



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA
BOUMERDES
FACULTE DES HYDROCARBURES ET DE LA CHIMIE
Département de Transport et Equipements des Hydrocarbures
Laboratoire de Génie Physique des Hydrocarbures

Thèse présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat

Spécialité : Génie mécanique

Option : Thermo-fluides

Présenté par :

M. BOUALIT Abdel Hamid

Sujet

**CONTRIBUTION A L'ETUDE THERMO-HYDRODYNAMIQUE
DES FLUIDES BINGHAMIENS**

Soutenue le **11/12/2011** devant le jury composé par :

M. Bennacer Rachid	Professeur à ENS de Cachan, Paris	Président
M. Benzaoui Ahmed	Professeur à USTHB	Examineur
M. Kessal Mohand	Professeur à UMBB	Examineur
M. Sassi Rachid	Professeur à UMBB	Examineur
M. Mekhlouf said	Maitre de conférence à UMMTO	Examineur
M. Zeraibi Nouredine	Professeur à UMBB	Directeur de thèse

Boumerdès 2011

خلاصة

لقد اجتذب النقل الحراري في وسط السوائل المميزة بسلوكها الغير نيوتوني أثناء سيلانها عبر قنوات النقل فضول العديد من الباحثين و هذا منذ عدة عقود بسبب دوره الفعال و الأساسي في تطوير وتصميم المعدات الحرارية.

من خلال هذا العمل، ساهمنا في زيادة المعرفة فيما يخص النقل الحراري والتدفق في السوائل المعقدة من خلال دراستنا العددية للتطور الحراري والهيدروديناميكي لأحد أنواع هذه السوائل (Fluides Binghamiens) أثناء تدفقها عبر قنوات مختلفة الأشكال. فهكذا ، جرى النظر في التدفق بين ورقتين مصفحتين، من خلال أنبوب أسطوانى وعند اجتيازه لتوسع مفاجئ ، وذلك في حالة درجة حرارة ثابتة و تدفق حراري منتظم مفروض على الجدران الصلبة.

لقد أظهر هذا التحليل التأثير الناجم عن العطالة والسلوك الريولوجي للسائل على الضغط والسرعة وتوزيع الحرارة. كما ناقشنا تأثيرات عدد بيكلي (Peclet) و بينغهام (Bingham) على قيم عدد نوسلت (Nusselt) مع مراعاة تبديد الحرارة الناجم عن لزوجة المائع.

لقد مكنتنا النتائج المتحصل عليها من صياغة ارتباطات رياضية بسيطة وعملية لتحديد معايير تكنولوجية مختلفة لازمة لحساب وتصميم مرافق معالجة هذه الفئة من السوائل.

Résumé

Le transfert thermique par convection forcée laminaire des fluides non-Newtoniens à travers des conduits a suscité l'intérêt des chercheurs depuis plusieurs décennies, en raison de son rôle primordial dans le développement et la conception des systèmes thermiques.

Dans ce travail, nous avons contribué à l'amélioration des connaissances en matière de transfert de chaleur et d'écoulement des fluides complexes en étudiant numériquement l'évolution thermique et hydrodynamique de l'écoulement laminaire d'un fluide viscoplastique (fluide de Bingham) dans divers géométries. Ainsi, les écoulements entre deux Plaques planes, à travers un tube cylindrique et franchissant un élargissement brusque ont été considérés en situation de température constante et de flux de chaleur uniforme imposé aux parois solides.

Cette analyse a montré l'effet engendré par l'inertie et le comportement rhéologique du fluide sur la vitesse, la pression et le champ de température. Les influences du nombre de Peclet et de Bingham sur les valeurs du nombre de Nusselt sont également discutées en tenant compte de la dissipation visqueuse.

Les résultats obtenus nous ont permis de formuler des corrélations mathématiques simples et pratiques pour la détermination des différents paramètres technologiques nécessaires au calcul et au design des installations traitants cette classe de fluide.

Abstract:

The laminar forced convective heat transfer in duct of non-Newtonians fluids has already interested the researchers since several decades, because of its foremost importance in the practical thermal systems development.

In this work, we have contributed to the improvement of knowledge in heat transfer and fluid flow by studying numerically the thermal development of the hydrodynamically developing laminar flow of a viscoplastic fluid (fluid of Bingham) in several geometries. So, flows between two plane plates, through cylindrical pipe and crossing sudden expansion were considered in situation of constant temperature and uniform heat flux imposed at the solid walls.

This analysis has shown the effect caused by inertia and the rheological behavior of the fluid on the velocity, pressure and temperature fields. The effects of Bingham and Peclet numbers on the Nusselt values with the inclusion of viscous dissipation are also discussed.

The obtained results have enabled us to formulate simple and practical mathematical correlations for the determination of different technological parameters necessary for calculation and design of thermo-hydraulic installations treating this class of fluid.

A mon défunt père.

A ma mère.

A ma femme et mes enfants.

Ce travail a été réalisé en collaboration entre le Laboratoire de Génie Physique des Hydrocarbures de la Faculté des Hydrocarbures et de la Chimie de l'université M'hammed BOUGARA de Boumerdes, et du Laboratoire Thermique de l'Unité de Recherche Appliquée en Energie Renouvelable de Ghardaïa.

Je tiens à exprimer ma vive reconnaissance à Monsieur **ZERAIBI Noureddine**, Professeur à l'université de Boumerdes, pour avoir accepté de diriger ces travaux. Je le remercie infiniment pour avoir toujours été présent par ses conseils, ses encouragements et de m'avoir fait bénéficier tout au long de ce travail de sa longue expérience dans le domaine de la mécanique des fluides numérique (CFD).

J'adresse mes plus vifs remerciements et j'exprime ma profonde gratitude à Monsieur **Bennacer Rachid**, professeur à Ecole Nationale Supérieure de Cachan, Paris, lequel m'a fait le grand honneur d'accepter la présidence de mon jury de thèse.

Je me sens redevable auprès de Monsieur **Benzaoui Ahmed**, professeur à l'USTHB, Monsieur **Kessal Mohand**, Professeur à l'UMBB, Monsieur **Sassi Rachid**, Professeur à l'UMBB, et Monsieur **Mekhlouf Said**, maître de conférences à l'UMMTO, lesquels, en dépit de leurs nombreuses occupations, ont bien accepté d'examiner ce travail.

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur **Aissani Slimane**, Professeur à l'université de Boumerdes et Monsieur **Gareche Mourad**, doctorant à l'université de Boumerdes, Mme **Belaïd Sabrina**, attachée de recherche à URAER, et à tous ceux qui m'ont soutenu ne serait-ce qu'en pensée pour la finalisation de cette thèse.

Enfin, que l'ensemble du personnel de la faculté des hydrocarbures et de la chimie ainsi que ceux de l'unité de recherche appliquée en énergies renouvelables trouve ici l'expression de ma sincère reconnaissance pour leur collaboration et leur aide.

Table des matières.

Introduction générale :	1
Chapitre I	Etude Bibliographique.
I. Etude bibliographique	4
Références	7
Chapitre II	Rhéologie des fluides
II.1 Introduction	12
II.2 Grandeurs caractéristiques de la rhéologie :	12
II.3 Courbe rhéologique ou rhéogramme :	14
II.4 Classification des fluides :	15
II.4.1 Introduction :	15
II.4.2 Classification des fluides :	16
II.4.2.1 Fluides newtoniens :	16
II.4.2.2 Fluides non-newtoniens indépendants du temps :	16
II.4.2.3 Fluides non-newtoniens dépendants du temps :	20
II.4.2.4 Fluides viscoélastiques :	21
Références	22
Chapitre III	Modèle mathématique et méthode numérique
III.1 Modèle mathématique :	23
III.1.1 Equations générales :	23
III.1.2 Conditions aux limites :	26
III.1.3 Formulation adimensionnelle :	26
III.2 Méthode numérique :	28
III.2.1 Introduction :	28
III.2.2 Approximation d'une fonction exacte :	28
III.2.2.1 Définition :	28
III.2.2.2 Approximation nodale d'une fonction exacte :	29
III.2.2.3 Approximation nodale par élément fini :	30

III.2.3	Elément et élément de référence quadrilatéraux :	30
III.2.3.1	Définition :	30
III.2.3.2	Constructions des fonctions de transformation géométrique et d'interpolation sur un élément de référence :	31
III.2.3.3	Positionnement des variables (u, v, p, T) sur un élément :	34
III.2.4	Formulation intégrale :	34
III.2.4.1	Collocation par points :	35
III.2.4.2	Collocation par sous- domaines :	36
III.2.4.3	Méthode des moindres carrés :	36
III.2.4.4	Méthode de Galerkin :	36
III.2.5	Présentation matricielle de la méthode des éléments finis :	37
III.2.5.1	Forme intégrale élémentaire discrétisée :	38
III.2.5.2	Forme intégrale élémentaire discrétisée sur un élément de référence:	40
III.2.6	Intégration de la forme intégrale élémentaire :	41
III.2.7	Forme intégrale globale discrétisée :	42
III.2.8	Forme intégrale globale discrétisée pour les équations de mouvement, de continuité et de l'énergie :	43
III.2.9	Méthode de résolution :	45
III.2.9.1	Introduction des conditions aux limites :	45
III.2.9.2	Résolution du système d'équations algébriques :	45
III.2.9.2.1	Méthode d'élimination de Gauss :	45
III.2.9.2.2	Méthode de substitution :	46
III.3	Calcul de la fonction de courant :	47
III.4	Calcul de nombre de Nusselt :	48
III.5	Validation du code de calcul :	49
	Nomenclature	54
	Références	55
Chapitre IV	Etablissement des régimes thermo-hydraulique des fluides Binghamiens à travers des conduits.	
IV.1	Introduction :	57
IV.2	Développement hydrodynamique et thermique de l'écoulement :	59
IV.2.1	Formulation du problème :	59
IV.2.2	Résultats et discussions :	61
IV.2.2.1	Régime hydrodynamique :	61
IV.2.2.1.1	Effet de la contrainte seuil sur le champ de vitesses :	62
IV.2.2.1.2	Effet de la contrainte seuil sur le champ de pression :	65
IV.2.2.1.3	Effet de l'inertie sur le champ de vitesses :	67
IV.2.2.1.4	Effet simultanée de la contrainte seuil et l'inertie sur la longueur d'établissement :	69
IV.2.2.2	Régime thermique :	70
IV.2.2.2.1	Effet de l'inertie sur l'intensité de l'échange thermique :	71
IV.2.2.2.2	Effet de la contrainte seuil sur l'intensité de l'échange	72

	thermique :	
IV.2.2.2.3	Influence de la dissipation visqueuse sur l'intensité de l'échange thermique :	76
IV.3.2.1.4	Influence simultanée de la contrainte seuil et de la dissipation visqueuse sur l'intensité de l'échange thermique :	79
IV.3	Conclusion :	83
	Nomenclature	85
	Références	86
Chapitre V	Ecoulement des fluides Binghamiens à travers un élargissement brusque.	
V.1	Introduction :	88
V.2	Développement hydrodynamique et thermique de l'écoulement d'un fluide de Bingham à travers un élargissement brusque :	89
V.2.1	Equations gouvernant le problème :	89
V.3	Résultats et interprétations :	91
V.3.1	Régime hydrodynamique :	91
V.3.1.1	Effet de l'inertie sur le profil axial de vitesse :	91
V.3.1.2	Effet de la contrainte seuil sur le profil axial de vitesse :	93
V.3.1.3	Effet de l'inertie sur la zone tourbillonnaire :	94
V.3.1.4	Effet de la contrainte seuil sur la zone tourbillonnaire :	96
V.3.1.5	Champ de pression :	99
V.3.1.6	Détermination du coefficient de perte de charge local :	100
V.3.2	Régime thermique :	107
V.3.2.1	Influence de Prandtl sur le champ thermique :	108
V.3.2.2	Influence de l'inertie (Re) sur le champ thermique :	110
V.3.2.3	Influence de la contrainte seuil sur le champ thermique :	112
V.4	Conclusion :	114
	Nomenclature	115
	Références	117
Conclusion Générale		119

Introduction Générale.

I. Introduction générale :

Dans la vie courante nous rencontrons plusieurs variétés de substances fluides qui se distinguent les unes des autres par des comportements propres face aux sollicitations extérieures. L'observation de ces comportements a permis de différencier deux importantes classes nommées communément les fluides newtoniens et les fluides non-newtoniens.

Un fluide newtonien, tel que l'eau qui en est un par excellence, s'écoule au moindre effort et sa résistance à l'écoulement, représentée par sa viscosité, reste constante devant la variation de l'intensité de l'effort subi. En d'autres termes plus techniques, les fluides newtoniens sont caractérisés par un tenseur des contraintes qui évolue linéairement avec le tenseur des déformations, et le facteur de proportionnalité n'est que la viscosité dynamique du fluide en question. Cependant, tout comportement différent à celui-ci est attribué par opposition aux fluides non-newtoniens.

Les fluides, qu'ils soient newtoniens ou non-newtoniens, sont quasi présents en industrie. Certains sont utilisés dans des processus de transport que se soit de matière (boue de forage) ou de l'énergie calorifique (fluides caloporteurs), d'autres subissent eux-mêmes divers traitements tels que les produits agroalimentaires et pharmaceutiques.

Pour les ingénieurs, l'utilisation et le traitement de ces substances se résument généralement à manipuler des écoulements aux quels peuvent s'associer des phénomènes de transfert d'énergie ou de masse, ce qui sans doute, nécessitent la connaissance des différentes lois de transfert et de calcul hydraulique qui régissent ces situations.

Cependant, ces lois et outil de calcul qui ont été élaborées en émettant l'hypothèse de la linéarité de la loi constitutive liés aux fluides newtoniens, se trouvent dans l'incapacité de répondre aux exigences de plusieurs secteurs industriels, qui traitent des fluides non-newtoniens, tels que l'industrie pétrolière, agroalimentaire, pharmaceutique ... etc. Cette réalité a rendu donc nécessaire d'entreprendre des recherches pour étendre et de généraliser le champ d'application de ces différentes lois aux fluides non linéaires.

Contribuant à satisfaire cette nécessité, nous nous sommes intéressés dans ce travail aux écoulements laminaires non-isothermes des fluides Binghamiens dans divers géométries. Nous avons déterminé par voie numérique la structure du champ dynamique de ces écoulements. Nous avons étudié l'évolution des profils des vitesses, des zones de recirculation, des longueurs de recollement et d'établissement ainsi que les pertes de charges singulières pour différents paramètres du problème. Nous avons déterminé aussi des lois de transfert de chaleur dans les configurations considérées.

Le modèle mathématique est représenté par les équations de continuité et de mouvement, auxquelles nous rajoutons l'équation de l'énergie tout en tenant compte de la dissipation visqueuse. Le comportement rhéologique du fluide suit la loi constitutive de Bingham modifiée par Papanastasiou. Un code numérique basé sur la méthode des éléments finis a été élaboré pour intégrer le système d'équations non-linéaire de ce modèle.

Notre présente étude est structurée en cinq chapitres. Un premier est consacré au recensement des différentes investigations orientées dans le même axe de recherche, et réalisées sur des fluides newtoniens et non-newtoniens dans diverses configurations géométriques. Dans un deuxième chapitre, nous définissons brièvement les différents comportements rhéologiques des fluides non-newtoniens, tout en exposant les lois constitutives les plus répondues. Un troisième chapitre est dédié à l'exposition des équations générales qui gouvernent les problèmes physiques que nous analysons, et aux détails constituant la méthode numérique utilisée pour l'élaboration de notre code de calcul. Nous analysons dans un quatrième chapitre, le développement hydrodynamique et thermique de l'écoulement d'un fluide à seuil de contrainte entre deux plaques planes et à travers une conduite cylindrique. Cette analyse portera sur l'influence des différents paramètres gouvernant le problème sur la structure hydrodynamique et thermique de l'écoulement. Enfin et dans un cinquième chapitre, nous considérons l'écoulement plan et axisymétrique à travers un élargissement brusque de rapport géométrique 1:2. Nous y examinons l'effet exercé par les différents paramètres

du problème sur les champs cinématique, dynamique et thermique. Nous nous intéresserons également à l'évolution du coefficient de perte de charge locale avec ces paramètres. Nous terminons par une conclusion générale et des perspectives qui restent explorables dans cet axe de recherche.

Etude Bibliographique.

Chapitre I

I. Etude bibliographique :

Le transfert thermique par convection forcée lors des écoulements à travers des conduits a suscité l'intérêt des chercheurs depuis plusieurs décennies, en raison de son importance primordiale dans le développement des procédés technologiques, qui constituent des étapes de production fréquemment rencontrées dans diverses industries.

Les premières études réalisées dans cet axe de recherche, furent celles effectuées par Graetz (1883-1885) où il a considéré le transfert de chaleur par convection forcée, associé à un écoulement laminaire et établi d'un fluide newtonien à travers une conduite circulaire, soumise à un chauffage pariétal par une température imposée. En négligeant l'effet de la dissipation visqueuse et la conduction axiale du fluide, Graetz a abouti à une formulation simplifiée de l'équation d'énergie, mais qui ne fut résolue qu'ultérieurement par W. Nusselt. Ce dernier a donc, parvenu à résoudre analytiquement le problème formulé suivant Graetz par une méthode de séparation de variable, et a réalisé par celle-ci, une grande avancée dans le domaine du thermique. L'analyse de Graetz a été alors, le début d'une longue série d'investigations expérimentales, analytiques et numériques, traitant le problème sous des conditions moins restrictives, des géométries plus complexes et des fluides au comportement rhéologique non-newtonien.

Pour les fluides newtoniens, Sellars et al [1] et Siegel et al [2] ont considéré le problème de convection forcée à travers une conduite cylindrique en situation de flux uniforme imposé aux parois solides, tout en négligeant l'effet de la dissipation visqueuse et la conduction axiale du fluide. L'effet de cette dernière a été considéré par Hsu [3], où le problème a été résolu

analytiquement par la méthode «de séparation des variables». Ou et Cheng [4] ont obtenu une solution pour le même problème en tenant compte de l'effet de la dissipation visqueuse.

L'étude de l'influence exercée par la dissipation visqueuse sur le champ thermique, a montré que l'effet de celle-ci est d'une grande importance au niveau de la zone d'entrée, dans le cas d'un établissement hydrodynamique et thermique simultané [5, 6]. En régime établi, cet effet est également ressenti, car il a été rapporté que la valeur de Nusselt établi, pour le cas d'un refroidissement par une température constante imposée aux parois, est de 9.6 en tenant compte de la dissipation visqueuse [7], alors que cette valeur est de 3.6568 en la négligeant [8]. D'un autre côté, Kays et Grawford [9] ont montré que l'effet de la dissipation visqueuse sur le champ thermique est important lors des écoulements à grande vitesse pour les fluides newtoniens. Tandis que pour les fluides non-newtoniens, Bird et al [10] rapportent de leur côté, que cet effet est également important lors des écoulements à faibles vitesses, en raison des fortes viscosités et des forts gradients de vitesse qui les caractérisent.

La convection forcée à travers des conduites dans le cas des fluides non-newtoniens a connu de sa part, plusieurs investigations. Pour le cas d'un fluide viscoplastique de Bingham, Wissler et Schechter [11], et Blackwell [12] ont étudié le développement d'un régime thermique en considérant une température constante aux parois et en négligeant l'effet de la dissipation visqueuse ainsi que la conduction axiale du fluide. Johnston [13] a reconsidéré le problème en tenant compte de la conduction axiale.

Récemment, Min et al ont étudié analytiquement [14] et numériquement [15] le même problème mais dans le cas d'un flux imposé aux parois, en incluant l'effet de la dissipation visqueuse et la conduction axiale. Ils ont montré que cette dernière peut être négligée lorsque la valeur de Peclet est supérieure à 500, et que le seuil de contrainte n'a d'effets considérables sur le transfert thermique qu'en tenant compte de la dissipation visqueuse. G.C. Vradis et al. [16] ont traité le problème de développement simultané des champs hydrodynamique et thermique dans la région d'entrée pour le même fluide. Des travaux récents [17, 18, 19] ont reconsidéré ce problème en portant plus d'importance à l'analyse de l'effet de dissipation visqueuse sur le champ thermique.

La convection forcée lors d'un écoulement laminaire d'un fluide de puissance à travers une conduite cylindrique est étudiée par plusieurs auteurs [20, 21, 22], en négligeant simultanément la conduction axiale du fluide et la dissipation visqueuse. Avec ces mêmes considérations, Grigull [23] a montré que la valeur de Nusselt établi dans le cas d'un flux imposée aux parois, peut être prédite

par la relation $Nu_{\infty} = \frac{8(3n+1)(5n+1)}{31n^2+12n+1}$ où n est l'indice de consistance d'un fluide de puissance. Cotta et Özisik [24]; Prusa et Manglik [25] ainsi que Vijaya et al. [26] ont analysé l'évolution du champ thermique dans la zone d'entrée pour le même problème mais en considérant cette fois-ci une température uniforme imposée aux parois. Koteswara et al. [27] ont refait le travail pour une conduite inclinée, alors que Massimo et al. [28] ont considéré une conduite de section rectangulaire.

Pour cette classe de fluide, L'influence de la dissipation visqueuse sur le transfert thermique dans la zone d'entrée a été investie par Liou et Wang [29] dans le cas d'un flux imposé aux parois, Berardi et al [30] en considérant un transfert par convection avec un fluide extérieur isotherme, Lawal et Mujumdar [31] ainsi que Dang [32] dans le cas d'une température constante imposée aux parois. Ces investigations ont également tenu compte de la conduction axiale du fluide. Tso et al. [33] Ont considéré de leur coté l'effet de la dissipation visqueuse lors de l'écoulement d'un fluide de puissance entre deux plaque planes.

Une étude analytique a été réalisée, pour le cas de l'écoulement d'un fluide de Herschel-Bulkley, par J.N.N. Quaresma et E.N. Macêdo [34]. En négligeant l'effet de la dissipation visqueuse et la conduction axiale du fluide, ces auteurs ont analysé l'influence de la contrainte seuil et l'indice de consistance sur la structure hydrodynamique et thermique d'un écoulement à travers une conduite cylindrique et entre deux plaques planes semi-infinies. Un travail similaire a été réalisé pour le cas d'un écoulement à travers un espace annulaire formé par deux conduites concentriques [35] et dans une conduite rectangulaire [36].

Le recensement des travaux traitant la convection forcée dans des conduites ayant des configurations géométriques complexes, a été peu fructueux [37, 38-46]. Cependant, en situation isotherme, plusieurs analyses ont été effectuées sur les deux classes de fluides, newtoniens et non-newtoniens [47-55].

L'un des problèmes le plus traité est l'écoulement à travers des élargissements et des contractions brusques. Celui-la a été sujet de plusieurs investigations numériques (Macagno et Hung [56], Habib et Whitelaw [57], Fletcher et al [58]) et expérimentales (Macagno et Hung [59], Back et Roshke [60], Khezzar et al [61], Stieglmeier et al [62]). Ces études ont considéré spécialement le cas des écoulements en régime turbulent des fluides à faible viscosité (air, eau, ...) rencontrés dans plusieurs procédés technologiques relevant des problèmes de ventilation, de combustion et ceux relatifs au domaine aéronautique.

En régime laminaire, McNaughton et Sinclair [63], Tadmor et Gogos [64], Boger [65] rapportent que ce cas caractérise essentiellement les écoulements des fluides à fortes viscosités (verres en fusion, polymères, ...). Dans ce concept, Oliveira et Pinho [66] ont investi numériquement l'écoulement laminaire d'un fluide newtonien à travers un élargissement de rapport géométrique 1:2.6, et ont proposé une corrélation qui évalue le coefficient de perte de charge locale en fonction du nombre de Reynolds, comme ils ont déterminé le centre, la longueur ainsi que l'intensité de la zone de recirculation. Ces mêmes auteurs ont reconsidéré leur étude pour le cas d'un fluide en loi de puissance [67].

Une modélisation numérique de l'écoulement laminaire de fluides newtoniens et non-newtoniens à travers un canal conique a été présentée par S.H. Garrioch et D.F. James [68], qui ont utilisé une variété d'angles et des faibles nombres de Reynolds. L'étude avait comme objectif, la comparaison entre les caractéristiques de l'écoulement des deux types de fluides. Un travail similaire a été réalisé par Jay et al [69], où ils ont considéré un fluide viscoplastique de Bingham.

Dans ce présent travail, nous traitons par voie numérique une variété de problèmes physiques en relation avec les fluides viscoplastiques. Nous considérons des écoulements non-isothermes à travers plusieurs géométries différentes, à savoir, deux plaques planes, conduite cylindrique ainsi qu'un élargissement brusque plan et axisymétrique. Les objectifs de cette étude sont essentiellement l'analyse du comportement rhéologique de cette classe de fluide sur la structure hydrodynamique et thermique des écoulements qui lui sont associés, et l'édition de corrélations qui quantifient les différents paramètres de l'écoulement tels que le nombre de Nusselt, le coefficient de perte de charge répartie et locale...etc.

Références

- [1] **Sellars, J. R., Tribus, M., Klein, J. S.**, 1956. Heat transfer to laminar flow in a round tube of flat conduit – The Graetz problem extended. ASME transaction, 78, 441-448.
- [2] **Siegel, R., Sparrow, E. M., Hallman, T. M.**, 1958. Steady laminar heat transfer in a circular tube with prescribed wall heat flux. Applied Scientific Research, Sec. A7, 386-392.
- [3] **Hsu, C. J.**, 1967. An exact mathematical solution for entrance region laminar heat transfer with axial conduction. Applied Scientific Research, 17, 359-376.
- [4] **Ou, J. W., Cheng, K. C.**, 1973. Viscous dissipation effects on thermal entrance region heat transfer in pipes with uniform wall heat flux. Applied Scientific Research, 28, 289-301.
- [5] **Basu, T., Roy, D. N.**, 1985. Laminar heat transfer in a tube with viscous dissipation. Int. J. Heat Transfer, 28, 699-701.
- [6] **Lin, T., Hawks, K. H., Leindenfrost, W.**, 1983. Analysis of viscous dissipation effect on

- thermal entrance heat transfer in laminar pipe flows with convective boundary conditions. *Wärme stoffübertragung*, 17, 97-105.
- [7] **Back, L., Roshke, E.**, 1972. Shear layer regimes and wave instabilities and reattachment lengths downstream of an abrupt circular channel expansion. *J. Appl. Mech.*, 94, 677-681.
- [8] **Shah, R. K., London, A. L.**, 1978. Laminar flow forced convection in ducts. *Advances in Heat Transfer*, Supplement 1, Academic Press, New York.
- [9] **Kays, W. M., Grawford, M. E.**, 1993. *Convective heat and mass transfer*. 3rd Ed. McGraw-Hill, New York.
- [10] **Bird, R. B., Armstrong, R. C., Hassager, O.**, 1987. *Dynamics of polymeric liquids*. (Vol. I, Fluid Mechanics), John Wiley and Sons, New York.
- [11] **Wissler, E. H., Schechter, R. S.**, 1959. The Graetz-Nusselt problem (with extension) for a Bingham plastic. *Chemical Engineering Progress Symposium*, 55, 203-208.
- [12] **Blackwell, B. F.**, 1985. Numerical solution of the Graetz problem for a Bingham plastic in laminar tube flow with constant wall temperature. *ASME Journal of Heat transfer*, 107, 466-468.
- [13] **Johnston, P. R.**, 1991. Axial conduction and the Graetz problem for a Bingham plastic in laminar tube flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 34, 1209-1217.
- [14] **Min, T., Yoo, J. Y., Choi, H.**, 1997. Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in circular pipe –I. Analytical approach- thermally fully developed flow and thermally developing flow (The Graetz problem extended). *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40, 3025-3037.
- [15] **Min, T., Yoo, J. Y., Choi, H. G., Choi, H.**, 1997. Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in circular pipe –II. Numerical approach- Hydrodynamically developing flow and simultaneously developing flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40, 3689-3701.
- [16] **Vradis, G. C., Dougher, J., Kumar, S.**, 1993. Entrance pipe flow and heat transfer for a Bingham plastic. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 36 (3), 543-552.
- [17] **Khatyr, R., Ouldhadda, D., Il Idrissi, A.**, 2003. Viscous dissipation effects on the asymptotic behaviour of laminar forced convection for Bingham plastics in circular ducts. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46, 589–598.
- [18] **Nouar, C.**, 2005. Thermal convection for a thermo-dependent yield stress fluid in an axisymmetric horizontal duct. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 48, 5520–5535.
- [19] **Ahmet Pinarbasi, Muharrem Imal**, 2005. Viscous heating effects on the linear stability of Poiseuille flow of an inelastic fluid. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 127, 67–71.
- [20] **Cho, Y. I., Hartnett, J. P.**, 1982. Non-Newtonian fluids in circular pipe flow. *Adv. Heat Transfer* 15, 59-141.
- [21] **Hartnett, J. P.**, 1994. Single phase channel flow forced convection heat transfer. *Proceedings of the 10th International Heat Transfer Conference*, 1, 247-258. Taylor and Francis, Bristol, PA.
- [22] **Irvine, T. F., Karni, J.**, 1987. Non-Newtonian fluid flow and heat transfer. In *Handbook of single-phase convective Heat Transfer* (Edited by Kakaç, S., Shah, R. K., and Aung, W.), Chap. 20, Wiley, New York.
- [23] **Grigull, U.**, 1956. Wärmeübergang and nicht-Newtonsche flüssigkeiten bei laminarer rohrströmung. *Chem. Ing. Techn.* 28, 553-556.
- [24] **Cotta, R. M., Özisik, M. N.**, 1986. Laminar forced convection of power law non-Newtonian fluids inside ducts. *Wärme Stoffübertragung* 20, 211-218.
- [25] **Prusa, J., Manglik, R. M.**, 1994. Asymptotic and numerical solutions for thermally developing flows of Newtonian and non-Newtonian fluids in circular tubes with uniform wall temperature. *Numer. Heat Transfer*, 26, 199-217.

- [26] **Vijaya K. Patnana, Ram P. Bharti, Raj P. Chhabra**, 2010. Two-dimensional unsteady forced convection heat transfer in power-law fluids from a cylinder. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53, 19-20, 4152-4167.
- [27] **Koteswara Rao, P., Sasmal, C., Sahu, A.K., Chhabra, R.P., Eswaran, V.**, 2011. Effect of power-law fluid behavior on momentum and heat transfer characteristics of an inclined square cylinder in steady flow regime. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, (54),13-14, 2854-2867.
- [28] **Massimo Capobianchi, Darcy Wagner**, 2010. Heat transfer in laminar flows of extended modified power law fluids in rectangular ducts. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53,1-3, 558-563.
- [29] **Liou, C. T., Wang, F. S.**, 1990. Solutions to the extended Graetz problem for a power-law fluid with viscous dissipation and different entrance boundary conditions. *Numer. Heat Transfer*, 17, 91-108.
- [30] **Berardi, P. G., Cuccurullo, G., Acierno, D., Russo, P.**, 1995. Viscous dissipation in duct flow of molten polymers. *Proceedings of Eurotherm Seminar*, 46, 39-43, Pisa, Italy, July.
- [31] **Lawal, A., Mujumdar, A. S.**, 1992. The effects of viscous dissipation on heat transfer to power fluids in arbitrary cross-sectional ducts. *Wärme Stoffübertragung* 27, 437-446.
- [32] **Dang, V. D.**, 1983. Heat transfer of power-law fluid at low Peclet number flow. *ASME Trans. J. Heat Transfer* 105, 542-549.
- [33] **Tso, C.P., Sheela-Francisca, J., Yew-Mun Hung**, 2010. Viscous dissipation effects of power-law fluid flow within parallel plates with constant heat fluxes. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 165, 11-12, 625-630.
- [34] **Quaresma, J. N. N., Macêdo, E. N.**, 1998. Integral transform solution for the forced convection of Herschel-Bulkley fluids in circular tubes and parallel-plates ducts. *Braz. J. Chem. Eng.* 15 (1), Sao Paulo, Mars.
- [35] **Viana, M. J. G., Nascimento, U. C. S., Quaresma, J. N. N., Macêdo, E. N.**, 2001. Integral transform method for laminar heat transfer convection of Herschel-Bulkley fluids within concentric annular ducts. *Braz. J. Chem. Eng.*, 18 (4), São Paulo, Dec.
- [36] **Sayed-Ahmed, M.E., Karem M. Kishk**, 2008. Heat transfer for Herschel-Bulkley fluids in the entrance region of a rectangular duct. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 35(8), 1007-1016.
- [37] **Shah, R. K., London, A. L.**, 1978. Laminar flow forced convection in ducts. *Advances in Heat Transfer*, Supplement 1, Academic Press, New York.
- [38] **Jambal, O., Shigechi, T., Davaa, G., Momoki, S.**, 2005. Effects of viscous dissipation and fluid axial heat conduction on heat transfer for non-Newtonian fluids in ducts with uniform wall temperature: Part I: Parallel plates and circular ducts. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 32, 9, 1165-1173.
- [39] **Jambal, O., Shigechi, T., Davaa, G., Momoki, S.**, 2005. Effects of viscous dissipation and fluid axial heat conduction on heat transfer for non-Newtonian fluids in ducts with uniform wall temperature: Part II. Annular ducts. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 32, 9, 1174-1183.
- [40] **Cassio Roberto Macedo Maia, João Batista Aparecido, Luiz Fernando Milanez**, 2006. Heat transfer in laminar flow of non-Newtonian fluids in ducts of elliptical section. *International Journal of Thermal Sciences*, 45, 11, 1066-1072.
- [41] **Zeraibi, N., Amoura, M., Benzaoui, A., Gareche, M.**, 2007. Numerical study of a thermodependent non-Newtonian fluid flow between vertical concentric cylinders. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 34, 6, 740-752.
- [42] **Maria H. Farias, Carlos V.M. Braga, Paulo R. de Souza Mendes**, 2009. Heat transfer coefficients for the laminar fully developed flow of viscoplastic liquids through annuli. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52, 3257-3260.

- [43] **Zdanski, P.S.B., Vaz Jr., M.**, 2009. Non-isothermal polymer melt flow in sudden expansions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 161, 1-3, 42-47.
- [44] **Evaldiney R. Monteiro, Emanuel N. Macêdo, João N.N. Quaresma, Renato M. Cotta**, 2010. Laminar flow and convective heat transfer of non-Newtonian fluids in doubly connected ducts. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53, 2434–2448.
- [45] **Ramjee Repaka, Satyamurty, V.V.**, 2010. Local and average heat transfer in the thermally developing region of an asymmetrically heated channel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53, 9-10, 1654-1665.
- [46] **Abdelhamid Boualit, Nouredine Zeraibi, Sabrina Boualit, Meriam Amoura**, 2011. Thermal development of the laminar flow of a Bingham fluid between two plane plates with viscous dissipation. *International Journal of Thermal Sciences*, 50 (1), 36-43.
- [47] **Evan Mitsoulisa, Huilgolb, R.R.**, 2004. Entry flows of Bingham plastics in expansions. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 122, 45–54.
- [48] **Sun, K.-H., Pyle, D.L., Baines, M.J., Hall-Taylor, N., Fitt, A.D.**, 2006. Velocity profiles and frictional pressure drop for shear thinning materials in lid-driven cavities with fully developed axial flow. *Chemical Engineering Science*, 61, 4697 – 4706.
- [49] **Anthony Wachs**, 2007. Numerical simulation of steady Bingham flow through an eccentric annular cross-section by distributed Lagrange multiplier/fictitious domain and augmented Lagrangian methods. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 142, 183–198.
- [50] **Massimo Capobianchi**, 2008. Pressure drop predictions for laminar flows of extended modified power law fluids in rectangular ducts, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 51, 5-6, 1393-1401.
- [51] **Gabriel M. de Oliveira, Leandro L. Vieira da Rocha, Admilson T. Franco, Cezar O.R. Negrão**, 2010. Numerical simulation of the start-up of Bingham fluid flows in pipelines. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 165, 1114–1128.
- [52] **Primož Ternik**, 2010. New contributions on laminar flow of inelastic non-Newtonian fluid in the two-dimensional symmetric expansion: Creeping and slowly moving flow conditions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 165, 19-20, 1400-1411.
- [53] **Reza Majidi, Stefan Z. Miska, Ramadan Ahmed, Mengjiao Yu, Leslie G. Thompson**, 2010. Radial flow of yield-power-law fluids: Numerical analysis, experimental study and the application for drilling fluid losses in fractured formations. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 70, 334–343.
- [54] **Yu-Quan Liu, Ke-Qin Zhu**, 2010. Axial Couette–Poiseuille flow of Bingham fluids through concentric annuli. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 165, 1494–1504.
- [55] **Dennis A. Siginer, Mario F. Letelier**, 2011. Laminar flow of non-linear viscoelastic fluids in straight tubes of arbitrary contour. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54, 9-10, 2188-2202.
- [56] **Macagno, E. O., Hung, T. K.**, 1967. Computation and experimental study of a captive annular eddy. *J. Fluid Mech.*, 28, 43-64.
- [57] **Habib, M. A., Whitelaw, J. H.**, 1982. The calculation of turbulent flow in wide-angle diffusers. *Numer. Heat trans.*, 5, 145.
- [58] **Fletcher, D., Maskel, S., Patrick, M.**, 1985. Heat and mass transfer computations for laminar flow in axisymmetric sudden expansion. *Computers Fluids*, 13, 207.
- [59] **Macagno, E. O., Hung, T. K.**, 1967. Computation and experimental study of a captive annular eddy. *J. Fluid Mech.*, 28, 43-64.
- [60] **Back, L., Roshke, E.**, 1972. Shear layer regimes and wave instabilities and reattachment lengths downstream of an abrupt circular channel expansion. *J. Appl. Mech.*, 94, 677-681.
- [61] **Khezzar, L., Whitelaw, J. H., Yianneskis, M.**, 1985. An experimental study of round sudden expansion flows. *Proc. 5th Symposium on Turbulent Shear Flows*, Cornell University, 5-25.

-
- [62] **Stieglmeier, M., Tropea, C., Weiser, N., Nitsche, W.**, 1989. Experimental investigation of the flow through axisymmetric expansions. *J. Fluids Eng.*, 111, 464-471.
- [63] **McNaughton, K. J., Sinclair, C. G.**, 1966. Submerged jets in short cylindrical flow vessels. *J. Fluid Mech.*, 25, 367.
- [64] **Tadmor, Z., Gogos, C. G.**, 1979. Principles of polymer processing. Wiley, New York.
- [65] **Boger, D. V.**, 1981. Circular entry flows of inelastic and viscoelastic fluids. In *Advances in Transport Processes*, Wiley, New York, 2, 43-98.
- [66] **Oliveira, P. J., Pinho, F. T.**, 1997. Pressure drop coefficient of laminar Newtonian flow in axisymmetric sudden expansion. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 18, 518-529.
- [67] **Pinho, F. T., Oliveira, P. J., Miranda, J. P.**, 2003. Pressure loss in the laminar flow of shear-thinning Power-law fluids across a sudden axisymmetric expansion. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 24, 747-761.
- [68] **Garrioch, S. H., James, D. F.**, 1997. A finite-element study of Newtonian and power-law fluids in conical channel flow. *Journal of Fluids Engineering*, 119, 341-345.
- [69] **Jay, P., Magnin, A., Piau, J. M.**, 2002. Numerical simulation of viscoplastic fluid flows through an axisymmetric contraction. *J. Fluids Eng.*, Vol. 124 (3), 700-705.

Rhéologie des fluides.

Chapitre II

II.1 Introduction

Mot créé aux états unis en 1929 par Eugène Cook Bingham (1878-1945), la rhéologie est une science qui traite de l'écoulement, des déformations, et plus généralement de la viscosité des matériaux sous l'action de contraintes qui leurs sont appliquées.

Cette discipline qui s'étale sur tout les aspects de la matière, liquides soient-ils ou solides, présente un intérêt particulier par son habilité à l'analyse des problèmes liées aux substances, dont l'aspect présente un état intermédiaire entre un solide parfaitement élastique et un liquide tout à fait visqueux, tels les solides pâteux et les liquides épais.

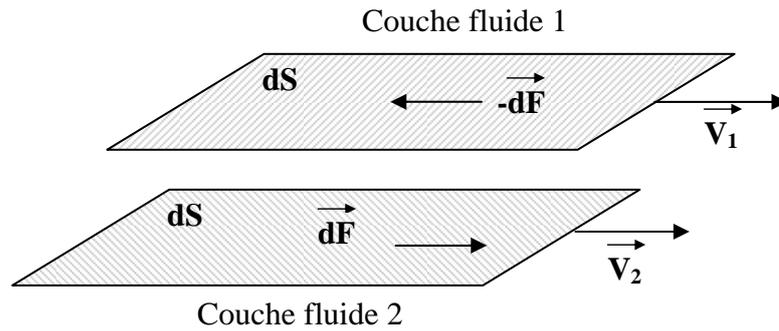
Ce type de substances, qui sont à l'origine de notre étude, forment une large classe de fluides dite « non-newtonien », et dont le comportement rhéologique est très différent de celui d'un liquide parfaitement visqueux (newtonien).

II.2 Grandeurs caractéristiques de la rhéologie :

La rhéologie fait intervenir plusieurs grandeurs dynamiques et cinématiques, à savoir : la contrainte de cisaillement, la déformation, la vitesse de déformation et la viscosité.

La contrainte de cisaillement :

En considérant deux couches fluides infiniment minces en contact l'une de l'autre (figure [II-1]), il en résulte du déplacement de celles-ci l'une par rapport à l'autre des forces de frottement \vec{dF} qui s'exercent tangentiellement à leurs surfaces(dS).



Figure[II-1] : schéma représentatif d'un cisaillement de deux couches fluides

La contrainte de cisaillement (τ) est donc définie comme étant le rapport entre le module de la force de frottement et l'aire de son application :

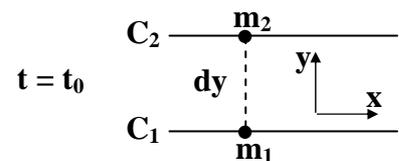
$$\tau = \frac{dF}{dS} [N/m^2]$$

La déformation :

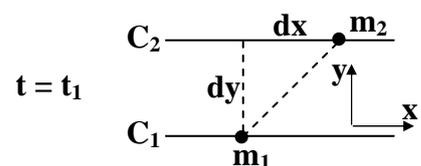
La déformation (γ) traduit les déplacements relatifs des couches fluides les unes par rapport aux autres, sous l'influence exercée par une contrainte.

Considérons deux points m_1 et m_2 appartenant respectivement à deux couches fluides voisines C_1 et C_2 d'un écoulement unidimensionnel tel que :

à l'instant $t = t_0$, les coordonnées de ces deux points sont $m_1(x_1, y_1)$ et $m_2(x_1, y_1 + dy)$, où dy est l'écart entre les deux couches fluides voisines.



à l'instant $t = t_1$, après déplacement, ces deux points occuperont les positions définies par $m_1(x_2, y_2)$ et $m_2(x_2 + dx, y_2 + dy)$.



la déformation de cisaillement est donnée par la relation :

$$\gamma = \frac{dx}{dy}$$

avec dx la variation de déplacement.

La vitesse de déformation :

La vitesse de déformation ou la vitesse de déformation ou encore le taux de cisaillement, traduit la variation de la déformation au cours du temps. Autrement dit, elle est le rapport entre la déformation et le temps nécessaire à celle-ci pour ce produire.

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{du}{dy}, [1/s]$$

Viscosité dynamique :

La viscosité dynamique est une propriété physique d'un fluide. Elle traduit la capacité d'entraînement exercée par une couche fluide en mouvement sur les autres couches adjacentes. D'après l'hypothèse de Newton, la viscosité dynamique est définie comme le rapport entre la contrainte de cisaillement et la vitesse de déformation :

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}$$

dans le système international la viscosité dynamique s'exprime en poiseilles où : $1 \text{ poise} = 0.1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 0.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

II.3 Courbe rhéologique ou rhéogramme :

Le rhéogramme est une représentation graphique du comportement mécanique d'un fluide sous l'effet d'un cisaillement (Figure [II-2]).

Obtenue à partir des rhéomètres, cette représentation constitue une base de données nécessaire pour une modélisation mathématique, qui donnera naissance à un modèle rhéologique représentatif du comportement du fluide en question.

Généralement, le rhéogramme représente l'évolution de la contrainte de cisaillement en fonction de la vitesse déformation,

$$\tau = f(\dot{\gamma})$$

mais on peut aussi rencontrer d'autres représentations telles que :

- $\dot{\gamma} = f(\tau)$;
- $\gamma = f(t)$: déterminée à partir des expériences dites de fluage où la contrainte de cisaillement est maintenue constante ;
- $\tau = f(t)$: déterminée à partir des expériences dites de relaxation caractérisées par une vitesse de déformation maintenue constante.

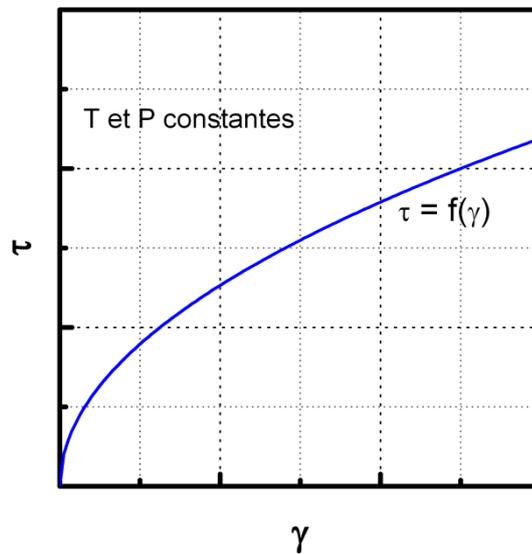


Figure [II-2] : Rhéogramme ou courbe du comportement rhéologique d'un fluide.

II.4 Classification des fluides :

II.4.1 Introduction :

L'évolution de la contrainte de cisaillement en fonction de la vitesse de déformation à pression et température constantes, dans un fluide, est représentée mathématiquement par une relation qui a la forme :

$$\tau = f(\gamma, \dot{\gamma}, t)\dot{\gamma}$$

où f est une fonction qui peut dépendre de la déformation, de la vitesse de cisaillement et du temps.

La classification des fluides consiste donc, à regrouper dans la même classe toutes les substances représentées par une fonction f qui manifeste la même dépendance des paramètres $\gamma, \dot{\gamma}$ et t .

II.4.2 Classification des fluides :

II.4.2.1 Fluides newtoniens :

Pour ces fluides, la contrainte de cisaillement varie linéairement avec la vitesse de déformation (Figure [II-3]). La fonction f est une constante qui coïncide avec la viscosité dynamique.

$$f(\gamma, \dot{\gamma}, t) = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = Cte = \mu$$

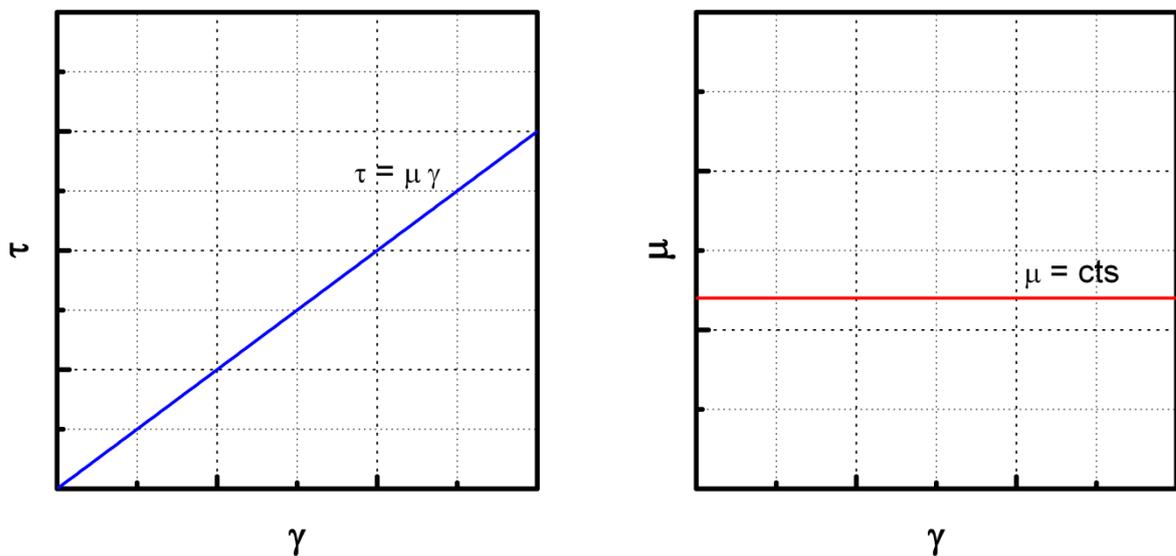


Figure [II-3] : rhéogramme et courbe de viscosité dynamique d'un fluide Newtonien.

II.4.2.2 Fluides non-newtoniens indépendants du temps :

Pour cette classe de fluides, f est une fonction qui dépend uniquement de la vitesse de déformation. L'équation rhéologique se résume donc à la relation :

$$\tau = f(\dot{\gamma})\dot{\gamma}$$

où $f(\dot{\gamma})$ est appelée « viscosité apparente » par analogie avec la viscosité dynamique des fluides newtoniens. L'évolution de cette dernière en fonction de la vitesse de déformation présente une allure universelle figure [II-4].

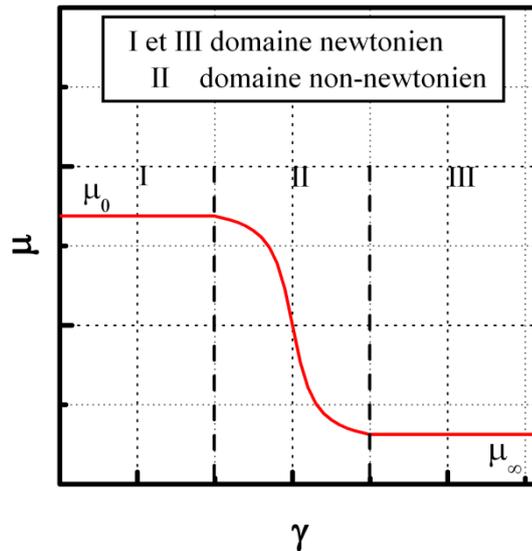


Figure [II-4] : Allure générale d'une courbe d'écoulement

Les fluides non-newtoniens indépendants du temps sont subdivisés en trois groupes, qui sont caractérisés par des comportements rhéologiques distincts :

Fluides rhéofluidifiants :

Appelés également pseudo-plastiques, ces fluides sont caractérisés par la diminution de leurs viscosités apparentes avec l'accroissement de la vitesse de déformation (courbe 1 de la Figure II-5). Ce comportement est très répandu et on peut citer en guise d'exemples : les polymères à longues chaînes en solution ou à l'état fondu, les colles, les pâtes à papier, les ciments...

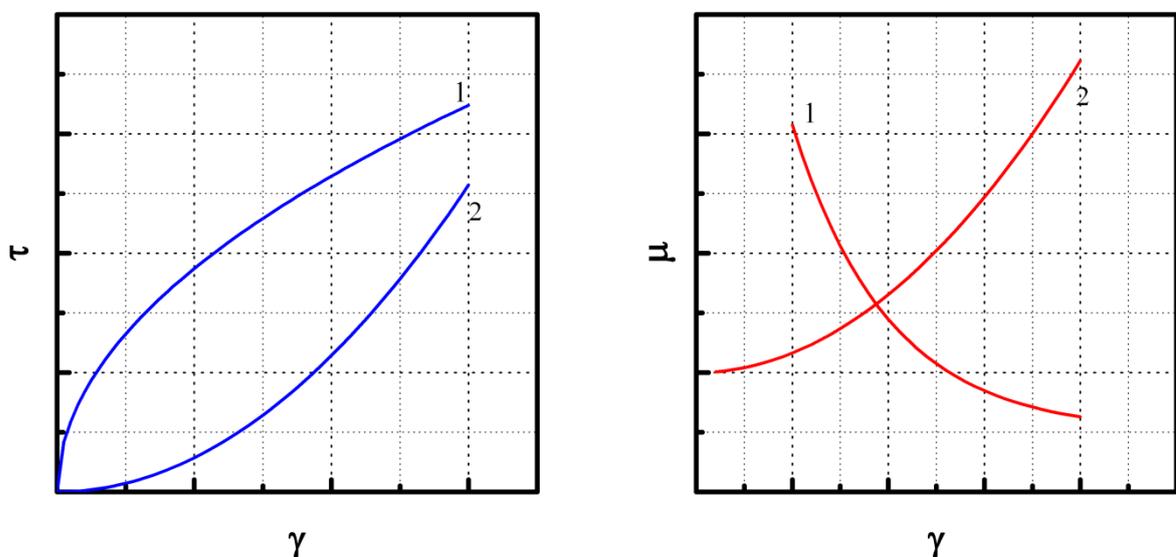


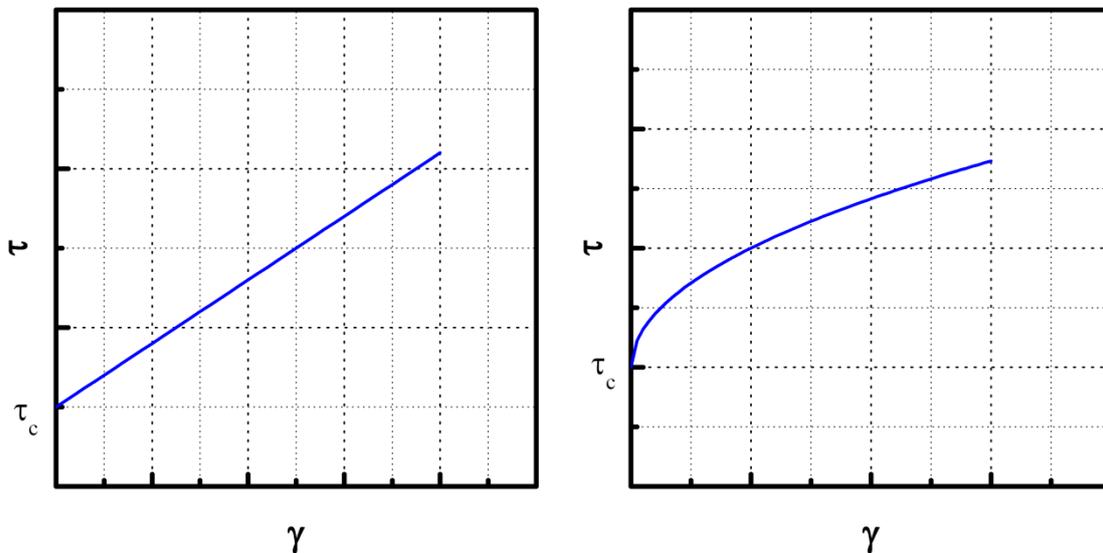
Figure [II-5] : rhéogramme et courbe de viscosité dynamique d'un fluide pseudo-plastique (1) et d'un fluide dilatant (2).

Fluides rhéoépaississants :

Beaucoup moins fréquent, ces fluides sont caractérisés par une viscosité apparente qui décroît avec l'accroissement de la vitesse de déformation (courbe 2 de la [Figure \[II-5\]](#)). Tel est le cas des solutions d'amidon, des sables mouillés et compactés, et certaines huiles polymériques.

Fluides plastiques (fluides à seuil de contrainte):

Ce sont des fluides qui ne s'écoulent que lorsque les contraintes qui leurs sont appliquées dépassent une certaine valeur dite contrainte seuil (τ_c). Au-delà de cette valeur, l'écoulement s'effectue sous l'effet de la contrainte effective ($\tau - \tau_c$) ([Figure \[II-6\]](#)).



Figure[II-6] : rhéogramme d'un fluide plastique idéal (fluide de Bingham) et d'un fluide plastique fluidifiant.

Lors de l'écoulement, les fluides peuvent manifester un comportement newtonien (fluide de Bingham), ou l'un des comportements sus-cités. Mais il est plus fréquent de rencontrer des fluides plastiques fluidifiants tels que les boues, la pâte dentifrice, le sulfate de Zinc ou de Baryum en suspension, la pâte à pain, les matières grasses...

Le [tableau \[II-1\]](#) présente un certain nombre d'équations rhéologiques des fluides au comportement indépendant du temps.

Modèles	Lois Rhéologiques	Paramètres
Ostwald de Weale [1]	$\tau = K\dot{\gamma}^n$	K, n
Ellis [2]	$\tau = \left(\frac{\mu_0}{1 + (\tau/\tau_{1/2})^{\alpha-1}} \right) \dot{\gamma}$	$\tau_{1/2}, \mu_0, \alpha$
Prandlt-Eyring [3]	$\tau = \tau_0 + Sh^{-1}(t_0\dot{\gamma})$	τ_0, t_0
Powell-Eyring [4]	$\tau = \mu_1\dot{\gamma} + \frac{\mu_0}{t_0} Sh^{-1}(t_0\dot{\gamma})$	μ_1, μ_0, t_0
Sisko [5]	$\tau = \mu_0\dot{\gamma} + K\dot{\gamma}^n$	μ_0, K, n
Reiner-Philipoff [6]	$\tau = \left[\mu_0 + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (\tau/\tau_s)^2} \right] \dot{\gamma}$	$\mu_0, \mu_\infty, \tau_s$
Loi de puissance tronquée de Spriggs [7]	$\tau = \mu_0\dot{\gamma} \quad \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_0$ $\tau = \mu_0\dot{\gamma}(\dot{\gamma}/\dot{\gamma}_0)^{n-1} \quad \dot{\gamma} > \dot{\gamma}_0$	$\mu_0, \dot{\gamma}_0, n$
Meter [8]	$\tau = \mu_0 \left[\frac{1 + (\tau/\tau_m)^{\alpha-1}(\mu_\infty/\mu_0)}{1 + (\tau/\tau_m)^{\alpha-1}} \right] \dot{\gamma}$	μ_0, τ_m, α
Hamersma [9]	$\tau = \mu_\infty\dot{\gamma} + \tau_0[1 - \exp(-a\tau)]$	$\mu_\infty, \tau_0, \alpha = \frac{\mu_\infty}{\mu_0\tau_0}$
Cross [10]	$\tau = \left[\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (\lambda\dot{\gamma})^p} \right] \dot{\gamma}$	$\mu_0, \mu_\infty, \lambda, p$
Quemada [11]	$\tau = \left[\mu_\infty \left[\frac{1 + (\lambda\dot{\gamma})^p}{(\mu_\infty/\mu_0)^{1/2} + \dot{\gamma}^p} \right]^2 \right] \dot{\gamma}$	$\mu_0, \mu_\infty, \lambda, p$
Krieger-Dougherty [12]	$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = (1 + (\lambda\dot{\gamma})^p)^{-1}$	$\mu_0, \mu_\infty, \lambda, p$
Bingham [13]	$\tau = \tau_s + \mu_p\dot{\gamma}$	τ_s, μ_p
Herschel-Bulkley [14]	$\tau = \tau_s + K\dot{\gamma}^n$	τ_s, K, n
Casson [15]	$\tau^{1/2} = \tau_s^{1/2} + K_c\dot{\gamma}^{1/2}$	τ_s, K_c
Skelland [16]	$\tau = \tau_s + \frac{\mu_0\dot{\gamma}}{1 + c(\tau - \tau_s)^m}$	τ_s, μ_0, c, m
Robertson-Stiff [17]	$\tau = K(\dot{\gamma}_0 + \dot{\gamma})^n$	$\tau_s = K(\dot{\gamma}_0)^n, n, K$

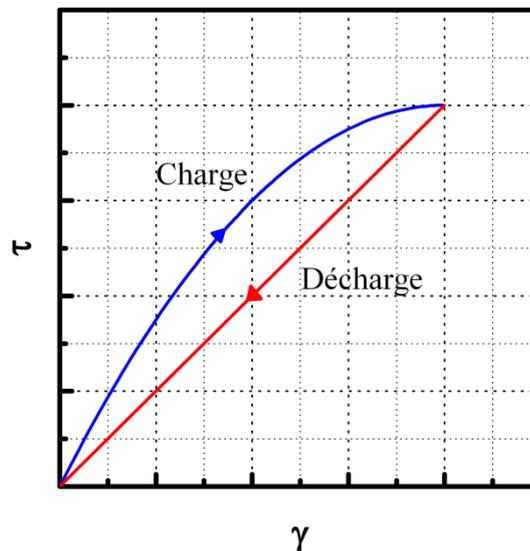
Tableau [II-1] : Lois rhéologiques des fluides indépendants du temps.

II.4.2.3 Fluides non-newtoniens dépendants du temps :

En raison de la modification non-instantanée de la structure microscopique de ces fluides, leurs comportements rhéologiques dépendent du temps en plus des taux de cisaillements. Leurs équations rhéologiques se mettent alors sous la forme :

$$\tau = f(\dot{\gamma}, t)\dot{\gamma}$$

Ces fluides se comportent comme si les contraintes subies dans un passé relativement récent modifiaient leurs comportements à l'écoulement présent. Les rhéogrammes résultants de l'application d'une vitesse de déformation qui croît et décroît régulièrement (charge-décharge) sur ces derniers, présentent des cycles d'hystérésis (Figure [II-7]).



Figure[II-7] : courbe rhéologique résultant d'un test de charge-décharge pour un fluide dépendant du temps.

On distingue pour les fluides non-newtoniens dépendants du temps deux types de fluides qui ont un comportement distinct :

Fluides thixotropes :

un fluide est thixotrope si sa viscosité apparente diminue en fonction du temps lorsqu'il est soumis à un taux de cisaillement constant . Ce comportement doit être réversible.

Fluides rhéopectiques :

un fluide est dit rhéopectique s'il manifeste un comportement inverse que celui d'un fluide thixotrope.

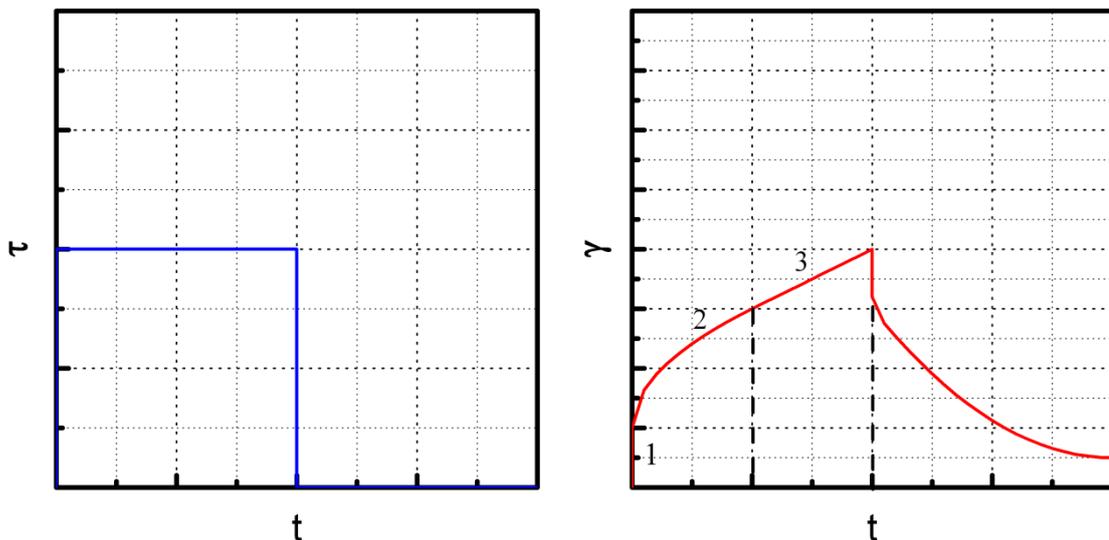
II.4.2.4 Fluides viscoélastiques :

Les fluides viscoélastiques manifestent sous l'effet d'une contrainte, un comportement qui dépend à la fois de la déformation, du taux de cisaillement et du temps. Leurs équations rhéologiques sont de la forme :

$$\tau = f(\gamma, \dot{\gamma}, t)\dot{\gamma}$$

Ces fluides possèdent simultanément des propriétés visqueuses et élastiques. Car soumis à un test de fluage (contrainte de cisaillement constante) (Figure [II-8]), ces fluides se déforment en trois temps successifs :

- 1- déformation instantané qui résulte de l'élasticité du fluide ;
- 2- déformation élastique amortie par la viscosité ;
- 3- déformation linéaire purement visqueuse.



Figure[II-8] : évolution de la vitesse déformation au sein d'un fluide viscoélastique lors d'un test de fluage.

Références

- [1] **Scott Blair, G. W., Hening, J.C., Wagstaff, A.**, 1939. The flow of cream through narrow glass tubes. *J. Phys. Chem.*, 43 (7) ,853–864.
- [2] **STELLER, R.T.**, 2001. Generalized slit flow of an Ellis fluid. *Polymer engineering and science*, 41 (11) 1859-1870.
- [3] **Eyring, H. J.**,(1936). Viscosity, plasticity, and diusion as examples of absolute reaction rates. *J. Chemical Physics*, 4, 283-291.
- [4] **Powell, R. E., Eyring, H.J.**, 1944. Mechanisms for the relation theory of viscosity. *Nature*,154, 427-428.
- [5] **SISKO, A. W.**, 1958. The flow of lubricating greases *Ind. Engng Chem.* 50, 1789-1792.
- [6] **Stephen, G. B.**, 1962. Theories of Liquid Viscosity. *Chem. Rev.*, 62 (6), 513–548.
- [7] **Newman, M. E. J.**, 2001. Scientific collaboration networks. I. Network construction and fundamental results. *Physical Review E*, 64(1):16131.
- [8] **Meter, D.M., Bird, R.B.**, 1964. Tube flow of non-Newtonian polumer solutions, Part1. Laminar flow and rheological models. *AIChE (Am. Inst. Chem. Eng.) J.*, 10, 878-882.
- [9] **Mahfoud, M., Benhadid, S., Lebouché, M.**, 2008. Étude du comportement d'un fluide non-newtonien dans une conduite avec contraction brusque 4:1. *Comptes Rendus Mécanique*, 336,(7), 616-621
- [10] **Kennedy, P. K.**, *Flow Analysis of Injection Molds*. New York. Hanser.
- [11] **P. Flaud, P., Quemada, D.**, 1980. Rôle des effets non newtoniens dans l'écoulement pulsé d'un fluide dans un tuyau viscoélastique. *Rev. Phys. Appl.* 15, 749-759.
- [12] **Krieger, I.M.**, 1972. Rheology of monodisperse lattices. *Advan. Colloid Interface Sci.* 3, 111-136.
- [13] **Bingham, E.C.**, 1916. An Investigation of the Laws of Plastic Flow. *U.S. Bureau of Standards Bulletin*, 13, 309-353.
- [14] **Herschel, W.H., Bulkley, R.**, 1926. Konsistenzmessungen von Gummi-Benzollösungen. *Kolloid Zeitschrift* 39, 291–300.
- [15] **Fung, Y. C.**, 1986, *Biomechanics, Mechanical properties of living tissues*, Springer-Verlag, New York, 68-81.
- [16] **Skelland, A. H. P.**, 1967. *Non-Newtonian fluid and heat transfer* , New York.
- [17] **Robertson, R.E., Stiff, H.A.**, 1976. An improved rheological Model for Relating Shear Stress to Shear Rate in Drilling Fluids and Cement Slurries. *Trans AIME, Soc. Pet. Eng. J.*, 261, 31-37.

Modèle mathématique et méthode numérique.

Chapitre III

III.1 Modèle mathématique :

III.1.1 Equations générales :

L'écoulement d'un fluide est représenté par un ensemble d'équations aux dérivées partielles, à savoir les équations de mouvement et de continuité, obtenues respectivement par l'application du principe de conservation de la quantité de mouvement et de la masse sur un élément fluide infinitésimal.

En considérant un écoulement laminaire, stationnaire et bidimensionnel d'un fluide incompressible, ces équations de conservation s'écrivent sous une forme générale qui peut traiter à la fois un problème plan ou axisymétrique selon la valeur du paramètre ξ (0 et 1 respectivement). Notant que ($r \equiv y$ et $R \equiv H$) lorsque ($\xi = 0$), cette écriture est comme suit :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \xi \frac{v}{r} = 0 \quad (\text{III-1})$$

Equations de mouvement :

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{r^\xi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta r^\xi \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \quad (\text{III-2})$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{1}{r^\xi} \frac{\partial}{\partial r} \left(2\eta r^\xi \frac{\partial v}{\partial r} \right) - 2\eta \xi \frac{v}{r^2} \quad (\text{III-3})$$

Pour les problèmes non- isothermes, le transfert de chaleur est défini par l'équation d'énergie qui est également un résultat de l'application du principe de conservation de la quantité de chaleur comprise dans l'élément fluide.

En considérant un cas stationnaire et un fluide dont les propriétés physiques sont thermo-indépendantes, l'équation de l'énergie aura la forme suivante :

Equation de l'énergie :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{r^\xi} \frac{\partial}{\partial r} \left(K r^\xi \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \eta \dot{\gamma}^2 \quad (\text{III-4})$$

où $(\eta \dot{\gamma}^2)$ est le terme de la dissipation visqueuse et $\dot{\gamma}^2 = D_{II}$ qui représente le second invariant du tenseur des taux de déformation $\bar{\bar{D}}$ écrit pour des problèmes aux vitesses angulaires nulles comme suit:

$$[\bar{\bar{D}}] = \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} & 2 \frac{\partial v}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & \xi \frac{v}{r} \end{bmatrix}$$

$$D_{II} = \frac{1}{2} \left[(\text{Trace } \bar{\bar{D}})^2 - \text{Trace } \bar{\bar{D}}^2 \right]$$

D'où :

$$D_{II} = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \xi \left(\frac{v}{r} \right)^2 \quad (\text{III-5})$$

$(\eta \dot{\gamma}^2)$, qui est un terme source pour l'équation (III-4), traduit la contribution de la viscosité et des taux de déformation au réchauffage du fluide lors de son écoulement. Généralement négligé, ce terme s'avère d'une très grande importance en considérant des écoulements à travers des tubes capillaires ou des faibles espaces annulaires (problème de lubrification). Ces deux cas de figures ont été sujet plusieurs investigations numériques et analytiques [1, 2, 3].

Equation constitutive :(comportement rhéologique)

Dans ce travail, on considère le cas des fluides obéissant à la loi de comportement de Bingham. Cette loi définit la contrainte de cisaillement en fonction du gradient de vitesse, tout en tenant compte de l'existence d'un seuil de contrainte (τ_0). On a alors :

$$\begin{cases} \tau - \tau_0 = \mu_p \dot{\gamma} & \text{si } \tau > \tau_0 \\ \gamma = 0 & \text{si } \tau \leq \tau_0 \end{cases} \quad (\text{III-6})$$

où μ_p est la viscosité plastique du fluide et

$$\dot{\gamma} = \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2\xi \left(\frac{v}{r} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Afin d'introduire l'effet rhéologique du fluide dans la structure de l'écoulement (équations de mouvement), l'équation constitutive est formulée de sorte à définir l'expression de la viscosité apparente du fluide en fonction du gradient de vitesse. On aura donc :

$$\eta_{ap} = \begin{cases} \mu_p + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} & \text{si } \tau > \tau_0 \\ \infty & \text{si } \tau \leq \tau_0 \end{cases} \quad (\text{III-7})$$

Il est à noter que, pour ce type de fluides, la zone caractérisée par des taux de cisaillement inférieurs à τ_0 ne subit aucune déformation ($\gamma = 0$) et s'écoule en bloc formant ainsi un écoulement bouchon.

Comme il est constaté, cette équation présente une discontinuité pour les faibles taux de cisaillement qui engendre par conséquence des instabilités lors du traitement numérique des équations gouvernant le processus physique. Pour surmonter cette difficulté la technique de régularisation proposée par Papanastasiou [4] et validée par les travaux de plusieurs auteurs [5,6,...] a été adoptée dans ce présent travail. Cette dernière consiste au remplacement de l'équation rhéologique classique par l'équation suivante :

$$\eta_{ap} = \mu_p + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} (1 - \exp(-m\dot{\gamma})) \quad (\text{III-8})$$

où m est un paramètre de régularisation dont la valeurs optimal est déterminée par un compromis entre les paramètres rhéologiques, le maillage et la précision du calcul désirée

Un bon choix de m permettra une meilleure approximation du comportement d'un fluide de Bingham idéal (Figure [III-1]).

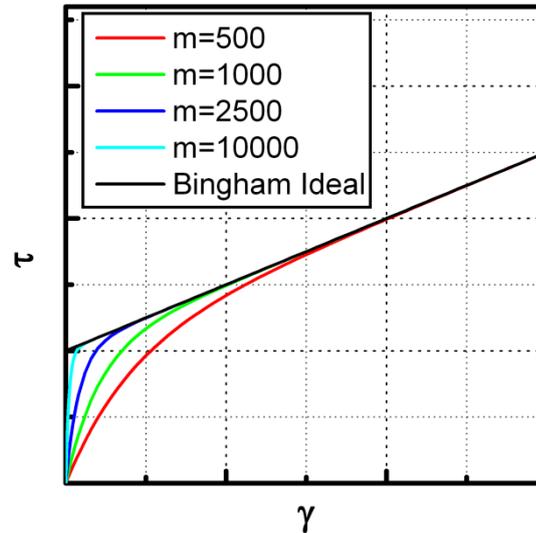


Figure III-1 : Courbes de comportement rhéologique pour différentes valeurs de m

III.1.2 Conditions aux limites :

Dans ce travail, on a considéré pour chaque problème étudié des conditions aux limites spécifiques et représentatives de son aspect physique.

Pour l'analyse de l'établissement d'un régime hydrodynamique, on a imposé :

- Une condition de non glissement aux parois solide ;
- Vitesse constante à l'entrée ;
- Profil de vitesse établi à la sortie.

Tandis que pour l'établissement d'un régime thermique, on a considéré :

- Température constante ou flux uniforme à la paroi solide ;
- Température constante à l'entrée ;
- Profil de température établi à la sortie.

III.1.3 Formulation adimensionnelle :

En guise de généralisation, les équations évoquées précédemment sont ramenées à une forme adimensionnelle en considérant les échelles de longueur (R), de vitesse (U_m) (vitesse moyenne débitante à l'entrée) et de température $\Delta T = (T_{paroi} - T_{entrée})$ ou bien $q R/K$ suivant le cas traité.

Les équations gouvernant le problème s'écrivent alors :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial r^*} + \frac{v^*}{r^*} = 0 \quad (\text{III-9})$$

$$Re \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(2\eta_{ap}^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) + \frac{1}{r^{\xi}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\eta_{ap}^* r^{\xi} \left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right) \quad (\text{III-10})$$

$$Re \left(u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} \right) = -\frac{\partial P^*}{\partial r^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\eta_{ap}^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right) + \frac{1}{r^{\xi}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(2\eta_{ap}^* r^{\xi} \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) - 2\eta_{ap}^* \xi \frac{v^*}{r^2} \quad (\text{III-11})$$

$$Pe \left(u^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} \right) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right) + \frac{1}{r^{*\xi}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^{*\xi} \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} \right) \right\} + PeBr\dot{\gamma}^{*2} \quad (\text{III-12})$$

$$\eta_{ap}^* = 1 + \frac{Bn}{\dot{\gamma}^*} (1 - \exp(-m\dot{\gamma}^*)) \quad (\text{III-13})$$

où :

$$\dot{\gamma}^* = \left(2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v^*}{\partial r^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 + 2\xi \left(\frac{v^*}{r^*} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Les variables adimensionnelles associées sont :

$$u^* = \frac{u}{u_m}, v^* = \frac{v}{v_m}, x^* = \frac{x}{R}, r^* = \frac{r}{R}$$

$$P^* = P / \left(\mu_p \frac{u_m}{R} \right) \quad [\text{pression adimensionnelle}]$$

$$Bn = \frac{\tau_0 R}{\mu_p u_m} \quad [\text{contrainte seuil adimensionnelle}]$$

$$Pr = \frac{\mu_p}{\rho K} \quad [\text{nombre de Prandtl}]$$

$$Re = \frac{\rho u_m R}{\mu_p} \quad [\text{nombre de Reynolds}]$$

$$Pe = PrRe = \frac{u_m R}{K} \quad [\text{nombre de Peclet}]$$

Pour le cas de la température, on a considéré deux situations :

- Température constante imposée aux parois solides :

$$\theta = \frac{T - T_e}{T_p - T_e}$$

$$Br = \frac{\mu_p u_m^2}{K(T_p - T_e)} \quad [\text{nombre de Brinkman}]$$

- Flux uniforme (q) imposé aux parois solides:

$$\theta = (T - T_e) / \left(q \frac{R}{K} \right)$$

$$Br = \frac{\mu_p u_m^2}{qR}$$

III.2 Méthode numérique :

III.2.1 Introduction :

Plusieurs méthodes numériques offrent la possibilité de résoudre le système prédéfini d'équations aux dérivées partielles. Ces méthodes dont on cite la méthode des différences finies [7-11], aux volumes finis [12,13], aux éléments finis [14-18]..., permettent la transformation du système d'EDP ou de sa forme intégrale en un système d'équations algébriques, dont la résolution aboutit à une reconstruction de la forme de la solution.

Dans notre travail, on a adopté la méthode aux éléments finis qui se résume aux étapes suivantes :

- Subdivision du domaine physique en un nombre d'éléments ;
- La réécriture du système d'EDP sous une forme intégrale par l'introduction de la méthode des résidus pondérés ;
- L'approximation simple des variables inconnues à fin de permettre le passage du système d'EDP mis sous forme intégrale à un système d'équations algébriques ;
- La résolution numérique du système d'équations algébriques.

III.2.2 Approximation d'une fonction exacte :

III.2.2.1 Définition :

Une approximation d'une fonction exacte U_{ex} , consiste à évaluer les paramètres a_1, a_2, \dots, a_n d'une fonction approchée $U(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$ de façon à faire coïncider U_{ex} et U en n points x_1, x_2, \dots, x_n d'un domaine de définition V .

Cette méthode permet de fournir :

- Une expression approchée en tout point d'une fonction difficile à évaluer, ou bien connue uniquement sur certains points.
- Une solution approchée d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles.

L'expression de la fonction approchée s'écrit :

$$U(x) = \langle P_1(x) \quad P_2(x) \quad \dots \quad P_n(x) \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \langle P \rangle \{a\} \quad (\text{III-14})$$

ou :

a_1, a_2, \dots, a_n sont les paramètres de l'approximation ;

P_1, P_2, \dots, P_n sont des fonctions connues linéairement indépendantes.

Si on choisit comme valeur des a_i la valeur de la fonction exacte en n point de V , on aura une approximation nodale de U_{ex} .

III.2.2.2 Approximation nodale d'une fonction exacte :

Pour le cas d'une approximation nodale, la fonction approchée s'écrit :

$$U(x) = \langle N_1(x) \quad N_2(x) \quad \dots \quad N_n(x) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \langle N \rangle \{u\} \quad (\text{III-15})$$

ou :

N_i sont les fonctions d'interpolations qui vérifient :

$$N_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

On aura donc : $U(x) = U_{ex}(x)$ au niveau des nœuds qui correspondent aux positions des paramètres nodaux (U_i).

La difficulté de l'approximation nodale d'une fonction exacte survient lorsque :

- Le nombre de nœuds devient important ;
- Le domaine de définition V de U_{ex} présente une forme complexe ;
- La nécessité de satisfaire des conditions aux limites sur la frontière de V .

Ce problème est contourné par l'introduction d'une approximation dite par élément fini.

III.2.2.3 Approximation nodale par élément fini :

L'approximation par élément fini consiste à subdiviser le domaine V en un nombre de sous-domaines V^e , et à définir une fonction approchée U^e appropriée à chaque V^e par une approximation nodale qui doit satisfaire les conditions suivantes :

- L'approximation nodale sur un élément V^e ne fait intervenir que les variables nodales liées aux nœuds situés sur cet élément et sa frontière ;
- Chaque fonction approchée doit assurer la continuité sur le sous- domaine de sa définition ;
- Les fonctions approchées de deux sous- domaines mitoyens doivent assurer la continuité sur leurs frontières communes.

A fin de satisfaire ces conditions, il est impératif que les sous- domaines V^e vérifient :

- Aucun recouvrement ni trou entre deux éléments voisins ;
- L'ensemble des V^e doit former un domaine aussi proche possible de V .

La nécessité de construire une fonction approchée propre à chaque élément est surpassée par l'introduction de la notion d'élément de référence. Dans ce travail, on considère des éléments quadrilatéraux à neuf et à quatre nœuds, ainsi que leurs éléments de référence.

III.2.3 Élément et élément de référence quadrilatéraux :

III.2.3.1 Définition :

Un élément de référence V^r est un élément de forme simple, repéré dans un espace de référence et qui peut être transformé en chaque élément réel V^e par une transformation géométrique τ^e .

Cette transformation dépend des coordonnées des nœuds géométriques qui définissent l'élément réel, tel que :

$$\tau^e: \xi \rightarrow X^e = X^e(\xi, X_1, X_2, \dots, X_{N_n})$$

Où :

ξ : Coordonnées (ξ, η) d'un point quelconque sur V^r ;

X^e : Coordonnées (x, r) du point correspondant sur V^e ;

N_n : Nombre de nœuds sur l'élément réel et sa frontière ;

X_1, X_2, \dots, X_{N_n} : Les nœuds géométriques de l'élément réel.

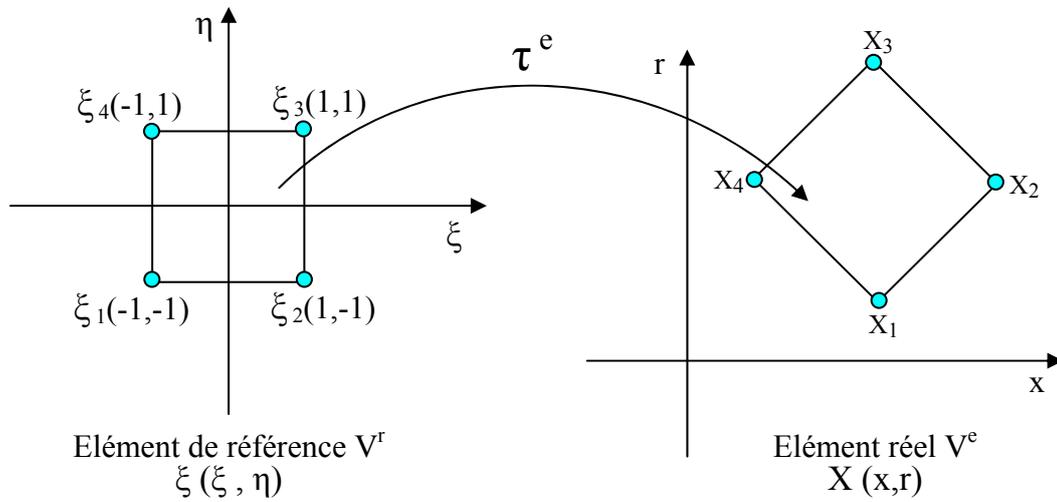


Figure III-2 : Élément réel et son élément de référence associé

III.2.3.2 Constructions des fonctions de transformation géométrique et d'interpolation sur un élément de référence :

Les fonctions de transformation géométrique $\bar{N}(\xi)$ et celles d'interpolation $N(\xi)$ sont identiques sur un élément de référence isoparamétrique qui est caractérisé par la superposition des nœuds géométriques avec les nœuds d'interpolation.

En considérant un élément quadrilatéral à quatre nœuds, ces fonctions sont construites à partir d'une base polynomiale $\langle P \rangle$ propre à cet élément :

$$\langle P \rangle = \langle P_1(\xi, \eta) \quad P_2(\xi, \eta) \quad P_3(\xi, \eta) \quad P_4(\xi, \eta) \rangle$$

tel que :

$$\begin{cases} P_1(\xi, \eta) = 1 \\ P_2(\xi, \eta) = \xi \\ P_3(\xi, \eta) = \eta \\ P_4(\xi, \eta) = \xi\eta \end{cases}$$

Soit $\xi(\xi, \eta)$ un point quelconque de l'élément de référence et $X(x, r)$ sont correspondant sur l'élément réel. x et r peuvent s'écrire alors :

$$\langle x \ r \rangle = \langle P_1(\xi, \eta) \ P_2(\xi, \eta) \ P_3(\xi, \eta) \ P_4(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-17})$$

où : a_i, b_i sont des coefficients d'interpolation.

Sachant que, chaque nœud $\xi_i(\xi_i, \eta_i)$ de V^r correspond à un nœud $X_i(x_i, r_i)$ de V^e , et en considérant tout les nœuds ($i = 1, \dots, 4$), on aura :

$$\begin{Bmatrix} x_1 & r_1 \\ x_2 & r_2 \\ x_3 & r_3 \\ x_4 & r_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(\xi_1, \eta_1) & P_2(\xi_1, \eta_1) & P_3(\xi_1, \eta_1) & P_4(\xi_1, \eta_1) \\ P_1(\xi_2, \eta_2) & P_2(\xi_2, \eta_2) & P_3(\xi_2, \eta_2) & P_4(\xi_2, \eta_2) \\ P_1(\xi_3, \eta_3) & P_2(\xi_3, \eta_3) & P_3(\xi_3, \eta_3) & P_4(\xi_3, \eta_3) \\ P_1(\xi_4, \eta_4) & P_2(\xi_4, \eta_4) & P_3(\xi_4, \eta_4) & P_4(\xi_4, \eta_4) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{Bmatrix}$$

qu'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \{X_n\} = [P_n]\{a\} \\ \{R_n\} = [P_n]\{b\} \end{cases} \quad (\text{III-18})$$

A partir de l'équation (III-18) on déduit :

$$\begin{cases} \{a\} = [P_n]^{-1}\{X_n\} \\ \{b\} = [P_n]^{-1}\{R_n\} \end{cases} \quad (\text{III-19})$$

En remplaçant (III-19) dans (III-17) on aura :

$$\begin{cases} x = \langle P \rangle [P_n]^{-1} \{X_n\} \\ r = \langle P \rangle [P_n]^{-1} \{R_n\} \end{cases} \quad (\text{III-20})$$

Les fonctions d'interpolation et de transformation géométrique sont finalement, définies comme suit :

$$\langle \bar{N} \rangle = \langle N \rangle = \langle P \rangle [P_n]^{-1} \quad (\text{III-21})$$

Du moment que $[P_n]^{-1}$ ne dépend que des coordonnées nodales de l'élément de référence, les fonctions $\langle N \rangle$ ne sont déterminées qu'une seule fois pour l'ensemble des éléments réels possédant le même élément de référence.

On définit également :

$$\begin{cases} \langle \frac{\partial N}{\partial \xi} \rangle = \langle \frac{\partial P}{\partial \xi} \rangle [P]^{-1} \\ \langle \frac{\partial N}{\partial \eta} \rangle = \langle \frac{\partial P}{\partial \eta} \rangle [P]^{-1} \end{cases} \quad (\text{III-22})$$

Les tableaux [III-1] et [III-2] présentent un récapitulatif des fonctions d'interpolations et leurs dérivées respectivement pour un élément de référence quadrilatérale à quatre et à neuf nœuds.

N	$\frac{\partial N}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N}{\partial \eta}$
$(1 - \xi)(1 - \eta)/4$	$(-1 + \eta)/4$	$(-1 + \xi)/4$
$(1 + \xi)(1 - \eta)/4$	$(1 - \eta)/4$	$(-1 - \xi)/4$
$(1 + \xi)(1 + \eta)/4$	$(1 + \eta)/4$	$(1 + \xi)/4$
$(1 - \xi)(1 + \eta)/4$	$(-1 - \eta)/4$	$(1 - \xi)/4$

Tableau III-1 : Fonctions d'interpolations et leurs dérivées pour un élément de référence quadrilatérale à quatre nœuds.

N	$\frac{\partial N}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N}{\partial \eta}$
$(1 - \xi)(1 - \eta)\xi\eta/4$	$(1 - 2\xi)(1 - \eta)\eta/4$	$(1 - \xi)(1 - 2\eta)\xi/4$
$-(1 - \xi^2)(1 - \eta)\eta/2$	$(1 - \eta)\xi\eta$	$-(1 - \xi^2)(1 - 2\eta)/2$
$-(1 + \xi)(1 - \eta)\xi\eta/4$	$-(1 + 2\xi)(1 - \eta)\eta/4$	$-(1 + \xi)(1 - 2\eta)\xi/4$
$(1 + \xi)(1 - \eta^2)\xi/2$	$(1 + 2\xi)(1 - \eta^2)/2$	$-(1 + \xi)\xi\eta$
$(1 + \xi)(1 + \eta)\xi\eta/4$	$(1 + 2\xi)(1 + \eta)\eta/4$	$(1 + \xi)(1 + 2\eta)\xi/4$
$(1 - \xi^2)(1 + \eta)\eta/2$	$-(1 + \eta)\xi\eta$	$(1 - \xi^2)(1 + 2\eta)/2$
$-(1 - \xi)(1 + \eta)\xi\eta/4$	$-(1 - 2\xi)(1 + \eta)\eta/4$	$-(1 - \xi)(1 + 2\eta)\xi/4$
$-(1 - \xi)(1 - \eta^2)\xi/2$	$-(1 - 2\xi)(1 - \eta^2)/2$	$(1 - \xi)\xi\eta$
$(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$	$-2(1 - \eta^2)\xi$	$-2(1 - \xi^2)\eta$

Tableau III-2 : Fonctions d'interpolations et leurs dérivées pour un élément de référence quadrilatérale à neuf nœuds.

III.2.3.3 Positionnement des variables (u , v , p , T) sur un élément :

Dans ce travail, on a considéré pour l'ensemble des problèmes analysés, le positionnement suivant des variables u , v , p et T sur un élément quadrilatéral à 9 nœuds :

- Les vitesses u , v et la température T sont situées sur l'ensemble des nœuds d'un élément ce qui leur assure une interpolation quadratique suivant toutes les directions.
- La pression P occupe les nœuds principaux, donc interpolée linéairement suivant toutes les directions.

La [figure \[III-3\]](#) schématise la répartition des variables sur un élément quadrilatère à 9 nœuds.

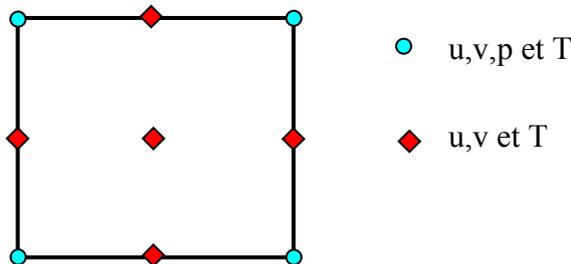


Figure III-3 : Positionnement des variables u , v , p et T sur les nœuds d'un élément quadrilatère biquadratique.

III.2.4 Formulation intégrale :

Les équations du mouvement, de continuité et de l'énergie constituent en association avec les conditions aux limites et l'équation constitutive, un système d'équations différentielles qui définit le comportement d'un modèle physique continu et qui peut être représenté de la manière suivante :

$$L(u) + f_v = 0 \text{ sur un domaine } V \quad (\text{III-23})$$

$$C(u) = f_s \text{ sur la frontière } S \text{ de } V \quad (\text{III-24})$$

où :

L et C sont des opérateurs différentielles ;

f_v sollicitations volumiques ;

f_s sollicitations surfaciques ;

u variable qui peut désigner la vitesse u , la vitesse v , la pression P ou la température θ .

Toute variable u dépendante de (x, r) aboutit lors de son introduction dans l'équation (III-23) à la relation suivante :

$$L(u) + f_v = R(u)$$

$R(u)$ est un résidu qui s'annule lorsque u est une solution de l'équation (III-23).

La méthode des résidus pondérés consiste donc, à trouver des fonctions $u(x, r)$ qui annulent la forme intégrale :

$$W(u) = \int_v \langle \psi \rangle \{ R(u) \} dv = \int_v \langle \psi \rangle \{ L(u) + f_v \} dv = 0 \quad (\text{III-25})$$

Pour toute fonction de pondération ψ appartenant à un ensemble de fonctions E_ψ , une solution u qui vérifie les équations (III-23) et (III-24) vérifie également la relation (III-25).

La méthode des résidus pondérés permet alors, le passage d'une formulation aux dérivées partielles à des formulations intégrales différentes suivant la fonction de pondération utilisée. Parmi ces formulations en cite :

III.2.4.1 Collocation par points :

La fonction de pondération en un point x du domaine V est la distribution de Dirac ($\delta(x_i)$) en ce point. La forme intégrale s'écrit alors :

$$W = \int_v \delta(x_i) R(x, u) dv = R(x_i, u) = 0$$

D'où :

$$W_i(a) = (L(u(x, a_1, \dots, a_n)) + f_v)_{x=x_i} \quad i = 1, \dots, n$$

En considérant l'approximation (III-14) de u , on aura :

$$W_i(a) = (\langle L(P) \rangle \{ a \} + f_v)_{x=x_i} = 0$$

Cette formulation nécessite un nombre de points de collocation égale au nombre de a_i (coefficients d'approximation), dont la position influe sur l'exactitude de la solution. La méthode en question est peut utilisée vu la difficulté à la mettre en œuvre avec une approximation par éléments finis, malgré l'avantage qu'elle offre en évitant l'intégration sur le volume V .

III.2.4.2 Collocation par sous- domaines :

Cette méthode consiste à subdiviser le domaine V en un nombre de sous- domaines égale au nombre des paramètres a_i , et définir la fonction de pondération pour chaque sous- domaine comme suit :

$$\psi_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in v^i \\ 0 & \text{si } x \notin v^i \end{cases}$$

La forme intégrale s'écrit alors :

$$W_i(a) = \int_v (\langle L(P) \rangle \{a\} + f_v) dv = 0$$

Cette formulation est peu utilisée en raison de la difficulté du choix des sous- domaines.

III.2.4.3 Méthode des moindres carrés :

La méthode des moindres carrés consiste à déterminer la valeur des paramètres d'approximation a_i d'une façon à minimiser le carré de résidu (R) sur le domaine V .

$$\Pi_m = \int_v R \cdot R dv \rightarrow \min$$

où :

$$R = L(u) + f_v = \langle L(P) \rangle \{a\} + f_v$$

Cette méthode est également peu utilisée, car elle ne permet pas l'intégration par parties, ce qui impose des conditions plus strictes sur l'approximation de u .

III.2.4.4 Méthode de Galerkin :

Pour ce cas, les fonctions de pondérations sont constituées par l'ensemble des variations δu des fonctions u :

$$\psi = \delta u = \langle P \rangle \{\delta a\} \quad (\text{III-26})$$

où $\{\delta a\}$ sont les variations des paramètres d'approximation $\{a\}$. La forme intégrale s'écrit alors :

$$W = \int_v \delta u(L(u) + f_v) dv = 0 \quad (\text{III-27})$$

En remplaçant l'expression (III-26) dans (III-27) on aura :

$$W = \langle \delta a \rangle \int_v \{P\} (L(\langle P \rangle \{a\}) + f_v) dv = 0 \quad (\text{III-28})$$

Ce qui est équivalent aux n équations algébriques :

$$\begin{cases} W_1(a) = \int_v P_1(\langle L(P) \rangle \{a\} + f_v) dv = 0 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ W_n(a) = \int_v P_n(\langle L(P) \rangle \{a\} + f_v) dv = 0 \end{cases} \quad (\text{III-29})$$

L'utilisation d'une intégration par partie, permet la réduction du degré de l'opérateur dérivée L . Le système (III-29) s'écrira alors sous la forme :

$$\begin{cases} W_1(a) = \int_v L_1(P_1)(\langle L_2(P) \rangle \{a\}) dv - \int_v P_1 f_v dv - \int_s P_1 f_s ds = 0 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ W_n(a) = \int_v L_1(P_n)(\langle L_2(P) \rangle \{a\}) dv - \int_v P_n f_v dv - \int_s P_n f_s ds = 0 \end{cases} \quad (\text{III-30})$$

où S représente le contour du domaine V .

La méthode de Galerkin sous cette dernière forme est la formulation la plus utilisée, car elle permet l'utilisation des fonctions $\langle P \rangle$ plus simples que les autres méthodes introduites. Dans notre travail, on a considéré la méthode des résidus pondérés formulation Galerkin.

III.2.5 Présentation matricielle de la méthode des éléments finis :

Après la subdivision du domaine physique V en éléments V^e , et la transformation du système d'équations aux dérivées partielles en une formulation intégrale par la méthode des résidus

pondérés, la méthode des éléments finis consiste à discrétiser cette forme intégrale en utilisant une approximation par « éléments finis » des variables u .

Si on note W^e comme forme intégrale élémentaire propre à l'élément V^e , la forme intégrale globale s'écrit alors :

$$W = \sum_{e=1}^{nel} W^e = \sum_{e=1}^{nel} \int_v \delta u^e (L(u^e) + f_v) dv = 0 \quad (\text{III-31})$$

III.2.5.1 Forme intégrale élémentaire discrétisée :

En considérant une approximation par élément finis de u et δu sur chaque élément V^e :

$$\begin{cases} u^e = \langle N \rangle \{u_n^e\} \\ \delta u^e = \langle N \rangle \{\delta u_n^e\} \end{cases} \quad (\text{III-32})$$

W^e aura donc la forme suivante :

$$W^e = \langle \delta u_n^e \rangle \left(\int_{v^e} \{N\} L(\langle N \rangle) dv \{u_n^e\} + \int_{v^e} \{N\} f_v dv \right) = 0 \quad (\text{III-33})$$

L'intégration par partie de l'expression (III-33) permet la réduction au maximum de l'ordre des dérivées intervenantes. Cependant, on aura l'apparition des dérivées de (δu) et des intégrales de contour. W^e s'écrit alors sous la forme matricielle suivante :

$$W^e = \int_{v^e} (\langle \delta(\partial u^e) \rangle [D] \{ \partial u^e \} - \delta u^e f_v) dv - \int_{s^e} \delta u^e f_s ds = 0 \quad (\text{III-34})$$

où :

$$\begin{aligned} \langle \partial u^e \rangle &= \langle u^e \quad \frac{\partial u^e}{\partial x} \quad \dots \quad \frac{\partial^2 u^e}{\partial x^2} \quad \dots \rangle \\ \langle \delta(\partial u^e) \rangle &= \langle \delta u^e \quad \delta \left(\frac{\partial u^e}{\partial x} \right) \quad \dots \quad \delta \left(\frac{\partial^2 u^e}{\partial x^2} \right) \quad \dots \rangle \end{aligned}$$

$[D]$ est une matrice indépendante de u^e et de ces dérivées pour les opérateur L linéaire, et inversement ;

f_v, f_s : Sollicitation de volume et de surface ;

v^e, s^e : Domaine et contour d'un élément.

Compte tenu de l'approximation sur l'élément V^e , on définit les expressions de ∂u et $\delta(\partial u)$ comme suit :

$$\begin{aligned} u^e &= \langle N \rangle \{u_n^e\} \Rightarrow \delta u^e = \langle N \rangle \{\delta u_n^e\} \\ \frac{\partial u^e}{\partial x} &= \langle \frac{\partial N}{\partial x} \rangle \{u_n^e\} \Rightarrow \delta \left(\frac{\partial u^e}{\partial x} \right) = \langle \frac{\partial N}{\partial x} \rangle \{\delta u_n^e\} \end{aligned}$$

On écrit alors :

$$\{\partial u^e\} = \begin{Bmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N \rangle \\ \langle \frac{\partial N}{\partial x} \rangle \\ \vdots \end{bmatrix} \{u_n^e\} = [B] \{u_n^e\}$$

et

$$\{\delta(\partial u^e)\} = \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N \rangle \\ \langle \frac{\partial N}{\partial x} \rangle \\ \vdots \end{bmatrix} \{\delta u_n^e\} = [B] \{\delta u_n^e\}$$

En remplaçant (III-34) dans (III-33) on aura :

$$W^e = \langle \delta u_n^e \rangle \left(\int_{v^e} [B]^T [D] [B] dv \{u_n^e\} - \int_{v^e} \{N\} f_v dv - \int_{s^e} \{N\} f_s ds \right) = 0 \quad (\text{III-35})$$

En posant :

$$[k] = \int_{v^e} [B]^T [D] [B] dv \quad (\text{Matrice rigidité élémentaire}) ;$$

$$\{f\} = \int_{v^e} \{N\} f_v dv + \int_{s^e} \{N\} f_s ds \quad (\text{Vecteur sollicitation élémentaire}).$$

L'équation (III-35) s'écrit :

$$W^e = \langle \delta u_n^e \rangle ([k] \{u_n^e\} - \{f\}) \quad (\text{III-36})$$

III.2.5.2 Forme intégrale élémentaire discrétisée sur un élément de référence:

La formulation intégrale élémentaire W^e est rapportée à l'élément de référence en exprimant les opérateurs dérivés, l'élément de volume infinitésimal dv et l'élément de contour ds en fonction des coordonnées de l'espace de référence.

Pour un élément de référence quadrilatéral, on a :

$$[B] = \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \left\langle \frac{\partial N}{\partial r} \right\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \eta} & \frac{\partial \eta}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial N}{\partial \xi} \right\rangle \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \left\langle \frac{\partial N}{\partial \eta} \right\rangle \end{bmatrix} \quad (\text{III-37})$$

ou bien sous la forme simplifiée :

$$[B_x] = [Q][B_\xi] \quad (\text{III-38})$$

La détermination de $[Q]$ sous cette forme présente des difficultés relatives à l'expression de la transformation géométrique τ^e , qui souvent n'offre pas la possibilité de déterminer la transformation inverse $(\tau^e)^{-1}$. Pour y remédier, on a :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial r} \end{Bmatrix}$$

Qu'on écrit sous la forme :

$$\{\partial_\xi\} = [J]\{\partial_x\}$$

d'où :

$$\{\partial_x\} = [J]^{-1}\{\partial_\xi\} \quad (\text{III-39})$$

De (III-38) et (III-39) on déduit :

$$[Q] = [J]^{-1}$$

La formulation intégrale élémentaire sur un élément de référence quadrilatéral, s'écrira alors comme suit :

$$W^e = \langle \delta u_n^e \rangle ([k] \{u_n^e\} - \{f\}) = 0 \quad (\text{III-40})$$

avec :

$$[k] = \int_{v^r} [B_\xi]^T [Q]^T [D] [Q] [B_\xi] \det(J) d\xi d\eta$$

$$\{f\} = \int_{v^r} \{N\} f_v \det(J) d\xi d\eta + \int_{\Gamma^r} \{N\} f_s J_s d\Gamma$$

où : $J_s = \Gamma^e / \Gamma^r$

III.2.6 Intégration de la forme intégrale élémentaire :

Plusieurs méthodes numériques permettent l'intégration de la forme intégrale W^e sur un élément de référence. Dans ce travail, on a considéré une méthode dite quadrature de Gauss (méthode produit), qui est définie comme suit :

L'intégration d'une fonction $y(\xi, \eta)$ définie en tout points d'un élément de référence quadrilatéral V^r et sa frontière Γ^r , se résume à :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} y(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i w_j y(\xi_i, \eta_j) \quad (\text{III-41})$$

où : r est le nombre de points d'intégration suivant la direction ξ (ou η) ;

(ξ, η) sont les coordonnées des points d'intégration et w les poids d'intégration.

Cette méthode permet l'intégration exacte des polynômes en $\xi^i \eta^j$ tel que :

$$\begin{cases} 0 \leq i \leq 2r - 1 \\ 0 \leq j \leq 2r - 1 \end{cases}$$

Le [tableau \[III-3\]](#) fournit les abscisses et les poids des points d'intégration pour $r = 1, 2, 3$ et 4 . D_{max} dénote le degré maximale des polynômes intégrés exactement.

r	ξ et η	w	D_{max}
1	0	2	1
2	$\pm 1/\sqrt{3}$	1	3
3	0	8/9	5
	$\pm\sqrt{3/5}$	5/9	
4	$\pm\sqrt{(3 - 2\sqrt{6/5})/7}$	$1/2 + 1/(6\sqrt{6/5})$	7
	$\pm\sqrt{(3 + 2\sqrt{6/5})/7}$	$1/2 - 1/(6\sqrt{6/5})$	

Tableau III-3 : Coordonnées et poids des points d'intégration considérés sur un élément de référence.

III.2.7 Forme intégrale globale discrétisée :

La forme intégrale globale W est formée par l'addition des formes élémentaires W^e après expansion.

$$W = \sum_{e=1}^{nel} W^e$$

Si on considère n_d et n_D les nombres de variables nodales respectivement de V^e et V , on aura :

- $\langle \delta u_n^e \rangle, \{ \delta u_n^e \}$ et $\{ f \}$ des vecteurs de dimension n_d ;
- $[k]$ une matrice de dimensions $(n_d \times n_d)$.

Leurs expansion revient alors, à les ramener respectivement à des dimensions n_D et $(n_D \times n_D)$ par l'insertion des lignes et des colonnes de zéros, tout en s'assurant d'avoir attribué à chaque élément des vecteurs et matrice élémentaires un emplacement adéquat dans les vecteurs et la matrice étendus correspondants.

On aura alors :

$$W = \langle \delta U_n \rangle ([K] \{ U_n \} - \{ F \}) = 0 \quad (\text{III-42})$$

où : W est la forme intégrale globale ;

$\langle \delta U_n \rangle$: vecteur global de variation des variables nodales ;

$\{ U_n \}$: vecteur global des variables nodales ;

$[K]$: matrice rigidité globale ;

$\{F\}$: vecteur sollicitation global.

III.2.8 Forme intégrale globale discrétisée pour les équations de mouvement, de continuité et de l'énergie :

La formulation intégrale globale discrétisée du système d'équations formé par l'équation de continuité et les équations de mouvement, est représentée sous une forme matricielle comme suit :

$$[K]\{U_n\} = \{F\} \quad (\text{III-43})$$

où :

$$\{U_n\} = \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ p_j \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_u \\ F_v \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La matrice $[K]$ est organisée de la manière suivante :

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uv} & C_u \\ K_{vu} & K_{vv} & C_v \\ C_u^T & C_v^T & 0 \end{bmatrix}$$

K_{uu} , K_{uv} , K_{vu} , K_{vv} , C_u , C_v , F_u et F_v sont déterminées par l'addition après expansion des matrices et vecteurs élémentaires correspondants. Ces derniers s'expriment comme suit :

$$[k_{uu}] = \int_{\Omega^e} \left[\left(N_i N_k u_k \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_i N_k v_k \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) + \eta \left(2 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} - \frac{\xi}{r} N_i \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) \right] d\Omega$$

$$[k_{uv}] = \int_{\Omega^e} \left[\eta \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) - \eta \left(\frac{\xi}{r} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) \right] d\Omega$$

$$[k_{vu}] = \int_{\Omega^e} \left(\eta \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) d\Omega$$

$$[k_{vv}] = \int_{\Omega^e} \left[\left(N_i N_k u_k \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_i N_k v_k \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) + \eta \left(2 \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) + \eta \frac{2\xi}{r} \left(\frac{1}{r} N_i N_j - N_i \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) \right] d\Omega$$

$$[C_u] = - \int_{\Omega^e} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} M_j \right) d\Omega$$

$$[C_v] = - \int_{\Omega^e} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} M_j \right) d\Omega$$

$$\{f_u\} = \int_{\Omega^e} N_i f_x d\Omega$$

$$\{f_v\} = \int_{\Omega^e} N_i f_r d\Omega$$

On définit par N les fonctions d'interpolation construites à base d'un élément quadrilatéral biquadratique (neuf nœuds), et par M celles propres à un élément quadrilatéral bilinéaire (quatre nœuds).

Pour le cas de l'équation d'énergie, on aura :

$$[K][T] = \{F\} \quad (\text{III-44})$$

Où

$$[K] = \sum_{e=1}^{nel} [k]_{\text{étendue}}^e \quad \text{et} \quad \{F\} = \sum_{e=1}^{nel} \{f\}_{\text{étendu}}^e$$

avec :

$$[k]^e = \int_{\Omega^e} \left[\left(N_i N_k u_k \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_i N_k u_k \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) + K \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} - \frac{\xi}{r} N_i \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) \right] d\Omega$$

$$\{f_v\}^e = \int_{\Omega^e} N_i Q d\Omega + \int_{\Gamma^e} N_i q d\Gamma$$

Où :

Q : représente une source de chaleur se trouvant dans le domaine Ω^e ;

q : flux de chaleur au niveau du contour Γ^e .

III.2.9 Méthode de résolution :

La résolution du système d'équations algébriques formulé suite à l'application de la méthode des résidus pondérés, constitue la dernière étape de la méthode des éléments finis après introductions des conditions aux limites.

III.2.9.1 Introduction des conditions aux limites :

Les conditions aux limites peuvent être introduites par plusieurs manières. Dans ce travail, on a adopté la méthode du terme unité sur la diagonale qui consiste à modifier le vecteur $\{F\}$ et la matrice $[K]$ de la façon suivante :

Si \bar{u} est la condition au limite imposée à la variable u_i , les modifications se résume à :

$$\begin{aligned} F_j &= F_j - K_{ji}\bar{u} & j &= 1, 2, \dots, n & j &\neq i \\ F_i &= \bar{u} \\ K_{ij} &= K_{ji} = 0 & j &= 1, 2, \dots, n & j &\neq i \\ K_{ii} &= 1 \end{aligned}$$

Qu'on schématise comme suit :

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & \dots & K_{1,i-1} & 0 & K_{1,i+1} & \dots & K_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{i-1,1} & \dots & K_{i-1,i-1} & 0 & K_{i-1,i+1} & \dots & K_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ K_{i+1,1} & \dots & K_{i+1,i-1} & 0 & K_{i+1,i+1} & \dots & K_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n,1} & \dots & K_{n,i-1} & 0 & K_{n,i+1} & \dots & K_{n,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 - K_{1,i}\bar{u} \\ \vdots \\ F_{i-1} - K_{i-1,i}\bar{u} \\ \bar{u} \\ F_{i+1} - K_{i+1,i}\bar{u} \\ \vdots \\ F_n - K_{n,i}\bar{u} \end{Bmatrix}$$

III.2.9.2 Résolution du système d'équations algébriques :

La méthode de résolution d'un système d'équations algébriques est dictée par la forme que présente ce dernier. Dans ce travail on a considéré la méthode d'élimination de Gauss pour le système linéaire (III-43) et de substitution pour le système non linéaire (III-44).

III.2.9.2.1 Méthode d'élimination de Gauss :

Cette méthode fréquemment utilisé pour la résolution des problèmes linéaires, est formulée en deux étapes :

• **Triangularisation** : qui consiste à transformer le système d'équations algébriques (III-44) en un système triangulaire supérieur :

$$[K]\{U\} = \{F\} \Rightarrow [S]\{U\} = \{F'\}$$

tel que :

$$\begin{bmatrix} S_{1,1} & \dots & S_{1,i} & \dots & S_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & S_{i,i} & \dots & S_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & S_{n,n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_i \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$$

• **Résolution d'un système triangulaire supérieur** : la résolution consiste à déterminer en premier lieu la valeur de la dernière variable du vecteur $\{U\}$ tel que :

$$u_n = \frac{F'_n}{S_{n,n}}$$

en suite, à calculer successivement $u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_1$ à partir de la relation suivante :

$$u_i = \frac{F'_i - \sum_{j=i+1}^n S_{i,j}u_j}{S_{i,i}}$$

III.2.9.2.2 Méthode de substitution :

La méthode de substitution est l'une des méthodes les plus utilisées pour la résolution des systèmes d'équations algébriques non linéaires.

En considérant le système (III-43) réécrit sous la forme :

$$[K(U)]\{U\} = \{F\}$$

La méthode de substitution se résume à :

1. supposer une solution initiale $\{U^0\}$;
2. déterminer le résidu défini par :

$$\{F\} - [K(U^0)]\{U^0\} = \{R\}$$

3. résoudre le problème linéaire :

$$[K(U^0)]\{\Delta U\} = \{R\}$$

4. calculer $\{U\}$ tel que :

$$\{U\} = \{U^0\} + \{\Delta U\}$$

5. calculer la norme des moindres carrées définit par :

$$\|N\| = \sqrt{\langle \Delta U \rangle \{\Delta U\}}$$

6. tester la convergence ($\|N\| \leq \text{précision souhaitée}$). Si c'est réalisé, $\{U\}$ est la solution recherchée, si non refaire à partir de (2) en posant :

$$\{U^0\} = \{U\}$$

III.3 Calcul de la fonction de courant :

La fonction de courant est calculée après détermination du champ de vitesse, en considérant les relations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{1}{r^\xi} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = u \\ \frac{1}{r^\xi} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -v \end{cases} \quad (\text{III-45})$$

En dérivant la première équation du système (III-45) par rapport à r , la seconde par rapport à x et après leurs addition, on aura :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\xi}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} = -r^\xi \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -r^\xi \omega \quad (\text{III-46})$$

où ω est appelée vecteur tourbillon.

La détermination des lignes de courant se résume donc à la résolution de l'équation elliptique (III-46) (équation de poisson).

III.4 Calcul du nombre de Nusselt :

Le nombre de Nusselt traduit l'intensité du transfert thermique entre une paroi solide et un fluide adjacent.

En considérant q la densité de flux thermique échangé entre le fluide et la paroi, celui-ci est égale d'une part à :

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial r} \quad (\text{III-47})$$

et d'une autre part à :

$$q = h(T_p - T_m) \quad (\text{III-48})$$

où: h est le coefficient de transfert convectif de chaleur ;

T_p est la température de la paroi ;

T_m est la température moyenne du fluide déterminée comme suit :

$$T_m = \frac{1}{\bar{u}} \int_0^H u(y)T(y)dy$$

tel que : H est une longueur caractéristique du processus physique ;

\bar{u} est la vitesse moyenne suivant une section d'écoulement.

A partir de (III-47) et (III-48), on aura :

$$Nu = \frac{hH}{k} = - \frac{H}{T_p - T_m} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{y=H} \quad (\text{III-49})$$

En tenant compte des variables adimensionnelles définies en [III-1-3], Nu s'écrira alors :

$$\begin{cases} Nu = \frac{1}{\theta_m} \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} & (\text{Température imposée}) \\ Nu = \frac{1}{\theta_p - \theta_m} & (\text{Flux imposé}) \end{cases} \quad (\text{III-50})$$

III.5 Validation du code de calcul :

Afin de valider notre code de calcul dans lequel nous avons utilisé des éléments quadrilatères à neuf nœuds, nous avons procédé à l'étude de deux Benchmarks, à savoir, l'écoulement stationnaire non-isotherme en régime laminaire d'un fluide Newtonien à travers une conduite cylindrique et entre deux plaques planes semi-infinies, ainsi que la convection naturelle de l'air confiné dans une cavité carrée chauffée différentiellement.

Pour le premier cas, nous avons comparé nos résultats avec ceux issus de la solution analytique du problème. Cette comparaison qui porte sur la vitesse longitudinale maximale et la valeur du nombre de Nusselt asymptotique est résumée par le [tableau \[III-4\]](#) pour un écoulement axisymétrique et plan. Le faible écart ($< 3\%$) entre les valeurs obtenues analytiquement et celles issues de la simulation atteste du bon fonctionnement de notre code pour les problèmes régis par un gradient de pression imposé.

		Conduite cylindrique	Plaques planes
U_{max}	*	1.9985	1.4995
	○	2.0000	1.5000
	Ec (%)	0.075	0.03
Nu_{asym} Température imposée	*	3.6713	7.551
	○	3.66	7.54
	Ec (%)	0.3	0.15
Nu_{asym} Flux imposé	*	4.234	8.234
		4.364	8.235
	Ec (%)	2.98	0.01
fRe	*	15.8933	24.016
	○	16	24
	Ec (%)	0.67	0.07

Tableau III-4 : Comparaison des valeurs numériques des différents paramètres du problème. (*)- Résultats de simulations, (○)- Résultats analytiques.

Pour le deuxième cas, nous avons considéré la convection naturelle de l'air confiné dans une cavité carrée de dimension H . Les parois horizontales de cette cavité sont considérées adiabatiques tandis que les parois verticales gauche et droite sont soumises à des températures différentes, températures chaude T_c et température froide T_f respectivement (Figure...).

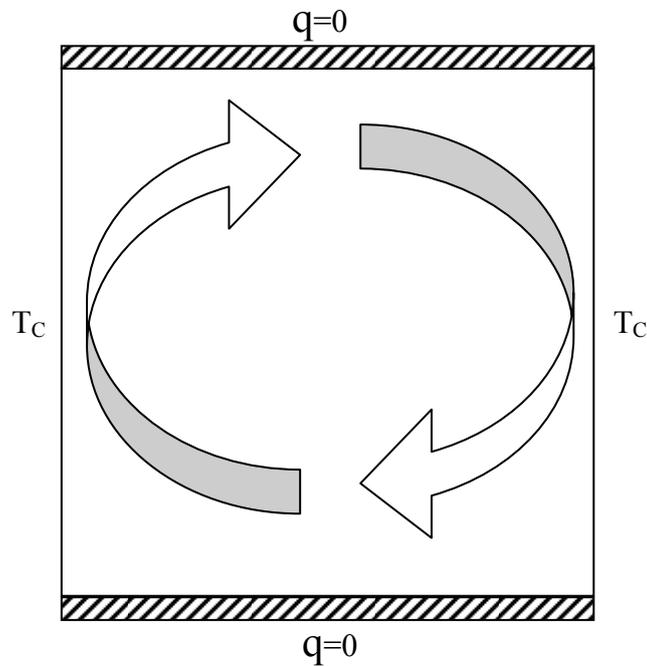


Figure III-4 : représentation géométrique d'une cavité carrée soumise à un gradient de température pariétal.

Ce problème test est gouverné par le système d'équation suivant, qui comprend l'approximation de Boussinesq pour la modélisation de l'effet de la température sur le champ de vitesse.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + Pr \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + Pr \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + RaPr\theta$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

Où Ra est le nombre de Rayleigh qui représente le rapport de l'énergie transférée par convection naturelle ou libre et celle transférée par conduction. Ce nombre est donné par la relation suivante :

$$Ra = \frac{\rho g \beta \Delta T H^3}{\mu K}$$

Après une série de simulations pour différentes valeurs de Ra , nous avons comparé nos résultats avec ceux obtenus par De Vahl Davis [19] qui a traité le même problème en adoptant la méthode des différences finies avec la formulation vorticité-courant.

Les figures [III-5] et [III-6], qui représentent respectivement les lignes isothermes et la fonction courant déterminées par notre code de calcul ainsi que celles obtenues par De Vahl Davis [19], montrent la bonne concordance des deux résultats. Cette constatation nous a permis donc d'attester la validité de notre code de calcul. Le tableau [III-5] constitue une comparaison entre nos valeurs numériques de différents paramètres du problème et celles présentées dans les références [19] et [20].

		$Ra = 10^3$	$Ra = 10^4$	$Ra = 10^5$
V_{max} (sur l'axe $y = 0.5$)	*	3.6955	19.6245	68.6343
	○	3.679	19.51	68.22
	□	3.73	19.9	70.0
U_{max} (sur l'axe $x = 0.5$)	*	3.6486	16.1681	34.7115
	○	3.634	16.2	34.81
	□	3.68	16.1	34.0
Nu_{max} (paroi chaude)	*	1.5071	3.5362	7.8052
	○	1.50	3.53	7.71
	□	1.47	3.47	7.71
Nu_{max} (paroi chaude)	*	0.6916	0.5863	0.7333
	○	0.692	0.586	0.729
	□	0.623	0.497	0.614
Nu_{moy} (paroi chaude)	*	1.1186	2.2489	4.5584
	○	1.12	2.243	4.52
	□	1.074	2.084	4.3

Tableau III-5 : Comparaison des valeurs numériques de différents paramètres du problème . (*)- présente étude, (○)- De Vahl Davis [19] , (□)- Manzari [20].

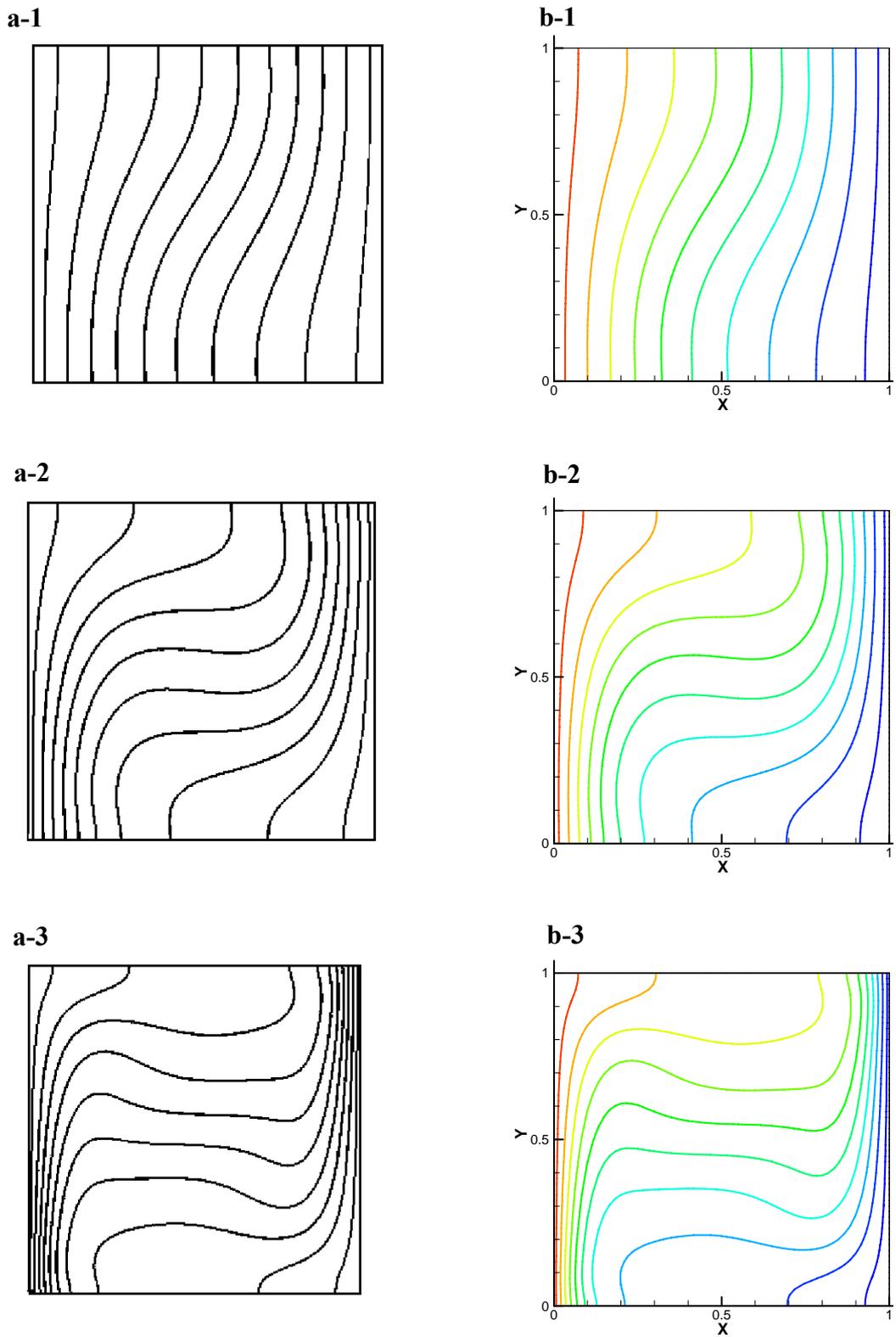


Figure III-5 : lignes isothermes (de 0.05 à 0.95 avec un pas de 0.1),
 (1) : $Ra=10^3$, (2) : $Ra=10^4$, (3) : $Ra=10^5$
 (a) : De Vahl Davis, (b) : Présente étude.

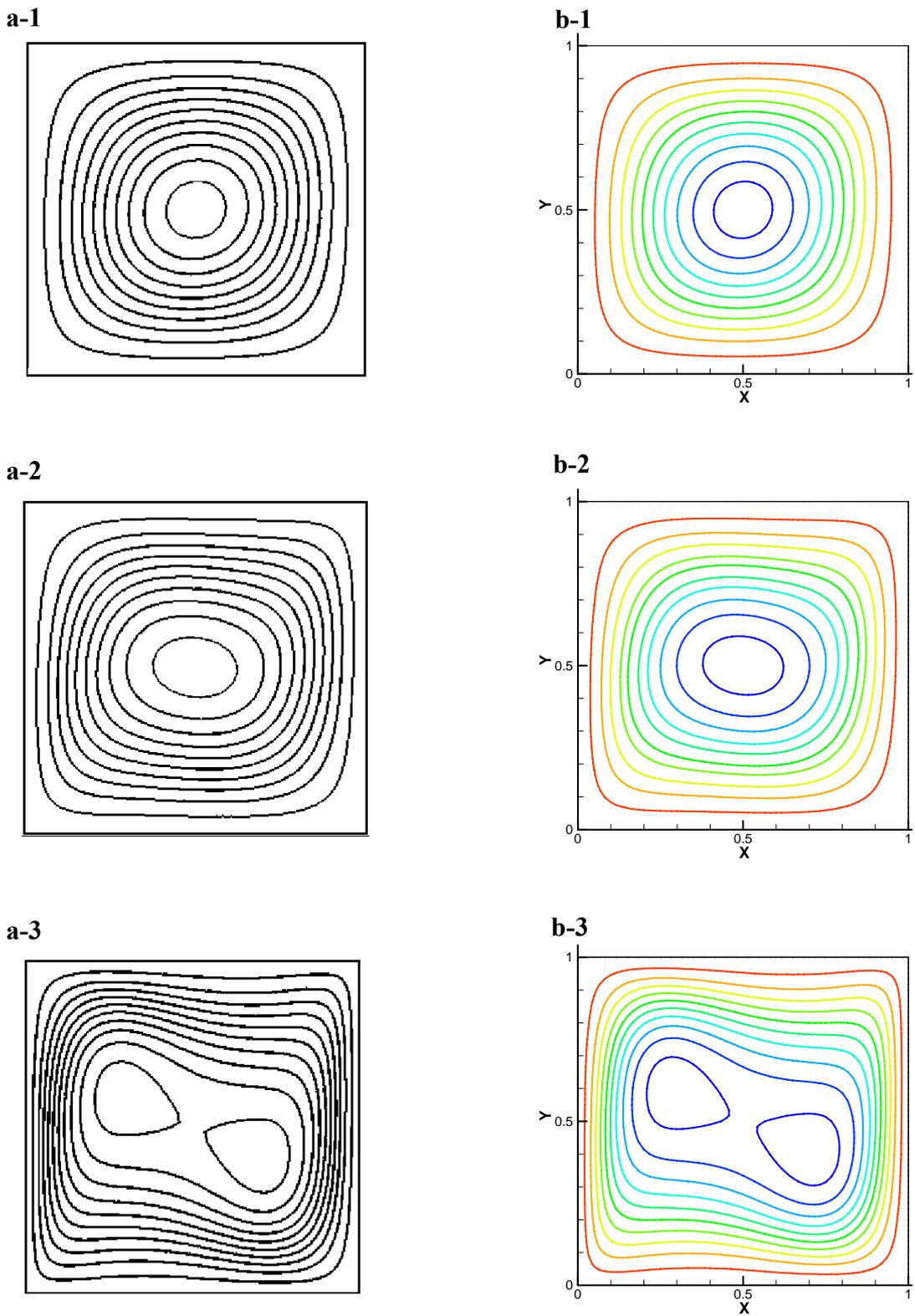


Figure III-6 : configuration des lignes courants pour $Ra=10^3$ (1), $Ra=10^4$ (2) et $Ra=10^5$ (3).

(a) : De Vahl Davis, (b) : Présente étude.

Nomenclature

a	Paramètre d'une fonction approchée.
Bn	Nombre de Bingham.
Br	Nombre de Brinkman.
\bar{D}	Tenseur déformation.
H	Longueur caractéristique du domaine physique (m). (<i>cas où $\xi = 0$</i>)
h	Coefficient de transfert de chaleur convectif (W/m^2k)
K	Diffusivité thermique (m^2/s).
M	Fonctions d'interpolation d'un élément quadrilatéral à 4 nœuds.
N	Fonctions d'interpolation d'un élément quadrilatéral à 9 nœuds.
Nu	Nombre de Nusselt.
\bar{N}	Fonctions de transformation géométrique.
p	Pression (Pa).
P	Base Polynomiales .
Pe	Nombre de Peclet.
q	Flux de chaleur (W/m^2).
Re	Nombre de Reynolds.
T	Température ($^{\circ}K$).
u	Vitesse longitudinale (m/s).
v	Vitesse transversale (m/s).
V	Volume.
x	Coordonnée longitudinale(m).
r	Coordonnée transversale(m).
R	Longueur caractéristique du domaine physique (m). (<i>cas où $\xi = 1$</i>)

Symboles Grecs

γ	Déformation.
$\dot{\gamma}$	Vitesse ou taux de déformation ($1/s$).
τ	Contrainte de cisaillement (Pa).
τ_0	Contrainte seuil de cisaillement (Pa) .
ρ	La densité (kg/m^3).

μ_p	Viscosité plastique (Pa.s).
η_{ap}	Viscosité apparente (Pa.s).
θ	Température adimensionnelle.
η	Viscosité dynamique (Pa.s).
Γ	Frontière du domaine physique.
Ψ	Fonction courant.
ω	Vorticité.

Indices

e	Entrée.
p	Parois.
m	Moyenne.
ex	Exact.

Exposants

e	Élément réel.
r	Élément de référence.

Références

- [1] **Barletta, A.**, 1997. Fully developed laminar forced convection in circular ducts for power-law fluids with viscous dissipation. *Int. J. Heat Transfer*, 40 (1) 15-26.
- [2] **Min, T., Yoo, J. Y.**, 1999. Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in a circular pipe with uniform wall heat flux, the Graetz problem extended. *ASME*, Vol. 121.
- [3] **Min, T., Yoo, J. Y., Choi, H. G., Choi, H.**, 1997b. Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in circular pipe –II. Numerical approach- Hydrodynamically developing flow and simultaneously developing flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40, 3689-3701.
- [4] **Papanastasiou, T. C.**, 1987. Flows of materials with yield. *Journal of Rheology*, 31, 385-404.
- [5] **Abdalis, S. S., Mitsoulis, E., Markatos, N. C.**, 1992. Entry and exit flows of Bingham fluids. *Journal of Rheology*, 36 (2), 389-407.
- [6] **Ellwood, K. R. J., Georgiou, G. C., Papanastasiou, T. C., Wilkes, J. O.**, 1991. Laminar jets of Bingham plastic liquids. *Journal of Rheology*, 34, 787-812.
- [7] **Forsythe, G.E., Wasow, W.R.**, 1960. Finite difference methods for partial differential equations. John Wiley and Sons, New York.
- [8] **Ozisik, M. N.**, 1994. Finite Difference Methods in Heat Transfer, CRC Press, Boca Raton, FL.
- [9] **Richtmyer, R.D., Morton, K.W.**, 1967. Difference methods for initial value problems. Wiley, New York.

-
- [10] **Smith, G.D.**, 1985. Numerical solution of partial differential equations finite difference methods. 3rd edn, Clarendon Press, Oxford.
 - [11] **Strikwerda, J.C.**, 1983. Finite difference methods for the incompressible Navier-Stokes equations – A survey. MRC Tech. Summary Rept. 2584, Math. Res. Ctr., University of Wisconsin.
 - [12] **Patankar, S.V.**, 1980. Numerical heat transfer and fluid flow. McGraw-Hill, New York.
 - [13] **Versteeg, H.K., Malalasekera, W.**, 1996. An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method. Addison-Wesley.
 - [14] **Baker, A.J.**, 1983. Finite element computational fluid mechanics. McGraw-Hill, New York.
 - [15] **Chung, T.J.**, 1978. Finite element analysis in fluid dynamics. McGraw-Hill, New York.
 - [16] **Comini, G., Del Giudice, S., Nonino, C.**, 1994. Finite Element Analysis in Heat Transfer, Taylor & Francis, Washington, DC.
 - [17] **Girault, V., Raviart, P.-A.**, 1986. Finite element methods for Navier-stokes equations. Springer, Berlin.
 - [18] **Zienkiewicz, O.C.**, 1977. The finite element method, McGraw-Hill, New York.
 - [19] **De Vahl Davis, D.**, 1983. Natural convection of air in a square cavity: A benchmark solution, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 3, 249-264.
 - [20] **Mayne, D.A., Usmani, A. S., Crapper, M.**, 2000. h-adaptive finite element solution of high Rayleigh Number thermally driven cavity problem, int. j. Numer. Meth. Heat Fluid Flow, 10, 598-615.

Etablissement des régimes thermo-hydraulique des fluides Binghamiens à travers des conduits.

Chapitre IV

IV.1 Introduction :

L'écoulement laminaire non-isotherme d'un fluide à travers des conduits a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs vu son importance dans les différents secteurs de l'industrie et précisément dans le dimensionnement des installations thermiques.

Les premières études réalisées dans cet axe de recherche, furent celles effectuées par Graetz (1883-1885) où il a considéré le transfert de chaleur par convection forcée, associé à un écoulement laminaire et établi d'un fluide newtonien à travers une conduite circulaire, soumise à un chauffage pariétal par une température imposée. En négligeant l'effet de la dissipation visqueuse et la conduction axiale du fluide, Graetz a abouti à une formulation simplifiée de l'équation d'énergie, mais qui ne fut résolue qu'ultérieurement par W.Nusselt. Ce dernier a donc, parvenu à résoudre analytiquement le problème formulé suivant Graetz par une méthode de séparation de variable, et a réalisé par celle-ci, une grande avancée dans le domaine du thermique.

L'analyse de Graetz a été alors, le début d'une longue série d'investigations expérimentales, analytiques et numériques, traitant le problème sous des conditions moins restrictives, des géométries plus complexes et des fluides au comportement rhéologique complexe.

Pour les fluides newtoniens, Sellars et al [1] et Siegel et al [2] ont considéré le développement thermique d'un écoulement établi dans le cas d'un flux uniforme imposé aux parois, tout en négligeant l'effet de la dissipation visqueuse et la conduction axiale. L'effet de

cette dernière a été considéré par Hsu [3], où le problème a été résolu analytiquement par la méthode «de séparation des variables». Ultérieurement, Ou et Cheng [4] ont reconduit le même travail mais en tenant compte de la dissipation visqueuse. Kays et Grawford [5] ont montré que l'effet de cette dernière sur le champ thermique est important lors des écoulements à grande vitesse pour les fluides newtoniens. Tandis que pour les fluides non-newtoniens, Bird et al [6] rapportent que cet effet est également ressenti lors des écoulements à faibles vitesses, en raison des fortes viscosités et des forts gradients de vitesse qui les caractérisent.

Plusieurs travaux ont été orientés vers l'analyse de l'influence exercée par la dissipation visqueuse sur l'intensité du transfert thermique. Il a été montré que l'effet de celle-ci sur le champ de température au niveau de la zone d'entrée est plus significatif lors d'un établissement hydrodynamique et thermique simultané que lors d'un établissement thermique d'un écoulement développé [7,8]. En régime établi, il a été rapporté que la valeur de Nusselt établi, pour le cas d'un refroidissement par une température constante imposée aux parois, est de 9.6 en tenant compte de la dissipation visqueuse [9], alors que cette valeur est de 3.6568 en la négligeant [10].

La convection forcée des fluides Binghamiens dans des conduits a connu également plusieurs investigations numériques et expérimentales. Wissler et al. [11] et Blackwell [12] ont étudié le développement d'un régime thermique en considérant une température constante aux parois et en négligeant l'effet de la dissipation visqueuse ainsi que la conduction axiale du fluide. Johnston [13] a reconsidéré le problème en tenant compte de la conduction axiale. Récemment, Min et al ont étudié analytiquement [14] et numériquement [15] le même problème mais dans le cas d'un flux imposé aux parois, en incluant l'effet de la dissipation visqueuse et la conduction axiale. Ils ont montré que cette dernière peut être négligée lorsque la valeur de Peclet est supérieure à 1000, et que le seuil de contrainte n'a d'effets considérables sur le transfert thermique qu'en tenant compte de la dissipation visqueuse. Vradis et al. [16] ont traité le problème de développement simultané des champs hydrodynamique et thermique dans la région d'entrée pour le même fluide.

Une étude analytique a été réalisée, pour le cas de l'écoulement d'un fluide de Herschel-Bulkley, par Quaresma et al. [17]. En négligeant l'effet de la dissipation visqueuse et la conduction axiale du fluide, ces auteurs ont analysé l'influence de la contrainte seuil et

l'indice de consistance sur la structure hydrodynamique et thermique d'un écoulement à travers une conduite cylindrique et entre deux plaques planes semi-infinies. Récemment, Khatyr [18] et al. Et Aydin [19] Ont analysé l'effet de la dissipation visqueuse et de la contrainte seuil sur un régime établi du point de vu thermique et hydrodynamique. Nouar [20] a considéré l'écoulement d'un fluide de Bingham à seuil de contrainte dépendent de la température mais sans tenir compte de la dissipation visqueuse et de la conduction axiale du fluide.

Le recensement des travaux traitant les écoulements non-isothermes des fluides Binghamiens dans des conduits en situation de développement hydrodynamique et thermique simultanés montre qu'ils sont peu nombreux, et ceux qui tiennent compte en même temps de la dissipation visqueuse et de la conduction axiale du fluide sont pratiquement inexistant.

Dans la perspective d'étudier pour notre part, l'impact du comportement rhéologique d'une certaine classe de fluide sur la structure des écoulements à travers les conduits, ainsi que l'identification de l'évolution des principaux paramètres technologiques permettant aux ingénieurs de prendre en considération les spécificités de ces fluides dans le calcul et le désigne des installations et des procédés faisant appelle à ces fluides, nous aborderons dans ce chapitre l'écoulement d'un fluide viscoplastique (fluide de Bingham) entre deux plaques planes et à travers une conduite cylindrique. Cette étude est orientée vers l'analyse de l'influence exercée par l'inertie et le comportement rhéologique du fluide sur la structure hydrodynamique et thermique de l'écoulement. L'effet de la dissipation visqueuse sur l'évolution du champ thermique est également investi pour les deux cas, parois maintenues à une température constante et parois soumises à un flux de chaleur uniforme.

IV.2 Développement hydrodynamique et thermique de l'écoulement :

IV.2.1 Formulation du problème :

L'écoulement stationnaire, incompressible et laminaire d'un fluide de Bingham à travers des conduits est gouverné par un système d'équations adimensionnelles constituées par les lois de conservation et la loi de comportement citées dans le chapitre III.

Pour rappel, ξ est un paramètre qui prend la valeur 0 pour un écoulement entre deux plaques planes (écoulement plan) et 1 pour un écoulement à travers une conduite cylindrique (écoulement axisymétrique).

Ce système d'équations est sujet aux conditions aux limites adimensionnelles suivantes :

- Profil de vitesse et température uniforme à l'entrée :

$$u^* = 1, v^* = 0, \quad \theta = 0$$

- condition aux parois :

$$\text{Adhérence du liquide aux parois : } u^* = v^* = 0$$

$$\text{Température constante aux parois: } \theta = 1 \text{ ou densité de flux constante: } q = 1$$

- profil de vitesse et de température établi à la sortie:

$$\partial u^* / \partial x^* = v^* = 0, \quad \partial \theta / \partial x^* = 0$$

- condition de symétrie sur l'axe central du conduit:

$$\partial u^* / \partial r^* = v^* = 0, \quad \partial \theta / \partial r^* = 0$$

Les problèmes analysés sont gouvernés par un ensemble de nombres adimensionnels qui sont :

$$Bn = (\tau_0 R) / (\mu_p u_m) \quad [\text{Nombre de Bingham ou Contrainte seuil adimensionnelle}]$$

$$Pr = \mu_p / (\rho K) \quad [\text{Nombre de Prandtl}]$$

$$Re = (\rho u_m R) / \mu_p \quad [\text{Nombre de Reynolds}]$$

$$Pe = Pr Re = (u_m R) / K \quad [\text{Nombre de Peclet}]$$

$$Br = (\mu_p u_m^2) / (K(T_p - T_e)) \quad [\text{Nombre de Brinkman cas d'une température constante imposée aux parois solides}]$$

$$Br = (\mu_p u_m^2) / (qR) \quad [\text{Nombre de Brinkman cas d'un flux uniforme imposé aux parois solides}]$$

NB : Les désignations comportant un exposant sous forme d'étoile sont des grandeurs adimensionnelles. Dans ce qui suit, cet exposant est omis intentionnellement pour simplifier l'écriture des relations.

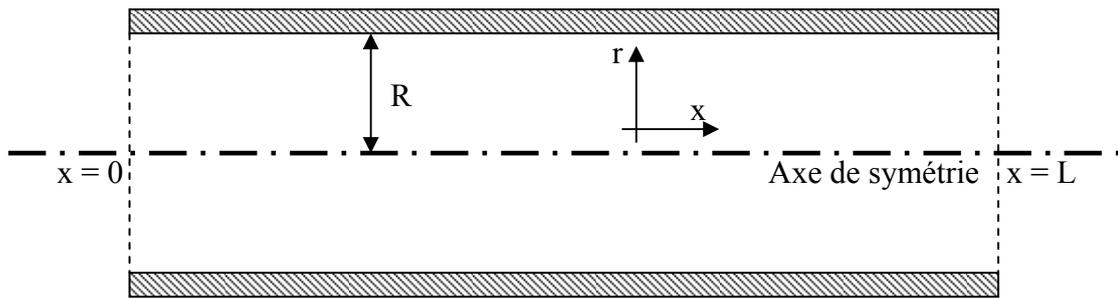


Figure [IV-1] Domaine physique de l'écoulement

Le domaine physique de l'écoulement est illustré par la [figure \[IV-1\]](#). Celui-ci présente un axe de symétrie le divisant en deux parties permettant ainsi la réduction du domaine de calcul à l'une d'elles. La longueur L de la géométrie est choisie suffisamment longue pour assurer un établissement hydrodynamique et thermique de l'écoulement à la sortie ($L = 40R$). Le calcul a été effectué en utilisant un maillage non-uniforme avec une concentration de mailles plus importante au niveau de la zone d'entrée et près des parois solides. Un test de dépendance des résultats de la dimension du maillage a permis l'adoption d'une combinaison de 20×120 éléments. Cette dernière présente un meilleur compromis entre la précision des résultats et l'effort de calcul requis. Une formulation mixte a été adoptée utilisant des éléments 9 nœuds avec une interpolation biquadratiques pour la vitesse et la température et une interpolation bilinéaire pour la pression.

Après la résolution du système d'équations prédéfini, le nombre de Nusselt local est déterminé selon l'équation (III – 50) pour quantifier l'intensité de l'échange thermique entre le fluide en mouvement et la paroi solide.

IV.2.2 Résultats et discussions :

IV.2.2.1 Régime hydrodynamique :

Cette section est consacrée à l'étude de l'influence exercée par l'inertie (Re) et la contrainte seuil (Bn) sur la structure hydrodynamique de l'écoulement constituée par le champ de vitesses et de pressions.

IV.2.2.1.1 Effet de la contrainte seuil sur le champ de vitesses :

La figure [IV-2] présente l'allure des profils de vitesse établis d'un écoulement plan (a) et axisymétrique (b) pour différentes valeurs de la contrainte seuil (Bn). A l'exception de la courbe représentative (référence) de $Bn = 0$, tous les profils présentent un aplatissement localisé au centre de la section d'écoulement et une évolution parabolique de la vitesse près de la paroi solide. La partie aplatie de ces profils délimite une zone dans la section d'écoulement occupée par une quantité du fluide se déplaçant à une même vitesse. Cette zone s'élargit et la vitesse maximale diminue avec l'accroissement de la contrainte seuil.

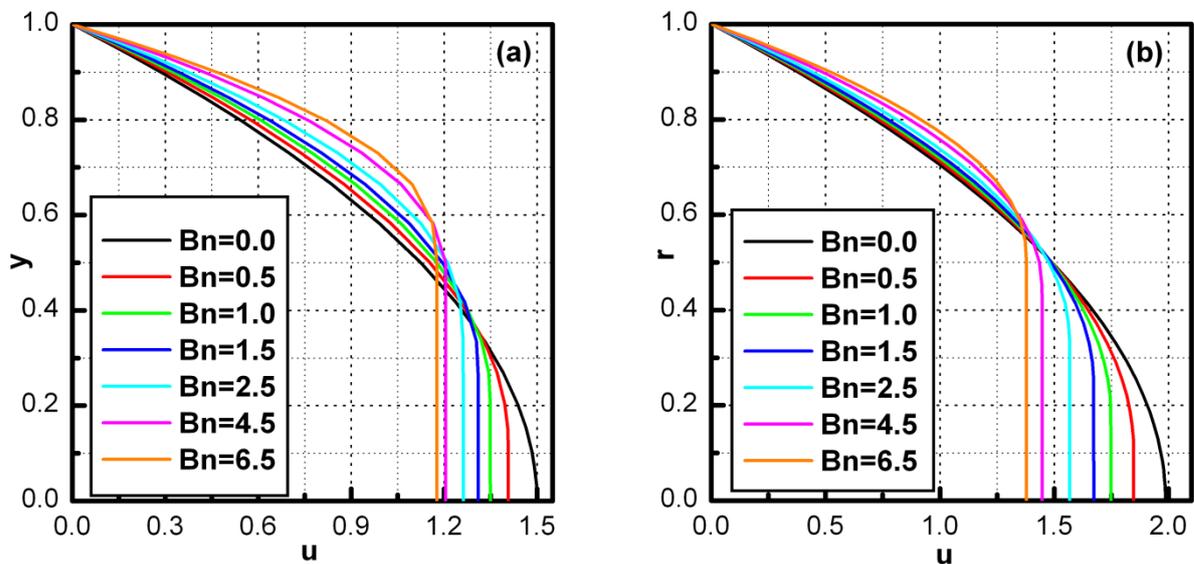


Figure [IV-2] Profils de vitesse établis pour différentes valeurs de Bn . (a)-deux plaques planes, (b) conduite cylindrique.

Lors de l'écoulement, La zone aplatie subit des contraintes de cisaillements inférieurs à la contrainte seuil τ_0 . Le fluide résiste alors à la déformation et ce déplace en bloc formant un bouchon. La vitesse de ce bouchon fluide diminue avec l'accroissement de la valeur de Bn , tout en manifestant de plus en plus une tendance à envahir la section d'écoulement. Compte tenu de la conservation de masse, la partie cisailée du fluide localisée près de la paroi solide subit à son tour une augmentation de sa vitesse avec l'accroissement de Bn .

Le tableau [IV-1] présente la valeur maximale de la vitesse le long de la section d'écoulement pour différentes valeurs du seuil de contrainte.

Bn	u_{max}	
	Plaques planes	Conduite cylindrique
0.0	1.4995	1.9985
0.5	1.4072	1.8570
1.0	1.3495	1.7566
1.5	1.3108	1.6815
2.5	1.2620	1.5762
4.5	1.2055	1.4550
6.5	1.1775	1.3857

Tableau [IV-1] Vitesse axiale maximale pour différentes valeurs de Bn.

Utilisant la méthode des moindres carrés (MMC), une corrélation entre la valeur maximale de la vitesse axiale et la valeur de la contrainte seuil est proposée pour un écoulement plan (a) et axisymétrique (b):

$$a) \quad u_{max} = 1.5 \left(1 - \frac{Bn}{2.8227 + 1.6393 Bn} \right) \quad (IV.1)$$

$$b) \quad u_{max} = 2.0 \left(1 - \frac{Bn}{1.4769 + 0.5876 Bn} \right) \quad (IV.2)$$

Cette corrélation donne une très bonne approximation des résultats trouvés numériquement avec une erreur relative inférieure à 5% (Figure [IV-3]).

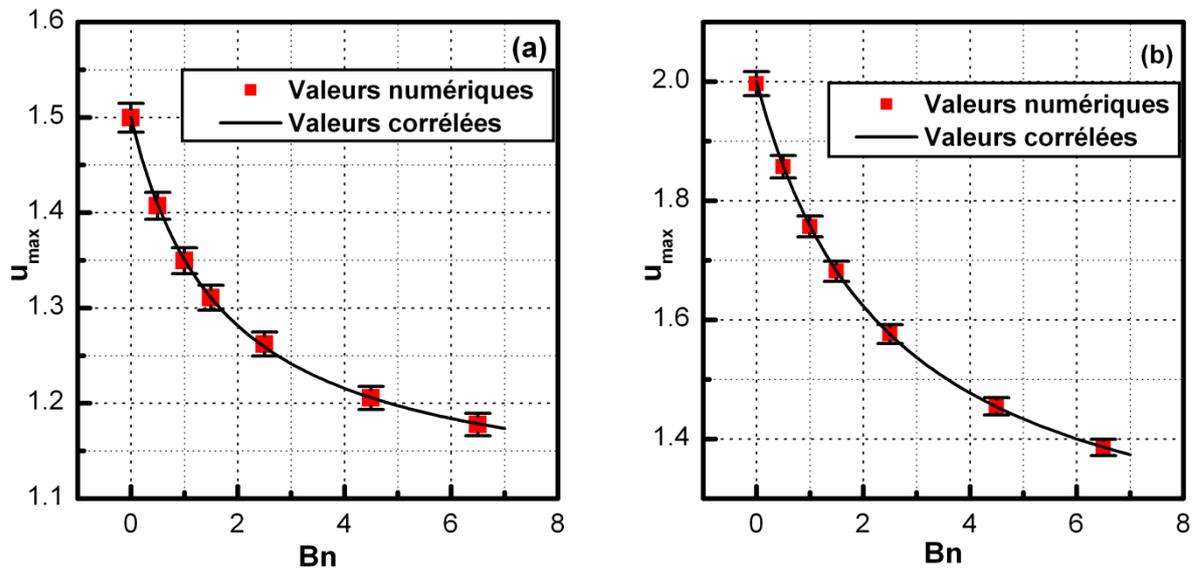


Figure [IV-3] Vitesse axiale maximale pour différentes valeurs de Bn

L'effet de la contrainte seuil sur l'établissement d'un régime hydrodynamique est présenté par la figure [IV-4], qui comporte les tracés de l'évolution de la vitesse longitudinale sur l'axe de symétrie pour un $Re = 25$ et différentes valeurs du nombre de Bingham (Bn).

Les graphes obtenus présentent tous un même aspect, à savoir, un accroissement rapide de la vitesse sur une longueur relativement petite, et une valeur asymptotique qui traduit l'établissement du régime hydrodynamique. La même figure montre que la longueur nécessaire à cet établissement (Le_v) est inversement proportionnelle à la valeur de Bn , ce qui signifie qu'un écoulement d'un fluide Binghamien nécessite moins de longueur pour s'établir qu'un fluide newtonien.

Ce constat est parfaitement prévisible en définissant Le_v en termes de cisaillement des couches fluides. Effectivement, lors d'un écoulement à travers un conduit, le fluide entrant avec une vitesse constante subit un cisaillement allant des parois solides vers le centre de la section d'écoulement au fur et à mesure que le fluide avance dans le conduit. Un régime hydrodynamiquement établi correspond alors à un cisaillement entier du fluide ou à défaut de la partie non-résistante de celui-ci. Puisque un fluide Binghamien comporte de moins en moins de couches cisillées avec l'augmentation de la contrainte seuil, il est donc clair que la longueur nécessaire à l'établissement de la vitesse sera de moins en moins importante.

Bn	Le_v	
	Plaques planes	Conduite cylindrique
0.0	3.950	2.6398
0.5	3.018	2.1367
1.0	2.309	1.7130
1.5	1.908	1.3960
2.5	1.483	1.0470
4.5	1.173	0.7996
6.5	1.158	0.6977

Tableau [IV-2] Longueurs d'établissement d'un Profil de vitesse invariant pour différentes valeurs de Bn ($Re=25$).

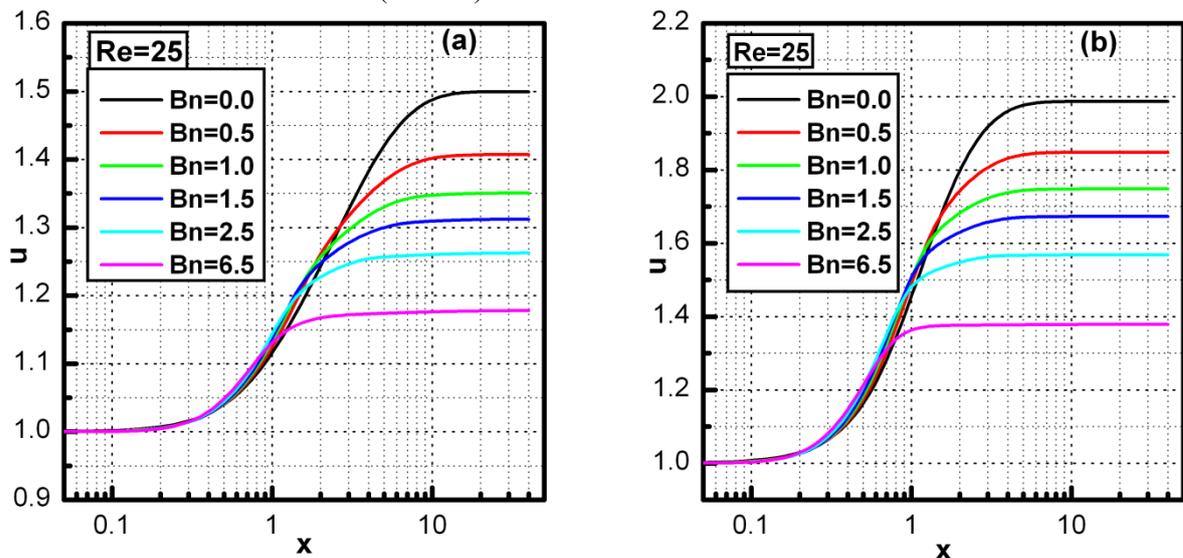


Figure [IV-4] Profils de vitesse axiale pour différentes valeurs de Bn ($Re=25$).

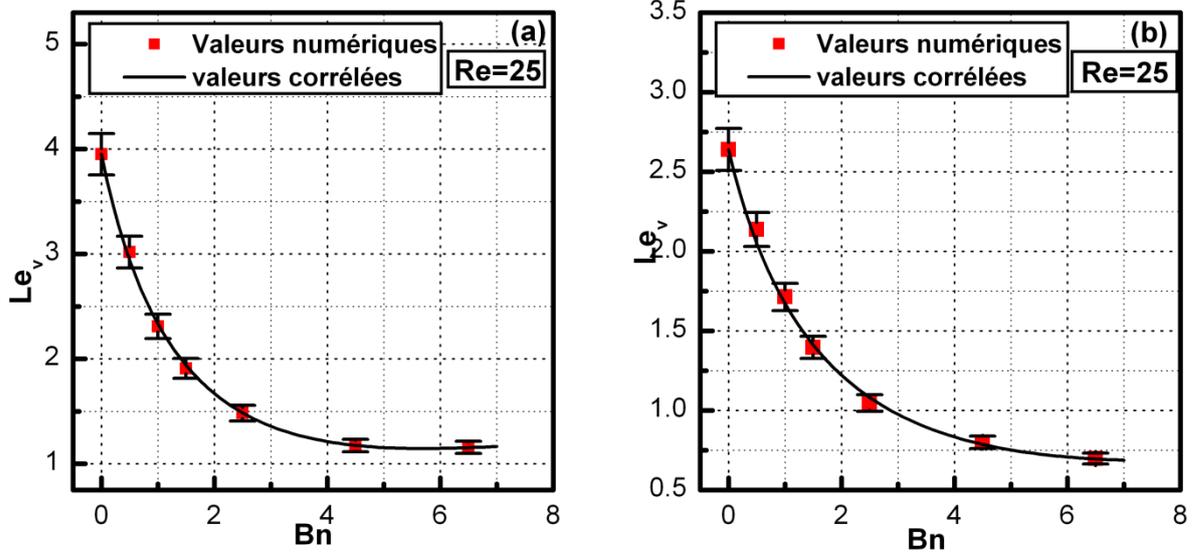


Figure [IV-5] Longueur d'établissement de la vitesse pour différents Bn ($Re=25$)

Le tableau [IV-2] donne les valeurs de Le_v pour différentes valeurs de Bn pour un écoulement plan et axisymétrique. Pour ce cas de figure, une relation est proposée pour prédire la valeur de la longueur d'établissement d'un profil invariant de vitesse en fonction de la valeur de la contrainte seuil ($0 \leq Bn \leq 7$). Cette corrélation propre au cas d'un $Re = 25$, est formulée pour un écoulement entre deux plaques planes (a) et à travers une conduite cylindrique (b) comme suit :

$$a) \frac{Le_v}{Re|_{=25}} = 0.1458 \left(1 - \frac{\ln(1 + Bn)}{1.7146 + 0.1823 Bn} \right) \quad (IV.3)$$

$$b) \frac{Le_v}{Re|_{=25}} = 0.1015 \left(1 - \frac{\ln(1 + Bn)}{1.7114 + 0.1650 Bn} \right) \quad (IV.4)$$

La figure [IV-5] illustre la bonne concordance entre les valeurs numériques et celles corrélées de Le_v . Les barres d'erreur correspondent à une erreur relative de 1%.

IV.2.2.1.2 Effet de la contrainte seuil sur le champ de pression :

La figure [IV-6] illustre l'évolution axiale de la pression pour différentes valeurs de la contrainte seuil. L'existence d'un seuil de contrainte attribue au fluide une résistance à l'écoulement qui provoque de fortes chutes de pression. Ces chutes sont d'autant plus importantes que la valeur de Bn est élevée.

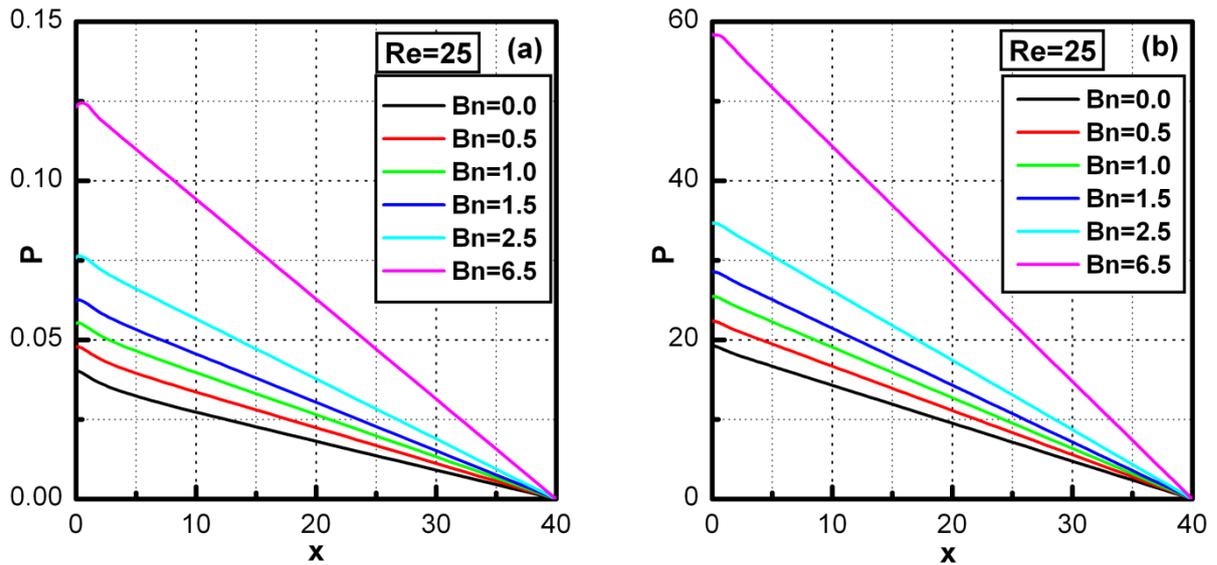


Figure [IV-6] Evolution axiale de la pression pour différentes valeurs de Bn ($Re = 25$)

Le [tableau \[IV-3\]](#) présente des valeurs du coefficient de friction (fRe) pour différentes valeurs de la contrainte seuil.

Bn	fRe	
	Plaques planes	Conduite cylindrique
0	24.0160	15.8933
0.5	29.9253	18.5600
1	35.7629	21.2200
1.5	41.4570	23.8633
2.5	52.4982	29.0900
6.5	94.0968	49.2700

Tableau [IV-3] Coefficients de friction sous forme de produit (fRe) pour différentes valeurs de Bn

L'évolution de la valeur du produit (fRe) en fonction de la contrainte seuil (Bn) présente une forme parabolique pour les deux cas étudiés, plaques planes et conduite cylindrique. Cette évolution peut être exprimée par les relations :

$$a) fRe = 24 + 11.848 Bn - 0.164Bn^2 \tag{IV.5}$$

$$b) fRe = 16 + 5.3036 Bn - 0.0282Bn^2 \tag{IV.6}$$

Ces relations offrent une bonne représentation des valeurs trouvées numériquement du produit (fRe) avec une erreur relative maximale qui n'excède pas 2% ([figure \[IV-7\]](#)), ainsi qu'avec les valeurs présentées par Quaresma et Macêdo[17] ([tableau \[IV-4\]](#)).

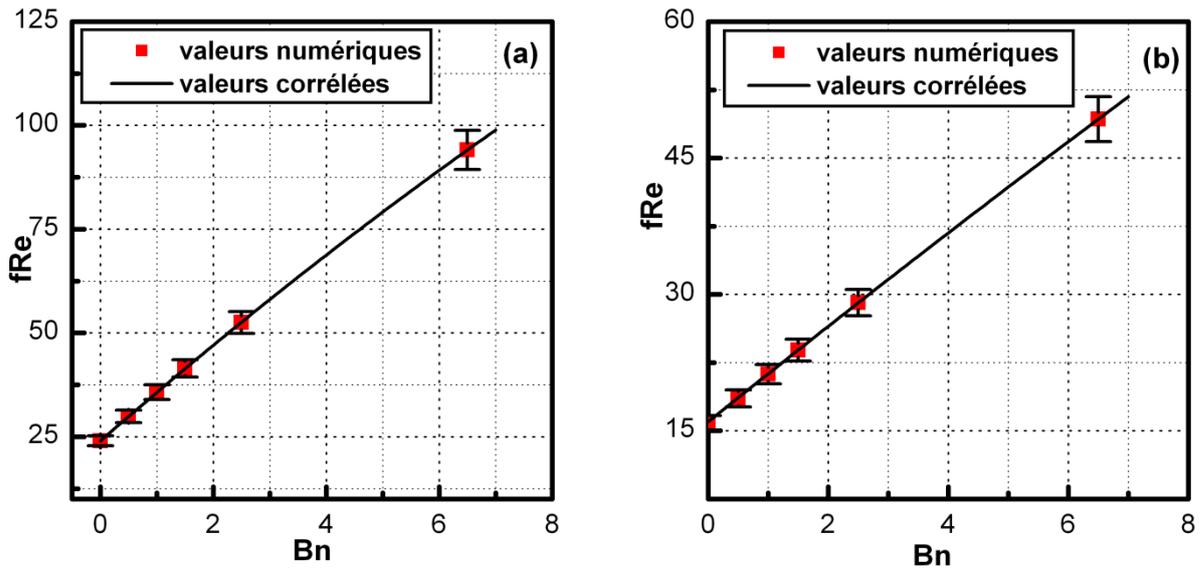


Figure [IV-7] Coefficients de friction sous forme de produit (fRe) pour différentes valeurs de Bn .

Plaques planes				Conduite cylindrique			
Bn	fRe^{\square}	fRe^{*}	Er (%)	Bn	fRe^{\square}	fRe^{*}	Er (%)
0	24.0000	24.0000	0.00	0	16.0000	16.0000	0.00
0.25	26.9517	26.9945	0.16	0.5	18.6448	18.6659	0.11
1.25	38.5535	38.6656	0.29	2.5	29.0828	29.1995	0.40
2.50	52.5950	52.5515	0.08	5	41.8130	41.9439	0.31
5.00	79.1422	78.8535	0.37	10	66.2160	66.4215	0.31

(\square) étude présente

(*) Quaresma et Macêdo

Tableau [IV-4] Coefficients de friction sous forme de produit (fRe) pour différentes valeurs de Bn

IV.2.2.1.3 Effet de l'inertie sur le champ de vitesse:

La figure [IV-8] présente l'évolution de la vitesse axiale lors d'un écoulement plan et axisymétrique d'un fluide Binghamien ($Bn = 1.0$) pour différentes valeurs de Re . L'allure des tracés montre qu'un accroissement de l'inertie (Re) occasionne un allongement de la zone d'établissement hydrodynamique contrairement à la contrainte seuil. Le tableau [IV-5] illustre les longueurs d'établissement pour un $Bn = 1.0$ et différentes valeurs du nombre de Reynolds.

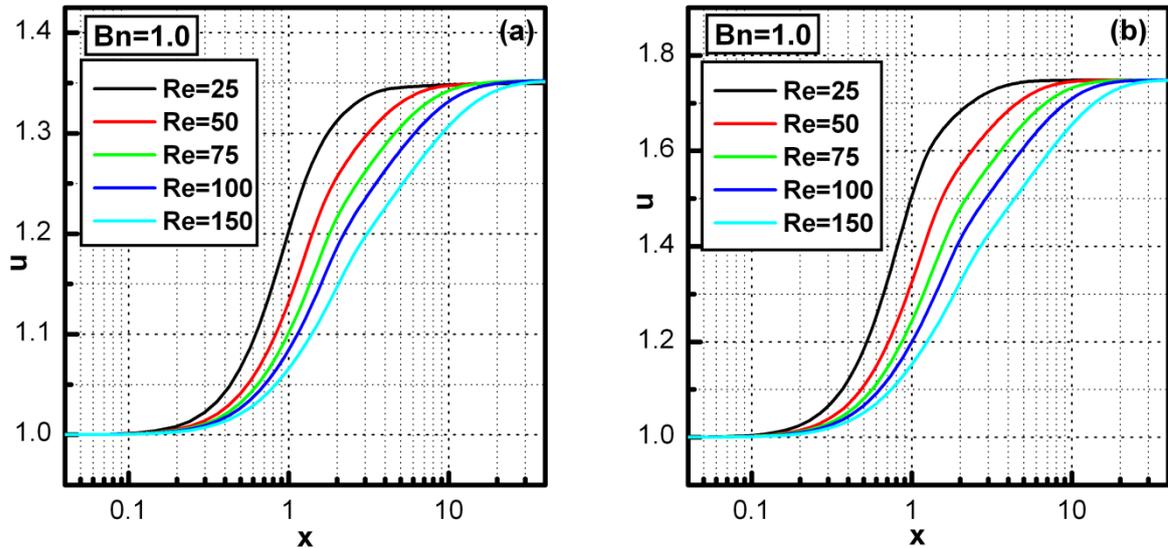


Figure [IV-8] Profils de vitesse axiale pour différentes valeurs de Re ($Bn = 1.0$).

Selon la figure [IV-9], Le_v croît linéairement avec les valeurs croissantes du nombre de Reynolds. Par conséquent, une régression linéaire a permis de corrélérer Le_v et Re pour $Bn = 1.0$ comme suit :

$$a) Le_v = 0.0843 Re \tag{IV.7}$$

$$b) Le_v = 0.0684 Re \tag{IV.8}$$

Les relations obtenues pour un problème plan (a) et axisymétrique (b) prédisent la longueur d'établissement hydrodynamique de l'écoulement en fonction de l'inertie avec une erreur relative inférieure à 2%.

Re	Le_v	
	Plaques planes	Conduite cylindrique
25	2.309	1.7130
50	4.314	3.3747
75	6.347	5.0971
100	8.423	6.8370
150	12.559	10.3049

Tableau [IV-5] Longueurs d'établissement d'un Profil de vitesse invariant pour différentes valeurs de Re ($Bn = 1.0$).

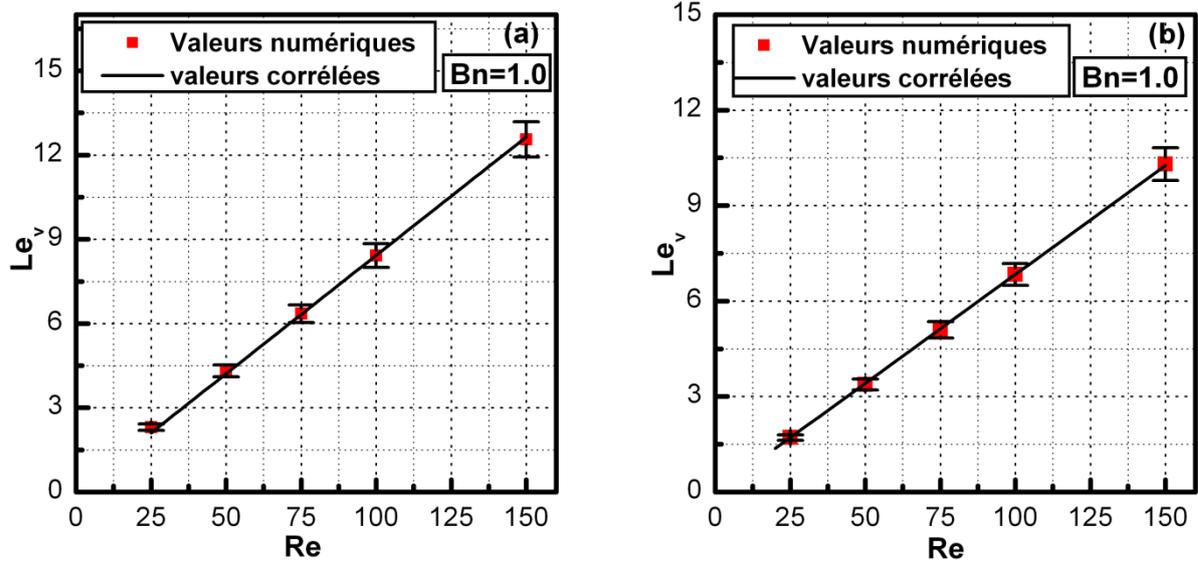


Figure [IV-9] Longueur d'établissement d'un profil de vitesse invariant pour différentes valeurs de Re ($Bn = 1.0$).

IV.2.2.1.4 Effet simultanée de la contrainte seuil et de l'inertie sur structure de l'écoulement :

Le [tableau \[IV-6\]](#) présente l'évolution de la longueur d'établissement d'un profil de vitesses invariant en fonction de la contrainte seuil pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. Il est noté que l'accroissement de Re provoque un allongement de longueur d'établissement, un effet qui est sensiblement amorti par l'existence d'un seuil de contrainte.

		Plaques planes					Conduite cylindrique				
		25	50	75	100	150	25	50	75	100	150
Bn	Re										
	0.0	3.950	7.524	11.074	14.619	21.638	2.6398	4.9738	7.3187	9.6580	14.2376
	0.5	3.018	5.793	8.509	11.265	16.776	2.1367	4.1506	6.2082	8.2664	12.3478
	1.0	2.309	4.134	6.347	8.423	12.559	1.7130	3.3747	5.0971	6.8370	10.3049
	1.5	1.908	3.402	5.005	3.641	9.913	1.3960	2.7499	4.1820	5.6350	8.5524
	2.5	1.483	2.381	3.452	4.557	6.778	1.0470	1.8804	2.8972	3.9332	6.0363
	4.5	1.173	1.532	2.004	2.565	3.728	0.7996	1.1020	1.5804	2.1785	3.3952
	6.5	1.158	1.349	1.589	1.896	2.685	0.6977	0.8754	1.0828	1.3661	2.1488

Tableau [IV-6] Longueurs d'établissement d'un Profil de vitesse invariant pour différentes valeurs de Re et de Bn .

Puisque la longueur d'établissement est influencée simultanément par l'inertie et le seuil de contrainte, une relation est proposée pour prédire la valeur de Le_v en fonction de Re et Bn . Cette relation valable pour $0 \leq Bn \leq 7$ et $25 \leq Re \leq 150$ est formulée comme suit :

$$a) \frac{Le_v}{Re} = 0.1458 \left(1 - \frac{\ln(1 + Bn)}{\alpha + \beta Bn} \right) \text{ avec } \begin{cases} \alpha = 1.0593 Re^{0.0791} \\ \beta = 0.5106 Re^{-0.32} \end{cases} \quad (IV.9)$$

$$b) \frac{Le_v}{Re} = 0.1015 \left(1 - \frac{\ln(1 + Bn)}{\alpha + \beta Bn} \right) \text{ avec } \begin{cases} \alpha = 1.2532 Re^{0.0968} \\ \beta = 2.5206 Re^{-0.8469} \end{cases} \quad (IV.10)$$

La figure [IV-10] illustre la bonne concordance entre les valeurs de Le_v déterminées numériquement et celles calculées à partir des relations proposées ci-dessus. Les barres d'erreur correspondent à une erreur maximale de 5%.

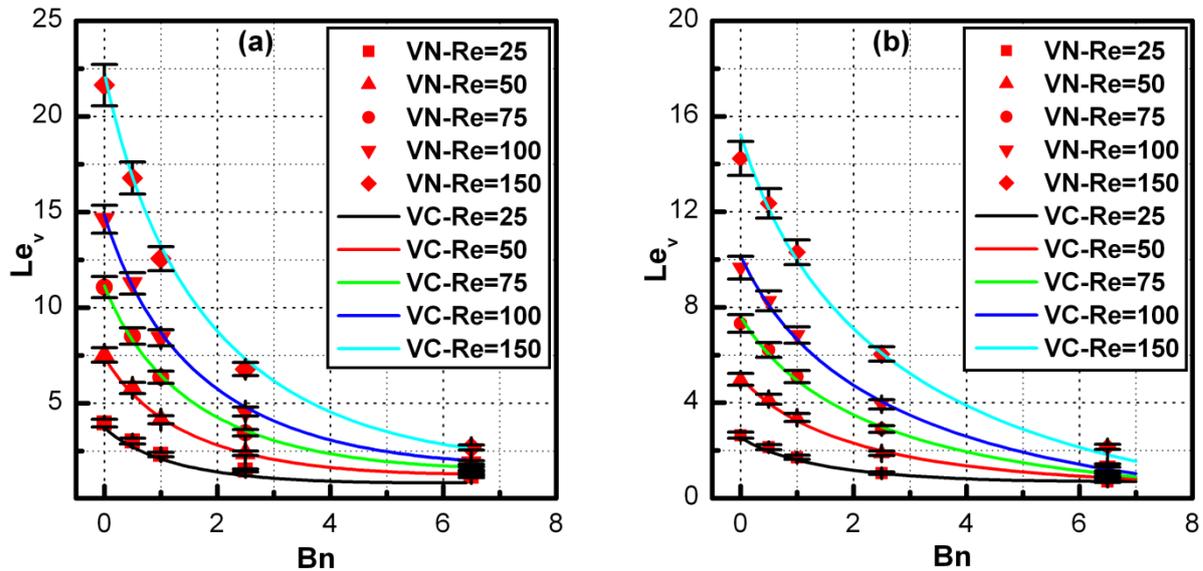


Figure [IV-10] Longueur d'établissement d'un profil de vitesse invariant pour différentes valeurs de Re et de Bn .

IV.2.2.2 Régime thermique :

Cette section est consacrée à l'analyse de l'influence exercée par le nombre de Peclet (Pe), de la contrainte seuil (Bn) et de la dissipation visqueuse (Br) sur l'évolution du champ thermique, tout en tenant compte de la conduction axiale du fluide négligé, jusqu'à la, par la majorité des auteurs. Deux cas de figure ont été considérés dans cette analyse, des parois solides soumises à une température constante dans un premier cas, et un flux uniforme dans un second. Ce dernier particulièrement, représente le principe de fonctionnement de la grande

partie des installations thermiques rencontrées dans l'industrie telles que les réchauffeurs à bain d'eau, le système de refroidissement des réacteurs nucléaires...etc.

IV.2.2.2.1 Effet de l'inertie sur l'intensité de l'échange thermique :

L'évolution de la valeur de Nusselt au niveau de la paroi solide soumise à une température constante est représentée dans la figure [IV-11] pour différentes valeurs du nombre de Peclet. Les courbes obtenues pour un problème plan (a) et axisymétrique (b) présentent toutes le même aspect, une diminution aiguë localisée au niveau de la zone d'entrée, et une tendance vers une valeur limite qui traduit un établissement d'un régime thermique. Cette figure indique clairement que l'influence de la valeur de Pe n'est ressentie qu'au niveau de la zone d'entrée, où l'accroissement de Pe provoque une intensification de l'échange thermique et un prolongement de la zone en question. La valeur de Nu établi par contre, reste insensible aux variations de Pe .

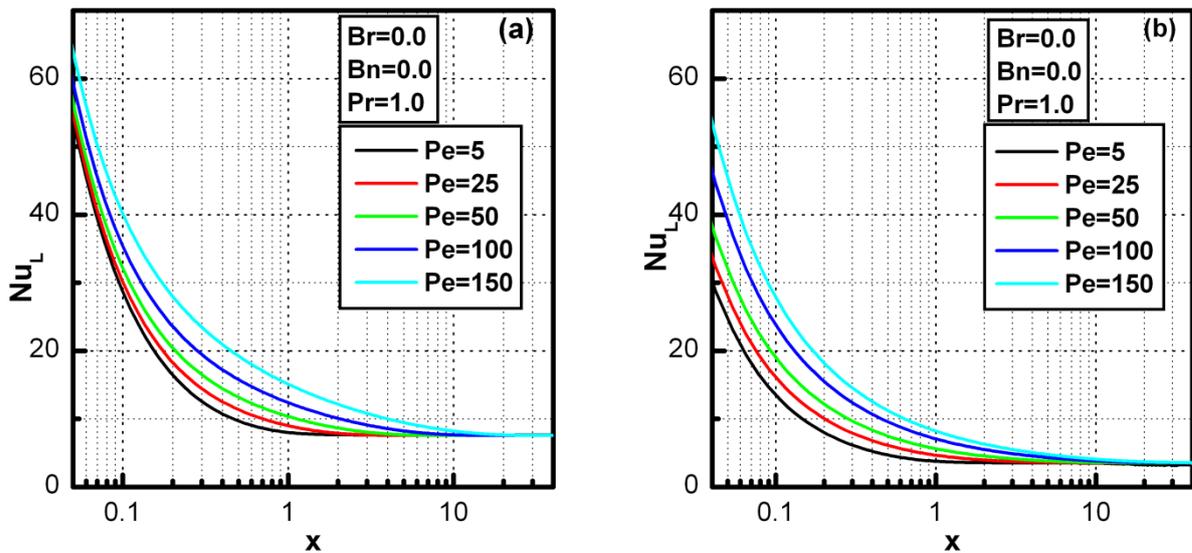


Figure [IV-11] Evolution de Nusselt local pour différentes valeurs de Peclet ($Br = 0$, $Bn = 0$)

Pour le cas d'un flux uniforme imposé à la paroi solide, la figure [IV-12] qui comporte les tracés de Nusselt local pour différentes valeurs de Pe montre un effet identique que celui enregistré en situation de température constante imposée. Il y est donc noté que l'accroissement de Pe n'influe que sur la zone d'entrée, où il provoque une intensification de l'échange thermique entre le fluide et la paroi, et un accroissement de l'abscisse correspondant au début de la zone du régime thermiquement établi.

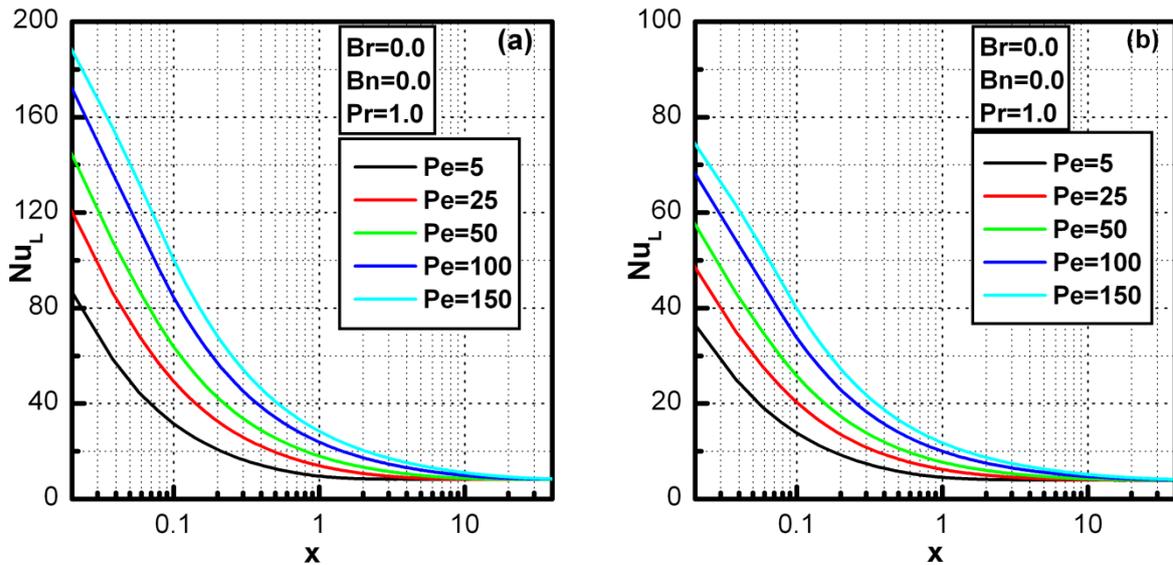


Figure [IV-12] Evolution de Nusselt local pour différentes valeurs de Pelet ($Br=0$, $Bn=0$)

La présente valeur de Nusselt établi, en considérant un fluide newtonien ($Bn = 0$) et en négligeant l'effet de dissipation visqueuse ($Br = 0$), est de 8.234 pour un écoulement plan et de 4.234 pour un écoulement axisymétrique. La comparaison de ces valeurs de Nu_∞ avec celles trouvées numériquement par Lin et Shah [21], à savoir 8.239 pour un problème plan et 4.362 pour un problème axisymétrique en considérant le même problème mais en négligeant la conduction axiale du fluide, montre une parfaite correspondance des deux résultats pour le cas d'un écoulement plan, alors qu'un écart considérable est constaté entre celles-ci dans le cas d'un écoulement axisymétrique. Cet écart ne peut donc être que l'effet de la conduction axiale qui est vraisemblablement plus importante lors de la convection forcée dans une conduite cylindrique et qui ne peut être négligée par conséquence.

IV.2.2.2.2 Effet de la contrainte seuil sur l'intensité de l'échange thermique :

Comme il a été explicité dans la section précédente, la contrainte seuil est à l'origine de la diminution de la vitesse de l'écoulement de la zone non cisailée. Cette diminution engendre en contre partie, pour raison de conservation de quantité de mouvement, une augmentation de la vitesse de la couche fluide en contact avec les parois solides impliquant ainsi une intensification de l'échange de chaleur.

L'intensité de l'échange thermique entre la paroi soumise à une température constante et le fluide en mouvement est représentée dans la figure [IV-13] pour $Pe = 25$, différentes

valeurs de Bn et sans tenir compte de la dissipation visqueuse ($Br = 0$). Les courbes obtenues pour un écoulement plan (a) et axisymétrique (b), montrent une légère augmentation du nombre de Nusselt local (Nu_L) le long du conduit et que cette augmentation est proportionnelle à la valeur de Bn . Des valeurs de Nusselt établi (Nu_∞) sont représentées dans le [tableau \[IV-7\]](#) pour différentes valeurs de la contrainte seuil.

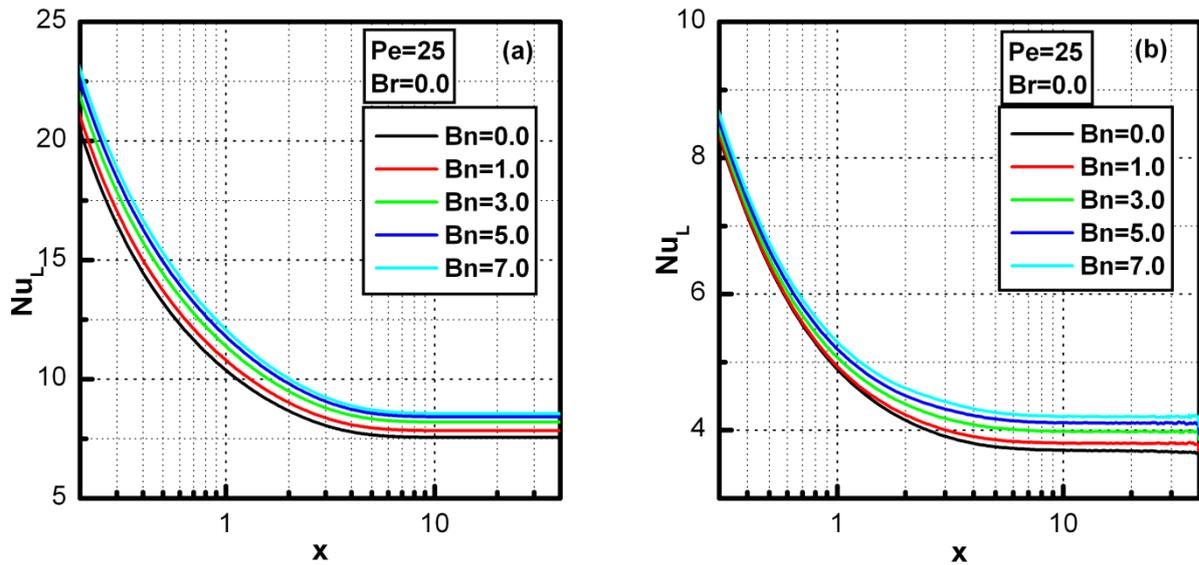


Figure [IV-13] Evolution de Nusselt local pour différentes valeurs de Bn ($Br=0$, $Pe=25$).

Bn	Nu_∞ (température imposée aux parois)	
	Plaques planes	Conduite cylindrique
0.0	7.551	3.6713
1.0	7.835	3.8158
3.0	8.193	3.9957
5.0	8.413	4.0994
7.0	8.548	4.1951

Tableau [IV-7] Nusselt établi pour différentes valeurs de Bn et $Br = 0$.

L'évolution de Nu_∞ en fonction de la valeur de la contrainte seuil peut être prédite par la relation :

$$a) Nu_\infty = 7.551(1 + 0.0355 Bn - 0.0024 Bn^2) \tag{IV.11}$$

$$b) Nu_\infty = 3.6713(1 + 0.0425 Bn - 0.0051 Bn^2 + 0.0003 Bn^3) \tag{IV.12}$$

Ces deux relations offrent une bonne approximation des valeurs de Nu_{∞} déterminées numériquement dans cette présente étude (figure [IV-14]) et celles proposées par Lin et Shah [21] avec un pourcentage d'erreur relative qui n'excède pas 0.5% (tableau [IV-8]).

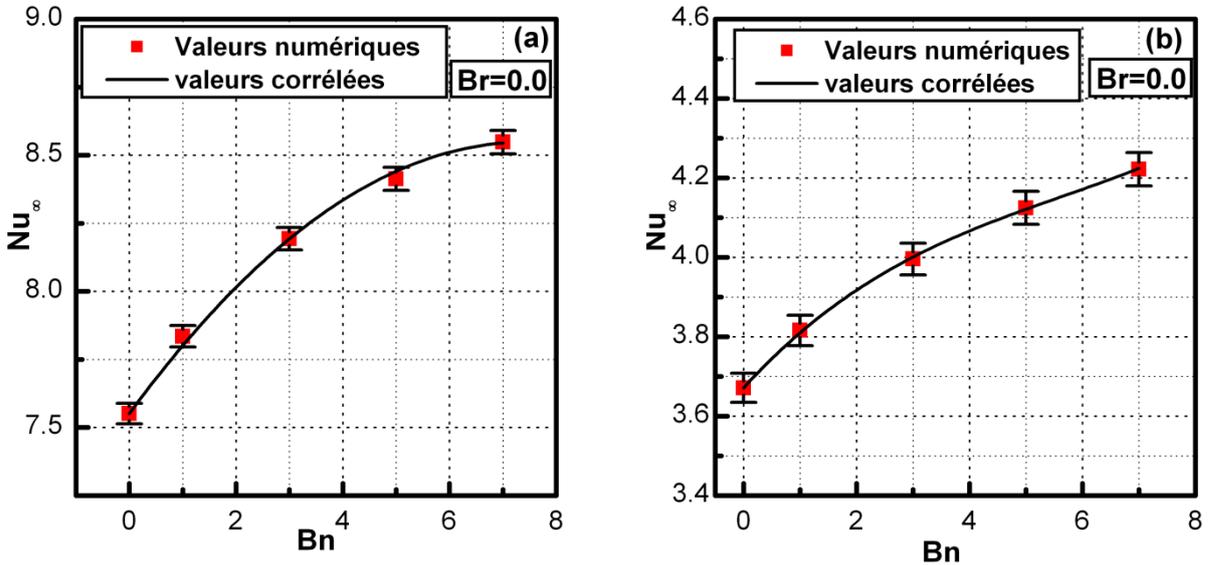


Figure [IV-14] Evolution des valeurs du Nusselt établi en fonction des valeurs de Bn (température imposée aux parois).

Température imposée aux parois							
Plaques planes				Conduite cylindrique			
Bn	Nu_{∞}^{\square}	Nu_{∞}^{*}	Er (%)	Bn	Nu_{∞}^{\square}	Nu_{∞}^{*}	Er (%)
0	7.551	7.541	0.13	0	3.6713	3.6568	0.40
0.25	7.617	7.619	0.03	0.5	3.7605	3.7287	0.85
1.25	7.857	7.884	0.34	2.5	3.9563	3.9899	0.84
2.5	8.107	8.115	0.10	5	4.1845	4.2209	0.86
5	8.436	8.401	0.42	10	4.4606	4.4986	0.85

(\square) étude présente

(*) Lin et Shah

Tableau [IV-8] Nusselt établi pour différentes valeurs de Bn

Dans la situation d'un flux uniforme imposé à la paroi, l'analyse de l'évolution des courbes de Nusselt local représentées pour différentes valeurs de la contrainte seuil et un Br nul (figure [IV-15]), montre que l'effet de ces dernières est minime sur l'intensité de l'échange thermique.

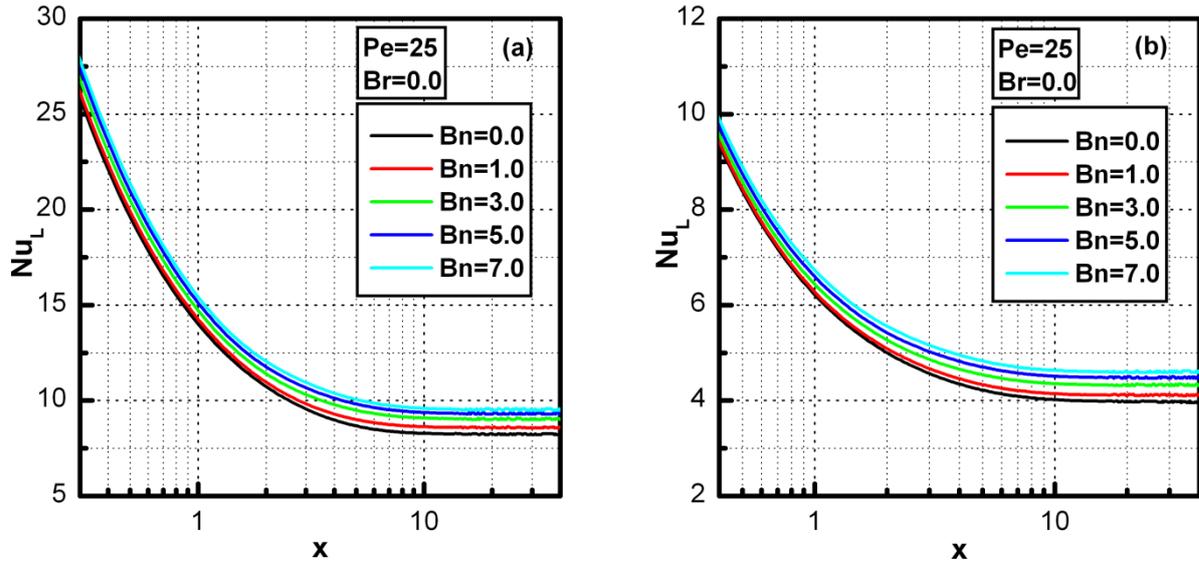


Figure [IV-15] Evolution de Nusselt local pour différentes valeurs de Bn ($Br=0$, $Pe=25$).

Le tableau [IV-9] illustre les valeurs de Nu établi pour différentes valeurs de la contrainte seuil.

Bn	Nu_{∞}	
	Plaques planes	Conduite cylindrique
0.0	8.234	4.234
1.0	8.591	4.359
3.0	9.064	4.566
5.0	9.372	4.733
7.0	9.576	4.738

Tableau [IV-9] Nusselt établi pour différentes valeurs de Bn et $Br=0$

Les valeurs de Nu_{∞} pour le cas d'un flux imposé aux parois présentent une évolution parabolique en fonction des valeurs de la contrainte seuil (figure [IV-16]) pour les deux cas considérés, un écoulement entre deux plaques planes et à travers une conduite cylindrique. Cette évolution est exprimée pour chaque cas respectivement par les relations a et b suivantes :

$$a) Nu_{\infty} = 8.234(1 + 0.0413 Bn - 0.0026 Bn^2) \quad (IV.13)$$

$$b) Nu_{\infty} = 4.234(1 + 0.0332 Bn - 0.0023 Bn^2) \quad (IV.14)$$

Ces relations reproduisent fidèlement les valeurs de Nu_{∞} données par la présente étude, et offrent une bonne représentation de celles proposées par Lin et Shah [21] dans le cas d'un écoulement plan (Tableau [IV-10]).

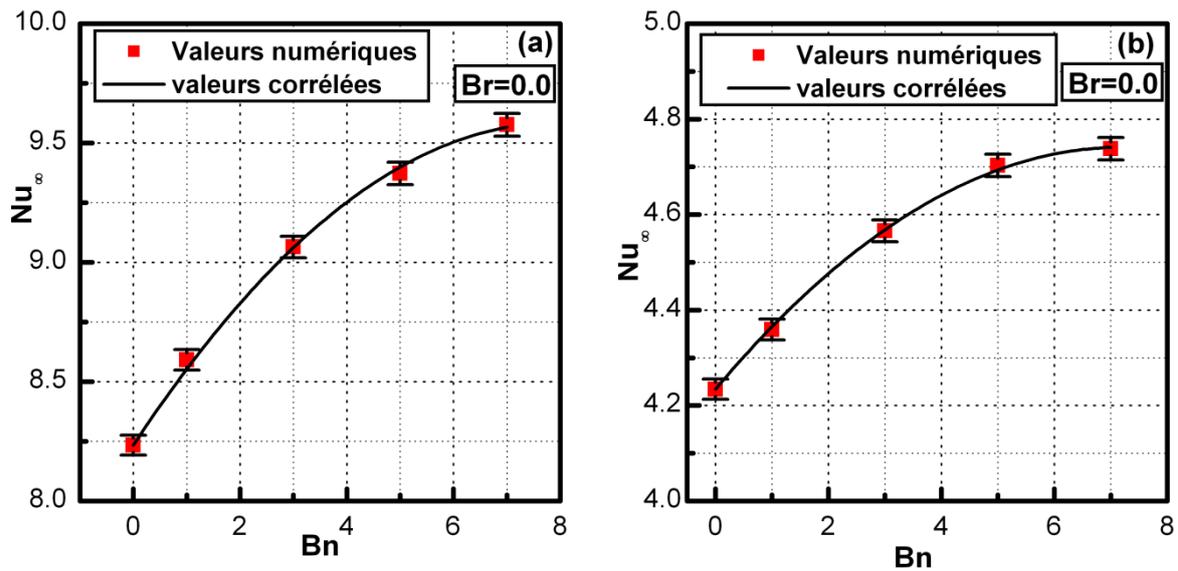


Figure [IV-16] Evolution des valeurs du Nusselt établi en fonction des valeurs de Bn (Flux imposé aux parois).

Flux imposé aux parois							
Plaques planes				Conduite cylindrique			
Bn	Nu_{∞}^{\square}	Nu_{∞}^*	Er(%)	Bn	Nu_{∞}^{\square}	Nu_{∞}^*	Er(%)
0	8.234	8.239	0.06	0	4.234	4.362	2.93
0.25	8.318	8.335	0.21	0.5	4.295	4.449	3.46
1.25	8.626	8.666	0.47	2.5	4.524	4.783	5.42
2.5	8.950	8.966	0.18	5	4.703	5.107	7.91
5	9.398	9.357	0.44	10	-	5.107	-

(\square) présente étude

(*) Lin et Shah

Tableau [IV-10] Nusselt établi pour différentes valeurs de Bn.

IV.2.2.2.3 Effet de la dissipation visqueuse sur l'intensité de l'échange thermique :

Ce paragraphe est dédié à l'analyse de l'effet occasionné par la dissipation visqueuse sur l'intensité de l'échange de chaleur entre un fluide Binghamien et les parois solides d'un conduit lors d'un écoulement plan et axisymétrique.

Analysant le cas d'une température constante imposée à la paroi solide, les figures [IV-17 et 18] présentent l'évolution des profils de température suivant l'axe de symétrie, respectivement dans le cas du réchauffage ($Br > 0$) et de refroidissement ($Br < 0$) d'un fluide newtonien. Pour $Br > 0$ (figure [IV-17]), les profils de température pour lesquels l'effet de la dissipation visqueuse est pris en compte, manifestent un retard dans leurs évolutions par rapport aux profils dont la dissipation est négligée. Ce retard est ressenti

fortement à partir du moment où la température de la couche fluide en contact avec la paroi approche celle de cette dernière.

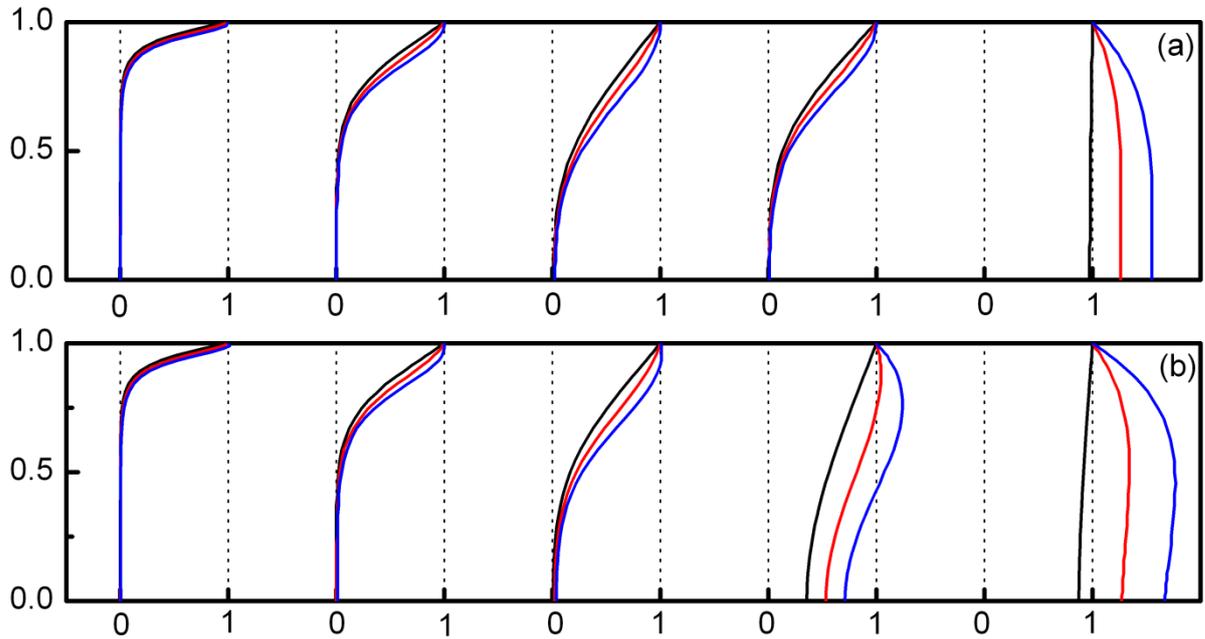


Figure [IV-17] Profils de température pour $Bn=0$, $Pe=25$ et $Br=0.0 ; 0.4 ; 0.8$ respectivement aux positions $x=0.078 ; 0.418 ; 1.31 ; 10.0$ et 40 . (a) deux plaques planes, (b) conduite cylindrique.

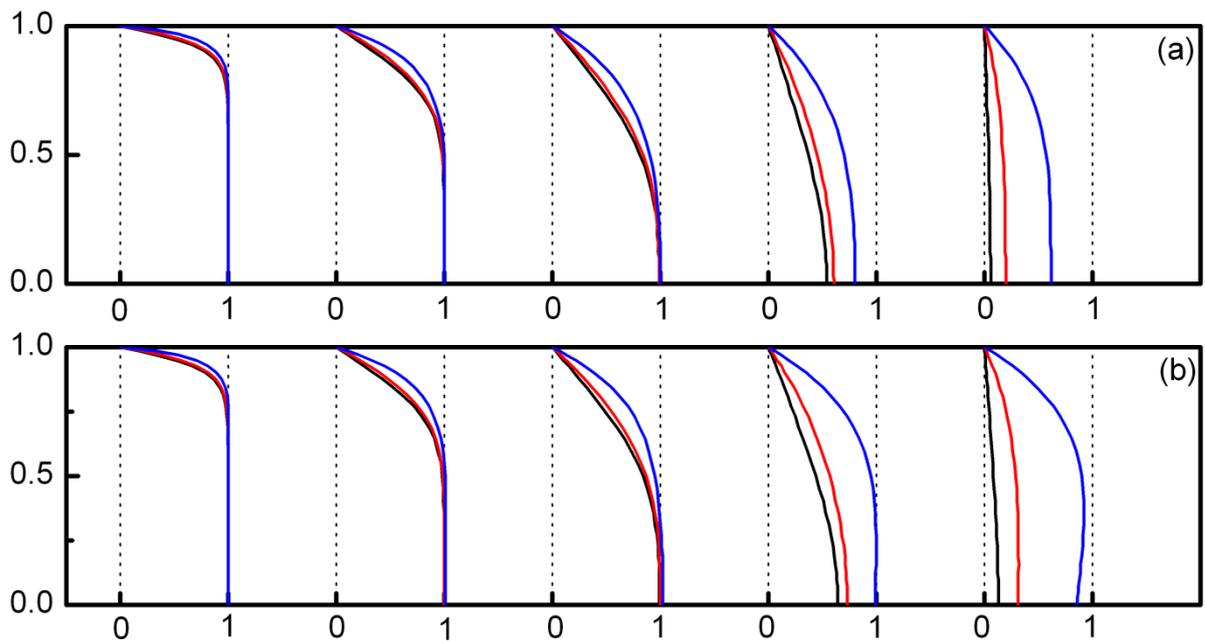


Figure [IV-18] Profils de température pour $Bn=0$, $Pe=25$ et $Br=0.0 ; -0.4 ; -0.8$ respectivement aux positions $x=0.078 ; 0.418 ; 1.31 ; 10.0$ et 40 . (a) deux plaques planes, (b) conduite cylindrique.

Cette couche fluide caractérisée par ces fortes valeurs de taux de cisaillement, donc d'un apport de chaleur par frottement aussi important, constitue une contrainte freinant la pénétration du flux thermique vers les sous-couches fluides internes, d'où la diminution de l'intensité de l'échange thermique. Lorsque la température de ce film dépasse celle de la paroi, le flux de chaleur change de direction et le fluide se met à réchauffer la paroi, ce qui explique les valeurs négatives de Nusselt local dans la [figure \[IV-19\]](#).

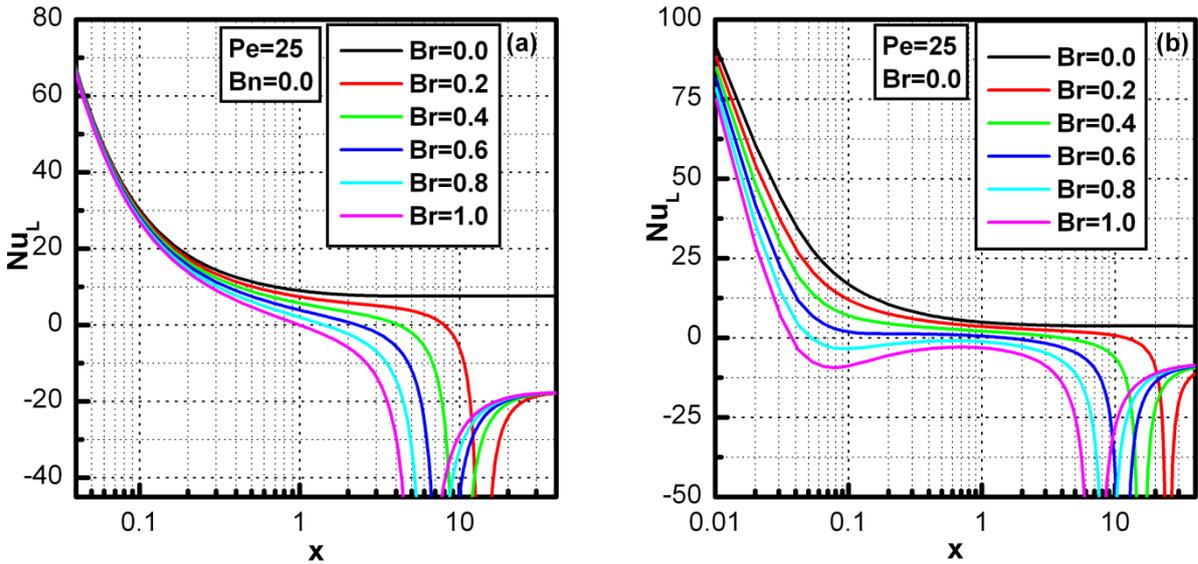


Figure [IV-19] Evolution de Nusselt local pour différentes valeurs de $Br > 0$ ($Bn=0$, $Pe=25$).

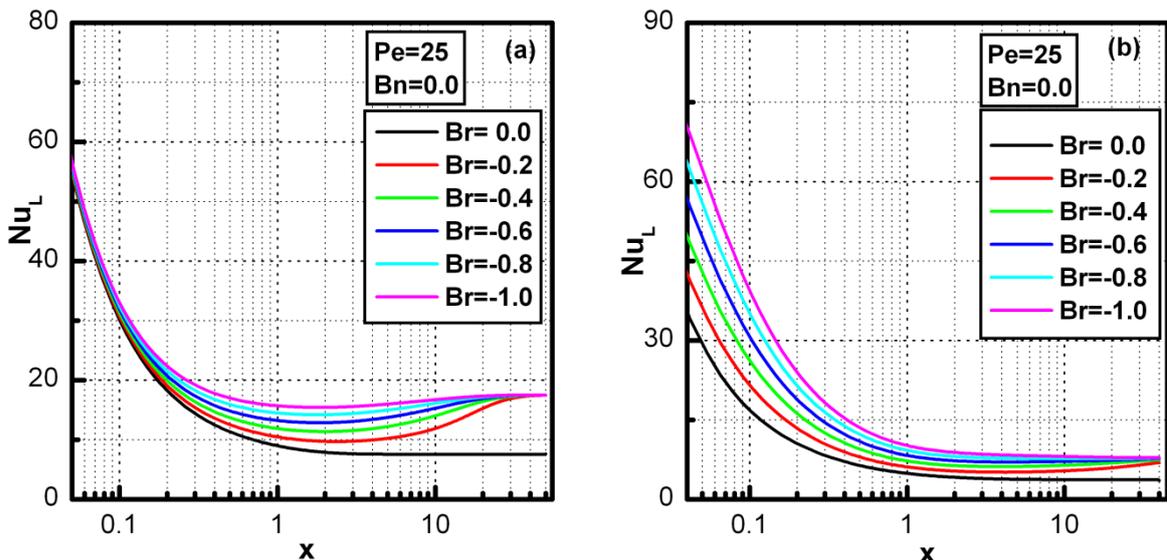


Figure [IV-20] Evolution de Nusselt local pour des valeurs de $Br < 0$ ($Bn=0$, $Pe=25$).

Les courbes représentatives de l'évolution de Nusselt local présentent une discontinuité qui parvient lorsque la température moyenne du fluide égale celle de la paroi, causant ainsi

un état d'indétermination dans la formule (III-50). Lorsque le régime thermique est établi, le nombre de Nusselt atteint sa valeur asymptotique qui est de -17.499 .

Dans le cas d'un refroidissement (figure [IV-18]) l'apport de chaleur par effet de frottement fait que les profils de température pour $Br \neq 0$ devancent dans leurs évolutions ceux dont on a négligé l'effet de la dissipation visqueuse ($Br = 0$). L'échange de chaleur devient alors plus intense en raison de l'accroissement de l'écart de température entre le fluide et la paroi. La figure [IV-20] illustre la variation de l'intensité de l'échange thermique fluide-paroi. Il y est noté la tendance des tracés de Nu local vers une valeur limite (17.499) qui traduit l'établissement d'un régime thermique.

Dans le cas d'un flux de chaleur uniforme imposé à la paroi solide, l'analyse de l'effet de la dissipation visqueuse sur l'intensité de l'échange thermique à révélé une légère diminution qui accompagne l'accroissement du nombre de Br le long de tout le conduit. Cette situation est exposée avec plus de détails dans la section suivante.

IV.2.2.2.4 Influence simultanée de la contrainte seuil et de la dissipation visqueuse sur l'intensité de l'échange thermique :

Comme il a été constaté, la contrainte seuil engendre des taux de déformation ($\dot{\gamma}$) très importants dans la zone cisailée qui se situe près de la paroi, et qui sont à l'origine de l'auto réchauffage du fluide par effet de la dissipation visqueuse. Il est donc claire, que ce dernier sera sensiblement affecté par l'accroissement des valeurs de Bn .

Considérant le cas d'une température constante imposée à la paroi, les figures [IV-21 et 22] représentent l'évolution des profils transversaux de la température suivant le sens de l'écoulement pour des valeurs non nul de Bn et Br , respectivement dans le cas d'un réchauffage ($Br > 0$) et d'un refroidissement ($Br < 0$).

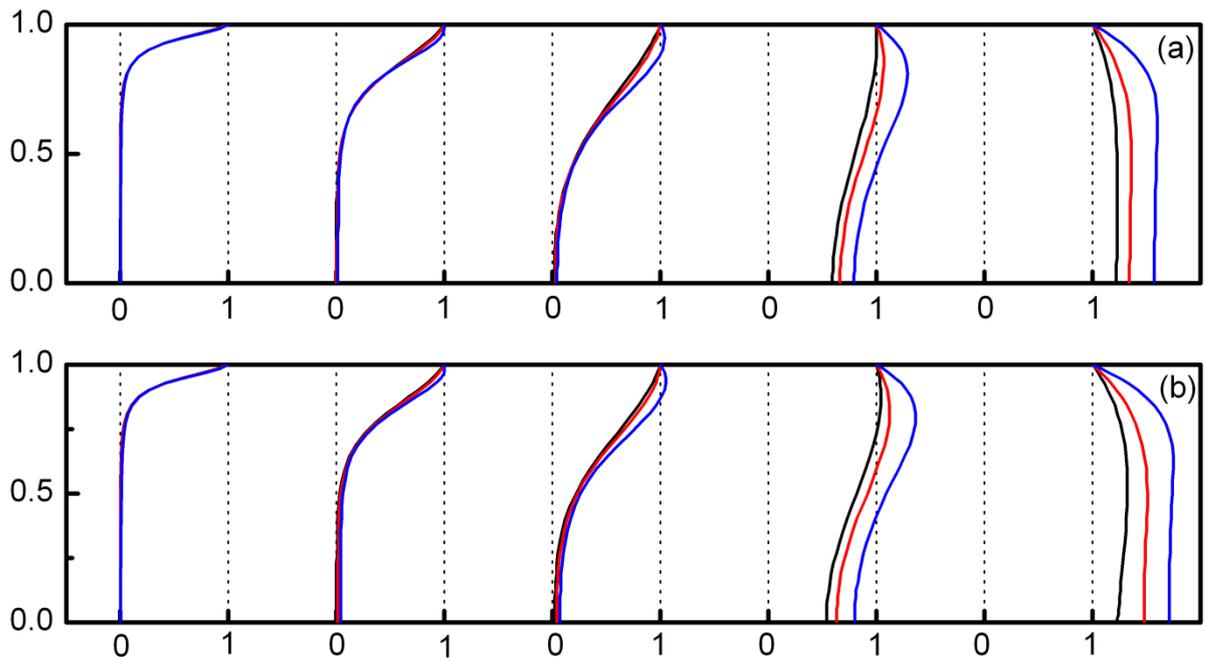


Figure [IV-21] Profils de température pour $Pe=25$, $Br=0.4$ et $Bn=0.0 ; 1.5 ; 6.5$ respectivement aux positions $x=0.078; 0.418; 1.31; 10.0$ et 40

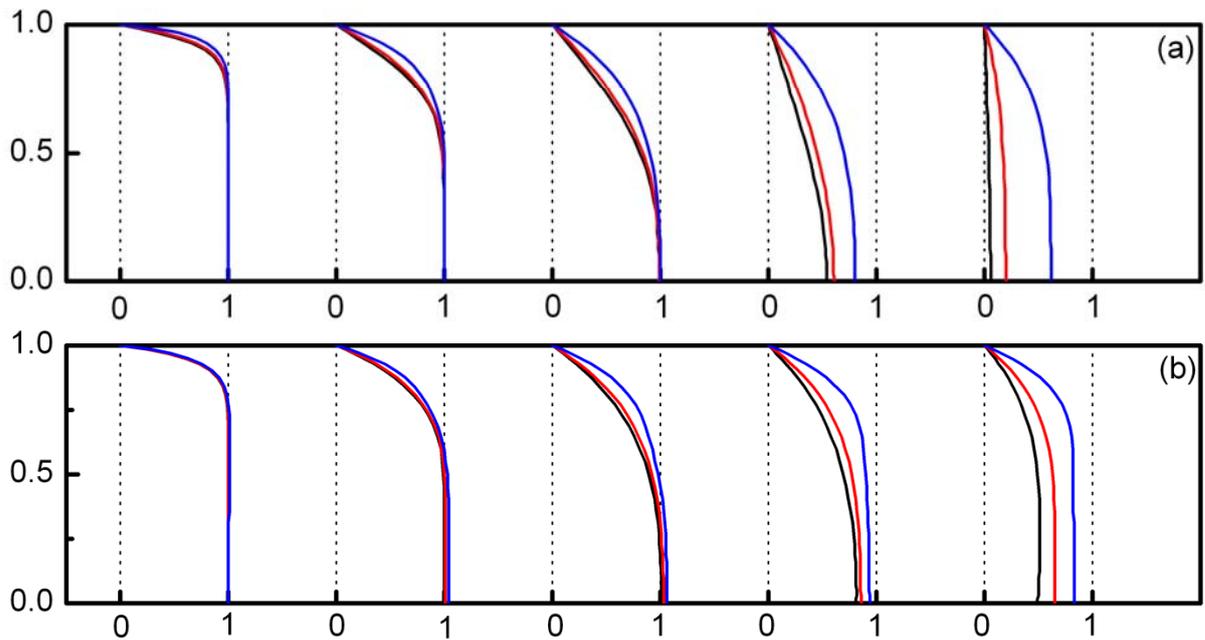


Figure [IV-22] Profils de température pour $Pe=25$, $Br=-0.4$ et $Bn=0.0 ; 1.5 ; 6.5$ respectivement aux positions $x=0.078; 0.418; 1.31; 10.0$ et 40

Ces courbes peuvent être interprétées d'une façon similaire que celles obtenues en considérant le cas d'un fluide newtonien, du moment qu'elles présentent la même allure, tout en soulignant l'effet accentué de la dissipation visqueuse causé par la contrainte seuil. Ceci

est nettement explicite en analysant l'évolution de Nu local représentée dans les figures [IV-23 et 24].

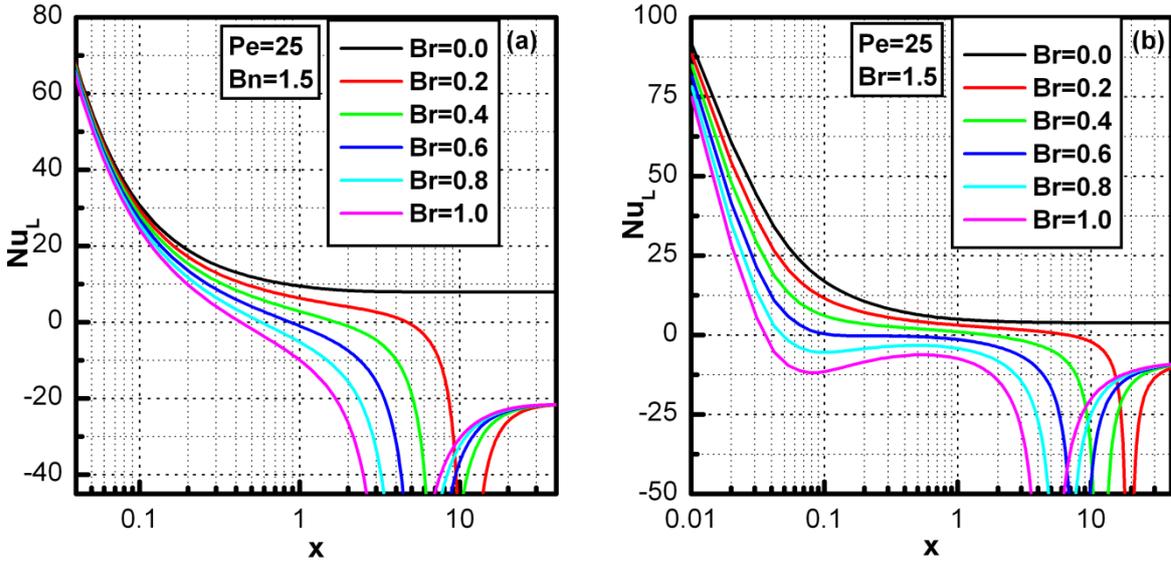


Figure [IV-23] Evolution de Nusselt local pour différentes valeurs de $Br > 0$, $Pe=25$ et $Bn=1.5$.

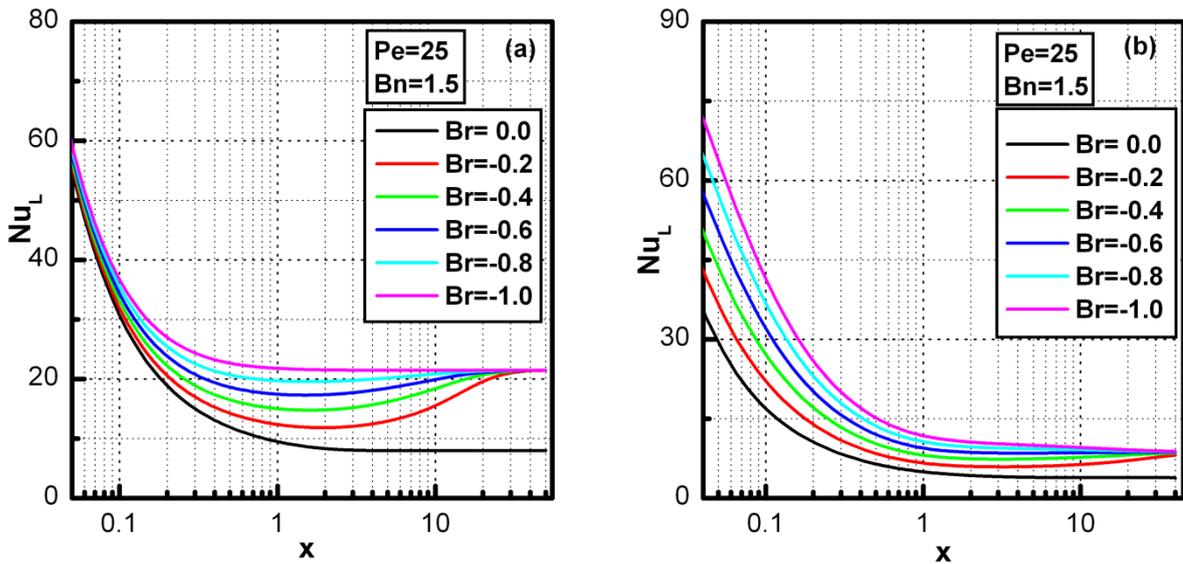


Figure [IV-24] Evolution de Nusselt local pour différentes valeurs de $Br < 0$, $Pe=25$ et $Bn=1.5$.

Des valeurs de Nusselt limite pour différents seuils, dans le cas où on tient compte de l'effet de la dissipation visqueuse, sont illustrées dans le tableau [IV-11].

Bn	$ Nu_{\infty} $	
	Plaques planes	Conduite cylindrique
0.0	17.499	7.867
1.0	17.515	8.331
3.0	20.187	9.818
5.0	28.588	11.167
7.0	31.575	12.197

Tableau [IV-11] Nusselt établi pour différentes valeurs de Bn et $Br \neq 0$

Pour le cas d'un flux uniforme imposé à la paroi, l'auto réchauffage du fluide par effet de frottement lors de son écoulement provoque une diminution de l'intensité de l'échange thermique dans la zone d'entrée et celle du régime thermiquement établi (figure [IV-25]). Cette diminution est amplifiée par la contrainte seuil, du moment qu'elle accentue l'effet de la dissipation visqueuse (figure [IV-26]).

Il est remarqué que, différemment du cas d'une température imposée à la paroi, la valeur de Nu établi décroît avec l'accroissement de Br et de Bn qui résulte de la diminution de l'écart de température entre le fluide et la paroi. Le tableau [IV-12] présente des valeurs de Nu établi pour différentes valeurs de Br et Bn .

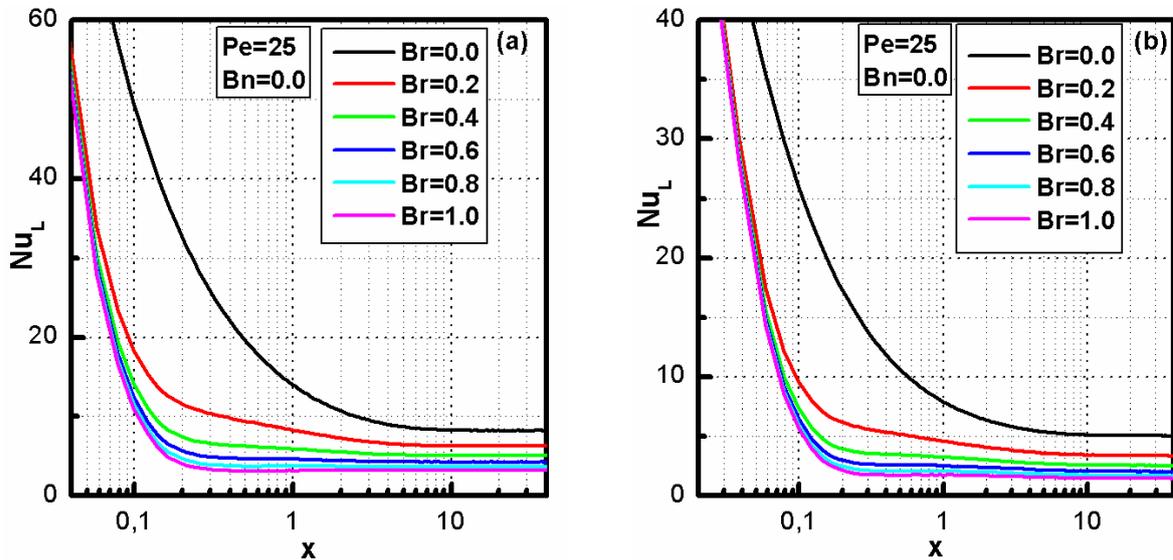


Figure [IV-25] Evolution de Nusselt local pour différentes valeurs de Br ($Bn=0$, $Pe=25$).

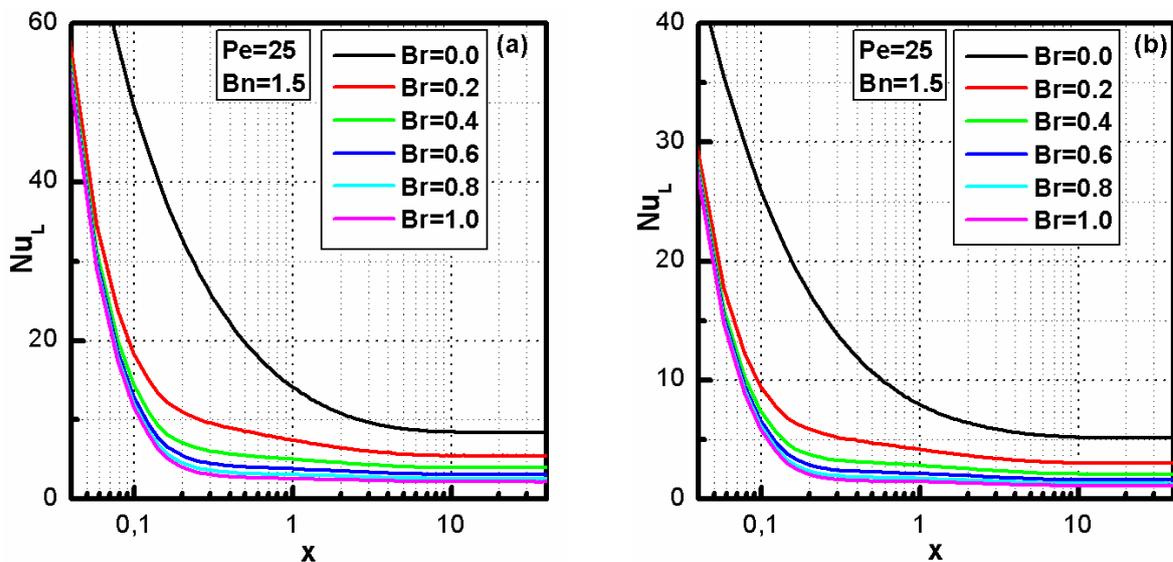


Figure [IV-26] Evolution de Nusselt local pour différentes valeurs de Br ($Bn=1.5$, $Pe=25$).

Flux imposé aux parois										
	Plaques planes					Conduite cylindrique				
$\frac{Br}{Bn}$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
0.0	8.234	6.251	5.036	4.217	3.627	4.234	2.877	2.180	1.751	1.465
1.0	8.591	5.674	4.236	3.380	2.811	4.359	2.657	1.921	1.506	1.242
3.0	9.064	4.725	3.196	2.415	1.940	4.566	2.293	1.550	1.173	0.958
5.0	9.372	4.028	2.565	1.881	1.485	4.623	2.020	1.306	0.982	0.741
7.0	9.576	3.510	2.149	1.548	1.210	4.738	1.700	1.072	0.787	0.624

Tableau [IV-12] Nusselt établi pour différentes valeurs de Bn et Br

Cette diminution de l'intensité de l'échange de chaleur entre la paroi et le fluide causée par l'effet simultané de la contrainte seuil et la dissipation visqueuse, fait qu'une grande partie du flux imposé à la paroi ne contribue qu'au réchauffage de celle-ci, ce qui induit l'élévation de sa température. La figure [IV-27] présente l'évolution de la température de la paroi pour différentes valeurs de Br et Bn . Il est constaté aisément, que la paroi se réchauffe à des températures de plus en plus élevées que les valeurs du seuil de contrainte et de la dissipation visqueuse deviennent importantes.

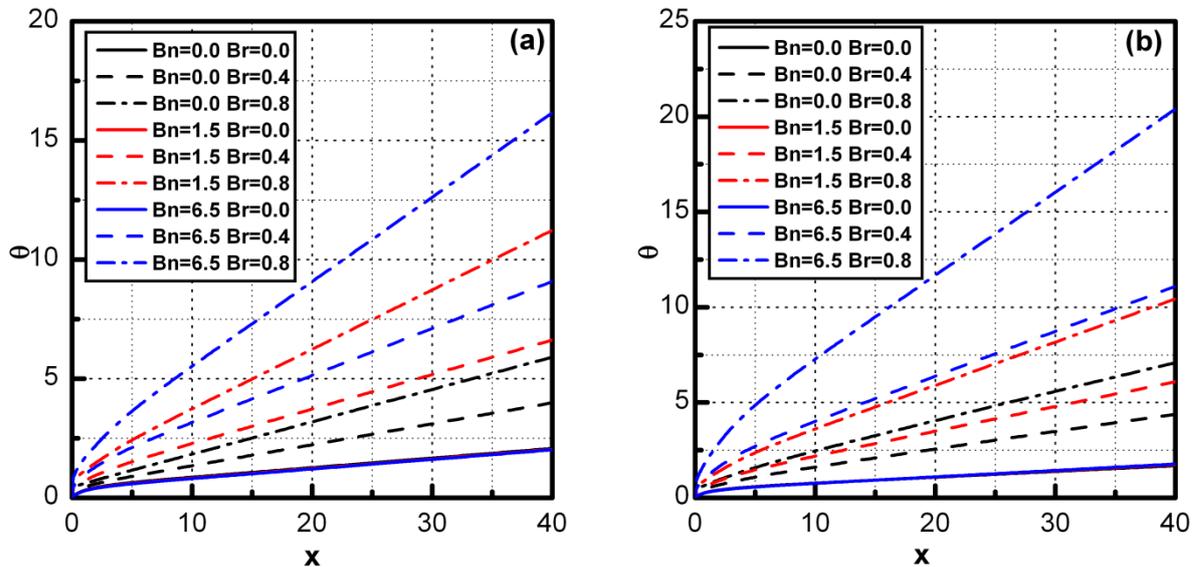


Figure [IV-27] Evolution la température de la paroi pour différentes valeurs de Br et Bn .

IV.3 Conclusion :

Dans cette partie du présent travail, l'effort est focalisé sur l'analyse de la structure hydrodynamique et thermique d'un écoulement non-isotherme entre deux plaques planes et à travers une conduite cylindrique d'un fluide viscoplastique idéal (fluide de Bingham). Cette

analyse a permis de mettre en évidence l'influence exercée par les différents paramètres caractéristiques de l'écoulement et du fluide sur les champs de vitesses, de pression et de température.

Les résultats obtenus ont permis en particulier, de déceler l'importance de l'effet exercé par la contrainte seuil sur la structure de l'écoulement et le transfert thermique, et de justifier la nécessité impérative de tenir compte de l'effet de la dissipation visqueuse lors des analyses thermiques associées à cette catégorie de fluides.

De même, ces résultats ont permis de développer des corrélations mathématiques permettant de calculer les différents paramètres technologiques indispensables pour le désigne des installations utilisant ce genre de fluides.

En résumé, les principaux résultats obtenus sont comme suit:

- ✓ L'existence d'un seuil de contrainte engendre l'apparition au niveau de l'axe de symétrie d'une zone dépourvue de déformation, qui forme un bouchon de fluide se déplaçant en bloque.
- ✓ L'accroissement de la contrainte seuil provoque la diminution de la vitesse du bouchon fluide et sa tendance à envahir la section d'écoulement.
- ✓ La longueur nécessaire à l'établissement d'un régime hydrodynamique diminue sensiblement avec l'accroissement de la contrainte seuil.
- ✓ Une augmentation du nombre de Reynolds entraîne à son tour une augmentation de la longueur d'établissement.
- ✓ La perte de charge par friction augmente avec l'accroissement du nombre de Reynolds et de la contrainte seuil.
- ✓ Une augmentation du nombre de Peclet entraîne une intensification de l'échange thermique dans la zone d'entrée.
- ✓ Le nombre de Nusselt établi reste insensible à l'accroissement du nombre de Peclet.
- ✓ L'accroissement de la contrainte seuil provoque une faible intensification de l'échange thermique ressentie dans les deux zones d'écoulement (zone d'entrée et zone d'établissement thermique).
- ✓ La dissipation visqueuse influe sensiblement sur le champ de température et l'intensité de l'échange thermique.

Nomenclature

Br	Nombre de Brinkman.
f Re	Facteur de friction adimensionnel.
R*	Hauteur caractéristique du domaine physique (m).
K*	Diffusivité thermique (m ² /s).
L*	Longueur caractéristique du domaine physique (m).
Le _v	Longueur adimensionnelle de développement hydrodynamique.
Nu	Nombre de Nusselt Local.
Nu _∞	Valeur asymptotique du nombre de Nusselt.
p*	Pression (Pa).
p	Pression adimensionnelle.
P ₀ *	Pression de référence.
Pe	Nombre de Peclet.
Pr	Nombre de Prandlt.
Re	Nombre de Reynolds.
T*	Température (°K).
T _e *	Température à l'entrée (°K).
T _p *	Température de la paroi solide (°K).
u*	Vitesse longitudinale (m/s).
u	Vitesse longitudinale adimensionnelle.
u _m *	Vitesse longitudinale moyenne (m/s).
v*	Vitesse transversale (m/s).
v	Vitesse transversale adimensionnelle.
x*	Coordonnée longitudinale (m).
x	Coordonnée longitudinale adimensionnelle.
y*	Coordonnée transversale (m).
y	Coordonnée transversale adimensionnelle.
Bn	Nombre de Bingham.
τ*	Contrainte de cisaillement (Pa).

τ_0^*	La contrainte seuil (Pa).
\square	Vitesse déformation adimensionnelle.
γ	
ρ	La densité (Kg/m ³).
μ_p^*	Viscosité plastique (Pa.s).
μ_{eff}	Viscosité apparente adimensionnelle.
Θ	Température adimensionnelle.
θ_m	Température du mélange adimensionnelle.
θ_p	Température adimensionnelle de la paroi solide.

Références

- [1] **Sellars, J. R., Tribus, M., and Klein, J. S.**, 1956. Heat transfer to laminar flow in a round tube of flat conduit – The Graetz problem extended. ASME transaction, 78: 441-448.
- [2] **Siegel, R., Sparrow, E. M., and Hallman, T. M.**, 1958. Steady laminar heat transfer in a circular tube with prescribed wall heat flux. Applied Scientific Research, Sec. A7: 386-392.
- [3] **Hsu, C. J.**, 1967. An exact mathematical solution for entrance region laminar heat transfer with axial conduction. Applied Scientific Research, Vol. 17, pp. 359-376.
- [4] **Ou, J. W., and Cheng, K. C.**, 1973. Viscous dissipation effects on thermal entrance region heat transfer in pipes with uniform wall heat flux. Applied Scientific Research, 28: 289-301.
- [5] **Kays, W. M., and Grawford, M. E.**, 1993. Convective heat and masse transfer. 3rd Ed. McGraw-Hill, New York.
- [6] **Bird, R. B., Armstrong, R. C., and Hassager, O.**, 1987. Dynamics of polymeric liquids. (Vol. I, Fluid Mechanics), John Wiley and Sons, New York.
- [7] **Basu, T., and Roy, D. N.**, 1985. Laminar heat transfer in a tube with viscous dissipation. Int. J. Heat Transfer, 28: 699-701.
- [8] **Lin, T., Hawks, K. H., and Leindenfrost, W.**, 1983. Analysis of viscous dissipation effect on thermal entrance heat transfer in laminar pipe flows with convective boundary conditions. Wärme stoffübertragung, 17: 97-105.
- [9] **Back, L., and Roshke, E.**, 1972. Shear layer regimes and wave instabilities and reattachment lengths downstream of an abrupt circular channel expansion. J. Appl. Mech., 94: 677-681.
- [10] **Shah, R. K., and London, A. L.**, 1978. Laminar flow forced convection in ducts. Advances in Heat Transfer, Supplement 1, Academic Press, New York.
- [11] **Wissler, E. H., and Schechter, R. S.**, 1959. The Graetz-Nusselt problem (with extension) for a Bingham plastic. Chemical Engineering Progress Symposium, Series 29. 55: 203-208.
- [12] **Blackwell, B. F.**, 1985. Numerical solution of the Graetz problem for a Bingham plastic in laminar tube flow with constant wall temperature. ASME Journal of Heat transfer, 107: 466-468.
- [13] **Johnston, P. R.**, 1991. Axial conduction and the Graetz problem for a Bingham plastic in laminar tube flow. International Journal of Heat and Mass Transfer, 34:

1209-1217.

- [14] **Min, T., Yoo, J. Y., and Choi, H.**, 1997a. Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in circular pipe –I. Analytical approach- thermally fully developed flow and thermally developing flow (The Graetz problem extended). *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40: 3025-3037.
- [15] **Min, T., Yoo, J. Y., Choi, H. G., and Choi, H.**, 1997b. Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in circular pipe –II. Numerical approach- Hydrodynamically developing flow and simultaneously developing flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40: 3689-3701.
- [16] **Vradis, G. C., Dougher, J., and Kumar, S.**, 1993. Entrance pipe flow and heat transfer for a Bingham plastic. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 36: 543-552.
- [17] **Quaresma, J. N. N., and Macêdo, E. N.**, 1998. Integral transform solution for the forced convection of Herschel-Bulkley fluids in circular tubes and parallel-plates ducts. *Braz. J. Chem. Eng.* Vol. 15, n°1, Sao Paulo.
- [18] **Khatyr, R., Ouldhadda, D., Il Idrissi, A.**, 2003. Viscous dissipation effects on the asymptotic behaviour of laminar forced convection for Bingham plastics in circular ducts. *Inter. J. Heat and Mass Transfer*, 46: 589–598.
- [19] **Orhan Aydin**, 2005. Effects of viscous dissipation on the heat transfer in forced pipe flow. Part 1: both hydrodynamically and thermally fully developed flow. *Energy Conversion and Management*, 46: 757–769.
- [20] **Nouar, C.**, 2005. Thermal convection for a thermo-dependent yield stress fluid in an axisymmetric horizontal duct, *Inter. J. Heat and Mass Transfer*, 48: 5520–5535.
- [21] **Lin, T., and Shah, V. L.**, 1978. Numerical solution of heat transfer to yield power-law fluids flowing in the entrance region. *Proc. Of the 6th International Heat Transfer Conference*, 317-322, Toronto.

Écoulement des fluides Binghamiens à travers un élargissement brusque.

Chapitre V

V.1 Introduction :

Les écoulements à travers des conduits munis d'expansions ou de contractions brusques ont constitués depuis plusieurs décennies, le centre d'intérêt d'une multitude d'investigations principalement numériques et expérimentales [1-7]. Ces études ont été orientées vers l'analyse de l'effet exercé par l'inertie sur la zone tourbillonnaire ainsi que le coefficient de perte de charge local en considérant essentiellement le cas des fluides newtoniens.

Cependant, les travaux recensés dans le cas des fluides ayant un comportement non newtonien restent peu nombreux malgré leur vaste présence dans la nature et leur utilisation fréquente dans les procédés industriels [8-10]. Parmi ces travaux, l'analyse numérique d'Alexandrou et al. [11] qui ont considéré l'écoulement d'un fluide de Herschel–Bulkley dans une conduite horizontale de section carrée munie d'un élargissement brusque. Les résultats obtenus, pour un rapport géométrique 1:2 et 1:4, ont montré une forte interférence entre l'effet de l'inertie et de la contrainte seuil sur les dimensions et l'intensité de la zone tourbillonnaire. Vradis et Ötügen [12] ont analysé numériquement l'écoulement d'un fluide de Bingham à travers un élargissement brusque axisymétrique de rapport géométrique 1:2. Ils ont conclu que la longueur de décollement augmente avec le nombre de Reynolds, diminue avec la contrainte seuil et qu'elle est indépendante du rapport géométrique de l'élargissement. Une autre étude a été réalisée par Jay et al. [13], où ils ont analysé l'écoulement d'un fluide à seuil de contrainte à travers un élargissement brusque axisymétrique de rapport 1:4 en adoptant la régularisation de l'équation de Herschel–Bulkley et de Bingham par la loi bi-viscosité. L'influence du cisaillement, de l'inertie et de la contrainte seuil sur la structure de

l'écoulement et sur la perte de charge a été étudiée. Ils ont souligné essentiellement l'effet contradictoire de l'inertie et de la contrainte seuil sur la zone tourbillonnaire.

Dans ce chapitre nous avons analysé le développement hydrodynamique et thermique de l'écoulement d'un fluide non newtonien (fluide de Bingham) à travers un élargissement brusque de rapport géométrique 1:2. Cette étude consiste donc, à analyser l'influence simultanée de l'inertie et de la contrainte seuil sur la structure de l'écoulement, à savoir, la zone tourbillonnaire, la perte de charge locale et le coefficient d'échange thermique.

V.2 Développement hydrodynamique et thermique de l'écoulement d'un fluide de Bingham à travers un élargissement brusque :

V.2.1 Equations gouvernant le problème :

L'écoulement stationnaire, laminaire et non-isotherme d'un fluide de Bingham à travers un élargissement brusque est gouverné par le même système d'équation aux dérivées partielles défini dans le chapitre précédent (Eq : IV-1...IV-6) qui comporte l'équation de continuité, l'équation de conservation de la quantité de mouvement, l'équation de l'énergie ainsi que celle du comportement rhéologique du fluide.

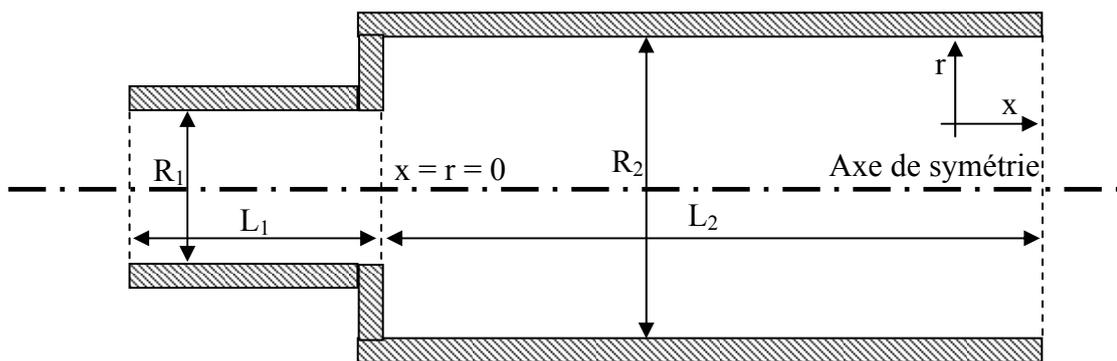


Figure [V-1] : Domaine physique de l'écoulement

La figure [V-1] donne une représentation graphique du domaine physique de l'écoulement. Cette configuration schématise simultanément un problème plan ($\xi = 0$) qui

correspond à un écoulement entre deux plaques parallèles formant un élargissement brusque et un problème axisymétrique ($\xi = 1$) qui considère la même géométrie mais composée cette fois-ci de conduites cylindriques. Pour éviter la distorsion des champs hydrodynamiques en amont de l'élargissement et assurer l'établissement de l'écoulement en son aval des longueurs $L_1 = 10R_1$ et $L_2 = 40R_1$ ont été choisis respectivement. La configuration étudiée présente un axe de symétrie qui offre la possibilité de réduire le domaine de calcul.

Les conditions considérées aux limites représentées dans la figure [V-2] sont en variables adimensionnelles comme suit:

- Vitesse établie et température uniforme à l'entrée Γ_1 :

$$- \quad u = f(r, Bn), v = 0, \theta = 0;$$

- Condition de non glissement aux parois adiabatiques Γ_2 et Γ_3 :

$$- \quad u = v = 0, \partial\theta/\partial r = 0;$$

- Profil de vitesse et de température établi à la sortie Γ_4 :

$$- \quad \partial u/\partial x = v = 0, \partial\theta/\partial x = 0;$$

- Condition sur l'axe de symétrie Γ_5 :

$$- \quad \partial u/\partial r = v = 0, \partial\theta/\partial r = 0;$$

N.B :

Les profils de vitesses établis ($u = f(y, Bn)$) considérés à la frontière Γ_1 sont ceux déterminés numériquement dans le chapitre précédent (Figure [V-2]).

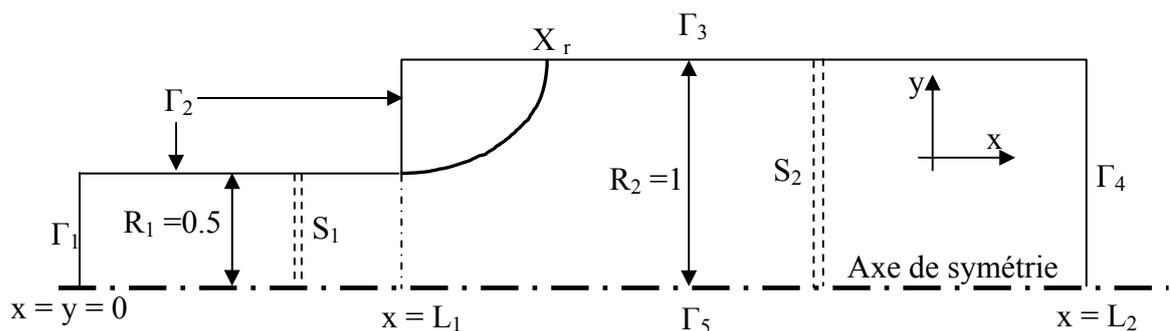


Figure [V-2] : Domaine de calcul

S_1 et S_2 : représentent des sections d'écoulement où règne un régime hydrodynamique établi, situées respectivement en amont et en aval de l'élargissement brusque.

X_r : est l'abscisse du point de rattachement. Ce dernier est défini comme étant le point de la zone tourbillonnaire le plus loin de la section de l'élargissement.

Le calcul a été effectué en utilisant un maillage non-uniforme avec une dense concentration au niveau de l'élargissement (figure [V-3]). Les éléments adoptés sont quadrilatéraux et biquadratiques (9 nœuds). Un test a été effectué pour le choix d'un maillage qui assure l'indépendance des résultats de la dimension des mailles. Ceci a abouti au choix de la combinaison (50×10) éléments en amont et (50×26) en aval de l'expansion.

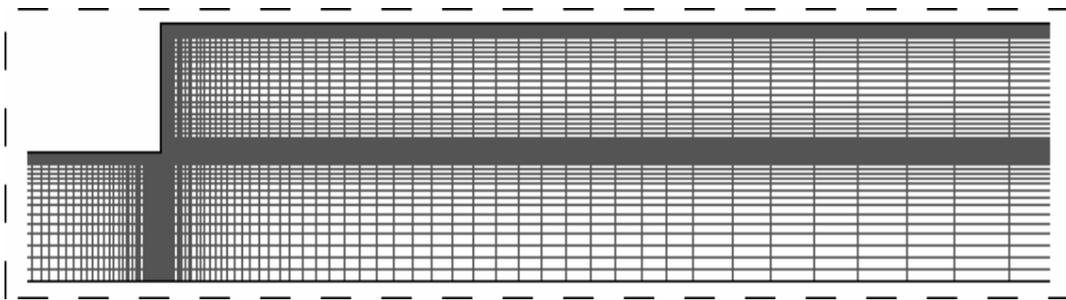


Figure [V-3] : Maillage structuré non uniforme utilisé pour les calculs numériques

V.3 Résultats et interprétations :

V.3.1 Régime hydrodynamique :

V.3.1.1 Effet de l'inertie sur le profil axial de vitesse :

L'évolution de la vitesse axiale(u), considérée sur l'axe de symétrie de l'élargissement, est représentée dans les figures [V-4] et [V-5] pour différentes valeurs de Reynolds, respectivement pour le cas d'un fluide newtonien et un fluide semi solide de Bingham($Bn = 3$). Que ce soit un problème plan(a) ou axisymétrique(b), les courbes représentatives de cette évolution présentent toutes une même allure formée par trois (3) zones distinctes :

Les zones (I) et (III) sont caractérisées par l'uniformité de la vitesse($u = cts$). Elles traduisent de ce fait, un écoulement en régime établi.

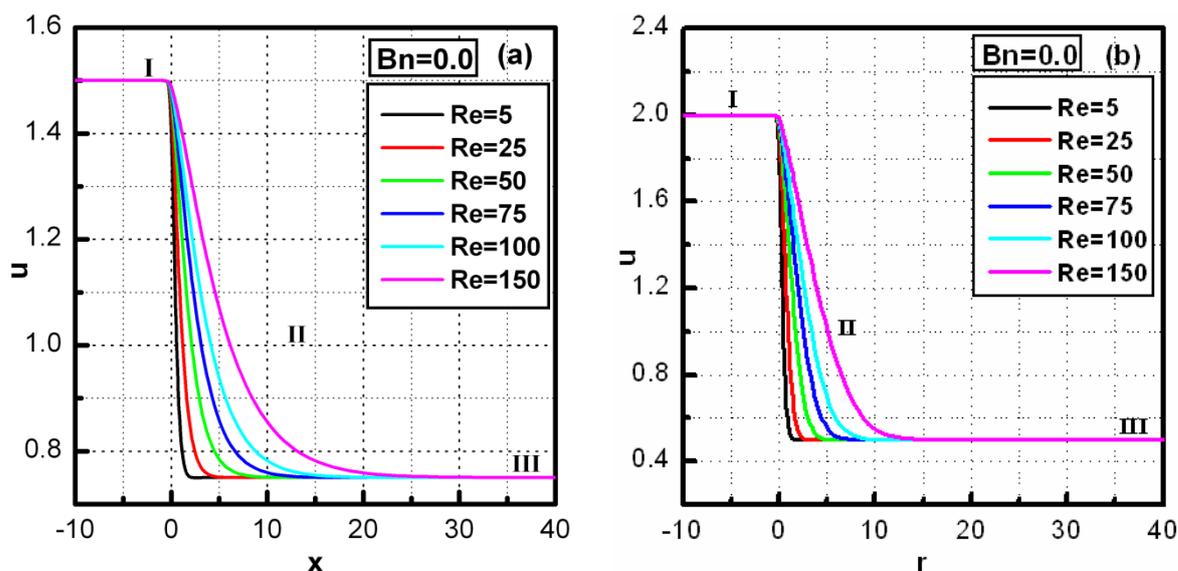


Figure [V-4] : L'influence de l'inertie sur le profil de vitesses axial ($Bn = 0.0$).
a- problème plan, **b-** problème axisymétrique.

La zone (II) correspond à un état de transition entre les deux régimes établis situés à l'amont et en aval de l'élargissement. Cette transition localisée au niveau du changement de section, s'étale de plus en plus vers l'aval que le nombre de Reynolds devient important (figure [V-4]).

La figure [V-5] indique clairement, la restriction de la zone (II) occasionnée par la présence d'un seuil de contrainte. Un fait qui est justifié par la diminution de la vitesse sur l'axe de symétrie, causée essentiellement par l'existence d'un écoulement bouchon.

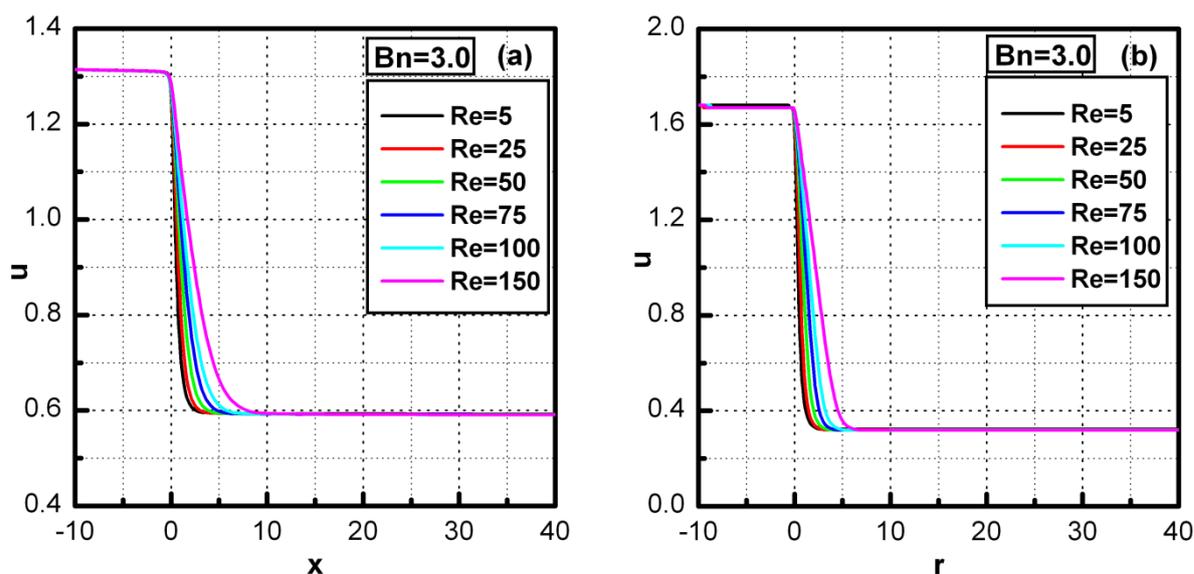


Figure [V-5] : L'influence de l'inertie sur le profil de vitesses axial ($Bn = 3.0$).
a- problème plan, **b-** problème axisymétrique.

V.3.1.2 Effet de la contrainte seuil sur le profil axial de vitesse :

Comme il a été constaté dans le chapitre précédent, l'existence d'un seuil de contrainte est à l'origine de la formation d'un écoulement bouchon. Celui-ci est caractérisé par son envahissement de la section d'écoulement avec l'accroissement de la valeur du Bn , accompagné d'une diminution de plus en plus aiguë de sa vitesse.

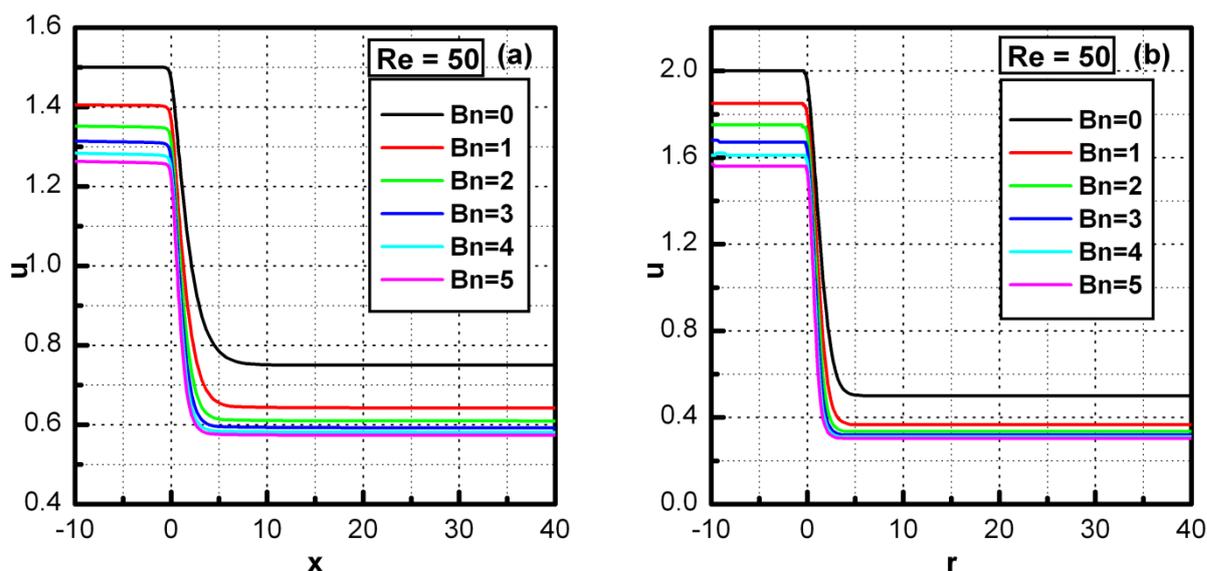


Figure [V-6] : L'influence de la contrainte seuil sur le profil de vitesses axial ($Re = 50$)
a- problème plan, **b-** problème axisymétrique.

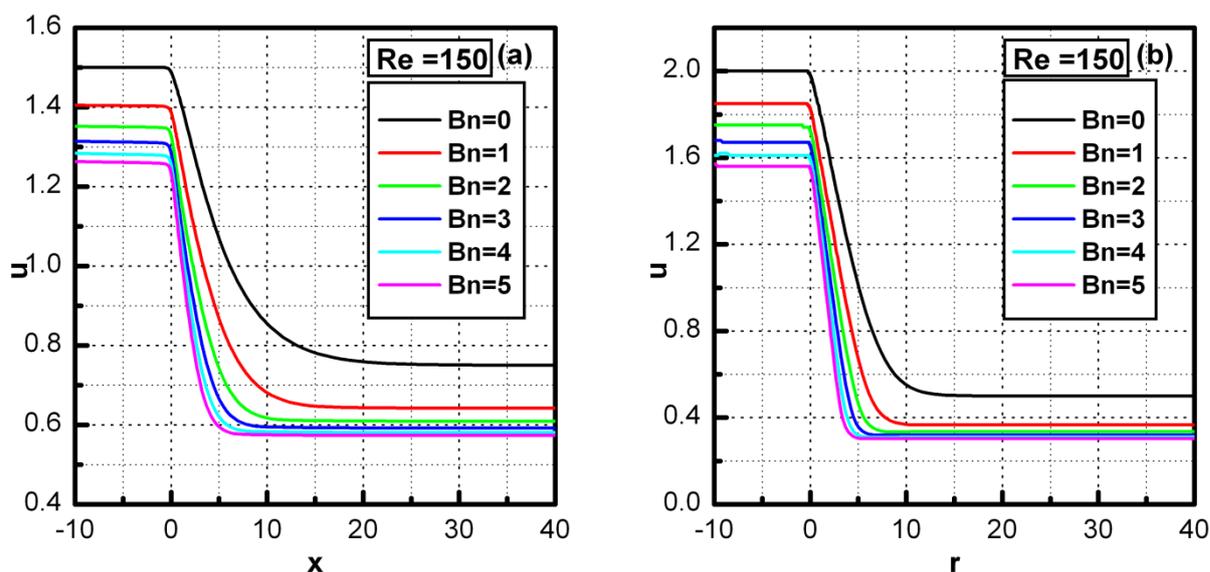


Figure [V-7] : L'influence de la contrainte seuil sur le profil de vitesses axial ($Re = 150$).
a- problème plan, **b-** problème axisymétrique.

Ce constat est explicitement illustré par les figures [V-6] et [V-7], qui présentent l'évolution du profil de vitesse axial pour différentes valeurs de Bn , respectivement pour un Re égal à 50 et 150. On en déduit de plus, la diminution de la zone de transition qui n'est en fait que la longueur nécessaire à l'établissement hydrodynamique de l'écoulement après la perturbation engendrée par le passage à travers l'élargissement.

V.3.1.3 Effet de l'inertie sur la zone tourbillonnaire :

Le passage d'un fluide à travers un élargissement brusque conduit à la formation d'une zone dite tourbillonnaire, localisée au niveau du coin supérieur formé par le changement subit de la section d'écoulement.

Les figures [V-8] illustre l'influence de l'inertie sur la zone tourbillonnaire. On remarque que L'augmentation du nombre de Reynolds provoque un allongement du tourbillon fluide et l'éloignement vers l'aval du point de recollement (Xr). Ce dernier est formé par l'intersection de la ligne de courant délimitant la zone de recirculation et la paroi.

L'évolution de la valeur du point de recollement présente une forme linéaire pour des valeurs importantes du nombre de Reynolds. Cette évolution par contre, tend vers une valeur asymptotique lors d'un écoulement rampant (faibles nombres de Reynolds). Ce constat, illustré par la figure [V-9], correspond avec ce lui formulé par Pinho et al [14] en considérant l'écoulement d'un fluide de puissance à travers un élargissement brusque axisymétrique de rapport géométrique 1: 2.6.

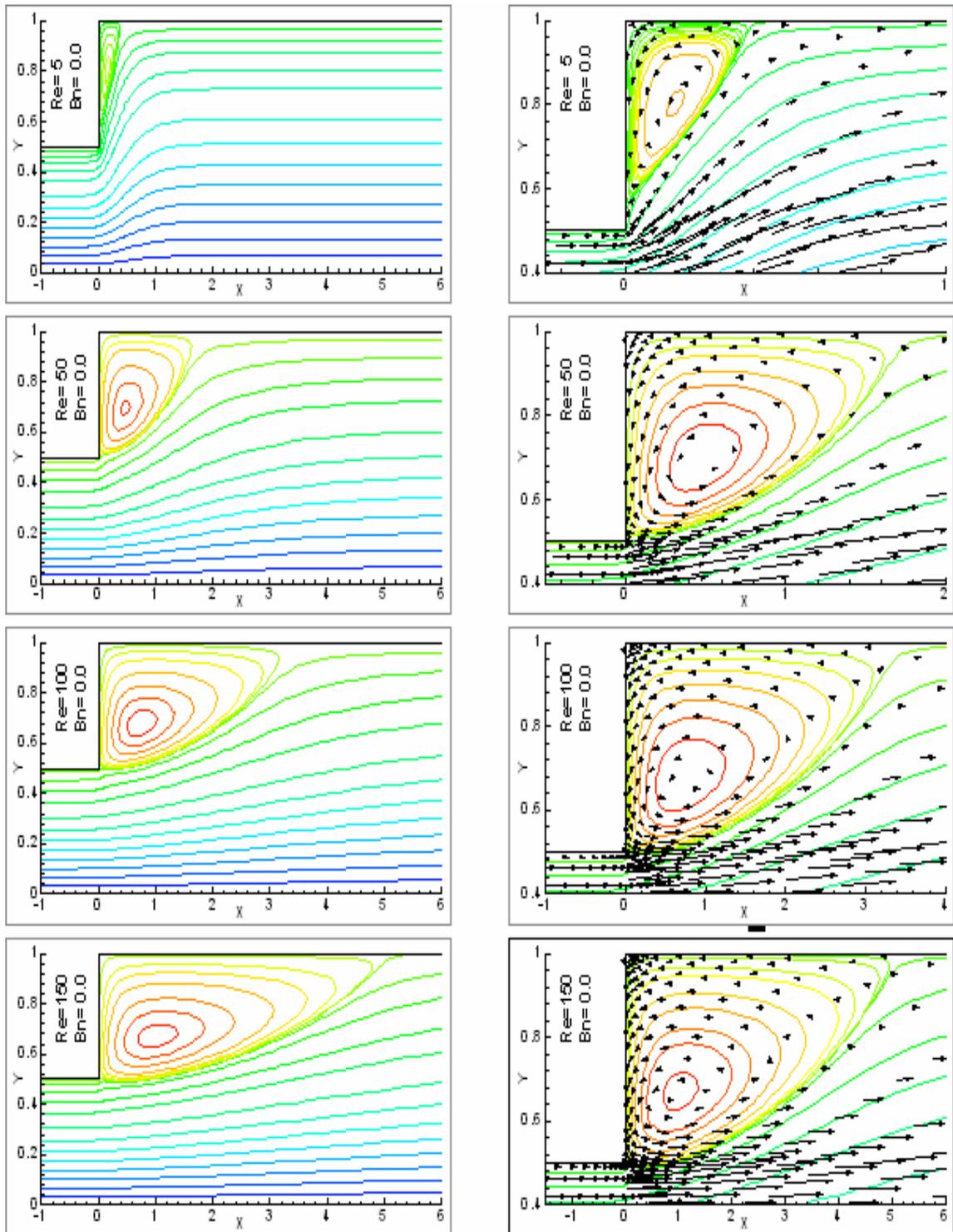


Figure [V-8] : Lignes de courant et vecteurs vitesses pour $Re=5, 50, 100$ et 150 . Cas d'un fluide newtonien ($Bn=0$) et d'un problème plan.

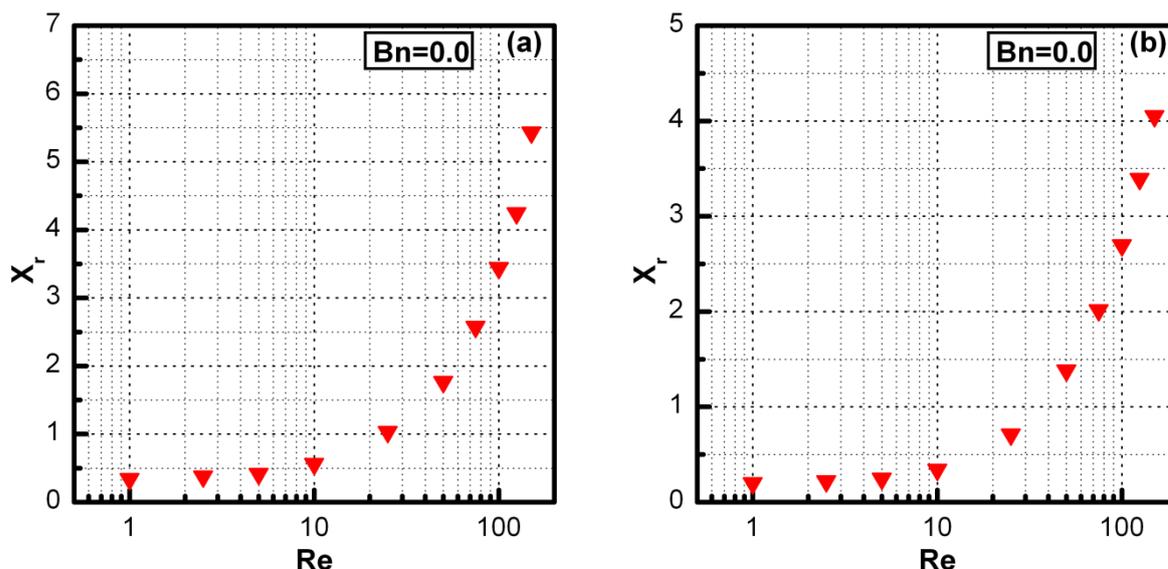


Figure [V-9] : Evolution du point de recollement en fonction de Re ($Bn=0$).
a- problème plan, **b-** problème axisymétrique.

V.3.1.4 Effet de la contrainte seuil sur la zone tourbillonnaire :

L'influence exercée par la contrainte seuil sur la zone tourbillonnaire est illustrée par le [figure \[V-10\]](#), qui représente les tracés des lignes de courant pour différentes valeurs de Bn pour le cas d'un $Re = 50$ (a) et $Re = 150$ (b). Ces figures montrent que, contrairement à l'inertie, le seuil de contrainte réduit la taille de la zone tourbillonnaire et que cette réduction s'accroît avec l'accroissement des valeurs du nombre de Bingham.

La diminution de la zone tourbillonnaire est causée essentiellement par les fortes valeurs de viscosité caractéristique des fluides viscoplastiques. Cet effet s'accroît avec l'accroissement de la contrainte seuil, d'une part, à cause de la viscosité effective du fluide de plus en plus importante, et d'une autre part, en raison de la prise de l'ampleur que manifeste la zone non cisailée en envahissant de plus en plus la section d'écoulement et en se rapprochant de l'élargissement, provoquant ainsi l'écrasement du tourbillon. Ce constat est nettement illustré par le [figure \[V-11\]](#) qui présente la distribution du champ de viscosité pour différentes valeurs de Bn et un nombre de Reynolds égale à 150.

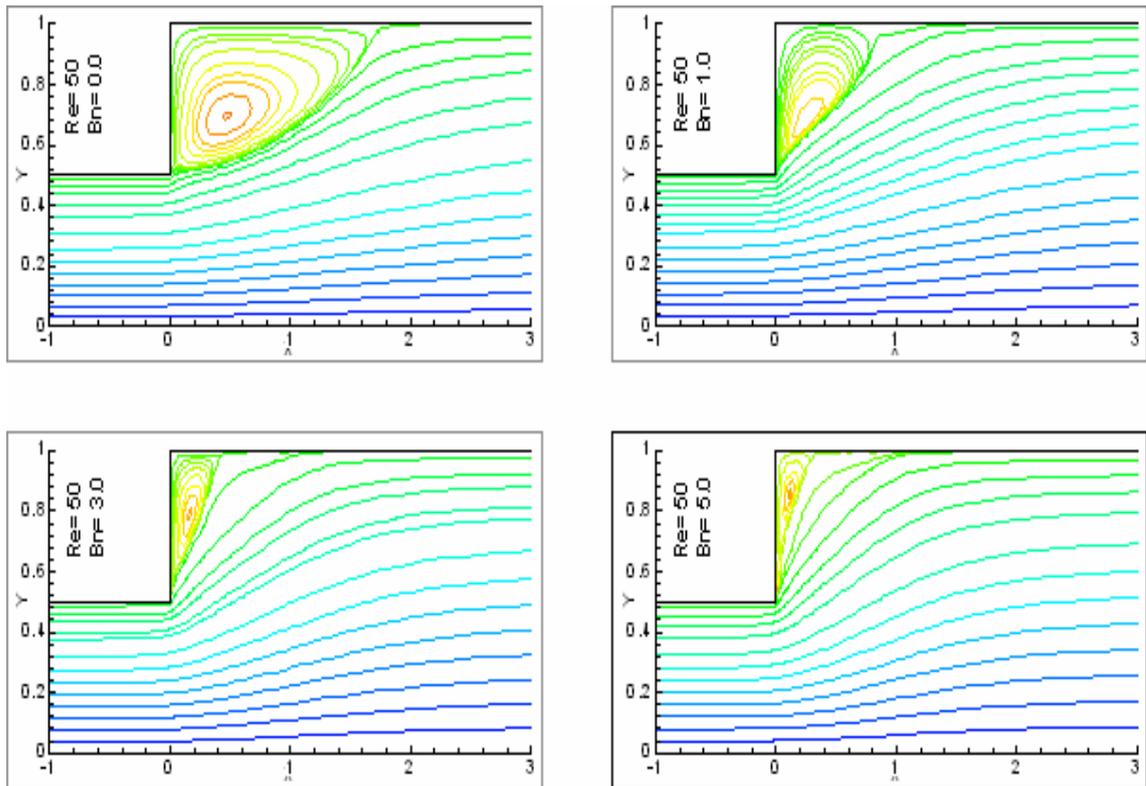


Figure [V-10-a] : Lignes de courant pour $Bn = 0, 1, 3$ et 5 ($Re = 50$).

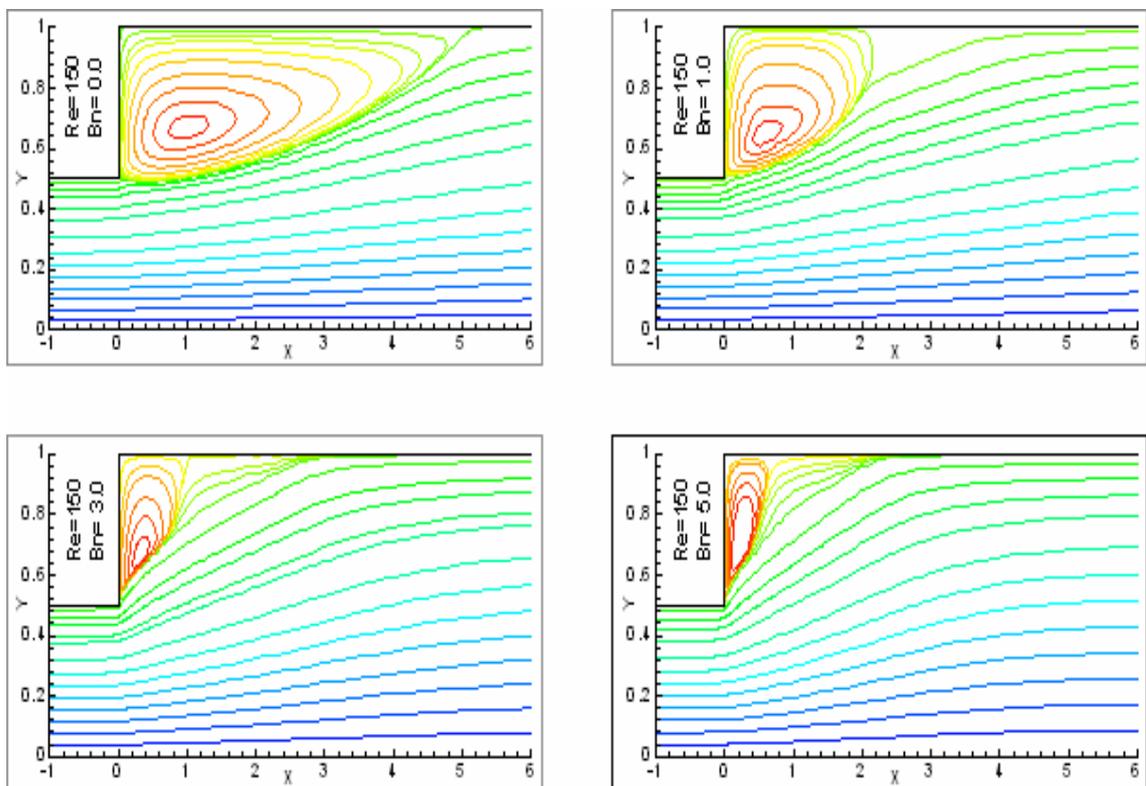


Figure [V-10-b] : Lignes de courant pour $Bn = 0, 1, 3$ et 5 ($Re = 150$).

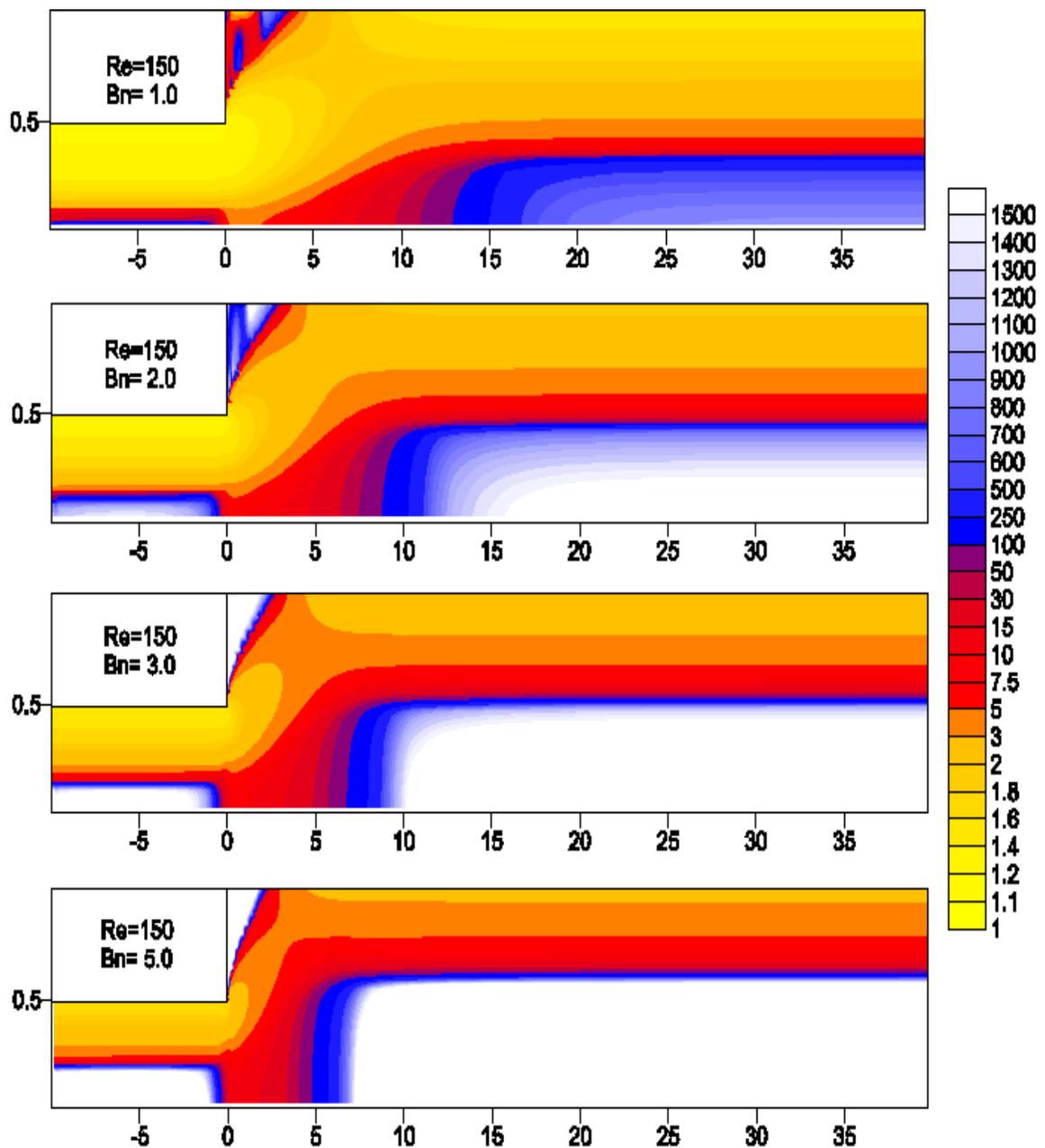


Figure [V-11] : Distribution du champ de viscosité effective η_{eff} pour $Re=150$, $Bn = 1, 2, 3$ et 5 (problème plan)

La figure [V-12] illustre l'influence de la contrainte seuil sur le point de recollement en présentant les tracés de l'évolution de ce dernier en fonction du nombre de Bingham pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. Cette figure montre l'effet antagoniste de l'inertie et de la contrainte seuil sur la zone tourbillonnaire, car il est noté que les valeurs croissantes du nombre de Re occasionne un éloignement du point de recollement vers l'aval,

contrairement à l'accroissement du nombre de Bn qui engendre le rapprochement de ce point de l'élargissement brusque.

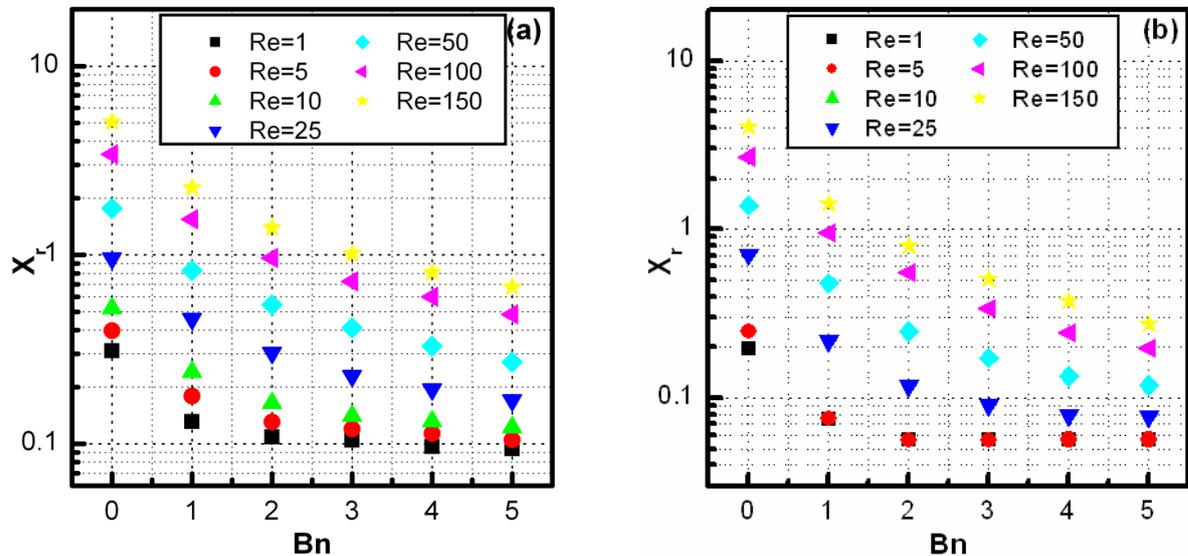


Figure [V-12] : L'évolution du point de recollement (X_r) en fonction de Bn pour différentes valeurs du nombre de Reynolds
a- problème plan, **b-** problème axisymétrique.

V.3.1.5 Champ de pression :

La figure [V-13] présente des tracés représentatifs de l'évolution de la pression sur l'axe de symétrie pour différentes valeurs de Reynolds, respectivement pour le cas d'un $Bn = 0$ et 3. Les deux cas, écoulement plan et axisymétrique, sont considérés.

Il est remarqué que la perte de pression est nettement plus importante lorsque le fluide possède un seuil de contrainte ($Bn \neq 0$). Ce fait est lié aux fortes valeurs de viscosité localisées au niveau de la zone non cisailée du fluide qui engendrent une importante perte d'énergie lors de l'écoulement, ce qui se traduit par une forte chute de pression. La perte de pression sera par conséquent, de plus en plus accentuée que la valeur de la contrainte seuil est élevée.

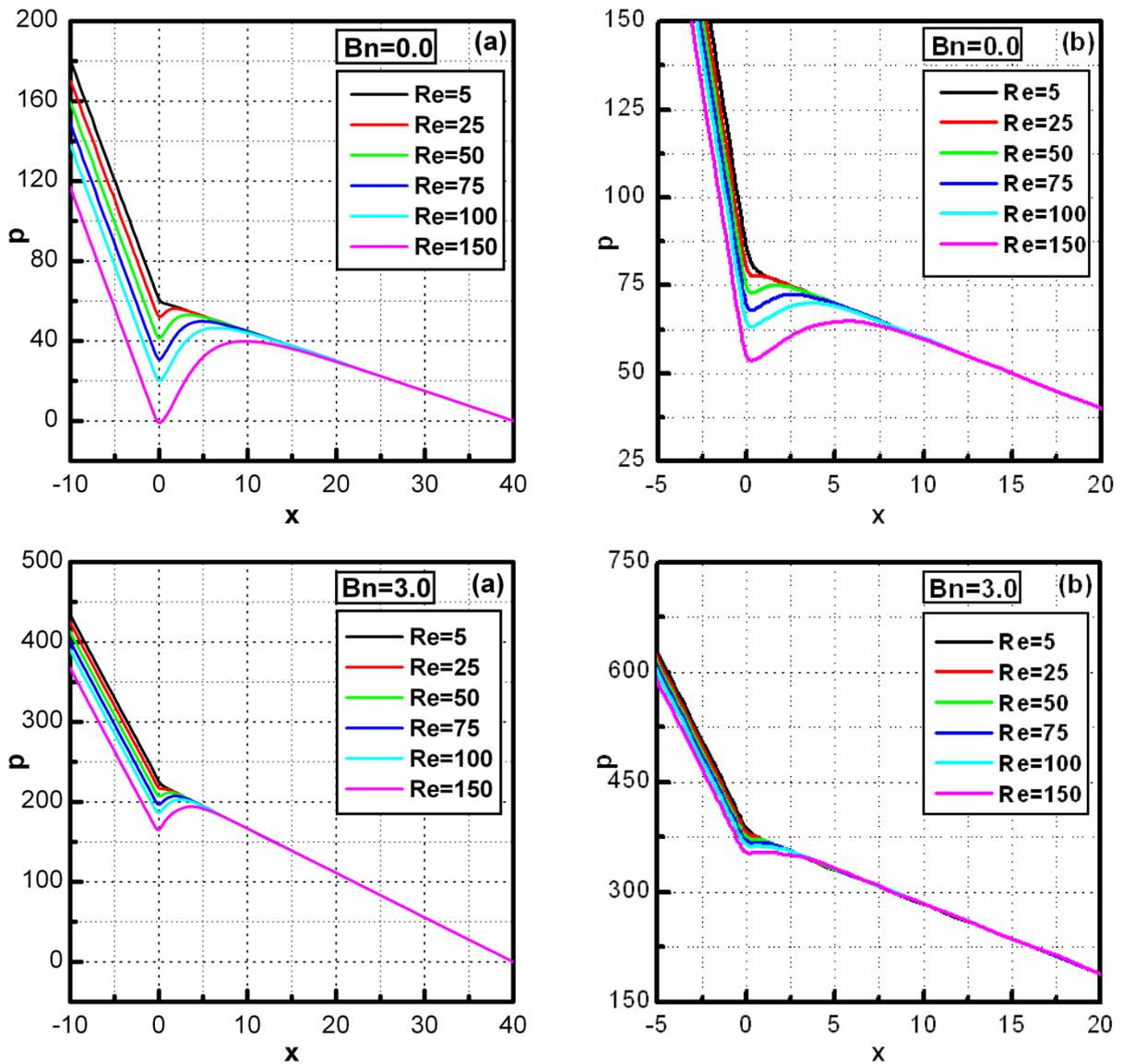


Figure [V-13] : L'évolution de la pression sur l'axe de symétrie pour $Bn=0$, $Bn=3$ et différentes valeurs de Re
a- problème plan, **b-** problème axisymétrique.

V.3.1.6 Détermination du coefficient de perte de charge local :

Dans ce paragraphe, on procède à la détermination du coefficient de perte de charge locale pour différentes valeurs du Reynolds et de la contrainte seuil. Ce paramètre d'une très grande importance dans les calculs hydrauliques des installations industrielles, est déterminé à partir des tracées de l'évolution axiale de la pression recueillie sur l'axe de symétrie de l'expansion (figures [V-13]).

La méthode de détermination de ce coefficient exposée par Oliveira et Pinho [15], consiste à calculer l'écart entre les deux droites représentatives de la chute de pression par friction en amont et en aval de l'élargissement après leurs extrapolations au plan de ce dernier (figure [V-14]).

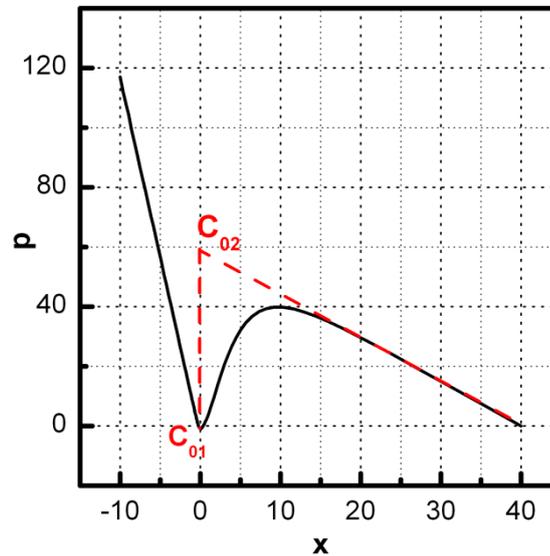


Figure [V-14] : Détermination du coefficient de perte de charge locale

En considérant la définition du coefficient de la perte de pression $C = P^* / \left(\frac{1}{2} \rho^* u_{m1}^{*2} \right)$, ce saut de pression est écrit alors :

$$C_{RI} = C_{02} - C_{01}$$

où C_{RI} dénote le saut de pression localisé au niveau de l'élargissement brusque. Ce saut constitue l'écart entre la perte de pression réversible occasionnée par la diminution de la vitesse au niveau de l'élargissement (C_R) et celle irréversible due à la dissipation inefficace de l'énergie cinétique qui accompagne le ralentissement du fluide et engendre la formation d'une zone tourbillonnaire (C_I).

Le coefficient de perte de pression irréversible s'écrira alors :

$$C_I = C_R - C_{RI}$$

avec :

$$C_R = \alpha_1 \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \sigma^2 \right)$$

où : α est le moment d'énergie déterminé par la relation : $\alpha = \overline{u^3} / \bar{u}^3$

avec :

$$\overline{u^3} = \iint u^3 ds / \iint ds \quad \text{et} \quad \bar{u} = \iint u ds / \iint ds$$

σ : est le rapport entre la surface d'écoulement amont et aval de l'élargissement (S_1/S_2).

Les indices 1 et 2 désignent deux sections localisées respectivement dans les zones d'écoulement établi amont et aval de l'élargissement.

Habituellement, l'écart entre le coefficient de perte de pression réversible et irréversible est donné par une relation théorique $(C_{RI})_{th}$ qui, d'après Oliveira et al [15], sous-estime la valeur réelle de C_{RI} à cause de la non prise en compte de la déformation du profile de vitesse au niveau de l'élargissement et du gradient de pression localisé au niveau de la paroi verticale de celui-ci. Cette relation est formulée comme suit

$$(C_{RI})_{th} = 2\beta_1\sigma \left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_1}\sigma\right)$$

où : β est le moment de la quantité du mouvement déterminé par la relation : $\beta = \overline{u^2}/\bar{u}^2$

avec :

$$\overline{u^2} = \iint u^2 ds / \iint ds$$

Le coefficient de perte de charge local où irréversible peut être estimé théoriquement par la relation suivante :

$$(C_I)_{th} = C_R - (C_{RI})_{th}$$

Les tableaux V-1 et V-2 présentent la valeur de C_R et $(C_I)_{th}$ pour différentes valeurs du nombre de Bingham respectivement pour le cas d'un problème plan (a) et d'un problème axisymétrique (b). Ces deux cas montrent que les coefficients de perte de charge réversible et irréversible sont indépendants du nombre de Reynolds, alors qu'ils diminuent avec l'accroissement du nombre de Bingham.

Problème plan						
Bn	α_1	α_2	β_1	β_2	C_R	$(C_I)_{th}$
0	1.546	1.543	1.201	1.200	1.1603	0.5585
1	1.475	1.353	1.179	1.138	1.1368	0.5268
2	1.425	1.279	1.162	1.111	1.1053	0.4988
3	1.386	1.238	1.149	1.096	1.0765	0.4755
4	1.356	1.211	1.139	1.086	1.0533	0.4573
5	1.333	1.191	1.131	1.076	1.0353	0.4423

Tableau V-1 : Coefficient de perte de charge réversible et irréversible pour différentes valeurs de Bn dans le cas d'un problème plan.

Problème axisymétrique						
Bn	α_1	α_2	β_1	β_2	C_R	$(C_I)_{th}$
0	2.009	2.001	1.336	1.334	1.8839	1.3827
1	1.926	1.597	1.314	1.220	1.8262	1.3217
2	1.854	1.454	1.295	1.173	1.7631	1.2623
3	1.794	1.379	1.278	1.143	1.7078	1.2117
4	1.742	1.330	1.263	1.131	1.6589	1.1688
5	1.698	1.296	1.250	1.118	1.6170	1.1318

Tableau V-2 : Coefficient de perte de charge réversible et irréversible pour différentes valeurs de Bn dans le cas d'un problème axisymétrique.

Usant de la méthode graphique de détermination du coefficient de perte de charge irréversible, les tableaux V-3, 4, 5 et 6 comportent les valeurs du coefficient de perte de charge locale irréversible en fonction du nombre de Reynolds respectivement pour un nombre de Bingham égale à 0, 1, 3 et 5. Ces tableaux montrent une forte diminution de C_I avec l'accroissement de Re pour l'écoulement à faible inertie (faible nombre de Reynolds) et une légère croissance de ce coefficient pour les valeurs relativement importantes de Re .

La comparaison des valeurs de C_I déterminées graphiquement avec celles issues de la relation théorique est réalisée en calculant l'écart relatif donné par la relation

$$Ec_r = \frac{(C_I - (C_I)_{th})}{C_I} \times 100\%$$

Re	Problème plan			Problème axisymétrique		
	C_{RI}	C_I	Ec(%)	C_{RI}	C_I	Ec(%)
1	-3.8884	5.0479	88.9	-12.6513	14.5352	90.5
2.5	-1.0332	2.1927	74.5	-4.446	6.3299	78.2
5	-0.0932	1.2527	55.4	-1.738	3.6219	61.8
10	0.3562	0.8033	30.5	-0.439	2.3229	40.5
25	0.5849	0.5746	2.8	0.2047	1.6792	17.7
50	0.6355	0.5240	-6.6	0.3386	1.5453	10.5
75	0.6458	0.5137	-8.7	0.3663	1.5176	8.9
100	0.6482	0.5113	-9.2	0.3759	1.5080	8.3
125	0.6459	0.5136	-8.7	0.3799	1.5040	8.1
150	0.6396	0.5199	-7.4	0.3817	1.5022	8.0
175	0.6383	0.5212	-7.2	0.3825	1.5014	7.9
200	0.6282	0.5313	-5.1	0.3827	1.5012	7.9
225	0.6219	0.5376	-3.9	0.3822	1.5017	7.9
250	0.6216	0.5379	-3.8	0.3811	1.5028	8.0

Tableau V-3 : Valeurs de C_{RI} et C_I pour $Bn=0$ et différentes valeurs du nombre de Reynolds.

Re	Problème plan			Problème axisymétrique		
	C_{RI}	C_I	Ec(%)	C_{RI}	C_I	Ec(%)
1	-5.3815	6.5183	91.9	-15.6594	17.48559	92.4
2.5	-1.6425	2.7792	81.0	-5.6754	7.50159	82.4
5	-0.4006	1.5374	65.7	-2.352	4.17819	68.4
10	0.2095	0.9272	43.2	-0.7328	2.55899	48.4
25	0.5494	0.5874	10.3	0.135	1.69119	21.8
50	0.6422	0.4946	-6.5	0.3453	1.48089	10.7
75	0.6689	0.4678	-12.6	0.3988	1.42739	7.4
100	0.6758	0.4610	-14.3	0.4216	1.40459	5.9
125	0.6783	0.4584	-14.9	0.4312	1.39499	5.3
150	0.6794	0.4574	-15.2	0.435	1.39119	5.0
175	0.6798	0.4569	-15.3	0.4365	1.38969	4.9
200	0.6795	0.4572	-15.2	0.4366	1.38959	4.9
225	0.6775	0.4593	-14.7	0.4379	1.38829	4.8
250	0.6737	0.4631	-13.8	0.4386	1.38759	4.7

Tableau V-4 : Valeurs de C_{RI} et C_I pour $Bn=1$ et différentes valeurs du nombre de Reynolds.

Re	Problème plan			Problème axisymétrique		
	C_{RI}	C_I	Ec(%)	C_{RI}	C_I	Ec(%)
1	-9.8698	10.9463	95.7	-22.9714	24.67921	95.1
2.5	-3.4530	4.5295	89.5	-8.8491	10.55691	88.5
5	-1.3180	2.3945	80.1	-3.88	5.58781	78.3
10	-0.2594	1.3359	64.4	-1.6168	3.32461	63.6
25	0.3556	0.7209	34.0	-0.128	1.83581	34.0
50	0.5405	0.5360	11.3	0.249	1.45881	16.9
75	0.5943	0.4822	1.4	0.3332	1.37461	11.9
100	0.6182	0.4583	-3.7	0.369	1.33881	9.5
125	0.6312	0.4453	-6.8	0.3735	1.33431	9.2
150	0.6393	0.4372	-8.8	0.4002	1.30761	7.3
175	0.6445	0.4320	-10.1	0.4075	1.30031	6.8
200	0.6482	0.4283	-11.0	0.4122	1.29561	6.5
225	0.6511	0.4254	-11.8	0.4171	1.29071	6.1
250	0.6534	0.4231	-12.4	0.4298	1.27801	5.2

Tableau V-5 : Valeurs de C_{RI} et C_I pour $Bn=3$ et différentes valeurs du nombre de Reynolds.

Re	Problème plan			Problème axisymétrique		
	C_{RI}	C_I	Ec(%)	C_{RI}	C_I	Ec(%)
1	-12.0099	13.0452	96.6	-29.7365	31.3535	96.4
2.5	-4.3270	5.3623	91.8	-10.8392	12.4562	90.9
5	-1.7702	2.8054	84.2	-5.59	7.207	84.3
10	-0.4973	1.5326	71.1	-2.1045	3.7215	69.6
25	0.2508	0.7845	43.6	-0.444	2.061	45.1
50	0.4825	0.5527	20.0	0.112	1.505	24.8
75	0.5516	0.4836	8.6	0.251	1.366	17.1
100	0.5825	0.4527	2.3	0.307	1.31	13.6
125	0.5995	0.4357	-1.5	0.3351	1.2819	11.7
150	0.6095	0.4257	-3.9	0.3528	1.2642	10.5
175	0.6131	0.4222	-4.8	0.3629	1.2541	9.8
200	0.6192	0.4160	-6.3	0.3716	1.2454	9.1
225	0.6223	0.4129	-7.1	0.3781	1.2389	8.6
250	0.6254	0.4099	-7.9	0.3825	1.2345	8.3

Tableau V-6 : Valeurs de C_{RI} et C_I pour $Bn=5$ et différentes valeurs du nombre de Reynolds.

Cette comparaison montre que l'écart relatif entre C_I et $(C_I)_{th}$ dépend a priori de la valeur du nombre de Reynolds. Il y est noté en plus, que les valeurs importantes de Ec_r sont enregistrées pour les faibles Re et inversement. Ce constat est justifié par le fait que cet écart est essentiellement occasionné par la distorsion des profils de vitesses amont et aval de l'élargissement qui est plus significative lors d'un écoulement à faible inertie. Le caractère convectif d'un écoulement à forte inertie engendre un jet plus étiré vers l'aval de l'élargissement qui minimise cette distorsion.

Dans ce paragraphe, une corrélation est proposée pour la détermination du coefficient de perte de charge locale en fonction du nombre de Reynolds et de la contrainte seuil sous la forme suivante :

$$C_I = A + \frac{B}{Re^C} + D[\ln(Re)]^E$$

Les paramètres A, B, C, D et E sont identifiés pour

Le cas plan

$$(a) \begin{cases} A = -0.2739 \\ B = 5.1896 + 2.1121 Bn - 0.0928 Bn^2 \\ C = 1.0289 \\ D = 0.4315 \\ E = 0.3560 - 0.0474 \ln(1 + 2.8447 Bn) \end{cases}$$

Et le cas axisymétrique

$$(b) \begin{cases} A = -0.6827 \\ B = 14.9786 + 3.4332 Bn - 0.013 Bn^2 \\ C = 1.0395 \\ D = 1.2602 \\ E = 0.3188 - 0.0688 \ln(1 + 0.7844 Bn) \end{cases}$$

Cette corrélation est valable uniquement dans le cas d'un élargissement brusque de rapport géométrique 1:2 et sur une plage de variation du nombre de Reynolds : $1 \leq Re \leq 250$ et du nombre de Bingham $0 \leq Bn \leq 5$.

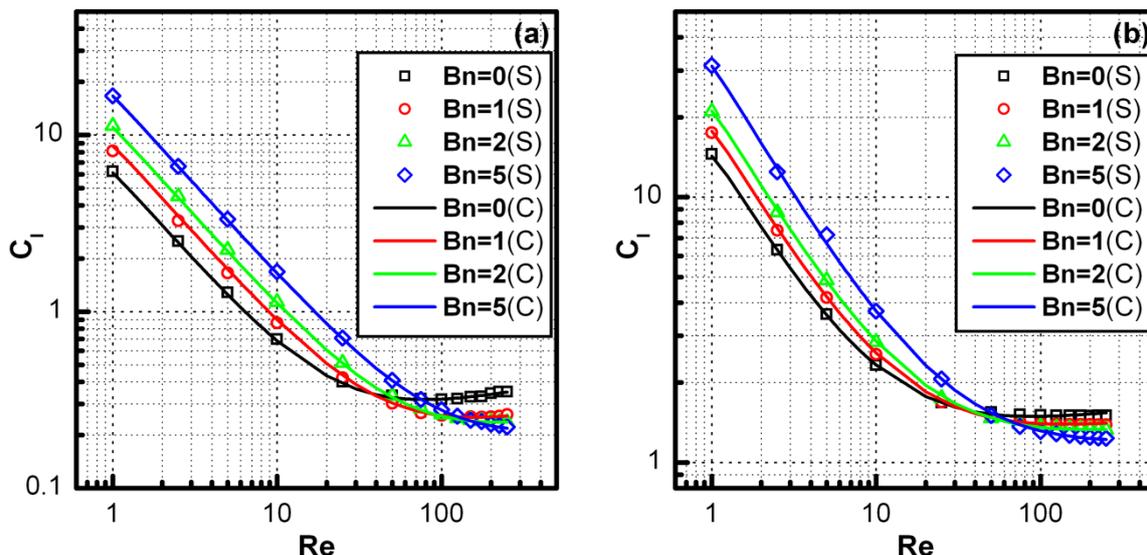


Figure [V-15] : Comparaison entre les valeurs numériques et celles approchées de C_I .
a- problème plan, **b-** problème axisymétrique.
(S)- Résultats de simulation, **(C)-** valeurs corrélées de C_I

La figure [V-15] qui comporte l'évolution du coefficient de perte de charge irréversible en fonction du nombre de Reynolds pour différentes valeurs de la contrainte seuil, illustre le bon agrément entre les valeurs de C_I déterminées à partir des résultats de la simulation numérique et celles prédites par la corrélation proposées avec une erreur relative maximale qui n'excède pas 7%. Le coefficient de détermination associé à cette corrélation est de 99.8% pour le problème plan et de 99.75% pour le cas axisymétrique.

V.3.2 Régime thermique :

Dans ce paragraphe, l'évolution du champ thermique est abordée en considérant l'effet de la dissipation visqueuse comme l'unique source de chaleur contribuant au réchauffage du fluide. Pour cela les parois de l'expansion sont considérées adiabatiques et le nombre de Brinkman est pris égal à l'unité ($Br = 1$). Cette dernière hypothèse, valable pour des faibles valeurs du nombre de Peclet, nous conduit à l'utilisation d'une nouvelle jauge de température (ΔT) pour la construction de la forme adimensionnelle de l'équation d'énergie.

En tenant compte de l'expression du nombre de Brinkman formulée dans le chapitre (III) et de l'hypothèse sus citée, la jauge de température (ΔT) est définie comme suit :

$$\Delta T = \frac{\mu_p u_{m1}^{*2}}{K}$$

et la température adimensionnelle s'écrira :

$$\theta = \frac{T^* - T_e^*}{\Delta T^*}$$

Dans ce qui suit, l'influence du nombre de Prandtl (Pr), de l'inertie (Re) et de la contrainte seuil (Bn) sur le champ thermique sont analysées. Les résultats de la simulation numérique pour chaque cas considéré sont exprimés dans des référentiels différents du fait que la jauge de température (ΔT) soit dépendante de la vitesse moyenne de l'écoulement et de la conductivité thermique du fluide. Afin de permettre une analyse sans équivoque, l'ensemble des résultats obtenus sont ramenés à un référentiel commun en utilisant le même (ΔT) pour l'ensemble des cas étudiés.

V.3.2.1 Influence de Prandtl sur le champ thermique :

L'influence du nombre de Prandtl sur la configuration du champ thermique est illustrée dans la [figure \[V-16\]](#), qui comporte les tracés des lignes isothermes pour $Re = 100$, $Bn = 0$ (fluide newtonien) et différentes valeurs de Pr . Ces tracés ont donc, permis de constater une augmentation significative de la température localisée au niveau de la zone tourbillonnaire et près des parois solides, occasionné par les forts taux de cisaillement.

En considérant des nombres de Prandtl croissants, une augmentation de la température de plus en plus accentuée est constatée au niveau des parois solide ([figure \[V-18\]](#)). Ce constat est justifié par le fait que la température générée à l'amont soit de plus en plus convectée vers l'aval, constituant ainsi une augmentation supplémentaire à celle apportée par le terme source (la dissipation visqueuse).

Contrairement à la paroi, l'évolution de la température sur l'axe de l'élargissement manifeste un accroissement de moins en moins important que le Pr augmente ([figure \[V-17\]](#)). Ce fait résulte de l'apport insignifiant de la dissipation visqueuse à l'élévation de la température du fluide en raison des faibles taux de cisaillement qui caractérisent cette zone, à l'exception de la longueur de l'établissement d'un régime hydrodynamique.

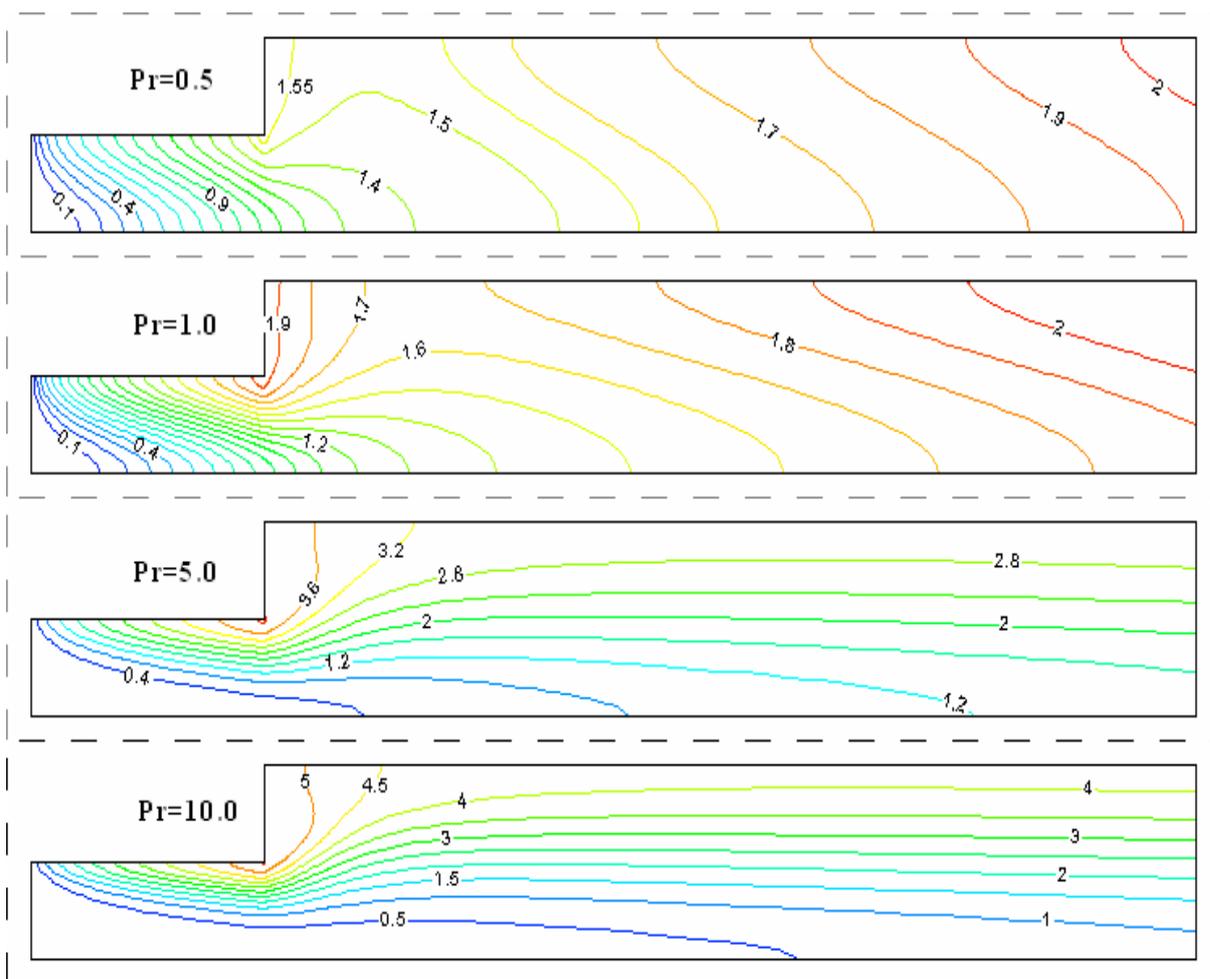


Figure [V-16] : Courbes isothermes pour $Re=100$, $Bn=0$, est différentes valeurs de Pr . (cas d'un problème plan)

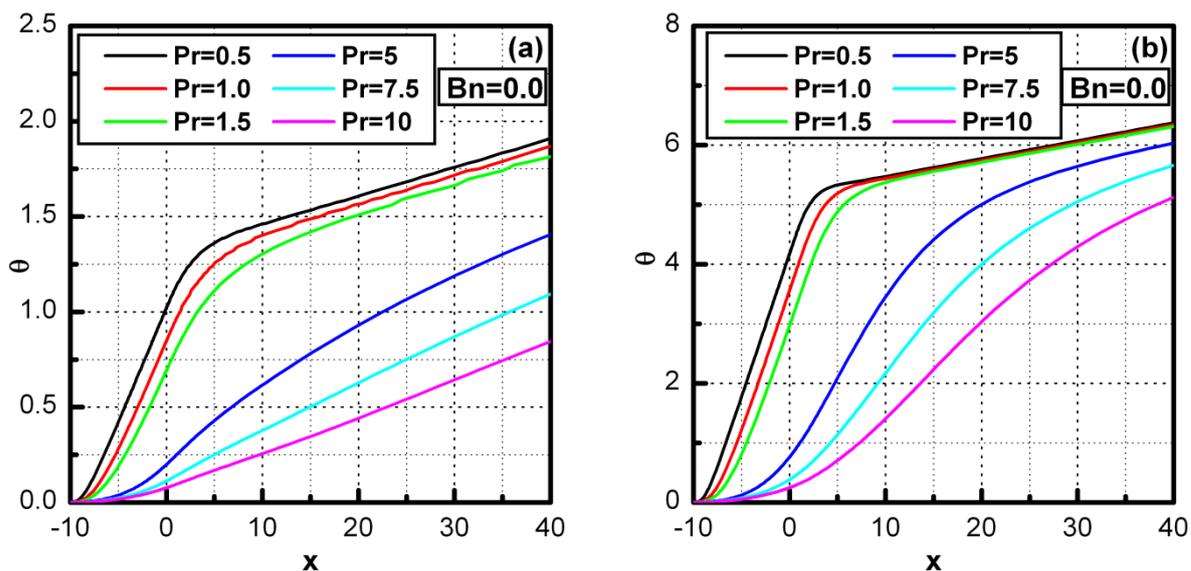


Figure [V-17] : Evolution de la température au niveau de l'axe de symétrie pour $Re=100$, $Bn=0$ et différentes valeurs de Pr . (a) problème plan, (b) problème axisymétrique

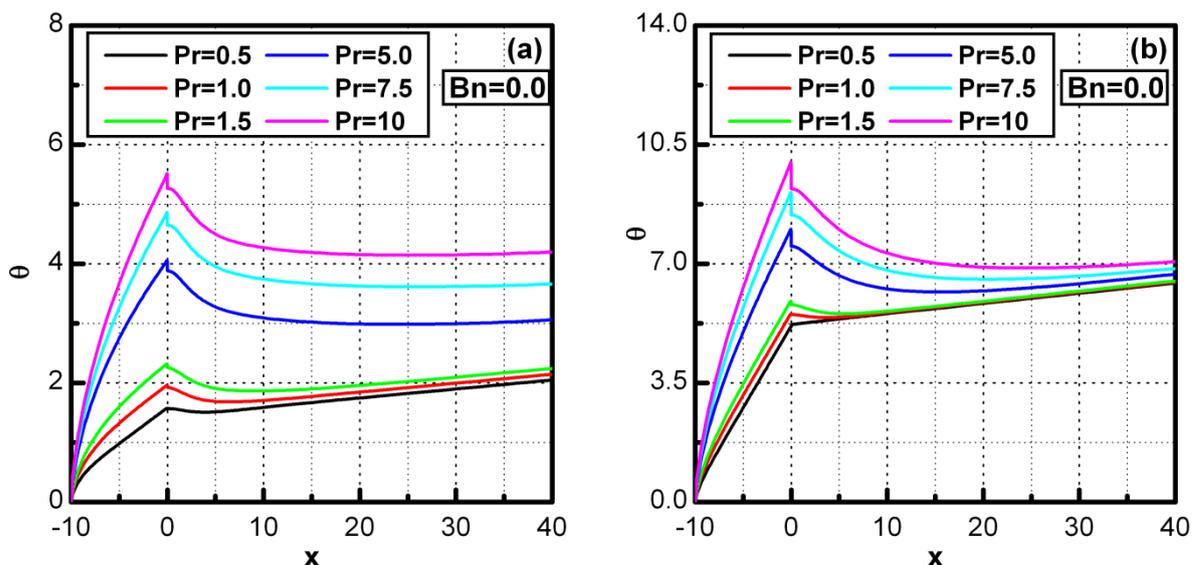


Figure [V-18] : Evolution de la température au niveau des parois solides pour $Re=100$, $Bn=0$ et différentes valeurs de Pr . (a) problème plan, (b) problème axisymétrique

V.3.2.2 Influence de l'inertie (Re) sur le champ thermique :

L'influence du nombre de Reynolds sur la configuration du champ thermique est illustrée dans la [figure \[V-19\]](#), qui comprend les courbes isothermes pour $Pr = 1$, $Bn = 0$ et différentes valeurs de Re . Cette figure montre que, pour un problème plan ou axisymétrique, le réchauffage du fluide s'intensifie avec l'accroissement de la vitesse d'écoulement, chose qui résulte d'une part de l'augmentation des taux de cisaillement, et d'une autre part, de l'effet de plus en plus accentué de la convection.

Contrairement au nombre de Pr , l'accroissement du nombre de Re engendre une augmentation de la température au niveau de l'axe de symétrie de l'expansion ([figure \[V-20\]](#)). Ce constat résulte de l'augmentation de la longueur nécessaire à un établissement hydrodynamique de l'écoulement et qui constitue une importante source de chaleur du fait de ces forts taux de cisaillement.

En ce qui concerne la température de la paroi solide, il est noté que celle-ci manifeste une augmentation de plus en plus prononcée que le nombre de Reynolds est élevé ([figure \[V-21\]](#)). Cette situation est également occasionnée par l'apport thermique due aux taux de cisaillement localisés près des parois solides. Ces derniers sont d'autant plus élevés que le nombre de Reynolds est important.

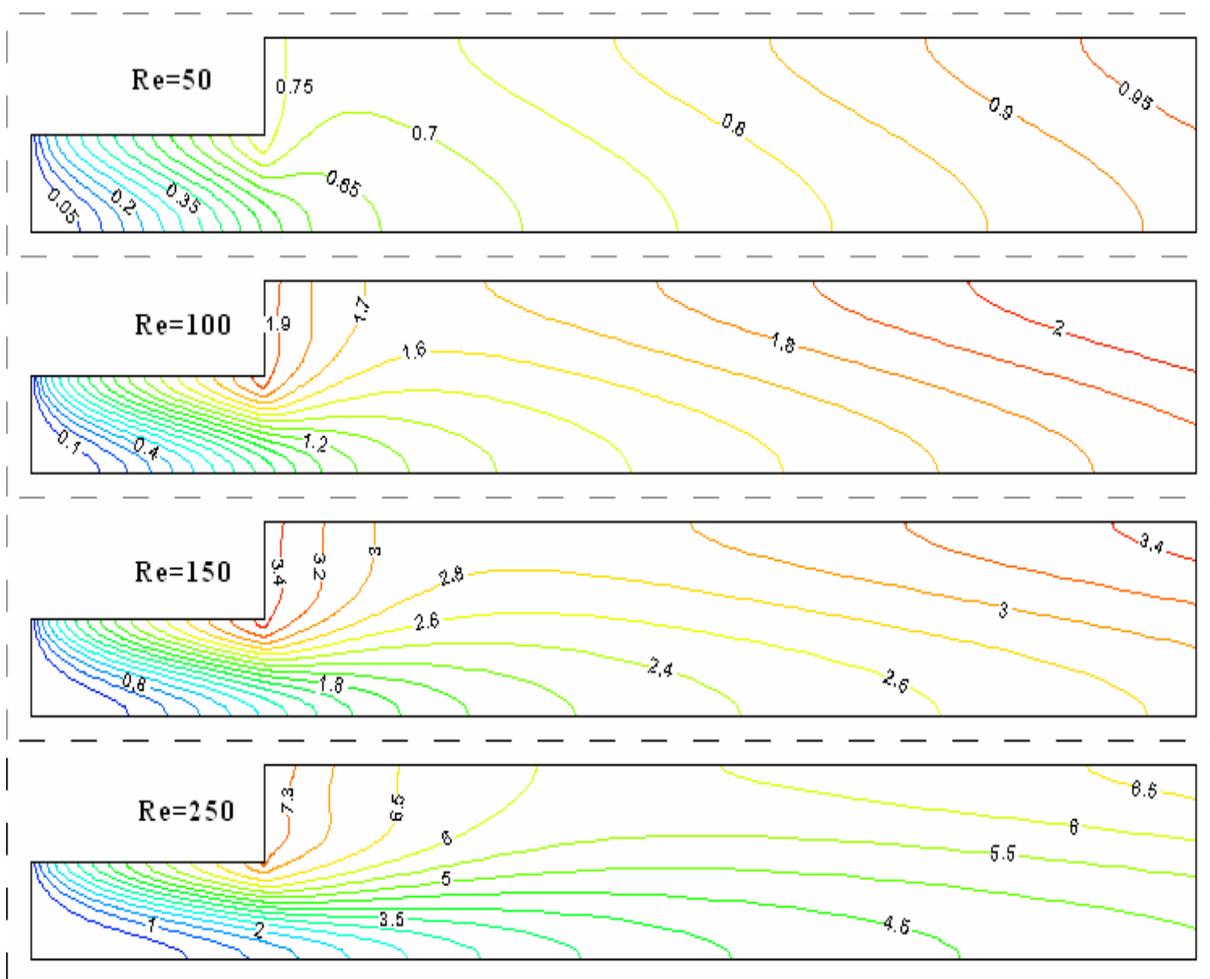


Figure [V-19] : Courbes isothermes pour $Pr=1.0$, $Bn=0$ et différentes valeurs de Re . (cas d'un problème plan)

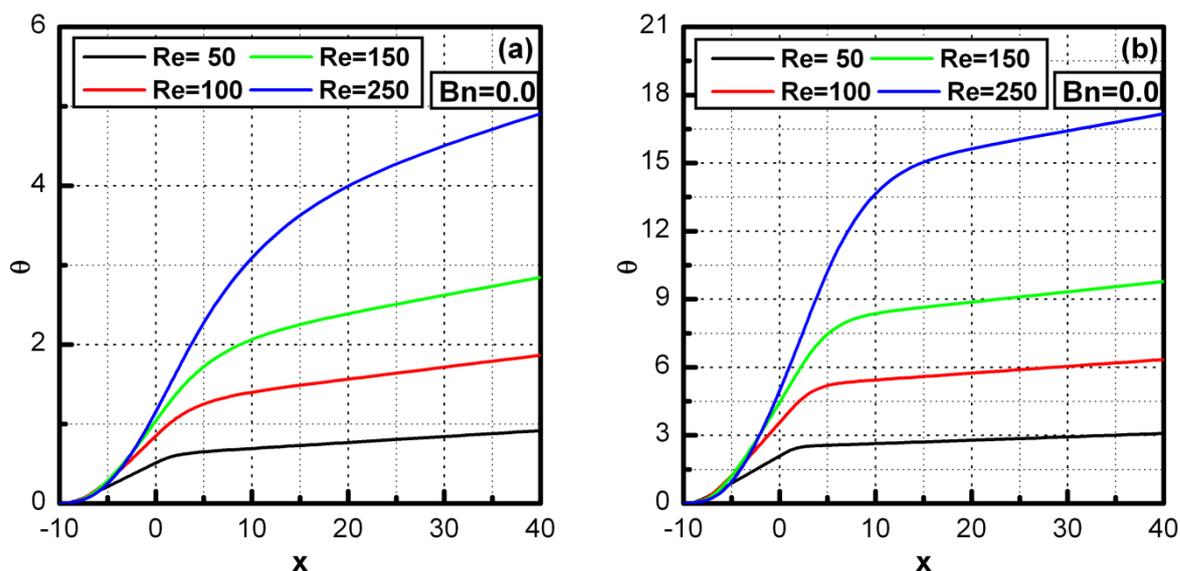


Figure [V-20] : Evolution de la température au niveau de l'axe de symétrie pour $Pr=1$, $Bn=0$ et différentes valeurs de Re . (a) problème plan, (b) problème axisymétrique.

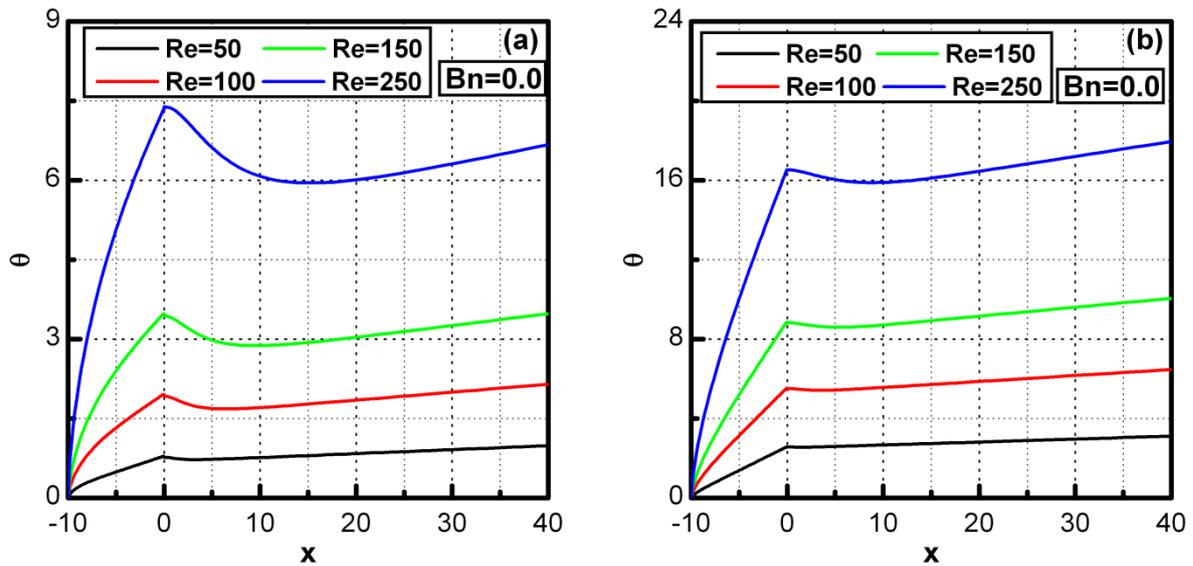


Figure [V-21] : Evolution de la température au niveau des parois solides pour $Pr=1$, $Bn=0$ et différentes valeurs de Re . (a) problème plan, (b) problème axisymétrique.

V.3.2.3 Influence de la contrainte seuil sur le champ thermique :

L'influence de la contrainte seuil sur la configuration du champ thermique est illustrée dans la [figure \[V-22\]](#), qui comprend les courbes isothermes pour $Pr = 1$, $Re = 100$ et différentes valeurs de Bn . Il est constaté que le réchauffage du fluide s'intensifie avec l'accroissement de la contrainte seuil, chose qui résulte d'une part de l'augmentation des taux de déformation dans la zone cisailée, et d'une autre part, de l'importance de la viscosité qui siège dans la zone non cisailée.

L'accroissement de la contrainte seuil engendre une augmentation de plus en plus importante de la température au niveau de l'axe de symétrie et de la paroi. Cette constatation est illustrée respectivement dans les [figures \[V-23\]](#) et [\[V-24\]](#).

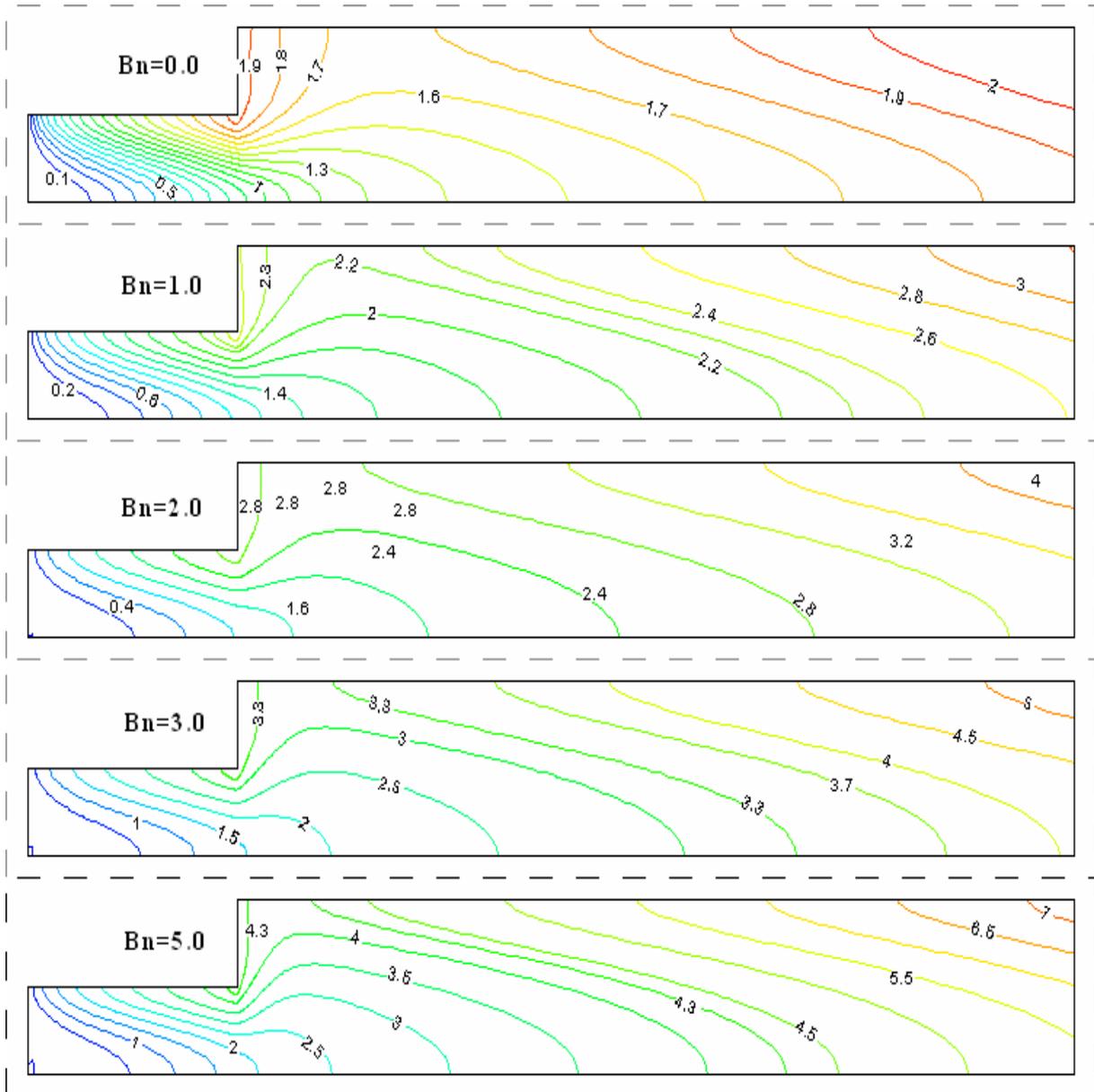


Figure [V-22] : Courbes isothermes pour $Pr=1.0$, $Re=100$ et différentes valeurs de Bn . (cas d'un problème plan)

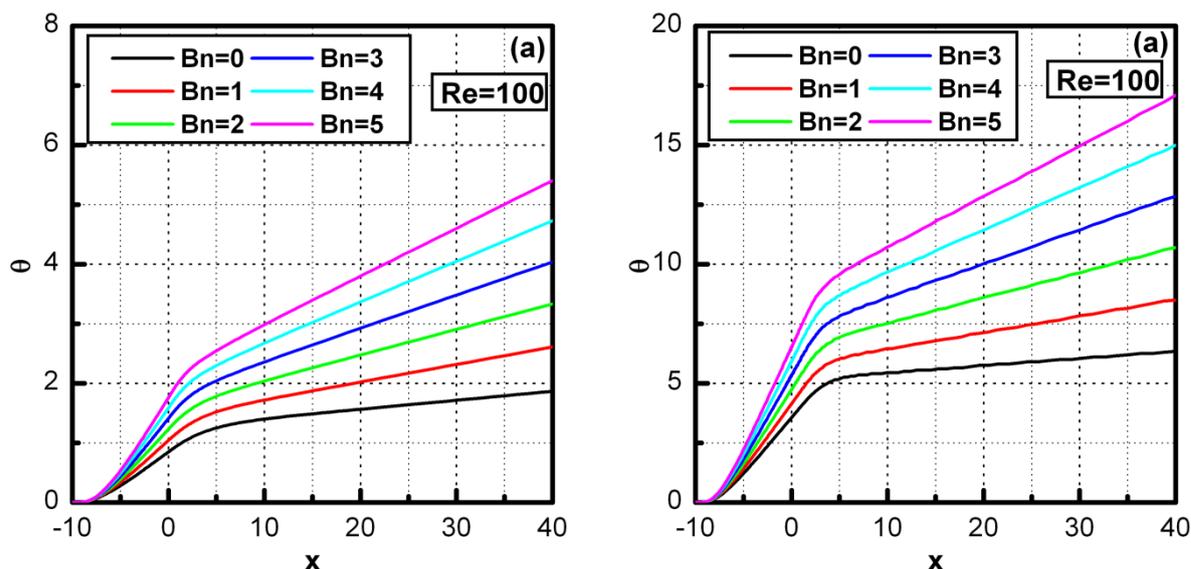


Figure [V-23] : Evolution de la température au niveau de l'axe de symétrie pour $Pr=1$, $Re=100$ et différentes valeurs de Bn . (a) problème plan, (b) problème axisymétrique.

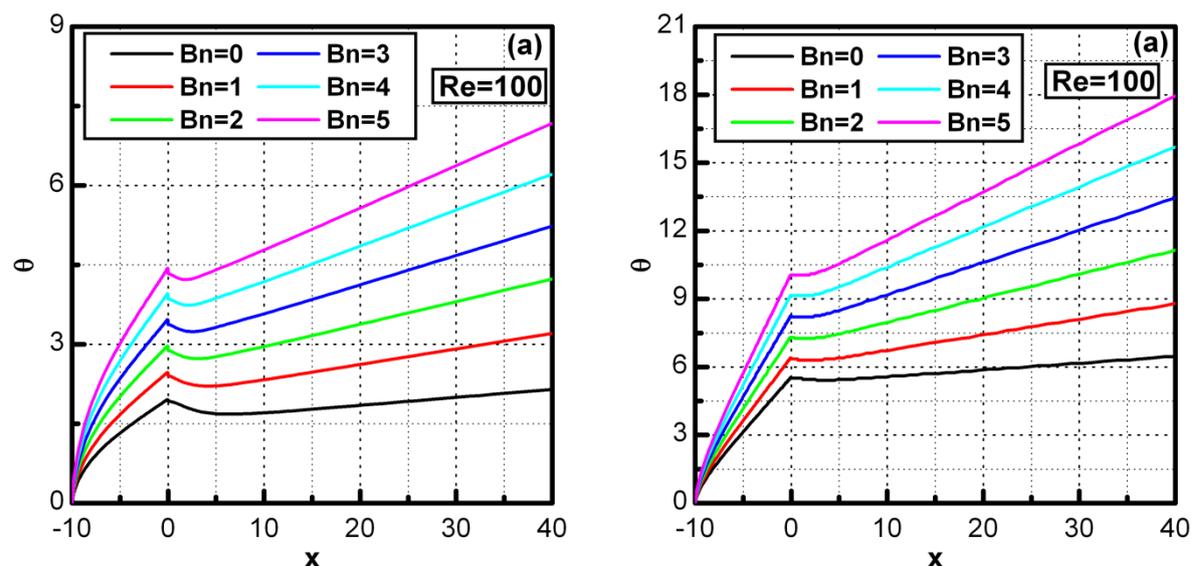


Figure [V-24] : Evolution de la température au niveau des parois solides pour $Pr=1$, $Re=100$ et différentes valeurs de Bn . (a) problème plan, (b) problème axisymétrique.

V.4 Conclusion :

L'écoulement laminaire à travers un élargissement brusque d'un fluide à seuil de contrainte a été investi dans ce chapitre. Les résultats obtenus pour un problème plan et axisymétrique ont permis plusieurs constatations sur les effets exercés par les paramètres de l'écoulement et les propriétés rhéologiques du fluide sur la structure hydrodynamique et

thermique de l'écoulement. Le travail a été particulièrement focalisé sur l'effet exercé par l'inertie et la contrainte seuil sur les zones de recirculation, les longueurs d'établissement et les longueurs de recollement ainsi que sur le coefficient de perte de charge locale (cas des faibles nombres de Reynolds).

L'analyse de l'importance du champ thermique généré par la dissipation visqueuse a permis de conclure que celui-ci ne peut être négligé dans le cas des fluides non-newtoniens fortement visqueux, et cette partie a permis particulièrement d'établir une relation quantifiant la perte de charge locale au niveau de l'élargissement brusque en fonction des paramètres d'écoulement.

Les principales constatations déduites de cette analyse sont énumérées ci-dessous :

- ✓ A l'aval de l'élargissement, la longueur nécessaire à un établissement hydrodynamique de l'écoulement croît avec l'accroissement du nombre de Reynolds et décroît avec l'augmentation de la contrainte seuil.
- ✓ L'apparition d'une zone tourbillonnaire au coin de l'élargissement même lors d'un écoulement à faible nombre de Reynolds (écoulement rampant).
- ✓ Le point de recollement s'éloigne de l'élargissement (vers l'aval) avec l'augmentation du nombre de Reynolds. L'effet inverse est provoqué par l'accroissement de la contrainte seuil.
- ✓ Une augmentation du nombre de Reynolds conduit à une diminution du coefficient de perte de charge locale.
- ✓ Pour des faibles nombres de Reynolds, le coefficient de perte de charge locale croît avec l'accroissement de la contrainte seuil. l'effet inverse est constaté dans le cas des nombres de Reynolds élevés.
- ✓ L'auto réchauffage du fluide par effet de la dissipation visqueuse est d'autant plus important que les valeurs de Prandtl, de Reynolds et de la contrainte seuil sont élevées.

Nomenclature

B_n	Nombre de Bingham.
B_r	Nombre de Brinkman.
C	Coefficient de perte de charge.

Ec_r	Ecart relatif.
K	Diffusivité thermique (m ² /s).
L	Longueur caractéristique adimensionnelle du domaine physique.
P^*	Pression (Pa).
Pr	Nombre de Prandlt.
R	Hauteur caractéristique adimensionnelle du domaine physique.
r^*	Coordonnée transversale (m).
r	Coordonnée transversale adimensionnelle.
Re	Nombre de Reynolds.
S	Section d'écoulement.
T^*	Température (°K).
T_e^*	Température à l'entrée (°K).
ΔT^*	Jauge de température (°K).
u^*	Vitesse longitudinale (m/s).
u	Vitesse longitudinale adimensionnelle.
v^*	Vitesse transversale (m/s).
v	Vitesse transversale adimensionnelle.
x^*	Coordonnée longitudinale (m).
x	Coordonnée longitudinale adimensionnelle.
X_r	Point de recollement adimensionnel.
y^*	Coordonnée transversale (m).
y	Coordonnée transversale adimensionnelle.

Symboles Grecs

α	Facteur de forme de profil pour l'énergie.
β	Facteur de forme de profil pour quantité de mouvement.
ρ	La densité (Kg/m ³).
μ_p^*	Viscosité plastique (Pa.s).
μ_{eff}	Viscosité apparente adimensionnelle.
θ	Température adimensionnelle.
ξ	Facteur désignant un problème plan (0) où axisymétrique (1).

Γ Frontière du domaine physique.

Indices

e Entrée.
I Irréversible.
m Moyenne.
R Réversible.
RI L'écart entre réversible et irréversible.
Th Théorique.

Références

- [1] **Back, L., Roshke, E.**, 1972. Shear layer regimes and wave instabilities and reattachment lengths downstream of an abrupt circular channel expansion. *J. Appl. Mech.*, 94, 677–681.
- [2] **Fletcher, D., Maskel, S., and Patrick, M.**, 1985. Heat and mass transfer computations for laminar flow in axisymmetric sudden expansion. *Computers Fluids*, 13, 207.
- [3] **Habib, M. A., Whitelaw, J. H.**, 1982. The calculation of turbulent flow in wide-angle diffusers. *Numer. Heat trans.*, 5, 145.
- [4] **Oliveira, P. J., Pinho, F. T.**, 1997. Pressure drop coefficient of laminar Newtonian flow in axisymmetric sudden expansion. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 18, 518–529.
- [5] **Panagiotis Neofytou**, 2006. Transition to asymmetry of generalised Newtonian fluid flows through a symmetric sudden expansion. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 133:132–140.
- [6] **Boughamoura, A., Nasrallah, S.B.**, 2004. Piston-driven turbulent flow and heat transfer in a pipe with a sudden expansion. *International Journal of Heat and Technology*, 22:31–40.
- [7] **Alimi, S.E., Orfi, J., Nasrallah, S.B.**, 2005. Buoyancy effects on mixed convection heat and mass transfer in a duct with sudden expansions. *Heat and Mass Transfer/Waerme- und Stoffuebertragung*, 41:559–567.
- [8] **Paulo R. de Souza Mendes, Mônica F. Naccache, Priscilla R. Vargas, Flavio H. Zarchesini**, 2007. Flow of viscoplastic liquids through axisymmetric expansions–contractions. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 142: 207–217.
- [9] **Burgos, G.R., Alexandrou, A.N.**, 1999. Flow development of Herschel–Bulkley fluids in a sudden three-dimensional square expansion, *J. Rheol.*, 43:485–498.
- [10] **Hammad, K.J., Vradis, G.C., Ötügen, M.V.**, 2001. Laminar flow of a Herschel–Bulkley fluid over an axisymmetric sudden expansion, *Trans. ASME: J. Fluids Eng.* 123: 588–594.
- [11] **Alexandrou, A.N., McGilvrey, T.M., Burgos, G.**, 2001. Steady Herschel–Bulkley fluid flow in three-dimensional expansions, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 100:77–96.
- [12] **Vradis, G.C., Ötügen, M.V.**, 1997. The axisymmetric sudden expansion flow of a non-Newtonian viscoplastic fluid, *J. Fluids Eng.*, 110:193–200.
- [13] **Jay, P., Magnin, A., Piau, J.M.**, 2001. Viscoplastic fluid flow through a sudden axisymmetric expansion, *AIChE J.*, 47:2155–2166.

- [14] **Pinho, F. T., Oliveira, P. J., Miranda, J. P.**, 2003. Pressure loss in the laminar flow of shear-thinning Power-law fluids across a sudden axisymmetric expansion. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 24, 747–761.
- [15] **Oliveira, P.J., Pinho, F.T.**, 1998. A general correlation for the local loss coefficient in Newtonian axisymmetric sudden expansion. *International journal of heat and fluid flow*, 19:655–660.

Conclusion Générale.

VI. Conclusion générale :

Dans notre travail, nous nous sommes intéressés à l'investigation numérique d'un problème de Graetz généralisé, qui est défini par l'écoulement laminaire et non-isotherme d'un fluide viscoplastique idéal à travers un conduit et un élargissement brusque. L'analyse de l'influence occasionnée par les caractéristiques rhéologiques de cette catégorie de fluides sur la structure de l'écoulement et l'intensité de l'échange thermique ont constitué de ce fait, les principaux objectifs de notre étude.

Avant d'exposer les différents cas de figures considérés dans ce travail, nous avons procédé dans une première partie, à une description détaillée de la méthode des éléments finis. Une technique numérique que nous avons adoptée pour l'élaboration d'un code de calcul, qui permet la discrétisation du modèle mathématique exprimé en variables primitives (u, v, p) et sa résolution en adoptant une formulation mixte (vitesses-pression).

Dans une seconde partie, nous avons étudié l'écoulement laminaire entre deux plaques planes (problème plan) et à travers une conduite cylindrique (problème axisymétrique), d'un fluide viscoplastique idéal dont le comportement rhéologique est défini par la loi constitutive de Bingham. Les résultats de la simulation numérique, nous ont permis de proférer plusieurs constatations sur les effets subis par la structure hydrodynamique et thermique de l'écoulement, occasionnés par l'aspect non newtonien du fluide et les différents paramètres de l'écoulement.

Dans la dernière partie de notre travail, nous avons procédé à l'analyse de l'écoulement laminaire et non-isotherme d'un fluide semi-solide de Bingham à travers un élargissement brusque. Le problème plan et axisymétrique ont été considérés.

Le travail que nous avons réalisés, même s'il est restreint à une classe de fluides bien définie, nous a permis de mettre en évidence l'importance des effets de l'aspect non-Newtonien sur la structure des écoulements et sur le transfert thermique associé.

Finalement, nous conviendrons bien de la nécessité d'entreprendre des recherches appropriées à chaque classe de fluides. Ce qui sans doute, nous procurera une meilleure assimilation de ces phénomènes, et qui nous servira d'atout principal pour les mieux contrôler.