

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA - BOUMERDES  
FACULTE DES HYDROCARBURES ET DE LA CHIMIE



Département : Automatisation et Electrification des Procédés Industriels

LABORATOIRE : AUTOMATIQUE APPLIQUEE

## MEMOIRE

*Présenté par :*

*Boudour Rima*

EN VUE DE L'OBTENTION DU TITRE DE

**MAGISTER EN GENIE ELECTRIQUE**

Option : *Automatique Appliquée et Traitement du Signal*

## THEME

**DETERMINATION DE LA REGION DE STABILITE TRANSITOIRE AU  
SENS DE LYAPUNOV D'UN OSCILLATEUR NON LINEAIRE FORCE  
PAR L'APPROCHE GRAPHIQUE : APPLICATION AU PENDULE**

*Soutenu devant le jury :*

Acheli Dalila	Maître de Conférences A (UMBB)	Présidente
Kidouche Madjid	Maître de Conférences A (UMBB)	Rapporteur
Fellag Sid Ali	Maître de Conférences A Université de Tizi-Ouzou	Examineur
Meglouli Hocine	Maître de Conférences A (UMBB)	Examineur

*Boumerdès 2011*

## ***Remerciement:***

*Dieu me suffit, quel excellent protecteur.*

Je remercie toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à l'accomplissement de ce mémoire.

En particulier, je remercie mon promoteur Kidouche Madjid, chef d'équipe d'analyse des systèmes complexes du laboratoire de recherche d'automatique appliquée, pour sa confiance, sa bonne humeur, ses précieux conseils et ses encouragements tout au long de ce travail, et je lui en suis vraiment reconnaissante.

Je remercie Dr. Acheli Dalila, chef de département d'Automatisation et Electrification des Procédés Industriels, d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie également tous les membres du jury, Dr. Meglouli Hocine (maitre de conférences/A université de Boumerdès), et Dr. Fellag Sid Ali (maitre de conférences/A université de Tizi Ouzou), d'avoir pris la peine d'évaluer mon mémoire. J'en suis très honorée.

Un grand merci à mes parents pour leur grand sacrifice et leur dévouement pour mon bonheur. Ils m'ont toujours soutenu, dans les meilleurs moments comme dans les pires.

Je voudrais adresser un merci particulier à mon mari qui m'a apporté soutien et encouragement durant tout ce travail.

Je remercie toutes les collègues de mon option: Automatisation Appliquée et Traitement du signal, sans oublier mes très chères amies.

## *Table des matières*

Liste des figures	
Liste des tableaux	
Résumé du mémoire (en anglais).....	01
Résumé du mémoire (en français).....	02
Résumé du mémoire (en arabe).....	03
Introduction générale.....	04
Problématiques.....	05
Organisation du mémoire .....	06
<b>Chapitre I: La stabilité de Lyapunov.....</b>	<b>07</b>
<b>I Introduction.....</b>	<b>07</b>
<b>I.1 Définition des systèmes dynamiques.....</b>	<b>08</b>
<b>I.2 Systèmes non linéaires et points d'équilibre.....</b>	<b>08</b>
<b>I.2.1 Description mathématique du système non linéaire.....</b>	<b>08</b>
<b>I.2.2 Points d'équilibre.....</b>	<b>09</b>
<b>I.3 Systèmes autonome et non autonome.....</b>	<b>09</b>
<b>I.3.1 Système non autonome.....</b>	<b>09</b>
<b>I.3.2 Système autonome.....</b>	<b>09</b>
<b>I.4 Stabilité au sens de Lyapunov.....</b>	<b>10</b>
<b>I.4.1 La fonction de Lyapunov.....</b>	<b>10</b>
<b>I.4.1.1 Définition de la fonction de Lyapunov.....</b>	<b>10</b>
<b>I.4.2 Définition de la stabilité au sens de Lyapunov.....</b>	<b>11</b>
<b>I.5 Critère de Lyapunov pour les systèmes LTI.....</b>	<b>13</b>
<b>I.6 Développement de la méthode directe de Lyapunov.....</b>	<b>14</b>
<b>I.6.1 La stabilité au sens de Lagrange.....</b>	<b>14</b>
<b>I.6.1.1 Définition.....</b>	<b>14</b>
<b>I.6.2 Le concept de stabilité au sens de Lagrange.....</b>	<b>15</b>
<b>I.7 Comment construire la fonction de Lyapunov.....</b>	<b>16</b>
<b>I.8 Conclusion.....</b>	<b>17</b>
<b>Chapitre II: Les systèmes chaotiques.....</b>	<b>18</b>
<b>II.1 Introduction au chaos.....</b>	<b>18</b>
<b>II.1.1 Définition du chaos.....</b>	<b>19</b>
<b>II.2 Les systèmes oscillatoires.....</b>	<b>20</b>
<b>II.2.1 Définition.....</b>	<b>20</b>
<b>II.2.2 Importance des mouvements oscillants.....</b>	<b>21</b>
<b>II.3 Analyse dans le plan de phase.....</b>	<b>21</b>
<b>II.3.1 Le concept de l'analyse dans le plan de phase.....</b>	<b>23</b>
<b>II.3.2 Les portraits de phase.....</b>	<b>23</b>
<b>II.3.3 Le comportement des portraits de phase.....</b>	<b>23</b>
<b>II.3.4 Les cycles limites.....</b>	<b>25</b>
<b>II.3.4.1 Définition des cycles limites.....</b>	<b>26</b>
<b>II.3.4.2 Classification des cycles limites.....</b>	<b>26</b>
<b>II.4 Analyse des systèmes non-linéaires dans le plan de phase: Exemples.....</b>	<b>27</b>

II.4.1	L'oscillateur de Van Der Pol.....	27
II.4.2	Exemple de Hahn.....	28
II.4.3	Exemple d'un générateur synchrone.....	29
II.4.4	Exemple prédateur-proie.....	30
II.5	Conclusion.....	32
<b>Chapitre III: Etude de stabilité du pendule.....</b>		<b>33</b>
III.1	Introduction.....	33
III.2	La modélisation de pendule.....	33
III.2.1	L'approche graphique.....	33
III.2.2	Description de pendule.....	33
III.2.3	La modélisation: Application du formalisme de Lagrange.....	35
III.2.4	La représentation d'état.....	37
III.3	Etude de stabilité des différents types de pendules.....	39
III.3.1	Introduction.....	39
III.3.2	Application au pendule simple.....	39
III.3.2.1	Le mouvement du pendule simple.....	39
III.3.2.2	Application de la théorie de stabilité de Lagrange.....	41
III.3.3	Application au pendule amorti.....	43
III.3.3.1	Le mouvement du pendule amorti.....	43
III.3.3.2	Application de la théorie de stabilité de Lagrange.....	44
III.3.4	Application au pendule forcé.....	47
III.3.4.1	Le mouvement du pendule forcé.....	47
III.3.4.2	Application de la théorie de stabilité de Lagrange.....	49
III.3.5	Application au pendule amorti forcé.....	51
III.3.5.1	Mouvement du pendule amorti forcé.....	53
III.3.5.2	Application de la théorie de stabilité de Lagrange.....	56
III.4	Conclusion.....	60
<b>Chapitre IV: Résultats de simulation.....</b>		<b>61</b>
IV.1	Introduction.....	61
IV.2	Divers exemples.....	61
IV.2.1	Le pendule simple.....	61
IV.2.2	Le pendule amorti.....	63
IV.2.3	Le pendule forcé.....	66
IV.2.4	Le pendule amorti forcé.....	69
IV.3	Conclusion.....	80

# Table des matières

---

<b>Conclusion générale.....</b>	<b>81</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>83</b>

## *Listes des figures:*

<b>Figure II.1:</b> Représentation d'un mouvement chaotique d'un système oscillatoire.....	19
<b>Figure II.2:</b> Représentation d'un mouvement oscillatoire.....	21
<b>Figure II.3.1:</b> (a) nœud stable, (b) nœud instable.....	24
<b>Figure II.3.2:</b> Point col.....	24
<b>Figure II.3.3:</b> (a) centre stable, (b) centre instable.....	25
<b>Figure II.3.4:</b> Point centre.....	25
<b>Figure II.4:</b> Cycles limites stables (a, b), instables (c, d).....	26
<b>Figure II.5:</b> Région de stabilité asymptotique de l'oscillateur de Van der Pol.....	28
<b>Figure II.6:</b> Région de stabilité asymptotique de l'exemple de Hahn.....	29
<b>Figure II.7:</b> Région de stabilité asymptotique d'un générateur synchrone.....	30
<b>Figure II.8:</b> Région de stabilité asymptotique de système prédateur-proie.....	31
<b>Figure III.1:</b> Schéma de pendule à modéliser.....	35
<b>Figure III.2:</b> Mouvements du pendule simple.....	40
<b>Figure III.3:</b> La variation de la fonction de Lyapunov du pendule simple.....	41
<b>Figure III.4:</b> La variation de la dérivée de la fonction de Lyapunov du pendule simple.....	42
<b>Figure III.5:</b> La variation de la fonction de Lyapunov en fonction de $x_1$ et $x_2$ du pendule simple.....	42
<b>Figure III.6:</b> Mouvements du pendule amorti.....	44
<b>Figure III.7:</b> La variation de la fonction de Lyapunov du pendule amorti.....	45
<b>Figure III.8:</b> La variation de la dérivée de la fonction de Lyapunov du pendule amorti.....	45
<b>Figure III.9:</b> La variation de la fonction de Lyapunov en fonction de $x_1$ et $x_2$ du pendule amorti.....	46
<b>Figure III.10:</b> La variation de la dérivée de la fonction de Lyapunov en fonction de $x_1$ et $x_2$ du pendule amorti.....	46

**Figure III.11:** Mouvements du pendule forcé.....48

**Figure III.12:** La variation de la fonction de Lyapunov du pendule forcé.....51

**Figure III.13:** La variation de la dérivée de la fonction de Lyapunov du pendule forcé.....52

**Figure III.14:** La variation de la fonction de Lyapunov en fonction de  $x_1$  et  $x_2$  du pendule forcé.....52

**Figure III.15:** La variation de la dérivée de la fonction de Lyapunov en fonction de  $x_1$  et  $x_2$  du pendule forcé.....53

**Figure III.16a:** Mouvement périodique du pendule amorti forcé.....54

**Figure III.16b:** Mouvement chaotique du pendule amorti forcé.....56

**Figure III.17:** La variation de la fonction de Lyapunov du pendule amorti forcé.....58

**Figure III.18:** La variation de la dérivée de la fonction de Lyapunov du pendule amorti forcé.....58

**Figure III.19:** La variation de la fonction de Lyapunov en fonction de  $x_1$  et  $x_2$  du pendule amorti forcé.....59

**Figure III.20:** La variation de la dérivée de la fonction de Lyapunov en fonction de  $x_1$  et  $x_2$  du pendule amorti forcé.....59

**Figure VI.1a:** La région de stabilité du pendule simple.....62

**Figure VI.1b:** La région de stabilité limite du pendule simple.....62

**Figure VI.2.1:** (a) la région de stabilité et (b) la région de stabilité limite du pendule amorti pour  $\gamma = 0.5$ .....64

**Figure VI.2.2:** (a) la région de stabilité et (b) la région de stabilité limite du pendule amorti pour  $\gamma = 0.9$ .....64

**Figure IV.2.3:** (a) la région de stabilité et (b) la région de stabilité limite du pendule amorti pour  $\gamma = 0.1$ .....65

**Figure IV.3a:** Mouvement du pendule forcé dans le plan de phase pour  $F=1$ .....66

**Figure IV.3b:** Mouvement du pendule forcé dans le plan de phase pour  $F=1.5$ .....67

**Figure VI.4:** La région de stabilité du pendule forcé.....68

**Figure VI.5:** La région de stabilité limite du pendule forcé.....68

**Figure VI.6.1:** Mouvement du pendule amorti forcé dans le plan de phase pour  $\gamma = 0.1$ .....70

**Figure VI.6.2:** Mouvement du pendule amorti forcé dans le plan de phase pour  $\gamma = 0.5$ .....71

**Figure VI.6.3:** Mouvement du pendule amorti forcé dans le plan de phase pour  $\gamma = 0.6$ .....71

**Figure VI.7.1a:** La région de stabilité du pendule amorti forcé pour  $\gamma = 0.2$ .....72

**Figure VI.7.1b:** La région de stabilité limite du pendule amorti forcé pour  $\gamma = 0.2$ .....73

**Figure VI.7.2a:** La région de stabilité du pendule amorti forcé pour  $\gamma = 0.5$ .....73

**Figure VI.7.2b:** La région de stabilité limite du pendule amorti forcé pour  $\gamma = 0.5$ .....74

**Figure VI.7.3a:** La région de stabilité du pendule amorti forcé pour  $\gamma = 0.9$ .....74

**Figure IV.7.3b:** La région de stabilité limite du pendule amorti forcé pour  $\gamma = 0.9$ .....75

**Figure VI.8:** La région de stabilité limite et fermée du pendule amorti forcé..... 75

**Figure VI.9.1:** Mouvement chaotique du pendule amorti forcé dans le plan de phase avec  
 $F=0.8, 0.81$ .....76

**Figure VI.9.2:** Mouvement chaotique du pendule amorti forcé dans le plan de phase avec  
 $F=0.811, 0.812, 0.813$ .....77

**Figure VI.9.3:** Mouvement chaotique du pendule amorti forcé dans le plan de phase avec  
 $F=0.814, 0.815, 0.816$ .....78

**Figure VI.9.4:** Mouvement chaotique du pendule amorti forcé dans le plan de phase avec  
 $F=0.817, 0.818, 0.819$ .....79

## *Liste des tableaux*

<b>Tableau 1:</b> <i>Comparaison entre mouvement régulier et mouvement chaotique.....</i>	20
<b>Tableau 2:</b> <i>Comparaison des représentations traditionnelle et dans le plan de phase des systèmes dynamiques.....</i>	22

**Abstract:**

Today, nonlinear dynamical systems are used to describe a great variety of scientific and engineering phenomena. This theory has been applied to a broad spectrum of problems in physics, chemistry, mathematics, biology, medicine, economics and various engineering disciplines. Stability has been one of the most awkward problems in the study of nonlinear dynamical systems. Therefore, Lyapunov introduced a function of energy called Lyapunov function in order to analyze stability of nonlinear system, with a positive definite function whose derivative along the trajectories near the equilibrium point is either negative definite or semi negative definite. Conversely, this method is limited because it lies in the fact that it is often difficult to find a suitable Lyapunov function for a given system. In this work, we present a graphical approach to determine the region of stability boundary of a nonlinear dynamical non-autonomous system with chaotic behavior which is the damped pendulum driven by external vertical force, with principal interest in the computer simulation of the motions, by approximating the actual trajectories of it. The primary advantage of this method over the direct simulation of the system is that the system trajectories are not computed, and plotted in the phase plane with various initial conditions. This approach is a generalization of Lyapunov's direct method. The basic difference being that we consider more than one energy function. An important aspect of our graphical approach is that the requirements on the functions are less stringent than the ones placed on Lyapunov functions.

**Résumé:**

Actuellement, les systèmes dynamiques non-linéaires décrivent un grand nombre de phénomènes scientifiques et d'engineering. Cette théorie a été appliquée pour une gamme de problèmes en physique, chimie, mathématique, biologie, médecine, économie et autres. La stabilité a été l'un des problèmes les plus difficiles dans l'étude des systèmes dynamiques non-linéaires. A cet effet, Lyapunov introduisait une fonction d'énergie appelée fonction de Lyapunov dans le but d'analyser la stabilité des systèmes non-linéaires. Cette fonction doit être définie positive avec une dérivée définie négative ou semi négative le long des trajectoires au voisinage du point d'équilibre. Réciproquement, cette méthode est limitée parce qu'elle est liée à la difficulté de trouver une fonction de Lyapunov appropriée pour un système donné. Dans ce travail, nous présentons une approche graphique pour déterminer la région de stabilité d'un système oscillatoire non-linéaire, non-autonome avec un comportement chaotique qui est le pendule amorti excité par une force extérieure verticale. Cette approche basée sur le concept de Lyapunov, nous permet d'approximer la région de stabilité du pendule forcé. L'avantage principal de cette méthode en plus de la simulation directe des systèmes est que leurs trajectoires ne sont pas calculées, et représentées dans le plan de phase pour différentes conditions initiales. Cette approche est une généralisation de la méthode directe de Lyapunov. La différence fondamentale est que nous considérons plus d'une fonction d'énergie. L'aspect important de notre approche graphique est que la détermination de la région de stabilité du système non linéaire est plus facile que la recherche de la fonction de Lyapunov

## ملخص

نظرية الأنظمة الديناميكية اللاخطية قد تطورت منذ القرن التاسع عشر أما الآن فان هذه الأنظمة الديناميكية اللاخطية تستعمل لتمثل عددا كبيرا من الظواهر العلمية و الهندسية. هذه النظرية مطبقة بصفة واسعة في المصاعب المتواجدة في الفيزياء, الكيمياء, الرياضيات, البيولوجيا, الطب, الاقتصاد و اختصاصات كثيرة في ميدان الهندسة. الاستقرار هو احد المشاكل الأصعب في دراسة الأنظمة الديناميكية اللاخطية, لهذا السبب قام ليابونوف بتعيين دالة الطاقة المسماة بدالة ليابونوف من اجل تحليل استقرار هذه الأنظمة, بإيجاد دالة معرفة ايجابيا حيث تكون دالتها المشتقة معرفة سلبيا أو نصف سلبيا طيلة كامل مسارات الحركة بالقرب من نقطة التوازن. على العكس فان هذه الطريقة محدودة لأنها مرتبطة بصعوبة إيجاد دالة ليابونوف لنظام معين. في هذا العمل سنقدم تقريبا بيانيا من اجل إيجاد منطقة الاستقرار المحدودة لنظام اهتزازي لاخطي غير ذاتي ذو طبيعة مشوشة ألا وهو النواس المخدم المحرض بفعل قوة خارجية عمودية, بالاستعمال الرئيسي للمعالجة بالحاسوب للحركة بتقريب مسارات الحركة اللحظية. احد الايجابيات الهامة لهذه الطريقة زيادة على المعالجة الفورية للأنظمة هي أن هذه المسارات لا تحسب حلولها و تمثل مباشرة في مستوي طوري للعديد من الشروط الأولية. هذا التقريب هو عبارة عن تعميم للطريقة المباشرة لليابونوف. الفرق الرئيسي يكمن في أننا نأخذ بعين الاعتبار أكثر من دالة طاقة, الشكل الهام لهذا التقريب البياني هو أن الشروط المقدمة لهذه الدوال تكون اقل دقة من الدوال الموضوعة في دوال ليابونوف.

## **Introduction:**

Une des principales initiatives dans la recherche des systèmes depuis plusieurs années a été le développement des théories pour les systèmes dynamiques non-linéaires. La partie importante de ce travail traite le problème de stabilité. Lorsque nous essayons d'analyser la stabilité des systèmes non-linéaires, nous sommes immédiatement confrontés à des difficultés computationnelles qui nous préviennent d'obtenir une vue claire sur l'influence des différents facteurs du comportement du système étudié. L'analyse des propriétés de stabilité des systèmes en général est un test difficile, en particulier quand nous considérons des modèles non-linéaires. D'autre part, si nous considérons la linéarisation de ces modèles autour de quelques points d'équilibres, alors des conclusions peuvent être tracées facilement, mais elles sont limitées dans quelques régions autour du point d'équilibre. Pour cette raison, dans le cas de description d'un système non-linéaire, la plupart des méthodes de synthèse concernent la construction d'une fonction qu'est nommée *fonction de Lyapunov*. Les fonctions de Lyapunov sont rien mais énergies comme fonctions pour les systèmes: leurs minimum est à l'équilibre, elles sont partout positives, et indépendantes des dynamiques de l'équation différentielle du système, avec leurs dérivées de temps le long des trajectoires de système sont définies négatives ou semi-négatives. Le premier avantage de l'utilisation de cette méthode de Lyapunov par rapport à la simulation directe du système est que les trajectoires de système ne sont pas calculées. Cette méthode n'est pas populaire à cause de sa nature conservative. Si un système n'est pas globalement stable, on peut obtenir seulement une région de stabilité utilisant cette méthode de Lyapunov, cette région est spécifiée avec un ensemble des inégalités non-linéaires, et représentée dans un plan bidimensionnel appelé *plan de phase*, qu'est une méthode graphique pour étudier les systèmes non-linéaires de second ordre, basant sur la génération des trajectoires de mouvement correspondent aux plusieurs conditions initiales.

Dans notre travail on introduit la notion des systèmes chaotiques, qui sont des systèmes sensibles aux conditions initiales, irréguliers et imprédictibles, afin de trouver une région de stabilité pour ces systèmes appliquant le concept de stabilité de Lyapunov.

## **Problématique:**

L'équation du mouvement d'un pendule dissipatif extérieurement forcé est un modèle paradigmatique des systèmes dynamiques non-linéaires continu, et joue un rôle important dans des explorations récentes de différents aspects des comportements complexes et phénomènes chaotiques [51]. Cette équation décrit un nombre des systèmes en plusieurs domaines, par exemple, les circuits électriques [42], et les ondes de densité électrique [15]. Les concepts fondamentaux des problèmes non-linéaires en relation avec le pendule forcé sont clairement présentés dans [9] [20] [14]. Des études avancées furent surtout mis au phénomène non-linéaire qui peut être capté avec l'utilisation des méthodes analytiques appropriées [35] [36]. Lorsque le pendule amorti forcé présente un comportement chaotique dans certaines conditions initiales, il est difficile d'étudier la stabilité totale, pour cela nous représenterons une approche graphique pour déterminer la région de stabilité de ce pendule.

## **Organisation du mémoire:**

La représentation de notre mémoire est organisée comme suit:

- ❖ Dans le premier chapitre, nous faisons une introduction sur les systèmes dynamiques non-linéaires, puis nous traitons une méthode d'analyse de la stabilité des systèmes non-linéaires qui est la stabilité au sens de Lyapunov, avec des définitions et théories de stabilité, ainsi l'extension de cette méthode qui est la stabilité au sens de Lagrange.
- ❖ Dans le second chapitre, nous présentons les systèmes oscillatoires et chaotiques avec des comportements complexes, ainsi la méthode graphique qui nous permet d'analyser la stabilité des systèmes non-linéaires qui est la méthode du plan de phase, elle est lié à la puissance des calculateurs, qui permettent d'intégrer numériquement les équations et de calculer soit numériquement soit graphiquement les solutions, et nous terminons ce chapitre avec l'analyse de stabilité de quelques exemples des systèmes non-linéaires à partir de leurs représentations dans le plan de phase.
- ❖ Au troisième chapitre, nous présentons la modélisation de pendule appliquant le formalisme de Lagrange, prenant en considération l'amortissement et le forçage appliqué sur le pendule pour arriver sur un modèle de mouvement généralisé. Ainsi, la représentation du mouvement de chaque type de pendule et l'application du concept de stabilité de Lagrange avec un bon choix des fonctions de Lyapunov.

- ❖ Dans le quatrième chapitre, nous illustrons les résultats de simulations obtenues avec l'application du concept de stabilité de Lagrange, et de donner les régions de stabilité limites pour chaque pendule.
- ❖ Enfin, nous terminerons par une conclusion générale sur le travail réalisé et les résultats obtenus en citant quelques perspectives envisageables dans un futur proche.

# Chapitre I

## La stabilité de Lyapunov

---

**I. Introduction:**

En automatique, les modèles linéaires représentent une notion bien établie qui répond à beaucoup de problèmes concrets ou l'on cherche une description locale du comportement d'un système dynamique. En pratique, les systèmes dynamiques sont non-linéaires dans leur immense majorité. Une question importante est alors de savoir s'il existe un cadre et une représentation bien définis pour décrire ces systèmes en général. La réponse est malheureusement négative. En effet, il est assez difficile de limiter la très large classe des systèmes dynamiques non-linéaires, puisque tout système qui ne peut pas être représenté par un modèle linéaire peut appartenir à cette classe.

Au-delà du problème de représentation, il n'existe pas, en général, de méthodes ou d'outils pour étudier les systèmes dynamiques non-linéaires. Néanmoins, il est clairement établi aujourd'hui que beaucoup de systèmes non-linéaires peuvent être décrits dans l'espace d'état par des équations différentielles non-linéaires. C'est ce type d'outil mathématique qui est utilisé aujourd'hui par les automaticiens pour traiter les problèmes liés à ces systèmes [45].

Le concept de stabilité pour les systèmes non-linéaires en général est un concept complexe. Il peut être présenté de la façon suivante: si un système en état d'équilibre est légèrement perturbé, alors toutes les trajectoires restent dans un voisinage de l'état d'équilibre. Analyser la stabilité d'un système non-linéaire en utilisant uniquement cette définition de stabilité est impossible car cette définition exige la connaissance de la solution d'équation différentielle non-linéaire. D'autre part, l'utilisation du modèle linéarisé n'est pas d'une grande utilité si la condition initiale (point de départ du mouvement) ne se trouve pas dans un voisinage de l'état d'équilibre. L'approche la plus générale et la plus utilisée pour étudier la stabilité des systèmes non linéaires est la théorie introduite pendant le 19<sup>ème</sup> siècle par le mathématicien russe Aleksander Mikhailovitch Lyapunov, spécialiste en stabilité des systèmes, son travail est basé sur *le problème général de la stabilité du mouvement* [34], cette notion de stabilité est appelée *stabilité au sens de Lyapunov* [32] [2] [30] [18]. La méthode directe de Lyapunov, appelée aussi la seconde méthode de Lyapunov, est la seule méthode générale qui permette d'étudier la stabilité des systèmes non-linéaires sans avoir recours à la résolution de l'équation différentielle et l'utilisation des modèles linéarisés. C'est une formalisation mathématique d'un raisonnement énergétique: l'énergie d'un système stable diminue et est minimum à l'équilibre.

Avec la méthode directe de Lyapunov, les fonctions utilisées jouent le rôle d'une fonction d'énergie et sauf cas particulier elles n'ont généralement pas de signification physique. [22]

### I.1 Définition des systèmes dynamiques:

Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble d'objets en interaction, défini par l'équation différentielle:

$$\dot{X}(t) = f(X(t), t). \quad (1.1)$$

Définir un système dynamique nécessite de définir deux catégories de descriptions:

*-une représentation d'état:*

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) \quad (1.2)$$

Il s'agit d'une liste de variables, que l'on appelle vecteur d'état  $X$ , permettant de décrire à tout instant un ensemble d'objets. Le nombre de ces variables correspond au nombre de degrés de liberté de notre système ;

*-une fonction de transition:*

$$f = e^{At} \quad (1.3)$$

cette fonction décrit l'évolution dans le domaine de temps, elle donne ainsi l'évolution du vecteur d'état entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ . [6]

### I.2 Systèmes non linéaires et points d'équilibres:

#### I.2.1 Description mathématique du système non linéaire:

Un système non linéaire peut toujours être décrit par une équation différentielle de la forme suivante:

$$\dot{X} = f(X, t), \quad X(t_0) = X_0 \quad (1.4)$$

où  $X(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système, et  $f$  est la fonction non linéaire.

#### I.2.2 Points d'équilibres:

Il est possible pour une trajectoire d'un système de correspondre à un seul point singulier, tel que ce point représente un point d'équilibre.

**Définition 1:**  $X_e$  est un point d'équilibre du système (1.4) si:

$$f(X_e, t) = 0, \quad \forall t \quad (1.5)$$

pour la plus part des cas, on considère que l'origine de l'espace d'état est un point d'équilibre  $X_e = 0$ .

### I.3 Systèmes autonomes et non autonomes:

#### I.3.1 Systèmes non autonomes:

Les systèmes non autonomes (1.4) sont des systèmes a dynamique qui dépendent du temps et de l'état.

La principale difficulté dans l'étude de tels systèmes est que les solutions dépendent de l'instant initial  $t_0$ .

#### I.3.2 Systèmes autonomes:

Le système (1.4) est dit autonome ou système invariant si  $f$  ne dépend pas explicitement du temps  $t$ , où  $X \in \mathbb{R}^n$  et  $t \geq 0 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , le domaine  $D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  d'où  $\dot{X} = f(X)$ .

L'existence et l'unicité de la solution du système (1.4) sont assurées par l'introduction d'une contrainte appelée *la condition de Lypschtz*. L'équation (1.4) vérifie donc l'inégalité suivante:

$$\|f(X_2, t) - f(X_1, t)\| \leq \|X_2 - X_1\|, \quad (1.6)$$

quel que soient  $(X_1, t)$  et  $(X_2, t)$  dans un voisinage de  $(X_0, t_0)$ .

On rappelle que la norme euclidienne d'un vecteur  $X$  est donnée par:

$$\|X\| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \quad (1.7)$$

La différence fondamentale entre les systèmes autonomes et non autonomes est que la trajectoire d'état des systèmes autonomes est indépendante du temps initial, par contre la trajectoire d'état des systèmes non autonomes généralement est dépendante du temps initial.

Cette différence nous exige de considérer explicitement le temps initial en définition de concepts de stabilité pour les systèmes non autonomes, et faire l'analyse plus difficile que celle des systèmes autonomes. [45]

#### I.4 Stabilité au sens de Lyapunov :

La stabilité au sens de Lyapunov est une traduction mathématique d'une constatation élémentaire : si l'énergie totale d'un système se dissipe continument (c'est-à-dire décroît avec le temps) alors le système qu'il soit linéaire ou non linéaire, stationnaire ou non stationnaire, tend à se ramener à un état d'équilibre (il est stable). [1]

La méthode directe de Lyapunov cherche donc à générer une fonction scalaire positive  $V(X)$  de type énergétique qui admet une dérivée temporelle  $\dot{V}(X)$  négative à l'exception du point d'équilibre où  $V(X)$  admet un minimum  $V(X_e)$ . La fonction  $V(X)$  décroît donc continument le long des solutions du système jusqu'à où elle atteint sa valeur minimale, on dit alors que le système approche le point d'équilibre  $X_e$ . Ainsi, l'idée développée par Lyapunov [24], a été d'introduire des fonctions réelles et d'étudier leurs variations le long de la trajectoire du système considéré. [45]

##### I.4.1 La fonction de Lyapunov :

Le concept de la fonction de Lyapunov est à l'origine de la mécanique théorique. Nous avons vu dans les systèmes conservatifs stables l'énergie est une fonction scalaire définie positive qui peut décroître avec le temps. Pour l'utilisation de cette analogie, nous pouvons définir une énergie généralisée de la fonction de Lyapunov pour analyser la stabilité des systèmes non linéaires.

##### I.4.1.1 Définition de la fonction de Lyapunov :

L'énergie généralisée de la fonction de Lyapunov  $V(X)$  d'un système autonome décrit par l'équation d'état :  $\dot{X} = f(X)$  est une fonction scalaire avec les propriétés suivantes :

1. fonction scalaire :  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  (1.8)

2. définie positive :  $V[X(t)] > 0$  ; (1.9)

3. dissipativité :

$$\frac{d}{dt}V[X(t)] = \frac{\partial V}{\partial X} \frac{d[X(t)]}{dt} < 0. \quad (1.10)$$

#### I.4.2 Définition de la stabilité au sens de Lyapunov:

L'origine est stable au sens de Lyapunov, ou simplement stable si pour tout nombre réel  $\varepsilon > 0$  et  $t_0 \geq 0$  il existe un nombre réel  $\delta > 0$  qui dépend de  $\varepsilon$  et en général de  $t$  telle que pour toute condition initiale  $\|X_0\| < \delta$ , le mouvement de la trajectoire  $\|X(t)\| < \varepsilon$  quel que soit  $t > t_0$ . [45]

#### Théorème 1: [1]

L'état d'équilibre  $X_e = 0$  est stable s'il existe une fonction continument dérivable  $V(X)$  tel que:

$$1- V(0) = 0 ; \quad (1.11)$$

$$2- V(X) > 0, \quad \forall X \neq 0; . \quad (1.12)$$

$$3- \dot{V}(X) \leq 0, \quad \forall X \neq 0; X \in \Omega. \quad (1.13)$$

où  $\dot{V}$  est la dérivée de  $V$  par rapport au temps et  $\Omega$  est la région autour de zéro.

Si de plus (1.11) est remplacée par  $\dot{V}(X) < 0$  alors l'état d'équilibre est asymptotiquement stable. La fonction  $V(X)$  est appelée *fonction de Lyapunov*.

Ce théorème est une condition suffisante de la stabilité mais ne permet pas de guider l'utilisateur dans le choix de la fonction de Lyapunov et ne permet pas de conclure si on ne trouve pas une telle fonction. Cette fonction candidate est une fonction définie positive dont on teste la décroissance autour du point d'équilibre. L'étude des méthodes qui permettent de construire une fonction de Lyapunov candidate pour un système donné a motivé une littérature très abondante ces dernières décennies [56]. Les formes quadratiques sont les plus utilisées notamment les fonctions définies positives qui sont des intégrales premières.

#### Théorème 2: [1]

L'état d'équilibre  $X_e$  est globalement asymptotiquement stable s'il existe une fonction dérivable  $V(X)$  telle que :

$$1- V(\mathbf{0}) = 0. \quad (1.14)$$

$$2- V(X) > 0, \quad \forall X \neq \mathbf{0}; \quad (1.15)$$

$$3- \dot{V}(X) < 0, \quad \forall X \neq \mathbf{0}. \quad (1.16)$$

$$4- \dot{V} \rightarrow -\infty \text{ quand } \|X\| \rightarrow \infty. \quad (1.17)$$

**Exemple :** considérons le système décrit par une équation différentielle ordinaire non-linéaire :

$$\ddot{x}(t) - \gamma x^2(t)\dot{x} + x(t) = 0. \quad (1.18)$$

Sous forme d'état, avec les définitions  $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$ , nous obtenons:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & (1.19a) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \gamma x_1^2 x_2. & (1.19b) \end{cases}$$

Il est possible de vérifier que cet oscillateur avec une fonction d'amortissement non-linéaire a un état d'équilibre à l'origine  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ .

Pour l'analyse de la stabilité nous choisirons la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2), \quad (1.20)$$

Ce choix est fondé sur une considération physique : c'est une intégrale première (énergie mécanique totale) du système idéalement conservatif obtenu pour  $\gamma = 0$ , le calcul de  $\dot{V}$  donne :

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = \gamma x_1^2 x_2^2. \quad (1.21)$$

Donc  $V$  est une fonction définie positive qui est strictement décroissante le long de toutes les trajectoires du système si  $\gamma < 0$ .

D'après les théorèmes précédents:

- pour  $\gamma = 0, \dot{V} = 0$ , ceci implique que l'origine est stable;
- pour  $\gamma < 0, \dot{V} < 0$ , ceci implique que l'origine est asymptotiquement stable;
- pour  $\gamma > 0, \dot{V} > 0$ , ceci implique que l'origine est instable.

Dans cet exemple, l'analyse est complète car elle a permis de caractériser la stabilité globale du système. Ce n'est pas toujours le cas et cela dépend de la fonction de Lyapunov candidate. [1]

### I.5 Critère de Lyapunov pour les systèmes LTI :

#### Théorème 3:

La matrice d'état  $A$  de système LTI (invariant dans le temps) est une matrice stable c.-à-d.

$(\text{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0)$  si et seulement si pour n'importe quelle matrice symétrique définie positive donnée  $Q$ , il existe une matrice symétrique définie positive  $P$  tel que :

$$A^T P + P A = -Q \quad (1.22)$$

où  $P$  peuvent être définie semi positive.

#### Preuve :

On définit la fonction d'énergie généralisée de système avec réalisation  $(A, B, C)$  :

$$V[X(t)] = X^T P X > 0; \quad \text{avec } P \text{ définie positive.} \quad (1.23)$$

La deuxième propriété de Lyapunov:

$$\frac{d}{dt} V[X(t)] = \frac{d}{dt} (X^T P X) = \dot{X}^T P X + X^T P \dot{X} \quad (1.24)$$

si on substitue l'équation de système  $\dot{X} = AX$  pour  $(A, 0, 0)$  dans l'équation au-dessus avec :

$$\dot{X} = (AX)^T = X^T A^T. \quad (1.25)$$

nous aurons :

$$X^T A^T P X + X^T P A X = X^T (A^T P + P A) X = X^T (-Q) X \quad (1.26)$$

$(A^T P + P A)$  est définie négative ssi  $Q$  est définie positive

on peut choisir  $Q = C^T C$ . (1.27)

si  $A$  est une matrice stable alors :

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T \tau} Q e^{A\tau} d\tau. \quad (1.28)$$

Les quelques notions sur la stabilité au sens de Lyapunov que nous venons de rappeler sont suffisante pour aborder la suite de ce mémoire. Pour compléter ces définitions on peut, par exemple, consulter [17][26][16]. [46]

### I.6 Développement de la méthode directe de Lyapunov:

Basant sur les fonctions d'énergie, la méthode directe de Lyapunov a sa signification générale dans les deux développement théorique et applications. Cette méthode peut être utilisée pour étudier non seulement la stabilité au sens de Lyapunov, mais aussi les comportements asymptotique des systèmes dynamiques sans la résolution de ses équations. Pour cela, il existe des extensions typiques de la méthode directe de Lyapunov telles que : le principe invariant de La Salle, le principe de comparaison, la stabilité pratique, la stabilité conditionnelle et la stabilité de Lagrange, etc. cette dernière méthode qui nous intéresse dans notre travail. [55]

#### I.6.1 La stabilité au sens de Lagrange:

Dans cette partie, nous étudions la stabilité au sens de Lagrange, nous pouvons encore utiliser la méthode directe de Lyapunov pour analyser cette stabilité.

Considérons le système non-autonome de  $n$  dimension:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (1.29)$$

ou  $f(t, x) \in C[I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ , assure que la solution de (1.29) est unique.

##### I.6.1.1 Définition:

Si chaque solution  $x(t, t_0, x_0)$  de (1.29) est bornée, il existe une constante  $\beta(t_0, x_0) > 0$ , tel que:

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \beta(t_0, x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (1.30)$$

alors la solution  $x(t, t_0, x_0)$  est dite stable au sens de Lagrange, ou bornée.

#### Théorème 4:

La solution  $x(t, t_0, x_0)$  de (1.29) est stable au sens de Lagrange si et seulement s'il existe

$V(t, x) \in \mathcal{C}[I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1]$  tel que:

1.  $V(t, x) \geq \varphi(\|x\|)$  pour  $\varphi(\|x\|) \in \mathbb{R}$ . (1.31)
2. Pour chaque solution  $x(t, t_0, x_0)$ ,  $V(t, x(t, t_0, x_0))$  est une fonction croissante au temps.

#### I.6.2 Le concept de stabilité au sens de Lagrange: [38]

##### Théorie:

Soit  $V(x, y)$  une fonction continûment différentiable en  $x$  et  $y$ . Pour un nombre réel  $\kappa$  l'ensemble des points:

$$VB = \{(x, y): V(x, y) = \kappa\} \quad (1.32)$$

définit un graphe dans le plan  $x$ - $y$ . Si on définit l'inclusion bornée  $IB$  pour tout les points de l'ensemble  $VB$  dont la dérivée de  $V$  le long des temps  $\dot{V} < 0$ , alors pour  $VB=IB$  tous les ensembles dans  $VB$  satisfait  $\dot{V} < 0$ , d'où  $V(x, y) \leq \kappa$  est la région de stabilité. Pour chaque fonction  $V$  sélectionnée on obtient une inclusion bornée et par assemblage des différentes inclusions bornées on peut obtenir une région limitée. Cette approche est illustrée par un système de second ordre donné par:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, & (1.33a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(x) - g(t). & (1.34b) \end{cases}$$

ou  $x$  et  $y$  sont des scalaires. Le tracé de  $y$  versus  $x$  puisque l'évolution du système est généralement tracé dans le plan de phase, et on intéresse par le comportement du système dans la période de temps 0 à  $T$ , ce problème est un cas spécial de la stabilité de Lagrange [30].

La fonction  $g(t)$  est bornée comme suit:

$$\alpha(x) < g(t) < \beta(x) \quad (1.35)$$

avec  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  sont des fonctions continues en morceaux.

ou  $V_1$  est choisi comme suit:

$$V_1(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x [f(s) + \alpha(s)] ds. \quad (1.36)$$

alors, la dérivée de cette fonction est:

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{\partial V_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (1.37)$$

$$= [f(x) + \alpha(x)]y + y \frac{dy}{dt} \quad (1.38)$$

$$= y[\alpha(x) - g(t)]. \quad (1.39)$$

$$\text{ainsi } dV_1/dt < 0 \text{ si } y > 0. \quad (1.40)$$

De même manière  $V_2$  est donnée par:

$$V_2(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x [f(s) + \beta(s)] ds. \quad (1.41)$$

De manière similaire:

$$dV_2/dt < 0 \text{ pour } y < 0. \quad (1.42)$$

### I.7 Comment construire la fonction de Lyapunov:

Après la théorie fondamentale de stabilité de Lyapunov fut établie, des études supplémentaires furent portés avec plusieurs recherches. Plusieurs théorèmes de stabilité de Lyapunov sont inversibles (instabilité au sens de Lyapunov est le théorème inverse de la stabilité au sens de Lyapunov). Alors théoriquement, la stabilité implique l'existence de la fonction de Lyapunov.

Le succès concernant les fonctions de Lyapunov peut dépendre de milieu concret. Par exemple, pour quelques modèles physiques, la fonction  $V$  a un sens physique clair. Les

énergies cinétique et potentielle peuvent être combinées pour construire une fonction  $V$  pour un système mécanique conservatif.

Il existe deux méthodes fondamentales pour la construction de la fonction de Lyapunov:

- ✚ La première méthode essentielle est cherche à construire une fonction définie positive et de calculer sa dérivée  $dV/dt$  le long de la solution du système. Si les conditions du système assurent que la dérivée  $dV/dt$  est définie négative ou semi-définie négative, on peut obtenir la stabilité ou la stabilité asymptotique du système. Sinon, aucun résultat de stabilité ne peut être obtenu.
- ✚ La deuxième méthode consiste à supposer que  $dV/dt$  est définie négative ou semi-définie négative, et alors obtenir  $V$  avec intégration, au même temps vérifier la définition positive de  $V$ . Si  $V$  est définie positive, on peut déterminer la stabilité asymptotique ou la stabilité du système. Avec cette méthode, on peut généraliser la méthode de gradient, la méthode de gradient variable, la méthode intégrale et la méthode de mesure d'énergie pour développer autres méthodes. [55]

Les meilleures candidates de la fonction de Lyapunov peuvent être: de forme quadratique, somme des termes quadratiques, ou combinaison des valeurs absolues, ou forme quadratique plus intégral non-linéaire.

### I.8 Conclusion:

- La méthode de Lyapunov donne des conditions de stabilité suffisantes mais non nécessaires, et qu'un système peut admettre une infinité de fonctions de Lyapunov. Par conséquent, le fait qu'une fonction  $V$  ne puisse pas trouver la stabilité d'un système, ne permet pas de conclure quoi que ce soit sur ce système: peut être une autre fonction permettrait-elle d'affirmer la stabilité ou l'instabilité.
- Quand nous étudions la stabilité d'un point d'équilibre, la première étape consiste à choisir une fonction de Lyapunov  $V(X)$  définie positive. Ce choix est pratiquement facile, mais ce qui est difficile c'est de sélectionner une fonction adéquate dont sa dérivée le long de la trajectoire autour du point d'équilibre est soit défini semi-négative. La raison est que  $V(X)$  est indépendante de la dynamique du système considéré, par contre sa dérivée l'est.

# Chapitre II

## Les systèmes chaotiques

---

### II.1 Introduction au chaos :

L'observation des systèmes physiques très simples (un pendule composé) ou très complexes (l'atmosphère de la terre) a révélé des parentés de comportement qui ont conduit à définir la notion de phénomène chaotique (voir [8] [39] [5] [44] pour une introduction au chaos). Un système est dit chaotique lorsque son évolution au cours du temps présente une extraordinaire sensibilité aux conditions initiales: une infime variation de celles-ci conduit le système, au bout d'un temps plus au moins long (dit temps caractéristiques), à aboutir à des états extrêmement différents.

Cette variation des conditions initiales pouvant être infiniment petite, elle est extrêmement difficile et même rigoureusement impossible à mesurer ou à contrôler, ce qui entraîne que l'état du système au bout du temps caractéristiques est impossible à prédire, quelle que soit la qualité du modèle physique qui le décrit.

L'ingrédient nécessaire est que le système possède plusieurs degrés de liberté couplés les uns aux autres. La météorologie de l'atmosphère terrestre, avec le temps caractéristiques égal à 10 jours, offre un exemple de comportement chaotique: malgré le nombre de paramètres qui interviennent, une description célèbre (effectuée par Edward Lorenz [33]) est parvenue à reproduire son comportement en se limitant à douze d'entre eux.

Une autre propriété des systèmes chaotiques est qu'ils possèdent des attracteurs étranges. Ainsi, lorsque le système est abandonné à son évolution en partant des conditions initiales absolument quelconques, cette évolution va l'amener au voisinage de l'attracteur, voisinage dans lequel il va demeurer tout en poursuivant une évolution chaotique, c'est-à-dire dont les états précis occupés au cours du temps sont imprédictibles. On voit que l'évolution chaotique se situe en quelque sorte entre une évolution entièrement déterministe (tout est prévisible une fois connues les conditions initiales) et celle où tout serait purement aléatoire (chaque état possible n'étant défini que par une probabilité).

La théorie mathématique du chaos développe des outils rigoureux qui sont adéquats pour décrire les phénomènes chaotiques qu'observe la physique [23]: une fois encore, la correspondance entre les phénomènes naturels et l'abstraction mathématique se trouve mise en évidence. [31]

### II.1.1 Définition du chaos:

Le chaos est un mouvement, des dynamiques temporelles de systèmes simples qui peuvent être décrit en termes de plusieurs variables:

$$\dot{x}(t) = f(t, x, x_0, \dots). \quad (2.1)$$

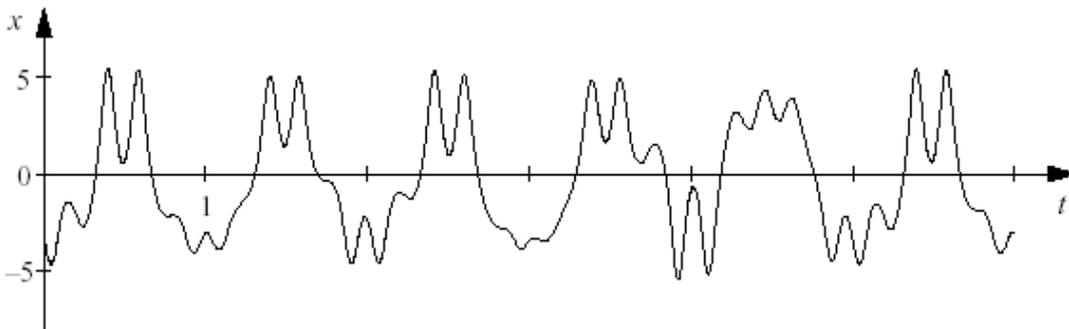
Ce mouvement est:

- Irrégulier dans le temps (il n'est pas égal à la superposition des mouvements périodiques, il est réellement aperiodique) ;
- Imprédictible dans un long terme et sensible aux conditions initiales ;
- Complexe, mais ordonné, dans l'espace de phase: il est associé à une structure fractale.

Ces propriétés sont alors fortement et exceptionnellement limitées aux dynamiques chaotiques qu'elles peuvent être utilisées pour définir le « chaos ».

Les caractéristiques citées ci-dessus sont simultanément présentes: lorsqu'un système simple est aperiodique durant un long temps, son évolution doit être imprédictible. Ces trois caractéristiques sont nouvelles et surprenantes. [47]

Les systèmes chaotiques sont des systèmes oscillatoires aperiodiques. La figure suivante illustre un mouvement irrégulier d'un système oscillatoire non-linéaire forcé en présence de frottement (exemple de [47]):



**Fig. II.1** Représentation d'un mouvement chaotique d'un système oscillatoire. [47]

Le tableau suivant donne une comparaison entre les mouvements réguliers et chaotiques:

Mouvement régulier	Mouvement chaotique
-périodique, -prédictible, -de simple géométrie,	-irrégulier. -imprédictible. -de géométrie compliquée.

**Tableau 1:**  
*Comparaison*

entre mouvement régulier et mouvement chaotique. [47]

## II.2 Les systèmes oscillatoires:

### II.2.1 Définition:

Les systèmes oscillatoires sont des systèmes mécaniques qui, lorsqu'ils sont perturbés, vont revenir à leur position d'équilibre en oscillant de part et d'autre de celle-ci. Au cours du mouvement d'un système dynamique oscillant décrit par l'équation différentielle suivante:

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.2)$$

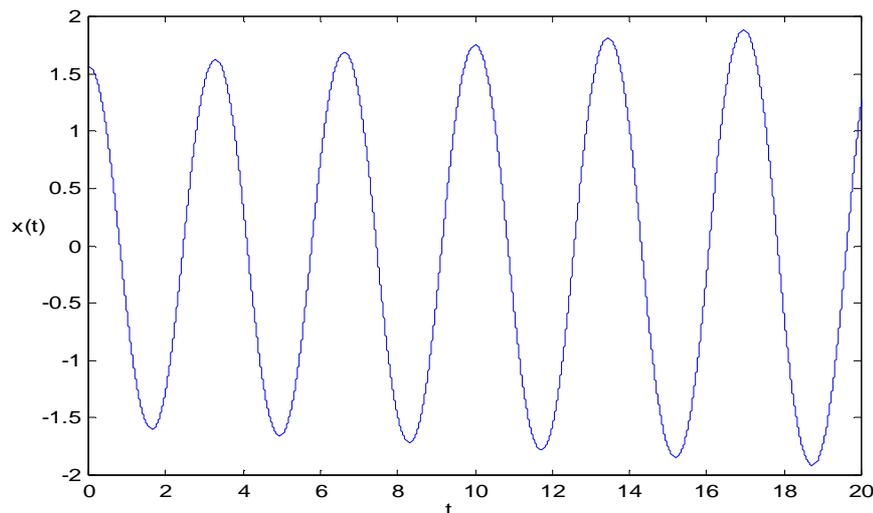
celui-ci oscille autour de sa position d'équilibre stable. Ainsi, on peut caractériser cette oscillation par une grandeur qui dépend du temps et décrit de combien le système s'écarte de sa position d'équilibre stable:

$$x(t) = x_{max} \cos\left(\frac{2\pi}{\omega_0} t + \varphi_0\right) \quad (2.3)$$

ou  $x(t)$  est la solution périodique de l'équation différentielle (2.2), avec:

- $x_{max}$  est la plus grande valeur que peut prendre  $x$ : c'est l'amplitude de mouvement ;
- $\omega_0$  est la fréquence de mouvement, avec une période d'oscillation donnée par
 
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}; \quad (2.4)$$
- $\varphi_0$  est appelée la phase à l'origine des temps et s'exprime en radian.

Cette solution générale vérifie l'équation différentielle du mouvement quelles que soient les valeurs de  $x_{max}$  et de  $\varphi_0$ , mais à chaque mouvement correspond une solution particulière et une seule qui dépend des conditions initiales.



**Fig. II.2** Représentation d'un mouvement oscillatoire.

### II.2.2 Importance des mouvements oscillants:

Un des mouvements les plus importants observés dans la nature est le mouvement oscillatoire, en particulier le mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable: oscillations d'un pendule, d'une masse attachée à un ressort, des électrons dans une antenne ou un circuit électronique, des atomes d'une molécule, des concentrations molaires dans les réacteurs chimiques,...

Dans le cas des oscillations de systèmes mécaniques conservatifs isolés, on parle d'*oscillations libres*, en présence de frottement, l'amplitude des oscillations décroît et l'on a des *oscillations amorties*. Si les oscillations sont entretenues par une action de l'extérieur, on parle d'*oscillations forcées*. Dans ce dernier cas, il existe de nouveaux phénomènes, tels que la résonance, qui est très important aussi bien du point de vue technologique que du point de vue expérimental (mesure par résonance) ou théorique. [14]

### II.3 Analyse dans le plan de phase:

L'analyse dans le plan de phase est une méthode graphique pour l'étude des systèmes du second ordre, qui a été introduite par des mathématiciens tel qu'Henri Poincaré [40]. L'idée principale de la méthode est de générer, dans l'espace d'état d'un système dynamique du second ordre, les trajectoires du mouvement correspondent aux différentes conditions initiales, afin d'examiner les caractéristiques qualitatives des trajectoires.

L'analyse d'espace de phase présente des propriétés utiles. Premièrement, c'est une méthode graphique, elle permet de visualiser comment un système non-linéaire débute pour différentes conditions initiales, sans résoudre les équations non-linéaires analytiquement. Deuxièmement, elle n'est pas restreinte pour les faibles non-linéarités, mais appliquée également pour les fortes non-linéarités. Finalement, quelques systèmes de contrôle pratique peuvent effectivement être approximés adéquatement comme des systèmes du second ordre, et la méthode de plan de phase peut être utilisée facilement pour leur analyse. Réciproquement, le désavantage fondamental de la méthode est qu'elle est limitée pour les systèmes de second ordre (ou premier ordre), parce que l'étude graphique des systèmes d'ordre supérieurs est computationnellement et géométriquement complexe.

Le tableau suivant donne une comparaison entre les représentations des dynamiques classiques et dans le plan de phase:

Représentation traditionnelle	Représentation dans le plan de phase
<ul style="list-style-type: none"> <li>-coordonnées instantanées,</li> <li>-dépendance de temps <math>(x(t), v(t))</math>,</li> <li>-structure en temps,</li> <li>-individuelle,</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-points dans le plan de phase.</li> <li>-trajectoire <math>(v(x))</math>.</li> <li>-structure en espace de phase.</li> <li>-globale.</li> </ul>

**Tableau 2:** *Comparaison des représentations classiques et dans le plan de phase des systèmes dynamiques.* [47]

### II.3.1 Le concept de l'analyse dans le plan de phase:

La sensibilité aux conditions initiales est le problème majeur du chaos, elle empêche toute prédiction sur l'évolution du système au delà d'un certain temps. Une erreur  $\epsilon_0 > 0$  sur la condition initiale va évoluer exponentiellement et l'erreur, à l'instant  $t$ , aura l'expression suivante:  $|\epsilon(t)| = \epsilon_0 e^{\lambda t}$ . On peut calculer la valeur de  $\lambda$ , appelé *exposant de Lyapunov*, grâce aux méthodes développées par Alexander Lyapunov. [28]

Une façon de contourner ce problème est d'éliminer le temps entre les équations. C'est le rôle de l'*espace des phases* (ou espace des états). Il s'agit d'un espace de dimensions 2 ou 3 dans lequel chaque coordonnée est une variable d'états du système considéré. [19]

### II.3.2 Les portraits de phase:

La méthode de plan de phase est concernée avec l'étude graphique des systèmes autonomes du second ordre décrit par:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) & (2.4a) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) & (2.4b) \end{cases}$$

Avec  $x_1$  et  $x_2$  sont les états du système, et  $f_1$  et  $f_2$  sont des fonctions non-linéaires des états. Géométriquement, l'espace d'état de ce système est un plan ayant  $x_1$  et  $x_2$  comme coordonnées. Nous appellerons ce plan le *plan de phase*.

Donnant un ensemble des conditions initiales  $x(0) = x_0$ , l'équation (2.4) définit une solution  $x(t)$ . Pour  $t \in [0, \infty[$ , la solution  $x(t)$  peut être représentée géométriquement comme une courbe dans l'espace de phase. Telle courbe est appelée une trajectoire du plan de phase. Un ensemble des trajectoires correspondant à diverses conditions initiales est appelé *un portrait de phase* du système. [19]

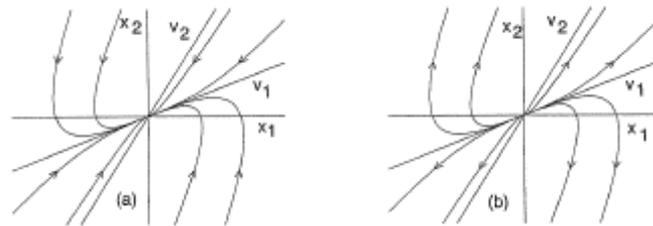
### II.3.3 Le comportement des portraits de phase:

Considérons le système non-linéaire du second ordre défini dans (2.4):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

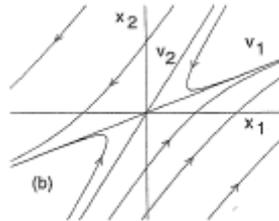
et possède un point d'équilibre à l'origine. L'analyse dans le plan de phase des systèmes non-linéaires est reliée avec celle des systèmes linéaires, parce que le comportement d'un système non-linéaire peut être approximé avec le comportement d'un système linéaire. Ce comportement est représenté comme suit:

- **Un nœud:** lorsque les trajectoires  $\mathbf{x}(t)$  et  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  convergent exponentiellement vers  $(0,0)$  sans oscillation, ce point d'équilibre correspond à un *nœud stable*, et dans le cas où elles divergent au point d'équilibre, ce point d'équilibre correspond donc à un *nœud instable*. Voir figure II.3.1.



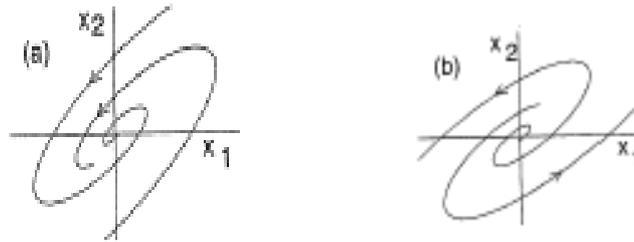
**Fig. II.3.1** (a) *nœud stable*, (b) *nœud instable*. [19]

- **Un point col:** presque toutes les trajectoires du système divergent à l'infini. Voir figure II.3.2.



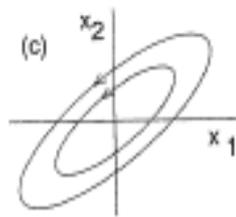
**Fig. II.3.2** *Point col*. [19]

- **Un centre:** lorsque les trajectoires  $\mathbf{x}(t)$  et  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  convergent vers  $(0,0)$ , et encerclent l'origine plusieurs fois avant de converger vers lui c.-à-d. elles oscillent puis convergent vers  $(0,0)$ , l'origine ici est un *centre stable*. Dans le cas contraire où les trajectoires divergent à l'infini, le point d'équilibre est un *centre instable*. Voir figure II.3.3.



**Fig. II.3.3** (a) *centre stable*, (b) *centre instable*. [19]

- **Un point centre:** dans ce cas les trajectoires sont des ellipses et le point d'équilibre est le centre de ces ellipses comme le montre la figure II.3.4.



**Fig. II.3.4** *Point centre*. [19]

Cependant, les systèmes non-linéaires peuvent présenter des patrons beaucoup plus compliqués dans le plan de phase, comme points d'équilibre multiple et cycles limites.

### II.3.4 Les cycles limites:

Les systèmes non-linéaires peuvent exposer les oscillations d'amplitude fixe et période fixe sans excitation extérieur. Ces oscillations sont appelées cycles limites. Cet important phénomène peut simplement illustrer avec des oscillateurs dynamiques connus, premier étudié en 1920 par l'ingénieur électrique Balthasar Van der Pol [50].

Les cycles limites représentent un phénomène important en systèmes non-linéaires. Ils peuvent être trouvés dans plusieurs domaines d'ingénieurs. L'aile flottant d'avion, un cycle limite causé avec l'interaction des forces aérodynamiques et les vibrations structurelles, est fréquemment rencontré et quelques fois dangereux. Les cycles limites sont observés aussi dans les circuits électriques: dans les laboratoires des oscillateurs électroniques. Comme on peut voir d'après ces exemples, les cycles limites peuvent être indésirables dans certains cas, mais désirables dans d'autres. Un ingénieur doit comprendre comment les éliminer s'ils sont indésirables, et inversement comment les générer ou amplifier s'ils sont désirables. [19]

**II.3.4.1 Définition des cycles limites:**

Un système  $\dot{x} = f(x)$  possède un cycle limite  $C$ , s'il existe un intervalle de temps  $[t_0, t_0 + T[$  et un point de départ  $x_0 \in C$ , tel que, en désignant par  $\varphi(t)$  la solution du système avec pour condition initiale  $x(t_0) = x_0 = \varphi(t_0)$  on est:

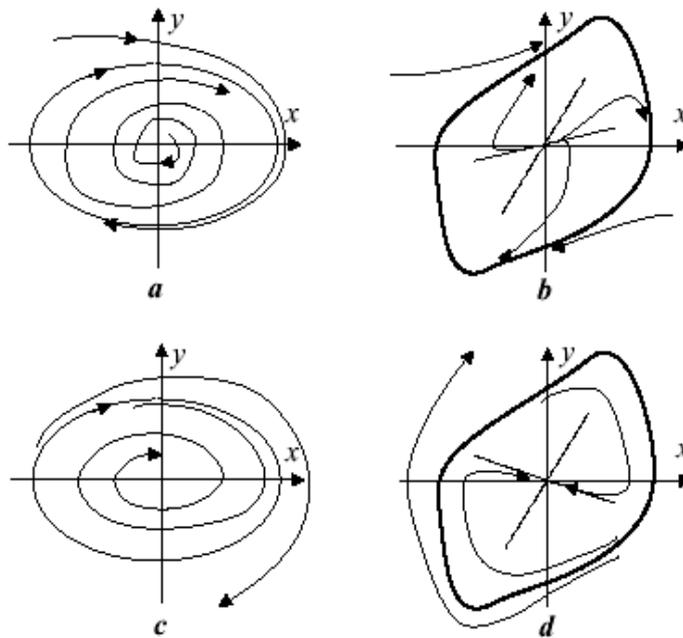
- $\varphi(t) \in C, \forall t \in [t_0, t_0 + T[$ ,
- $\varphi(T) = x_0$ .

Un cycle limite est une trajectoire fermée solution du système. [37]

**II.3.4.2 Classification des cycles limites:**

D'après les comportements de mouvement des trajectoires au voisinage du cycle limite, nous pouvons distinguer trois types de cycles limites:

1. **Cycles limites stable:** toutes les trajectoires au voisinage du cycle limite convergent quand  $t \rightarrow \infty$ .
2. **Cycles limites instable:** toutes les trajectoires au voisinage de cycle limite divergent quand  $t \rightarrow \infty$ .
3. **Cycles limites semi-stable:** quelques trajectoires au voisinage du cycle limite convergent tandis que d'autres divergent de quand  $t \rightarrow \infty$ .



**Fig. II.4** Cycles limites stables (a, b), instables (c, d). [25]

## II.4 Analyse des systèmes non-linéaires dans le plan de phase: Exemples:

### II.4.1 L'oscillateur de Van Der Pol:

L'oscillateur de Van der Pol est un système dynamique différentiable à temps continu et à un degré de liberté, du nom de [Balthasar van der Pol](#). Il est décrit par une coordonnée  $x(t)$  vérifiant une [équation différentielle](#) faisant intervenir deux paramètres :

- une pulsation propre  $\omega_0$  ;
- un coefficient de non-linéarité  $\varepsilon$ .

Lorsque  $\varepsilon = 0$ , cet oscillateur se réduit à un [oscillateur harmonique](#) pur.

L'équation différentielle de l'oscillateur libre s'écrit :

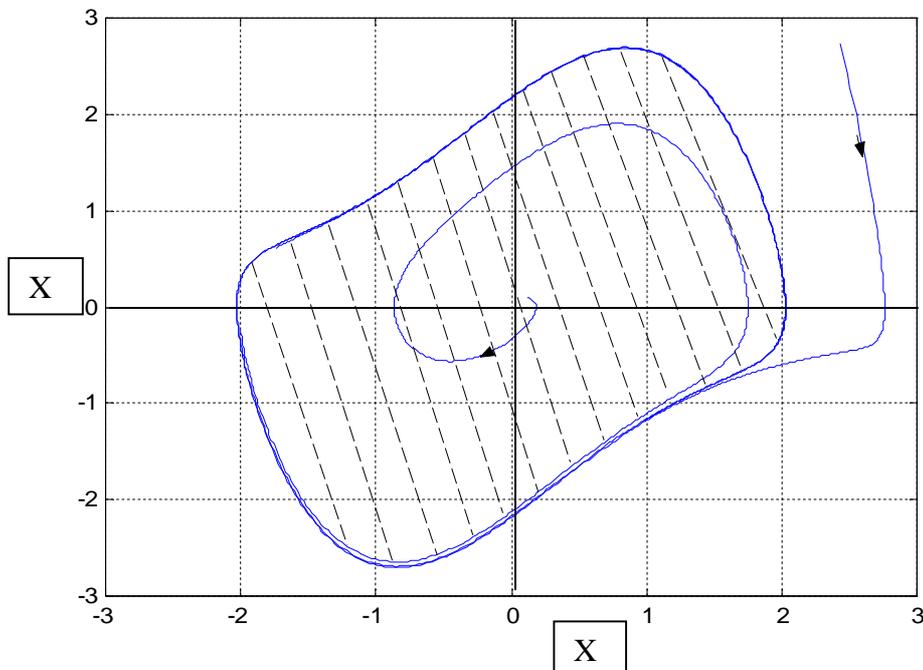
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & (2.5a) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2. & (2.5b) \end{cases}$$

si  $\varepsilon \neq 0$ , ce système dissipatif possède une dynamique régulière caractérisée par un attracteur en forme de cycle limite, représenté sur la figure ci-dessous (où on a posé  $\omega_0 = 1$ ), ce système possède un seul point d'équilibre à l'origine.

La représentation des trajectoires de mouvement de cet oscillateur dans le plan de phase donne le comportement illustré dans la figure II.5.

Avec les conditions initiales:

$$x(0) = [-1.75 \ 0.6], [0.11 \ 0.1].$$



**Fig. II.5** Région de stabilité asymptotique de l'oscillateur de Van der Pol.

### Le comportement des trajectoires:

Les trajectoires de cet oscillateur tendent vers un chemin fermé. Dans ce cas un cycle limite d'une région de stabilité asymptotique est reconnu. [11]

### II.4.2 Exemple de Hahn : [18]

Ce système est représenté par les équations différentielles suivantes :

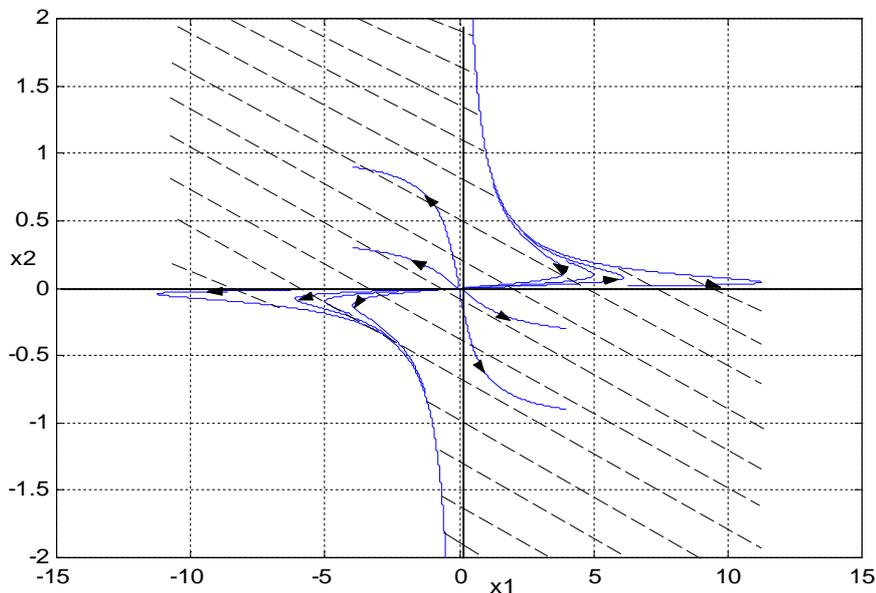
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2 & (2.6a) \\ \dot{x}_2 = -x_2 & (2.6b) \end{cases}$$

L'origine est le seul point d'équilibre. La figure suivante représente la région de stabilité asymptotique à partir des trajectoires du système. [11]

Avec les conditions initiales:

$$x(0) = [4 \ 0.2], [0.5 \ 2], [-0.5 \ -2], [-0.4 \ -0.2], [4 \ -0.9], [-4 \ 0.9], [4 \ -0.3], [-4 \ 0.3],$$

$$[1.25 \ 0.78], [-1.25 \ -0.78], [2.4 \ 0.4], [-2.4 \ -0.4].$$



**Fig. II.6** Région de stabilité asymptotique de l'exemple de Hahn.

### Le comportement des trajectoires:

- Un ensemble de trajectoires tend vers l'infini dans certaines directions, donc la région de stabilité tend vers l'infini dans les mêmes directions.
- Un autre ensemble de trajectoires réuni le long d'une surface fixe tendant vers l'infini.
- Une trajectoire tend vers un autre point critique. Dans ce cas la région hachurée est la région de stabilité asymptotique de cet exemple.

**II.4.3 Exemple d'un générateur synchrone :**

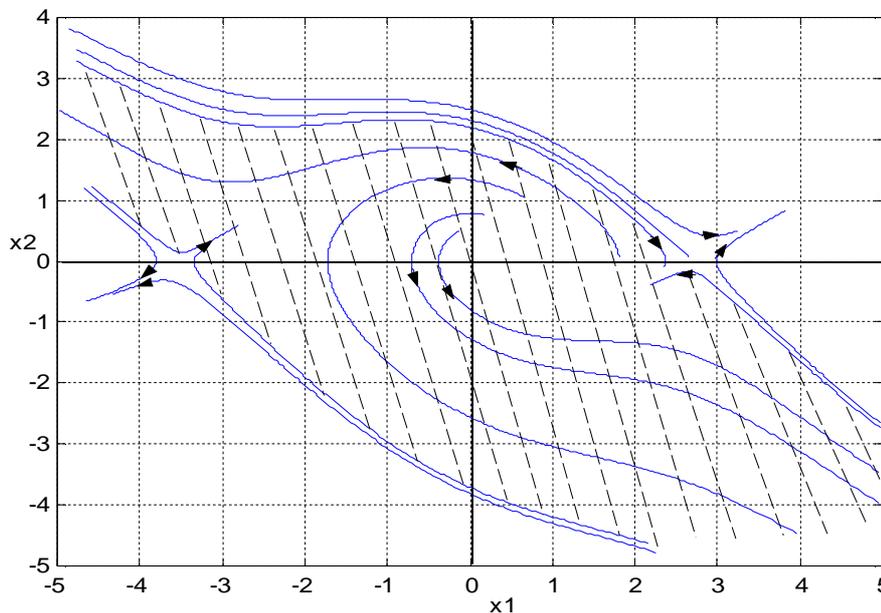
Les équations différentielles d'un générateur sont données par:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & (2.7a) \\ \dot{x}_2 = -Dx_2 - \sin x_1 + \sin \delta_0 & (2.7b) \end{cases}$$

avec :  $x_1$  est l'angle de déviation, et  $x_2$  la vitesse de déviation correspondante.

Prenant :  $D=0.5$  et  $\delta_0 = 0.412$ .

Le point d'équilibre de ce système est:  $(x_1, x_2) = (0.412, 0)$ , et les points critiques sont:  $(x_1, x_2) = (0.412 + 2\pi, 0)$  et  $(x_1, x_2) = (-0.412 + 2\pi, 0)$ , ces deux derniers points sont instable comme montre les trajectoires de la figure II.7.



**Fig. II.7** Région de stabilité d'un générateur synchrone.

**Le comportement des trajectoires:**

- Un ensemble des trajectoires tend vers l'infini dans certaines directions, donc la région de stabilité asymptotique tend vers l'infini dans les mêmes directions.
- Un autre ensemble des trajectoires réuni le long d'une surface fixe tendant vers l'infini.
- Une trajectoire tend vers un autre point critique. Dans ce cas, la région hachurée est la région de stabilité asymptotique de ce générateur, grâce aux trajectoires stables au voisinage du point d'équilibre.

**II.4.4 Exemple prédateur-proie: [10]**

Ce système est représenté par les équations différentielles suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 4x_1^2 - 0.5x_1x_2 - x_1^3 & (2.8a) \end{cases}$$

$$\dot{x}_2 = -2.1x_2 + x_1x_2 \quad (2.8b)$$

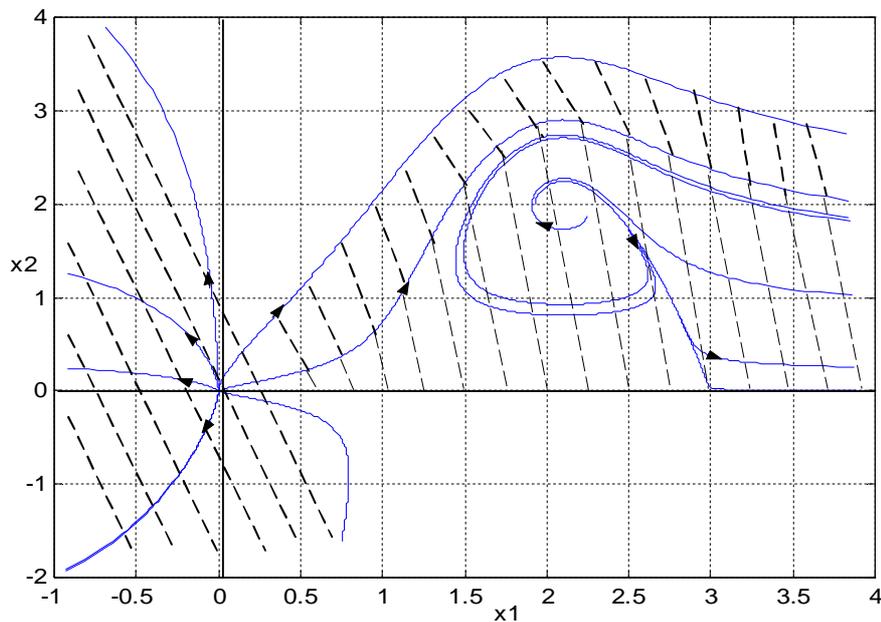
avec  $x_1$  et  $x_2$  sont respectivement la proie et le prédateur de populations.

Les points d'équilibre sont:

$$x_1 = 0, x_2 = 0 \quad (\text{asymptotiquement stable}) \quad (2.9)$$

$$x_1 = 2.1, x_2 = 1.98 \quad (\text{asymptotiquement stable})$$

Et l'estimation de la région de stabilité est donnée par la figure (II.8). Prenant en considération que le domaine d'intérêt physique est  $(x_1 \geq -2.1, x_2 \geq -1.98)$  qui correspond aux nombres positives de proie et prédateurs. [11]



**Fig. II.8** Région de stabilité de système prédateur-proie. [43]

#### Le comportement des trajectoires:

- Un ensemble de trajectoires tend vers l'infini dans certaines directions, donc la région de stabilité tend vers l'infini dans ces directions.
- Un autre ensemble des trajectoires réuni le long d'une surface fixe tendant vers l'infini.
- Une trajectoire tend vers un autre point critique. La région hachurée représente la région de stabilité asymptotique.

**II.5 Conclusion:**

Les systèmes chaotiques présentent une large classe des systèmes non-linéaires physiques et biologiques. Leur sensibilité aux conditions initiales est le problème majeur du chaos, elle empêche toute prédiction sur l'évolution du système au-delà d'un certain temps. Une façon de contourner ce problème est d'éliminer le temps entre les équations. C'est le rôle de l'espace de phase, il s'agit d'un espace de dimension deux dans lequel chaque coordonnée est une variable d'état du système considéré. Dans le portrait de phase du pendule qui est notre cas, la vitesse angulaire est uniquement fonction de la position. A partir des différents portraits de phase du pendule on peut dégager certaines propriétés telles qu'une sinusoïde est représenté par un cercle. La méthode que nous avons utilisée pour déterminer la région de stabilité est une méthode graphique. Les trajectoires fermées dans l'espace des phases du pendule forcé décrivent les mouvements d'oscillations. Elles présentent des mouvements périodiques.

# Chapitre III

## Etude de stabilité du pendule

---

### III.1 Introduction:

Des définitions précédentes des systèmes chaotiques, nous abordons le système physique qui est le but de ce travail: « le pendule ». Le choix du pendule comme un modèle du système a un grand historique dans la physique.

Comme un mécanisme pédagogique, le pendule a été un exemple mécanique standard aux introductions de physique et les cours classiques de mécanique. Quatre cents années après le travail initial de Galileo, le pendule reste encore un objet de recherche comme un système chaotique [52] [49] [48] [27] [24] [4].

### III.2 La modélisation du pendule:

#### III.2.1 Introduction:

Le problème de stabilité exige la recherche du modèle mathématique du système à étudier, donc une phase de modélisation est nécessaire pour permettre l'étude en simulation.

La modélisation consiste à représenter les aspects importants du système en décrivant les relations entre ses différentes grandeurs par des équations mathématiques. L'ensemble de ces relations constitue le modèle de ce système.

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord représenter le pendule forcé et amorti [57] et les avantages de son choix. Ensuite, nous allons développer son modèle dynamique qui sera présenté sous forme d'équations différentielles en se basant sur le formalisme d'Euler-Lagrange qui constitue une approche systématique simple à mettre en œuvre. Puis, nous présenterons ce système dans l'espace d'état pour différents cas ; premièrement négligeant les frottements et les forces appliquées au pendule (le pendule simple), deuxièmement, on prend en considération les frottements (le pendule amorti), troisièmement on prend en considération la force appliquée (le pendule forcé), et quatrièmement, les deux actions (le pendule forcé et amorti) sont considérés.

#### III.2.2 Description du pendule:

**Définition:** En physique, le pendule simple est une masse ponctuelle fixée à l'extrémité d'un fil sans masse et de longueur  $l$ , inextensible et sans raideur et oscillant sous l'effet de la pesanteur. Il s'agit du modèle du pendule pesant le plus simple. Il est parfois appelé *pendule*

de gravité idéal et, par opposition tout pendule de gravité réel est appelé pendule pesant composé.

Il est possible d'approcher expérimentalement cet objet théorique suspendant une masse de faible dimension au bout d'un fil. A cause de sa nature relativement simple, il se prête à des études théoriques poussées sur le plan mathématique. Ces études ont trouvé plusieurs applications en physique théorique, notamment dans les systèmes harmoniques simples.

Sous l'effet de son poids, lorsque le pendule est écarté de sa position d'équilibre (la verticale), le point matériel de masse  $m$  se déplace sur un arc de cercle : l'effet du poids tendant constamment à ramener le pendule vers sa position d'équilibre stable, celui-ci se met à osciller. [58]

Lorsque les frottements ne sont pas négligeables, l'amortissement devient important, et son effet est supposé proportionnelle à la vitesse de la masse [29] ; avec un coefficient de frottement  $\lambda$ , et lorsqu'on applique une force extérieure sinusoïdale verticale au niveau de la masse du pendule [13], d'après José et Saletan (2002) la position verticale de la masse est donnée par:

$$g(t) = A \cos \Omega t; \quad (3.1)$$

ou  $A$  est l'amplitude de la force, et  $\Omega$  est la fréquence de cette force, qui est définie dans l'intervalle  $\Omega t \in [0, 90]$ . Le déplacement angulaire de l'angle  $\theta$  de notre pendule varié entre  $-\pi$  et  $\pi$ .

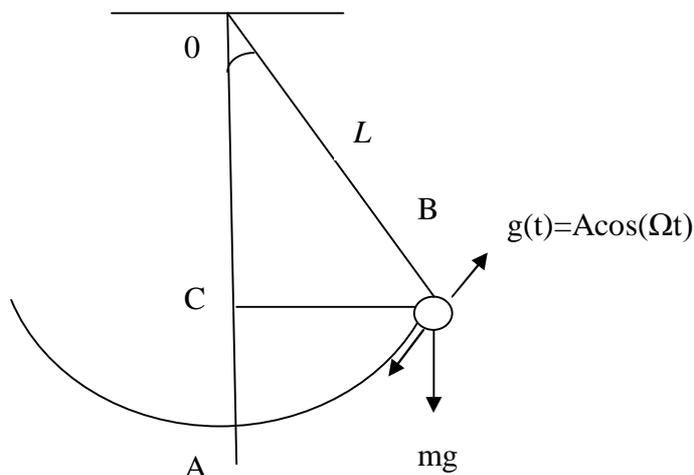
De ces deux conditions on déduit que:

- $\sin \theta < 0$  dans l'intervalle  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , (3.2)

- $\cos \Omega t > 0$  dans l'intervalle  $\Omega t \in [0, 90]$ . (3.3)

### III.2.3 La modélisation: Application du formalisme de Lagrange: [21]

La figure suivante illustre le schéma du pendule à modéliser.



**Fig. III.1** Schéma de pendule à modéliser.

On calcule d'abord, le Lagrangien et les équations du mouvement à partir de la définition de l'équation de Lagrange [54] du pendule illustré à la fig. III.1, choisissant comme coordonnée généralisée l'angle  $\theta$  entre la ligne verticale OA et le fil OB qui porte la masse  $m$  du pendule et la dérivée  $\dot{\theta}$ . On prend comme référence la ligne verticale OA. [53]

D'après la figure (III.1) et utilisant l'équation (3.1) on a:

$$\begin{cases} x = l \sin \theta; & (3.4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = l \cos \theta - A \cos \Omega t. & (3.5) \end{cases}$$

Le Lagrangien  $L$  de ce système est la différence entre l'énergie cinétique  $T$  et l'énergie potentielle  $U$ :

$$L = T - U. \quad (3.6)$$

Si  $l$  est la longueur de pendule alors l'énergie cinétique est donnée par:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (3.7)$$

avec:

$$\begin{cases} \dot{x} = l\dot{\theta} \cos \theta; \\ \dot{y} = -l\dot{\theta} \sin \theta + A\Omega \sin \Omega t. \end{cases} \quad (3.8)$$

alors  $T$  est donnée par:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m \left( (l\dot{\theta} \cos \theta)^2 - (l\dot{\theta} \sin \theta - A\Omega \sin \Omega t)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2}m [l^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + A^2\Omega^2 \sin^2 \Omega t - 2l\dot{\theta}A\Omega \sin \theta \sin \Omega t] \\ &= \frac{1}{2}m (l^2\dot{\theta}^2 + A^2\Omega^2 \sin^2 \Omega t - 2l\dot{\theta}A\Omega \sin \theta \sin \Omega t). \end{aligned} \quad (3.10)$$

L'énergie potentielle du pendule est donnée par:

$$U = -mgy = -mg(l \cos \theta - A \cos \Omega t). \quad (3.11)$$

donc, le Lagrangien du système est écrit:

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + A^2\Omega^2 \sin^2 \Omega t - 2l\dot{\theta}A\Omega \sin \theta \sin \Omega t) + mg(l \cos \theta - A \cos \Omega t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

La fonction de dissipation associée à l'amortissement s'écrit:

$$D = \frac{1}{2}\lambda v^2 = \frac{1}{2}\lambda(l\dot{\theta})^2. \quad (3.13)$$

Rappelons que les équations de Lagrange du mouvement sont données par [12]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0. \quad (3.14)$$

Ainsi

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = ml\dot{\theta}A\Omega \cos \theta \sin \Omega t - mgl \sin \theta; \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \lambda l^2 \dot{\theta}; \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} - mlA\Omega \sin \theta \sin \Omega t; \quad (3.17)$$

$$\text{et } \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta} - mlA\Omega \dot{\theta} \cos \theta \sin \Omega t - mlA\Omega^2 \sin \theta \cos \Omega t. \quad (3.18)$$

finalement, l'équation de mouvement du pendule est donnée par l'équation suivante:

$$\{ ml^2 \ddot{\theta} + mlA\Omega \dot{\theta} \cos \theta \sin \Omega t - mlA\Omega^2 \sin \theta \cos \Omega t - ml\dot{\theta}A\Omega \cos \theta \sin \Omega t + mgl \sin \theta + \lambda l^2 \dot{\theta} = 0 \}$$

(3.19)

par simplification de cette équation nous trouvons:

$$ml^2 \ddot{\theta} - mlA\Omega^2 \sin \theta \cos \Omega t + mgl \sin \theta + \lambda l^2 \dot{\theta} = 0; \quad (3.20)$$

ou:

$$\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = \frac{A\Omega^2}{l} \sin \theta \cos \Omega t. \quad (3.21)$$

### III.2.4 La représentation d'état:

L'équation du mouvement de pendule est:

$$\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = \frac{A\Omega^2}{l} \sin \theta \cos \Omega t. \quad (3.22)$$

En posant le vecteur d'état comme suit:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\text{et donc } \begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\text{alors } \begin{cases} \dot{x}_2 = \ddot{\theta}, \end{cases} \quad (3.25a)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{\lambda}{m} x_2 + \frac{A\Omega^2}{l} \sin x_1 \cos \Omega t. \end{cases} \quad (3.25b)$$

Pour simplifier l'équation, on pose:

$$\bullet \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}; \quad \text{avec } \omega \text{ est la fréquence d'oscillation de système.} \quad (3.26a)$$

$$\bullet \gamma = \frac{\lambda}{m}; \quad \text{avec } \gamma \text{ est le coefficient d'amortissement.} \quad (3.26b)$$

$$\bullet F = \frac{A\Omega^2}{l}; \quad \text{avec } F \text{ est l'amplitude de la force.} \quad (3.26c)$$

Alors l'équation de mouvement devient:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & (3.27a) \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 \sin x_1 - \gamma x_2 + F \sin x_1 \cos \Omega t. & (3.27b) \end{cases}$$

L'objectif de la modélisation est de fournir une estimation du modèle mathématique du système considéré afin de le simuler. La modélisation mathématique de nombreux phénomènes physiques, mécaniques et biologiques conduit à analyser des systèmes dynamiques chaotiques. Ces systèmes sont indifféremment du second ordre, le caractère chaotique des systèmes dynamiques mis en évidence par des représentations numériques comme les portraits de phases. De plus, une étude graphique basée sur les techniques de Lyapunov permet de déterminer la stabilité des systèmes chaotiques. [7]

### III.3 Etude de stabilité des différents cas du pendule:

#### III.3.1 L'approche graphique:

Nous présenterons une approche graphique pour déterminer la région de stabilité d'un système et aussi d'approximer ses trajectoires. L'approche est une généralisation de la méthode directe de Lyapunov. La différence est que nous considérons plus d'une fonction d'énergie. Le premier avantage de cette méthode est la simulation directe du système est que les trajectoires du système ne sont pas calculables. Dans la méthode directe de Lyapunov nous obtenons des informations à partir de la région de stabilité observée en utilisant seulement une fonction. Dans notre approche, chaque une des fonctions assure seulement une information partielle, et en complète l'analyse en considérant plusieurs fonctions.

On applique le concept de la stabilité de Lagrange sur le pendule pour trouver la région de stabilité graphiquement dans le plan de phase.

#### III.3.2 Application au pendule simple:

Dans le cas de l'absence d'amortissement et de forçage extérieur, le pendule est seulement soumis à la gravité, c.-à-d.: lorsque  $\gamma = 0$  et  $g(t) = 0$ , l'équation (3.27) devient:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & (3.28a) \\ \dot{x}_2 = -w^2 \sin x_1. & (3.28b) \end{cases}$$

qui décrit les vibrations d'un pendule simple.

##### III.3.2.1 Le mouvement du pendule simple:

Dans la figure suivante (fig.III.2), on présente un nombre de mouvements caractéristiques du pendule simple. Dans ces courbes on trace le déplacement angulaire  $x_1$  en fonction de temps  $t$ , pour  $t \in [0,100]$ , et  $x_1 = -\frac{\pi}{6}$ ,  $x_2 = 0$ , avec une variation des valeurs de la fréquence  $w = 0.9, 1, 1.4, 1.5, 2, 2.5$ .

La courbe pour  $w = 0.9$  représente un mouvement oscillatoire périodique qui n'atteint pas le sommet. Mais les autres courbes montrent des mouvements qui atteignent le sommet, puisqu'on augmente la fréquence, le mouvement devient moins oscillatoire dans une durée de temps, et lorsque le temps  $t \rightarrow \infty$ , le mouvement tend vers  $\pm\infty$  d'une façon irrégulière.

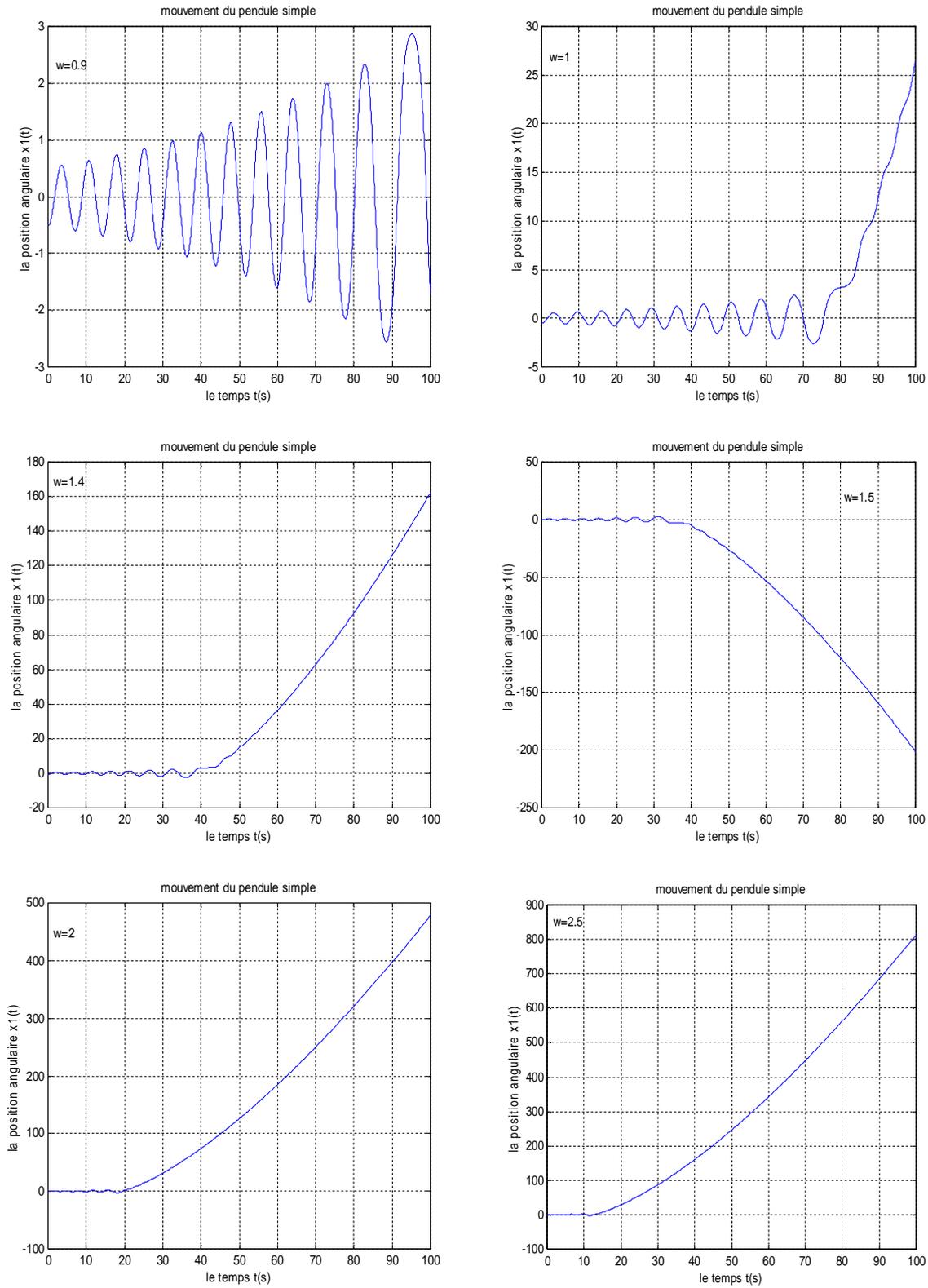


Fig. III.2 Mouvements du pendule simple.

### III.3.2.2 Application de la théorie de stabilité de Lagrange:

L'équation d'état qui décrit l'évolution du pendule simple est:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -w^2 \sin x_1. \end{cases}$$

Pour calculer la fonction de Lyapunov on pose  $V$  une fonction qui varie en temps.

On peut choisir  $V$  tel que:

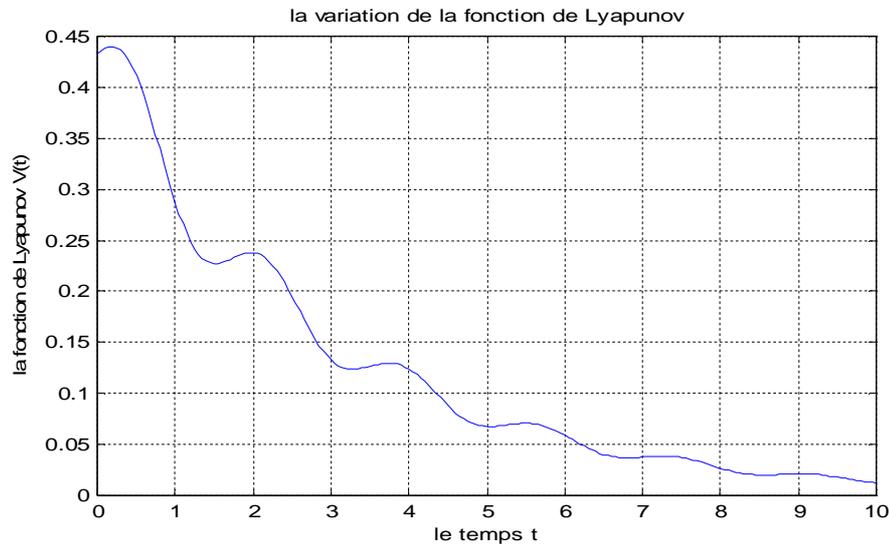
$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x w^2 \sin(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (3.29)$$

alors, la dérivée de cette fonction est:

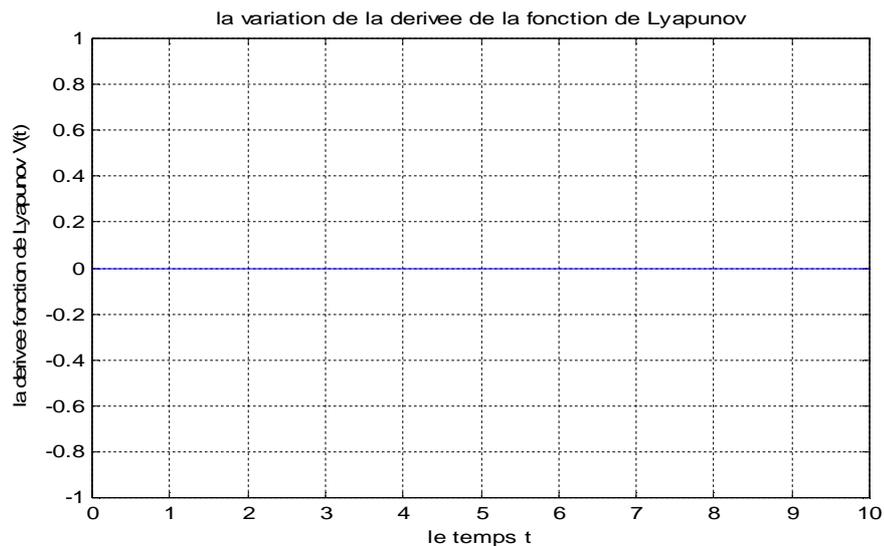
$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (3.30)$$

$$= [w^2 \sin(x)]y + y\dot{y} \quad (3.31)$$

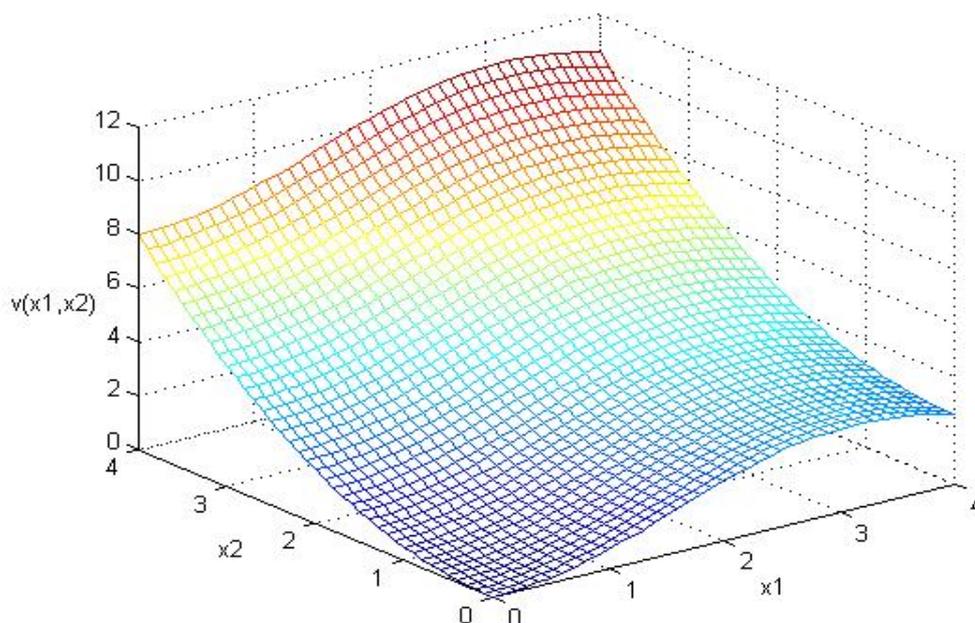
$$= yw^2 \sin(x) - yw^2 \sin(x) = 0. \quad (3.32)$$



**Fig. III.3** La variation de la fonction de Lyapunov du pendule simple.



**Fig. III.4** La variation de la dérivée de la fonction de Lyapunov du pendule simple.



**Fig. III.5** La variation de la fonction de Lyapunov en fonction de  $x_1$  et  $x_2$  du pendule simple.

Les figures III.3, III.4 et III.5 montrent le bon choix de la fonction de Lyapunov. La figure III.3 montre la positivité de la fonction de Lyapunov en fonction du temps et la figure III.5 aussi montre la définition positive en fonction de  $x_1$  et  $x_2$ .

### III.3.3 Application au pendule amorti:

Dans le cas où on prend en considération l'amortissement, l'énergie du pendule sera dissipée, le long de mouvement du pendule. Pour simplicité il est supposé que la force d'amortissement soit proportionnelle à la vitesse et de signe opposé.

Pour cela, revenons à l'équation (3.27), l'équation du mouvement de ce pendule est donnée par:

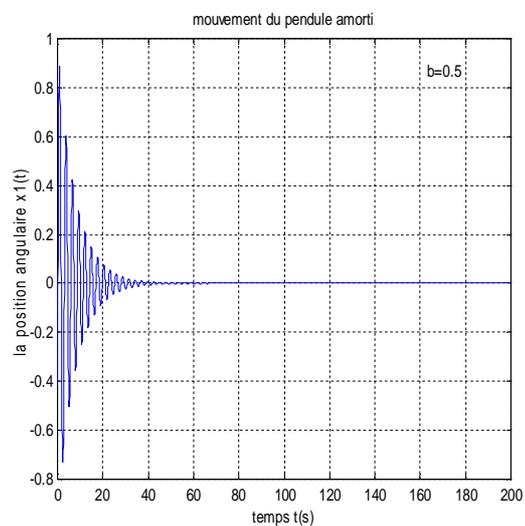
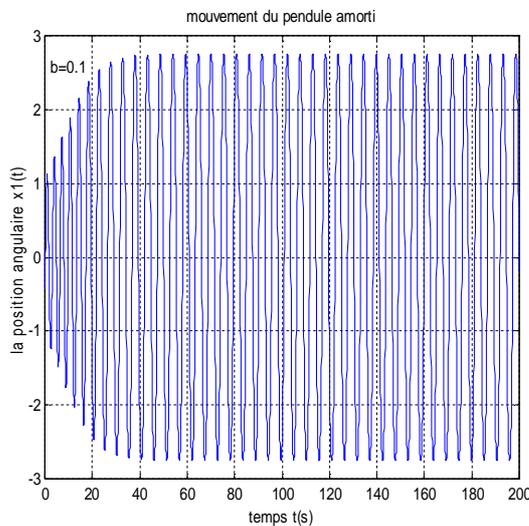
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & (3.33a) \\ \dot{x}_2 = -w^2 \sin x_1 - \gamma x_2, & (3.33b) \end{cases}$$

$$\text{avec } g(t) = 0. \quad (3.34)$$

#### III.3.3.1 Le mouvement du pendule amorti:

Dans la figure suivante (fig. III.6) on représente l'évolution du pendule amorti lorsqu'on varie le coefficient d'amortissement  $\gamma = b = 0.1, 0.5, 1, 2$ . On observe alors que les systèmes oscillants réels voient sans cesse leur amplitude diminuer au cours du temps et tendent plus ou moins rapidement vers l'origine à cause de la dissipation d'énergie.

Lorsqu'on augmente le coefficient d'amortissement, le pendule présente moins d'oscillation et tend rapidement vers la position d'équilibre. Si  $\gamma$  dépasse une certaine valeur limite, on dit que le pendule est trop amorti, c.-à-d. il se glisse à la position d'équilibre.



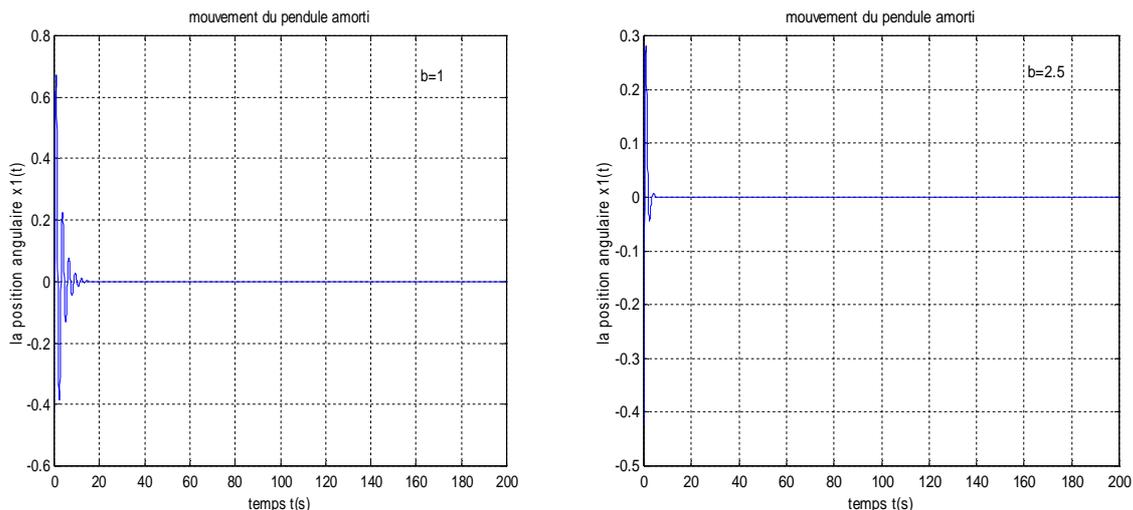


Fig. III.6 Mouvement du pendule amorti.

**III.3.3.2 Application de la théorie de stabilité de Lagrange:**

Rappelons que les équations du mouvement de pendule amorti sont données par:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & (3.35a) \\ \dot{x}_2 = -w^2 \sin x_1 - \gamma x_2, & (3.35b) \end{cases}$$

Pour calculer la fonction de Lyapunov on pose  $V$  une fonction qui varie dans le temps, et on peut choisir  $V$  tel que:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x w^2 \sin(\varepsilon) d\varepsilon, \tag{3.36}$$

alors, la dérivée de cette fonction est:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} \tag{3.37}$$

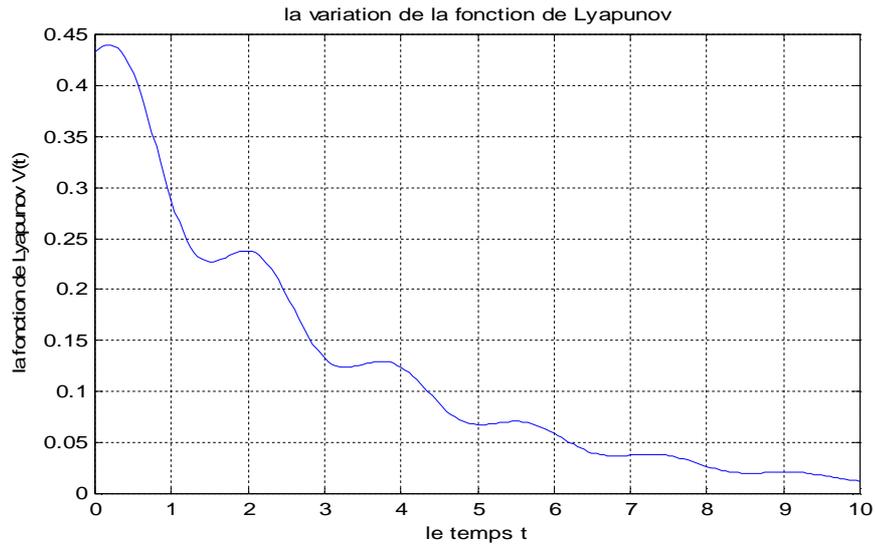
$$= [w^2 \sin(x)]y + y\dot{y} \tag{3.38}$$

$$= [w^2 \sin(x)]y + y[-w^2 \sin(x) - \gamma y] \tag{3.39}$$

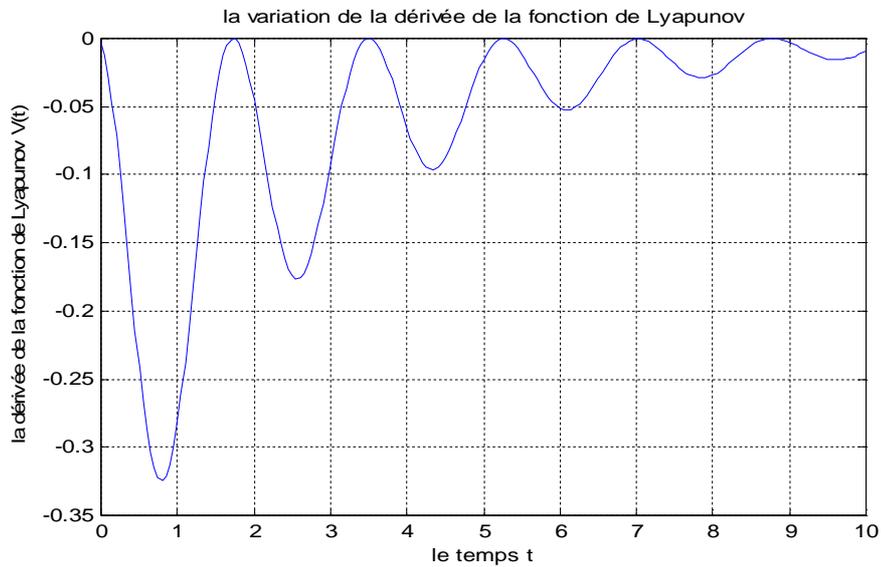
$$= -\gamma y^2. \tag{3.40}$$

il est clair que  $-\gamma y^2 \leq 0$ , (3.41)

alors  $\frac{dV}{dt} \leq 0, \forall x_2$ . (3.42)

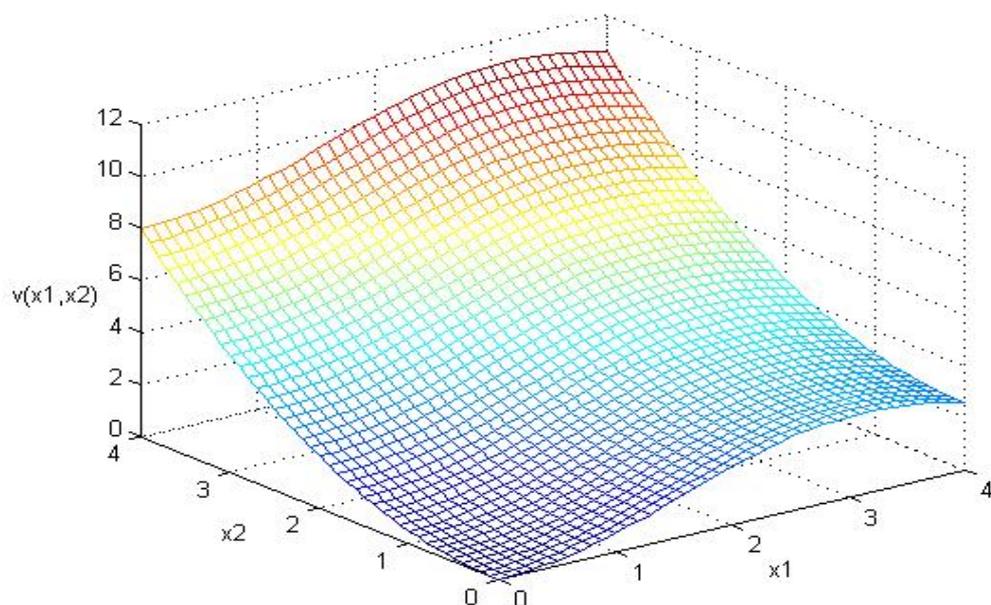


**Fig. III.7** La variation de la fonction de Lyapunov du pendule amorti.

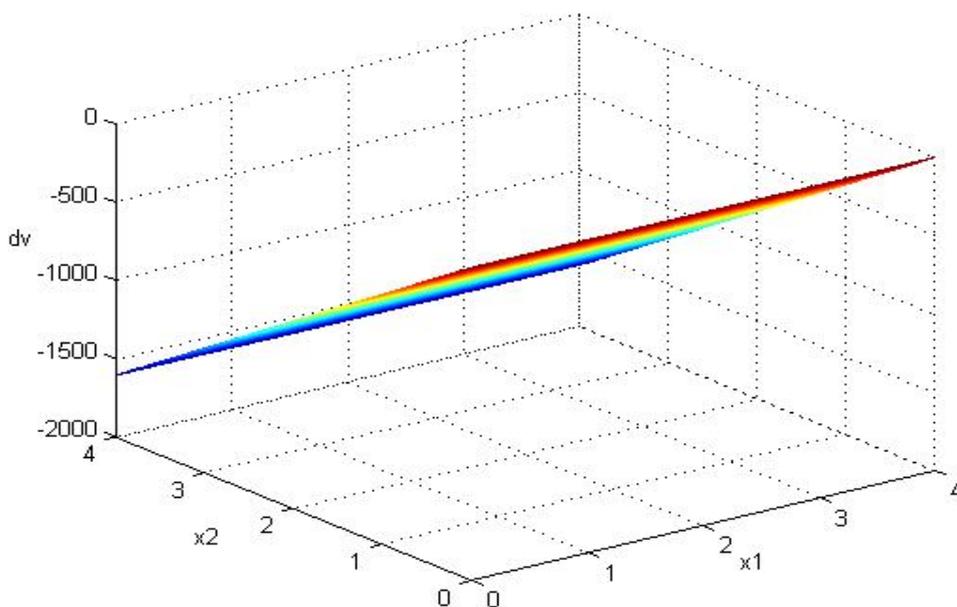


**Fig. III.8** La variation de la dérivée de la fonction de Lyapunov du pendule amorti.

D'après les deux figures III.7 et III.8, il est clair que la variation de la fonction de Lyapunov est positive en fonction du temps, et sa dérivée est négative.



**Fig. III.9** La variation de la fonction de Lyapunov en fonction de  $x_1$  et  $x_2$  du pendule amorti.



**Fig. III.10** La variation de la dérivée de la fonction de Lyapunov en fonction de  $x_1$  et  $x_2$  du pendule amorti.

La figure III.9 montre que la fonction de Lyapunov choisie est définie positive, et la figure III.10 montre que sa dérivée est définie négative. Alors le choix de la fonction de Lyapunov est correct.

### III.3.4 Application au pendule forcé:

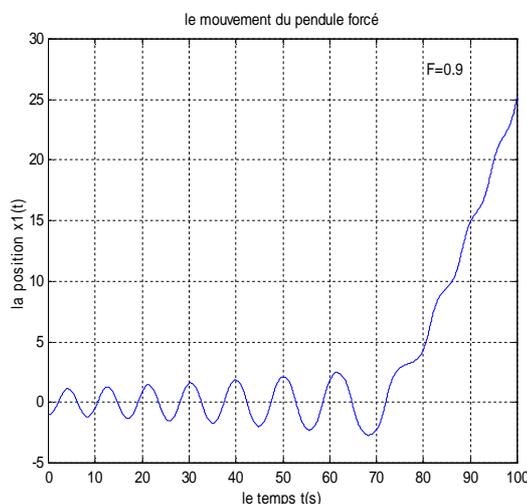
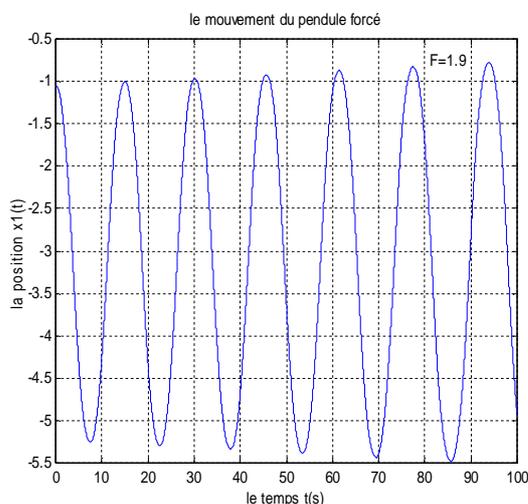
Le pendule forcé peut être assimilé à un système physique simple. Cependant, son comportement est riche et complexe. L'étude de ses mouvements peut être facilitée par des modèles de fonctions mathématiques simples. Ces fonctions ont l'avantage d'être théoriquement simple et numériquement efficace. [3]

Si nous prenons en considération la force d'excitation appliquée au niveau du pivot du pendule, qui est une force sinusoïdale variante dans le temps, et si on élimine l'amortissement  $\gamma = 0$ , on arrive au modèle d'un pendule forcé, dont son énergie est conservée le long du mouvement. L'équation qui caractérise sa dynamique est donnée par:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & (3.43a) \\ \dot{x}_2 = -w^2 \sin x_1 + F \sin x_1 \cos \Omega t. & (3.43b) \end{cases}$$

#### III.3.4.1 Le mouvement du pendule forcé:

Le mouvement du pendule illustré dans la figure (fig. III.11) présente une oscillation simple. Pour des valeurs différentes de  $w=1,25$ ,  $\Omega=0.9$ , et des valeurs de  $F=1.9, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.3$  et  $0.1$ , on a plusieurs mouvements. De plus en plus le mouvement devient complexe, l'amplitude de la force diminue, et ne tend pas vers un mouvement périodique.



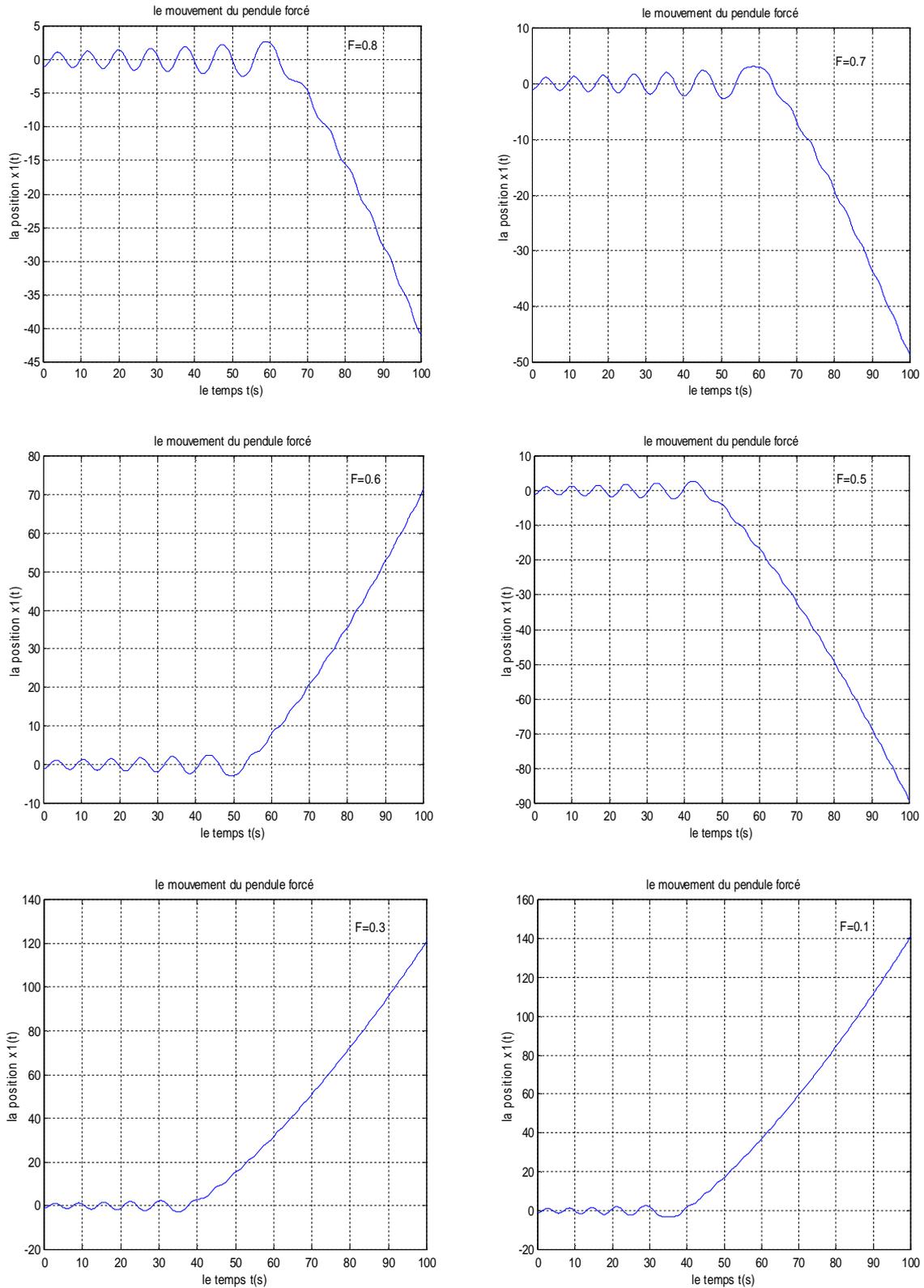


Fig. III.11 Mouvement du pendule forcé pour différentes valeurs de  $F$ .

## III.3.4.2 Application de la théorie de stabilité de Lagrange:

On peut écrire l'équation de mouvement du pendule forcé sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & (3.44a) \\ \dot{x}_2 = -w^2 \sin x_1 + F \sin x_1 \cos \Omega t = f(x) - g(t). & (3.44b) \end{cases}$$

avec:

$$f(x) = -w^2 \sin x_1 ; \quad (3.45)$$

$$g(t) = -F \sin x_1 \cos \Omega t. \quad (3.46)$$

Si nous choisissons la fonction de Lyapunov comme suit:

$$V(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \int_0^x [w^2 \sin(s) - g(t)] ds. \quad (3.47)$$

$$\text{et } \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (3.48)$$

$$= [w^2 \sin(x) + F \sin(x) \cos(\Omega t)] y + y \, dy/dt \quad (3.49)$$

$$= [w^2 \sin(x) + F \sin(x) \cos(\Omega t)] y + y [-w^2 \sin(x) + F \sin(x) \cos \Omega t] \quad (3.50)$$

$$= 2yF \sin(x) \cos(\Omega t). \quad (3.51)$$

D'après les équations (3.2) et (3.3):

$$F \sin(x) \cos(\Omega t) \leq 0 ; \quad (3.52)$$

ainsi  $dV/dt < 0$  si  $y > 0$ .

Ce choix de la fonction de Lyapunov ne prend en considération que les mouvements de pendule à vitesse positive. Et lorsque le pendule oscille dans les deux sens positive et négative, nous ne pouvons pas éliminer les oscillations au sens négatif. Alors, le choix de la fonction de Lyapunov donnée par (3.47) ne nous conduit pas à la détermination d'une meilleure région de stabilité.

Dans ce cas on peut limiter la fonction  $g(t)$  entre deux fonctions en  $x$ .

$$\alpha(x) < g(t) < \beta(x) \quad (3.53)$$

Si nous utilisons la fonction  $g(t)$  pour dénoter une entrée au système, qui n'est pas en fonction de  $x$  et  $y$ . avec respect de notre problème,  $x$  dénote la position angulaire du pendule et  $y$  la vitesse angulaire correspondante. Comme nous avons vu en (3.53)  $g(t)$  est limitée, il est donc possible de trouver une limite qui dépend de  $x$ . L'idée devant notre approche est de limiter les trajectoires du système basant sur les limites de  $g(t)$ . Supposant que l'angle  $x \leq \pi$ , nous cherchons à limiter ces trajectoires par un angle inférieure à  $\pi$ .

Pour calculer la fonction de Lyapunov, on pose  $V$  la fonction de Lyapunov, varie en fonction de temps.

on peut choisir  $V_1$  tel que:

$$V_1(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x [\sin(\varepsilon) + \alpha(\varepsilon)] d\varepsilon. \quad (3.54)$$

alors, la dérivée de cette fonction est:

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{\partial V_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (3.55)$$

$$= [\sin(x) + \alpha(x)]y + y \frac{dy}{dt} \quad (3.56)$$

$$= y[\alpha(x) - g(t)]. \quad (3.57)$$

$$\text{lorsque } \alpha(x) < g(t), \text{ alors } \alpha(x) - g(t) < 0. \quad (3.58)$$

$$\text{ainsi } dV_1/dt < 0 \text{ si } y > 0. \quad (3.59)$$

de même manière on calcule  $V_2$ :

$$V_2(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x [\sin(\varepsilon) + \beta(\varepsilon)] d\varepsilon. \quad (3.60)$$

alors, la dérivée de cette fonction est:

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{\partial V_2}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V_2}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (3.61)$$

$$= [\sin(x) + \beta(x)]y + y \frac{dy}{dt} \quad (3.62)$$

$$= y[\beta(x) - g(t)]. \quad (3.63)$$

$$\text{et } \beta(x) > g(t), \quad (3.64)$$

$$\text{alors } \beta(x) - g(t) > 0. \quad (3.65)$$

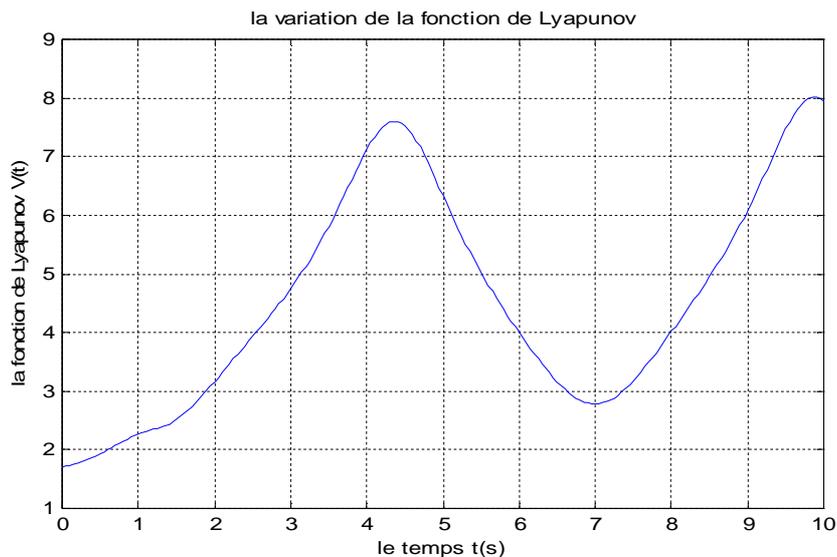
$$\text{ainsi } dV_2/dt < 0 \text{ pour } y < 0. \quad (3.66)$$

si on choisit les fonctions  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  qui sont des fonctions limitant  $g(t)$  par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(x) = -\sin \left| \frac{x}{2} \right|, \\ \beta(x) = +\sin \left| \frac{x}{2} \right|. \end{array} \right. \quad (3.67)$$

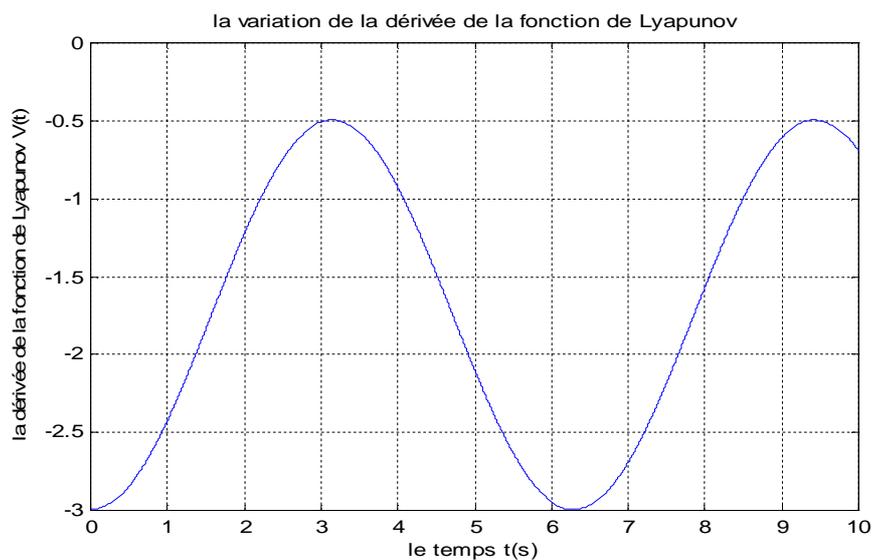
$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(x) = -\sin \left| \frac{x}{2} \right|, \\ \beta(x) = +\sin \left| \frac{x}{2} \right|. \end{array} \right. \quad (3.68)$$

Alors, la variation de la fonction de Lyapunov choisie est représentée dans les deux figures suivantes:

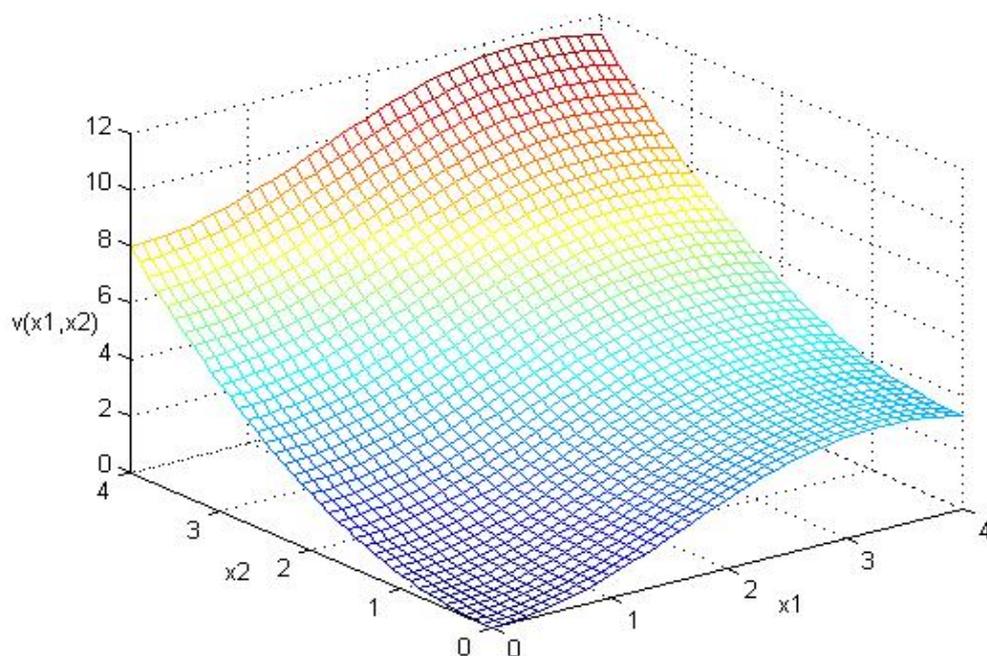


**Fig. III.12** La variation de la fonction de Lyapunov du pendule forcé.

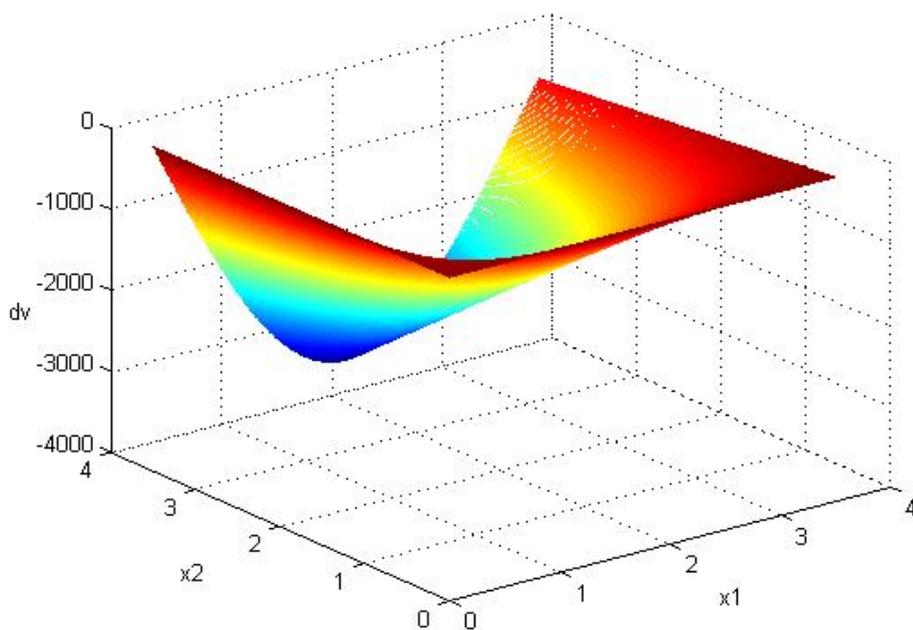
La figure III.12 montre que la fonction de Lyapunov du pendule forcé est positive en fonction de temps. Et la figure suivante III.13 montre la négativité de cette fonction toujours en fonction de temps.



**Fig. III.13** La variation de la dérivée de la fonction de Lyapunov du pendule forcé.



**Fig. III.14** La variation de la fonction de Lyapunov en fonction de  $x_1$  et  $x_2$  du pendule forcé. D'après la figure III.14, il est clair que la fonction de Lyapunov est définie positive comme montre la courbe au dessus d'axes 0. Et la figure suivante III.15 montre la définition négative de sa dérivée en fonction de  $x_1$  et  $x_2$ . Alors le choix de la fonction de Lyapunov est correct.



**Fig. III.15** La variation de la dérivée de la fonction de Lyapunov en fonction de  $x_1$  et  $x_2$  du pendule forcé.

### III.3.5 Application au pendule amorti forcé:

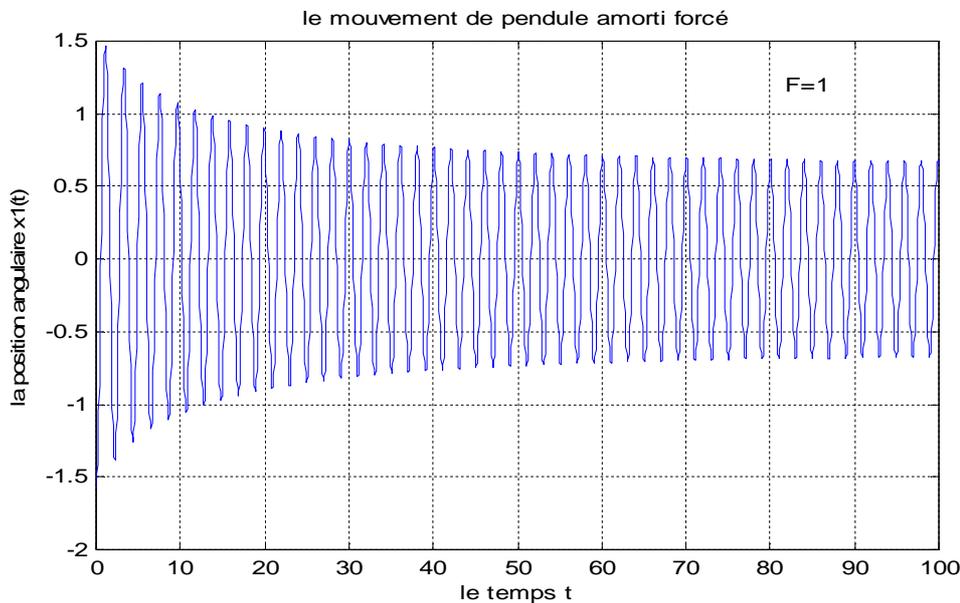
Considérons l'équation de mouvement de pendule amorti forcé donnée par l'équation (3.27):

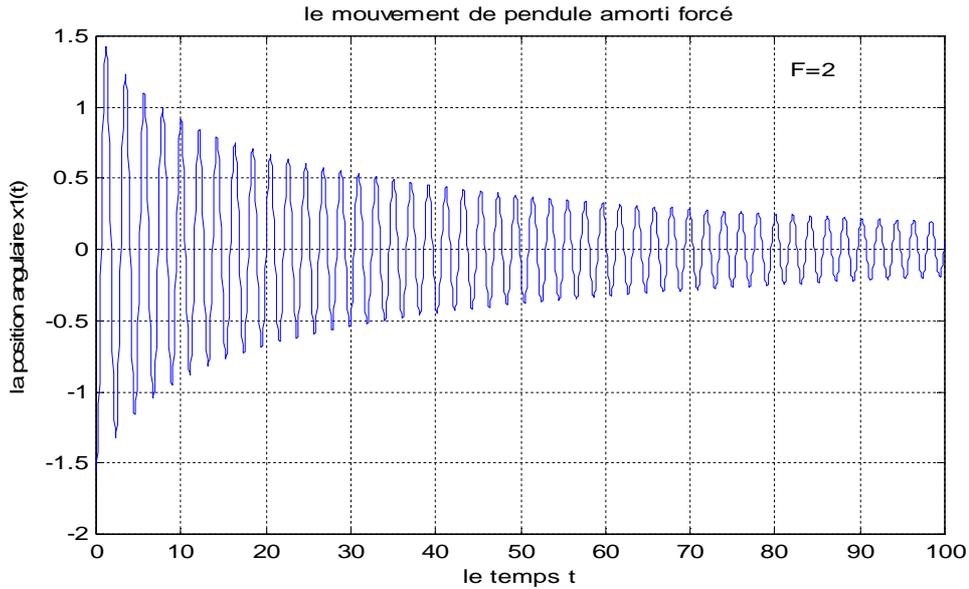
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & (3.69a) \\ \dot{x}_2 = -w^2 \sin x_1 - \gamma x_2 + F \sin x_1 \cos \Omega t. & (3.69b) \end{cases}$$

#### III.3.5.1 Mouvement du pendule amorti forcé:

Pour quelques valeurs des paramètres  $w$ ,  $\gamma$  et  $F$ , l'oscillation en mouvement périodique peut être harmonique ou subharmonique. Mais pour des valeurs intermédiaires de  $F$ , il y a une interaction compliquée entre la force extérieure, la non-linéarité et la dissipation: le mouvement du pendule est chaotique (numériquement imprédictible).

Pour les valeurs ou  $F=1, 2$  le mouvement du pendule est périodique comme montre la figure suivante (fig.III.16a):

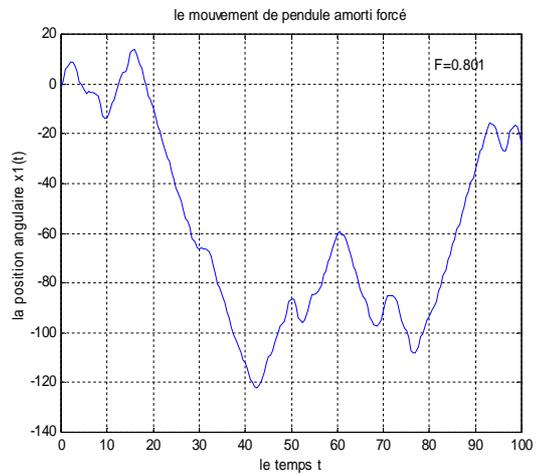
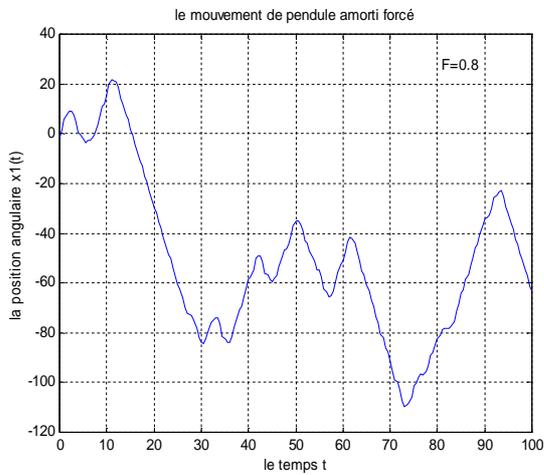


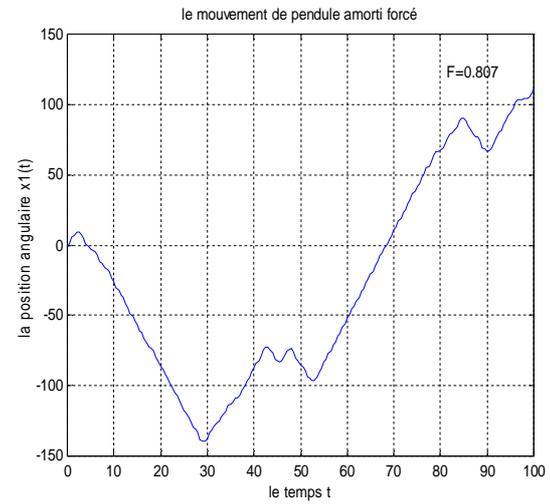
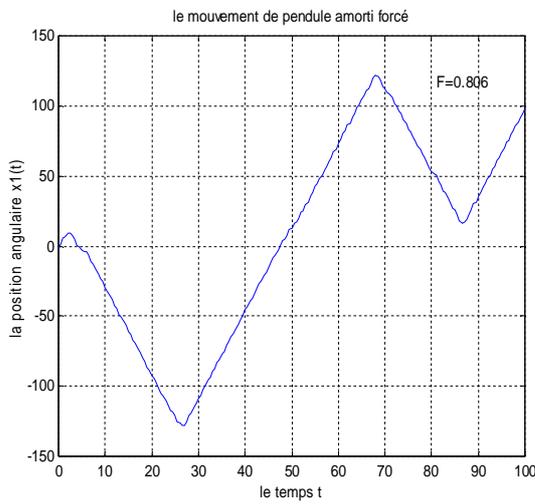
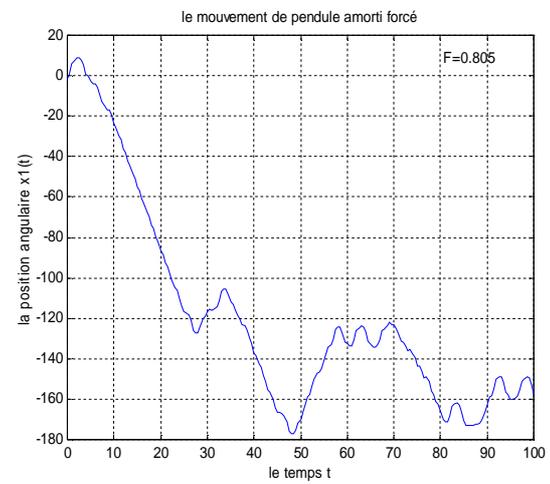
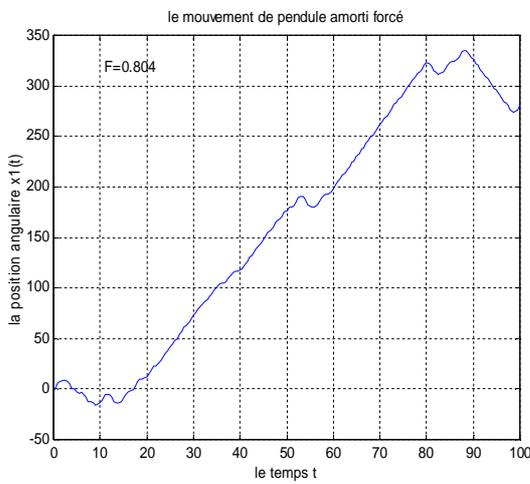
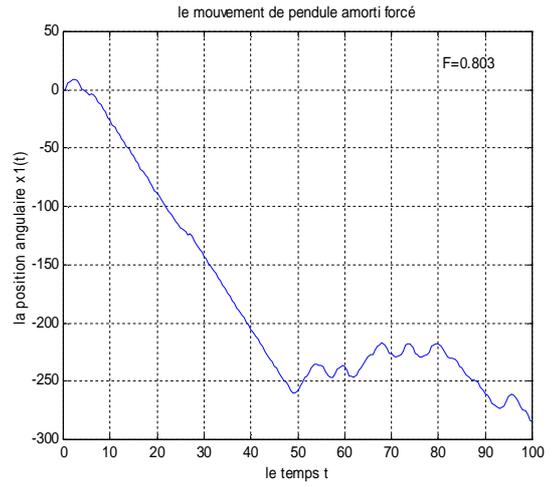
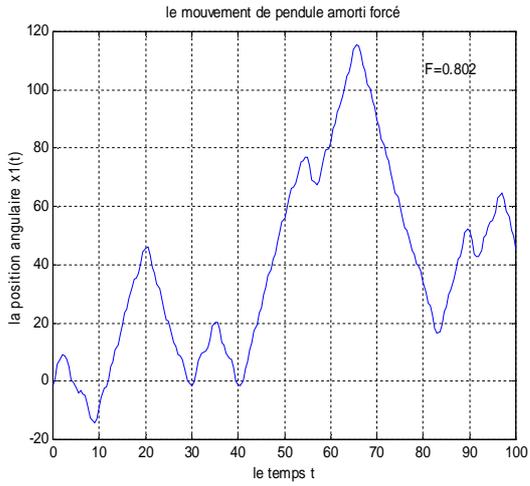


**Fig. III.16a** Mouvement périodique du pendule amorti forcé.

La figure suivante (fig. III.16b) montre ce mouvement chaotique pour des valeurs choisies de  $w, \gamma$  et  $\Omega$ , variant l'amplitude de la force  $F$ , avec:

$w = 3.4, \gamma = 0.5$  et  $\Omega = 1.5$ , et  $F = 0.8, 0.801, 0.802, 0.803, 0.804, 0.805, 0.806, 0.807, 0.808$  et  $0.809$ .





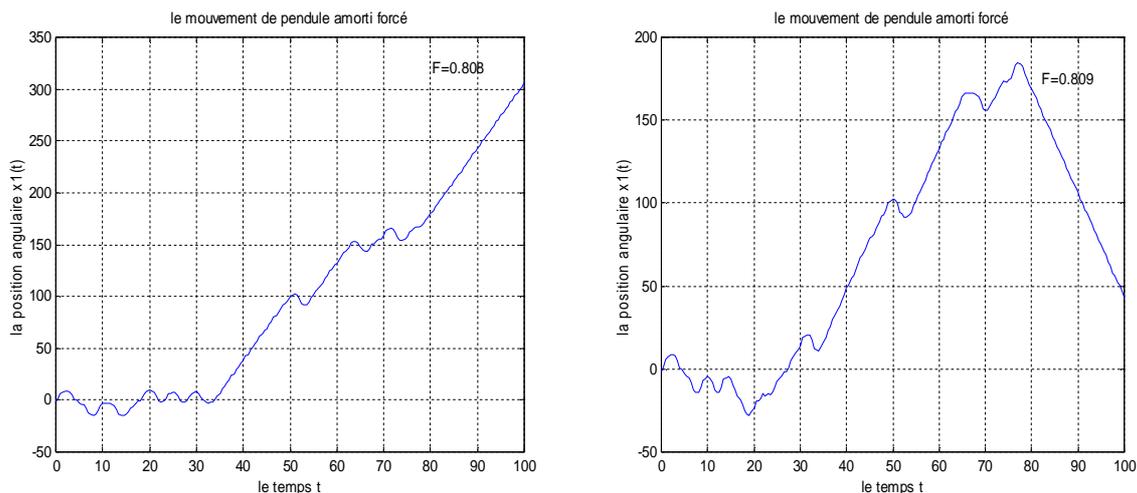


Fig. III.16b Mouvements de pendule amorti forcé pour différents valeurs de  $F$ .

III.3.5.2 Application de la théorie de Lagrange:

- Appliquant la théorie de stabilité de Lagrange sur l'équation du pendule amorti forcé,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; & (3.70a) \\ \dot{x}_2 = -w^2 \sin x_1 - \gamma x_2 + F \sin x_1 \cos \Omega t = f(x) - g(t) & (3.70b) \end{cases}$$

Dans ce cas on peut limiter la fonction  $g(t)$  avec deux fonctions de  $x$ .

$$\alpha(x) < g(t) < \beta(x) \tag{3.71}$$

Comme nous avons vu en (3.71)  $g(t)$  est limitée, il est donc possible de trouver une limite qui dépend de  $x$ . L'idée derrière notre approche est de limiter les trajectoires du système basant sur les limites de  $g(t)$ . Supposant que l'angle  $x \leq \pi$ , nous cherchons à limiter ces trajectoires par un angle inférieure à  $\pi$ .

Pour calculer la fonction de Lyapunov, on pose  $V_1$  tel que:

$$V_1(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x [w^2 \sin s + \alpha(s)] ds. \tag{3.72}$$

alors, la dérivée de cette fonction est:

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{\partial V_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \frac{dy}{dt} \tag{3.73}$$

$$= [w^2 \sin(x) + \alpha(x)]y + y \frac{dy}{dt} \tag{3.74}$$

$$= y[\alpha(x) - g(t) - \gamma y]. \tag{3.75}$$

lorsque:  $\alpha(x) < g(t)$ , (3.76)

alors  $\alpha(x) - g(t) < 0$  (3.77)

et  $\gamma > 0$ ,

(3.78)

$$\text{ainsi } dV_1/dt < 0 \text{ si } y > 0. \quad (3.79)$$

de même manière on calcule  $V_2$ :

$$V_2(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x [w^2 \sin(x) + \beta(\varepsilon)] d\varepsilon. \quad (3.80)$$

de manière similaire, on calcule sa dérivée:

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{\partial V_2}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V_2}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (3.81)$$

$$= [w^2 \sin(x) + \beta(x)]y + y \frac{dy}{dt} \quad (3.82)$$

$$= y[\beta(x) - g(t) - \gamma y]. \quad (3.83)$$

$$\text{lorsque } \beta(x) > g(t), \quad (3.84)$$

$$\text{alors } \beta(x) - g(t) > 0 \quad (3.85)$$

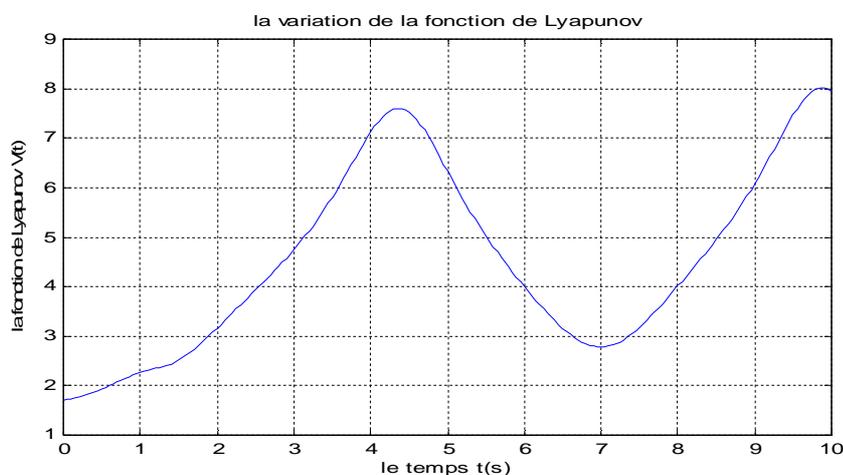
$$\text{et } \gamma > 0, \quad (3.86)$$

$$\text{ainsi } dV_2/dt < 0 \text{ pour } y < 0. \quad (3.87)$$

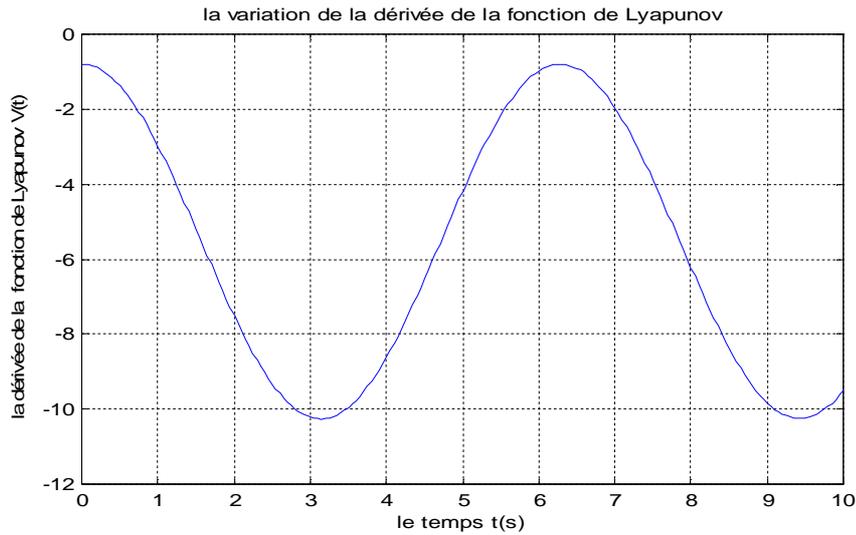
Les fonctions  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  sont choisies comme suit :

$$\begin{cases} \alpha(x) = -\sin\left|\frac{x}{2}\right|, \\ \beta(x) = +\sin\left|\frac{x}{2}\right|. \end{cases} \quad (3.88)$$

$$\beta(x) = +\sin\left|\frac{x}{2}\right|. \quad (3.89)$$

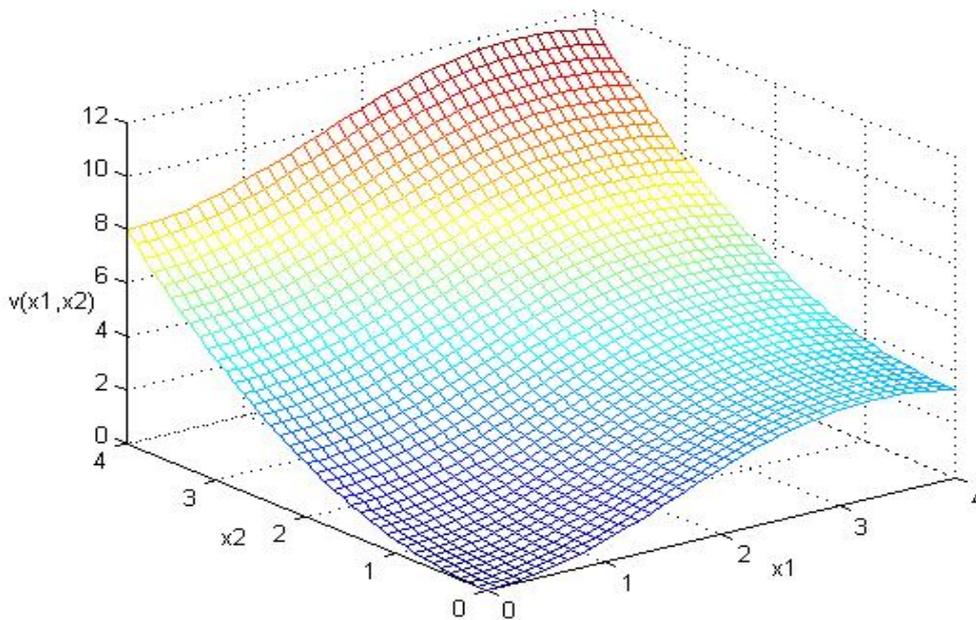


**Fig. III.17** La variation de la fonction de Lyapunov du pendule amorti forcé.

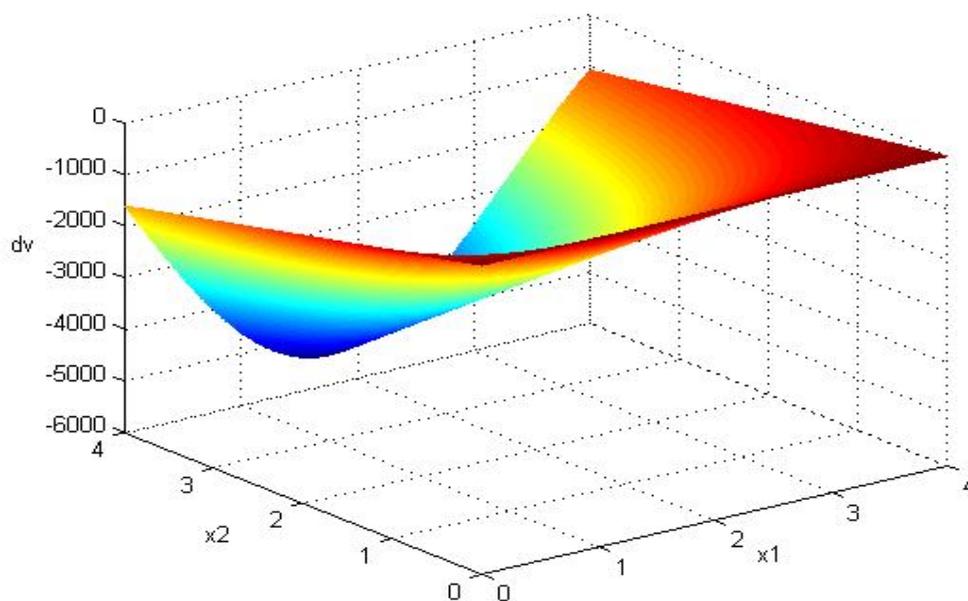


**Fig. III.18** La variation de la dérivée de la fonction de Lyapunov du pendule amorti forcé.

La figure III.17 montre que la fonction de Lyapunov du pendule forcé est positive en fonction de temps. Et la figure III.18 montre la négativité de cette fonction toujours en fonction de temps.



**Fig. III.19** La variation de la fonction de Lyapunov en fonction de  $x_1$  et  $x_2$  du pendule amorti forcé.



**Fig. III.20** La variation de la dérivée de la fonction de Lyapunov en fonction de  $x_1$  et  $x_2$  du pendule amorti forcé.

D'après la figure III.19, il est clair que la fonction de Lyapunov est définie positive comme montre la courbe au dessus d'axes 0. Et la figure III.20 montre la définition négative de sa dérivée en fonction de  $x_1$  et  $x_2$ . Alors le choix de la fonction de Lyapunov est correct.

**III.4 Conclusion:**

L'application de cette théorie de stabilité sur les différents modèles du pendule qui ont dans certains cas des mouvements chaotiques, présente une approche graphique pour déterminer la région de stabilité transitoire du pendule, en considérant plusieurs fonctions de Lyapunov, basée sur l'analyse des trajectoires dans le plan de phase.

Dans le chapitre qui suit, on représente les résultats de simulation des mouvements du pendule, et la variation de la région de stabilité lorsqu'on varie les paramètres du système.

## Chapitre IV

### Résultats de simulation

---

**IV.1 Introduction:**

Dans le cadre de la détermination de la région de stabilité au sens de Lyapunov, des simulations ont été effectuées pour des systèmes dynamiques non linéaires qui présentent des mouvements chaotiques pour certains choix de paramètres. La région de stabilité est obtenue dans le plan de phase par la méthode graphique pour étudier les systèmes non linéaires du second ordre pour différentes conditions initiales.

Cette approche graphique sera déterminée en utilisant le concept de stabilité de Lagrange, qui se base sur la détermination graphique des fonctions de Lyapunov  $V(x,y)$ . Les trajectoires des mouvements des différents cas du pendule étudiés sont générées pour plusieurs conditions initiales.

**IV.2 Divers exemples:****IV.2.1 Le pendule simple:**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & (4.1a) \\ \dot{x}_2 = -w^2 \sin x_1. & (4.1b) \end{cases}$$

Dans cette simulation nous supposons que le pendule se déplace avec des conditions initiales sur la position et la vitesse données numériquement, et de fréquence d'oscillation  $w$  donnée.

❖ Les paramètres utilisés dans la simulation du plan de phase sont:

➤ Le vecteur d'état pour le mouvement du pendule est de dimension  $n=2$ , ces états sont définis comme suit:

✓  $x_1(t)$ : la position angulaire de l'angle  $\theta$ , qui est limitée entre  $-\pi$  et  $\pi$ .

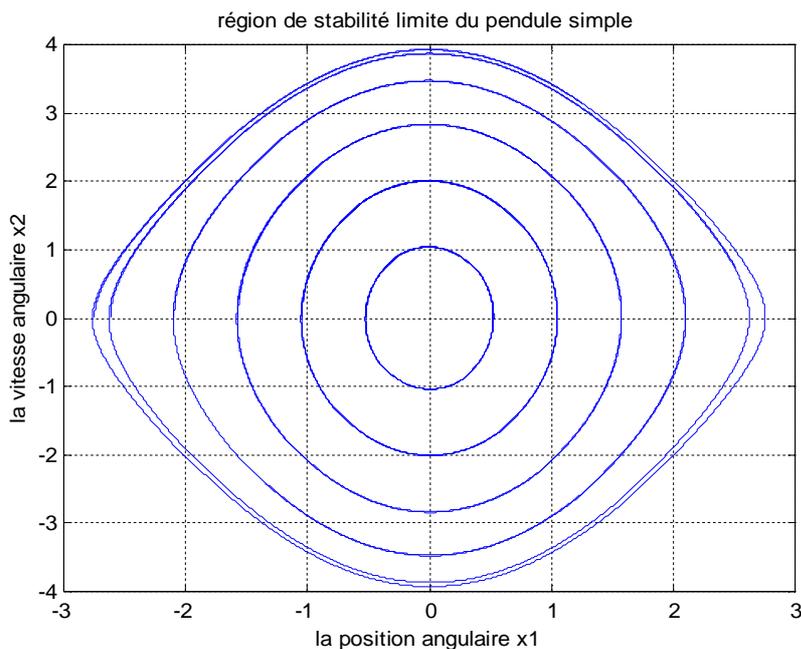
✓  $x_2(t)$ : la vitesse angulaire.

➤ La fréquence d'oscillation du pendule est:  $w=2s^{-1}$ ,

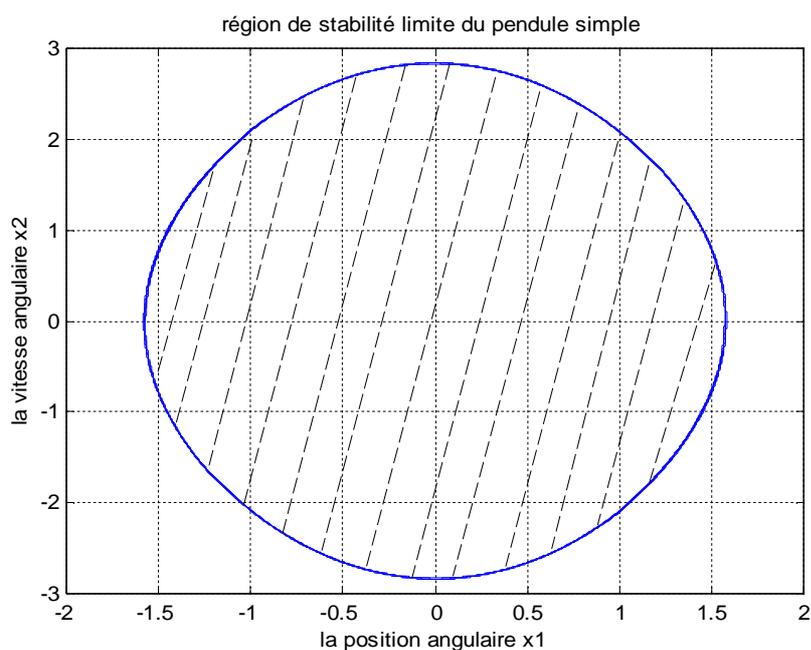
➤ Les vecteurs des états initiaux sont:

-pour la figure IV.1a:  $x(0) = \left[ \frac{-\pi}{6}, 0 \right], \left[ \frac{-\pi}{3}, 0 \right], \left[ \frac{-\pi}{2}, 0 \right], \left[ \frac{-2\pi}{3}, 0 \right], \left[ \frac{-5\pi}{6}, 0 \right], \left[ \frac{-7\pi}{8}, 0 \right]$ .

-pour la figure IV.1b:  $x(0) = \left[ \frac{-\pi}{2}, 0 \right], \left[ \frac{\pi}{2}, 0 \right]$



**Fig. IV.1a** La région de stabilité du pendule simple.



**Fig. IV.1b** Région de stabilité limite du pendule simple.

Une trajectoire fermée dans le plan de phase correspond à un mouvement oscillatoire périodique du système, donc le pendule simple présente des oscillations périodiques.

D'après la figure (fig. IV.1), les trajectoires au voisinage du point d'équilibre sont des orbites fermées. Alors, lorsque les trajectoires s'enferment autour du point d'équilibre, elles garantissent la stabilité. On dit alors que le point d'équilibre est stable, lorsque les trajectoires

commençant de tourner autour du point d'équilibre ne tendent pas éventuellement vers lui. On peut choisir la région entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$  comme région de stabilité.

Pour cela, on déduit que la fonction de Lyapunov de ce pendule simple est constante, et pour ces trajectoires débutant à la surface de Lyapunov  $V(\mathbf{x}) = c$ , restent dans la même surface pour tous les temps futur. [28]

#### IV.2.2 Le pendule amorti:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & (4.2a) \\ \dot{x}_2 = -w^2 \sin x_1 - \gamma x_2. & (4.2b) \end{cases}$$

Dans cette simulation, nous présentons le mouvement du pendule amorti dans le plan de phase, varions à chaque fois la valeur du coefficient d'amortissement  $\gamma$ , et voyons comment la région de stabilité de ce pendule varie. Le pendule amorti possède un point d'équilibre à l'origine (0,0), et aux points  $(n\pi, 0)$  avec  $n = \pm 1, 2, 3, \dots$

❖ Les paramètres utilisés dans la simulation au plan de phase sont:

➤ Le vecteur d'état pour le mouvement pendulaire est de dimension  $n=2$ , ces états sont définis comme suit:

✓  $x_1(t)$ : la position angulaire de l'angle  $\theta$ , qui est limitée entre  $-\pi$  et  $\pi$ .

✓  $x_2(t)$ : la vitesse angulaire.

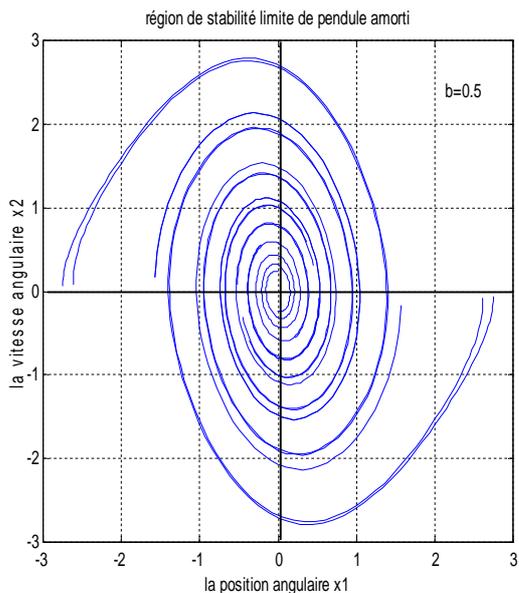
➤ La fréquence d'oscillation de pendule est:  $w=1.79s^{-1}$  ;

➤ Le coefficient d'amortissement est:  $\gamma = b = 0.1, 0.5, 0.9$  ;

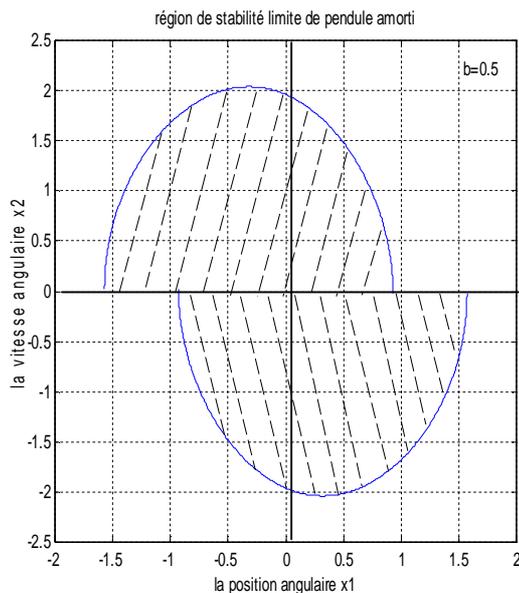
➤ Les vecteurs des états initiaux sont:

-pour les figures (a):  $\mathbf{x}(0) = \left[ \frac{-\pi}{6}, 0 \right], \left[ \frac{\pi}{6}, 0 \right], \left[ \frac{-\pi}{2}, 0 \right], \left[ \frac{\pi}{2}, 0 \right], \left[ \frac{-5\pi}{6}, 0 \right], \left[ \frac{5\pi}{6}, 0 \right], \left[ \frac{7\pi}{8}, 0 \right], \left[ \frac{-7\pi}{8}, 0 \right]$ .

-pour les figures (b):  $\mathbf{x}(0) = \left[ \frac{-\pi}{2}, 0 \right], \left[ \frac{\pi}{2}, 0 \right]$ .

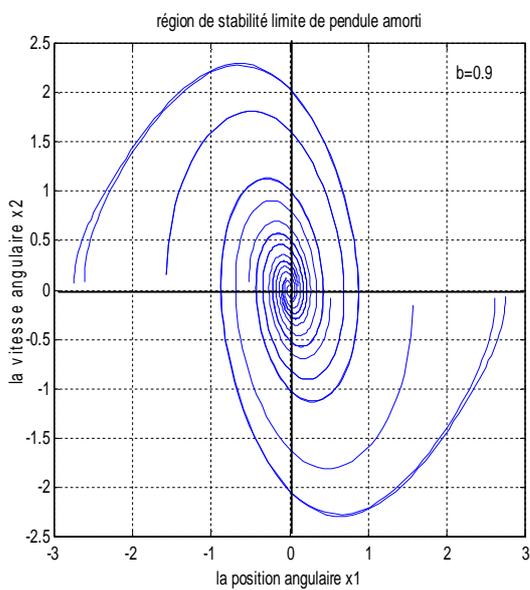


(a)

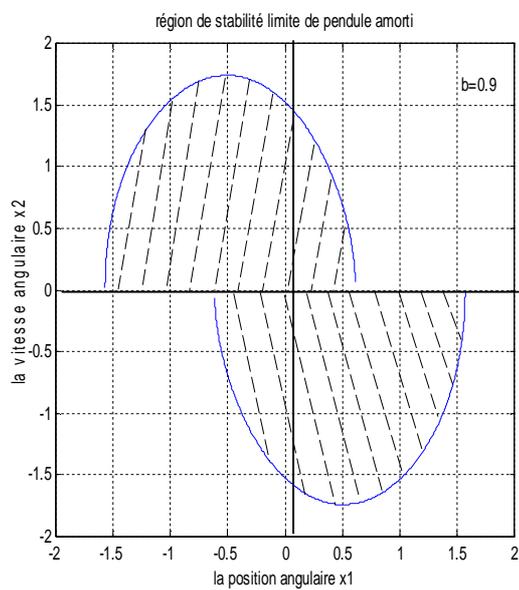


(b)

**Fig. IV.2.1(a)** la région de stabilité et **(b)** la région de stabilité limite du pendule amorti pour  $\gamma = 0.5$ .

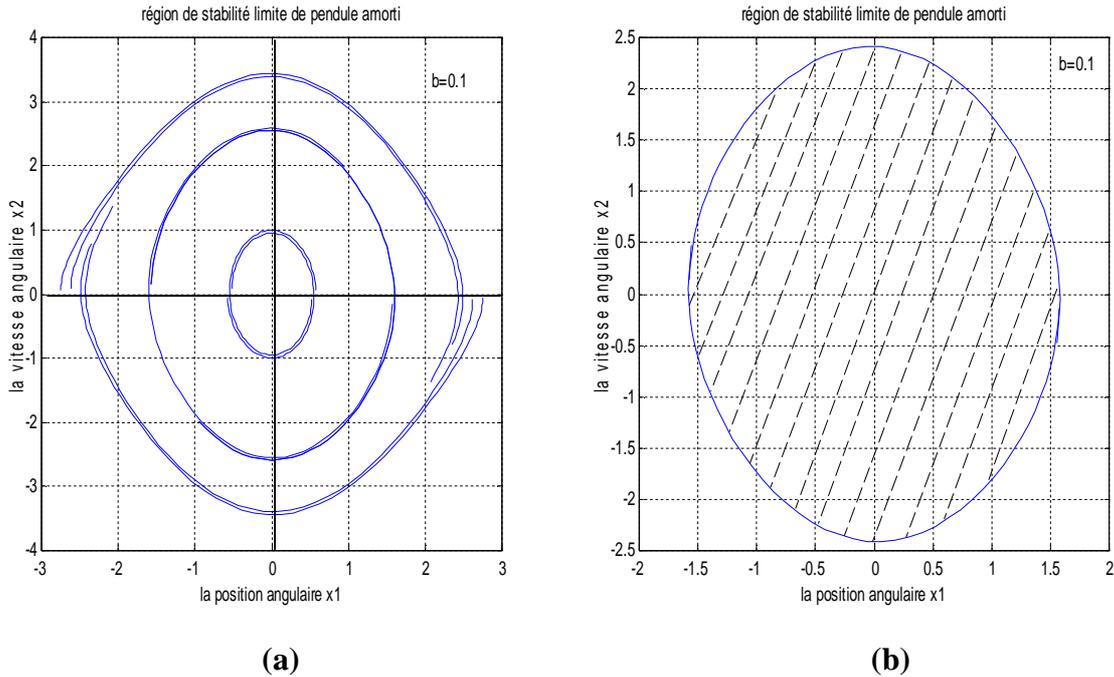


(a)



(b)

**Fig. IV.2.2(a)** la région de stabilité et **(b)** la région de stabilité limite du pendule amorti pour  $\gamma = 0.9$ .



**Fig. IV.2.3(a)** la région de stabilité et **(b)** la région de stabilité limite du pendule amorti pour  $\gamma = 0.1$ .

D’après les figures (fig. IV.2), nous observons que plus le coefficient d’amortissement est grand, plus que les trajectoires de mouvement dans le plan de phase tendent rapidement à l’origine stable, cette tendance des trajectoires au repos due à la dissipation de l’énergie de pendule le long de mouvement. On déduit alors que, la variation d’énergie qu’exprime la variation de la fonction de Lyapunov est nulle ( $\dot{V}(x) = 0$ ) le long de l’axe  $x_1$ , et négative le long de l’axe  $x_2$ , et elle tend vers 0 lorsque  $x_2=0$  (le système est à l’équilibre). Pour une petite valeur de  $\gamma = 0.1$ , les trajectoires du mouvement de ce pendule amorti tendent vers des cercles fermées centrées à l’origine, c’est le cas de mouvement du pendule simple.

D’après ces trois figures (fig. IV.2.1), (fig. IV.2.2) et (fig. IV.2.3), la région de stabilité du pendule amorti sera plus large lorsque le coefficient d’amortissement diminue. Si l’amortissement est important, la région de stabilité sera petite. Pour cela, nous choisissons la région où l’angle est entre  $\pi/2$  et  $-\pi/2$  comme région de stabilité, comme montre les figures (b).

**IV.2.3 Le pendule forcé:**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & (4.3a) \\ \dot{x}_2 = -w^2 \sin x_1 + F \sin x_1 \cos \Omega t. & (4.3b) \end{cases}$$

Dans cette simulation, nous voyons comment la région de stabilité varie lorsque nous varions l'amplitude  $F$  de la force  $g(t)$ . L'équation de mouvement de pendule forcé possède des points d'équilibre à l'origine  $(0,0)$  et aux points  $(\pm\pi, 0)$ .

❖ Les paramètres utilisés dans la simulation au plan de phase sont:

➤ Le vecteur d'état pour le mouvement pendulaire est de dimension  $n=2$ , ces états sont définis comme suit:

✓  $x_1(t)$ : la position angulaire de l'angle  $\theta$ , qui est limitée entre  $-\pi$  et  $\pi$ .

✓  $x_2(t)$ : la vitesse angulaire.

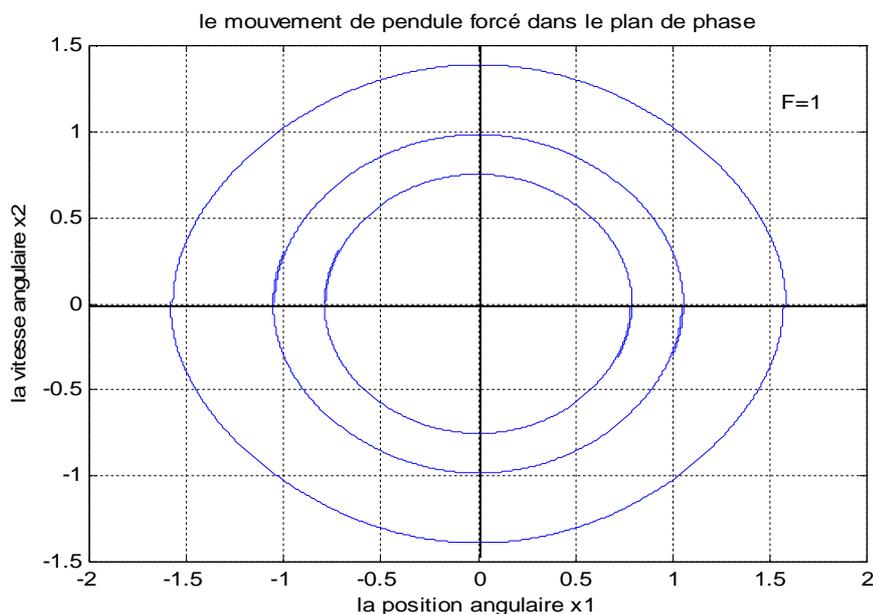
➤ La fréquence d'oscillation de pendule est:  $w=1.4s^{-1}$  ;

➤ La fréquence de la force  $g(t)$  est:  $\Omega=v=1.4 s^{-1}$  ;

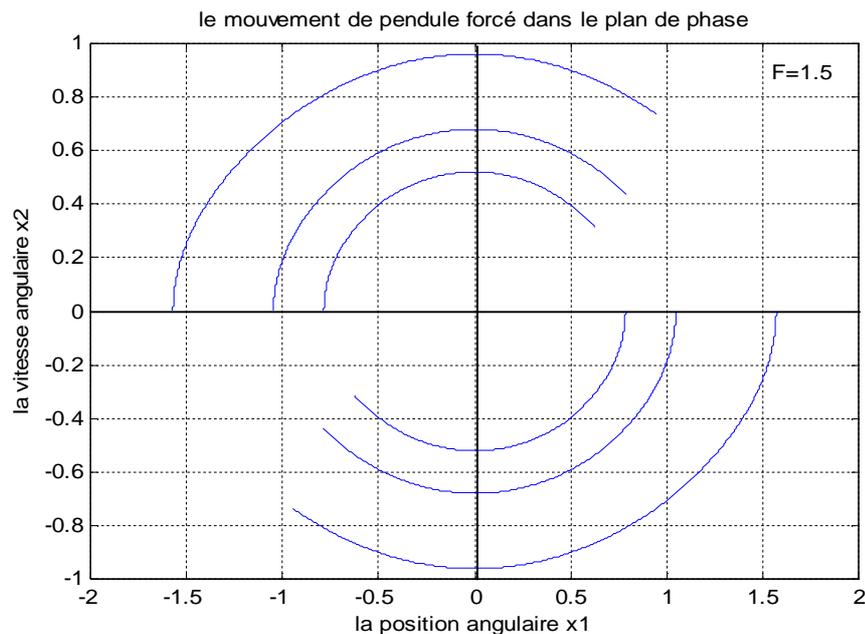
➤ L'amplitude de cette force est:  $F=1$  ;

➤ Les vecteurs des états initiaux sont:

$$x(0) = \left[ \frac{-\pi}{3}, 0 \right], \left[ \frac{\pi}{3}, 0 \right], \left[ \frac{-\pi}{2}, 0 \right], \left[ \frac{\pi}{2}, 0 \right], \left[ \frac{\pi}{4}, 0 \right], \left[ \frac{-\pi}{4}, 0 \right].$$



**Fig. IV.3a** Mouvement du pendule forcé dans le plan de phase pour  $F=1$ .



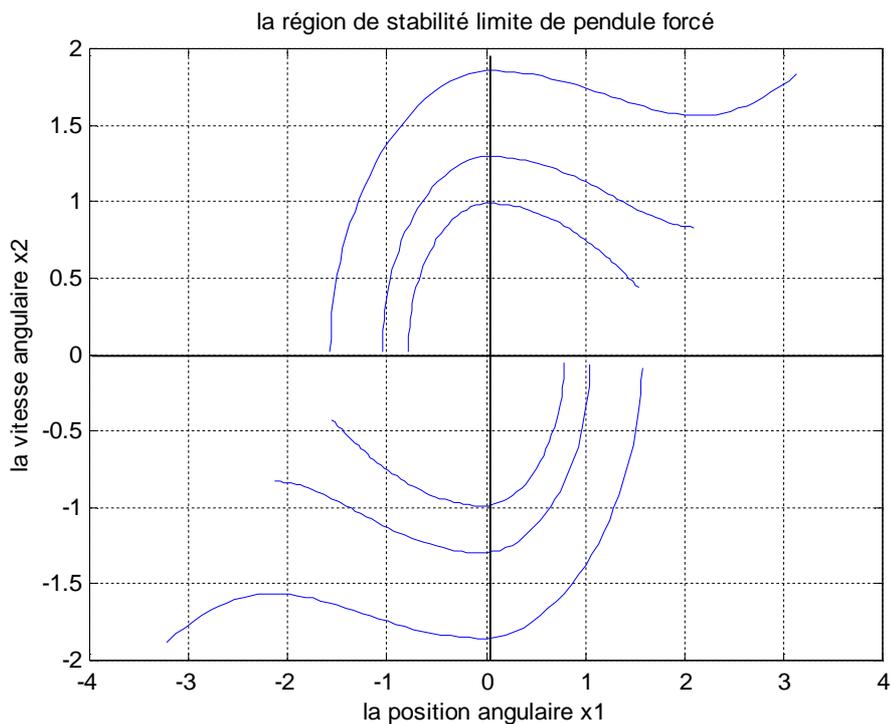
**Fig. IV.3b** *Mouvement du pendule forcé dans le plan de phase pour  $F=1.5$ .*

La figure (fig. IV.3) confirme que le pendule forcé a aussi un point d'équilibre à l'origine stable, grâce aux trajectoires fermés centrés.

- ❖ La simulation de stabilité de trajectoires estimées de ce pendule en appliquant la théorie de stabilité de Lagrange pour déterminer la région de stabilité du pendule forcé donne les résultats observés sur les figures (fig. IV.4) et (fig. IV.5), avec la fréquence de mouvement  $\omega=1\text{s}^{-1}$ .

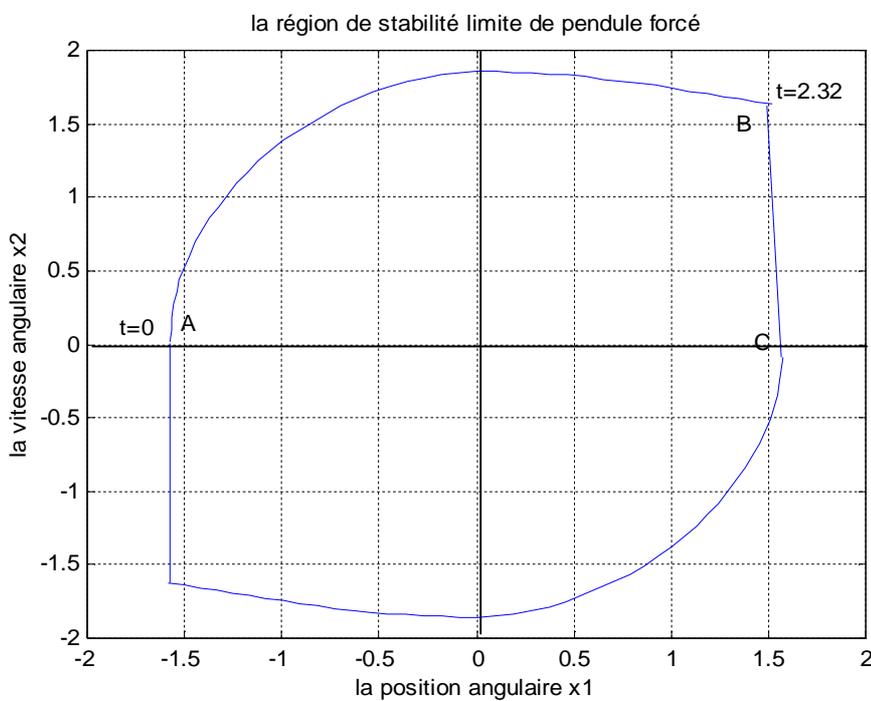
➤ Les vecteurs des états initiaux sont:

$$x(0) = \left[ \frac{-\pi}{3}, 0 \right], \left[ \frac{\pi}{3}, 0 \right], \left[ \frac{-\pi}{2}, 0 \right], \left[ \frac{\pi}{2}, 0 \right], \left[ \frac{\pi}{4}, 0 \right], \left[ \frac{-\pi}{4}, 0 \right].$$



**Fig. IV.4** La région de stabilité du pendule forcé.

➤ Les vecteurs des états initiaux pour la figure suivante sont:  $x(0) = \left[ \frac{-\pi}{2}, 0 \right], \left[ \frac{\pi}{2}, 0 \right]$ .



**Fig. IV.5** La région de stabilité limite du pendule forcé.

D'après la figure (fig. IV.4), il est clair que les trajectoires estimées forment une région de stabilité fermée, limitée entre  $-\pi$  et  $\pi$ , mais ces trajectoires ne forment pas un cercle fermé. La trajectoire limitée qui passe à travers quelques états du système assure toujours une limite supérieure à la trajectoire actuelle. Autrement dit, aucune trajectoire du système commence du même état peut traverser la trajectoire limitée de la région intérieure à la région extérieure, par exemple la trajectoire qui débute au  $(-\pi/2, 0)$ , chaque une de ces trajectoires correspond à une fonction de Lyapunov  $V(x)$  candidate dans les deux cas ou  $x_2 < 0$  et  $x_2 > 0$ . Il est évident que la vitesse du système représente dans (fig. IV.4) est toujours inférieure à celle de la figure (fig. IV.5), comme donnée à la trajectoire limitée AB. Lorsque les deux trajectoires commencent de  $(-\pi/2, 0)$  de ces deux figures, elles ne traversent pas la ligne BC dans le même période de temps  $T=2.32s$ . Alors, on peut choisir la région définie ou l'angle est inférieure à  $\pi/2$  comme région de stabilité limitée, et on peut choisir cette limite d'être n'importe quelle angle inférieure à  $\pi$ .

#### IV.2.4 Le pendule amorti forcé:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & (4.1a) \\ \dot{x}_2 = -w^2 \sin x_1 - \gamma x_2 + F \sin x_1 \cos \Omega t = f(x) - g(t). & (4.1b) \end{cases}$$

Ce pendule a un comportement chaotique pour certaines conditions initiales, ce comportement est dû à l'interaction complexe entre la force extérieure  $g(t)$ , la non-linéarité et la dissipation. Dans cette simulation nous présentons la région de stabilité limitée de ce pendule amorti forcé. Nous voyons comment la région de stabilité varie lorsque nous varions l'amplitude  $F$  de la force  $g(t)$ . L'équation du mouvement du pendule amorti forcé possède des points d'équilibre à l'origine  $(0,0)$  et aux points  $(\mp\pi, 0)$ .

❖ Les paramètres utilisés dans la simulation du plan de phase sont:

➤ Le vecteur d'état pour le mouvement pendulaire est de dimension  $n=2$ , ces états sont définis comme suit:

✓  $x_1(t)$ : la position angulaire de l'angle  $\theta$ , qui est limitée entre  $-\pi$  et  $\pi$ .

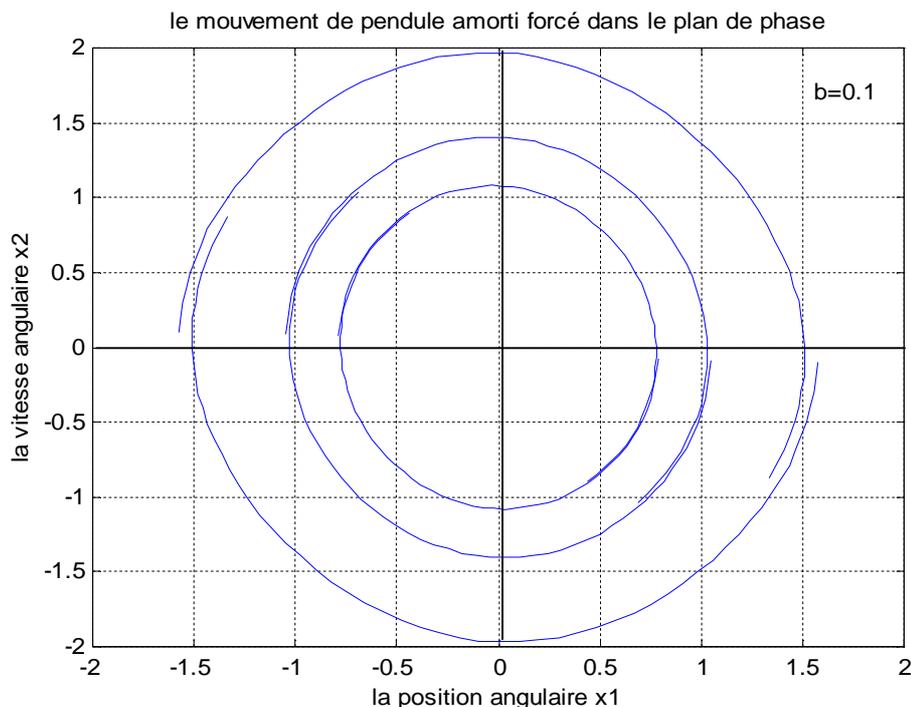
✓  $x_2(t)$ : la vitesse angulaire.

➤ La fréquence d'oscillation de pendule est:  $w=1.79s^{-1}$ ;

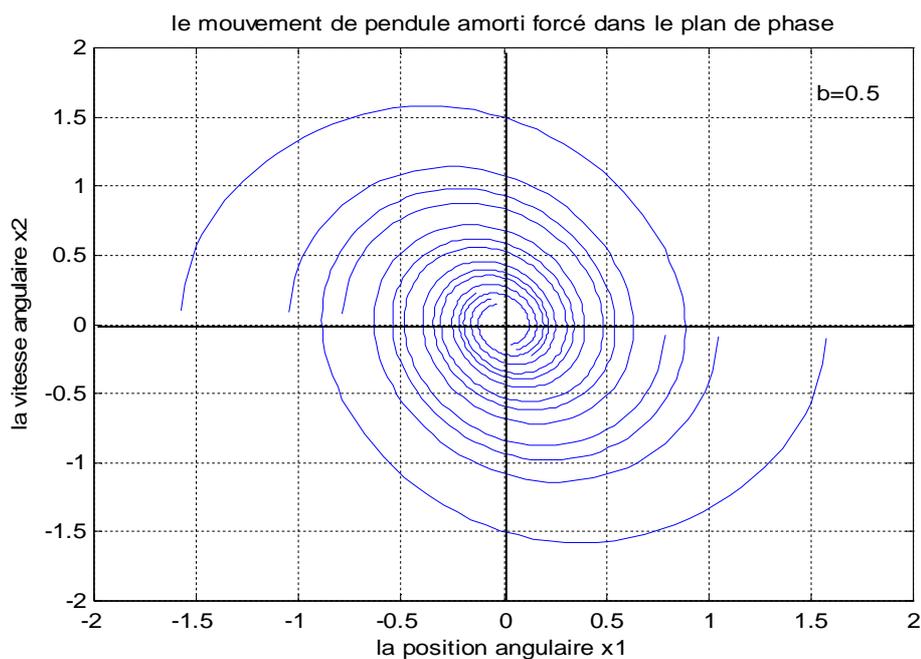
➤ Le coefficient d'amortissement est:  $\gamma = b = 0.1, 0.5, 0.9$ ;

- La fréquence de la force  $g(t)$  est:  $\Omega=\nu=1.5s^{-1}$  ;
- L'amplitude de la force est:  $F=1.2$ ;
- Les vecteurs des états initiaux sont:

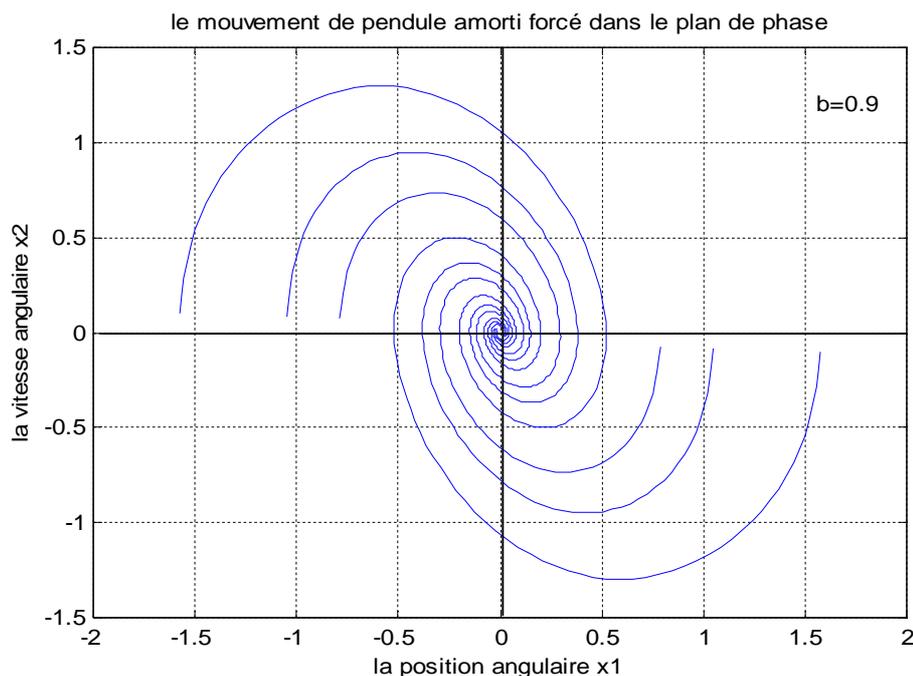
$$x(0) = \left[ \frac{-\pi}{3}, 0 \right], \left[ \frac{\pi}{3}, 0 \right], \left[ \frac{-\pi}{2}, 0 \right], \left[ \frac{\pi}{2}, 0 \right], \left[ \frac{\pi}{4}, 0 \right], \left[ \frac{-\pi}{4}, 0 \right].$$



**Fig. IV.6.1** Mouvement du pendule amorti forcé dans le plan de phase pour  $\gamma = 0.1$ .



**Fig. IV.6.2** Mouvement du pendule amorti forcé dans le plan de phase pour  $\gamma = 0.5$ .



**Fig. IV.6.3** Mouvement du pendule amorti forcé dans le plan de phase pour  $\gamma = 0.9$ .

Le pendule amorti forcé possède un point d'équilibre à l'origine (0,0), ce point est stable parce que les trajectoires autour de lui sont stables, présentent un mouvement oscillatoire puis elles tendent vers ce point à cause de la dissipation d'énergie, ceci traduit que la variation de la fonction de Lyapunov tend vers 0 lorsque  $x_2$  aussi tend vers 0.

La variation du coefficient d'amortissement change le comportement des trajectoires. Nous remarquons que s'il est grand les trajectoires tendent rapidement vers l'état de repos, et s'il est petit les trajectoires forment des cercles centrés (comportement du pendule forcé).

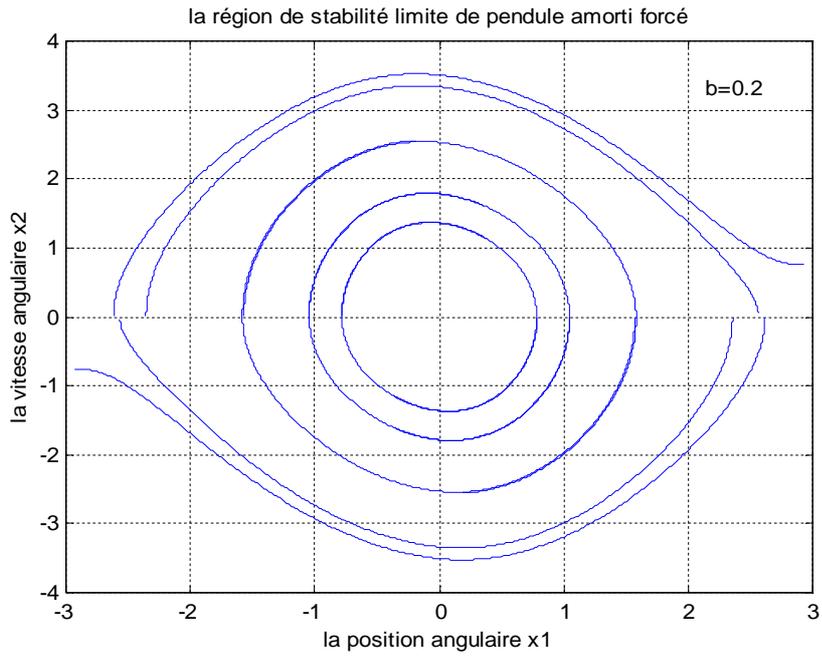
- ❖ La simulation de ce pendule on appliquant la théorie de stabilité de Lagrange, donne une approche graphique pour son région de stabilité, qu'elle varie lorsque on variant les valeurs des paramètres de mouvement.
- ❖ Les paramètres utilisés dans la simulation au plan de phase sont:
  - La fréquence d'oscillation de pendule est:  $\omega = 1.79\text{s}^{-1}$ ;
  - Le coefficient d'amortissement est:  $\gamma = b = 0.1, 0.5, 0.9$ ;
  - Les vecteurs des états initiaux sont:

-pour les figures (a):

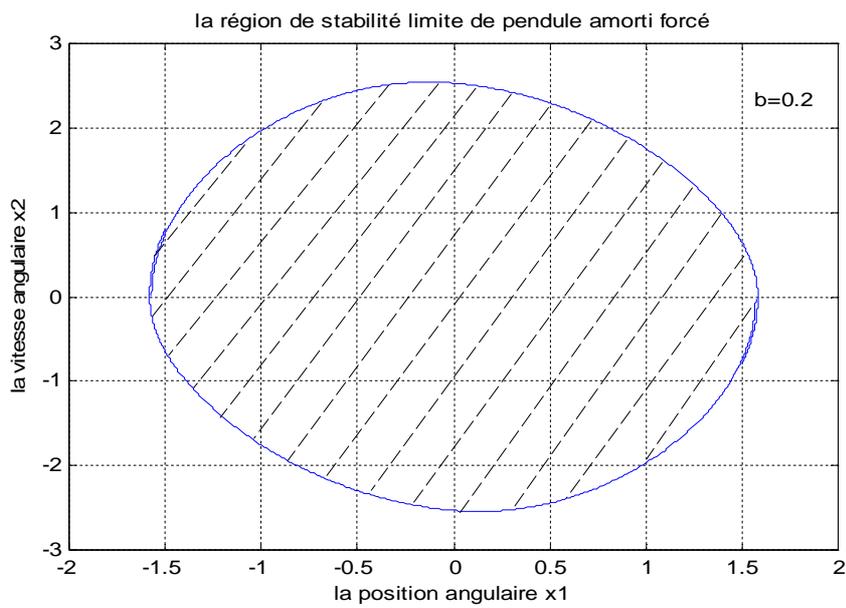
$$x(0) = \left[ \frac{-\pi}{3}, 0 \right], \left[ \frac{\pi}{3}, 0 \right], \left[ \frac{-\pi}{2}, 0 \right], \left[ \frac{\pi}{2}, 0 \right], \left[ \frac{\pi}{4}, 0 \right], \left[ \frac{-\pi}{4}, 0 \right], \left[ \frac{-3\pi}{4}, 0 \right], \left[ \frac{3\pi}{4}, 0 \right], \left[ \frac{-5\pi}{6}, 0 \right], \left[ \frac{5\pi}{6}, 0 \right].$$

-pour les figures (b):

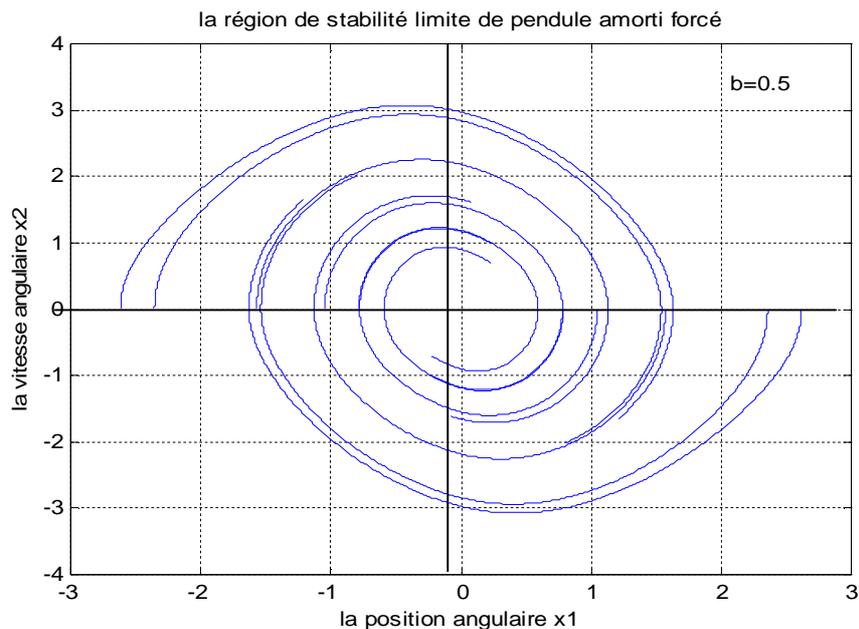
$$x(0) = \left[ \frac{-\pi}{2}, 0 \right], \left[ \frac{\pi}{2}, 0 \right].$$



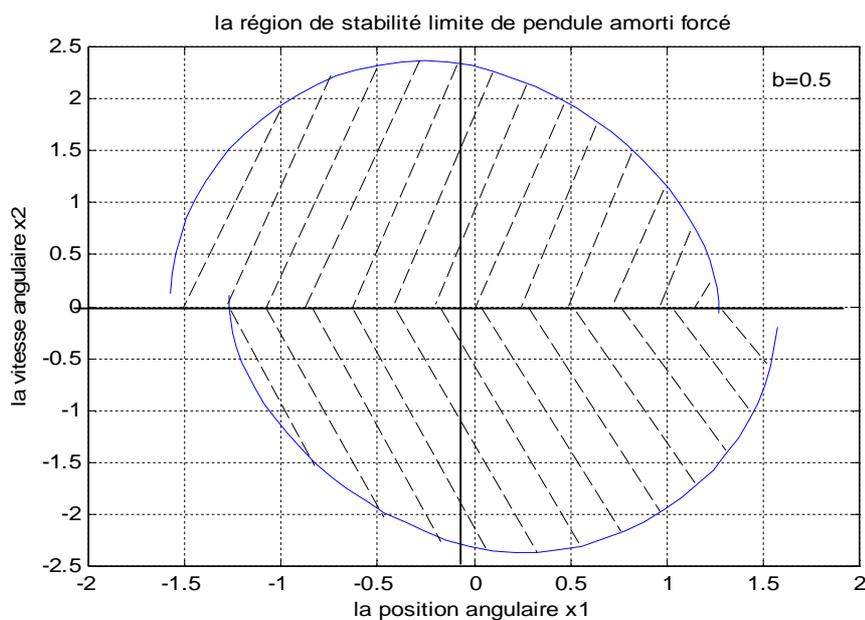
**Fig. IV.7.1a** La région de stabilité du pendule amorti forcé pour  $\gamma = 0.2$ .



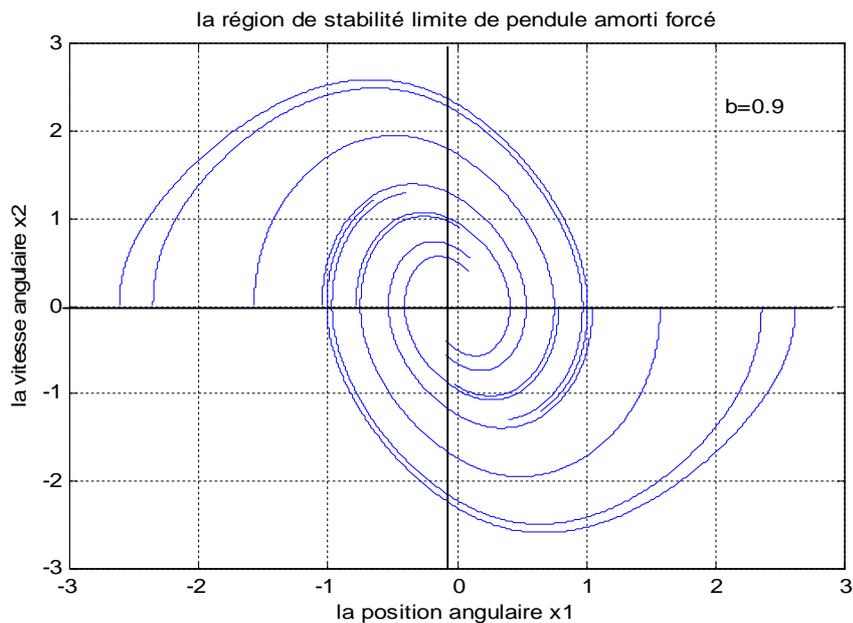
**Fig. IV.7.1b** La région de stabilité limite du pendule amorti forcé pour  $\gamma = 0.2$ .



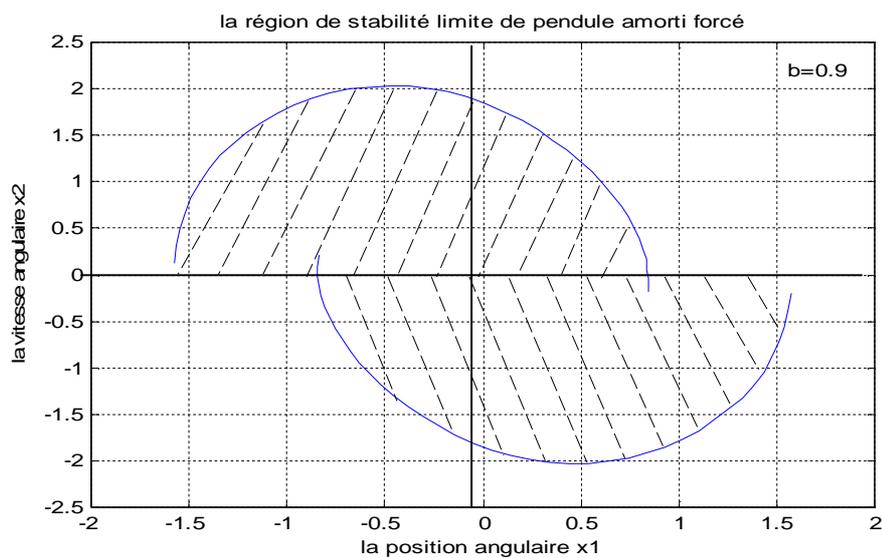
**Fig. IV.7.2a** La région de stabilité du pendule amorti forcé pour  $\gamma = 0.5$ .



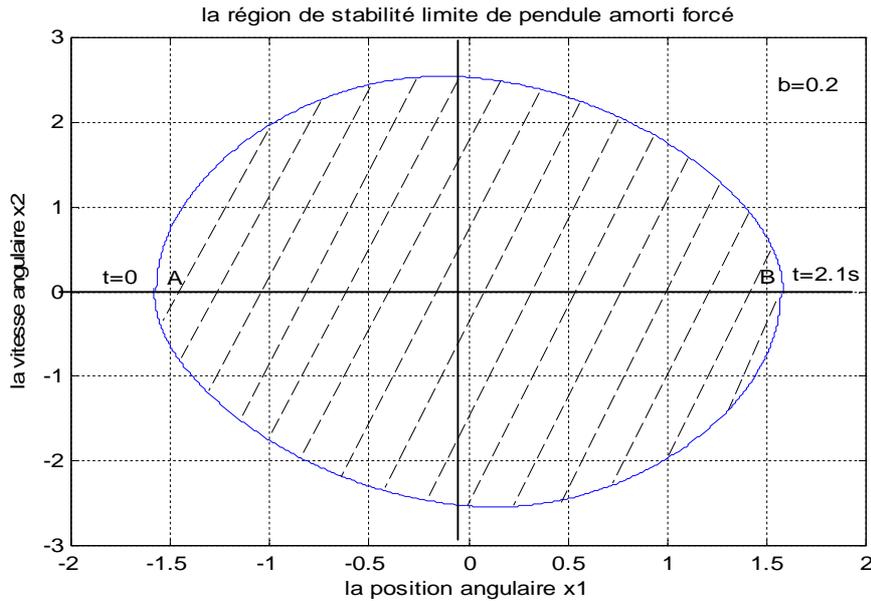
**Fig. IV.7.2b** La région de stabilité limite du pendule amorti forcé pour  $\gamma = 0.5$ .



**Fig. IV.7.3a** La région de stabilité du pendule amorti forcé pour  $\gamma = 0.9$ .



**Fig. IV.7.3b** La région de stabilité limite du pendule amorti forcé pour  $\gamma = 0.9$ .



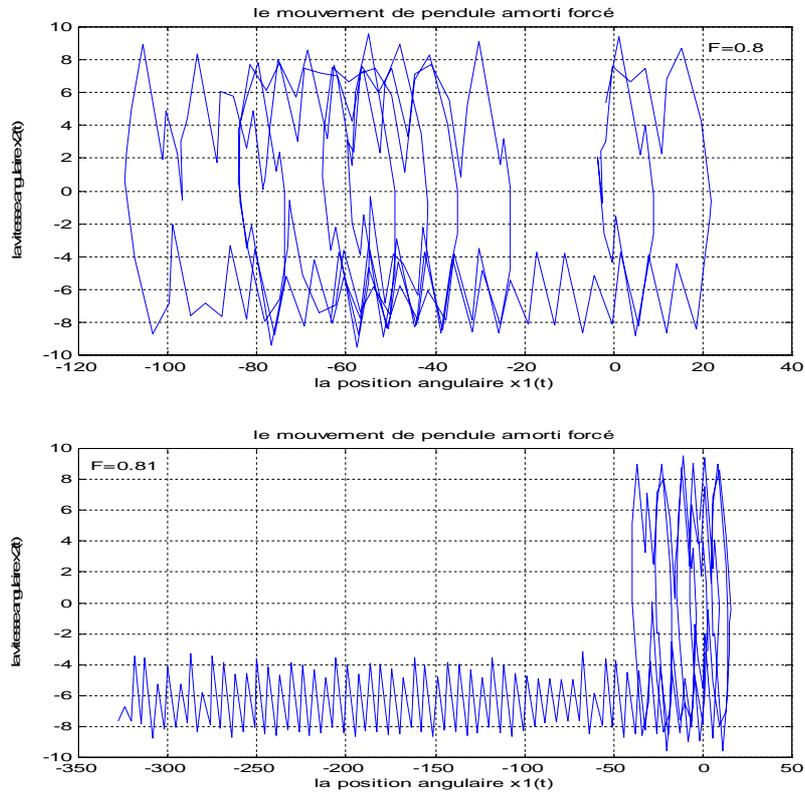
**Fig. IV.8** La région de stabilité limite et fermée du pendule amorti forcé.

D'après les figures (fig. IV.7), nous remarquons que cette approche de simulation estime bien le comportement des trajectoires du système comparant avec celles tracées directement dans le plan de phase (fig. IV.6). Chaque trajectoire correspond à une fonction de Lyapunov  $V(x)$  donnée pour  $x_2 < 0$  et  $x_2 > 0$ .

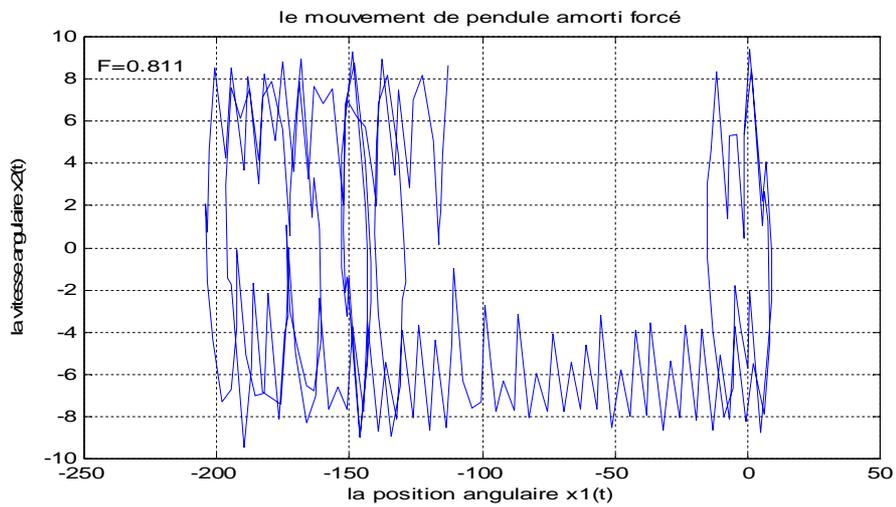
D'après la figure (fig. IV.7a), il est clair que les trajectoires limites n'entourent pas une région limitée. Ceci montre le fait que  $(0,0)$  est instable dans la figure (fig. IV.8). Aucun système de trajectoire initialise de même état peut traverser celle de la région intérieure à la région extérieure, par exemple considérant la trajectoire initialisée à  $(-\pi/2, 0)$  dans la figure (fig. IV.8). Comparant (fig. IV.7a) et (fig. IV.8), il est évident que la vitesse des trajectoires de (fig. IV.8) est toujours inférieure à celle de la (fig. IV.7a) comme donnée à la trajectoire limitée AB. Depuis les trajectoires limitées de ces deux figures débutent du même point  $(-\pi/2, 0)$  et le deuxième (fig. IV.8) atteint le point B à la fin du temps  $T=2.1s$ , il est clair que celle de la figure (fig. IV.7a) ne peut pas atteindre BC, c.-à-d. traverse le point B en même période de temps. Alors nous pouvons déclarer que le système est stable, ou l'angle de mouvement du pendule ne dépasse pas  $\pi/2$  dans la période de temps  $T=2.1s$  pour le système débuté au point A. Note que, nous pouvons choisir  $90^\circ$  comme limite de stabilité du pendule amorti forcé.

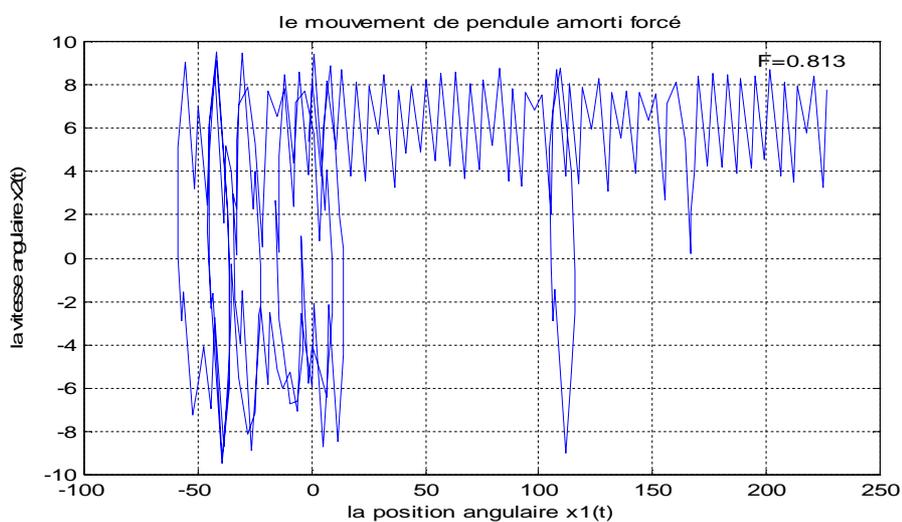
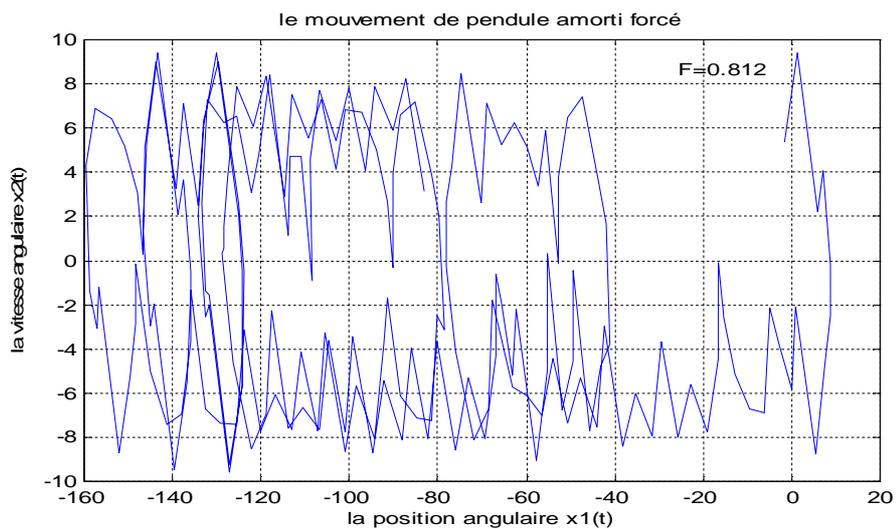
Les figures suivantes (fig. IV.9.1, fig. IV.9.2, fig. IV.9.3 et fig. IV.9.4) représentent la variation des mouvements de pendule amorti forcé dont leur comportement est chaotique. Lorsque nous varions l'amplitude de la force  $F$ , nous voyons que les trajectoires de

mouvement sont totalement différentes d'une figure à l'autre, malgré que les valeurs de  $F$  soient plus proches.

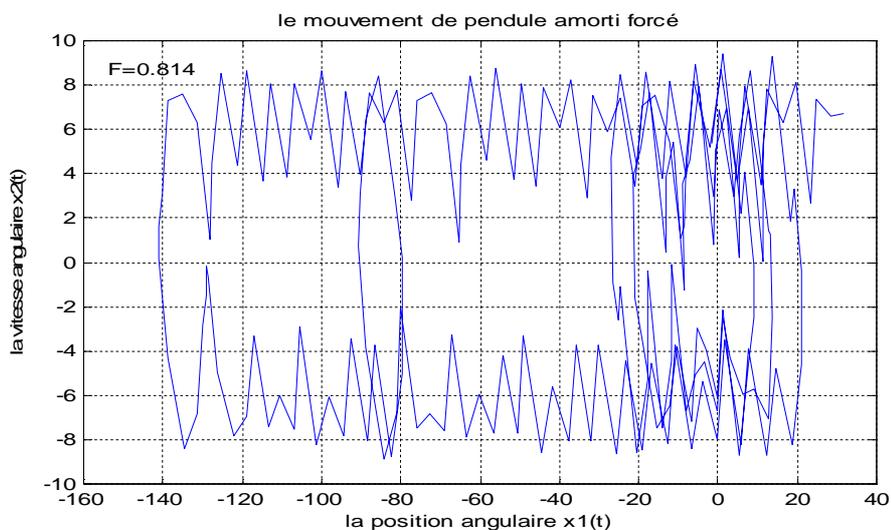


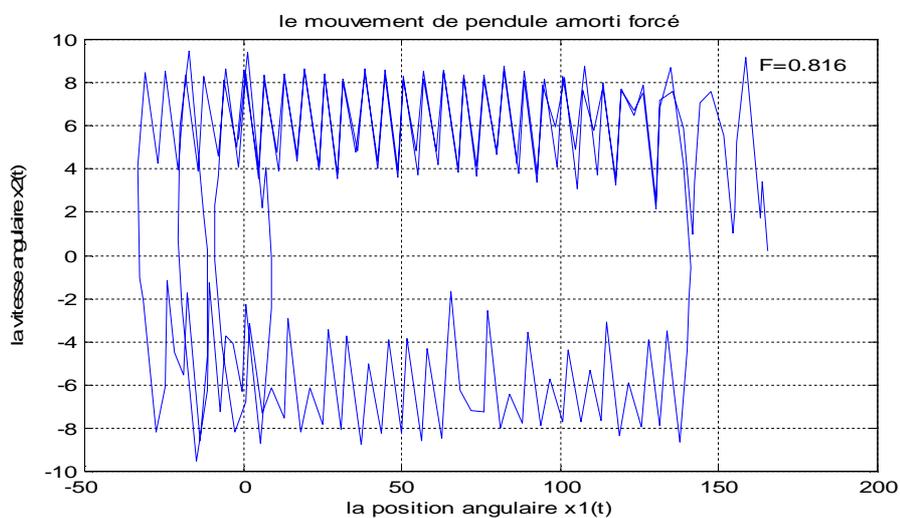
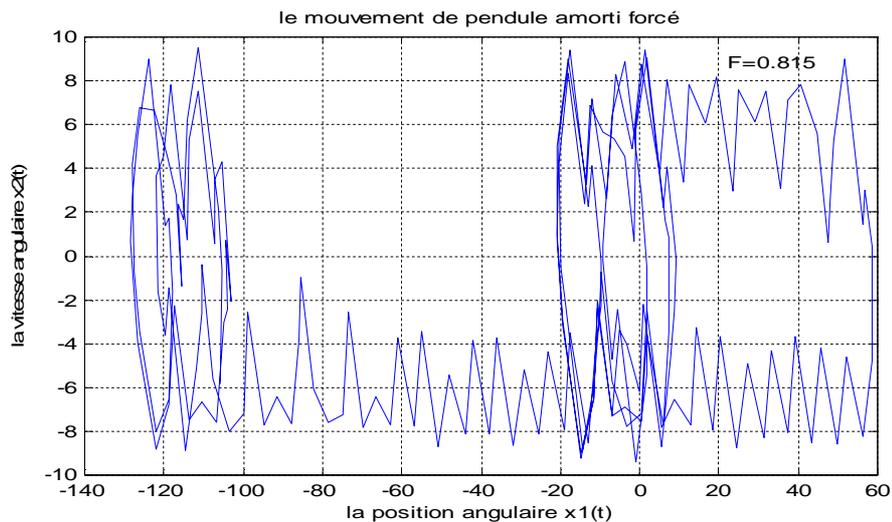
**Fig. IV.9.1** *Mouvement chaotique de pendule amorti forcé dans le plan de phase avec  $F=0.8, 0.81$ .*



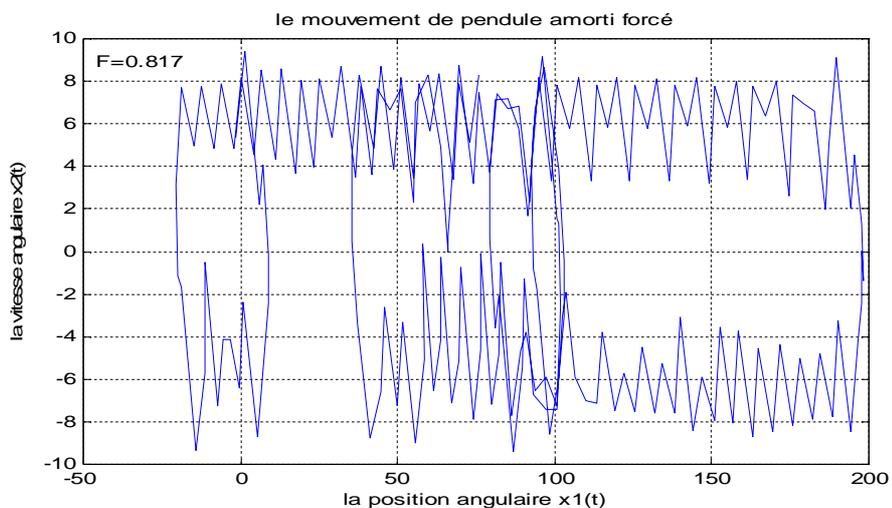


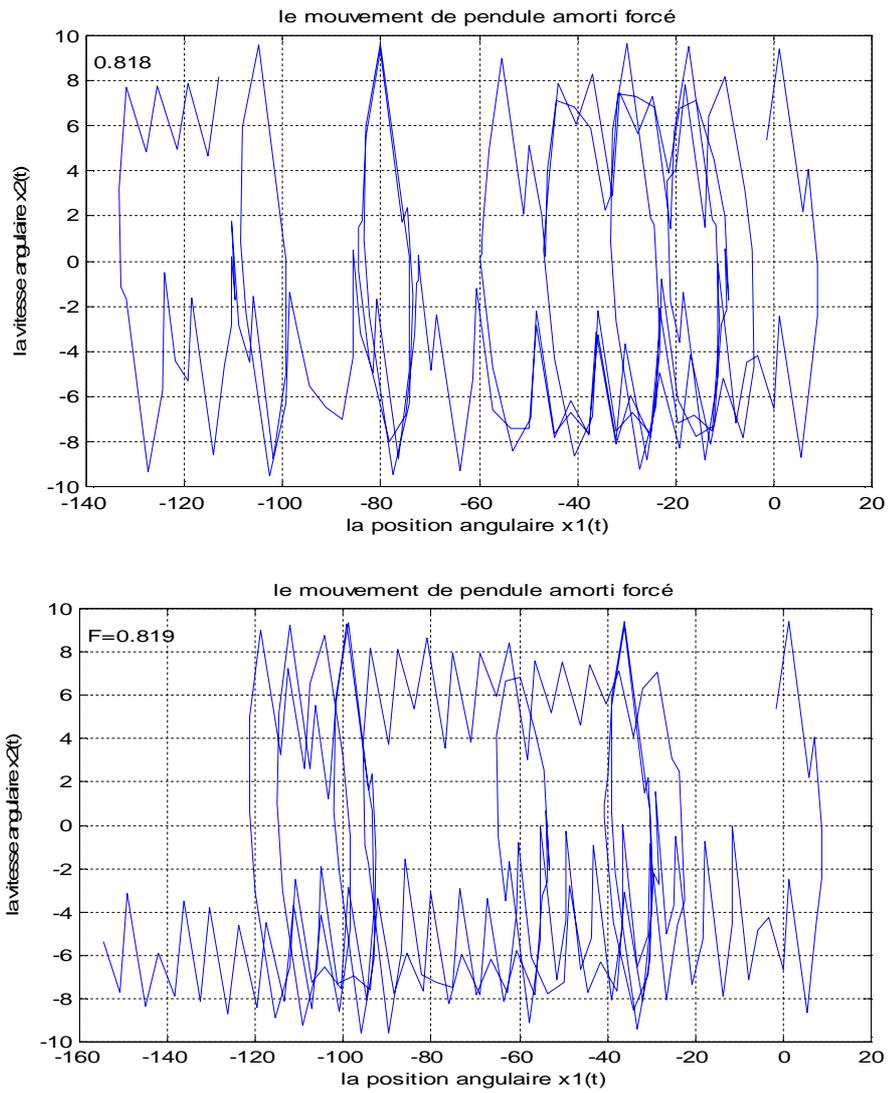
**Fig. IV.9.2** Mouvement chaotique de pendule amorti forcé dans le plan de phase avec  $F=0.811, 0.812, 0.813$ .





**Fig. IV.9.3** Mouvement chaotique de pendule amorti forcé dans le plan de phase avec  $F=0.814, 0.815, 0.816$ .





**Fig. IV.9.4** *Mouvement chaotique de pendule amorti forcé dans le plan de phase avec  $F=0.817, 0.818, 0.819$ .*

**IV.3 Conclusion:**

Dans ce chapitre, nous avons décrit une méthode pour délimiter les trajectoires du mouvement d'un système chaotique, qui est le pendule amorti forcé. L'idée formulée est la même que la méthode de Lyapunov, mais l'approche proposée a des avantages significatives de plus que la méthode de Lyapunov:

- ✚ La méthode est de nature graphique qui s'oppose à la méthode de Lyapunov. Ainsi, il est possible d'évaluer les résultats en termes d'efficacité. De plus, lorsque l'approche est entièrement graphique, nous pouvons obtenir et tracer un nombre de trajectoires limitées, qui délimitent la région de stabilité. Par exemple, il est possible d'obtenir théoriquement des fonctions de Lyapunov appropriée ou la région de stabilité est très petite et non significative. Dans les grands systèmes, il est pratiquement impossible de déterminer la région de stabilité.
- ✚ La méthode de Lyapunov est idéalement adaptée pour le comportement asymptotique des systèmes, c.-à-d. si  $t \rightarrow \infty$ .

### Conclusion générale:

L'un des problèmes les plus importants du système non-linéaire est celui de l'étude de sa stabilité. Comme nous avons vu dans notre travail, la théorie de Lyapunov est en particulier une des méthodes les plus utilisées pour étudier la stabilité du système non-linéaire. Nous constatons que le comportement stable ou instable des systèmes non linéaires est lié à la fois à la caractéristique et à l'évolution de sa fonction d'énergie. La présence d'un maximum ou d'un minimum d'énergie potentielle possède une influence critique. De plus la présence de frottement est la cause de la décroissance de l'énergie complète (cinétique et potentielle) et influence donc la stabilité. Cette fonction d'énergie qu'est appelée fonction de Lyapunov possède la propriété d'être continue et de s'annuler à l'origine, ainsi que cette méthode n'est valable que dans un voisinage du point d'équilibre.

Cependant, tous les systèmes non-linéaires ne sont pas réguliers, comme nous avons remarqué dans le troisième chapitre, il nous est possible de dégager les conditions nécessaires pour observer des trajectoires chaotiques. Lorsqu'il n'existe pas toujours des solutions analytiques aux trajectoires calculées dans l'espace de phase, la méthode d'analyse des systèmes dans le plan de phase s'applique de façon générale à tout système décrit par un ensemble d'équations différentielles du second ordre. Cette méthode connue depuis longtemps, connaît un regain d'intérêt lié aux performances des calculateurs actuels qui rendent possible le calcul des trajectoires solutions par intégration numérique, et d'analyser la stabilité de ces trajectoires graphiquement à l'aide du comportement des portraits de phase. Le chaos s'observe cependant dans bon nombres de systèmes physiques ou biologiques. Si on avait à trouver un point commun à la dynamique de ces systèmes si divers, ce serait leur grande sensibilité par rapport aux conditions initiales, une minuscule différence entre deux solutions tend à s'amplifier avec le temps. Notre étude du chaos s'est limité ici à un système physique très simple, soit le pendule amorti et forcé.

Le pendule amorti forcé a été utilisé avec succès, pour modéliser un comportement complexe dans les systèmes dynamiques non-linéaires. La fonction de forçage du système pendulaire étudié a un terme de forçage sinusoïdal non-autonome qui tend exponentiellement vers zéro. Il est intuitivement clair que ce système, après un temps appréciable, ressemble à un pendule autonome dissipatif avec des points d'équilibres asymptotiquement stables séparés avec des intervalles de  $2\pi$ . La simulation de ce pendule montre que ce système est stable, lorsque nous n'introduisons aucun amortissement dans notre analyse. Clairement, si nous

introduisons quelque amortissement le système sera asymptotiquement stable. Cette approche utilisée pour obtenir la stabilité du système dynamique complexe par le concept de la fonction de Lyapunov. Il est évident que la méthode graphique proposée dans ce travail fournit une approche systématique de la stabilité de Lyapunov pour les systèmes non-linéaires chaotiques ayant des équations différentielles du second ordre. Un des avantages de cette méthode est que l'information obtenue pour les bornes des trajectoires peut être utilisée pour obtenir les bonnes limites de stabilité sachant que les valeurs de l'angle que fait le pendule avec l'axe vertical est inférieur à  $\pi$ . Il est possible d'obtenir des bonnes fonctions limites pour le terme de forçage  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$ . Dans le cas d'un système général, il est extrêmement difficile d'obtenir les fonctions  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  exactes. L'idée derrière notre approche est de limiter les trajectoires du système basée aux limites de  $g(t)$ . Dans notre simulation, nous avons limité les trajectoires de mouvement du pendule entre  $\pi/2$  et  $-\pi/2$ , comme nous pouvons choisir n'importe quel angle inférieure à  $\pi$ .

Cette approche donne une bonne estimation de la région de stabilité pour le pendule décrit par des équations différentielles du second ordre.

### **Bibliographie:**

- [1] Alazard: « Stabilité au Sens de Lyapunov ». [http:// fr. Alazard.com/ stabilité au sens de Lyapunov/](http://fr.alazard.com/stabilité%20au%20sens%20de%20Lyapunov/), 2002.
- [2] Antosiewicz H. A: « *A Survey of Lyapunov's Second Method, in Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations* ». Princeton, NJ: Princeton University Press, vol 4, pp 141-166, 1958.
- [3] Baker G.L et Gollub J.P: « *Chaotic Dynamics: Introduction* ». Second edition, Cambridge University, 1996.
- [4] Bryant Peter J. et John W. Miles: « *On a Periodically Forced, Weakly Damped Pendulum. Part 3: Vertical Forcing* ». Journal Australian Mathematics Society, Serial-free code 0334-2700, 1990.
- [5] Croquette V: « *Systèmes Non-linéaires et Introductions au Chaos* ». Cours d'internet, ESPCI Signaux et Images, 2009.
- [6] Daucé E: « *Systèmes Dynamiques pour les Sciences Cognitives* ». Article français, 1998.
- [7] Derivière Sara et Aziz M. A: « *Systèmes Dynamiques Chaotiques et Localisation d'Invariant* ». DCDIS Vol. B, No 6, Université de Rouen et de Havre, 2003.
- [8] Devaney R. L: « *An Introduction to Chaos Dynamical Systems* », Addison-Wesley, second edition, 1989.
- [9] Doerner. R, Hubinger, B, Heng. H. et Martienssen. W: « *Approaching Nonlinear Dynamics by Studying the Motion of a Pendulum. II. Analyzing Chaotic Motion* ». Int. J. Bifurcation and chaos 4(4), 761-771, 1994.
- [10] Gatto M et Rinaldi S: « *Stability Analysis of Predator-Prey Models via The Lyapunov Method, in Analysis and Computation of Equilibria and Regions of Stability* ». H. R. Grumm, Ed. Laxenburg, Austria, pp. 139-153, 1975.
- [11] Genesio Roberto, Tartaglia Michele et Vicino Antonio: « *On the Estimation of Asymptotic Stability Regions: State of the Art and New Proposals* ». IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-30, No.8, 1985.
- [12] Geradin M, Rixen D: « *Théorie des Vibrations: Application à la dynamique des structures* », 2<sup>nd</sup> édition. Université de Liège, 1994.
- [13] Grandy W. T, Jr et Schock Matthias: « *Simulation of Nonlinear Pivot Driven Pendulum* ». American Association of Physics, Vol. 65, No. 5, 1997.
- [14] Gruber Christian, Benoit Willy: « *Mécanique Générale* ». Second édition, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, 1998.

- [15] Gruner. G, Zawadowski. A et Chaikin. P. M: « *Nonlinear Conductivity and Noise Due to Charge-Density-Wave Depinning in NbSe<sub>3</sub>* ». Phys. Rev. Lett. 46, 511-516, 1981.
- [16] Guanrong Chen: « *Stability of Nonlinear Systems* ». Department of electronic engineering, City University of Hong Kong. Kowloon, Hong Kong SAR, China. Encyclopedia of RF and microwave engineering, Wiley, New York, pp. 4881-4896, 2004.
- [17] Hahn W: « *Stability of Motion* ». Springer-Verlag, 1967.
- [18] Hahn W: « *Theory and Applications of Lyapunov's Direct Method* », Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1963.
- [19] Hangos K. M, Bokor J, Szederkenyi G: « *Analysis and Control of Nonlinear Process Systems* ». Systems and Control Laboratory, Hungarian Academy of Sciences, H-1516 Budapest, 2004.
- [20] Heng. H, Doerner. R, Hubinger, B. et Martienssen. W: « *Approaching Nonlinear Dynamics by Studying the Motion of a Pendulum. I. Observing Trajectories in Phase Space* ». Int. J. Bifurcation and chaos 4(4), 751-760, 1994.
- [21] Hurtado John E. et Sinclair Andrew J: « *Lagrangian Mechanics of Over-parameterized Systems* ». Nonlinear Dynamic, Springer Science-Business Media, B. V., 2011.
- [22] Husson René, Lung Claude, Aubry Jean-François, Daafouz Jamal et Wolf Didier: « *Automatique: Du cahier des charges à la réalisation de systèmes* ». Dunod, Paris, 2007.
- [23] Jeremy Oden: « *Le Chaos dans Les Systèmes Dynamiques* ». Journal du laboratoire de physique, University de Lille , 2007.
- [24] Jianshe Yu : « *The Minimal Period Problem for the Classical Forced Pendulum Equation* ». Journal of Differential Equations, Vol. 247,672-684 , Elsevier, 2009.
- [25] Jutten Christian: « *Systèmes Asservis Non-Linéaires* ». Université Joseph Fourier-Polythèque, Grenoble, 2006.
- [26] Kalman R. E et Bertram J. E: « *Control System Analysis and Design via the Second Method of Lyapunov* ». Part II, J. of Basic Eng., Trans. of ASME, PP: 394-400, 1960.
- [27] Kengne E: « *On Stability of Nonlinear Pendulum* ». Nonlinear oscillations, vol 6, n 2, 2003.
- [28] Khalil Hassan K: « *Nonlinear Systems, third edition* ». Michigan State University, 2002.
- [29] Kunapuli Aditya: « *Chaotic Motion in a Forced and Dampened Pendulum* ». Thesis in Applied Physics. University of California, Santa Cruz, 2010.
- [30] La Salle J. P et Lefschetz S: « *Stability by Lyapunov's Direct Method* ». New York: Academic, 1961.

- [31] Lena Pierre: « *Les Sciences du Ciel: Le Chaos* ». Les cahiers de l'action. Cours d'internet.
- [32] Letov A. M: « *Stability in Nonlinear Control Systems* ». Princeton, NJ: Princeton University Press, 1961.
- [33] Lorenz E. N: « *Deterministic Non Periodic Flow* ». J. Atmos, sci, 20, 130-41, 1963.
- [34] Lyapunov A.M: « *Problème Général de la Stabilité du Mouvement* ». Princeton University. Press: Princeton, 1947.
- [35] Miles J. W: « *Resonance and Symmetry Breaking for the Pendulum* ». Physica D31, 252-268, 1988.
- [36] Miles J. W: « *On the Resonant Response of a Weakly Damped Nonlinear Oscillator* ». J. Sound Vibr. 131(3), 489-496, 1989.
- [37] Mullhaupt Philippe: « *Introduction à l'Analyse et à la Commande des Systèmes Non-Linéaires* ». Lausanne, 2007.
- [38] Musavi Mohamad T. et Narasimhamurthi Natarajan: « *Bounding the Short Term Phase Plots of Inter-Machine Swings for Determining First Swing Stability* ». IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. Cas-32, No.7, 712-718, 1985.
- [39] Poincaré Henri: « *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* ». Paris, Gauthier-Villars, 1899.
- [40] Poincaré Henri: « *Mémoire sur les Courbes Définies par les Equations Différentielles* ». Paris, Gauthier-Villars, 1890.
- [41] Rocard Y: « *Dynamique Générale des Vibrations* ». Second édition, Paris, 1971.
- [42] Salam. F. M. A. et Sastry. S. S: « *Dynamics of The Forced Josephson Junction Circuit: The Regions of Chaos* ». IEEE Trans. Circuits Syst. CAS-32(8), 784-796, 1985.
- [43] Siljac D.D: « *Dynamic Graphs* ». Conférence internationale des systèmes hybrides et applications. Université de Louisiana, Lafayette, LA, p: 264-296, 2006.
- [44] Skiadas Christos H., Skiadas Charilaos: « *Chaotic Modeling and Simulation* ». Taylor et Francis Group, LLC, 2009.
- [45] Slotine Jean-Jacques E, Weiping Li: « *Applied Nonlinear Control* », Massachusetts Institute of Technology, Prentice Hall, 1991.
- [46] Tarbouriech Sophie: « *Sur la Stabilité des Régulateurs à Retour d'état Saturé* ». Thèse de Doctorat de l'université Paul Sabatier de Toulouse, 1991.
- [47] Tel Tamas et Gruiz Marton: « *Chaotic Dynamics: An introduction based on classical mechanics* ». Eotvos University, Budapest. 2006.

- [48] Thorp James S: « *Fractal Deformations of the Stability Domains for the Transiently Forced Pendulum* ». School of electrical engineering, Cornell University, Ithaca. New York, Vol.60, No.3, 1988.
- [49] Thorp James. S: « *Truncated-Fractal Basin Boundaries in Three Machine Power Systems* ». School of electrical engineering, Cornell University, Ithaca. New York, ISCAS, IEEE, 1988.
- [50] Van der Pol B: « *Forced Oscillations in a Circuit with a Nonlinear Resistance* ». Phil. Mag. Vol.73, 65-80, 1927.
- [51] Varghese Matthew et Thorp James S: « *Truncated-Fractal Basin Boundaries in Forced pendulum systems* ». School of electrical engineering, Cornell University, Ithaca. New York, 1988.
- [52] Wanda Szemplinska-Stupnicka et Elzebieta Tyrkiel: « *The Oscillation Rotation Attractors in The Forced Pendulum and their Peculiar Properties* ». International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol.12, No.1, 2001.
- [53] Wiggins Stephen: « *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems And Chaos* ». School of Mathematics, University of Bristol, 2003.
- [54] Williams et James H. Jr: « *Fundamentals of Applied Dynamics* ». John Wiley et Sons, New York, 1996.
- [55] Xiaoxin Liao, Liqiu Wang et Pei Yu: « *Stability of Dynamical Systems* », Respectivement, Huazhong university of science and technology, China, University of Hong Kong, and University of Western Ontario, London , Canada, 2007.
- [56] Zhifang Gui, Xiaofeng Wu, Qian Lin et Jianping Cai: « *A New Lyapunov Approach for Global Synchronization of Non-autonomous Chaotic Systems* ». Nonlinear Dyn 59: 427-432, Springer 2009.
- [57] Zhiping You et Ph.D: « *A Numerical Study of the Forced Damped Pendulum* ». Civilized Software Inc, Silver Spring, MD 20906 USA.
- [58] « *Le pendule simple* ». [http://fr.wikipedia.org/wiki/pendule simple](http://fr.wikipedia.org/wiki/pendule_simple), 2010.