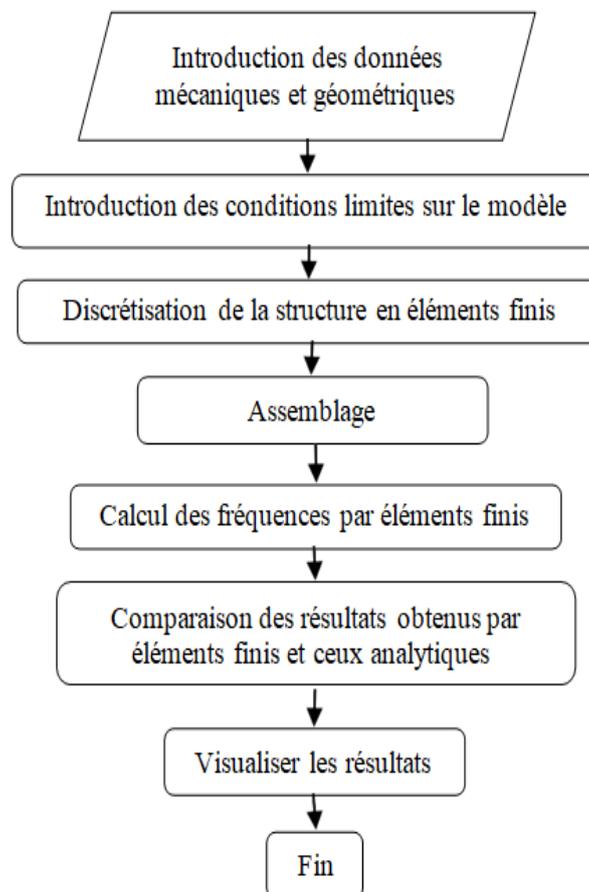


Fig.IV.1. Modèle global d'analyse vibratoire par la méthode des éléments finis

Les étapes de la modélisation par la méthode des éléments finis sont présentées sur la figure IV.2. L'outil de calcul Abaqus CAE est divisé en unités fonctionnelles appelées modules. Chaque module contient un ensemble d'outils propres à chaque tâche de modélisation.

- Le module **Part** permet de créer tous les objets géométriques nécessaires à notre problème.
- Le module **Property** permet, comme son nom l'indique, de définir toutes les propriétés d'un objet géométrique ou d'une partie de ces objets.
- Le module **Assembly** permet d'assembler les différents objets géométriques créés dans un même repère de coordonnées globales. Le module **Step** permet de définir toutes les étapes et les requêtes pour le post traitement, c'est à dire le moment (temps) à partir duquel une force est appliquée et jusqu'à quand, il est aussi possible de créer des forces ou des conditions limites qui s'activent à des moments donnés.
- Le module **Mesh** contient tous les outils nécessaires pour générer un maillage élément fini sur un assemblage.
- Le module **Job** est utilisé pour analyser ce modèle. Abaqus va alors réaliser tous les calculs nécessaires et en tirer des résultats.
- Le module **Visualisation** permet de visualiser le modèle et les résultats ainsi que les courbes de charges et les déformations.

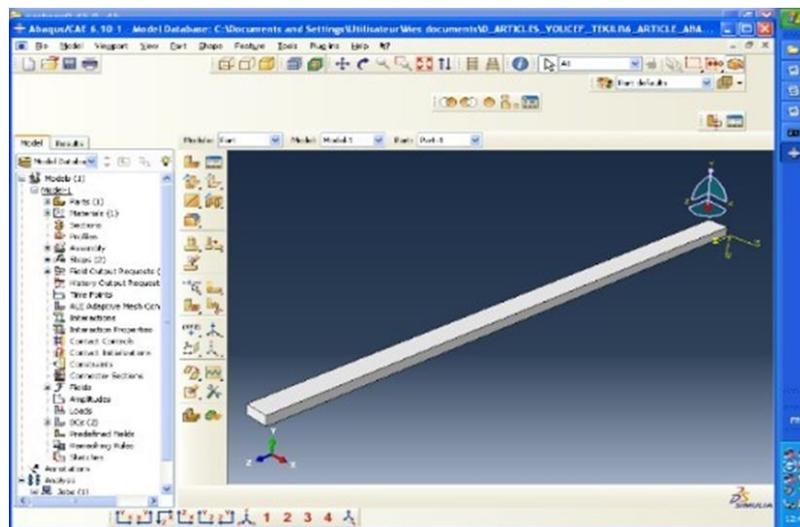


Fig.IV.2. Simulation numérique par éléments finis Abaqus

IV.3. Modèle géométrique de la plaque

Le modèle géométrique de la plaque réalisé sous le code de calcul Abaqus est donné par la figure IV.3 et figure IV.4, ce modèle est identique à celui utilisé dans la partie analytique.

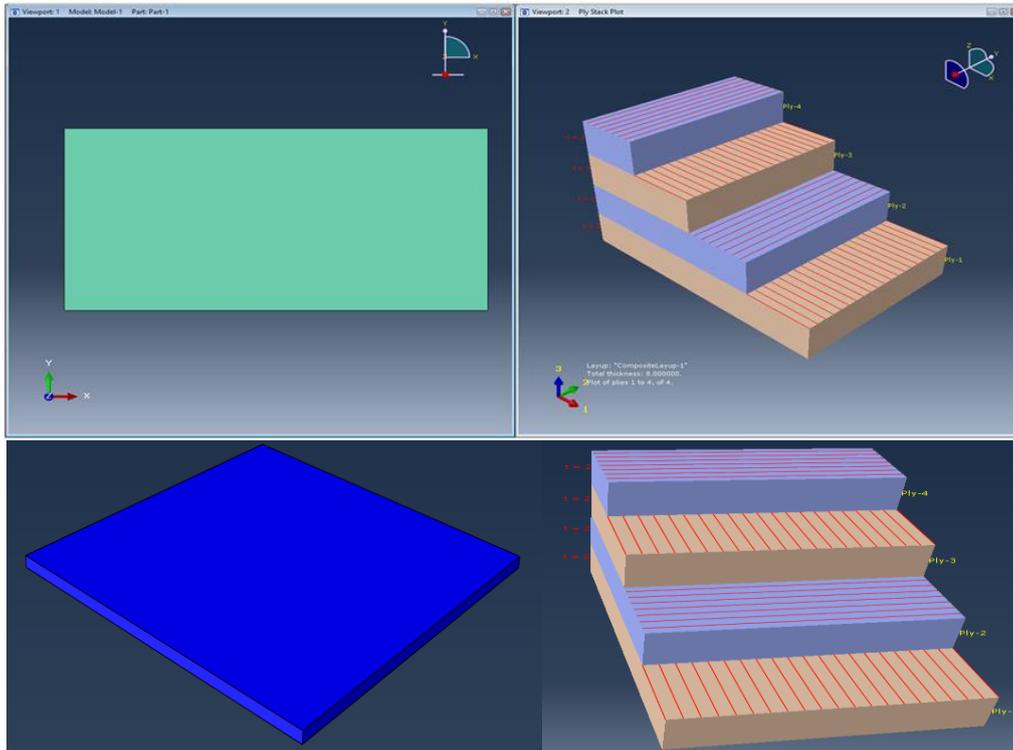


Fig. IV.3. Modèle géométrique de la plaque sans maillage

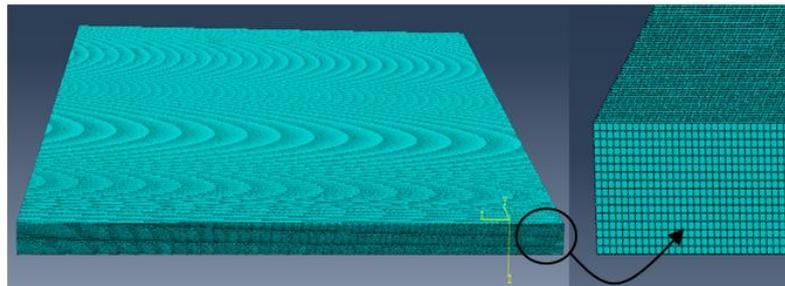


Fig. IV.4. Modèle géométrique de la plaque avec maillage - Élément hexaédrique à 8 nœuds (C3D8R)

IV.4. Simulation numérique par MEF

Nous avons simulé le comportement en flexion et vibratoire de la plaque en matériau composite stratifié à l'aide du logiciel commercial Abaqus en utilisant le modèle tridimensionnel à l'aide d'éléments hexaédriques linéaires à 8 nœuds (C3D8R). Dans la modélisation par éléments finis, la taille des éléments influe directement sur la précision des résultats, plus la taille des éléments diminue plus la précision des résultats augmente et s'approche de la solution exacte. Après réalisation de quelques tests de convergence, on a choisi un élément de taille $0.2 \times 0.2 \times 0.2 \text{ mm}$, car on a constaté qu'un élément de maillage plus fin n'affecte pas les résultats de simulation. Le maillage éléments finis optimal est représenté

sur la figure IV.4. Le tableau 1 présente les propriétés mécaniques nécessaires des matériaux pour la simulation dans le logiciel Abaqus.

Tableau IV.1. Propriétés mécaniques du composite Carbone-Epoxy

E_{11} (MPa)	E_{22} (MPa)	ν_{12}	G_{12} (MPa)	G_{23} (MPa)	G_{13} (MPa)
59160	59160	0.317	17500	2700	2700

La figure IV.5 montre les déformées obtenues par le code de calcul Abaqus ainsi leurs fréquences associées.

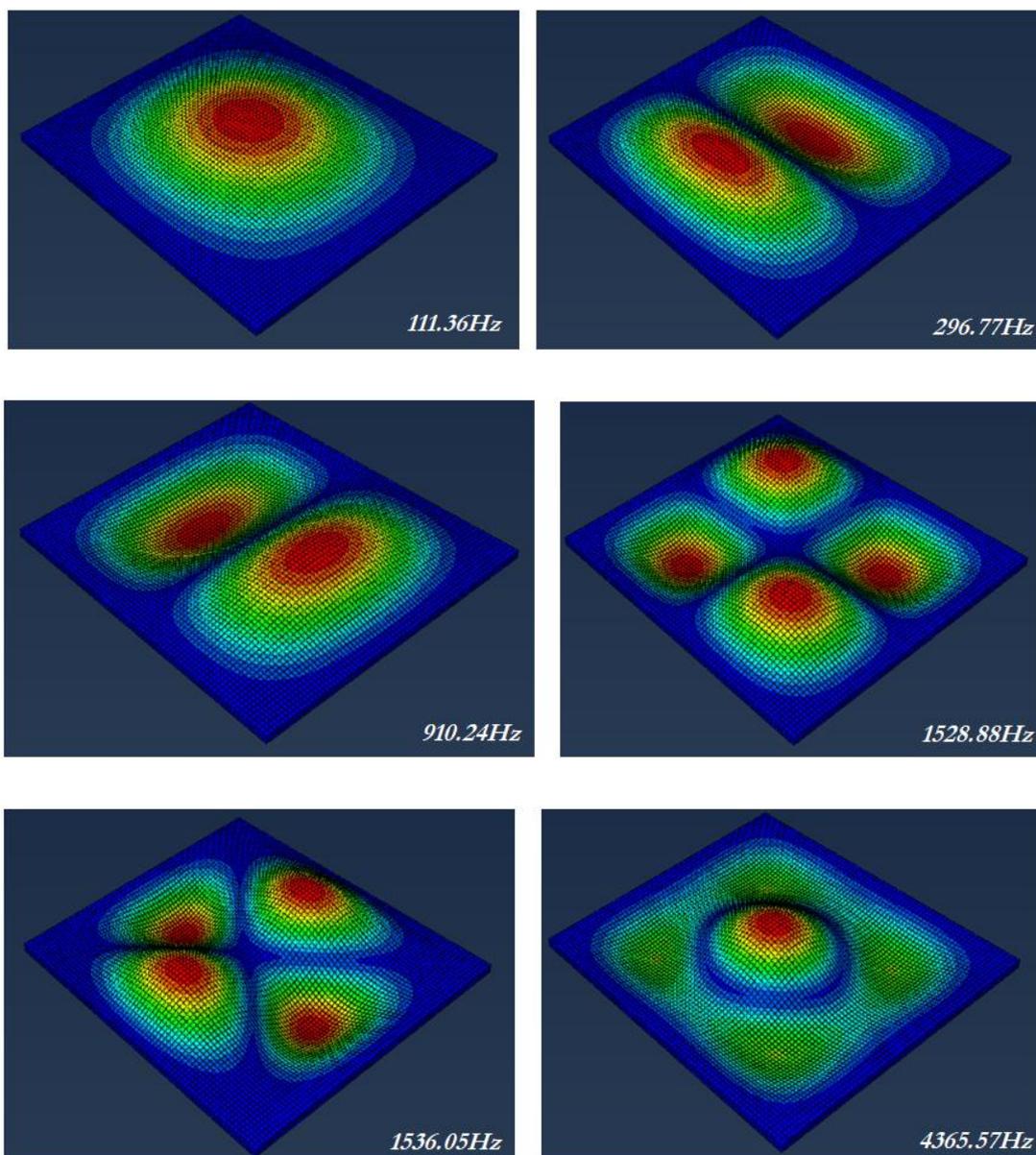


Fig.IV.5. Différents modes de déformation

IV.5. Comparaison des résultats et discussions

Dans cette partie, nous avons présenté une validation des résultats trouvés par l'approche analytique avec ceux calculés par le modèle éléments finis sous le code du calcul Abaqus.

Le tableau IV.2 ci-dessous présente une comparaison entre les fréquences naturelles trouvées par l'approche analytique avec ceux trouvés par la méthode des éléments finis à l'aide du code de calcul Abaqus. La figure IV.6 représente cette comparaison, on remarque que les résultats obtenus par FEM sous le code du calcul Abaqus sont confrontés aux résultats calculés par l'approche analytique avec une erreur maximale de 2.8%. Ce qui montre que le modèle choisi dans le code Abaqus est convenable au modèle développé par l'approche analytique. Par cotre on observe une divergence des fréquences des supérieures ou égale 5 avec une erreur maximale de 8.8%.

Tableau IV.2. Comparaison des fréquences naturelles

Modes	Analytique (Hz)	Numérique (Hz)	$\Delta\%$
1-1	108.2400	111.36	2.80
1-2	297.0900	296.77	0.10
1-3	913.7700	910.24	0.40
2-2	1536.215	1528.88	0.48
2-3	1539.052	1536.05	0.20
2-4	4753.480	4365.57	8.80

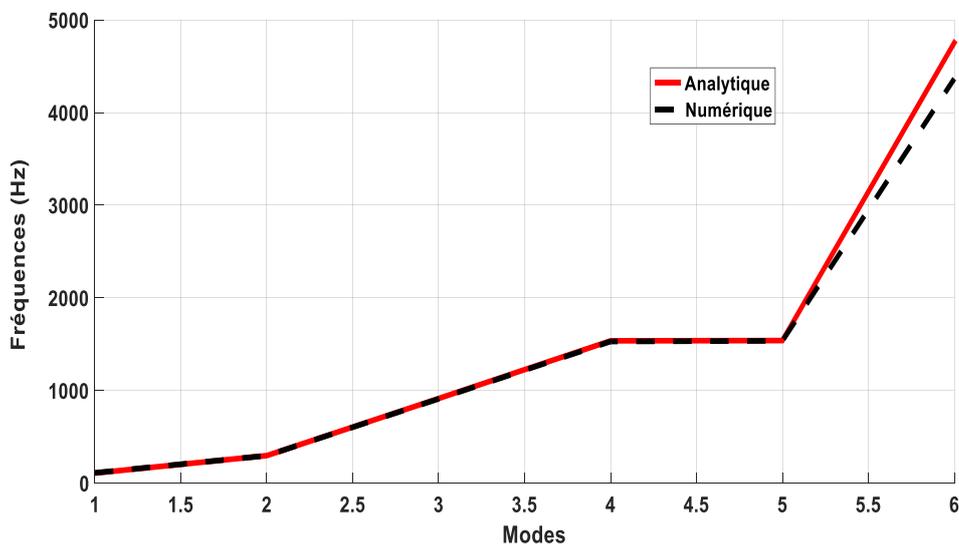
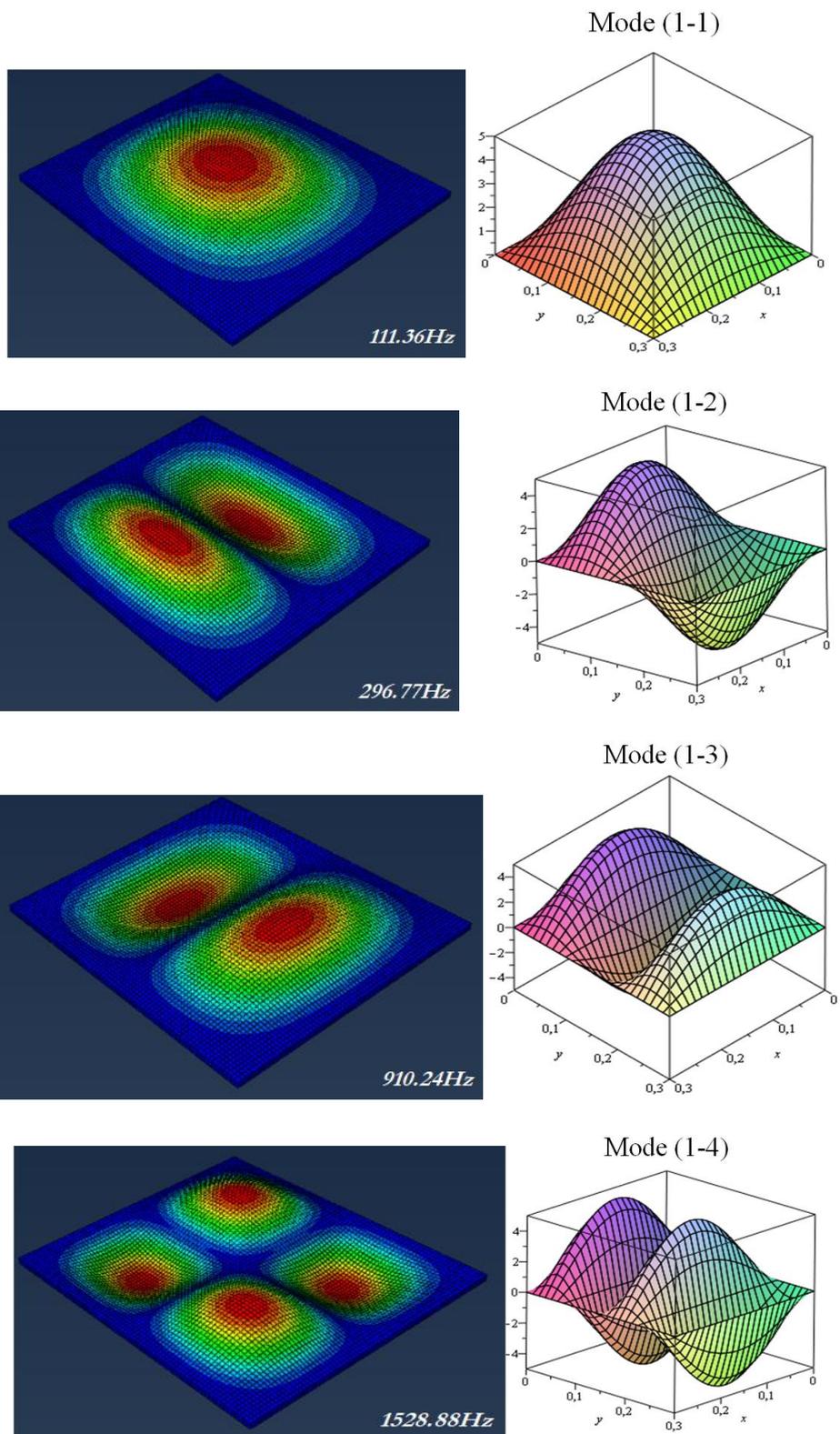


Fig.IV.6. Comparaison des fréquences naturelles en fonction des modes trouvées par l'approche analytique et la méthode des éléments finis

La figure IV.7 donne les modes de déformation vibratoire de la plaque sandwich et leurs fréquences naturelles obtenus par l'approche analytique et le code de calcul Abaqus.



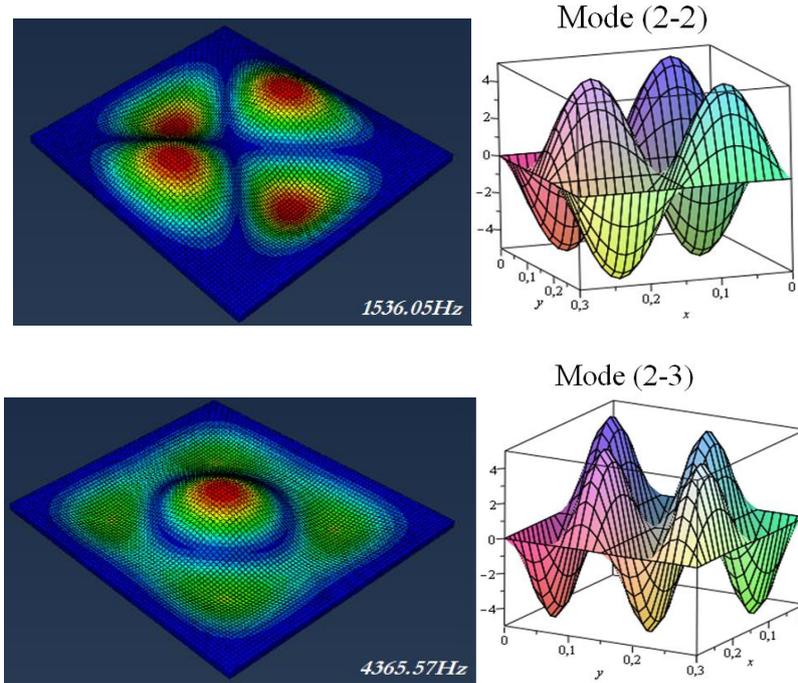


Fig.IV.7. Les six premiers modes de vibration de la plaque avec leurs fréquences associées

IV.6. Conclusion

Dans ce chapitre et fin de valider notre approche analytique développé en chapitre précédent, nous avons simulé par le code du calcul Abaqus le comportement en flexion et vibratoire de la plaque composite stratifiée en carbone époxy. Les résultats trouvés ont montré une bonne confrontation, cette confrontation a validé le modèle analytique adopté.

Conclusion générale

Ce travail a été entrepris dans le but d'étudier l'évolution du comportement en flexion et vibratoire des plaques composites stratifiées en carbone époxy, et de valider l'approche analytique développée. Dans cet objectif, nous avons analysé le comportement en flexion et vibratoire de ces plaques par éléments finis sous le code de calcul Abaqus. Les résultats trouvés ont montré une bonne confrontation, cette confrontation a validé le modèle analytique développé, en particulier le bon choix de champ de déplacements et les fonctions d'approximation. L'analyse de ces résultats permet de tirer un certain nombre de conclusions:

Les résultats trouvés montrent que les structures composites stratifiées ont des meilleures propriétés de légèreté et rigidité par rapport aux structures classiques. Ces structures composites pourraient ouvrir de nouvelles opportunités dans différents domaines aéronautique, aérospatial, génie mécanique et génie civil.

Le choix de l'orientation des fibres ainsi que la stratification des couches dépendront de type des sollicitations et des charges appliquées sur la structure.

Malheureusement à cause du temps court donné aux étudiants pour achever le projet de fin d'études, vu de la complexité du problème analytique traité, nous n'avons pas pu aborder toutes les parties du sujet que nous avons initialement fixés dans nos objectifs, en particulier l'étude de la stabilité des stratifiés.

Références bibliographiques

- [1] Berthelot J.M., Matériaux composites comportement mécanique et analyse des structures, 3^{ème} édition technique et documentation, ISBN N° 2-7430-0349-9, 1999.
- [2] Whitney J.M, Structural analysis of laminated anisotropic plates, Technomic publishing company, ISBN N° 87762-518-2, 1987.
- [3] Drapier S., Mécanique des Composites hautes performances, 3^{ème} édition 2021.
- [4] Philips L.N., Design with advanced composite materials, , Édition Springer-Verlag, ISBN N° 0-85072-238-1, 1989.
- [5] Laroze S., Barrau J.-J., Mécanique des Structures, Tome 2 Poutres, Édition Masson 1991.
- [6] Barrau J.-J., DEGEORGES D. G., Structures en matériaux composites, Réf : BM5080 v1, 2004, <https://doi.org/10.51257/a-v1-bm5080>
- [7] Anlas G., Goker G., Vibration analysis of skew fibre-reinforced composite laminated plates, Journal of Sound and Vibration (2001) 242(2), 265-276, <http://www.idealibrary.com>
- [8] Balamurugan V., Narayanan S., Shell finite element for smart piezoelectric composite plate/shell structures and its application to the study of active vibration control, Finite Elements in Analysis and Design 37 (2001) 713-738.
- [9] Zhou G., Lloyd J.C., McGuirk J.J., Experimental evaluation of geometric factors affecting damage mechanisms in carbon/epoxy plates, Composites: Part A 32 (2001) 71-84.
- [10] Lee Y-Y., Ng C-F., Nonlinear response of composite plates using the finite element modal reduction method, Engineering Structures 23 (2001) 1104–1114.
- [11] Rikards R., Chate A., Ozolinsh O., Analysis for buckling and vibrations of composite stiffened shells and plates, Composite Structures 51 (2001) 361-370.
- [12] Koanda M.M.L., Optimisation des propriétés physiques d'un composite carbone époxy fabriqué par le procédé RFI, Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, 2012, <https://publications.polymtl.ca/865>
- [13] Darıcık F., Topcu A., Aydın K., Çelik S., Carbon nanotube (CNT) modified carbon fiber/epoxy composite plates for the PEM fuel cell bipolar plate application, International Journal of Hydrogen Energy 48(2023) 1090-1106.

<https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2022.09.297>

- [14] Cuadrado M., Pernas-Sánchez J., Artero-Guerrero J.A., Varas D., Detection of barely visible multi-impact damage on carbon/epoxy composite plates using frequency response function correlation analysis, *Measurement* 196(2022), 111194, <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2022.111194>

- [15] Cuadrado M., Pernas-Sánchez J., Artero-Guerrero J.A., Varas D., Model updating of uncertain parameters of carbon/epoxy composite plates using digital image correlation for full-field vibration measurement, *Measurement* 159 (2020), 107783, <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2020.107783>

