

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA-BOUMERDES



Faculté des Sciences de l'Ingénieur

Thèse de Doctorat

Présentée par :

AGUIB Salah

En vue de l'obtention du diplôme de **DOCTORAT** en :

Filière : Génie Mécanique

Option : Construction Mécanique

Sujet de thèse

**Identification des propriétés dynamiques et
simulation du comportement vibratoire des
plaques en matériaux composites adaptatifs**

Devant le jury composé de :

Mr/ AOURAG	Hafid	Professeur	DGRSDT	Président
Mr/ BOUABDALLAH	Ahcène	Professeur	USTHB Bab Ezzouar	Examineur
Mr/ NOUR	Abdelkader	Professeur	UMB Boumerdès	Rapporteur
Mr/ BETTAHAR	Ahmed	Professeur	UHB Chlef	Examineur
Mr/ SACI	Rachid	Professeur	UMB Boumerdès	Examineur
Mr/ BENGUEDIAB	Mohamed	Professeur	UDL-S.Bel Abbes	Examineur
Mr/ CHEVALIER	Yvon	Professeur	ISMEP-Paris	Examineur
Mr/ BOSSIS	Georges	Directeur de R.	UMR-CNRS-Nice	Invité

Année Universitaire 2013/2014

Remerciements

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire de thèse ont été réalisés à l'Université de M'Hamed Bougara de Boumerdès au sein de l'équipe Dynamique des moteurs et ingénierie intégré des ensembles mécaniques du Laboratoire de Dynamique des Moteurs et Vibroacoustique, LDMV.

Je tiens à remercier tout d'abord mon Directeur de thèse Monsieur le Professeur NOUR Abdelkader de m'avoir confié ce sujet de thèse. Durant ce parcours, il m'a fait découvrir le domaine passionnant de l'amortissement et du contrôle de vibrations par des matériaux complexes. Je voudrais lui témoigner de ma profonde gratitude pour sa disponibilité, sa rigueur scientifique et pour la motivation et la convivialité qui ont régné durant la préparation de la thèse. Il m'a beaucoup apporté pour l'aboutissement de ce travail par ses encouragements, ses éclaircissements ainsi que nos précieux échanges tant qu'au point de vue numérique que théorique.

La partie expérimentale de ce travail a été réalisée au sein du Laboratoire de Physique de la Matière Condensée à l'Université de Sophia Antipolis de Nice (France) dirigée par le Professeur GEORGES Bossis que je remercie infiniment pour les moyens expérimentaux qui ont été mis à ma disposition ainsi que pour ses précieux conseils. Je tiens à remercier toutes les personnes du Laboratoire de Physique de la Matière Condensée LPMC pour leur accueil et leur sympathie, et plus particulièrement Monsieur Lançon Pascal.

Je remercie vivement M. le Professeur Hafid AOURAG, Directeur général de la Recherche Scientifique et du Développement Technologique qui m'a fait un grand honneur de présider le jury.

J'adresse également mes sincères remerciements aux membres de jury associés, Messieurs les Professeurs: Ahcène BOUABDALLAH de l'USTHB, Ahmed BETTAHAR de l'UHBB-Chlef, Mohammed BENGUEDIAN de l'UDYS-Babbes, Yvon CHEVALIER l'ISME-Paris et George BOSSIS de l'USA-Nice, Rachid SACI de l'UMB-Boumerdès pour avoir accepté d'examiner mes travaux de thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ici ma profonde gratitude.

Un grand merci à M. Noureddine CHIKH et M. Toufik DJEDID pour toutes les discussions que nous avons eu sur le sujet.

Un grand merci à tous mes collègues enseignants et doctorants du Laboratoire Dynamique des Moteurs et Vibroacoustique.

Mes chaleureux remerciements vont à toute ma famille pour son soutien moral indéfectible, à tous mes amis Mrs. Khabli M., Harhout R., Rouabah S., Tekouk Nazih., Fennour A., Bousbia M. Nadjar A...

Enfin, je voudrais remercier tout le personnel de la FSI et mes collègues doctorants pour les services rendus par les uns et les autres et pour le respect du cadre de travail.

***Je dédie ce travail de thèse de doctorat
À mes parents,
À mes frères et sœurs***

الملخص

العمل المنجز هو مساهمة في تحديد استجابة الذبذبات غير الخطية للسندوتشات المصنوعة من مادة المطاط الصناعي المغنطيسي ، ويتألف من أربعة فصول: يخصص الفصل الأول مدخل الى تطوير المواد المركبة، المواد المركبة شطيرة، اللدائن و وشغل اللدائن والسلوك ونماذج من المواد اللزجة. وفي نهاية هذا الفصل نحن نركز على المواد والهياكل في المطاط الصناعي المغنطيسي.

في الفصل الثاني، نقوم بتقديم تذكرة لنظرية مواد شطيرة وتقديم نموذج لمعادلات رياضية للوحات ساندويتش تعرض للحقل المغناطيسي من أجل تحديد المعادلات التي تحكم السلوك الديناميكي لهذه المواد.

في الفصل الثالث قمنا بتطوير حل بالمقاربة العددية باستخدام طريقة ريتز (Ritz) مع صياغة الطاقة، قمنا ببرمجة المقاربة العددية في المبرمج Matlab لحساب خصائص التخميد للوحة الشطيرة. وتجرى عمليات المحاكاة الرقمية من خلال طريقة العناصر المحدودة في ABAQUS للتحقق من صحتها ولإظهار بساطتها، عامة والكفاءة وأداء هذا الرمز بغض النظر عن الاعتماد تردد من طراز اللزجة.

في الفصل الرابع، وتحديد التجريبية من خصائص القص من المطاط الصناعي محملة 30% من المجهرية الدقيقة من الحديد عند 100 هرتز، وقدم لأول مرة. بعد ذلك، تحليل التجريبية من السعة استجابة الذبذبات من ثلاث لوحات وجود المطاط الصناعي محملة 20%، 30% و 40% من المجهرية الدقيقة من الحديد تخضع لإثارة التوافقي بالقوة المغناطيسية. لتقييم تأثير المجال المغناطيسي على الاستجابة لوحات، وضعنا هذا الأخير إلى حقل مغناطيسي متغير. تتم مقارنة النتائج التي عثر عليها مع تلك التجربة من قبل نهج العددية ABAQUS ونموذج FEM.

الكلمات الرئيسية : لوحة ساندويتش، المواد المعقدة، المغنطيسي المطاط الصناعي ، المجال المغناطيسي، ريتز، ف م FEM ، التجريبية.

Résumé

Le travail réalisé constitue une contribution à la détermination de la réponse vibratoire non linéaire des plaques sandwichs en élastomère magnétorhéologique et se compose de quatre chapitres ; un premier chapitre bibliographique est consacré à introduire le développement des matériaux composites, les matériaux composites sandwichs, les élastomères et les élastomères chargés, le comportement et les modèles des matériaux viscoélastiques. En fin du chapitre, nous mettons l'accent sur les matériaux et les structures en élastomère magnétorhéologique.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons un rappel de la théorie des matériaux sandwichs et faisons un modèle mathématique des plaques sandwichs soumises à un champ magnétique afin de bien définir les équations régissent le comportement dynamique de ces matériaux.

Dans le troisième chapitre, on a développé une approche numérique de résolution en utilisant la méthode de Ritz avec une formulation énergétique. Un code du calcul numérique a été élaboré en langage Matlab pour déterminer les propriétés amortissantes de la plaque sandwich. Des simulations numériques par la méthode des éléments finis sous le code de calcul Abaqus ont été menées et validées, pour montrer la simplicité, la genericité, l'efficacité et les performances de ce code quelle que soit la dépendance en fréquence du modèle viscoélastique.

Dans le quatrième chapitre, une identification expérimentale des propriétés en cisaillement d'un élastomère chargé par 30% de microparticules de fer à 100 Hz, est présentée en premier lieu. Par la suite, une analyse expérimentale de la réponse vibratoire en amplitude des trois plaques ayant un élastomère chargé par 20%, 30% et 40% de microparticules de fer soumises à une excitation harmonique par une force magnétique. Afin d'évaluer l'effet du champ magnétique sur la réponse des plaques, nous avons exposé ces dernières à un champ magnétique variable. Les résultats trouvés sont comparés à ceux calculés par l'approche numérique et le modèle FEM sous Abaqus.

Mots clés : plaque sandwich, matériaux complexes, élastomère magnétorhéologique, viscoélasticité, champ magnétique, Ritz, FEM, expérimental.

Abstract

The present work is a contribution to the determination of the nonlinear vibrational response of magnetorheological elastomer sandwiches which consists of four chapters; the first chapter is devoted to the bibliographic introduction, the development of composite materials, composite sandwiches materials, elastomers and filled elastomers, viscoelastic materials behavior and models. At the end of this chapter, we focus on materials and structures in magnetorheological elastomer.

In the second chapter, we present a reminder of the theory of sandwich materials and develop a mathematical model of sandwich plates subjected to a magnetic field in order to define the equations governing the dynamic behavior of these materials.

In the third chapter, we develop a numerical solving approach using the Ritz method with an energy formulation. A numerical code was developed under Matlab to determine the damping properties of the sandwich plate. Numerical simulations, using the finite element method implemented in the code Abaqus, were conducted and validated to show the simplicity, genericity, efficiency and performance of this code regardless the frequency dependence of the viscoelastic model.

In the fourth chapter, an experimental identification of shear properties of an elastomer charged with 30% of iron microparticles at 100 Hz is presented first. Thereafter, is explored an experimental analysis of the vibrational response amplitude of three plates having an elastomer charged with 20%, 30% and 40% of iron microparticles subjected to harmonic excitation by magnetic force. To assess the effect of the magnetic field on the response of plates, we expose these latter to a variable magnetic field. The obtained results are compared with those calculated by means of the numerical approach and the FEM model in Abaqus.

Keywords: sandwich plate, complex materials, magnetorheological elastomer viscoelasticity, magnetic field, Ritz, FEM, experimental.

Table des matières

Liste des tableaux.....	10
Liste des figures.....	12
Symboles.....	14

Introduction générale

Contexte de l'étude.....	18
Plan de thèse.....	19

Chapitre 1 : Etude bibliographique

1.1.	Introduction.....	22
1.2.	Les matériaux composites.....	22
1.2.1.	Définition.....	22
1.2.2.	Les matériaux composites sandwichs.....	22
1.2.2.1.	Définition.....	22
1.2.2.2.	Bref historique des matériaux composites sandwichs.....	22
1.2.2.3.	Les constituants d'une structure sandwich.....	24
1.2.2.4.	Domaines d'application.....	26
1.3.	Les élastomères.....	28
1.3.1.	Bref historique des élastomères.....	28
1.3.2.	Définition.....	29
1.3.3.	Réticulation des élastomères.....	31
1.3.4.	Influence du nombre de ponts.....	31
1.3.5.	Influence de la longueur des ponts.....	32
1.3.6.	Influence de la répartition des ponts.....	32
1.3.7.	La charge.....	33
1.3.8.	Mise en œuvre des élastomères chargés.....	34
1.3.9.	Microstructure d'un élastomère chargé.....	35
1.3.10.	Comportement des élastomères chargés.....	36
1.4.	Rhéologie.....	36
1.4.1.	Viscoélasticité.....	36
1.4.2.	Synthèse bibliographique sur la modélisation des structures viscoélastiques.....	37
1.4.2.1.	Approches analytiques.....	37
1.4.2.2.	Approches numériques.....	41
1.4.3.	Les modèles rhéologiques.....	43
1.4.3.1.	Les modèles rhéologiques élémentaires.....	43

1.4.3.2.	Les modèles rhéologiques fractionnaires.....	47
1.5.	Les matériaux intelligents.....	52
1.5.1.	Les matériaux magnétorhéologiques (Matériaux complexes).....	53
1.5.1.1.	Les élastomères magnétorhéologiques.....	54
1.6.	Conclusion.....	57

Chapitre 2 : Théories des plaques

2.1.	Introduction.....	60
2.2.	Modélisation analytique des plaques.....	61
2.2.1.	Définition d'une plaque.....	61
2.2.2.	Théorie des plaques.....	61
2.2.3.	Théorie des plaques minces (Théorie de Love-Kirchhoff).....	62
2.2.3.1.	Hypothèses.....	62
2.2.3.2.	Champs de déplacement.....	62
2.2.3.3.	Efforts internes et contraintes.....	64
2.2.3.4.	Équation du mouvement en vibration de flexion.....	65
2.2.4.	Théorie des plaques épaisses (Reissner-Mindlin).....	65
2.2.4.1.	Hypothèses.....	65
2.2.4.2.	Champs de déplacement.....	66
2.2.4.3.	Champs de déformation.....	66
2.2.4.4.	Contraintes et efforts internes.....	66
2.2.4.5.	Équation du mouvement en vibration de flexion.....	67
2.2.5.	Théorie des plaques sandwichs.....	67
2.2.5.1.	Hypothèses.....	68
2.2.5.2.	Champs de déplacement.....	68
2.2.5.3.	Champs de déformation.....	69
2.2.5.4.	Contraintes et efforts internes.....	70
2.3.	Formulation énergétique des plaques.....	72
2.3.1.	Energie de déformation.....	72
2.3.2.	Energie cinétique.....	73
2.4.	Principe variationnel.....	74
2.4.1.	Généralités.....	74
2.4.2.	Principe variationnel dans le cas des solides continus 3D.....	74
2.5.	Méthode approximative de Ritz.....	76
2.6.	Conclusion... ..	77

Chapitre 4 : Modélisations analytique et numérique du comportement vibratoire des plaques sandwichs en élastomère magnétorhéologique

3.1.	Introduction.....	79
3.2.	Position du problème.....	81
3.3.	Modélisation mathématique du problème.....	81
3.3.1.	Energie cinétique de plaque magnétorhéologique.....	82
3.3.2.	Energie de déformation de plaque magnétorhéologique.....	83
3.3.3.	Travail généré par le champ électromagnétique.....	84
3.3.4.	Equation du mouvement.....	85
3.4.	Discretisation par la méthode de Ritz.....	86
3.4.1.	Conditions aux frontières.....	88
3.4.2.	Approximation à trois termes.....	89
3.4.3.	Résultats numériques et discussion.....	91
3.5.	Simulation numérique par la méthode des éléments finis.....	94
3.5.1.	Etapas de simulation par Abaqus.....	95
3.5.2.	Modèle de plaque.....	95
3.5.3.	Résultats numérique et discussion.....	96
3.6.	Conclusion.....	99

Chapitre 4 : Etude expérimentale et comparaison des résultats

4.1.	Introduction.....	101
4.2.	Élaboration des élastomères.....	101
4.3.	Élaboration des plaques sandwichs magnétorhéologiques.....	104
4.3.1.	Mise en œuvre de l'élaboration des plaques.....	105
4.4.	Résultats expérimentaux et discussions.....	106
4.4.1.	Réponse vibratoire de la plaque chargée à 30%.....	106
4.4.2.	Réponse vibratoire des plaques à différent chargement.....	107
4.5.	Comparaison et validation des résultats.....	111
4.6.	Conclusion.....	117

Conclusion générale	118
----------------------------------	-----

Annexes	121
----------------------	-----

Annexe A

Les éléments de matrice \mathbf{K}_{imnj}	121
Les éléments de matrice \mathbf{M}_{imnj}	121

Annexe B

Les données expérimentales.....	122
---------------------------------	-----

Annexe C

Vérification des fonctions d'approximations à trois termes, pour : $\beta = 10^4$

123

Liste des tableaux

1.1	Composition et propriétés spécifiques des matériaux magnétorhéologiques	54
3.1	Propriétés mécaniques et électriques	92
3.2	Propriétés rhéologiques de l'élastomère	92
3.3	Données de discrétisation par MEF	96
4.1	Constituant de l'élastomère chargé de 30%	102
4.2	Constituant de l'élastomère de différents pourcentages	107
4.3	Confrontation des résultats trouvés par différente méthode	111
4.4	Comparaison des valeurs du facteur de perte trouvées par l'expérimental et MEF	115

Table des figures

1.1	Les différents constituants de structure sandwich, a. âme pleine b. âme creuse	24
1.2	L'effet de l'épaisseur de l'âme sur la rigidité en flexion d'une structure sandwich	25
1.3	L'avion militaire Britannique; Le Mosquito, en structure sandwich	27
1.4	Monomère de base d'une chaîne macromoléculaire	29
1.5	Schéma de variation du module viscoélastique G'' en fonction du temps pour un polymère de grande masse moléculaire	30
1.6	Influence de la densité de réticulation sur différentes propriétés mécaniques	31
1.7	Etat chimique de la surface de silice	33
1.8	Vulcanisation au soufre : réseau tridimensionnel des chaînes dans l'élastomère	35
1.9	Unités rhéologiques élémentaires	42
1.10	Modèles rhéologiques usuels	42
1.11	Modèle de solide viscoélastique de Kelvin-Voigt	43
1.12	Modèle de Maxwell	43
1.13	G' et G'' aux basses et hautes fréquences, représentés par les modèles de Maxwell et Kelvin-Voigt, d'après Howard A. Barnes	44
1.14	Modèle de Zener	45
1.15	Modèle rhéologique de Kelvin-Voigt fractionnaire	46
1.16	Représentation du modèle KVF dans les plans du module et de la phase pour différentes valeurs de	47
1.17	Phase du module complexe pour le modèle MF	47
1.18	Modèle rhéologique de Zener fractionnaire	48
1.19	Module du module complexe pour le modèle ZF en fonction de la fréquence ($E_\infty = E = 9$ MPa, $E_0 = 19$ MPa et $\omega_0 = 0.5$ rad/s)	49
1.20	Modèle rhéologique exponentiel de Maxwell	49
1.21	Variation des composantes du module complexe G' et G''	50
1.22	Comportement d'un matériau viscoélastique selon Maxwell	51
1.23	Matériau magnétorhéologique. a) avant l'application du champ magnétique b) après l'application du champ magnétique	52
1.24	Influence du champ magnétique sur les particules. a, b) particules de forme réelle c, d) particules de forme modélisée	55
2.1	Géométrie d'une plaque	59
2.2	Définition des variables de plaque	60
2.3	Schématisation des efforts normaux appliqués sur une plaque	62

2.4	Schématisation des efforts de cisaillement appliqués sur une plaque	62
2.5	Schématisation des moments de flexion et de torsion appliqués sur une plaque	63
2.6	Déplacements et rotations d'une plaque	64
2.7	Notation d'une plaque sandwich	66
3.1	Description de plaque magnétorhéologique	79
3.2	Mode de déformation en fonction du champ magnétique	91
3.3	Variation de l'amplitude en fonction de rapport R	91
3.4	Variation de l'amplitude en fonction de la fréquence fondamentale à différente valeur du champ magnétique	92
3.5	Organigramme de simulation en Abaqus	93
3.6	Modèle géométrique de la plaque sous Abaqus, a) Sans maillage b) avec maillage	94
3.7	Déformation de mode fondamentale de la plaque	95
3.8	Variation de l'amplitude en fonction de rapport R	95
3.9	Variation de l'amplitude en fonction de la fréquence fondamentale à différente valeur du champ magnétique	96
3.10	Variation de facteur de perte d'énergie en fonction des fréquences	97
4.1	Viscoanalyseur Metravib DMA ⁺ 450	100
4.2	Influence du champ magnétique sur le module de cisaillement, facteur de perte et rigidité avec une fréquence constante de 100 Hz	101
4.3	Influence du champ magnétique sur les propriétés rhéologiques de l'élastomère. (a) module conservatif G' en fonction de taux de cisaillement, (b) module dissipatif G'' en fonction de taux de cisaillement	101
4.4	Influence des Propriétés rhéologiques et du champ magnétique sur le facteur de perte d'énergie. a) facteur de perte en fonction du module conservatif G', b) facteur de perte en fonction du module dissipatif G''	102
4.5	Dispositif expérimental de détermination de la réponse vibratoire	103
4.6	Variation de l'amplitude de vibration en fonction de fréquence fondamentale. (a) 0T, (b) 0.2T, (c) 0.35T, (d) 0.5T (b)	104
4.7	Variation de facteur de perte en fonction de fréquence pour différente valeur du champ magnétique	105
4.8	Effet de taux chargement sur l'amplitude vibratoire pour différent valeur du champ magnétique (a) 0T, (b) 0.2T, (c) 0.35T, (d) 0.5T	106
4.9	Variation de la rigidité en fonction de fréquence sous champ magnétique	107
4.10	Variation de la rigidité en fonction du facteur de perte sous champ magnétique	108
4.11	Confrontation des résultats trouvés par la méthode de Ritz et FEM	110
4.12	Confrontation des amplitudes en fonction de rapport R trouvées par FEM et méthode Ritz	111
4.13	Confrontation d'évolution d'amplitude en fonction de la fréquence de résonance par les trois méthodes, Expérimentale, Ritz, FEM	112

4.14	Confrontation d'évolution du facteur de perte en fonction de fréquence de résonance par les méthodes, Expérimental et FEM	114
4.15	Variation de l'amplitude maximum en fonction du champ magnétique	114
4.16	Impact d'intensité du champ magnétique sur l'amplitude de résonance en fonction du rapport de chargement des particules ferromagnétiques dans MRE	115

Listes des symboles et abréviations

Symboles

x, y, z	Cordonnées cartésiennes
$w(x, y)$	Déplacement en flexion
$u(x, y), v(x, y)$	Déplacements suivant x et y respectivement
θ_x, θ_y	Angles de rotation suivant x et y respectivement
$N(x, y)$	Efforts normaux et tranchants suivant les axes x et y
$Q(x, y)$	Effort de cisaillement
$M(x, y)$	Moments de flexion et de torsion
D	Rigidité en flexion
∇	Opérateur de dérivation
σ_{ij}	Contraintes normales et de cisaillements
ε_{ij}	Déformation linéaires et angulaires
t	Temps
$U_i \ (i = t, b, c)$	Énergie de déformation
$T_i \ (i = t, b, c)$	Énergie cinétique
$\varphi_i(M)$	Fonctions de base de Ritz
a_i	Coordonnées généralisées
F	Force globale appliquée sur la plaque
Ω	Pulsation réduite de vibration
ω	Pulsation de vibration
γ_s^d	Composante dispersive correspondant aux interactions entre la matrice et la charge
γ_s^{sp}	Composante spécifique ou polaire dont dépendent souvent les interactions charge-charge

t_r	Temps de relaxation
E	Module de Young
G	Module de cisaillement
$E_i (i = b, t)$	Module des peaux
η	Facteur de perte
G^*	Module de cisaillement complexe de l'élastomère
E^*	Module complexe de Yong
G'	Module élastique de l'élastomère
G''	Module de perte de l'élastomère
G_c	Module de cisaillement de l'élastomère
K^*	Rigidité complexe de l'élastomère
K'	Patrie réelle de rigidité de l'élastomère
K''	Partie imaginaire de rigidité de l'élastomère
K_c	Module de rigidité complexe de l'élastomère
F_m	Force d'excitation magnétique
B_r	Rémanente induction
∇H	Gradient du champ magnétique
V	Volume de l'aimant
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Épaisseur de la plaque
$d_i (i = b, t)$	Épaisseur de deux peaux
I	Moment quadratique
$\sigma_i (i = b, t)$	Contrainte normale dans les peaux
τ_{xzc}	Contrainte de cisaillement en élastomère portée par l'axe x
τ_{yzc}	Contrainte de cisaillement en élastomère portée par l'axe y
n_j^{Lor}	Force créée entre les charges des particules ferromagnétiques
m_j	Moment crée entre les charges des particules ferromagnétiques
M	Moment de flexion

N	Effort de cisaillement
ν	Coefficient de Poisson
ρ_i ($i = t, b, c$)	Densité massique
W	Travail des forces appliquées
δ	Opérateur variationnel
t_1, t_2	Variation du temps
$D = EI$	Rigidité en flexion des peaux
μ_{ej} ($j = t, b$)	Perméabilité des peaux
μ_0	Perméabilité du vide
B	Intensité du champ magnétique
m_j^{Max} ($j = t, b$)	Moment équivalent induit par le saut de contrainte de Maxwell
m_j^{Lor} ($j = t, b$)	Moment équivalent induit par la force de Lorentz
H	Champ magnétique
A_{mn}	Coefficients
$X_m(x)$ et $Y_n(x)$	Fonctions d'approximation
m, n	Nombres d'approximation
$M \times N$	Nombre des équations du système
\tilde{W}	Travail des forces générées par le champ magnétique
$R = \frac{a}{b}$	Rapport de la longueur sur la largeur de la plaque
γ_r	Déformation en cisaillement du ressort
γ_a	Déformation en cisaillement d'amortissement
$\dot{\gamma}$	Vitesse de déformation en cisaillement
γ	Angle de déformation en cisaillement
ε_0	Déformation initiale
G_M	Module de cisaillement de Maxwell
η_M	Amortissement de Maxwell
G_K	Module de cisaillement de Kelvin-Voigt
E_0	Module de rigidité de Zener de la branche sans amortissement
α	Constante varie entre 0 et 1

$Q_i, i = x, y$	Effort tranchant
$N_i, i = x, y$	Effort normal
N_{xy}	Effort de cisaillement
$M_i, i = x, y$	Moment de flexion
M_{xy}	Moment de torsion

Abréviations

LPMC	Laboratoire de Physique de la Matière Condensée
RTV	Room Temperature Vulcanizing
EMR	Elastomère Magnéto-Rhéologique
MEF	Méthode des Eléments Finis
ATR	Avion Transport Régional
USA	United States of America
TGV	Trains à Grande Vitesse
TGV	Trains à Grande Vitesse
DKT	Discrete Kirchhoff Triangulaire
MSEC	Modal Strain Energy mode Complexe
KVF	Kelvin-Voigt Fractionnaire
MRM	Modèle Rhéologique de Maxwell
MR	Matériaux Rhéologiques

INTRODUCTION GÉNÉRALE

1. Contexte de l'étude

Afin d'améliorer les caractéristiques mécaniques des structures et de les prémunir de la fatigue et de la rupture précoce, il est indispensable de contrôler leur comportement vibratoire. La fatigue est parmi les causes principales de la rupture. L'analyse vibratoire a connu un regain d'intérêt pour les besoins de conception et de dimensionnement des structures ; répondant ainsi aux meilleures conditions de fonctionnement de sécurité, d'ergonomie et d'isolation acoustique. Face à ces exigences les matériaux composites en structures sandwichs paraissent une solution idéale grâce à leur multifonctionnalité intégrée. On s'y intéresse fortement dans de nombreux secteurs industriels tels que l'aéronautique, l'aérospatial, la construction navale, la construction automobile, le génie civil, le génie nucléaire et bien d'autres. Les matériaux conventionnels ont des caractéristiques mécaniques bien définies, la dureté par exemple dans un acier est augmentée par un traitement thermique qui agira sur toute la structure ou améliorée superficiellement par un traitement chimique. La plasticité est par ailleurs peu contrôlée. Ces deux propriétés antagonistes pour le frottement et les amortissements vibratoires sont peu ajustables. Pour réduire et contrôler l'amplitude des vibrations, ce travail constitue une contribution importante à la maîtrise de la rigidité et par ailleurs, l'amortissement, d'où l'appellation de matériau intelligent. Le matériau utilisé est un composite sandwich constitué de deux peaux en aluminium et d'un noyau en élastomère chargé par des particules micrométrique. Les élastomères constituent des atouts majeurs dans le domaine industriel. Leurs propriétés mécaniques spécifiques en termes d'hyperélasticité, permettent une grande déformation élastique et de viscoélasticité et assurant la capacité à amortir les vibrations. Ils justifient leur utilisation dans plusieurs applications industrielles et présentent un amortissement interne qui leur confère d'excellentes propriétés fréquentielles d'isolation vibratoire et acoustique. La nature complexe des élastomères et notamment la présence des pseudo-fibres carbonées leur confère des comportements fortement non linéaires et dissipatifs. Le domaine d'étude des élastomères est un sujet multidisciplinaire dans lequel l'intervention des différentes branches scientifiques est nécessaire pour contribuer à la maîtrise du sujet.

Les travaux de recherche dans le domaine des matériaux élastomères sont classés en deux catégories, la première est étudiée les trois axes : les sciences des matériaux ([[Tobolskv A. V., 1960](#)], [[Aklonis J. et al., 1972](#)], [[Yeoh O., 1990](#)]), le comportement mécanique ([[Gay D.,](#)

1991], [Wineman A. S. & al., 2000], [Holzapfel G. A., 2000], [David I. G. J., 2001], [Lion A. 2007]) et la conception ([Ever B. J., 1998], [Gay D., 1991]). La présente étude se situe dans la seconde catégorie dans la quelle on s'intéresse à l'étude du comportement vibratoire non linéaire des plaques sandwichs magnétorhéologiques.

Actuellement les élastomères magnétorhéologiques constituent un atout majeur pour la conception des structures sandwichs dites intelligentes. Les propriétés rhéologiques des élastomères sont contrôlées par un champ magnétique, ils peuvent changer continument, rapidement et réversiblement certaines de leurs caractéristiques et s'adapter à un environnement nouveau. L'intérêt est à la hauteur des nombreuses applications industrielles envisageables, notamment le dispositif d'amortissement adaptatif. Ces élastomères adaptatifs n'ont pas fait l'objet d'études récentes, si les fluides magnétorhéologiques ont été étudiés dès la première moitié du XX^{ème} siècle par W. Winslow, les premiers travaux sur ces élastomères ne sont apparus qu'en 1983 par Z. Gigbin, L. Jilken, et ce n'est que dans la dernière décennie que les premiers modèles et applications ont vu le jour. Les développements actuels portent sur les structures sandwichs (poutres, plaques et coques) ayant un cœur en élastomère magnétorhéologique. Si les premières recherches sur les poutres magnétorhéologiques n'ont été faites qu'en 2006 par G. Y. Zhou, et Q. Wang, les plaques magnétorhéologiques ont fait l'objet des très récentes études par Jia-Yi Yeh en 2013 et Z. G. Ying, Y. Q. Ni, S. Q. Yes en 2014. En se basant sur ces dernières études, on s'intéresse dans le présent travail à l'étude du comportement dynamique des plaques en élastomère chargé par différents pourcentages des particules micrométriques de fer, soumises à une force d'excitation magnétique. La complexité du comportement mécanique de ce type de structures nécessite l'utilisation d'algorithmes performants de résolution de systèmes non linéaires et l'utilisation d'outils puissants de simulation tels que la méthode des éléments finis.

Ce travail de thèse a pour objectif de proposer une modélisation numérique qui prend en compte les phénomènes viscoélastiques non linéaires des élastomères, cette modélisation est complétée par un volet expérimental de validation.

2. Plan de thèse

Ce mémoire de thèse est constitué de quatre chapitres :

Un premier chapitre de synthèse bibliographique est consacré à une introduction sur le développement des matériaux composites, les matériaux composites sandwichs, les élastomères, les élastomères chargés, le comportement et les modèles des matériaux viscoélastiques. A la de chapitre, l'accent est mis sur les matériaux et les structures en élastomère magnétorhéologique.

Dans le deuxième chapitre, on présente un rappel de la théorie des plaques donnée avec un modèle mathématique des plaques sandwichs soumises à un champ magnétique afin de bien définir les équations régissant le comportement dynamique de ces matériaux.

Au chapitre trois, est développé une approche numérique de résolution en utilisant la méthode de Ritz avec une formulation énergétique, un code numérique en langage Matlab pour le calcul des propriétés amortissantes de la plaque sandwich, a été fait. Des simulations numériques par la méthode des éléments finis sous le code de calcul Abaqus sont menées et validées, pour montrer l'efficacité et les performances de ce code quelle que soit la dépendance en fréquence du modèle viscoélastique.

Dans le dernier chapitre, une caractérisation et identification expérimentale des propriétés viscoélastiques de l'élastomère magnétorhéologique et une modélisation du comportement dynamique en cisaillement ont été menées sous une excitation harmonique par une force magnétique des plaques en élastomère magnétorhéologique chargé par différents pourcentages de particules micrométrique de fer. Le modèle développé a permis de caractériser le comportement d'un matériau complexe en fonction de l'intensité du champ magnétique. Une étude comparative avec l'approche numérique et un modèle éléments finis développé par le code Abaqus est faite.

CHAPITRE 1
ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1. Introduction

Une revue bibliographique sur les matériaux complexes sandwichs en élastomère magnétorhéologique est développée dans ce chapitre, l'analyse des matériaux complexes est très variée et très riche. Cette revue débutera avec une exposition plutôt générale de la structure sandwich : les différents constituants, l'intérêt de son utilisation ainsi que les différents domaines d'application. Dans un deuxième temps, l'accent est mis sur les élastomères en commençant par un bref historique, définition générale et les paramètres d'influence, la troisième analyse est axée sur la rhéologie des élastomères, et on termine par une explication détaillée des matériaux intelligents surtout les matériaux magnétorhéologiques.

1.2. Les matériaux composites

1.2.1. Définition

Un matériau composite peut être défini d'une manière générale comme l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux, l'assemblage final ayant des propriétés meilleures en comparant avec les propriétés de chacun des matériaux constitutifs. En fonction du renforcement de la matrice, on distingue deux grandes catégories : les composites à particules et ceux renforcés par des fibres. Je m'intéresse plus particulièrement dans ce travail aux composites sandwichs à matrice élastomère chargés en particules ferromagnétiques.

1.2.2. Les matériaux composites sandwichs

1.2.2.1. Définition

Les matériaux composites sandwichs résultent, généralement de l'association de deux peaux, de faibles épaisseurs, constituées de matériaux à haute résistance et à grand module de Young, d'une âme beaucoup plus épaisse et de faible masse volumique [figure 1.1](#). Ces structures complexes offrent de grandes potentialités aux concepteurs des divers domaines.

1.2.2.2. Bref historique des matériaux composites sandwichs

Le premier à avoir discuté de l'intérêt et ayant travaillé sur les matériaux composites a été le Français Duleau en 1820 [\[1\]](#). Mais les premières applications n'ont débuté qu'une centaine d'années plus tard avec la naissance de l'industrie aéronautique. La conception des structures d'aéronefs étant soumise à des impératifs de performances toujours accrues en termes de rigidité, de résistance et de légèreté, la recherche de nouveaux matériaux est permanente. Si les débuts de l'aviation ont consacré la construction en bois et toile, la solution par des peaux

minces métalliques a été adoptée dès les années 20. Dans les années 30, les industriels ont envisagé la possibilité de réaliser des éléments de structures en sandwichs fabriqués par les matériaux de l'époque. Un brevet à ce sujet a été déposé par Von Karman en 1924 [2]. Le procédé Brodeau (1934), consiste en " deux épaisseurs de contreplaqué qui enserrant en sandwich une certaine épaisseur de matière légère, du liège ou de l'aggloméré de liège ». Ce type de solution fut étudié simultanément par les grands pays de la construction aéronautique avant la 2^{ème} guerre et fut appliqué ponctuellement à la conception de certains éléments de structure (Avion Lignel (1938, F), Schneider (1938, F), De Havilland Albatros (1938, GB), Skydine (1939, U.S.A.). L'application la plus connue qui marqua le réel début de la construction sandwich fut le bombardier De Havilland Mosquito (1943, 7741 exemplaires). L'extrados de l'aile était constitué d'un sandwich peaux contreplaqué, cœur balsa alors que l'intrados était construit de simples panneaux de contreplaqué. Toutefois, avec le développement des qualités intrinsèques de la construction sandwich, la disponibilité des matériaux, la facilité de leur mise en œuvre, la tolérance aux impacts et la réparation, le choix de la conception a été largement amélioré pour les éléments de structure. L'apparition des fibres de verre tissées et de résines performantes au début des années 50, a permis la fabrication des premiers sandwichs à peaux composites et cœur nid d'abeille. Ils furent, en France, appliqués à des éléments de structures secondaires de l'avion Vautour (1953) : Carénage d'arête dorsale, contre-dérive, radôme [3].

Actuellement, le pourcentage en masse de composites utilisés dans la structure plafonne à 20% environ dans les avions civils et leur utilisation se limite aux structures secondaires. Très peu d'appareils voient leur structure primaire réalisée entièrement ou partiellement en composites. L'appareil civil le plus avancé de ce point de vue et qui fait largement appel à la construction sandwich est certainement le Beechcraft Starship (1983, U.S.A. 6-10 passagers) dont 70% de la masse de la structure est en matériaux composites. En Europe, le caisson d'extrémité de voilure de l'ATR 42 est en carbone. Le nouvel Airbus A340-500/600 (1er vol : 2001) adoptera pour la première fois un élément de structure travaillante en carbone, à savoir une poutre ventrale d'une longueur de 16 mètres (Air et Cosmos, N°1680). Dans le domaine militaire, on parle de plus de 90% de la structure en composite pour les avions du Lockheed Skunk Works : les bombardiers furtifs B2 et F117. En ce qui concerne la conception des hélicoptères, l'état de l'art publié [Aérospatiale 1986] est bien représenté par le Dauphin 2. Pour cet hélicoptère, 25% de la masse de la structure est réalisée en matériaux composites. Toutefois, des éléments de structure primaire sont réalisés en sandwich NIDA Nomex/peau métal-

lique ultrafine. Le récent convertible V22-Osprey n'intègre pour sa part que des structures secondaires en sandwich composite [4].

Le fait de pouvoir construire léger et rigide intéresse de nombreux autres domaines. Les premières coques de bateau en fibre de verre/balsa datent du début des années 60 et l'utilisation dans ce domaine prend de l'ampleur avec l'arrivée de frégates militaires furtives et de bateaux à grande vitesse [5]. Par ailleurs, les impératifs de diminution de l'émission de CO₂ ont conduit les constructeurs automobiles à changer de technologie et à rechercher des solutions sandwichs pour construire des structures plus légères [6]. Toutefois, jusqu'à présent, leur introduction se heurte aux problèmes de la fabrication en grande série et seules des applications ponctuelles ont été réalisées : boucliers anti-crash prototypes [7], containers frigorifiques [8]. En compétition automobile, des sandwichs NIDA et peau en aluminium sont utilisés pour le châssis en remplacement de treillis soudés. Les mêmes contraintes conduisent à l'apparition de constructions hybrides sandwichs/aluminium dans le matériel ferroviaire [9]. Le génie civil utilise aussi des sandwichs pour réaliser des voûtes de grandes portées. Le gain en densité surfacique est spectaculaire : de 2600kg/m² pour une voûte en pierre à 33kg/m² pour une solution sandwich acier/mousse [10]. Récemment des portes d'écluses, un tablier de pont et un balcon pour habitat collectif ont été réalisés [11]. Egalement des structures sandwichs possédant âme en élastomère chargé par des particules peuvent être incorporées dans la matrice des polymères fragiles, de manière à améliorer leurs propriétés à la rupture et au choc par diminution de la sensibilité à la fissuration [12]. Le bref historique cité dans ce paragraphe suffit à démontrer les avantages intrinsèques des solutions sandwichs.

1.2.2.3. Les constituants d'une structure sandwich

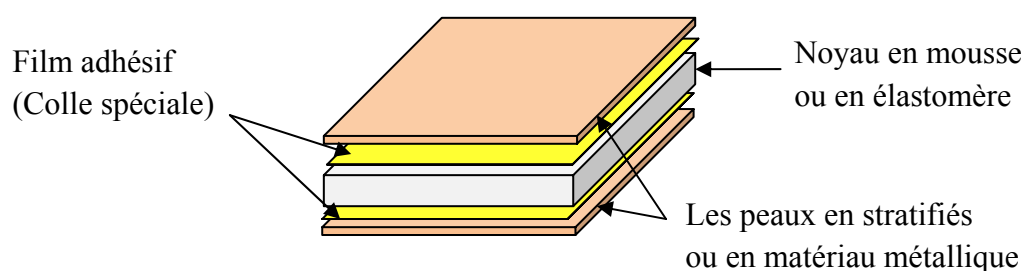
Une structure sandwich est formée généralement de trois composants possédant des propriétés différentes, mais complémentaires : les peaux, l'âme et l'adhésif. La figure 1.1 présente les différents éléments constitutifs d'un matériau composite en construction sandwich. Les peaux (ou semelles) doivent résister aux moments de flexion. Elles peuvent être de plusieurs natures : en métal, en stratifié, en bois (contreplaqué) ou encore en plaque thermoplastique. Le choix de la nature de la peau s'effectue principalement en fonction des performances mécaniques exigées. Mais généralement, une rigidité élevée et une excellente résistance à la compression et à la tension sont les principales qualités recherchées [13].

L'âme, l'élément central d'une structure sandwich, est généralement un matériau ayant de faibles caractéristiques mécaniques. Elle a pour rôle de résister aux contraintes de cisaillement engendrées suite au mouvement de glissement des peaux sous charge et de maintenir leur

écartement. En effet, si l'épaisseur des panneaux n'est pas maintenue constante, il en résulte une diminution des capacités des peaux externes à résister à la flexion [14]. L'âme est souvent épaisse et de faible masse volumique. L'épaisseur élevée de l'âme a pour but d'accroître le moment d'inertie du panneau sans augmenter la masse volumique. Comme le montre la figure 1.2, une structure sandwich d'épaisseur « $4.t$ » est 37 fois plus rigide que celle d'épaisseur « t », pour seulement une augmentation de 6% de son poids. Les types d'âmes les plus communs dans le secteur industriel sont : le bois de balsa, les nids d'abeilles et les mousses en polymères rigides.

L'élément final, dont l'importance est jugée également cruciale, est le film adhésif. Ce film forme la liaison entre l'âme et les peaux. Cette liaison doit être continue, sans porosité et d'épaisseur constante. Par ailleurs, une capacité suffisante pour s'opposer à la déformation est nécessaire afin de transmettre des sollicitations mécaniques. Mais, aussi elle doit être suffisamment élastique pour absorber et atténuer les impacts [13].

a)



b)

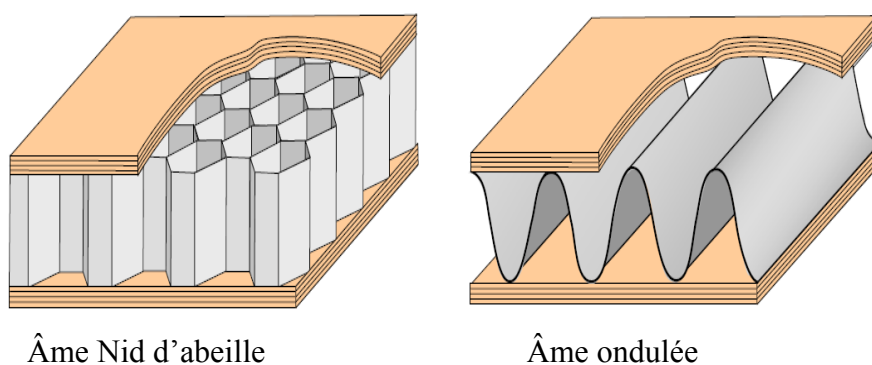


Fig.1.1. Les différents constituants de structure sandwich, a) âme pleine b) âme creuse

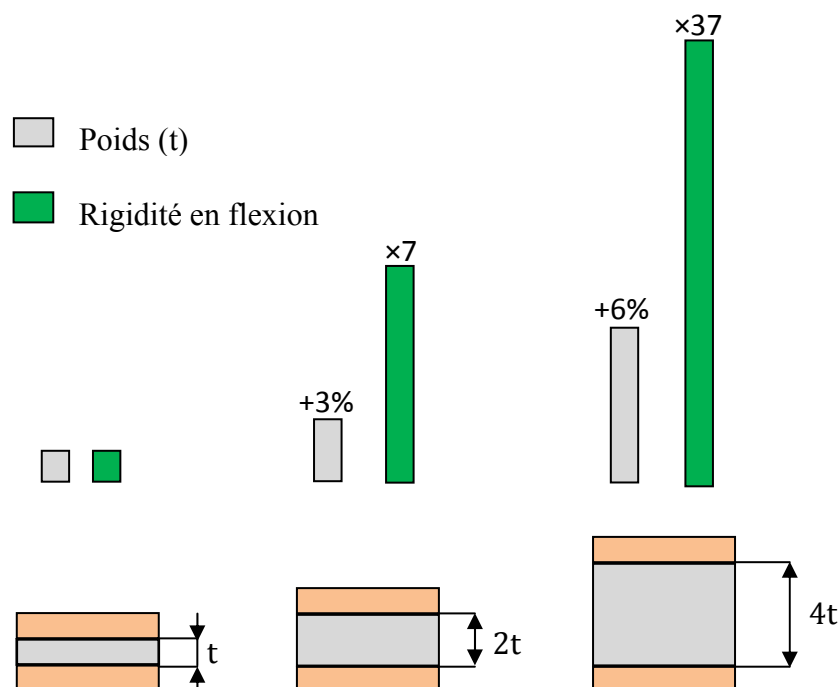


Fig.1.2. L'effet de l'épaisseur de l'âme sur la rigidité en flexion d'une structure sandwich

1.2.2.4. Domaines d'application

La construction en sandwich est un concept qui a été inventé dans les années 1820 [13]. Cependant, il a fallu un siècle pour que l'utilisation en masse commence, précisément dans le domaine militaire [14]. En effet, l'une des premières applications de la construction en sandwich est la fabrication d'un avion militaire britannique de la Seconde Guerre Mondiale, le Mosquito (voir figure 1.3) [8]. Contrairement aux structures métalliques, sa structure en panneaux sandwichs avec des peaux de placage en bois et une âme en balsa, lui confère une grande légèreté et par voie de conséquence une vitesse plus élevée. Cette structure permettra également de le rendre plus difficilement détectable par les radars [15].

Au cours des années 1940, l'apparition de nouveaux matériaux d'âme a encouragé les principaux constructeurs d'avions militaires à utiliser davantage les composites sandwichs [14]. En effet, en 1943, la base aérienne américaine Wright-Patterson (WPAFB) a commencé à utiliser des structures sandwich avec des peaux stratifiées en résine polyester renforcée de fibres de verre liées entre elles par une âme de faible densité (balsa ou nid d'abeille en fibres de verre) pour fabriquer le fuselage de leur VULTEE BT-15 [15].

Ces dernières années, la plupart des avions civils ont également adopté cette construction pour de nombreux composants. Par exemple, les planchers de l'avion Boeing 747 sont fabriqués à partir d'un panneau sandwich de balsa et de feuille d'aluminium [16].

Dans le domaine de la construction navale, les caractéristiques de légèreté et surtout d'absence de corrosion des structures sandwich, lorsque les divers constituants ne sont pas métalliques, commencent à susciter de l'intérêt. Kujala et Tuhkuri [17] ont mené une étude expérimentale et analytique sur l'utilisation des panneaux sandwichs possédant une âme en acier ondulé dans la construction des superstructures de navires. Ils ont démontré que le remplacement d'une construction en acier conventionnelle par une construction en sandwich peut apporter des gains de masse jusqu'à 40 à 50%. Selon Kimpara [18], l'utilisation de construction sandwich à âme en nid d'abeille pour la fabrication des voiliers a pour conséquence de diminuer la masse de la structure de 70% comparativement à la construction traditionnelle en composite à base de fibres de graphite (carbone). De nos jours, pratiquement tous les bateaux de plaisance américains de moins de 43 mètres sont construits en sandwichs composites en fibres de verre [19, 20].

À titre d'exemple, l'utilisation d'une structure sandwich en nid d'abeille Nomex avec peaux époxy/fibre de carbone pour la construction de la carrosserie d'une formule 1 comporte l'avantage de réduire le poids de la voiture et manifeste de plus une très bonne résistance à la fatigue [21].

Dans le secteur ferroviaire, la technique de construction en sandwich a été sélectionnée pour la fabrication des cabines de trains à grande vitesse (TGV). Les propriétés exceptionnelles de ces structures en font le matériau idéal pour palier aux problèmes de la propagation des ondes de pression lors de croisement de deux trains dans un tunnel [8]. De plus, la bonne résistance au feu et la grande résistance à des températures très élevées de certaines mousses thermoplastiques, ont permis par exemple la conception du train allemand « Transrapid ». Grâce à une structure en matériaux sandwichs, ce dernier peut atteindre des vitesses supérieures à 550 Km/h [22].

Récemment, la construction sandwich est de plus en plus utilisée dans les projets de réhabilitation des infrastructures routières (Génie civil) telles que la fabrication des tabliers de ponts où la légèreté, la durabilité et la résistance à la corrosion sont indispensables, des portes d'écluses, un tablier de pont et un balcon pour habitat collectif ont été réalisés [11]. Les structures sandwichs sont également utilisées dans la construction des articles de sports et de loisirs, tels que les skis acrobatiques, les kayaks, les planches de surf, les tables de billard et les raquettes de tennis. Le bref historique présenté démontré les avantages intrinsèques des solutions sandwichs. Un autre aspect déterminant consiste en la possibilité d'inclure en plus de la fonction structurale de nombreuses autres fonctions : isolation thermique ou acoustique, tenue au crash, tenue au feu, furtivité, amortissement vibratoire. C'est exactement ce que font les

matériaux sandwichs ayant un noyau viscoélastique, l'intérêt de l'industrie est à la hauteur des nombreuses applications envisageables, surtout dans les domaines soumis à des vibrations ou des bruits, tels que l'aéronautique, l'aérospatial et le bâtiment [23]. Les matériaux composites sandwichs répondent parfaitement à ces critères et le large choix des constituants nécessaires à leur élaboration ouvre un vaste spectre de propriétés mécaniques. Mais il est de nombreuses utilisations où ils ne suffisent pas. Ainsi, dans l'industrie automobile ou dans le secteur de bâtiment.



Fig.1.3. L'avion militaire Britannique; Le Mosquito, en structure sandwich [15].

La recherche d'amortisseurs efficaces dans une large gamme de fréquences de vibration est-elle un enjeu crucial pour le confort des passagers et la tenue de route du véhicule et la protection des bâtiments contre les tremblements de terre. On s'est tout d'abord contenté d'incorporer des élastomères chargés : ils réduisent certes les vibrations et le bruit, mais leur raideur et leur capacité d'amortissement ne peuvent être ajustée indépendamment. Aujourd'hui il est possible d'aller plus loin avec les matériaux dits « actif » : piloté par un stimulus externe [21]. Nous nous intéresserons plus particulièrement dans notre travail aux composites sandwichs à matrice en élastomère chargés en particules de fer soumis à un champ magnétique.

1.3. Les élastomères

1.3.1. Bref historique des élastomères

Les élastomères font partie de la grande famille des polymères, ils désignent aujourd'hui d'une façon générale tous les caoutchoucs, naturels ou synthétiques, possédant l'élasticité

caoutchoutique. Cette substance, que l'on manipule de nos jours avec insouciance au travers des élastiques, et autres joints est le fruit d'une longue histoire dont les traces remontent à la civilisation Maya [24]. Leur usage était alors habituel (statuettes), médical ou encore festif. Signalons pour ce dernier point que le jeu de balle était un évènement clef des méso-américains ; la balle en caoutchouc, était obtenue par le mélange de deux composés naturels (du latex et un agent favorisant réticulant). Ce n'est que bien plus tard que les Européens observèrent les amérindiens travailler le caoutchouc ; la première étude scientifique ne fut menée qu'en 1736 par les français, La Condamine et Fresneau en Guyane. Le terme caoutchouc rend d'ailleurs hommage à ses découvreurs puisqu'il est repris de l'expression indienne *cao* (bois) *tchu* (qui pleure).

Les premières applications arriveront vers 1820 avec les imperméables MacIntoch et Hancock. Cinquante ans plus tard naissent les premiers pneumatiques. Les procédés de fabrication ne cessent d'être perfectionnés (vulcanisation, synthèse, caoutchoucs de silicone...), les volumes augmentent : l'ère industrielle des caoutchoucs synthétiques est née. L'engouement continue : seul ou associé à d'autres matériaux, des propriétés spécifiques sont obtenues. L'histoire des élastomères continue de s'écrire...

Comme il a été dit précédemment, les caoutchoucs sont naturels ou synthétiques. Si les modes de production sont différents, leur usage l'est tout autant, bien que ces filières d'abord concurrentes, soient de plus en plus complémentaires. Dans le premier cas, ils sont issus d'une culture essentiellement asiatique et se destinent aux pneumatiques lourds (avions, camions), aux préservatifs... Les caoutchoucs synthétiques, élaborés principalement dans les industries occidentales, fournissent une large palette de propriétés, bien que le facteur coût puisse faire pencher la balance du côté « naturel » et vice-versa.

1.3.2. Définition

Un élastomère peut être vu comme un regroupement de chaînes macromoléculaires. Une chaîne est constituée d'une multitude de monomères. On entend par monomère un enchaînement de motifs simples et identiques, qui sont formés d'une succession de segments carbonés. Les atomes constitutifs d'un monomère sont essentiellement le carbone et l'hydrogène. La composition du caoutchouc naturel non vulcanisé est un hydrocarbure dont le monomère de base est $(C_5H_8)_n$, nommé l'isoprène (voir [figure 1.4](#)). La synthèse de cette molécule en laboratoire est à l'origine du caoutchouc synthétique. A l'état naturel, les chaînes sont repliées sur elles mêmes.

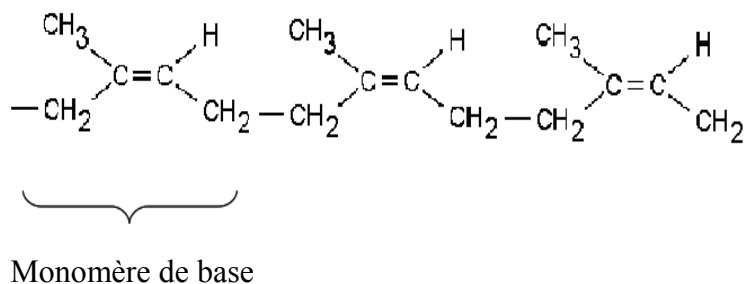


Fig.1.4. Monomère de base d'une chaîne macromoléculaire

Sous sollicitations, elles ont la possibilité de s'allonger d'une façon significative en supportant de très grandes déformations.

Les chaînes polymériques sont reliées entre elles par des points de jonction appelés points de réticulation. Créés suite à une réaction chimique activée par un catalyseur. Dans la plupart des cas, il s'agit de soufre.

On appelle vulcanisation le processus de création de liaisons chimiques entre les chaînes macromoléculaires pour former un réseau tridimensionnel stable. La vulcanisation et les enchevêtrements moléculaires assurent la cohésion du matériau.

Les élastomères possèdent des propriétés physiques et chimiques très complexes. Les notions générales de chimie relatives à ces matériaux sont assez abondantes dans la littérature. En particulier, il est communément admis que le nombre de ponts (aux points de réticulation), leur longueur, ainsi que leur répartition influent considérablement sur les propriétés mécaniques.

La réponse mécanique de ces matériaux dépend fortement de la température. Dans notre thèse on s'intéresse à la dynamique des chaînes polymères [25, 26]. On considère des chaînes assez longues, de grande masse moléculaire. Les modules présentés dans cette partie permettent d'expliquer le comportement singulier du module viscoélastique d'un polymère (dans un fondu) en fonction du temps, représenté par la Figure 1.5 lorsqu'une déformation est appliquée à un polymère à l'état fondu, ses segments moléculaires s'orientent dans la direction de la déformation. Les molécules perdent donc leur forme initiale de pelote, forme la plus stable d'un point de vue entropique. Dans un premier temps, le polymère réagit comme solide élastique, capable de stocker de l'énergie et de l'utiliser pour retrouver sa forme initiale (première partie de la Fig.1.5 jusqu'à τ_{Rouse}). Ensuite, les molécules se réorganisent peu à peu dans l'espace, en bougeant les unes par rapport aux autres et en se libérant des contraintes créées lors de la déformation. Ainsi, la déformation restant appliquée, elles retrouvent peu à peu leur

forme de pelote et comme les liquides Newtoniens ne seront plus capables de retrouver leur état initial. C'est la relaxation du polymère. Il décrit le passage du polymère de l'état solide à l'état liquide. La figure (1.5) représente les différentes étapes de la relaxation d'un polymère, via une description de la forme de son module de relaxation en fonction du temps.

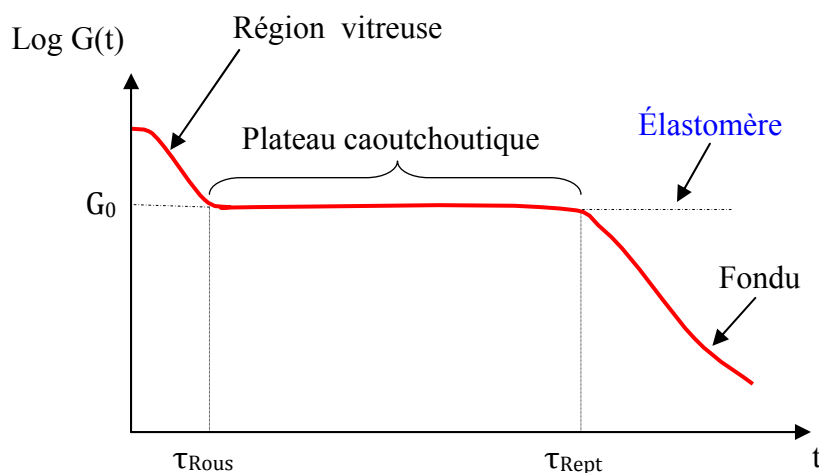


Fig.1.5. Schéma de variation du module viscoélastique G'' en fonction du temps pour un polymère de grande masse moléculaire [25], [26]

1.3.3. Réticulation des élastomères

Les chaînes macromoléculaires constituant un élastomère sont de différentes longueurs. Une chaîne contient en moyenne plusieurs milliers voir plusieurs centaines de milliers de motifs monomères enchainés. Ces chaînes se trouvent sous forme de pelotes statistiques. La cohésion du matériau est assurée par le biais d'interactions physiques (enchevêtrements moléculaires) et chimiques (vulcanisation). La vulcanisation peut être réalisée de différentes manières selon l'élastomère, grâce à l'existence de sites actifs au sein de l'élastomère ou grâce à l'action d'un agent de vulcanisation au niveau des insaturations de la chaîne polymère. La dernière solution est la plus courante pour les élastomères hydrocarbonés. L'agent de vulcanisation le plus répandu est le soufre qui en se fixant sur les chaînes, forme des ponts entre ces dernières. Le soufre se fixe sur les chaînes naturellement où est aidé par une série de réactions nécessitant des activateurs et des accélérateurs afin d'optimiser ces réactions.

1.3.4. Influence du nombre de ponts

Certaines des propriétés mécaniques (élasticité) qui seront définies ultérieurement, sont considérablement améliorées lorsque le degré de réticulation augmente (nombre de ponts), tandis que d'autres se dégradent, comme le montre la [figure 1.6](#). On peut retenir que d'une

manière générale, la vulcanisation des élastomères permet d'augmenter l'élasticité, mais réduit leurs propriétés à la rupture au-delà d'un seuil [27].

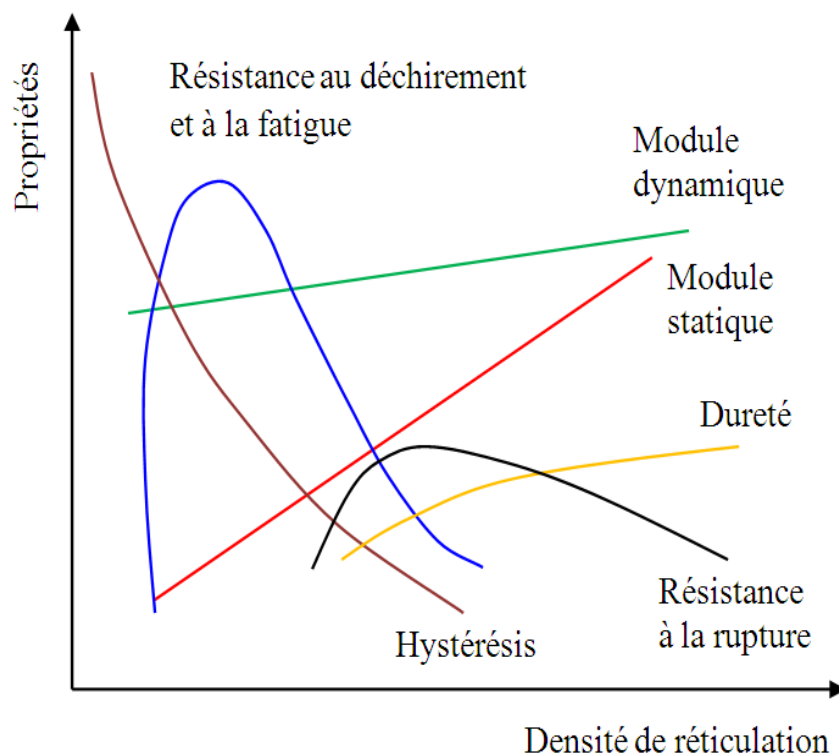


Fig.1.6. influence de la densité de réticulation sur différentes propriétés mécaniques [27]

1.3.5. Influence de la longueur des ponts

A même degré de réticulation, plus la longueur des ponts est importante, plus les mouvements entre les chaînes qu'ils relient sont facilités. Néanmoins la longueur de ces ponts reste généralement très inférieure à la distance entre deux nœuds de réticulation. En fait, la littérature ne fait pas état d'une influence de cette longueur des ponts sur les propriétés mécaniques de l'élastomère si ce n'est une légère augmentation de la rupture et la déchirure [27].

1.3.6. Influence de la répartition des ponts

L'hétérogénéité de la réticulation (résultat de la vulcanisation) permettrait d'améliorer les propriétés mécaniques par une meilleure dissipation de l'énergie de déformation [28]. L'introduction de charges conduit aussi au renforcement des élastomères (augmentation de la contrainte à une déformation donnée), qui se traduit par l'amélioration des propriétés à la rupture (déformation et contrainte). L'optimisation des propriétés mécaniques des élastomères en présence de charges réside dans la nature et les caractéristiques de ces dernières.

1.3.7. La charge

La charge consiste en une phase rigide introduite, entre autres, pour l'amélioration des propriétés mécaniques. Le renforcement lié à la présence de charges permet d'accroître le domaine d'application des élastomères.

Ainsi selon les applications et le renforcement souhaité, différents types de charge peuvent être utilisés :

- Très peu renforçantes : craie naturelle, talc.
- Semi-renforçantes : Kaolins, silicoaluminates, carbonates de calcium (étanchéité).
- Renforçantes : Noir de carbone, silice (pneumatique).

Les paramètres qui permettent de caractériser les charges sont :

- **La structure** : La structure de la charge se définit selon différentes échelles de la taille. La structure primaire de la plupart des charges nanométriques découle du regroupement lors de la synthèse de particules élémentaires sous forme d'agrégat indivisible. Une attraction plus faible existe aussi entre les agrégats conduisant à la formation d'une structure secondaire sous forme d'agglomérats. La structure secondaire est destructible sous l'effet d'une action mécanique comme par exemple lors du malaxage ou au cours de sollicitations.
- **La surface spécifique** : C'est la surface développée de la charge par unité de masse. Plus la taille de la particule est petite plus la surface spécifique est grande. Elle est de 10 à 40m²/g pour les kaolins, de quelques m²/g à 150m²/g pour les noirs de carbone et elle peut atteindre 400m²/g pour certaines silices. On verra ultérieurement que plus la surface spécifique est grande plus le renforcement potentiel est important.
- **L'activité chimique de surfaces** : elle permet de contrôler la compatibilité (dispersion et formation d'interactions) entre la charge et la matrice. L'énergie de surface [29] détermine les interactions charge-charge et polymère-charge. Elle comprend deux composantes :

$$\gamma = \gamma_s^d + \gamma_s^{sp} \quad (1.1)$$

Où γ_s^d est la composante dispersive correspondant aux interactions entre la matrice et la charge, γ_s^{sp} est la composante spécifique ou polaire dont dépendent souvent les interactions charge-charge.

Les noirs de carbone s'incorporent très facilement dans les élastomères hydrocarbonés du fait de leurs natures chimiques proches, comme la silice dans les silicones. La chimie de surface de la charge permet grâce à différents traitement de surface de moduler l'activité chimique de celle-ci. Ainsi, dans le cas du noir de carbone, le traitement de la charge est possible

par acide [30], par plasma [31], par l'ozone [32]. Ces traitements modifient la charge dans sa totalité et ne permettent que de limiter le nombre d'interactions.

Dans le cas de la silice, son incorporation au sein d'élastomères hydrocarbonés nécessite généralement l'utilisation d'un traitement de surface afin d'améliorer leur compatibilité [33]. Un tel traitement peut être réalisé par greffage de chaînes alkyles par estérification en milieu alcoolique [34]. On utilise souvent le greffage de molécules silanes qui peuvent jouer selon leur nature le rôle soit d'agents de recouvrement qui permettent de limiter les interactions [35,36], soit d'agents de couplage qui permettent l'établissement de liaisons covalentes avec la silice [33], [37].

La différence entre ces deux voies (estérification ou utilisation de silanes) est que la première est un traitement global de la surface alors que la seconde permet de contrôler le traitement de surface en variant la quantité (surface traitée) et la fonctionnalité du greffage (formation de liaison covalente ou non).

Les trois paramètres caractéristiques des charges que sont la structure, la surface spécifique et l'activité chimique vont être déterminants lors de l'incorporation et la dispersion de la charge au sein de la matrice (figure 1.7). Ainsi, dans le cas de charges renforçantes avec une grande surface spécifique et une structure élevée, la mise en œuvre nécessite un très fort cisaillement afin de désagglomérer et mouiller le maximum de surface de charges.

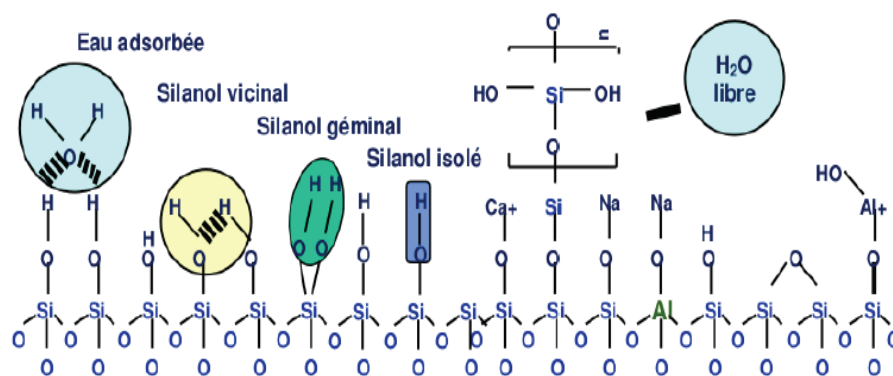


Fig.1.7. Etat chimique de la surface de silice [37]

1.3.8. Mise en œuvre des élastomères chargés

Pour les élastomères chargés, la mise en œuvre est une étape déterminante car elle conditionne l'incorporation et la dispersion homogène non seulement des charges renforçantes mais aussi des différents ingrédients de la formulation. Elle implique l'utilisation de malaxeurs et de mélangeurs qui produisent un très fort cisaillement. La charge est introduite dans la matrice

malaxée. Son incorporation augmente le cisaillement mécanique et la température. En fonction du taux de charges, l'intensité du cisaillement varie et influence ainsi la désagglomération. Pour un faible taux de charge ($\phi < 15\%$), Mele et autres [38], après une caractérisation rigoureuse de la dispersion de leurs échantillons, ont constaté qu'une population d'agrégats et d'agglomérats disparaît au profit uniquement d'agrégat pour les plus forts taux de charges.

L'étape de mélange s'accompagne d'une augmentation puis d'une diminution de la viscosité. Dans le cas des noirs de carbone, Freakly [39] interprète l'augmentation de viscosité par la formation des interactions physiques entre la matrice et la charge. Il attribue ensuite la diminution à la désagglomération des charges en agrégat indivisibles. Durant ce processus de désagglomération et dispersion, un maximum de la surface de la charge se trouve en contact avec l'élastomère et la charge. L'auteur observe finalement une seconde diminution de viscosité qui serait due à la réduction de la masse molaire du caoutchouc sous l'effet du cisaillement (dans le cas de caoutchouc naturel pour lequel il existe des chaînes de très grande longueur).

On peut ajouter que la dispersion des charges au sein de la matrice dépend du temps de malaxage. Le malaxeur sert à la dispersion de ces constituants mais aussi de réacteur chimique entre ces constituants dans le cas du greffage de silane sur la surface de la silice. Le renforcement qui dépend à la fois de la présence, de la dispersion des charges et de l'état de surface de la charge dépend donc grandement du protocole de mise en œuvre.

1.3.9. Microstructure d'un élastomère chargé

Le niveau d'agglomération des charges au sein de l'élastomère dépend du processus de mise en œuvre, de la nature et de la quantité de charges. Quand le taux de charges augmente, un réseau continu de celles-ci peut s'établir au-dessus d'un certain seuil, seuil de percolation géométrique ϕ_c . Au niveau des propriétés mécaniques, on constate une différence entre un réseau de charges liées uniquement par des liaisons directes (charge-charge) et un réseau constitué de liaison charge-matrice-charge pour lequel la transmission des contraintes se fait par l'intermédiaire d'une phase de polymère, éventuellement aux propriétés modifiées [40,41].

La mise en évidence du seuil de percolation est possible par :

- Des mesures mécaniques : On observe une augmentation du module très importante à partir de 20% en volume de billes dures [42].
- Des mesures électriques lorsque les particules sont conductrices (cas du noir de carbone), [43-46].

▪ En outre, la complexité de la structure de la charge sous forme d'agglomérat (formés d'agrégats [Fig1.8](#)) et l'existence d'un réseau formé d'agglomérats peut laisser supposer qu'une partie de l'élastomère peut être momentanément emprisonnée dans la structure de la charge [\[47\]](#).

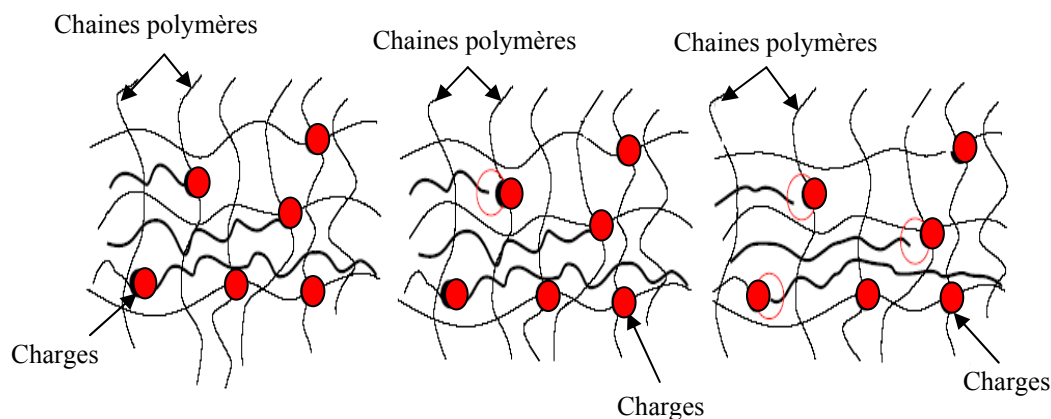


Fig.1.8. Vulcanisation au soufre : Réseau tridimensionnel des chaînes dans l'élastomère [\[47\]](#)

1.3.10. Comportement des élastomères chargés

Le comportement rhéologique des élastomères chargés dépend largement de leur concentration et de la nature de la matière qui les constitue. Il peut varier d'un comportement linéaire à un comportement plus complexe (fortement non linéaire). Un élastomère est dit dilué s'il ne subit aucune excitation, les particules sont suffisamment éloignées les unes des autres pour qu'on puisse négliger les interactions entre elles. Ces particules suivent un mouvement indépendant décrit expérimentalement par Perrin [\[48\]](#) et théoriquement par Einstein [\[49\]](#).

1.4. Rhéologie

La rhéologie est la science des déformations et écoulements de la matière, des contraintes qui en résultent et des efforts qu'il faut appliquer pour les obtenir [\[50\]](#). L'objet de la rhéologie est de déterminer les contraintes et les déformations en chaque point d'un milieu [\[51\]](#). Son domaine d'application couvre l'ensemble des fluides complexes, tels que les polymères, les suspensions colloïdales, les émulsions et les tensioactifs. Il est nécessaire de connaître le comportement de ces matières pour leur mise en œuvre.

1.4.1. Viscoélasticité

Le caractère viscoélastique est un comportement non-Newtonien très important et très fréquent dans les solutions de polymères. La réponse de l'élastomère à une déformation présente à la fois un aspect élastique (contrainte proportionnelle à la déformation) et un aspect visqueux (contrainte proportionnelle à la vitesse de déformation). Dans le premier cas, le temps

caractéristique de la sollicitation est inférieur à un temps caractéristique du matériau ; les composants élémentaires n'ont pas le temps de se déformer de manière importante et on observe une réponse élastique. Lorsque le temps de sollicitation est plus grand que le temps caractéristique du matériau, la réponse est de type visqueux. Dans ce paragraphe nous présentons plusieurs modèles rhéologiques, afin de choisir le modèle adapté à notre problème.

1.4.2. Synthèse bibliographique sur la modélisation des structures viscoélastiques

1.4.2.1. Approches analytiques

Historiquement parlant, les premières études sur les structures sandwichs à cœur viscoélastique ont été entreprises vers les années 1959 par [Kerwin \[52\]](#) et [Ross \[53\]](#). Ils ont considéré une poutre de base surmontée d'une couche viscoélastique pour l'amortissement et d'une couche précontrainte. Pour la poutre en appui simple, ils considèrent un amortissement faible pour la couche viscoélastique et la rigidité en flexion de la couche précontrainte est supposée négligeable par rapport à celle de la structure de base. Ainsi, en considérant les effets de membrane dans les trois couches et l'effet de cisaillement uniquement dans la couche centrale, ils ont remplacé par analogie dans l'équation différentielle ordinaire d'ordre 4 du mouvement transversal des poutres les rigidités réelles par les rigidités complexes équivalentes $K^* = K_0(1 + i\eta)$ puis ils ont établi une expression analytique relativement simple du facteur de perte en fonction des caractéristiques de la structure.

Par la suite, [Ungar \[54\]](#), en se basant sur les travaux de [Kerwin](#) et de [Ross](#), s'est intéressé à établir l'expression générale du facteur de perte des structures composites en fonction des facteurs de perte en traction et en cisaillement des sous-structures constitutives. Il a appliqué son étude au cas pratique des poutres sandwichs trois couches à cœur viscoélastique pour établir l'expression du facteur de perte en fonction des propriétés de chaque couche où il a considéré négligeable les facteurs de perte dans les couches élastiques et la rigidité de la couche viscoélastique.

Pour améliorer l'approche analogique de [Kerwin](#) et [Ross](#) dont l'analyse ne reposait que sur les équations classiques de mouvement des poutres, [Yu \[55\]](#) proposa une approche basée sur l'élaboration des équations du mouvement adaptée aux structures sandwichs. Ainsi, il a effectué une reformulation générale du problème dans le cas bidimensionnel puis établit une équation différentielle d'ordre 4 relative à la flèche et régissant le mouvement des sandwichs en utilisant la théorie des plaques. Dans son analyse, les effets d'inertie et le cisaillement sont pris en compte dans chaque couche et il ne fait aucune restriction sur le rapport entre les den-

sités, les modules et les épaisseurs des trois couches, ce qui rend sa théorie applicable aux sandwichs trois couches symétriques.

DiTaranto [56] s'est intéressé à la description du mouvement des poutres sandwichs en vibration libre soumises à des conditions aux limites arbitraires. Il a utilisé les hypothèses de base de Kerwin puis a établi une équation différentielle complexe d'ordre 6 sur le déplacement longitudinal du plan moyen des couches élastiques externes lui permettant de définir indépendamment des conditions aux limites, la pulsation propre complexe de la structure sous la forme générale :

$$\omega^2 = \Omega^2(1 + i\eta) \quad (1.2)$$

Il a conclu que la relation entre le facteur de perte η et la pulsation amortie Ω ne dépend pas des conditions aux limites mais plutôt de la géométrie et des propriétés de la structure.

En adoptant la même méthodologie que DiTaranto, Mead et Markus [57] établissent une équation différentielle d'ordre 6 mais plutôt relative à la flèche. En considérant un changement harmonique relatif aux modes normaux, ils montrent à l'issue de cette équation différentielle relative à la flèche que la pulsation complexe définie par formule de DiTaranto est obtenue non pas en vibration libre mais plutôt grâce à une forme particulière de vibration forcée pour laquelle le changement est harmonique et parallèle aux modes normaux de la structure amortie. Ils ont établi des équations auxquelles obéit la flèche selon diverses conditions aux limites.

En combinant l'équation différentielle de mouvement avec les équations de conditions aux limites, Mead et Markus dans leurs travaux [58] se sont intéressés à déterminer l'équation caractéristique dont les solutions permettent d'estimer les propriétés amortissantes (pulsation amortie et le facteur de perte). Les solutions sont alors cherchées à l'aide d'une méthode itérative qui est une sorte de méthode de Newton-Raphson modifiée avec correction à chaque pas. Ils proposent ensuite une méthode approchée pour estimer la pulsation amortie et le facteur de perte pour un sandwich encasté à ses deux extrémités et une méthode exacte pour un sandwich en appui simple. En effectuant des études paramétriques pour les deux cas de conditions aux limites, ils montrent l'influence des propriétés du sandwich et des conditions aux frontières sur la pulsation amortie et le facteur de perte, d'où ils contredirent l'assertion de DiTaranto selon laquelle la pulsation amortie et le facteur de perte ne dépendraient que des propriétés physiques et non des conditions aux frontières.

[Yan et Dowell \[59\]](#) se sont intéressés à établir une forme simplifiée de l'équation différentielle du mouvement des poutres et plaques sandwichs asymétriques constituées de matériaux homogènes, linéaires et isotropes. Ils ont considéré l'hypothèse de contrainte plane, la continuité du champ de déplacement et de la contrainte de cisaillement aux interfaces. En appliquant le principe des travaux virtuels, l'équation dynamique obtenue pour les poutres est d'ordre 4 et relative à la flèche grâce à la simplification introduite sur la rigidité du cœur supposée faible par rapport à celle des peaux. Ils ont déduit les relations associées à diverses conditions aux limites. La fréquence de résonance et le facteur de perte prédits par leur équation sont similaires à ceux obtenus par les équations de [Mead et Markus \[57\]](#) mais ont observé une différence de 5% sur la fréquence de résonance et 19% sur le facteur de perte par comparaison des résultats expérimentaux issus des essais sur une poutre en appui simple.

[Rao et Nakra \[60\]](#) ont effectué une étude des poutres et plaques sandwichs asymétriques mais en prenant en compte en plus de l'inertie transversale, les inerties longitudinale et rotationnelle. Ils montrent l'apport des effets d'inertie longitudinale et rotationnelle sur la réponse forcée de sandwichs soumis à une excitation harmonique.

[Ovasky et al. \[61\]](#) ont proposé une méthode approchée pour le calcul des fréquences propres et des facteurs de perte des sandwichs. Cette méthode est une technique de perturbation qui consiste à linéariser les équations de poutres sandwichs amorties autour de celles des poutres sandwichs non amorties (facteur de perte du cœur viscoélastique nul). Cette méthode est appliquée pour déterminer de façon approchée les propriétés amortissantes pour une poutre sandwich encastree-libre.

Afin de fournir une base de données pour une conception optimisée des structures sandwichs, [Rao \[62\]](#) a mené une étude paramétrique pour déterminer les caractéristiques des sandwichs en termes de masse, propriétés mécaniques, dimensions, conditions aux limites qui donneraient une valeur maximale pour le facteur de perte de la structure. Il a utilisé une approche énergétique et le principe de Hamilton pour établir les équations différentielles de mouvement des poutres sandwichs relatives au déplacement longitudinal et au déplacement transversal. L'équation relative à la flèche est résolue de façon exacte et celle-ci est calculée pour diverses conditions aux frontières.

[Mead \[63\]](#) a comparé les théories de vibration des sandwichs établies par [Yan et Dowell \[112\]](#), [DiTaranto \[56\]](#) et [Mead et Markus \[57\]](#) et a déduit que l'équation différentielle du mouvement relative à la flèche est d'ordre 4 ou 6 selon l'hypothèse de cisaillement. En in-

cluant le cisaillement dans les faces et en prenant en compte les effets d'inertie longitudinale, l'équation du mouvement demeure l'ordre 6 pour un sandwich symétrique mais passe à l'ordre de 8 pour un sandwich asymétrique.

He et Ma [64] ont présenté des équations simplifiées gouvernant les vibrations transversales des plaques sandwichs asymétriques. Pour parvenir à cette forme simplifiée, ils ont supposé dans leur analyse que les matériaux des faces ont des coefficients de Poisson voisins et que les effets d'inertie plane étaient négligeables. En utilisant la formulation énergétique et le principe de Hamilton, les équations différentielles relatives aux déplacements longitudinaux sont d'ordre 4 dans le plan et l'équation différentielle relative à la flèche est d'ordre 8 dans le plan. Ils ont établi ensuite les équations associées aux différentes conditions aux frontières. En utilisant la méthode de perturbation initialement proposée par Ovarsky [61], ils ont effectué un développement asymptotique des inconnues intervenant dans l'équation différentielle relative à la flèche. En résolvant les systèmes linéaires résultant au regard des conditions aux limites et d'orthogonalité des modes propres, ils ont obtenu les termes asymptotiques pour la pulsation amortie et le facteur de perte. Pour un développement asymptotique au premier ordre, ils ont montré que l'approche est similaire à la méthode d'énergie de déformation modale. Ainsi, un développement d'ordre élevé permet d'augmenter la précision de la méthode.

Au regard des différents travaux analytiques, on peut répertorier les hypothèses communes suivantes :

- le sandwich est constitué de matériaux homogènes, linéaires et isotropes ;
- les faces sont purement élastiques et ne supportent pas de déformation de cisaillement alors que le cœur est viscoélastique non vieillissant et se déforme principalement en cisaillement. Son module d'Young ou de cisaillement est supposé complexe et constant, donc ne dépendant pas de la fréquence ;
- la linéarité au sens géométrique du champ de déformation est admise, les études sont alors faites dans l'hypothèse des petites perturbations ;
- les inerties longitudinales et rotationnelles sont négligeables vis-à-vis des inerties transversales de flexion ;
- tous les points sur une normale à la poutre ou à la plaque ont le même déplacement transverse ;
- aucun glissement entre les couches n'est permis, assurant ainsi la continuité du champ de déplacement aux interfaces cœur-peaux.

A l'aide de ces hypothèses, des formules analytiques pour la détermination exacte de la fréquence de résonance Ω et du facteur de perte η des poutres et plaques sandwichs en appui simple ont été établies par les auteurs [62, 58, 64] par résolution directe de l'équation différentielle du mouvement.

Bien que les modèles analytiques soient simples de mise en œuvre et servent toujours de référence, cependant, ils ne permettent pas de modéliser des structures à géométries et conditions aux limites complexes avec une prise en compte de la dépendance en fréquence du matériau viscoélastique. La formulation aboutit généralement à des équations complexes non linéaires difficilement solvables. Ainsi, les techniques de calcul par éléments finis apparaissent comme un outil robuste pour la modélisation des structures complexes avec la prise en compte de la dépendance en fréquence du matériau viscoélastique du cœur.

1.4.2.2. Approches numériques

Une modélisation complète des structures sandwichs par la technique des éléments finis consisterait à discrétiser chacune des trois couches par des éléments volumiques tridimensionnels. Cependant, cette forme de discrétisation pour les trois couches de la structure engendrerait un nombre considérable de degrés de liberté et en conséquence un temps de calcul énorme, et pour l'espace mémoire des machines, la difficulté de stockage des données. Pour ces raisons, les auteurs ont proposé d'introduire des simplifications dans l'analyse pour passer à une représentation coque/volume/coque ou plaque/volume/plaque, les faces élastiques étant représentées par l'état du plan de leur surface moyenne. Néanmoins, la représentation du cœur viscoélastique par des éléments volumiques a pour but de bien prendre en compte le cisaillement responsable de l'amortissement dans cette couche. Lu et al. [65] proposent un modèle dans lequel le cœur viscoélastique est discrétisé par des éléments volumiques linéaires isoparamétriques à 8 nœuds tandis que les faces élastiques sont discrétisées dans leur plan moyen par des éléments plaques quadrilatères à 4 nœuds. Johnson et al. [66, 67] proposent de définir la couche centrale par des éléments volumiques hexaédriques à 8 nœuds et les couches élastiques par des éléments coques quadrilatéraux à 4 nœuds excentrés dans le plan interfacial. En utilisant une formulation similaire, Soni [68] propose de définir la couche centrale par des éléments 3D à 16 nœuds et les couches élastiques par des éléments coques à 8 nœuds. Daya et Potier-Ferry [69] ont construit un élément fini coque par assemblage des éléments de type coque/volume/coque. Cet élément fini est construit en associant des hypothèses simplificatrices à l'hypothèse de la continuité du champ de déplacement aux interfaces cœur-peaux permettant d'exprimer les degrés de liberté aux nœuds uniquement dans les faces élastiques.

L'élément fini coque utilisé pour les faces élastiques est un triangle à 3 nœuds (DKT). [Dui-gou et al. \[70\]](#) adoptent la même modélisation coque/volume/coque développée par [Daya et Potier-Ferry \[69\]](#), mais proposent pour les faces élastiques un élément fini coque quadrilatère à 8 nœuds afin d'améliorer l'interpolation de la déformation en membrane. Une difficulté liée à la modélisation coque/volume/coque ou plaque/volume/plaque est l'incompatibilité entre le champ de déplacement des faces et celui du cœur. Ainsi, une autre approche est d'adopter une modélisation coque/coque/coque ou plaque/plaque/plaque (poutre/poutre/poutre) en ramenant la discrétisation dans le plan de la surface moyenne de chaque couche. Cette approche est plutôt bien adaptée pour la modélisation des structures sandwichs en flexion où la flèche est supposée être commune aux trois couches et la rotation identique dans les couches élastiques. En plus, la prise en compte de l'hypothèse de la continuité du champ de déplacement aux interfaces cœur-peaux permet de réduire considérablement le nombre de degrés de liberté par nœud, en général ces degrés de liberté aux nœuds pouvant être exprimés uniquement soit dans les deux faces élastiques soit dans le cœur viscoélastique [\[71- 73\]](#).

Quelle que soit la méthode de discrétisation utilisée, la formulation éléments finis du problème de vibrations linéaires des structures sandwichs viscoélastiques sous sollicitations harmoniques se résume en une équation dynamique matricielle de la forme :

$$(K(\omega) - \omega^2 M)\{U\} = \{F\} \quad (1.3)$$

où $[K(\omega)]$ est la matrice de rigidité dépendant de la fréquence, $[M]$ la matrice de masse, $\{U\}$ le vecteur regroupant les degrés de liberté aux nœuds et représentant les modes propres nodaux complexes et $\{F\}$ le vecteur des forces nodales. La dépendance en fréquence de la matrice de rigidité est introduite par la loi de comportement du matériau viscoélastique du cœur. La formulation numérique de cette équation sera démontrée par la suite. L'équation (1.3) permet d'estimer les propriétés amortissantes notamment la pulsation amortie et le facteur de perte dans le cas $F = 0$ (vibrations libres) et dans le cas $F \neq 0$ (vibrations forcées).

Dans notre cas on a utilisé la Modal Strain Energy mode Complexe (MSEC) pour la détermination de ces propriétés amortissantes. Cette méthode est une version corrective de la MSER permettant d'améliorer les estimations de Ω et de η . Elle consiste à remplacer U par une autre approximation du mode complexe U_c obtenu en résolvant le système de vibration forcée suivant :

$$(K(\omega) - \omega^2 M)\{U_c\} = \{F\} \quad (1.4)$$

Où $\{F\}$ est le vecteur des amplitudes des forces harmoniques imposées. Ainsi, la pulsation amortie et le facteur de perte sont liés comme suit :

$$\omega^2 = \Omega^2(1 + i\eta) \quad (1.5)$$

1.4.3. Les modèles rhéologiques

1.4.3.1. Les modèles rhéologiques élémentaires

L'assemblage plus ou moins complexe des modèles rhéologiques de base constitués uniquement de ressorts ou d'amortisseurs visqueux (figure 1.9) est utilisé habituellement pour décrire le comportement des corps viscoélastiques linéaires. On se limite ici au cas uni-dimensionnel.

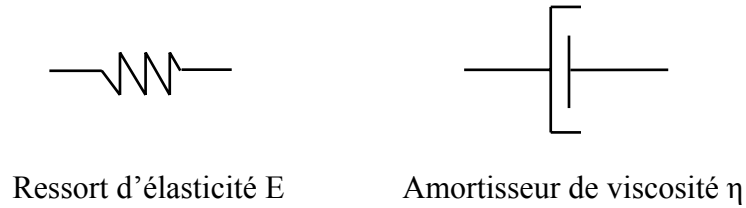


Fig. 1.9. Unités rhéologiques élémentaires

En combinant ces éléments purement élastiques et purement dissipatifs, nous obtenons des modèles viscoélastiques linéaires (figure 1.10) classiques de la littérature. Ils sont au nombre de trois : Kelvin-Voigt, Maxwell et Zener. Pour chaque modèle, la loi de comportement liant contrainte-déformation et module complexe est rappelée.

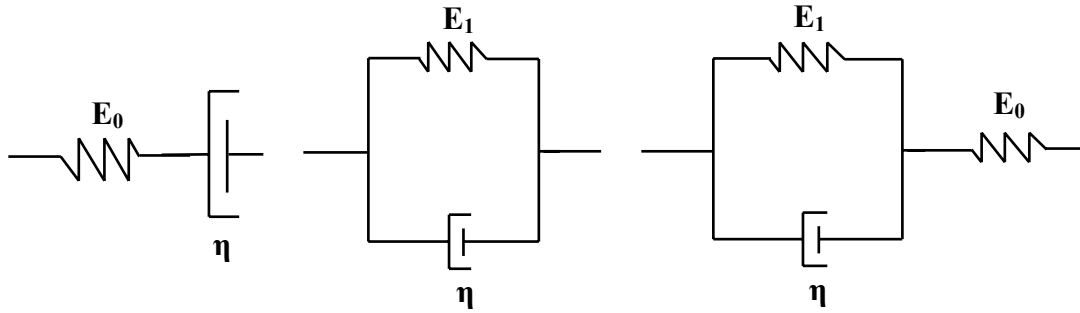


Fig. 1.10. Modèles rhéologiques usuels

➤ Modèle de Kelvin-Voigt

Le modèle le plus simple pour caractériser un solide viscoélastique consiste à additionner les contraintes d'origine élastique et les contraintes d'origine visqueuse:

$$\tau = \tau_{elast} + \tau_{visq} = G\gamma + \eta\dot{\gamma} \quad (1.6)$$

Où G est un module de cisaillement, γ est la déformation, η l'amortisseur et $\dot{\gamma}$ vitesse de déformation.

Le modèle de Kelvin-Voigt est constitué d'un ressort de raideur G_K et d'un amortisseur de constante η_K montés en parallèle. Les déformations sont celles des éléments eux mêmes (figure 1.11).

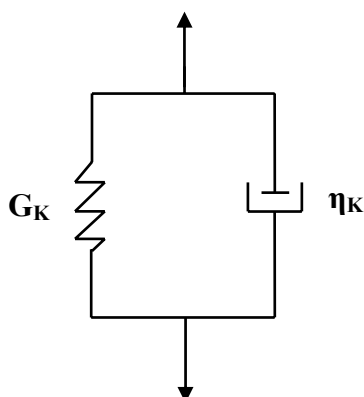


Fig.1.11. Modèle de solide viscoélastique de Kelvin-Voigt

En réponse à une sollicitation $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$, les modules G' et G'' sont :

$$G' = G_K \quad (1.7)$$

$$G'' = \omega \eta$$

Ou G_M est un module de cisaillement de Maxwell, ε est la déformation et ε_0 déformation initial.

➤ Le modèle de Maxwell

Le modèle de Maxwell représente un fluide viscoélastique et il est schématisé par un ressort idéal de raideur G_K et un amortisseur idéal de constante η montés en série pour simuler le comportement élastique et la viscosité (figure 1.12). L'amortisseur obéit à la loi de Newton et le ressort à celle de Hooke (Eq.1.4). C'est-à-dire que la contrainte est reliée à la déformation par l'équation :

$$\tau = G_M \gamma \quad (1.8)$$

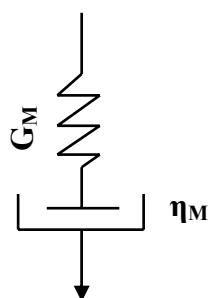


Fig.1.12. Modèle de Maxwell

Les déformations et les vitesses s'ajoutent et les contraintes se conservent.

$$\begin{cases} \tau(t) = \tau_r(t) = \tau_a(t) \\ \gamma(t) = \gamma_r(t) = \gamma_a(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma_r}{dt} + \frac{d\gamma_p}{dt}$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma} = \frac{1}{E} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau(t)}{\eta} \quad (1.9)$$

Les modules G' et G'' , sont donnés par :

$$\begin{cases} G' = \frac{\omega^2 t_r^2}{1 + \omega^2 t_r^2} G_M \\ G'' = \frac{\omega^2 t_r}{1 + \omega^2 t_r^2} G_M \end{cases} \quad (1.10)$$

Dans les deux modèles, on obtient le croisement entre le module élastique et le module visqueux. Le temps de relaxation t_r s'écrit :

$$t_r = \frac{\eta}{G} \quad (1.11)$$

Le comportement des systèmes réels peut être schématisé à l'aide de deux modèles : le modèle de Maxwell aux basses fréquences et le modèle de Kelvin-Voigt aux fréquences plus élevées (figure 1.13). Dans les deux cas, on obtient le croisement entre le module conservatif et le module dissipatif.

Dans la zone intermédiaire, le comportement élastique prédomine et G' présente un plateau, alors que G'' présente un minimum.

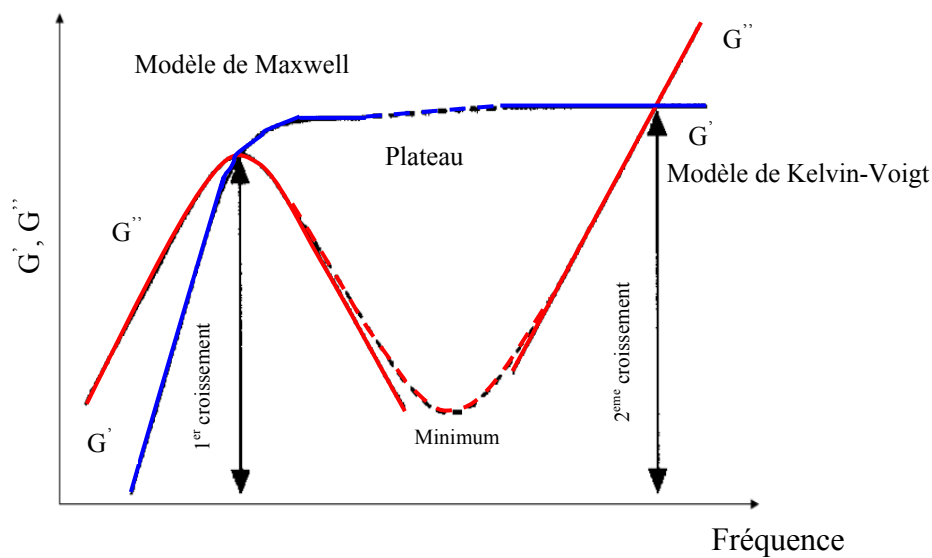


Fig.1.13. G' et G'' aux basses et hautes fréquences, représentés par les modèles de Maxwell et Kelvin-Voigt, d'après Howard A. Barnes [74]

➤ Le modèle de Zener

Le modèle de Zener (figure 1.14) est constitué d'un modèle de Kelvin-Voigt de paramètres (E_1, η) en série avec un ressort de module d'élasticité E_0 . si ε_0 et ε_1 représentent respectivement la déformation de chacun des ressorts et σ la contrainte associée, on a :

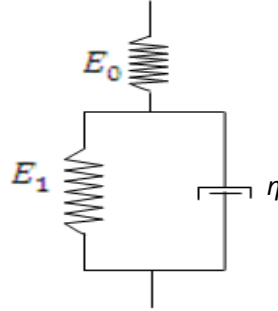


Fig.1.14. Modèle de Zener

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \\ \sigma &= E_0 \varepsilon_0 \\ \sigma &= E_1 \varepsilon_1 + \eta \dot{\varepsilon}_1\end{aligned}\tag{1.12}$$

Où ε est la déformation totale du modèle, ε_0 déformation du ressort de la première branche, ε_1 déformation du ressort de la deuxième branche, E_0 module de Young et σ contrainte.

En combinant les trois relations ci-dessus, l'équation de comportement s'écrit :

$$(E_0 + E_1)\sigma(t) + \eta \dot{\sigma}(t) = E_0(E_1 \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}(t))\tag{1.13}$$

Le module complexe s'écrit :

$$\frac{1}{M(\omega)} = \frac{1}{E_1 + i\eta\omega} + \frac{1}{E_0}\tag{1.14}$$

En notant $\tau_1 = \frac{\eta}{E_1}$, $\tau = \frac{\eta}{E_0 + E_1}$, $E = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1}$, on obtient :

$$M(\omega) = E \frac{1 + i\tau_1\omega}{E + i\tau\omega}\tag{1.15}$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire, la relation (1.15) devient :

$$M(\omega) = E \frac{1 + \tau_1\tau\omega^2}{E + (\tau\omega)^2} + iE \frac{(\tau_1 - \tau)\omega}{1 + (\tau\omega)^2}\tag{1.16}$$

Les paramètres τ et τ_1 sont appelés respectivement temps à l'équilibre et temps caractéristique de relaxation. Le paramètre η est un coefficient d'amortissement et peut être relié à τ ou τ_1 . E est assimilé à un module d'élasticité différée, dans la mesure où, au bout d'un temps infini, il relie linéairement contrainte et déformation ($\dot{\sigma} = \dot{\varepsilon} = 0$). Enfin, E_0 est le module d'élasticité instantanée.

1.4.3.2. Les modèles rhéologiques fractionnaires

Au vu des faiblesses observées pour les deux modèles cités précédemment dans le plan Nyquist, il est évident qu'ils s'adaptent très mal à nos données expérimentales et qu'ils ne peuvent pas fournir une bonne modélisation pour notre matériau. On peut généraliser ces modèles en considérant un groupement quelconque d'éléments linéaires de type ressort ou amortisseur [24], ce qui conduit à des modèles rhéologiques fractionnaires :

➤ Modèle de Kelvin-Voigt fractionnaire

Pour le modèle Kelvin-Voigt Fractionnaire (KVF), le module complexe est défini par :

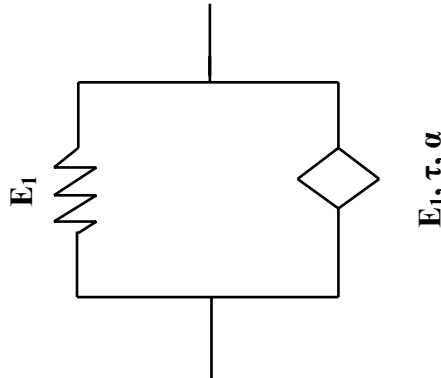


Fig.1.15. Modèle rhéologique de Kelvin-Voigt fractionnaire

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + bD^\alpha \varepsilon(t) \quad (1.17)$$

Où $0 \leq \alpha \leq 1$

D est issu d'une dérivée fractionnaire qui s'écrit dans le cas du comportement viscoélastique des élastomères :

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (1.18)$$

α ordre de dérivation et Γ la fonction gamma :

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \quad (1.19)$$

Avec : $n > 0$

Le graphe dans le plan Nyquist, correspondant au modèle de KVF, est une droite d'équation (1.19). La [figure 1.16](#) illustre cette propriété pour différentes valeurs de α .

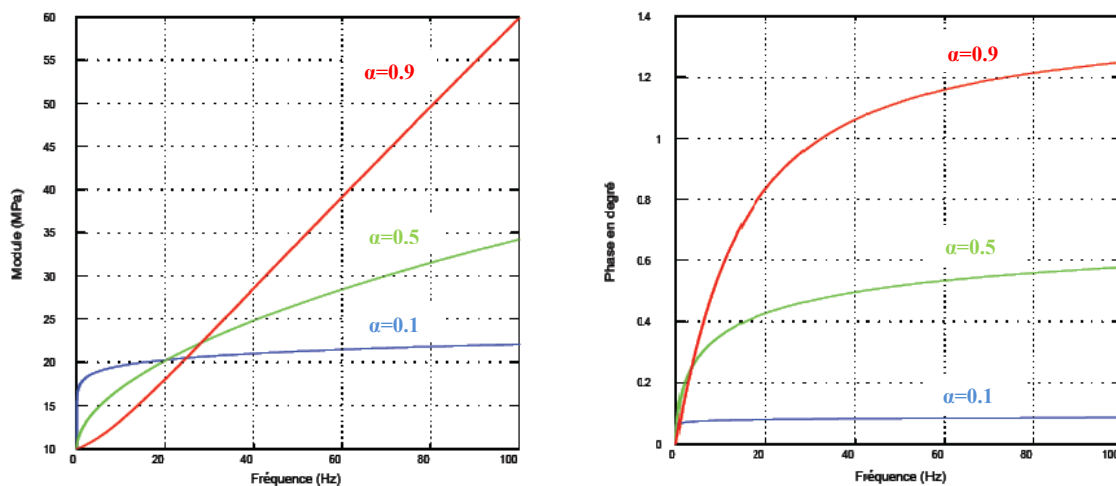


Fig.1.16. Représentation du modèle KVF dans les plans du module et de la phase pour différentes valeurs de α [75]

➤ Modèle Maxwell Fractionnaire (MF)

En s'inspirant de la démarche faite précédemment, le module complexe du modèle de Maxwell Fractionnaire (MF) se déduit de celui de Maxwell simple en remplaçant $i\tau\omega_0$ par $(i\tau\omega_0)^\alpha$:

$$M(\omega) = E_0 \frac{(i\tau\omega)^\alpha}{1 + (i\tau\omega)^\alpha} \quad (1.20)$$

Le modèle Maxwell fractionnaire (MF) se comporte de la même manière que celui de Zener Fractionnaire (ZF) dans le plan Nyquist.

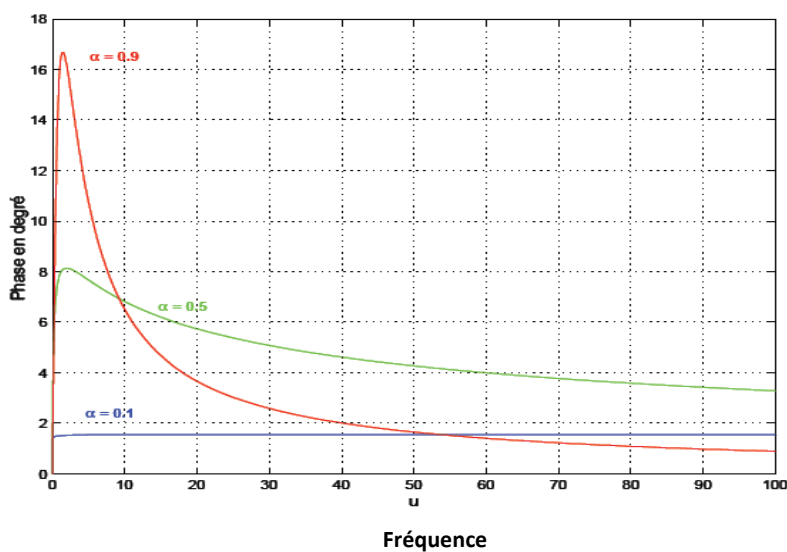


Fig.1.17. Phase du module complexe pour le modèle MF [75]

➤ **Modèle Zener Fractionnaire (ZF)**

En substituant l'élément amortissement visqueux par un spring-pot dans le modèle classique de Zener, nous obtenons un modèle dit de Zener Fractionnaire (ZF) représenté à la figure (1.18). Ainsi le modèle ZF part du même principe que le modèle Zener dans lequel on remplace l'amortisseur par un spring-pot (E_1, τ et α). En s'inspirant de la relation (1.13), on en déduit la loi de comportement du modèle Zener Fractionnaire (ZF) :

$$\sigma + \frac{E}{E_0} \tau^\alpha D^\alpha(\sigma) = E\varepsilon + E\tau^\alpha D^\alpha(\varepsilon) \quad (1.21)$$

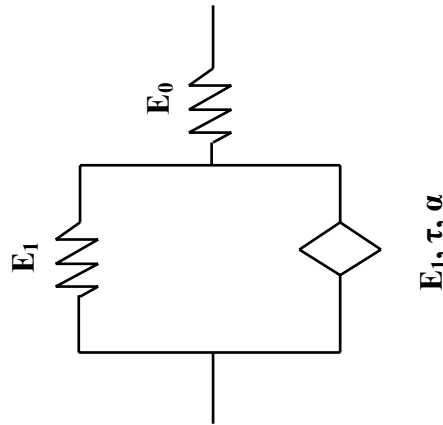


Fig.1.18. Modèle rhéologique de Zener fractionnaire

Avec $E = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1}$ son module complexe s'exprime alors par :

$$M(\omega) = E \frac{1 + (i\tau\omega)^\alpha}{1 + \frac{E}{E_0} (i\tau\omega)^\alpha} \quad (1.22)$$

A partir de l'expression donnée en relation (1.22), on trace la figure (1.19), les courbes dans le plan Nyquist (ou Cole & Cole) pour le modèle ZF et pour trois valeurs de α . On rappelle que les courbes expérimentales dans le plan de Nyquist sont croissantes et convexes. Or, l'analyse du modèle ZF dans ce même plan donne une courbe concave. Ce modèle n'est donc pas bien adapté à nos matériaux.

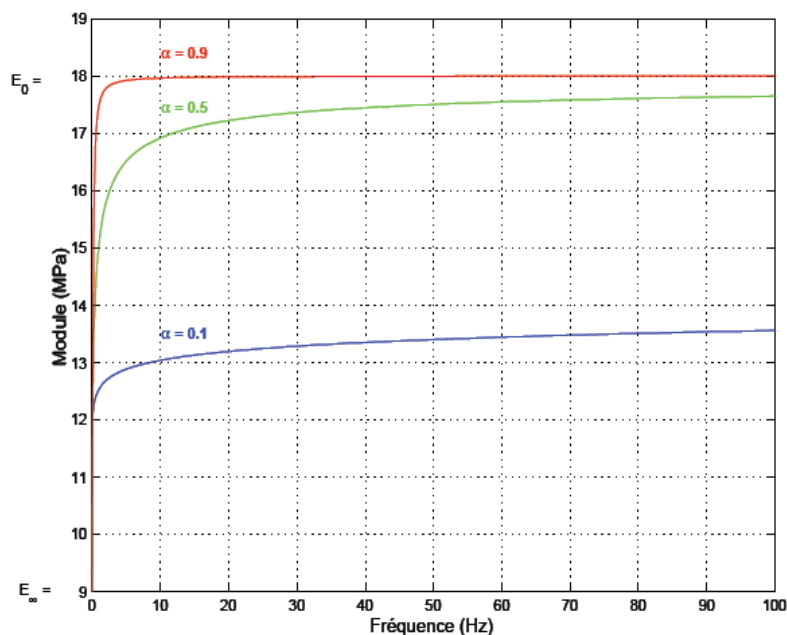


Fig.1.19. Module complexe pour le modèle ZF en fonction de la fréquence ($E_\infty = E = 9$ MPa, $E_0 = 19$ MPa et $\omega_0 = 0.5$ rad/s) [75]

➤ Modèle exponentiel de Maxwell

L'évolution du module viscoélastique du système est donnée en fonction d'un spectre de temps de relaxations τ_i :

$$G^* = G_0 + \sum_{i=1}^n G_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \quad (1.23)$$

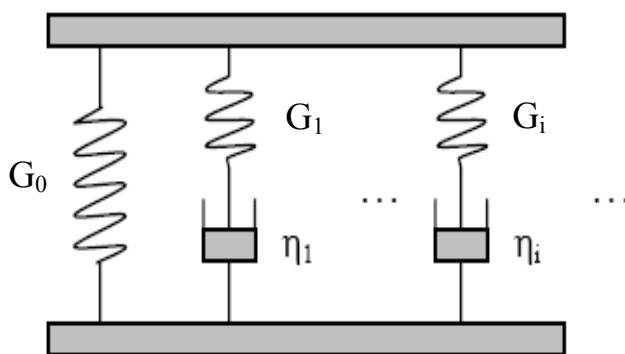


Fig.1.20. Modèle rhéologique exponentiel de Maxwell

Ce développement de la fonction de relaxation en somme d'exponentielles est appelé développement en série de Prony.

On peut constater que le modèle MRM est satisfaisant dans les plans du module et de la phase du module d'Young complexe (figure 1.20) : il donne une bonne description du com-

portement dynamique de notre élastomère. Parmi les modèles fractionnaires étudiés, c'est le seul modèle qui apporte une amélioration sur les tracés dans ces plans.

La loi de comportement des matériaux viscoélastique associée au modèle de Maxwell est donnée comme suit :

$$\sigma + \tau \dot{\sigma} = \eta \dot{\gamma} \quad (1.24)$$

Où : $\dot{\gamma}$ est la vitesse de déformation en cisaillement.

Dans notre cas où l'élastomère a subi une sollicitation en cisaillement, les éléments du module complexe sont donnés par :

$$G' = \sum_{i=1}^n G_i \frac{(\omega \tau_i)^2}{1 + (\omega \tau_i)^2} \quad (1.25)$$

$$G'' = \sum_{i=1}^n G_i \frac{(\omega \tau_i)}{1 + (\omega \tau_i)^2} \quad (1.26)$$

$$|G^*| = \frac{|E^*|}{2(1 + \nu)} \quad (1.27)$$

La variation des composantes du module complexe G' et G'' en fonction de fréquence de réticulation est donnée par la [figure 1.21](#).

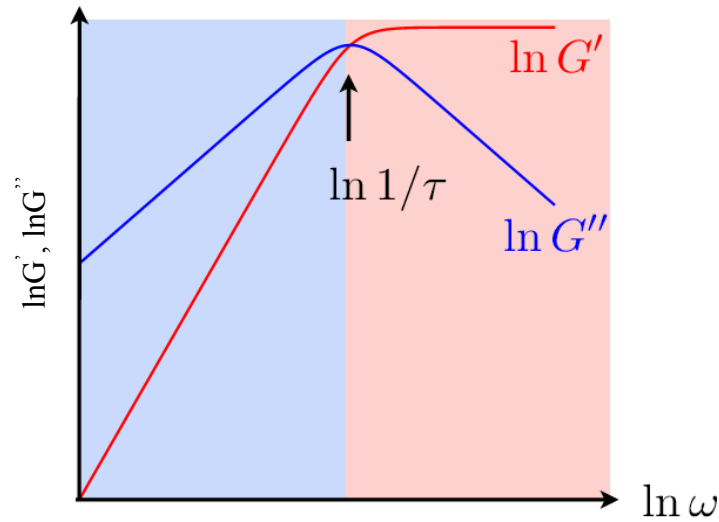


Fig.1.21. Comportement du fluide de Maxwell en cisaillement harmonique [76]

La relation (1.27) relie le module complexe en cisaillement et le module complexe en traction ou compression.

Maxwell dans son modèle a considéré que le comportement des matériaux viscoélastiques sont à la fois visqueux et élastique ([Fig.1.22](#)) :

$$\begin{aligned} \tau_a &= \eta \dot{\gamma} \\ \tau_r &= G \gamma \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\tau = \tau_a + \tau_r = \eta \dot{\gamma} + G\gamma \quad (1.29)$$

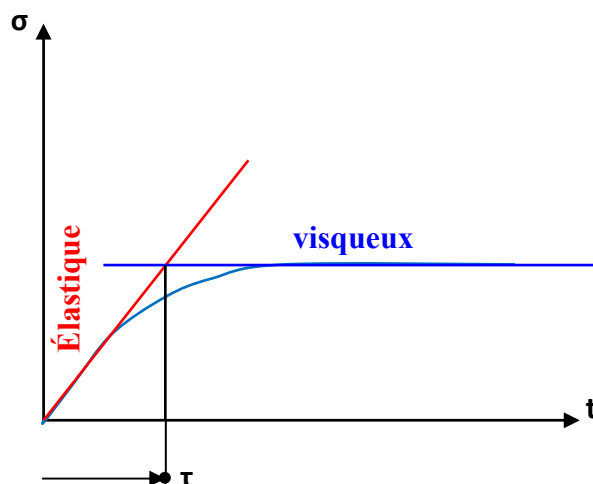


Fig.1.22. Comportement d'un matériau viscoélastique selon le modèle Maxwell

1.5. Les matériaux intelligents

Les matériaux intelligents appartiennent au groupe des nouveaux matériaux fonctionnels appelés adaptatifs ou matériaux multifonctionnels. Bien que les matériaux intelligents sont connus depuis longtemps, leur développement intensif a commencé à la fin du XXe siècle (les années quatre-vingt).

Les matériaux intelligents font généralement référence à un matériau qui change ses propriétés physiques ou mécaniques sous l'influence de diverses excitations externes [77]. Une étude plus détaillée de ces matériaux intelligents est donnée par Takagi dans son travail, le futur des matériaux intelligents [78], selon lui, la matière à puce est capable de réagir à des stimuli externes en changeant ses propriétés de matériau selon l'application souhaitée.

Les matériaux pour lesquels les propriétés rhéologiques peuvent être contrôlées par l'application d'un champ magnétique ou électrique sont appelés matériaux actifs puisqu'ils peuvent répondre à des changements de leur environnement et de leur comportement en fonction des sollicitations appliquées. Ces matériaux peuvent être utilisés directement dans des dispositifs ou incorporés dans des composites pour créer des structures composites sandwichs avancées tel que les poutres, les plaques, les coques..., ce qui rend leurs applications multiples dans plusieurs domaines industriels. L'intérêt de l'industrie est à la hauteur des nombreuses applications envisageables, notamment sur les dispositifs amortisseurs « actifs » [79].

La famille des matériaux actifs est vaste et regroupe tous les matériaux capables de modifier leurs propriétés en réponse à un stimulus externe, on peut citer :

- Les alliages à mémoire de forme : déformés, ils retrouvent leur forme à partir d'une certaine température [80,81].
- Les piézo-électriques : Ils génèrent un signal électrique dont l'amplitude et la fréquence dépendent de la contrainte appliquée [82].
- Les matériaux magnétostrictifs : Ils se déforment sous l'action d'un champ magnétique
- Les matériaux magnétorhéologiques nous concernent plus particulièrement ici.

1.5.1. Les matériaux magnétorhéologiques (Matériaux complexes)

Parmi les matériaux intelligents, on distingue les matériaux magnétorhéologiques (MR), ils sont une classe de matériaux dans lesquels les propriétés rhéologiques varient rapidement et d'une manière adaptative par l'application d'un champ magnétique [figure 1.23](#). La modification de leurs propriétés est dans la proportion de l'intensité du champ magnétique appliqué et immédiatement réversible.

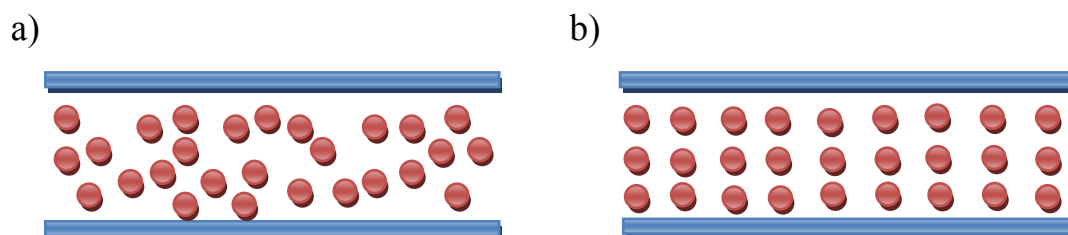


Fig.1.23. Matériau magnétorhéologique. a) avant l'application du champ magnétique b) après l'application du champ magnétique

Quelques travaux de recherche ont été lancés par Jacob Rabinow au Bureau National Standard, aujourd'hui l'Institut National de la Science et de la Technologie, aux Etats-Unis dans la période des années 1940 et début des années 1950. Ses premières œuvres sur les fluides magnétos conduites à une série de dispositifs et de produits basés sur les poudres sèches magnétiques, par exemple le frein à poudre magnétique, en plus les gels contiennent des matières magnétiques [83], les mousses et les élastomères. Une comparaison des matériaux magnétorhéologiques typiques est donnée par le tableau 1.1.

Tableau 1.1. Composition et propriétés des matériaux spécifiques magnétorhéologiques [84]

	Fluide magnétorhéologique (MRF)	Ferro-fluides	Elastomère magnétorhéologique (MRE)
Type de particules	Fer, noire de carbone,...	magnétite	Fer, noire de carbone,...
Taille de particules	0.1~10µm	2~10nm	10~50µm
transporteur	Huiles	Huiles, l'eau	élastomère
Fraction volumique	0.1~0.5	0.02~0.2	0.1~0.5
Additifs	Les tensioactifs, les agents thicsotropique	tensioactifs	aucun

1.5.1.1. Les élastomères magnétorhéologiques

Les élastomères magnétorhéologiques (EMR) sont constitués de particules ferromagnétiques (en général de taille micrométrique) dispersées dans une matrice élastomère. Leur faible temps de réponse (de l'ordre de la milliseconde), leurs propriétés contrôlables de façon continue, ainsi que leur capacité à supporter de larges variations de rigidité, rendent les EMR attractifs pour des applications potentielles en aéronautique, aérospatial, automobile, génie civil ou encore en génie électrique. On peut ici citer comme exemple les dispositifs d'amortissement et les supports de rigidité variable.

Ces élastomères magnétorhéologiques n'ont été l'objet d'études que très récemment, si les fluides magnétorhéologiques ont été étudiés dès la première moitié du XXème siècle [85], les premiers travaux sur ces élastomères n'ont débuté qu'en 1983 [86], et ce n'est que dans la dernière décennie que les premiers modèles et applications ont vu le jour. Les développements actuels se portent sur l'amortissement actif des vibrations, c'est-à-dire la capacité à moduler, en régime dynamique, la rigidité de l'amortisseur en fonction de la sollicitation.

Les élastomères magnétorhéologiques peuvent être classés en fonction de plusieurs paramètres tels que, le type de particules, le type de la matrice, la structure et la distribution des particules [87].

- Type de particules
 - Particules magnétiques douces
 - Particules magnétiques dures
 - Particules magnétostrictifs
 - Particules magnétiques à mémoire de forme

- Type de matrice
 - Matrice solide
 - Matrice poreuse
- Propriétés électriques de la matrice
 - Matrice isolante
 - Matrice conductrice
- Distribution des particules
 - Isotrope
 - Anisotrope

Généralement le champ magnétique est appliqué aux élastomères composites lors de la réticulation de la matrice, la formation de structures sous forme de pseudo-fibres de particules à l'intérieur de l'élastomère correspond à un état d'énergie dipolaire faible insuffisante pour faire déplacer les particules de l'élastomère. Ce dernier état faible, demande une quantité d'énergie supplémentaire [88-90].

La modification des propriétés de EMR sous l'influence du champ magnétique dépend fortement de la microstructure formée pendant le durcissement de la matrice de l'élastomère. Également, les particules ferromagnétiques se rapprochent, ce qui entraîne une augmentation de la rigidité du matériau et un changement des courbes contrainte-déformation [91]. Ainsi le champ magnétique provoque une variation rapide de la tension, ce phénomène est responsable de l'effet de magnétostriction qui engendre un allongement de la longueur de l'échantillon de l'élastomère [92]. Sans champ magnétique les particules sont réparties d'une manière aléatoire [figure 1.23.a](#), par contre sous l'effet du champ magnétique les particules se déplacent dans la direction de l'induction de ce dernier, elles sont réparties d'une manière régulière [figure 1.23.b](#) [93]. Cet effet produit une grande rigidité lorsque l'adhérence entre les particules est formée par une liaison forte. La majorité des chercheurs ont modélisé les particules par une forme géométrique sphérique [figures 1.24.c .d](#), où les déformations sont rapides et totalement réversible [94].

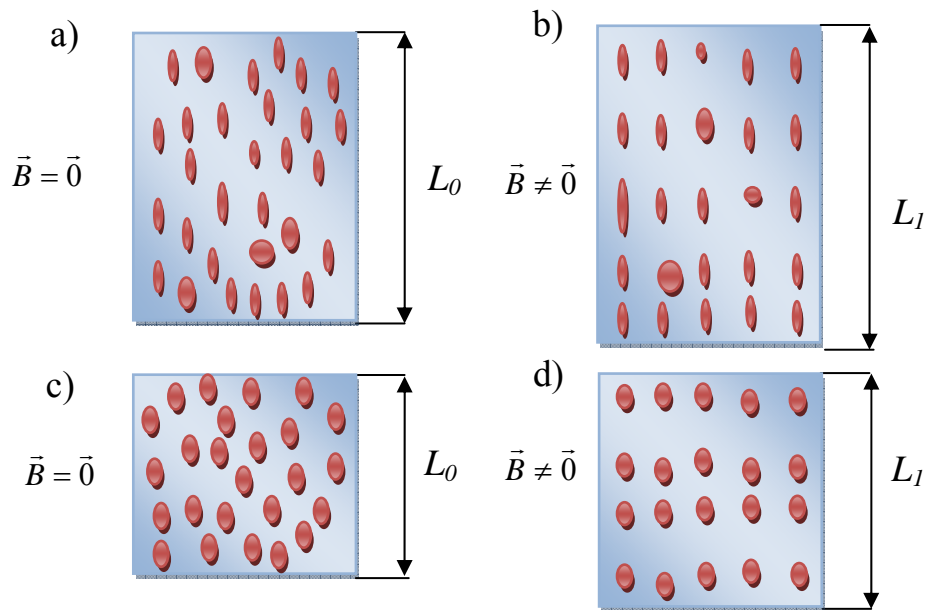


Fig.1.24. Influence du champ magnétique sur les particules. a, b) particules de forme réelle
c, d) particules de forme modélisée

La grande majorité des MER décrits dans la littérature contiennent des particules magnétiques douces, principalement le fer, le cobalt et leurs oxydes, noir de carbone..., [95-98]. Le deuxième groupe des particules sont les particules dures comme BaFe₁₂O₁₉ ou SrFe₁₂O₁₉ [99]. L'avantage de ces deux groupes est de jouer le rôle d'un aimant permanent, ils restent magnétisés après avoir éteint le champ magnétique externe [100, 101]. Deux types de matrice sont étudiés, la matrice solide et la matrice viscoélastique. Cette dernière est la plus citée dans les travaux de recherches à cause de la possibilité d'augmenter facilement les capacités physiques des matériaux et de changer leurs propriétés rhéologiques. Les matrices peuvent être conductrices [102], ou non [103, 104].

Durant ces dernières années, plusieurs travaux de recherches se sont axés sur l'étude des propriétés magnétorhéologiques des élastomères. Coquelle E., Bossis G, 2006 [105] ont présenté une étude expérimentale et numérique, pour déterminer les propriétés mécaniques des élastomères contrôlés par un champ magnétique. Ces élastomères sont composés de particules ferromagnétiques, structurées en chaînes unidirectionnelles au sein d'une matrice élastomère silicone, où les essais sous champ ont révélé un fort accroissement des propriétés. Hua-xia Deng, Xing-long Gong, [106] ont basé leur étude sur le développement de nouveaux paramètres pour l'identification du comportement vibratoire des élastomères magnétorhéologiques, tels que les propriétés viscoélastiques amortissantes leur permettant de dissiper l'énergie et représenter l'aspect viscoélastique. Jolly et al, [107], Demchuk et al [108], ont montré expérimentalement l'influence du champ magnétique sur le module de cisaillement de

MRE en mesurant l'amplitude vibratoire d'une poutre sandwich en élastomère magnétorhéologique. [Davis \[109\]](#) a montré que la variation maximale du module de cisaillement atteint pratiquement 50% d'un élastomère chargé par 27% de particules de fer. Ce dernier travail a été vérifié expérimentalement par [Zhou \[110\]](#). Plus récemment [Zhou G. Y., et Wang Q \[111,112\]](#) dans le premier travail, ont fait une modélisation analytique qui permettra de donner les équations régissant le mouvement vibratoire d'une poutre sandwich exposée à un champ magnétique uniforme et perpendiculaire à la direction de l'épaisseur, de même axe, et afin de vérifier le modèle analytique, ils ont abordé un second travail basé sur une modélisation numérique pour contrôler les propriétés rhéologiques et de montrer le pouvoir de cette dernière technique utilisée pour amortir d'une façon fiable les vibrations. [Dwivedy S.K., Mahendra N., et Sahu K.C \[113\]](#), ont étudié les régions paramétriques de l'instabilité d'une poutre sandwich ayant un noyau en élastomère magnétorhéologique identique à celle étudiée par [Zhou G. Y., et Wang Q \(2006\)](#), mais cette dernière est soumise à une charge périodique afin de déterminer les avantages d'une commande adaptative à l'aide de l'ajustement des propriétés mécaniques des élastomères chargés soumis à un champ magnétique, ils ont présenté la méthode de Hsu pour déterminer les zones d'instabilité associées aux fréquences de résonances simples et combinées pour différents états de frontière. Plus récemment, [Nayak B. et al. \[114\]](#), ont étudié la réduction des vibrations d'une poutre sandwich possédant deux noyaux, un noyau en élastomère non chargé et un noyau en élastomère chargé une fois par les particules de fer et une autre fois par les particules de noir de carbone, les régions d'instabilité paramétrique pour les deux différents types de particules ont été étudiées seulement pour les trois premiers modes de vibration, pour montrer la différence entre la réduction passive des vibrations et la réduction active. Les résultats obtenus ont été discutés. Ces chercheurs ont utilisé des poutres sandwichs magnétorhéologiques dans leurs travaux pour valider les résultats de leur méthode.

1.6. Conclusion

Cette étude bibliographique a permis d'avoir une vision d'ensemble sur les travaux analytiques, expérimentaux et numériques concernant l'étude du comportement des structures sandwichs magnétorhéologiques soumises à diverses sollicitations statiques ou dynamiques. Les propriétés mécaniques et/ou physiques (amortissement, rigidités, taux de chargement,...) sont données en fonction de différents constituants d'une structure sandwich magnétorhéologique. Ces propriétés sont considérablement améliorées par l'application d'un champ magnétique. Étant donné divers facteurs à prendre en compte lors de la conception d'une structure

sandwich, l'étude de la réponse dynamique sera plus complexe. Il va de soi qu'une meilleure compréhension du comportement dynamique de ces types de structures complexes nécessite de prévoir sérieusement le mode d'élaboration.

CHAPITRE 2

THÉORIE DES PLAQUES

1. Introduction

Les plaques sont des structures très utilisées dans plusieurs domaines industriels tels que, l'industrie sous marine, l'aéronautique, l'aérospatial, le génie civil, le domaine de l'énergie, etc., tous ces domaines sont stratégiques et économiques très importants. C'est pour cette raison que les plaques ont fait l'objet d'un très grand nombre de travaux depuis plus d'un siècle. Souvent, dans ces domaines d'applications, les plaques subissent plusieurs modifications de leur forme géométrique, plusieurs types selon leur composition (Classiques, Stratifiées, Sandwiches,...), plusieurs théories ([Kirchoff](#), [Reissner-Mindlin](#),...). Au 18 siècle, le premier modèle de formulation de l'effet membrane a été fait par [Euler](#), presque un demi siècle plus tard, Lagrange a mis en œuvre les équations différentielles de vibration des plaques. [Navier](#) a développé une méthode pour calculer les modes de vibrations et les fréquences pour certaines conditions aux frontières. [Kirchoff](#) [115] est considéré comme le fondateur de la théorie moderne des plaques dans laquelle il a considéré en même temps l'effet membrane et l'effet de flexion. Il a conclu que l'on peut utiliser le travail virtuel pour le calcul des modes et des fréquences. [Love](#) [116] a appliqué le travail de Kirchoff aux plaques minces. [Leissa](#) a rassemblé dans un livre un grand nombre de travaux concernant les vibrations des plaques seules, de plusieurs chercheurs [117]. Le besoin de l'industrie aéronautique a motivé la recherche dans ce domaine. En 1956, Turner et al. [118] ont utilisé la méthode des éléments finis pour l'analyse des plaques, ce qui a permis d'étudier des problèmes de plaques compliqués. [Zienkiewicz](#) [119] a contribué au développement de plusieurs éléments finis. [Bogner et al.](#) [120] ont travaillé sur l'élément de plaque en utilisant les fonctions d'interpolation bicubique.

L'une des problématiques de notre travail consiste à utiliser une méthode de calcul de structures composites comportant un film mince amortissant, puisque le contraste de rigidité entre les peaux et le film mince peut entraîner un phénomène de cisaillement transversal important lorsque la structure sandwich est soumise à des sollicitations de flexion. La présence de ce film peut donc avoir une influence sur la rigidité de la structure. La théorie de plaques composites présentée, permet de prendre en compte ce phénomène, en plus de la minceur de ce film. De plus, cette théorie est très simple à utiliser et économique en termes de temps à la fois, le nombre de degrés ou de fonctions inconnues (déplacements et rotations) est de neuf au lieu de cinq pour la théorie de Mindlin par exemple.

L'objectif du présent chapitre concerne la définition et la mise au point d'une méthode permettant la détermination des équations du mouvement ainsi que les caractéristiques dynamiques d'une plaque en termes de rigidité et d'amortissement. Elle a été conduite en utilisant les méthodes énergétiques, ces méthodes sont basées sur l'application du Principe variationnel [121,122]. Elle permet d'identifier, directement et simultanément, plusieurs paramètres de la plaque à partir de champs cinématiques précis et de champs virtuels choisis de manière adéquate.

2.2. Modélisation analytique des plaques

2.2.1. Définition d'une plaque

Une plaque (Fig.2.1) est un solide élastique dont une dimension selon l'épaisseur est plus petite par rapport aux deux autres dimensions, et qui possède généralement un plan moyen ou plan de symétrie.

Une plaque peut être constituée d'un seul matériau, comme les plaques classiques ou de plusieurs matériaux, comme les plaques composites (stratifiées ou sandwiches).

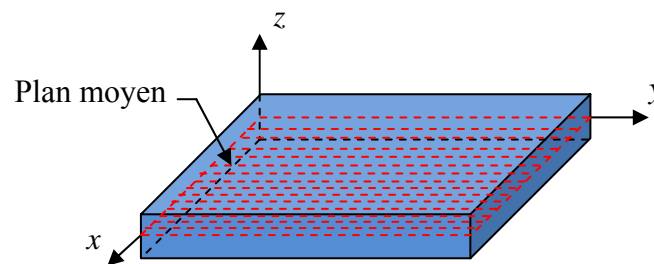


Fig.2.1. Géométrie d'une plaque

2.2.2. Théories des plaques

Dans la théorie des plaques, généralement, il existe deux types de contraintes. Le premier type, appelé traction-compression, consiste en l'élongation ou raccourcissement du matériau dans une ou plusieurs directions. Le second, appelé flexion, est propre aux plaques minces ou épaisses et résulte des contraintes qu'imposent la courbure de la plaque. Comme il semble naturel, la flexion requiert beaucoup moins d'énergie que la traction, il est néanmoins important de noter qu'à l'état dynamique, la vibration en flexion est elle-même, un phénomène qui cause le plus de dégâts dans tous les domaines (aéronautique, génie civil,...).

Dans notre modèle approché, on utilise les méthodes énergétiques qui sont mis en œuvre sur des plaques minces ou épaisses. Leurs théories sont rapidement rappelées ci-après dans le cadre des hypothèses cinématiques dites de Love-Kirchhoff [123,124] ou Mindlin-Reissner respectivement.

2.2.3. Théorie des plaques minces (Théorie de Love-Kirchhoff)

La théorie de Love-Kirchhoff est utilisée dans le domaine des petites déformations et des petits déplacements. La figure 2.2 précise les différentes grandeurs mises en jeu.

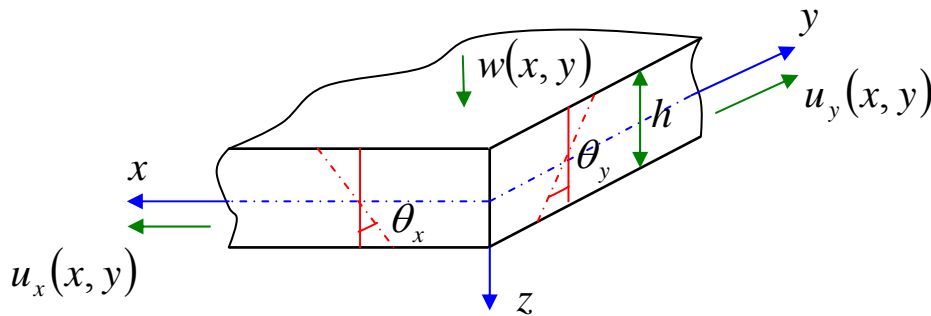


Fig.2.2. Définition des variables de plaque

2.2.3.1. Hypothèses

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces par Kirchhoff généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation à l'effort tranchant.

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen appelé aussi plan neutre.
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci.
- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés, en particulier, l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal $w(x, y)$ est considéré.
- La contrainte σ_z dans la direction transversale est nulle. Elle doit en effet s'annuler sur les faces extérieures et, du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle en tout z .

2.2.3.2. Champs de déplacement

Dans le cas de la flexion pure, considérée ici, la plaque est non chargée dans son plan, les déplacements u_x et u_y dans son plan moyen sont alors nuls.

$$u_x(x, y) = u_y(x, y) = 0 \quad (2.1)$$

La flèche w de la plaque demeure en tout instant petite devant l'épaisseur h , le déplacement $w(x, y)$ peut alors être considéré comme indépendant de la côte z et est donc identique à celui du plan moyen, d'où l'expression du champ de flèche :

$$w(x, y, z) = w(x, y, 0) = w(x, y) \quad (2.2)$$

A partir de cette dernière relation et de l'hypothèse 2 précédente, il est possible d'écrire le déplacement de n'importe quel point (x, y) de la plaque sous la forme d'un vecteur colonne $\{u\}$ à trois composantes :

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Ici les champs de pente $\{\theta_i\}$ [125] sont définis comme les dérivées partielles du champ de flèche $w(x, y)$ dans les directions des deux axes x et y . Ces champs sont présentés sous la forme d'un vecteur colonne $\{\theta\}$:

$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} \theta_x(x, y) \\ \theta_y(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

on en déduit les champs de déformations correspondants :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}(x, y, z) \\ \varepsilon_{yy}(x, y, z) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y(x, y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial u_y(x, y, z)}{\partial x} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

ainsi que les champs de courbure représentés par un vecteur $\{k\}$ à trois composantes :

$$\{k\} = \begin{Bmatrix} k_{xx}(x, y) \\ k_{yy}(x, y) \\ k_{ss}(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Dans le cadre des hypothèses de Love-Kirchhoff, la connaissance du champ de flèche entraîne celles des champs de pente et de courbure de la plaque.

2.2.3.3. Efforts internes et contraintes

a) Efforts normaux internes

Le champ de résultante en membrane est donné par :

$$N(x, y) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma(P) dz \quad (2.7)$$

Où $\sigma(P)$ est la matrice des contraintes en membrane σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} de la plaque, soit :

$$N(x, y) = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (2.8)$$

Les composantes N_x , N_y , N_{xy} sont schématisées symboliquement sur la figure 2.3.

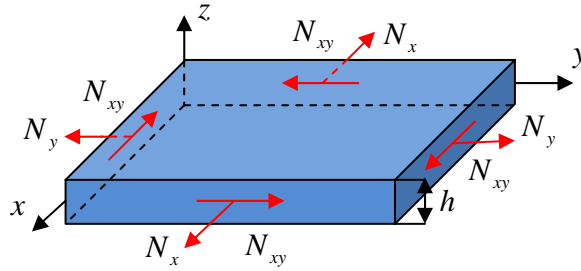


Fig. 2.3. Schématisation des efforts normaux appliqués sur une plaque

b) Efforts de cisaillement

Les efforts de cisaillement sont définis de la même manière par :

$$Q(x, y) = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (2.9)$$

Les composantes sont schématisées symboliquement par la figure 2.4.

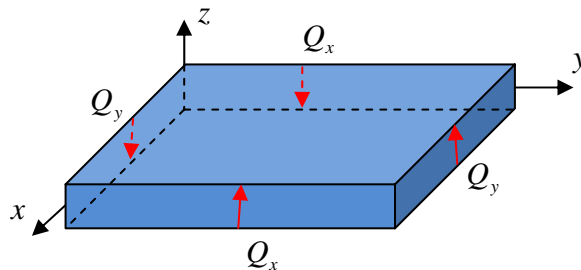


Fig. 2.4. Schématisation des efforts de cisaillement appliqués sur une plaque

c) Moment de flexion et moment de torsion

Les relations fondamentales des plaques font également intervenir les moments résultants des contraintes appliquées sur élément plaque, ces moments sont définis par :

$$M(x, y) = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (2.10)$$

Les composantes M_x , M_y , M_{xy} sont schématisées symboliquement sur la figure 2.5.

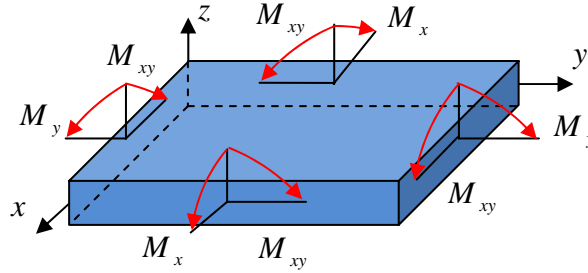


Fig. 2.5. Schématisation des moments de flexion et de torsion appliqués sur une plaque

2.2.3.4. Équation du mouvement en vibration de flexion

L'équation du mouvement vibratoire forcé en flexion des plaque minces, dans l'approximation de l'élasticité linéaire aboutit à :

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \quad (2.11)$$

2.2.4. Théorie des plaques épaisses (Reissner-Mindlin)

Tout ce qui a été développé dans la théorie de Kirchhoff (plaque mince) est valable ici dans le développement de la théorie des plaques épaisses sauf que les courbures s'exprimeront différemment et qu'il faudra en plus prendre en considération le cisaillement transversal et son effet dans cette théorie dite de Mindlin-Reissner.

2.2.4.1. Hypothèses

Les points d'un segment normal à la surface moyenne initiale restent sur un segment dans la configuration déformée, mais ce segment de droite n'est plus perpendiculaire à la surface moyenne déformée.

L'influence du cisaillement transversal n'est pas négligée dans l'énergie de déformation.

L'autre hypothèse générale aux plaques, déjà évoquée dans la théorie de Kirchhoff, est que la contrainte σ_{zz} (hors plan) est négligeable devant σ_{xx} et σ_{yy} (dans le plan).

2.2.4.2. Champs de déplacement

Les rotations θ_x et θ_y n'étant pas exactement les dérivées du déplacement normal $w(x, y)$ par les variables d'espace x et y (fig.3.3), c'est-à-dire $\theta_x \neq \partial w / \partial y$ et $\theta_y \neq -\partial w / \partial x$.

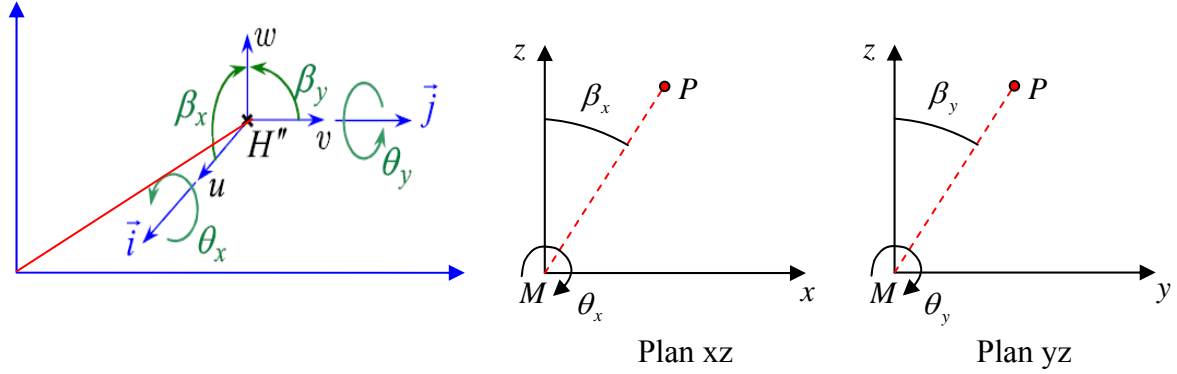


Fig.2.6. déplacements et rotations d'une plaque

Alors les déplacements du point P à la côte z sont :

$$\begin{aligned} u_x &= u(x, y) + z\theta_x(x, y) \\ u_y &= u(x, y) + z\theta_y(x, y) \\ w &= w(x, y) \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.2.4.3. Champs de déformation

En plus des déformations de membrane et de flexion sont exprimées ici les déformations de cisaillement :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

2.2.4.4. Contraintes et efforts internes

Dans cette théorie des plaques épaisses, la définition donnée aux contraintes et à leur forme intégrée (dans l'épaisseur) est identique à celle de la théorie de Love-Kirchhoff à laquelle il faut ajouter les relations liées aux phénomènes de cisaillement transversal, particulièrement les efforts généralisés de cisaillement suivants :

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (2.14)$$

2.2.4.5. Équation du mouvement en vibration de flexion

L'écriture du principe de Hamilton, d'après les fonctions énergétiques obtenues, appliqué aux plaques épaisses, aboutit aux équations de mouvement :

$$\frac{D}{2} \left[(1-\nu) \nabla^2 \theta_x + (1+\nu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \right] - k^2 Gh \left(\theta_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{D}{2} \left[(1-\nu) \nabla^2 \theta_y + (1+\nu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \right] - k^2 Gh \left(\theta_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} = 0 \quad (2.16)$$

$$k^2 Gh \left(\nabla^2 - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.17)$$

Où les termes $\partial^2 \theta_i / \partial t^2$ ($i = x, y$) des équations, représentent les termes de l'inertie de rotation.

De ces équations, on peut aisément retrouver les équations des plaques minces en posant comme conditions sur les déplacements :

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.18)$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.19)$$

$$k^2 \rightarrow \infty \quad (2.20)$$

Les termes liés à l'inertie de rotation sont négligés.

2.2.5. Théorie des plaques sandwiches

La construction sandwich a été développée et utilisée depuis 50 ans à cause de sa grande rigidité en flexion, de faible poids spécifique et de bonnes qualités d'isolation. Les plaques sandwiches représentent une forme spéciale d'une structure en couches qui se composent de deux peaux minces à rigidité et résistance élevées et un cœur de matériau viscoélastique, de poids léger et relativement épais. En raison de la large application de ces structures, plusieurs études ont été effectuées pour analyser les comportements des structures sandwiches. L'objectif de cette partie est d'établir les équations relatives au comportement mécanique des plaques sandwiches.

2.2.5.1. Hypothèses

La théorie des plaques sandwich (Fig.2.7) est basée sur les hypothèses suivantes :

- L'épaisseur du cœur est bien plus grande que celle des peaux.
- Les déplacements du cœur u_c et v_c suivant les directions x et y sont des fonctions linéaires de coordonnée z .
- Les déplacements du cœur u_c et v_c suivant les directions x et y sont uniforme le long de l'épaisseur des peaux.
- Le déplacement transversal w est indépendant de la variable z , la déformation ε_{zz} est négligeable.
- Le cœur ne transmet que les contraintes de cisaillement transversal σ_{xz} et σ_{yz} , les contraintes σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} et σ_{zz} sont négligées.
- Les contraintes de cisaillement transversal σ_{xz} et σ_{yz} sont négligées dans les peaux.

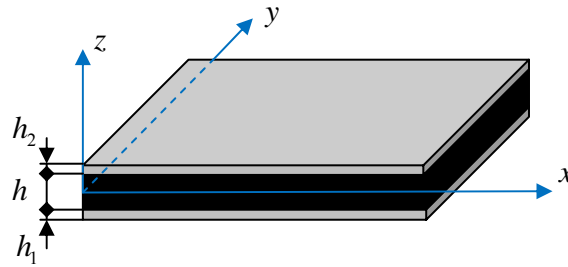


Fig.2.7. Notation d'une plaque sandwich

2.2.5.2. Champs de déplacement

Le schéma du premier ordre pour les déplacements du cœur est donné par :

$$\begin{cases} u_c(x, y, z) = u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) \\ v_c(x, y, z) = v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \end{cases} \quad (2.21)$$

La continuité des déplacements aux interfaces cœur-peaux, conduit aux expressions suivantes des déplacements dans les peaux :

- Peau inférieure :

$$\begin{cases} u_1(x, y, z) = u_0(x, y) - \frac{h}{2}\varphi_x(x, y) \\ v_1(x, y, z) = v_0(x, y) - \frac{h}{2}\varphi_y(x, y) \end{cases} \quad (2.22)$$

- Peau supérieure :

$$\begin{cases} u_2(x, y, z) = u_0(x, y) + \frac{h}{2} \varphi_x(x, y) \\ v_2(x, y, z) = v_0(x, y) + \frac{h}{2} \varphi_y(x, y) \end{cases} \quad (2.23)$$

Le déplacement transversal est donné par :

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (2.24)$$

La théorie des plaques sandwichs est donc basée sur la détermination de cinq fonctions de déplacement et rotation : u_0, v_0, w_0, φ_x et φ_y .

2.2.5.3. Champs de déformation

Le champ de déformations dans la peau inférieure est donné par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy}^1 &= \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz}^1 &= 0 \\ \gamma_{yz}^1 &= \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \gamma_{xz}^1 &= \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \gamma_{xy}^1 &= \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Les déformations en cisaillement transversal et dans la peau sont négligées et le champ des déformations se réduit au champ des déformations en membrane, qui s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} - \frac{h}{2} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

De même, le champ des déformations dans la peau supérieure s'écrit sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^2 \\ \varepsilon_{yy}^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \frac{h}{2} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Le champ des déformations dans le cœur se déduit du champ (2.21) des déplacements, soit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}^c &= \frac{\partial u_c}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yy}^c &= \frac{\partial v_c}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\
 \varepsilon_{zz}^c &= \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\
 \gamma_{yz}^c &= \frac{\partial v_c}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \\
 \gamma_{xz}^c &= \frac{\partial u_c}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \\
 \gamma_{xy}^1 &= \frac{\partial u_c}{\partial y} + \frac{\partial v_c}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Ce champ des déformations est la superposition de deux champs de déformation :

- Le champ des déformations en membrane-flexion :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^c \\ \varepsilon_{yy}^c \\ \gamma_{xy}^c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.29}$$

- Le champ des déformations en cisaillement transversal :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^c \\ \gamma_{xz}^c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \end{Bmatrix} \tag{2.30}$$

2.2.5.4. Contraintes et efforts internes

Le champ des contraintes dans le cœur est donné par :

$$\sigma_{xx}^c = \sigma_{yy}^c = \sigma_{xy}^c = \sigma_{zz}^c = 0 \tag{2.31}$$

Le cœur ne transmet que les contraintes en cisaillement :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz}^c \\ \sigma_{xz}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44}'^c & C_{45}'^c \\ C_{45}'^c & C_{55}'^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^c \\ \gamma_{xz}^c \end{Bmatrix} \tag{2.32}$$

- Les efforts en cisaillement :

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} dz \quad (2.33)$$

En substituant les expressions des contraintes, dans les expressions des efforts et des moments, les équations constitutives d'une plaque sandwich est donnée comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & C_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ij}^1 + A_{ij}^2 \\ B_{ij} &= \frac{h}{2} (A_{ij}^2 - A_{ij}^1) \\ C_{ij} &= C_{ij}^1 + C_{ij}^2 \\ D_{ij} &= \frac{h}{2} (C_{ij}^2 - C_{ij}^1) \end{aligned} \quad (2.35)$$

et

$$A_{ij}^1 = \int_{-(h/2+h_1)}^{-h/2} (\mathcal{Q}_{ij}')_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (\mathcal{Q}_{ij}')_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} (\mathcal{Q}_{ij}')_k e_k \quad (2.36)$$

$$C_{ij}^1 = \int_{-(h/2+h_1)}^{-h/2} z (\mathcal{Q}_{ij}')_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z (\mathcal{Q}_{ij}')_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} (\mathcal{Q}_{ij}')_k e_k z_k \quad (2.37)$$

$$A_{ij}^2 = \int_{h/2}^{h/2+h_2} (\mathcal{Q}_{ij}')_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (\mathcal{Q}_{ij}')_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} (\mathcal{Q}_{ij}')_k e_k \quad (2.38)$$

$$C_{ij}^2 = \int_{h/2}^{h/2+h_2} z (\mathcal{Q}_{ij}')_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z (\mathcal{Q}_{ij}')_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} (\mathcal{Q}_{ij}')_k e_k z_k \quad (2.39)$$

$$F_{ij} = h C_{ij}'^c \quad (2.40)$$

Dans le cas de plaque sandwichs symétriques, les peaux inférieure et supérieure sont identiques, d'où :

$$A_{ij}^1 = A_{ij}^2, \quad C_{ij}^1 = -C_{ij}^2 \quad (2.41)$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} A_{ij}^1 &= 2A_{ij}^2, & D_{ij} &= hC_{ij}^2 \\ B_{ij} &= 0, & C_{ij} &= 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Dans le cas des plaques sandwichs symétriques, il y a donc découplage des comportements en membrane et en flexion. L'équation constitutive prend alors une forme identique à l'équation constitutive de stratifiés symétriques avec cisaillement transverse.

2.3. Formulation énergétique

Les théorèmes de l'énergie peuvent être utilisés pour aboutir à une formulation variationnelle des relations fondamentales des plaques sandwichs. Cette formulation associée aux conditions aux frontières permet, dans le cadre de calcul variationnel, de développer des méthodes de recherche des solutions approchées du comportement vibratoire des plaques.

2.3.1. Energie de déformation

L'énergie de déformation d'une plaque s'écrit en coordonnées cartésiennes suivant :

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \sigma_{yz}\gamma_{yz} + \sigma_{xz}\gamma_{xz} + \sigma_{xy}\gamma_{xy}) dx dy dz \quad (2.43)$$

Cette relation peut être exprimée en fonction des déplacements u_0 , v_0 et w_0 en introduisant dans l'expression précédente les relations contraintes-déformations et intégrant ensuite en z suivant l'épaisseur de la plaque, nous obtenons :

$$\begin{aligned} U_d &= \frac{1}{2} \iint \left\{ A_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{22} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right. \\ &+ A_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 - B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2B_{12} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ &- 2B_{16} \left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right] - 2B_{26} \left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right] \\ &\left. - 4B_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + D_{11} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$+ 4 \left(D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 4 D_{66} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \Big\} dx dy \quad (2.44)$$

Cette relation introduit des coefficients de rigidité A_{ij} , B_{ij} et D_{ij} exprimés respectivement par les relations (2.35)-(2.39). L'expression de l'énergie de déformation fait apparaître une énergie de déformation en membrane introduite par les coefficients de rigidité en membrane A_{ij} et une énergie de déformation en flexion associée aux coefficients de rigidité en flexion D_{ij} . L'expression de l'énergie de déformation contient également des termes de couplage entre les déplacements en membrane u_0, v_0 et les déplacements transverse w_0 .

Dans le cas des plaques sandwiches, les termes de couplage B_{ij} membrane-flexion sont nuls, et l'énergie de déformation se réduit comme suit :

$$\begin{aligned} U_d = \frac{1}{2} \iint \Big\{ & A_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2 A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{22} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \\ & + A_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + D_{11} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2 D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4 D_{66} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \\ & + 4 \left(D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \Big\} dx dy \end{aligned} \quad (2.45)$$

Dans le cas des problèmes de flexion où les déplacements u_0, v_0 sont nuls, donc l'énergie de déformation s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} U_d = \frac{1}{2} \iint \Big\{ & D_{11} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2 D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4 D_{66} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \\ & + 4 \left(D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \Big\} dx dy \end{aligned} \quad (2.46)$$

Où ρ est la masse volumique.

2.3.2. Energie cinétique

L'énergie cinétique d'une plaque est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2} \iint_s \rho \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy \quad (2.47)$$

2.4. Principe variationnel

2.4.1. Généralités

- C'est l'un des plus grands principes de la Physique.
- C'est un principe d'optimisation.
- Toutes les lois de la Physique peuvent s'écrire sous cette forme.

2.4.2. Principe variationnel dans le cas des solides continus 3D

On choisit une base de fonctions qui est complète,

$$\vec{u}(P, t) = \sum_{j=1}^n \vec{f}_j(p) q_j(t) \quad (2.48)$$

Avec les fonctions $f_j(P)$ vérifiant,

- La continuité de classe C^0
- La continuité de classe C^1
- Les conditions aux frontières cinématiques

Dans le cas d'une structure tridimensionnelle, l'équation (2.48) fait apparaître une matrice $N(p)$ de $(3 \times n)$,

$$\vec{u}(P, t) = N(P) \vec{q}(t) \quad (2.49)$$

L'énergie cinétique d'un corps Ω de masse volumique ρ est donnée par,

$$T = 1/2 \int_{\Omega} \rho \dot{\vec{u}}^2 dV = 1/2 \dot{\vec{q}} \left(\int_{\Omega} \rho N^t N dV \right) \dot{\vec{q}} = 1/2 \dot{\vec{q}} M \dot{\vec{q}} \quad (2.50)$$

$$\Rightarrow M = \int_{\Omega} \rho N^t N dV \quad (2.51)$$

L'énergie de déformation d'un corps Ω de masse volumique ρ est donnée par,

$$U = 1/2 \int_{\Omega} \vec{\epsilon} \vec{\sigma} dV = 1/2 \vec{q} \left(\int_{\Omega} B^t L B dV \right) \vec{q} = 1/2 \vec{q} K \vec{q} \quad (2.52)$$

$$\Rightarrow K = \int_{\Omega} B^t L B dV \quad (2.53)$$

Le chargement extérieur peut être décomposé en deux termes, le premier surfacique \vec{f}_s , et le second volumique \vec{f}_v

$$W_{ext} = \int_{\partial\Omega} \vec{u}(P)^t \vec{f}_s dV + \int_{\Omega} \vec{u}(P)^t \vec{f}_v dV = \vec{q} \vec{g} \quad (2.54)$$

Dans le cas où les déplacements sont promotionnels aux efforts, un coefficient de 1/2 apparaît, il faut alors exprimer l'effort en fonction de $f_i = c_{ij} q_j$, avec c_{ij} le coefficient d'influence d'un déplacement en nœud j sur l'effort au nœud i, le vecteur q apparaît alors au carré, avant d'en prendre la variation qui refait disparaître le coefficient 2.

Si on applique le principe de Hamilton, la variation du Hamiltonien et égale à la variation du travail extérieur fourni quelques soient t_1 et t_2 .

$$\delta \left(\int_{t_1}^{t_2} (T + U) dt \right) = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} W_{ext} dt \right) \quad (2.55)$$

$$\delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{q}} M \dot{\vec{q}} + \frac{1}{2} \vec{q} K \vec{q} \right) dt \right) = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \vec{q} \vec{g} dt \right) \quad (2.56)$$

Si on prend la dérivée par rapport au temps de l'équation (2.56), on obtient pour le terme d'énergie cinétique,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \dot{\vec{q}} M \dot{\vec{q}} dt \right) = \frac{1}{2} \ddot{\vec{q}} M \dot{\vec{q}} + \frac{1}{2} \dot{\vec{q}} M \ddot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}} M \ddot{\vec{q}} \quad (2.57)$$

Soit pour l'ensemble des termes, par des calculs similaires,

$$\dot{\vec{q}} M \ddot{\vec{q}} + \dot{\vec{q}} K \vec{q} = \dot{\vec{q}} \vec{g} \quad (2.58)$$

En simplifiant par $\dot{\vec{q}}$, on retrouve le système d'équation qu'il faut résoudre.

$$M \ddot{\vec{q}} + K \vec{q} = \vec{g} \quad (2.59)$$

Dans le cas des systèmes mécaniques simples, l'équation (2.59) est résolue directement et donne des solutions exactes. Par contre dans le cas des structures complexes, ou des matériaux ayant un comportement non linéaire, la recherche des fréquences propres ou de la réponse de la structure nécessite alors d'utiliser des méthodes approximatives. Nous donnons ci-après un bref résumé sur la méthode de Ritz, que nous allons exploiter pour la résolution de notre problème.

2.5. Méthode approximative de Ritz

Le principe général de l'approximation d'une solution $w(M)$ par la méthode de Ritz consiste à rechercher la meilleure approximation que nous noterons $\tilde{w}(M)$, satisfaisant au mieux les conditions physiques auxquelles donne la solution $w(M)$ sur son domaine d'étude. Parmi les méthodes d'approximation, la méthode de Ritz est basée sur une approche variationnelle, fournit une méthode efficace pour obtenir des solutions approchées au problème de la mécanique des solides déformables. Dans l'approche en déplacements, la solution exacte du problème variationnel est celle appartenant à l'espace des fonctions admissibles et satisfaisant les conditions aux limites. La solution exacte est caractérisée par un extremum absolu. La méthode de Ritz consiste à rechercher une approximation appartenant à l'espace n de fonctions de base $\varphi_i(m)$ sous forme :

$$\tilde{w}(M) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(m) \quad (2.60)$$

Les fonctions $\varphi_i(M)$ sont des fonctions connues choisies à priori et dont l'ensemble constitue la base fonctionnelle. Les coefficients a_i à déterminer, sont appelés coordonnées généralisées. Les fonctions de base $\varphi_i(M)$ doivent satisfaire les conditions de continuité, les déplacements imposés aux frontières et former de base fonctionnelle complète pour assurer les conditions de convergence de l'approximation. Les fonctions de base doivent également être différentielles. L'approximation recherchée est alors celle qui rend extrémale l'énergie potentielle totale approchée :

$$\tilde{W}(\tilde{w}) = \tilde{U}(a_i) \quad (2.61)$$

Suivant la relation :

$$\delta \tilde{U}(a_i) = 0 \quad (2.62)$$

Cette approximation est caractérisée par un extremum relatif. L'énergie potentielle totale approchée apparaît donc sous forme d'une fonction des coefficients a_i . L'approximation recherchée est caractérisée par les n conditions de stationnarité de la fonction approchée \tilde{U} par rapport aux coefficients a_i , déduites de la relation (2.62). Soit :

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.63)$$

L'énergie potentielle totale s'écrit sous une forme quadratique des coefficients a_i et il en résulte que les conditions de stationnarité (2.51) conduisent à un système de n équations linéaires, permettant de déterminer les n coefficients a_i .

Dans le cas de l'étude des vibrations, le champ approché des déplacements peut être écrit en séparant les variables, sous la forme :

$$\tilde{w}(M, t) = \tilde{w}(M) e^{i\omega t} = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i e^{i\omega t} \quad (2.64)$$

L'énergie cinétique d'un solide s'écrit alors :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \rho \omega^2 \tilde{u}_i \tilde{u}_i dV \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.65)$$

Le problème de vibration peut alors être traité comme un problème statique, en considérant simplement l'énergie cinétique comme énergie additionnelle donnée comme suit :

$$\delta(U - E_c) = 0 \quad (2.66)$$

Cette relation conduit à l'équation classique d'un problème aux valeurs propres. Les fréquences propres de l'ensemble déformable sont obtenues en annulant le déterminant des coefficients a_i dans l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial a_i} (\tilde{U}(a_i) - \tilde{E}_c(a_i) + \tilde{W}(a_i)) = 0 \quad (2.67)$$

Pour assurer la convergence des solutions approchées lorsque n augmente, la base fonctionnelle $\varphi_i(M)$ doit être complète. Une base fonctionnelle est dite complète si elle permet de représenter n'importe quelle fonction $w(M)$ dans le domaine de définition, en augmentant le nombre de coordonnées généralisées.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[w(M) - \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(M) \right] = 0 \quad (2.68)$$

2.6. Conclusion

Dans ce chapitre, sont présentées des théories effectuées pour permettre de décrire le comportement des plaques et les méthodes énergétiques. Ces dernières méthodes exposées dans ce chapitre ont été utilisées pour les modélisations analytique et numérique des plaques magnétorhéologiques qui seront présentées dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 3

**MODÉLISATIONS ANALYTIQUE ET NUMÉRIQUE DU
COMPORTEMENT VIBRATOIRE DES PLAQUES
SANDWICHES EN ÉLASTOMÈRE
MAGNÉTORHÉOLOGIQUE**

3.1. Introduction

Dans l'étude des vibrations des structures sandwichs viscoélastiques, on s'intéresse généralement au calcul des propriétés amortissantes à savoir la fréquence de résonance et l'amortissement modal. Ces caractéristiques modales peuvent être calculées en résolvant le problème des vibrations libres ou le problème des vibrations harmoniques forcées.

Durant ces dernières années, quelques travaux sont axés sur l'étude des propriétés viscoélastiques des élastomères et des structures sandwichs magnétorhéologiques. [Coquelle E., Bossis G, 2006 \[105\]](#) ont présenté une méthode expérimentale et une autre numérique pour déterminer les propriétés mécaniques des élastomères contrôlés par un champ magnétique. Ces élastomères sont composés de particules ferromagnétiques, structurées en chaînes unidirectionnelles au sein d'une matrice élastomère silicone, où les essais sous champ ont révélé un fort accroissement des propriétés. [Hua-xia Deng, Xing-long Gong, \[106\]](#) ont basé leur étude sur le développement de nouveaux paramètres pour l'identification du comportement vibratoire des élastomères magnétorhéologiques, tels que les propriétés viscoélastiques amortissantes, leurs permettant de dissiper l'énergie et représenter l'aspect viscoélastique. [Jolly et al, \[107\]](#), [Demchuk et al \[108\]](#), ont montré expérimentalement l'influence du champ magnétique sur le module de cisaillement de MRE en mesurant l'amplitude vibratoire d'une poutre sandwich en élastomère magnétorhéologique. [Davis \[109\]](#) a montré que la variation maximale du module de cisaillement atteint pratiquement 50% d'un élastomère chargé par 27% de particules de fer. Ce dernier travail a été vérifié expérimentalement par [Zhou \[110\]](#). [Zhou G. Y., et Wang Q \[111, 112\]](#), dans le premier travail, ont fait une modélisation analytique qui permettra de donner les équations régissant le mouvement vibratoire d'une poutre sandwich exposée à un champ magnétique uniforme et perpendiculaire à la direction de l'épaisseur, de même axe, et afin de vérifier le modèle analytique. ils ont abordé un second travail basé sur une modélisation numérique pour contrôler les propriétés rhéologiques et de montrer le pouvoir de cette dernière technique utilisée pour amortir d'une façon fiable les vibrations. [Dwivedy S.K., Mahendra N., et Sahu K.C \[113\]](#), ont étudié les régions paramétriques de l'instabilité d'une poutre sandwich ayant un noyau en élastomère magnétorhéologique identique à celle étudiée par [Zhou G. Y., et Wang Q \(2006\)](#), soumise à une charge périodique afin de déterminer les avantages d'une commande adaptative à l'aide de l'ajustement des propriétés mécaniques des élastomères chargés soumis à un champ magnétique, ils ont présenté la méthode de Hsu pour déterminer les zones d'instabilité

associées aux fréquences de résonances simples et combinées pour différents états de frontière. Plus récemment, [Nayak B. et al. \[114\]](#), ont étudié la réduction des vibrations d'une poutre sandwich possédant deux noyaux, un noyau en élastomère non chargé et un noyau en élastomère chargé une fois par les particules de fer et une autre fois par les particules de noir de carbone, les régions d'instabilité paramétrique pour les deux différents types des particules ont été étudiées seulement pour les trois premiers modes de vibration, pour montrer la différence entre la réduction passive des vibrations et la réduction active, les résultats obtenus ont été discutés. Ces chercheurs ont utilisé des poutres sandwichs magnétorhéologiques dans leurs travaux pour valider les résultats de leur méthode. Plus récemment, de rares travaux sont axés sur l'étude des plaques en élastomère magnétorhéologiques. [Jia-Yi Yeh \[126\]](#) a étudié les vibrations libres des plaques sandwichs en élastomère magnétorhéologique, où l'amortissement et les fréquences naturelles de la plaque sont calculés par la méthode des éléments finis. [Z. G. Ying et al \[127\]](#) ont étudié les vibrations forcées d'une plaque sandwichs en élastomère magnétorhéologique par une excitation aléatoire où les réponses de la plaque sont déterminées par la méthode de Galerkin.

L'étude bibliographique montre que relativement, très peu de chercheurs se sont intéressés à l'analyse des vibrations non linéaires des plaques magnétorhéologiques en élastomère surtout avec la prise en compte de la dépendance en fréquence et de champ magnétique du comportement du matériau magnétorhéologique.

Pour répondre à cette problématique, le travail mené dans cette thèse consistera dans un premier temps, à mettre en place une formulation analytique de la théorie des plaques magnétorhéologiques basée sur la théorie des plaques sandwichs viscoélastique on utilise une approche énergétique et le principe de Hamilton pour établir les équations différentielles de mouvement des plaques relatives à la déformation en flexion. Dans un second temps, l'équation relative à l'amplitude est résolue de façon approchée par la méthode de Ritz et déterminée par la méthode des éléments finis en exploitant le code de calcul Abaqus.

Cette modélisation est basée non seulement sur le calcul de l'amplitude, mais aussi sur les propriétés viscoélastiques de l'élastomère et en générale sur la réponse dynamique de la plaque en élastomère chargé par différent pourcentage des particules fer en fonction de l'intensité du champ magnétique.

3.2. Position du problème

Dans ce qui suit, nous considérerons une plaque sandwich constituée de deux peaux en aluminium et d'une âme en élastomère chargé par les particules de fer, cette plaque est soumise à un champ magnétique variable (Fig.3.1).

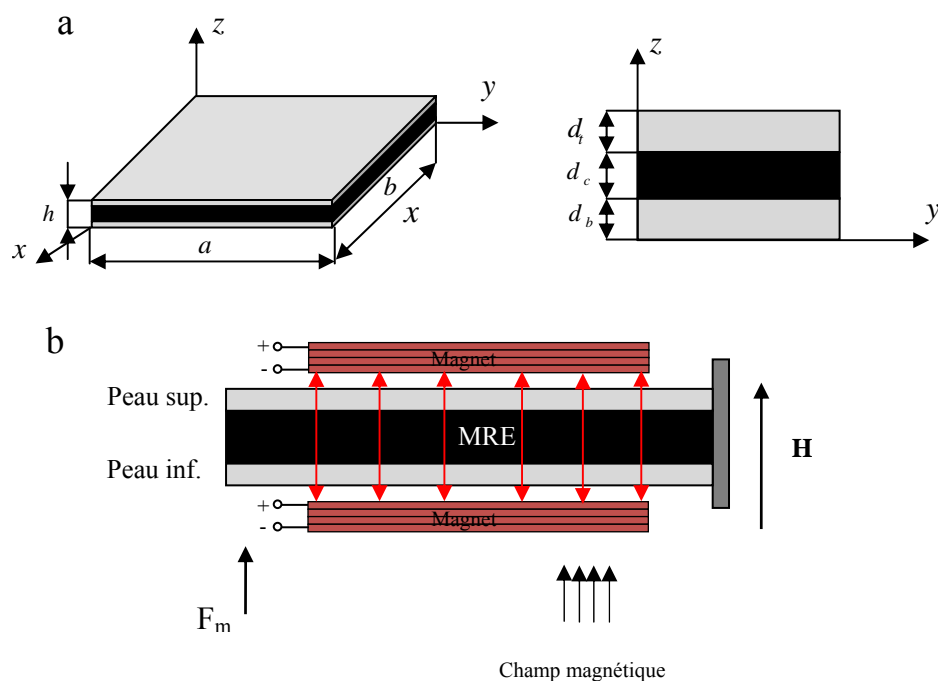


Fig.3.1. Description de plaque magnétorhéologique

3.3. Modélisation mathématique du problème

Soit une plaque sandwich rectangulaire de dimensions $a \times b$, d'épaisseur h et de masse ρ_s par unité de surface. Cette plaque est encastrée libre, Fig.3.1 (a) et est soumise à une force électromagnétique F_m , Fig.3.1 (b).

Le principe de Hamilton et la méthode de Ritz sont utilisés pour déterminer les équations du mouvement de la plaque sandwich.

Le principe de Hamilton d'un système mécanique [128, 129] de l'instant t_1 à l'instant t_2 est donné par l'équation (3.1):

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (3.1)$$

Où T : énergie cinétique, U : énergie de déformation, W : travail des forces appliquées, δ : opérateur variationnel, t_1 et t_2 : variation du temps.

Pour une plaque sandwich dans le cas où $u = v = 0$, et en tenant compte de la force d'excitation par un champ électromagnétique, l'équation du mouvement en flexion s'écrit sous la forme [128]:

$$M \frac{d^2 w}{dt^2} + Kw = F \quad (3.2)$$

Où M , K et F sont la matrice de masse globale, la matrice de rigidité globale et le vecteur des forces respectivement qui sont définies par :

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & . & . & . & M_{1i} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ M_{m1} & . & . & . & M_{ij} \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} K_{11} & . & . & . & K_{1i} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ K_{m1} & . & . & . & K_{ij} \end{bmatrix}, F = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

La solution générale de l'équation différentielle non homogène (3.2) est exprimée sous la forme :

$$w(x, y, t) = w(x, y) e^{i\lambda t} \quad (3.4)$$

Dans cette étude on s'intéresse aux vibrations forcées, où la structure est excitée par une force magnétique.

Les énergies cinétiques et de déformations de chaque élément de la plaque et le travail généré par le champ magnétique sont donnés comme suit :

3.3.1. Energie cinétique de plaque magnétorhéologique

L'énergie cinétique totale de la plaque est donnée par :

$$T = T_t + T_b + T_c \quad (3.5)$$

Energie cinétique de la peau supérieure [129,130, 131]:

$$T_t = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\rho_t d_t^2 \left(\frac{\partial w_t}{\partial t} \right)^2 + \rho_t d_t^3 \left(\left(\frac{\partial \dot{w}_t}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{w}_t}{\partial y} \right)^2 \right) \right] dx_t dy_t \quad (3.6)$$

Energie cinétique de la peau inférieure [129,130, 131]:

$$T_b = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\rho_b d_b^2 \left(\frac{\partial w_b}{\partial t} \right)^2 + \rho_b d_b^3 \left(\left(\frac{\partial w_b}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} \right)^2 \right) \right] dx_b dy_b \quad (3.7)$$

Energie cinétique du noyau en élastomère [130]:

$$T_c = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \rho_c \left(\frac{\partial w_c}{\partial t} \right)^2 dx_c dy_c \quad (3.8)$$

Où T représente l'énergie cinétique des deux peaux en aluminium, T_c , l'énergie cinétique de l'élastomère, a et b les dimensions de la plaque, $\rho_i d_i, \rho_c d_c$ ($i = t, b$) sont les masses par unité de surface, w_i la déformation en flexion et \dot{w}_c la vitesse de déformation ; où t, b et c représentent respectivement la peau supérieure, la peau inférieure et le noyau en élastomère.

3.3.2. Energie de déformation de plaque magnétorhéologique

Energie de déformation de la peau supérieure [129, 130, 131] :

$$U_t = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ D_{t11} \left(\frac{\partial^2 w_t}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{t12} \left(\frac{\partial^2 w_t}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_t}{\partial y^2} \right) + D_{t22} \left(\frac{\partial^2 w_t}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{b66} \left(\frac{\partial^2 w_t}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx_t dy_t \quad (3.9)$$

Energie de déformation de la peau inférieure [129, 130, 131]:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ D_{b11} \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{b12} \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) + D_{b22} \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{b66} \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx_b dy_b \quad (3.10)$$

Energie déformation du noyau en élastomère [130]:

$$U_c = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\frac{c^3}{24G_c^*} \left(\frac{\partial \tau_{xzc}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yzc}}{\partial y} \right)^2 + \frac{G_c^*}{2c} (w_t - w_b)^2 + \frac{c}{4} \left(\frac{\tau_{xzc}^2 + \tau_{yzc}^2}{G_c^*} \right) \right] dx_c dy_c \quad (3.11)$$

Où $D_i = D = EI$ ($i = t, b$) est la rigidité en flexion des peaux, w est le déplacement vibratoire de la plaque, $G_c, \tau_{xzc}, \tau_{yzc}$ et d_c sont respectivement le module de cisaillement, les contraintes de cisaillement et l'épaisseur de l'élastomère.

Dans ce cas, le noyau de la plaque est un élastomère magnétorhéologique considérablement amortissant. Le module complexe de cisaillement G_c^* de l'équation (3.11) est donné en fonction du facteur de perte d'énergie [113]:

$$G_c^* = G_c (1 + i\eta_c) \quad \text{soit} \quad G_c^* = G_c' + iG_c'' \quad (3.12)$$

Donc le facteur de perte de l'élastomère magnétorhéologique est déterminé par le rapport entre le module dissipatif G_c'' et le module conservatif G_c' par la relation suivante [105]:

$$\eta_c = \tan \delta = \frac{G_c''}{G_c'} \quad (3.13)$$

Où δ est l'angle de phase.

3.3.3. Travail généré par le champ électromagnétique

La première variation de l'énergie externe générée par le champ magnétique peut être exprimée par [114]:

$$\delta W = - \int_0^a \left(q_t \delta w_t + n_t \delta u_t + m_t \delta \frac{\partial w_t}{\partial x} + q_b \delta w_b + n_b \delta u_b + m_b \delta \frac{\partial w_b}{\partial x} \right) dx \quad (3.14)$$

La force horizontale de Lorentz et le moment crée entre les charges des particules ferromagnétique sont donnés comme suit [112-114]:

$$n_j^{Lor} = \frac{B^2 H D_j}{\mu_{ej}} \frac{\partial w_j^2}{\partial x^2} \quad (3.15)$$

et

$$m_j = m_j^{Max} + m_j^{Lor} = \frac{B^2 b h_j}{\mu_0} \left[\frac{d_j}{2\pi} \ln \left(\frac{x}{a-x} \right) \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{\partial w_j}{\partial x} \right] - \frac{B^2 b d_j^3}{12 \mu_{ej}} \frac{\partial^3 w_j}{\partial^3 x} \quad (3.16)$$

Où μ_{ej} ($j=t,b$) est la perméabilité des peaux ; μ_0 perméabilité du vide ($1.2566371 \cdot 10^{-6}$ Hm¹), et B le champ magnétique, n_j et m_j sont les forces et les moments équivalents distribués et induits par les charges magnétoélastiques des particules de fer, m_j^{Max} ($j=t,b$) représente le moment équivalent induit par le saut de contrainte de Maxwells et m_j^{Lor} ($j=t,b$) représente le moment équivalent induit par la force de Lorentz.

La plaque est excitée par une force magnétique donnée par [132, 133]:

$$F_m = \mu_0 \times M_r \times \nabla H \times V \quad (3.17)$$

$$F_m = B_r \times \nabla H \times V \quad (3.18)$$

B_r : Induction rémanente (0.7T)

∇H : Gradient du champ magnétique (le champ mesuré est de 1200A/m par mm pour une distance de 2cm du noyau et un courant de 0.7A).

V : Volume de l'aimant (10^{-6} m³)

F_m : Force d'excitation magnétique (Pour un champ de réticulation nul, $F_m = 1.05N$)

3.3.4. Équation du mouvement

L'équation globale du mouvement en flexion est obtenue à partir de la formulation variationnelle. Par différentiation des équations (3,6)-(3,11) et (3,14), nous déterminerons l'équation permettant d'étudier les vibrations en flexion des plaques sandwichs en élastomère magnétorhéologique.

$$\begin{aligned} \delta U_i = & \int \int \left\{ \left[D_{i11} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + D_{i12} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w_i) + \left[D_{i12} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + D_{i22} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\delta w_i) + \left[4D_{i66} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\delta w_i) \right. \\ & + \frac{c^3}{12G_c^*} \left[\frac{\partial \tau_{xzc}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yzc}}{\partial y} \right] \left(\frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) \right) \Bigg\} dx_i dy_i + \frac{1}{2} \int \int \left\{ \frac{G_c^*}{c} (w_t + w_b) (\delta w_t + \delta w_b) \right. \\ & + \frac{G_c^*}{c} (w_t + w_b) (\delta w_t + \delta w_b) + \frac{c}{G_c^*} (\tau_{xzc} + \tau_{yzc}) (\delta \tau_{xzc} + \delta \tau_{yzc}) \Bigg\} dx_c dy_b \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\delta T_i = - \int_0^a \int_0^b \left[\rho_i d_i^3 \left(\frac{\partial \dot{w}_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \dot{w}_i) + \frac{\partial \dot{w}_i}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \dot{w}_i) \right) + \rho_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \delta w_i \right] dx_i dy_i \quad (3.20)$$

$$\delta T_c = - \int_0^a \int_0^b \rho_i \frac{\partial^2 \dot{w}_i}{\partial t^2} \delta w_i dx_c dy_c \quad (3.21)$$

En appliquant le principe de Hamilton (3.1) sur les équations (3.14) et (3.19)-(3.21), on trouve :

$$\begin{aligned} \delta U_i = & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int \int \left\{ \left[D_{i11} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + D_{i12} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w_i) + \left[D_{i12} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + D_{i22} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\delta w_i) + \left[4D_{i66} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\delta w_i) \right. \right. \\ & + \frac{c^3}{12G_c^*} \left[\frac{\partial \tau_{xzc}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yzc}}{\partial y} \right] \left(\frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) \right) \Bigg\} dx_i dy_i + \frac{1}{2} \int \int \left\{ \frac{G_c^*}{c} (w_t + w_b) (\delta w_t + \delta w_b) \right. \\ & + \frac{G_c^*}{c} (w_t + w_b) (\delta w_t + \delta w_b) + \frac{c}{G_c^*} (\tau_{xzc} + \tau_{yzc}) (\delta \tau_{xzc} + \delta \tau_{yzc}) \Bigg\} dx_c dy_b \Bigg\} dt \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\delta T_i \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int \int \left[-\rho_i d_i^3 \left(\frac{\partial \dot{w}_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \dot{w}_i) + \frac{\partial \dot{w}_i}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \dot{w}_i) \right) - \rho_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \delta w_i \right] dx_i dy_i \right\} dt \quad (3.23)$$

$$\delta T_c \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int \int -\rho_i \frac{\partial^2 \dot{w}_i}{\partial t^2} \delta w_i dx_c dy_c \right\} dt \quad (3.24)$$

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int \left(q_t \delta w_t - n_t \delta u_t - m_t \delta \frac{\partial w_t}{\partial x} - q_b \delta w_b - n_b \delta u_b - m_b \delta \frac{\partial w_b}{\partial x} \right) dx \right\} dt \quad (3.25)$$

On respecte les conditions aux limites aux frontières de la plaque, desquelles on déduit l'équation du mouvement en vibration transversale comme suit :

$$\begin{aligned}
 & D_{t11} \frac{\partial^2 w_t}{\partial x^2} + D_{t12} \frac{\partial^2 w_t}{\partial y^2} + D_{t12} \frac{\partial^2 w_t}{\partial x^2} + D_{t22} \frac{\partial^2 w_t}{\partial y^2} + D_{b11} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + D_{b12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + 4D_{b66} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} + \\
 & D_{b12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + D_{b22} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + 4D_{t66} \frac{\partial^2 w_t}{\partial x \partial y} + \frac{c^3}{12G_c^*} \left(\frac{\partial \tau_{xzc}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yzc}}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \frac{G_c^*}{c} (w_t + w_b) + \frac{G_c^*}{c} (w_t + w_b) \\
 & + \frac{c}{G_c^*} (\tau_{xzc} + \tau_{yzc}) - \rho_b d_b^3 \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} - \rho_t d_t^3 \frac{\partial \dot{w}_t}{\partial x} - \frac{\partial \dot{w}_t}{\partial y} - \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} - \rho_t \frac{\partial^2 w_t}{\partial t^2} - \rho_b \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} - \rho_t \frac{\partial^2 \dot{w}_t}{\partial t^2} - \rho_b \frac{\partial^2 \dot{w}_b}{\partial t^2} \\
 & q_t - q_b - (m_t - m_b) = 0
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Cette équation représente une équation couplée magnéto-mécanique non linéaire qu'il n'est possible de résoudre analytiquement, un passage aux approches numérique est obligatoire.

Pour discrétiser les équations énergétiques (3.6)-(3.11), (3.15) et (3.16), un développement numérique détaillé de la méthode approchée de Ritz a été préposé.

3.4. Discrétisation par la méthode de Ritz

La solution approchée est recherchée sous la forme d'une série double à variables séparées [134] :

$$w = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \tag{3.27}$$

Les fonctions $X_m(x)$ et $Y_n(x)$ doivent constituer des bases fonctionnelles. Elles sont choisies de manière à vérifier les conditions sur les frontières.

Par substitution de l'équation (3.17) dans l'équation (3.2), on obtient l'équation [128]:

$$(K - \omega^2 M)A = F \tag{3.28}$$

Où ω est la fréquence des sollicitations dynamiques, les coefficients A_{mn} sont ensuite déterminés par les conditions de stationnarité qui s'écrivent comme suit [129]:

$$\frac{\partial(\tilde{U} - \tilde{T})}{\partial A_{mn}} = - \frac{\partial \tilde{W}}{\partial A_{mn}} \quad \text{Pour} \quad \begin{cases} m = 1, 2, \dots, M \\ n = 1, 2, \dots, N \end{cases} \tag{3.29}$$

Ou \tilde{U} , \tilde{T} et \tilde{W} sont les énergies de déformation, cinétique et le travail des forces du champ magnétique exercées. Elles sont obtenues en reportant l'expression approchée (3.16) de la

flèche dans les expressions (3.5)-(3.10), (3.15) et (3.16). La recherche de l'expression finale nécessite d'exprimer chaque terme des ces dernières expressions comme suit :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{d^2 X_m}{dx^2} Y_n \quad (3.30)$$

D'où

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{mn} A_{ij} \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{d^2 X_i}{dx^2} Y_n Y_j \quad (3.31)$$

La dérivation de (3.31) par rapport A_{mn} donne :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial A_{mn}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{d^2 X_i}{dx^2} Y_n Y_j \quad (3.32)$$

L'intégration de ce terme s'écrit :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial A_{mn}} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} \int_0^a \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{d^2 X_i}{dx^2} dx \int_0^b Y_n Y_i dy \quad (3.33)$$

Pour exprimer ces intégrales (3.33), il est pratique d'introduire les variables réduites on posant $b = \alpha a$ (α nombre entier) :

$$\xi = \frac{x}{b} \quad (\text{Pour } x = 0 \Rightarrow \xi = 0 \text{ et pour } x = \alpha a \Rightarrow \xi = 1) \quad (3.34)$$

$$\vartheta = \frac{y}{a} \quad (\text{Pour } y = 0 \Rightarrow \vartheta = 0 \text{ et pour } y = \frac{b}{\alpha} \Rightarrow \vartheta = 1) \quad (3.35)$$

L'expression (3.33) s'écrit :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial A_{mn}} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} \frac{a}{b^3} \int_0^1 \frac{d^2 X_m}{d\xi^2} \frac{d^2 X_i}{d\xi^2} d\xi \int_0^1 Y_n Y_i d\vartheta \quad (3.36)$$

Les intégrales sont alors sans dimensions.

En procédant de la même manière pour les autres termes, les membres de \tilde{U} , \tilde{T} et \tilde{W} sont mis sous les formes pratiques suivantes :

$$\sum_i^M \sum_j^N \left\{ D_{11} I_{mi}^{22} J_{nj}^{00} + [D_{12} (I_{mi}^{20} J_{nj}^{02} + I_{mi}^{02} J_{nj}^{20}) + 4D_{66} I_{mi}^{11} J_{nj}^{11}] R^2 + D_{22} I_{mi}^{00} J_{nj}^{22} R^4 + \frac{Rabc^3}{24G_c^*} I_{mi}^{11} J_{nj}^{00} + \frac{R^2 a^2 c^3}{24G_c^*} I_{mi}^{00} J_{nj}^{11} + Ra^3 b (I_{mi}^{00} J_{nj}^{00} + I_{mi}^{00} J_{nj}^{00}) - \omega^2 (2b^3 \rho_{t,b} I_{mi}^{00} J_{nj}^{00} + b^3 \rho_c I_{mi}^{00} J_{nj}^{00}) \right\} A_{ij} =$$

$$\frac{B^2bh}{\mu_0} \left[\frac{d_j}{2\pi R} \ln\left(\frac{x}{a-x}\right) I_{mn}^{20} + bI_{mn}^{10} \right] + \frac{B^2hd_j}{\mu_{ej}R} I_{mn}^{20} + B_r \times \nabla H \times V \quad (3.37)$$

Où $R = \frac{a}{b}$ est le rapport de la longueur sur la largeur de la plaque, ω est la fréquence dynamique de la plaque. Les intégrales sans dimensions sont données par les formes suivantes [134]:

$$I_{mi}^{pq} = \int_0^1 \frac{d^p X_m}{d\xi^p} \frac{d^q Y_i}{d\xi^q} d\xi \quad m, i = 1, 2, \dots, M \quad pq = 00, 02, 11, 20, 22. \quad (3.38)$$

$$I_{nj}^{rs} = \int_0^1 \frac{d^r Y_n}{d\vartheta^r} \frac{d^s Y_j}{d\vartheta^s} d\vartheta \quad n, j = 1, 2, \dots, N \quad rs = 00, 02, 11, 20, 22. \quad (3.39)$$

Ces intégrales I_{mi}^{pq} et I_{nj}^{rs} sont calculées directement à l'aide du logiciel de calcul numérique Maple:

$$\sum_i^M \sum_j^N [K_{imjn} - \omega^2 M_{imjn}] A_{ij} = \sum_m^M \sum_n^N F_{mn} \quad (3.40)$$

Avec :

$$K_{imjn} = D_{11} I_{mi}^{22} J_{nj}^{00} + [D_{12} (I_{mi}^{20} J_{nj}^{02} + I_{mi}^{02} J_{nj}^{20}) + 4D_{66} I_{mi}^{11} J_{nj}^{11}] R^2 + D_{22} I_{mi}^{00} J_{nj}^{22} R^4 + \frac{Rabc^3}{24G_c^*} I_{mi}^{11} J_{nj}^{00} + \frac{R^2 a^2 c^3}{24G_c^*} I_{mi}^{00} J_{nj}^{11} + Ra^3 b (I_{mi}^{00} J_{nj}^{00} + I_{mi}^{00} J_{nj}^{00}) \quad (3.41)$$

$$M_{imjn} = 2b^3 \rho_{t,b} I_{mi}^{00} J_{nj}^{00} + b^3 \rho_c I_{mi}^{00} J_{nj}^{00} \quad (3.42)$$

$$F_{mn} = \frac{B^2bh}{\mu_0} \left[\frac{d_j}{2\pi R} \ln\left(\frac{x}{a-x}\right) I_{mn}^{20} + bI_{mn}^{10} \right] + \frac{B^2hd_j}{\mu_{ej}R} I_{mn}^{20} + B_r \times \nabla H \times V \quad (3.43)$$

Où K_{imjn} , M_{imjn} sont les matrices globales de rigidité et de masse respectivement, F_{mn} la force électromagnétique équivalente appliquée sur la plaque (Annexe A).

Comme application de la formulation générale développée précédemment, on considère dans ce cas, la plaque étudiée dans la partie expérimentale où elle est encastree à deux extrémités et libre aux deux autres extrémités.

3.4.1. Conditions aux frontières

Dans le cas d'une plaque encastree aux bords, $x=0$, $y=0$ et libre aux autres bords, $x=a$, $y=b$, les conditions aux frontières sont :

$$\text{Bords encastres } x = 0, y = 0 : w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (3.44)$$

$$\text{Bords libres } x = a, y = b : \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (3.45)$$

Comme fonctions d'approximations $X_m(x)$ et $Y_n(y)$ satisfaisant ces conditions aux frontières, on choisit les fonctions polynomiales de la forme :

$$X_m(x) = \frac{x^2}{\beta b^2} \left(\frac{x}{\beta b} - 1 \right)^2 \left(\frac{x}{\beta b} \right)^{m-1} \quad (3.46)$$

$$Y_n(y) = \frac{y^2}{\beta a^2} \left(\frac{y}{\beta a} - 1 \right)^2 \left(\frac{y}{\beta a} \right)^{n-1} \quad (3.47)$$

Il est clair que pour ces fonctions, les conditions d'encastrement sont satisfaites (3.44) ; mais pour le cas des bords libres (3.45), elles restent à vérifier en utilisant une approximation à trois termes pour $m=1$ et $n=1, 2, 3$.

Vérification pour $\beta=10^4$, $m = 1$ et $n = 1, 2, 3$ ([Annexe C](#)).

$$\frac{d^2 X_m}{dx^2} = \frac{d^3 X_m}{dx^3} = 0 \quad (3.48)$$

$$\frac{d^2 Y_n}{dy^2} = \frac{d^3 Y_n}{dy^3} = 0 \quad (3.49)$$

3.4.2. Approximation à trois termes

Dans le cas d'une approximation à trois termes, le déplacement transversal (3.27) est exprimé comme suit :

$$w(x, y) = X_1 Y_1 A_{11} + X_1 Y_2 A_{12} + X_1 Y_3 A_{13} \quad (3.50)$$

Donc, le système d'équations (3.29) se réduit à un système de trois équations. On pose $m = 1$ et on varie $n = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} & D_{11} I_{m1}^{22} J_{n1}^{00} + [D_{12} (I_{m1}^{20} J_{n1}^{02} + I_{m1}^{02} J_{n1}^{20}) + 4D_{66} I_{m1}^{11} J_{n1}^{11}] R^2 + D_{22} I_{m1}^{00} J_{n1}^{22} R^4 + \frac{Rabc^3}{24G_c^*} I_{m1}^{11} J_{n1}^{00} + \\ & \frac{R^2 a^2 c^3}{24G_c^*} I_{m1}^{00} J_{n1}^{11} + Ra^3 b (I_{m1}^{00} J_{n1}^{00} + I_{m1}^{00} J_{n1}^{00}) - \omega^2 (2b^3 \rho_{t,b} I_{m1}^{00} J_{n1}^{00} + b^3 \rho_c I_{m1}^{00} J_{n1}^{00}) \} A_{11} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & D_{11}I_{m1}^{22}J_{n2}^{00} + [D_{12}(I_{m1}^{20}J_{n2}^{02} + I_{m1}^{02}J_{n2}^{20}) + 4D_{66}I_{m1}^{11}J_{n2}^{11}]R^2 + D_{22}I_{m1}^{00}J_{n2}^{22}R^4 + \frac{Rabc^3}{24G_c^*}I_{m1}^{11}J_{n2}^{00} + \\
 & \frac{R^2a^2c^3}{24G_c^*}I_{m1}^{00}J_{n2}^{11} + Ra^3b(I_{m1}^{00}J_{n2}^{00} + I_{m1}^{00}J_{n2}^{00}) - \omega^2(2b^3\rho_{t,b}I_{m1}^{00}J_{n2}^{00} + b^3\rho_cI_{m1}^{00}J_{n2}^{00})\}A_{12} + \\
 & D_{11}I_{m1}^{22}J_{n3}^{00} + [D_{13}(I_{m1}^{20}J_{n3}^{02} + I_{m1}^{02}J_{n3}^{20}) + 4D_{66}I_{m1}^{11}J_{n3}^{11}]R^2 + D_{22}I_{m1}^{00}J_{n3}^{22}R^4 + \frac{Rabc^3}{24G_c^*}I_{m1}^{11}J_{n3}^{00} + \\
 & \frac{R^2a^2c^3}{24G_c^*}I_{m1}^{00}J_{n3}^{11} + Ra^3b(I_{m1}^{00}J_{n3}^{00} + I_{m1}^{00}J_{n3}^{00}) - \omega^2(2b^3\rho_{t,b}I_{m1}^{00}J_{n3}^{00} + b^3\rho_cI_{m1}^{00}J_{n3}^{00})\}A_{13} - \\
 & \frac{B^2bh}{\mu_0} \left[\frac{d_j}{2\pi R} \ln\left(\frac{x}{a-x}\right) I_{mn}^{20} + bI_{mn}^{10} \right] - \frac{B^2hd_j}{\mu_{ej}R} I_{mn}^{20} - B_r \times \nabla H \times V = 0
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$m=1, n=1$$

$$\begin{aligned}
 & D_{11}I_{11}^{22}J_{n1}^{00} + [D_{12}(I_{11}^{20}J_{11}^{02} + I_{11}^{02}J_{11}^{20}) + 4D_{66}I_{11}^{11}J_{11}^{11}]R^2 + D_{22}I_{11}^{00}J_{11}^{22}R^4 + \frac{Rabc^3}{24G_c^*}I_{11}^{11}J_{11}^{00} + \\
 & \frac{R^2a^2c^3}{24G_c^*}I_{11}^{00}J_{11}^{11} + Ra^3b(I_{11}^{00}J_{11}^{00} + I_{11}^{00}J_{11}^{00}) - \omega^2(2b^3\rho_{t,b}I_{11}^{00}J_{11}^{00} + b^3\rho_cI_{11}^{00}J_{11}^{00})\}A_{11} + \\
 & D_{11}I_{m1}^{22}J_{n2}^{00} + [D_{12}(I_{11}^{20}J_{12}^{02} + I_{11}^{02}J_{12}^{20}) + 4D_{66}I_{11}^{11}J_{12}^{11}]R^2 + D_{22}I_{11}^{00}J_{12}^{22}R^4 + \frac{Rabc^3}{24G_c^*}I_{11}^{11}J_{12}^{00} + \\
 & \frac{R^2a^2c^3}{24G_c^*}I_{11}^{00}J_{12}^{11} + Ra^3b(I_{11}^{00}J_{12}^{00} + I_{11}^{00}J_{12}^{00}) - \omega^2(2b^3\rho_{t,b}I_{11}^{00}J_{12}^{00} + b^3\rho_cI_{11}^{00}J_{12}^{00})\}A_{12} + \\
 & D_{11}I_{11}^{22}J_{13}^{00} + [D_{13}(I_{11}^{20}J_{13}^{02} + I_{11}^{02}J_{13}^{20}) + 4D_{66}I_{11}^{11}J_{13}^{11}]R^2 + D_{22}I_{11}^{00}J_{13}^{22}R^4 + \frac{Rabc^3}{24G_c^*}I_{11}^{11}J_{13}^{00} + \\
 & \frac{R^2a^2c^3}{24G_c^*}I_{11}^{00}J_{13}^{11} + Ra^3b(I_{11}^{00}J_{13}^{00} + I_{11}^{00}J_{13}^{00}) - \omega^2(2b^3\rho_{t,b}I_{11}^{00}J_{13}^{00} + b^3\rho_cI_{11}^{00}J_{13}^{00})\}A_{13} - \\
 & \frac{B^2bh}{\mu_0} \left[\frac{d_j}{2\pi R} \ln\left(\frac{x}{a-x}\right) I_{11}^{20} + bI_{11}^{10} \right] - \frac{B^2hd_j}{\mu_{ej}R} I_{11}^{20} - B_r \times \nabla H \times V = 0
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

$$m=1, n=2$$

$$\begin{aligned}
 & D_{11}I_{11}^{22}J_{21}^{00} + [D_{12}(I_{11}^{20}J_{21}^{02} + I_{11}^{02}J_{21}^{20}) + 4D_{66}I_{11}^{11}J_{21}^{11}]R^2 + D_{22}I_{11}^{00}J_{21}^{22}R^4 + \frac{Rabc^3}{24G_c^*}I_{11}^{11}J_{21}^{00} + \\
 & \frac{R^2a^2c^3}{24G_c^*}I_{11}^{00}J_{21}^{11} + Ra^3b(I_{11}^{00}J_{21}^{00} + I_{11}^{00}J_{21}^{00}) - \omega^2(2b^3\rho_{t,b}I_{11}^{00}J_{21}^{00} + b^3\rho_cI_{11}^{00}J_{21}^{00})\}A_{11} + \\
 & D_{11}I_{11}^{22}J_{22}^{00} + [D_{12}(I_{11}^{20}J_{22}^{02} + I_{11}^{02}J_{22}^{20}) + 4D_{66}I_{11}^{11}J_{22}^{11}]R^2 + D_{22}I_{11}^{00}J_{22}^{22}R^4 + \frac{Rabc^3}{24G_c^*}I_{11}^{11}J_{22}^{00} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{R^2 a^2 c^3}{24G_c^*} I_{11}^{00} J_{22}^{11} + Ra^3 b \left(I_{11}^{00} J_{22}^{00} + I_{11}^{00} J_{22}^{00} \right) - \omega^2 \left(2b^3 \rho_{t,b} I_{11}^{00} J_{22}^{00} + b^3 \rho_c I_{11}^{00} J_{22}^{00} \right) \} A_{12} + \\
 & D_{11} I_{11}^{22} J_{23}^{00} + [D_{13} (I_{11}^{20} J_{23}^{02} + I_{11}^{02} J_{23}^{20}) + 4D_{66} I_{11}^{11} J_{23}^{11}] R^2 + D_{22} I_{11}^{00} J_{23}^{22} R^4 + \frac{Rabc^3}{24G_c^*} I_{11}^{11} J_{23}^{00} + \\
 & \frac{R^2 a^2 c^3}{24G_c^*} I_{11}^{00} J_{23}^{11} + Ra^3 b \left(I_{11}^{00} J_{23}^{00} + I_{11}^{00} J_{23}^{00} \right) - \omega^2 \left(2b^3 \rho_{t,b} I_{11}^{00} J_{23}^{00} + b^3 \rho_c I_{11}^{00} J_{23}^{00} \right) \} A_{13} - \\
 & \frac{B^2 b h}{\mu_0} \left[\frac{d_j}{2\pi R} \ln \left(\frac{x}{a-x} \right) I_{12}^{20} + b I_{12}^{10} \right] - \frac{B^2 h d_j}{\mu_{ej} R} I_{12}^{20} - B_r \times \nabla H \times V = 0
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

$m=1, n=3$

$$\begin{aligned}
 & D_{11} I_{11}^{22} J_{31}^{00} + [D_{12} (I_{11}^{20} J_{31}^{02} + I_{11}^{02} J_{31}^{20}) + 4D_{66} I_{11}^{11} J_{31}^{11}] R^2 + D_{22} I_{11}^{00} J_{31}^{22} R^4 + \frac{Rabc^3}{24G_c^*} I_{11}^{11} J_{31}^{00} + \\
 & \frac{R^2 a^2 c^3}{24G_c^*} I_{11}^{00} J_{31}^{11} + Ra^3 b \left(I_{11}^{00} J_{31}^{00} + I_{11}^{00} J_{31}^{00} \right) - \omega^2 \left(2b^3 \rho_{t,b} I_{11}^{00} J_{31}^{00} + b^3 \rho_c I_{11}^{00} J_{31}^{00} \right) \} A_{11} + \\
 & D_{11} I_{11}^{22} J_{32}^{00} + [D_{12} (I_{11}^{20} J_{32}^{02} + I_{11}^{02} J_{32}^{20}) + 4D_{66} I_{11}^{11} J_{32}^{11}] R^2 + D_{22} I_{11}^{00} J_{32}^{22} R^4 + \frac{Rabc^3}{24G_c^*} I_{11}^{11} J_{32}^{00} + \\
 & \frac{R^2 a^2 c^3}{24G_c^*} I_{11}^{00} J_{32}^{11} + Ra^3 b \left(I_{11}^{00} J_{32}^{00} + I_{11}^{00} J_{32}^{00} \right) - \omega^2 \left(2b^3 \rho_{t,b} I_{11}^{00} J_{32}^{00} + b^3 \rho_c I_{11}^{00} J_{32}^{00} \right) \} A_{12} + \\
 & D_{11} I_{11}^{22} J_{33}^{00} + [D_{13} (I_{11}^{20} J_{33}^{02} + I_{11}^{02} J_{33}^{20}) + 4D_{66} I_{11}^{11} J_{33}^{11}] R^2 + D_{22} I_{11}^{00} J_{33}^{22} R^4 + \frac{Rabc^3}{24G_c^*} I_{11}^{11} J_{33}^{00} + \\
 & \frac{R^2 a^2 c^3}{24G_c^*} I_{11}^{00} J_{33}^{11} + Ra^3 b \left(I_{11}^{00} J_{33}^{00} + I_{11}^{00} J_{33}^{00} \right) - \omega^2 \left(2b^3 \rho_{t,b} I_{11}^{00} J_{33}^{00} + b^3 \rho_c I_{11}^{00} J_{33}^{00} \right) \} A_{13} - \\
 & \frac{B^2 b h}{\mu_0} \left[\frac{d_j}{2\pi R} \ln \left(\frac{x}{a-x} \right) I_{13}^{20} + b I_{13}^{10} \right] - \frac{B^2 h d_j}{\mu_{ej} R} I_{13}^{20} - B_r \times \nabla H \times V = 0
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

3.4.3. Résultats numériques et discussions

Les tables (3.1, 3.2) présentent les propriétés mécaniques nécessaires des matériaux utilisées dans le code de calcul Matlab et simulation par le logiciel Abaqus. Certaines propriétés mécaniques sont issues des essais expérimentaux au laboratoire de Physique de la Matière Condensée (LPMC), les autres propriétés sont tirées directement de la littérature [113,114].

Table 3.1. Propriétés mécaniques et électriques

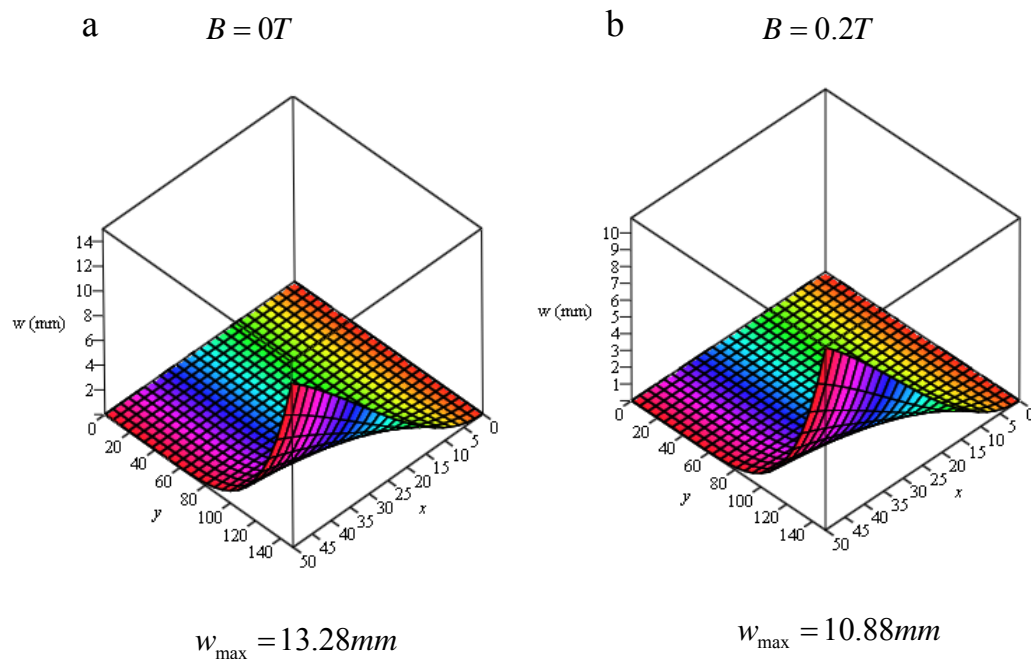
propriétés du matériel	$\rho \left(\frac{kg}{m^3} \right)$	E (MPa)	ν	μ_{ej} (Hm^{-1})
Aluminium	2700	72000	0.34	
Elastomer	1100	1.7	0.44	1.2566650×10^{-6}

Table 3.2. Propriétés rhéologiques de l'élastomère

Propriété Expérimentales de l'élastomère magnétorhéologique							
$B = 0T$		$B = 0.2T$		$B = 0.35T$		$B = 0.5T$	
G' (MPa)	G'' (MPa)	G' (MPa)	G'' (MPa)	G' (MPa)	G'' (MPa)	G' (MPa)	G'' (MPa)
1.6	0.33	1.76	0.50	1.93	0.54	2.07	0.35

Les réponses vibratoires de la plaque sont ensuite déterminées en introduisant les diverses valeurs des intégrales (3.38) et (3.39), ainsi que les propriétés mécaniques et électriques des matériaux constituant la plaque, en variant le champ magnétique B .

Les résultats de simulation du premier mode de déformation c'est-à-dire pour $m = n = 1$, donnée par la fonction d'approximation des déplacements (3.27) et les valeurs de déformation maximale pour chaque valeur de champ magnétique sont données en Fig.3.2.



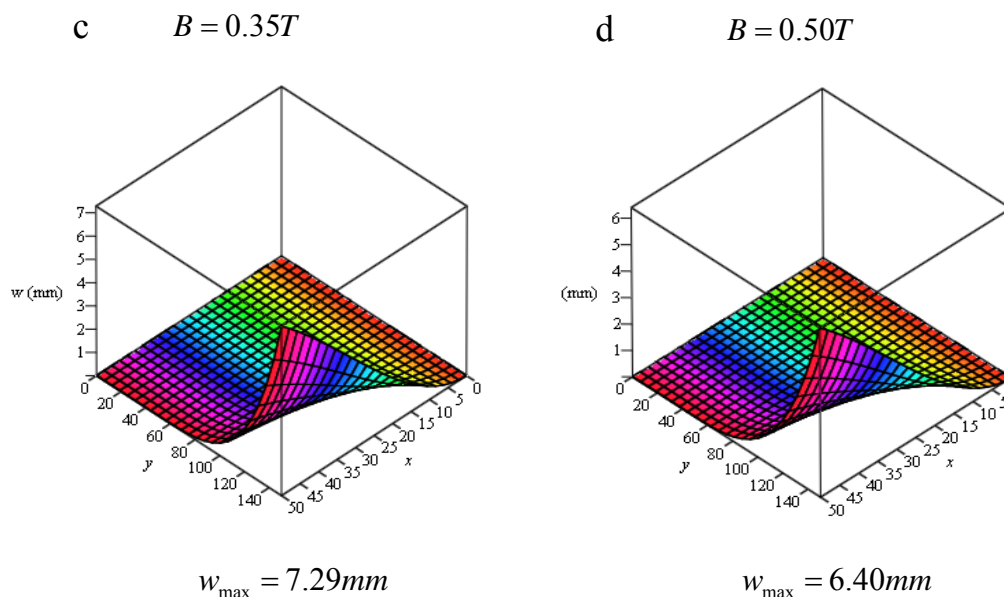


Fig.3.2. Mode de déformation en fonction du champ magnétique. (a) 0T, (b) 0.2T, (c) 0.35T, (d) 0.5T

La variation de l'amplitude de la plaque en fonction du rapport $R = \frac{a}{b}$ où R varie de $\frac{1}{3}$ à 1 est reporté sur la Fig.3.3. On observe que l'allure des courbes est pratiquement linéaire pour le rapport $R \leq 0.85$ où la déformation converge vers zéro au niveau des côtés encastres de la plaque et croit rapidement d'une manière non linéaire pour le rapport compris entre $0.85 \leq R \leq 1$ où l'amplitude converge vers une valeur maximale au coin des côtés libres.

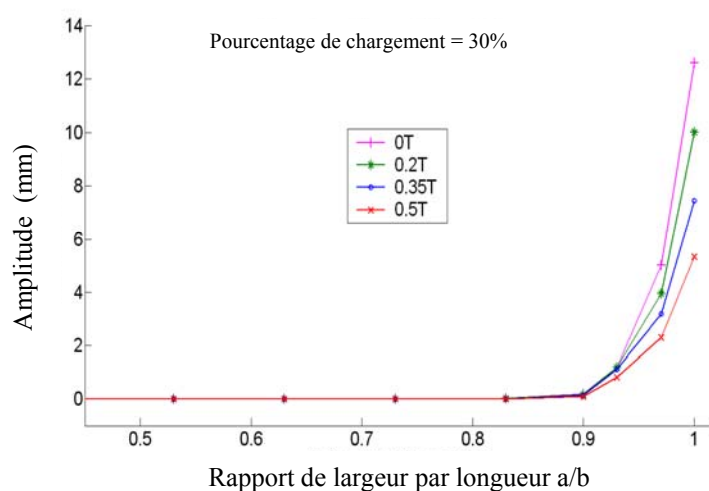


Fig.3.3. Variation de l'amplitude en fonction du rapport R

La Fig.3.4 présente la variation de l'amplitude en fonction des fréquences fondamentales de la plaque pour différentes valeurs du champ magnétique. On voit que l'amplitude a une valeur maximale de 13.21mm pour un champ magnétique de 0T ; elle a une valeur maximale de 5.74mm pour un champ magnétique égale 0.5T ; ce qui donne une valeur d'atténuation de

l'amplitude de 7.47mm. À partir de la fréquence fondamentale de 15Hz, l'amplitude vibratoire de la plaque diminue très rapidement.

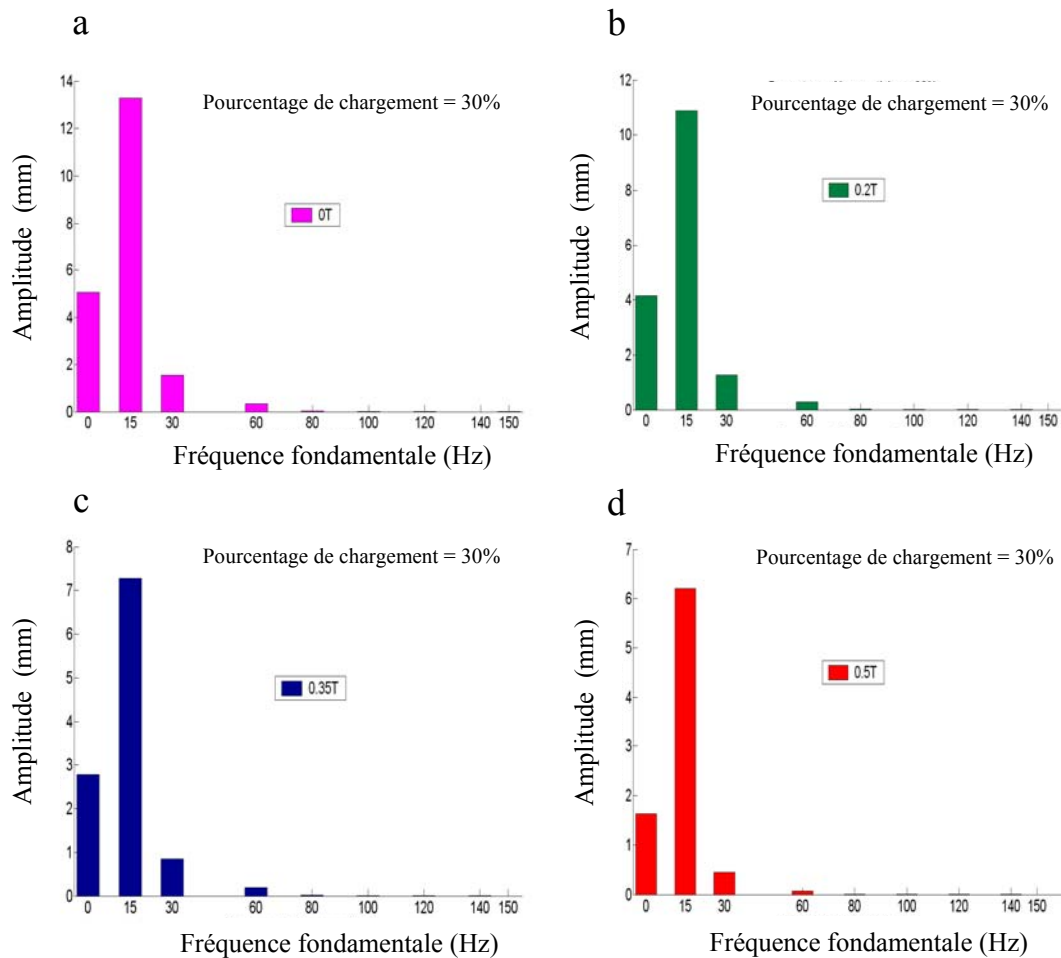


Fig.3.4. Variation de l'amplitude en fonction de la fréquence fondamentale à différentes valeurs du champ magnétique

3.5. Simulation numérique par la méthode des éléments finis

Cette deuxième partie de l'étude est consacrée à la simulation numérique par la méthode des éléments finis de la plaque sandwich avec le logiciel Abaqus. Dans le but de tester la fiabilité de notre modèle viscoélastique à module complexe constant est reconduite ici en présence d'une loi viscoélastique du cœur dépendant fortement de la fréquence et induisant un amortissement élevé. Pour cela, l'élastomère choisi pour l'huile de silicone RTV 141 dont les lois d'évolution des composantes du module complexe G^* du modèle de Maxwell généralisé, sont données par les relations (1.25) et (1.26).

3.5.1. Etapes de simulation par Abaqus

La plaque simulée par le logiciel Abaqus, est similaire à la plaque étudiée par la méthode numérique de Ritz, les propriétés élastiques des deux peaux en aluminium [table 3.1](#), et les propriétés élastiques et rhéologiques sont données en fonction du champ magnétique [table 3.2](#). Pour aboutir aux résultats numériques, les étapes accomplies sont résumées dans l'organigramme suivant [Fig.3.5](#):

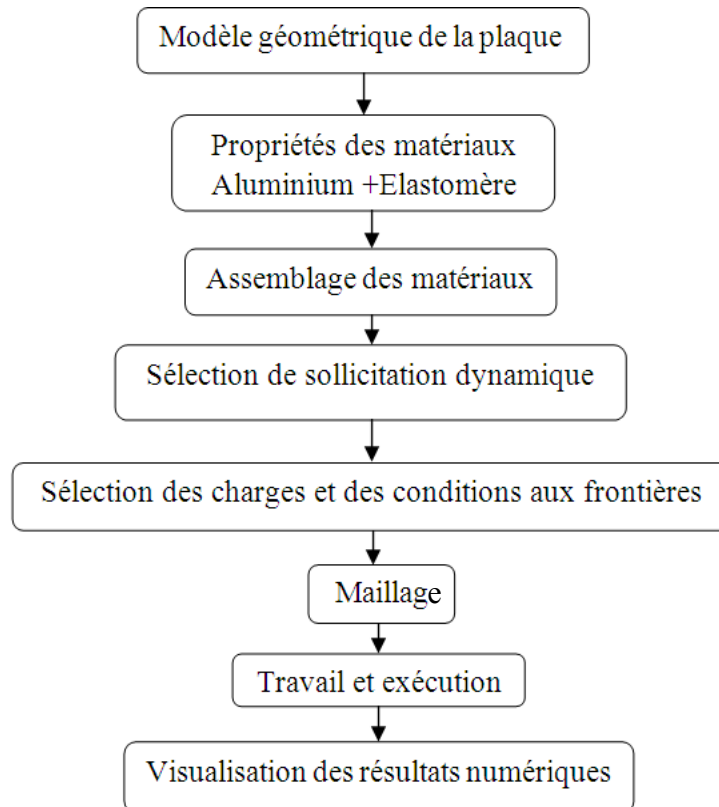


Fig.3.5. Organigramme de simulation avec Abaqus

3.5.2. Modèle de plaque

La simulation de réponse vibratoire de la plaque par le code de calcul Abaqus a pour but de mettre en évidence les résultats obtenus par la méthode d'approximation de Ritz présentés dans la section précédente, les résultats trouvés par l'étude expérimentale seront abordés dans la section prochaine afin de faire une comparaison entre les résultats des trois méthodes et de vérifier la fiabilité du modèle traité. Pour cela, on a simulé le même modèle de la plaque utilisé dans la partie expérimentale, représentée par la [Fig.3.6](#).

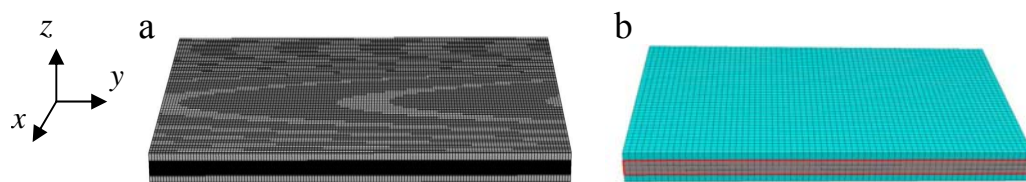


Fig.3.6. Modèle géométrique de la plaque sous Abaqus, a) Sans maillage b) Avec maillage

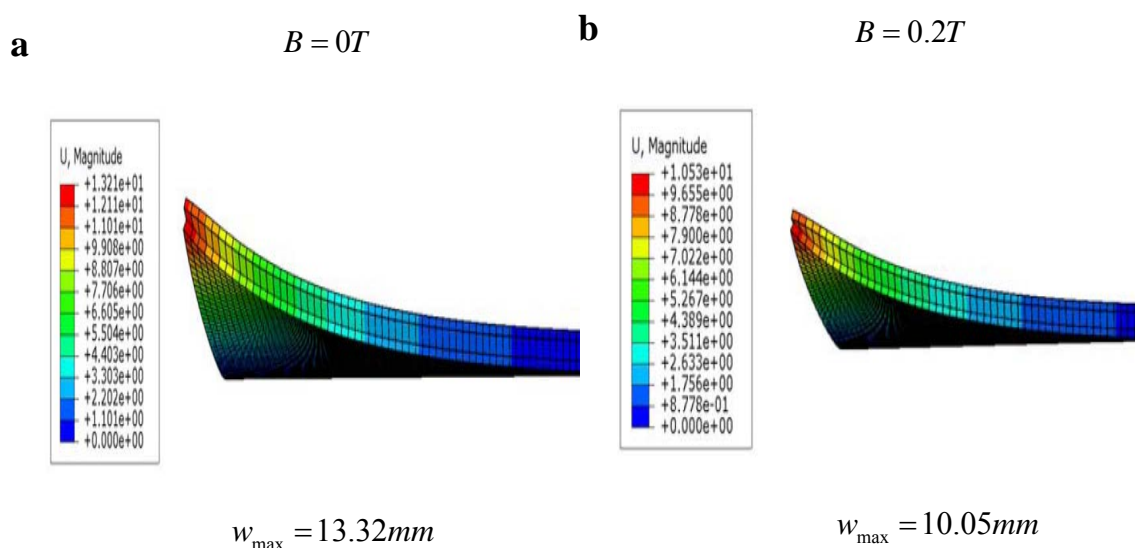
Les paramètres de la discrétisation par la méthode des éléments finis en utilisant un élément hexaédrique à huit nœuds sont présentés dans la [table 3.3](#).

Table 3.3. Données de discrétisation par MEF

Nombre des éléments	Nombre des nœuds	Nombre Total des variables
9900	20604	61812

3.5.3. Résultats numériques et discussions

La [Fig.3.7](#) montre le maillage déformé. On a implicitement choisi l'axe vertical pour la visualisation des déformations aux nœuds. On remarque que le déplacement maximal est aux nœuds du coin des cotés libres de la plaque, ce qui corrobore la déformation maximale. On constate aussi que l'amplitude a une valeur maximale de 13.32mm pour un champ magnétique de 0T



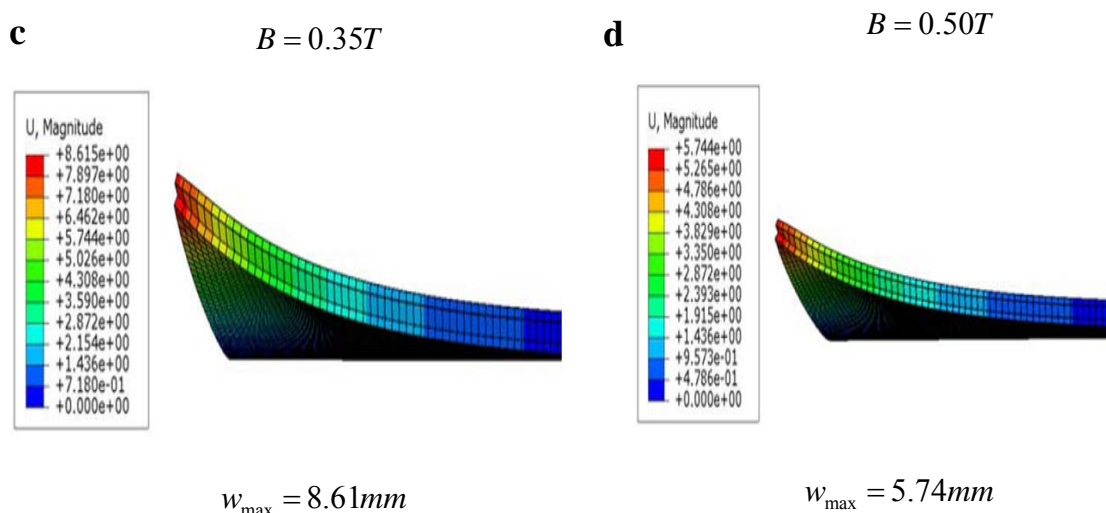


Fig.3.7. Déformation du mode fondamental de la plaque, (a) 0T, (b) 0.2T, (c) 0.35T, (d) 0.5T

La variation d'amplitude de la plaque en fonction du rapport $R = \frac{a}{b}$ où R varie de $\frac{1}{3}$ à 1 est présentée sur la Fig.3.8. Elle est obtenue par la méthode des éléments finis à l'aide du code de calcul Abaqus. On remarque que la variation de la géométrie de la plaque influe sur l'amplitude maximale. On constate aussi une coïncidence entre les courbes à différents champs magnétiques pour $R = \frac{1}{3}$ lorsque la plaque prend une forme géométrique rectangulaire. Par contre on remarque une divergence entre les courbes pour un rapport $R = 1$ lorsque la plaque a la forme géométrique carrée.

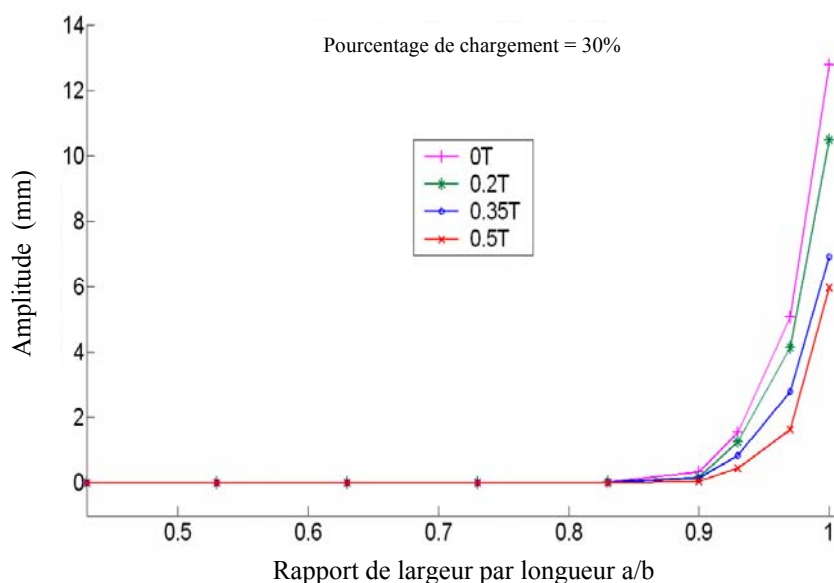


Fig.3.8. Variation de l'amplitude en fonction de rapport R

La Fig.3.9 présente la variation de l'amplitude en fonction des fréquences fondamentales de la plaque pour différentes valeurs du champ magnétique. On voit que l'amplitude a une valeur maximale de 13.28mm pour une valeur du champ magnétique de 0T ; elle a une valeur maximale de 6.40mm pour la valeur du champ magnétique de 0.5T ; il en résulte une valeur d'atténuation de l'amplitude de 6.88mm.

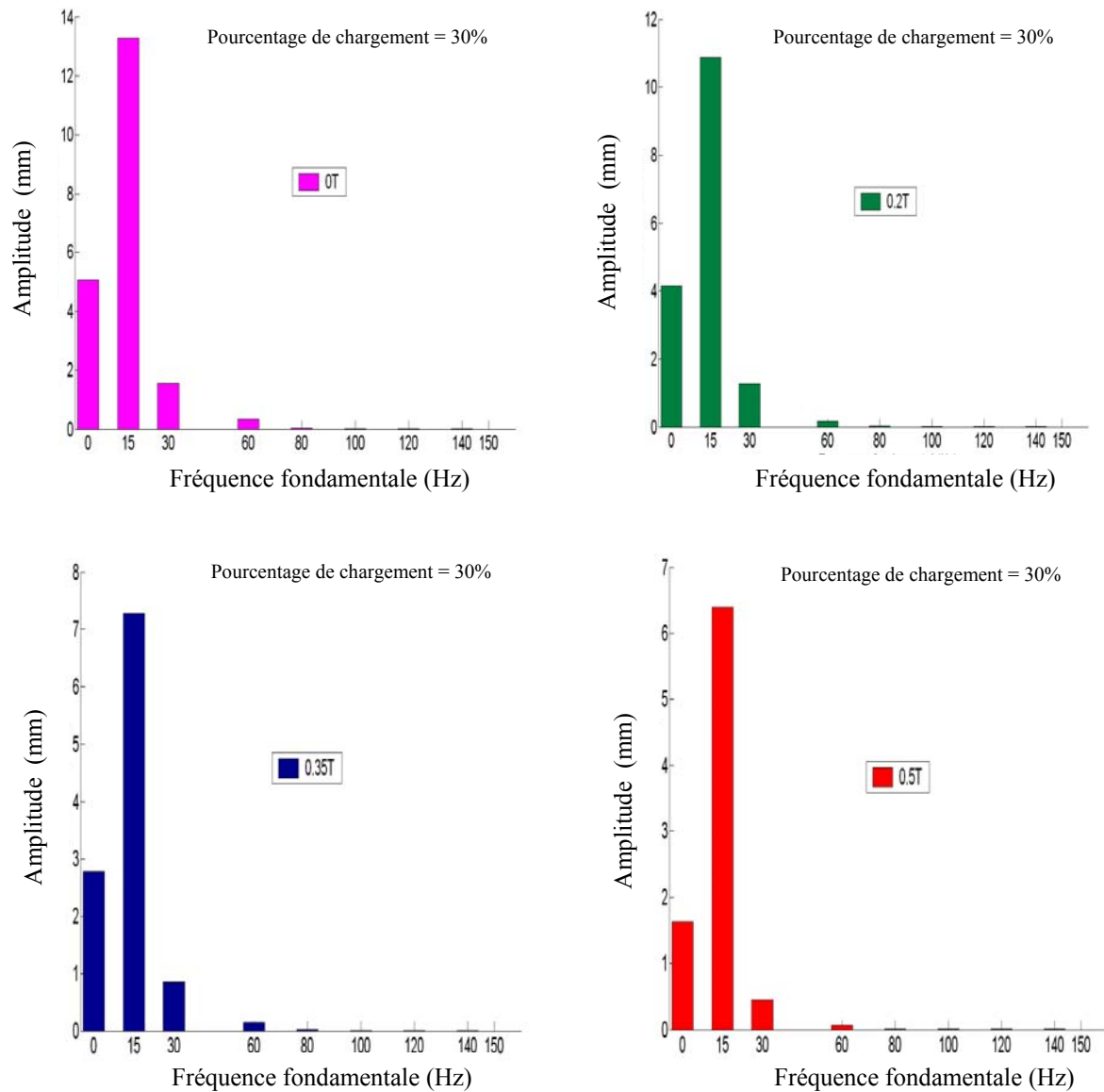


Fig.3.9. Variation de l'amplitude en fonction de la fréquence fondamentale à différente valeur du champ magnétique

Les résultats de la simulation de l'influence du champ magnétique sur le facteur de perte d'énergie en fonction des fréquences sont représentés par la Fig.3.10.

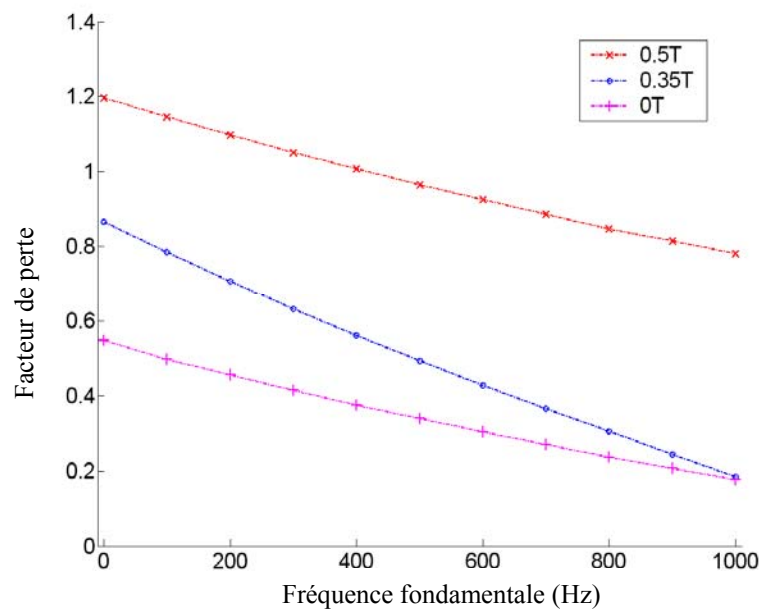


Fig.3.10. Variation du facteur de perte d'énergie en fonction des fréquences

Ces résultats montrent une importante influence du champ magnétique sur le facteur de perte d'énergie. On observe que la courbe de simulation pour un champ magnétique nul est distincte des courbes de simulation pour le champ magnétique de 0.35T et 0.5T. Le facteur de perte d'énergie diminue en fonction des fréquences fondamentales et augmente en fonction du champ magnétique.

3.6. Conclusion

Dans ce chapitre, on a développé une formulation analytique pour décrire le comportement vibratoire des plaques magnétorhéologique puis on a utilisé la méthode numérique de Ritz pour résoudre les problèmes de vibrations non linéaires forcées en tenant compte de l'amortissement structural des plaques. Ces plaques sont soumises à des excitations magnétiques. Cette méthode itérative, menant à une technique de continuation a permis d'obtenir les courbes non linéaires de résonance sur n'importe quel intervalle désiré des amplitudes. Les résultats numériques montrent une bonne correspondance avec les résultats issus de code de calcul (Abaqus) et ceci pour plusieurs valeurs de la fréquence.

CHAPITRE 4

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE ET COMPARAISON DES
RÉSULTATS

4.1. Introduction

Ce dernier chapitre comprend en premier lieu un volet expérimental qui concerne la caractérisation dynamique en cisaillement d'un élastomère chargé par 30% de particules micrométriques de fer soumis à différentes intensités du champ magnétique. Plusieurs essais ont été réalisés afin d'obtenir une meilleure réticulation des chaînes de l'élastomère. Un second volet expérimental est consacré à l'élaboration de trois plaques sandwichs ayant un noyau en élastomère chargé par différents pourcentages de microparticules de fer (20%, 30%, 40%) sous une intensité du champ magnétique constante. La troisième partie de ce chapitre est basé sur une étude qui concerne la caractérisation expérimentale et la détermination de la réponse dynamique en cisaillement sous différentes intensités du champ magnétique. Cette structure élaborée est utilisée dans plusieurs domaines de pointe, surtout pour l'atténuation des ondes vibratoires et l'isolation vibroacoustique. Et enfin une étude comparative avec un modèle éléments finis sous code de calcul Abaqus et une approche numérique par la méthode de Ritz est discutée.

4.2. Élaboration des élastomères

L'élastomère est élaboré par les étapes suivantes:

- 1- On mélange l'huile de silicone et le polymère RTV141A dans un récipient et on procède à un mixage manuel pendant 10 minutes pour l'obtention d'un élastomère sous forme de gel avec une bonne homogénéisation. Un deuxième récipient contenant une quantité de particules de fer de taille micrométrique pour charger l'élastomère est mis à disposition.
- 2- Une quantité de ce gel obtenu formé de silicone et du RTV141A mixée pendant 30 minutes avec une quantité de particules de fer jusqu'à l'obtention d'une pâte homogène. Par ce procédé on a élaboré un élastomère chargé à 30% de particules ferromagnétique.
- 3- On procède au dégazage de la pâte obtenue sous vide pendant 10 minutes, afin d'éliminer les bulles d'air infiltrées lors du mixage, pour avoir une structure saine à l'expérimentation. L'élastomère obtenu est conservé hermétiquement à basse température.

Les ingrédients de spécimen en élastomère magnétorhéologique de forme rectangulaire de 30mm de longueur, 28mm de largeur et 2mm d'épaisseur chargé à 30% de particules ferromagnétiques de son volume total, sont donnés par la [Table 4.1](#). Des essais expérimentaux en fonction de la déformation en cisaillement à fréquence constante de 100 Hz sont réalisés par le viscoanalyseur MetraviB DMA⁺ 450 donné par la [Fig.4.1](#) ; afin de déterminer les paramètres rhéologiques du spécimen. Les valeurs des modules conservatif et dissipatif G' et G'' obtenues sans ou avec le champ magnétique sont données dans la [table 7 \(Annexe B\)](#).

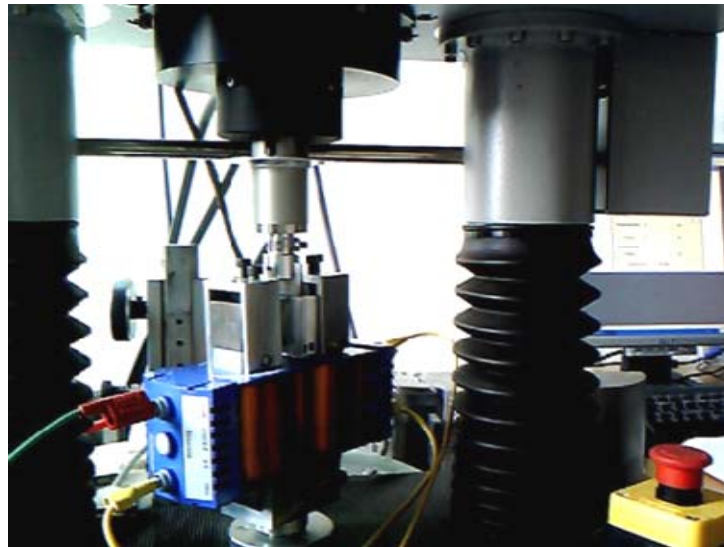
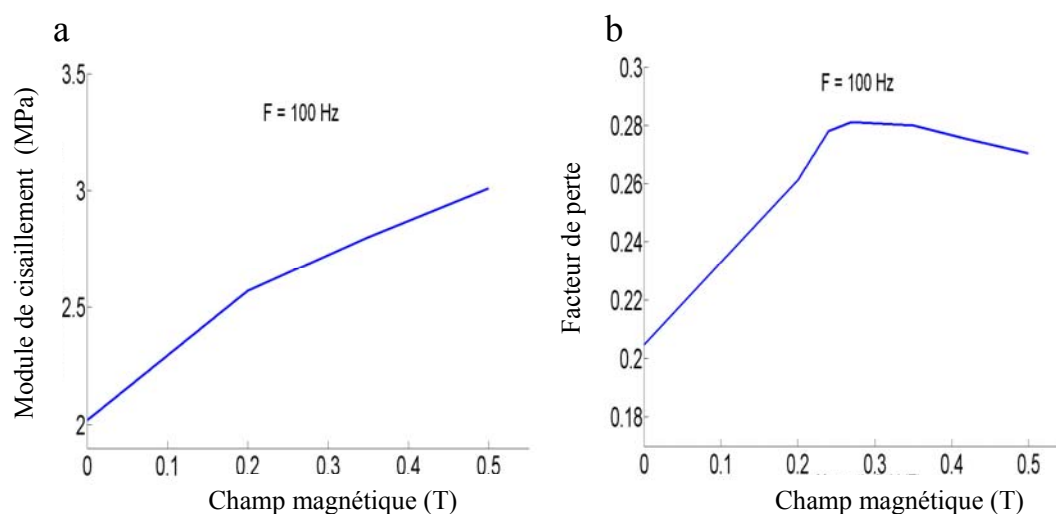


Fig.4.1. viscoanalyseur Metravib DMA⁺ 450

Table 4.1. Constituant de l'élastomère chargé de 30%
Plaque à 30% des particules ferromagnétiques

Temps de réticulation en heure	m _{huile de silicone} (g)	m _{RTV(A)} (g)	m _{Fe} (g)	m _{RTV(B)} (g)
20h30	1.064g	1.0385g	7.559	0.104

Le module de cisaillement et le facteur de perte de MRE sous divers champs magnétiques, avec une fréquence de 100Hz ont été mesurés. Les résultats expérimentaux (Fig.4.2 (a) et (c)) prouvent que le module complexe et la rigidité de MRE augmentent avec l'intensité du champ magnétique. Par contre le facteur de perte augmente puis légèrement diminue (Fig.4.2 (b)). Ce qui permet de déduire lorsqu'on augmente l'intensité du courant, que l'élastomère magnétorhéologique offre de meilleures propriétés amortissement-rigidité.



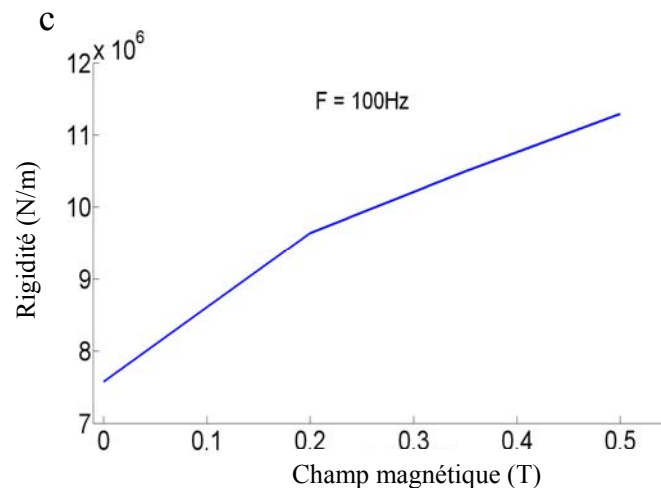


Fig.4.2. Influence du champ magnétique sur le module de cisaillement, facteur de perte et rigidité avec une fréquence constante de 100 Hz

Les résultats trouvés sont présentés dans la Fig.4.3 (a,b). On constate que l'allure des courbes du module conservatif et du module dissipatif décroît fortement en fonction de l'accroissement du taux de déformation au cisaillement sous l'influence du champ magnétique. L'impact du champ magnétique est très important sur ces modules surtout pour les courbes associées aux valeurs du champ magnétique de 0.35T et 0.5T. Pour le champ magnétique $B=0.35T$, le taux de cisaillement décroît d'une valeur de $0.0049s^{-1}$ à une valeur de $0.048s^{-1}$ et pour le champ magnétique $B=0.5T$, le taux de cisaillement croît d'une valeur de $0.0048s^{-1}$ à une valeur de $0.049s^{-1}$ on conclut donc que l'élastomère au début et sans l'influence du champ magnétique représente un comportement viscoélastique non linéaire, mais ce degré de non linéarité augmente avec le du champ magnétique.

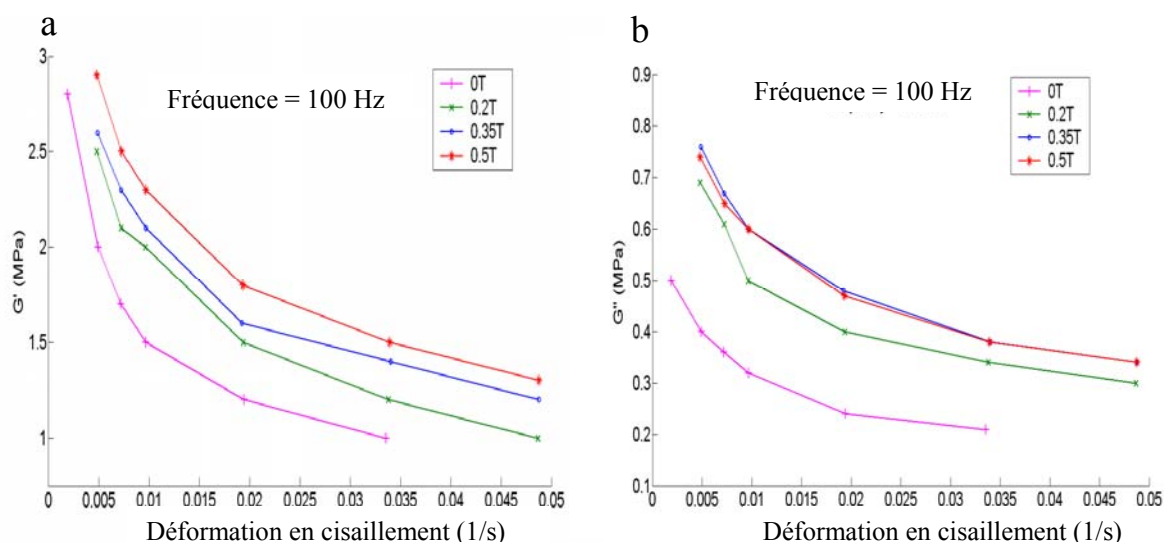


Fig.4.3. Influence du champ magnétique sur les propriétés rhéologiques de l'élastomère. (a) module conservatif G' en fonction de déformation en cisaillement, (b) module dissipatif G'' en fonction du taux de cisaillement

L'influence du champ magnétique sur le facteur de perte d'énergie en fonction des modules conservatif et dissipatif est reportée sur la Fig.4.4 (a,b). On observe que l'impact du champ magnétique sur le facteur de perte en fonction des modules conservatif G' et dissipatif G'' est très important. L'augmentation du facteur de perte d'énergie n'est pas proportionnelle à l'intensité du champ magnétique.

Le facteur de perte d'énergie croît d'une valeur de l'ordre de 0.08 pour un module conservatif G' de 2 MPa pour un champ magnétique de 0.35T; et d'une valeur de l'ordre de 0.08 pour un module dissipatif G'' de 0.4 MPa pour un champ magnétique de 0.2T.

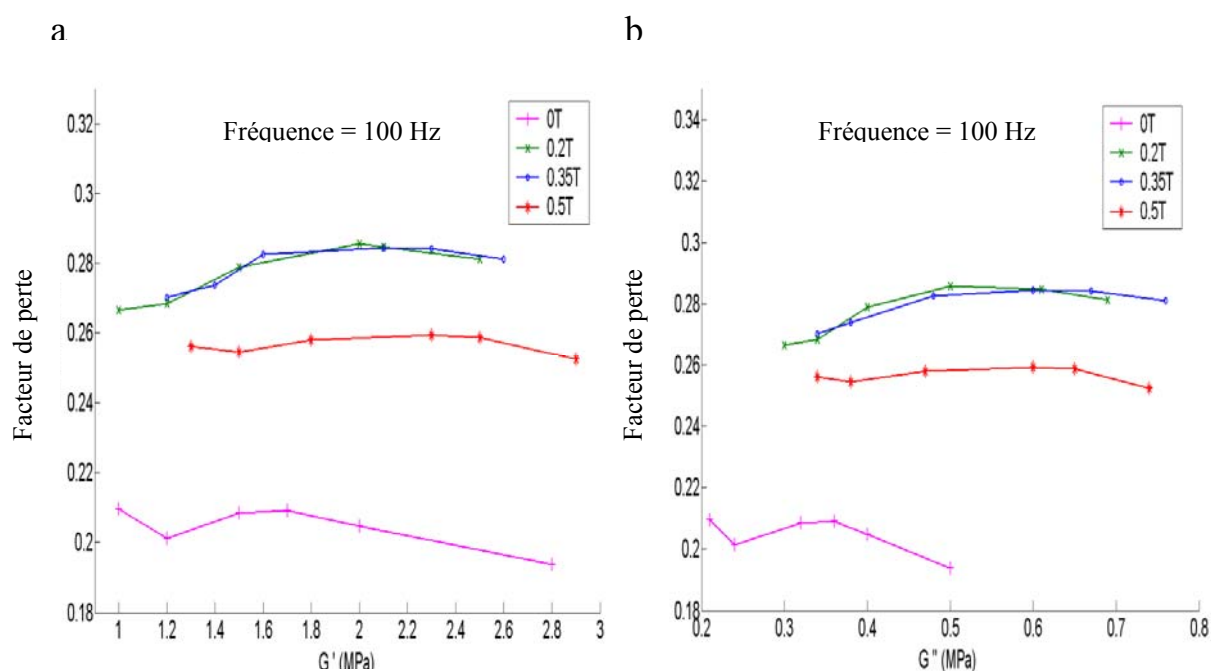


Fig.4.4. Influence des Propriétés rhéologiques et du champ magnétique sur le facteur de perte d'énergie. a) facteur de perte en fonction du module conservatif G' , b) facteur de perte en fonction du module dissipatif G''

4.3. Élaboration des plaques sandwichs magnétorhéologiques

Après avoir évalué l'influence du champ magnétique sur l'élastomère chargé à 30%, et compte tenu d'un manque de travaux de recherche bibliographique sur les plaques sandwichs magnétorhéologiques, on a trouvé un intérêt particulier à étudier l'influence du champ magnétique sur le comportement vibratoire de ces plaques. L'objectif est d'élaborer des plaques sandwichs avec différents chargements de l'élastomère à 20%, 30% et 40% de particules ferromagnétiques de taille micrométrique alignées avant réticulation sous l'effet d'un champ magnétique constant qui donne une structure dont les propriétés viscoélastiques sont modulables en fonction de la fraction volumique des ces particules et l'intensité du champ magnétique, et de tester expérimentalement leurs réponses vibratoires.

4.3.1. Mise en œuvre de l'élaboration des plaques

Un moule en caoutchouc de forme rectangulaire de longueur 15 cm, de largeur 5cm et d'épaisseur 2 mm est collé sur la peau inférieure en aluminium de la plaque. On injecte la pate de l'élastomère dont l'élaboration est décrite dans la section 4.2, de façon à contenir le volume du moule. On colle la peau supérieure sur l'élastomère pour éviter le décollement. La plaque obtenue [Fig.3.1](#) est soumise à un champ magnétique constant suffisant pour agir sur l'alignement des particules ferromagnétiques jusqu'à la réticulation complète de l'élastomère. On utilise uniquement les appareils 1, 3, 6,10 de la [Fig.4.5](#).

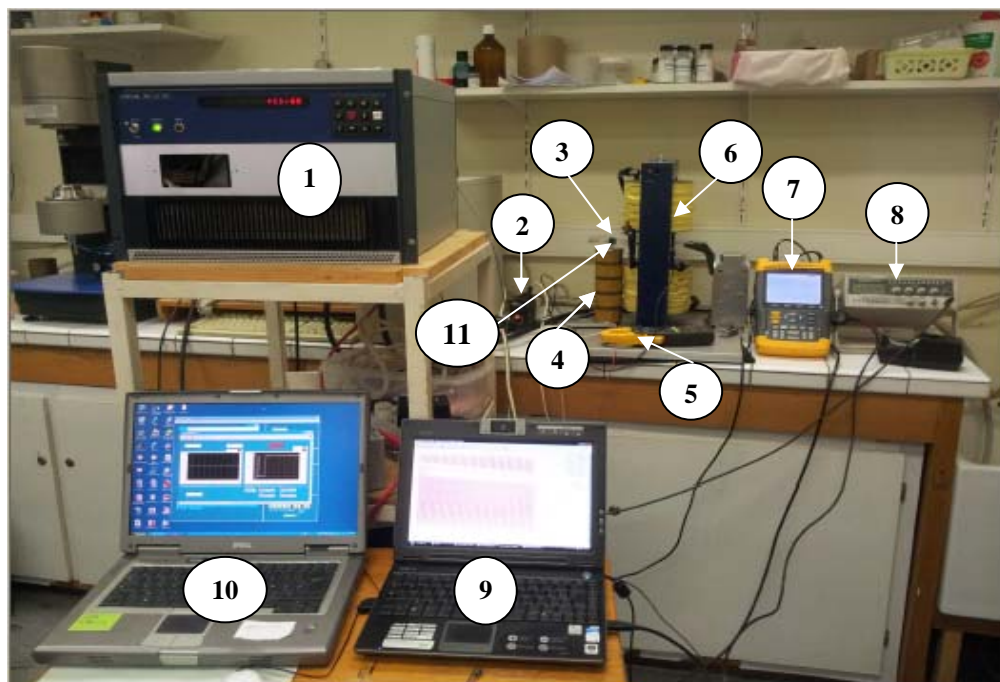


Fig.4.5. Dispositif expérimental de détermination de la réponse vibratoire

Ce dispositif est constitué de:

1. Variateur du champ magnétique.
2. Accéléromètre.
3. Plaque magnétorhéologique.
4. Bobine de génération de force électromagnétique.
5. Appareil de mesure du champ magnétique
6. Bobines de génération du champ magnétique.
7. Oscilloscope numérique.
8. Générateur des fréquences.
9. Micro-ordinateur.

10. Micro-ordinateur.

11. aimant

4.4. Résultats expérimentaux et discussions

4.4.1. Réponse vibratoire de la plaque chargée à 30%

La Fig.4.6 présente la variation de l'amplitude en fonction des fréquences de résonance de la plaque sous l'influence d'un champ magnétique allant de 0T à 0.5T. On observe un accroissement rapide de l'amplitude à une valeur crête puis décroît très rapidement à une valeur pratiquement nulle. Pour un champ magnétique de 0.5T l'amplitude est maximale 11.6mm pour une valeur de fréquence de 12.5Hz, et la valeur voisine de l'amplitude maximale a pour valeur 0.2mm; ce qui résulte une atténuation brusque d'amplitude due à l'augmentation rapide de l'amortissement.

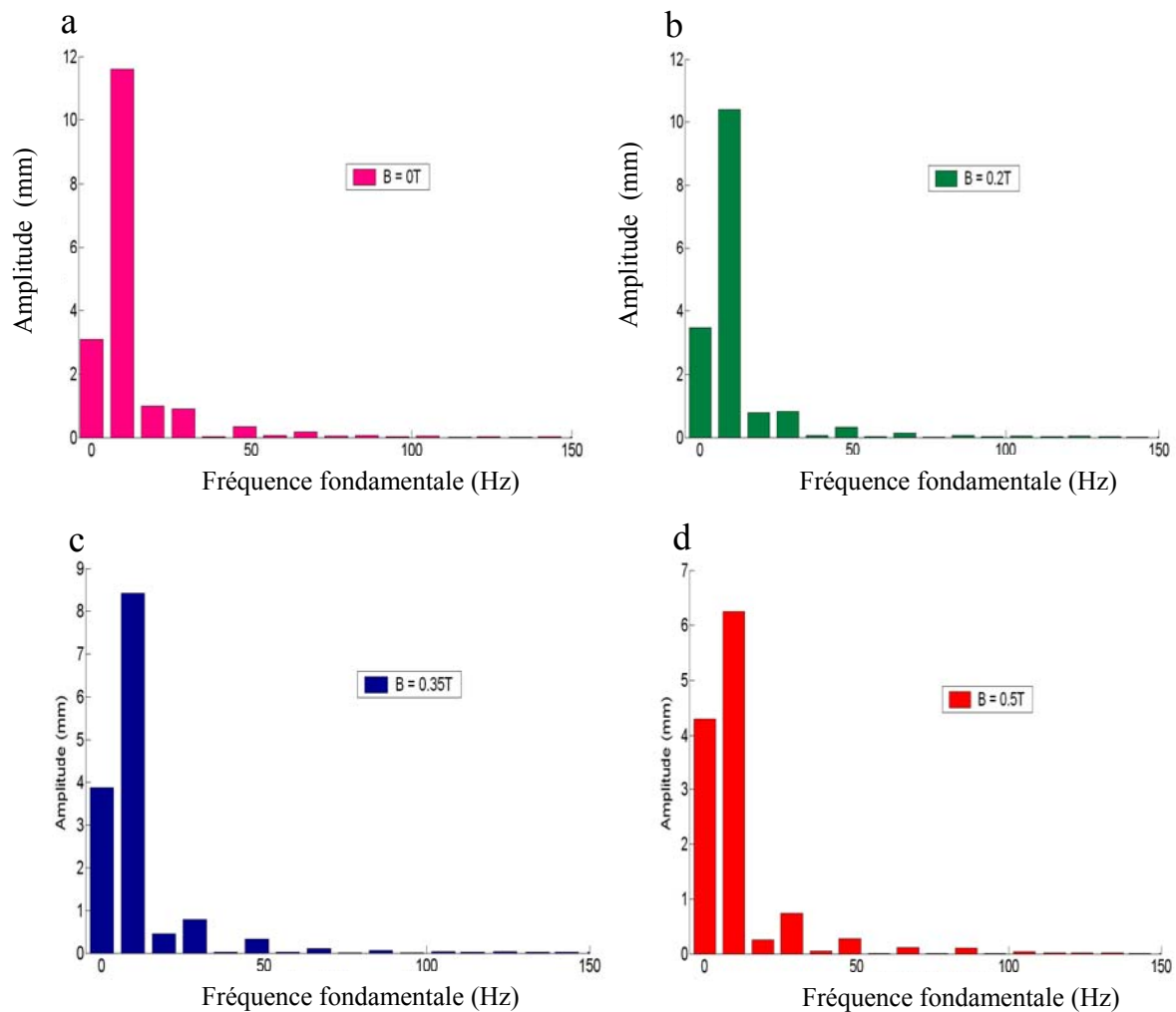


Fig.4.6. Variation de l'amplitude de vibration en fonction de fréquence fondamentale. (a) 0T, (b) 0.2T, (c) 0.35T, (d) 0.5T

La Fig.4.7 montre la variation du facteur de perte d'énergie en fonction des fréquences de résonnance sous l'influence du champ magnétique qui a pour valeurs 0T, 0.35T et 0.5T. Ces résultats montrent une influence importante du champ magnétique sur le facteur de perte d'énergie. On observe que la courbe pour un champ magnétique nul est distincte des courbes de simulation pour le champ magnétique de 0.35T et 0.5T. On remarque que le facteur de perte d'énergie diminue en fonction des fréquences fondamentales et augmente en fonction du champ magnétique.

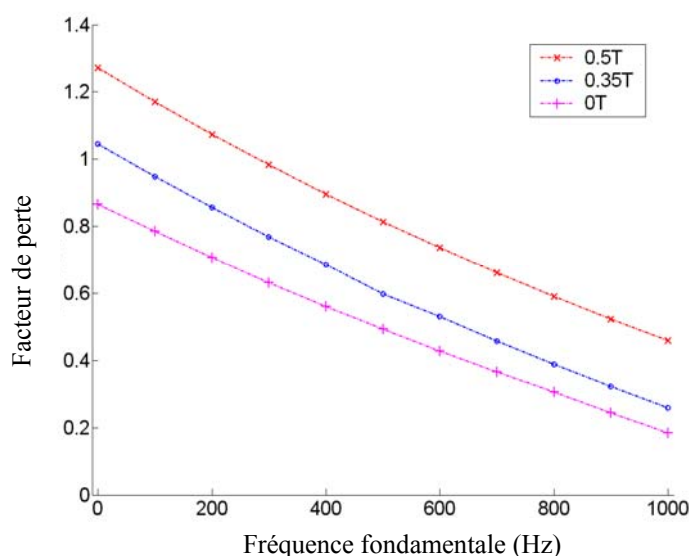


Fig.4.7. Variation du facteur de perte en fonction de fréquence pour différentes valeurs du champ magnétique

4.4.2. Réponse vibratoire des plaques à différents chargements

Les constituants de l'élastomère magnétorhéologique des plaques chargés à 20% à 30% et 40% des particules de fer où les dimensions sont identiques à celle de la plaque de 30%, sont donnés par la Table 4.2.

Table 4.2. Constituants de l'élastomère chargé par différents pourcentages

Temps de réticulation en heure	m _{huile de silicone} (g)	m _{RTV(A)} (g)	m _{Fe} (g)	m _{RTV(B)} (g)
Plaque à 20% des particules ferromagnétiques				
15h00	1.21g	1.187g	5.039	1.187
Plaque à 30% des particules ferromagnétiques				
20h30	1.064g	1.0385g	7.559	0.104
Plaque à 40% des particules ferromagnétiques				
22h00	0.912g	0.890g	10.08	0.089

La Fig.4.8 représente la variation de l'amplitude en fonctions des fréquences de résonance, données avec un champ magnétique variable et à différents taux de chargement de l'élastomère par les particules de fer. On remarque que l'amplitude diminue nettement avec l'augmentation du taux de chargement. On observe aussi que pour un champ magnétique de 0T, les trois plaques possèdent pratiquement la même valeur d'amplitude Fig.4.8.a, par contre on remarque une différence importante entre les amplitudes sur les Fig.4.8.b-c-d pour la même valeur du champ magnétique, on constate donc que l'augmentation de taux de chargement diminue l'amplitude de vibration.

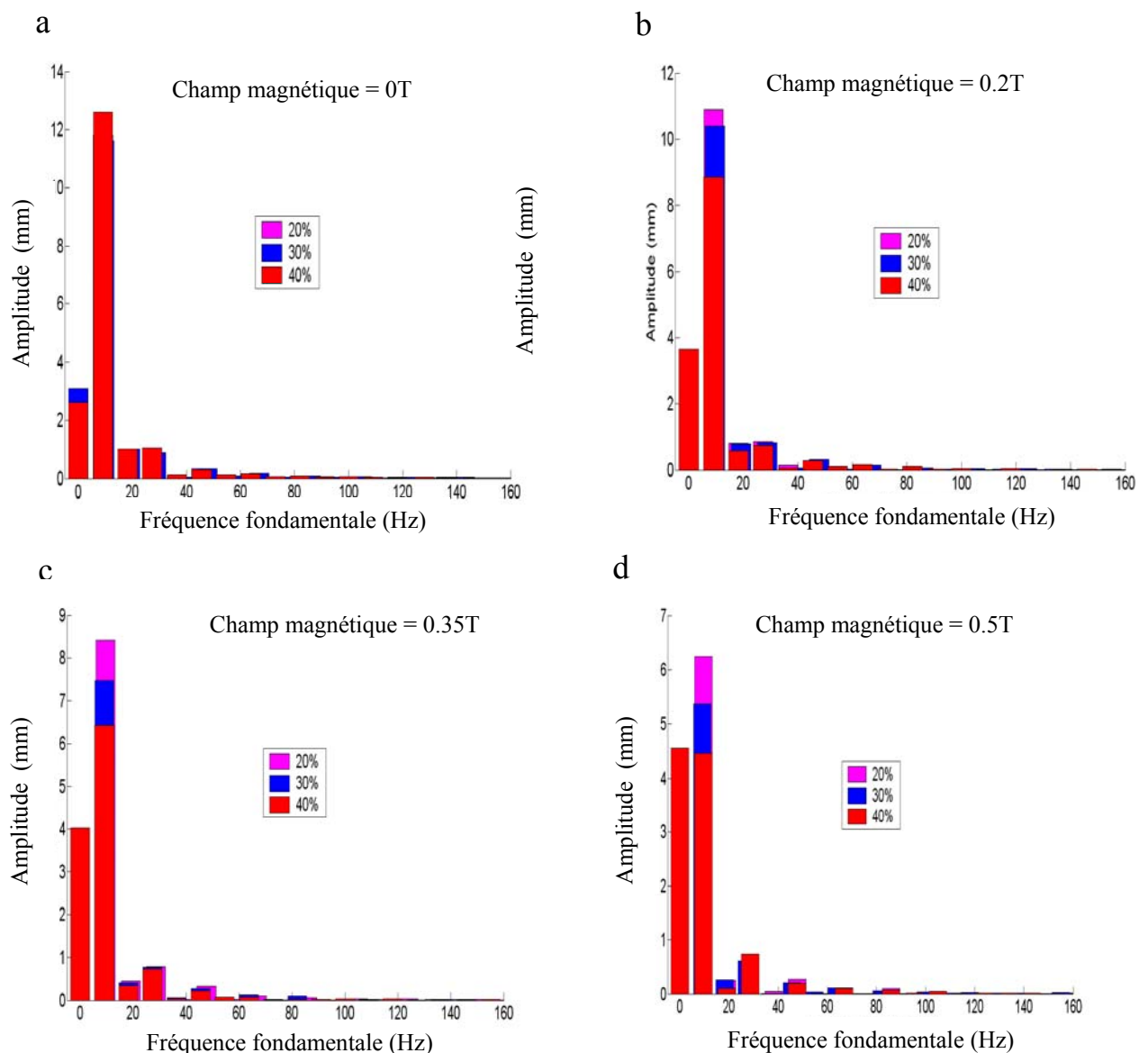


Fig.4.8. Effet de taux chargement sur l'amplitude vibratoire pour différentes valeurs du champ magnétique (a) 0T, (b) 0.2T, (c) 0.35T, (d) 0.5T

La Fig.4.9 représente la variation de la rigidité en fonction de la fréquence avec un champ magnétique variable. On remarque que la rigidité augmente considérablement avec la

fréquence. Egalement, la rigidité croît avec le champ magnétique ; ceci est clair si on compare les résultats trouvés pour un champ magnétique nul et un champ magnétique de 0.5T.

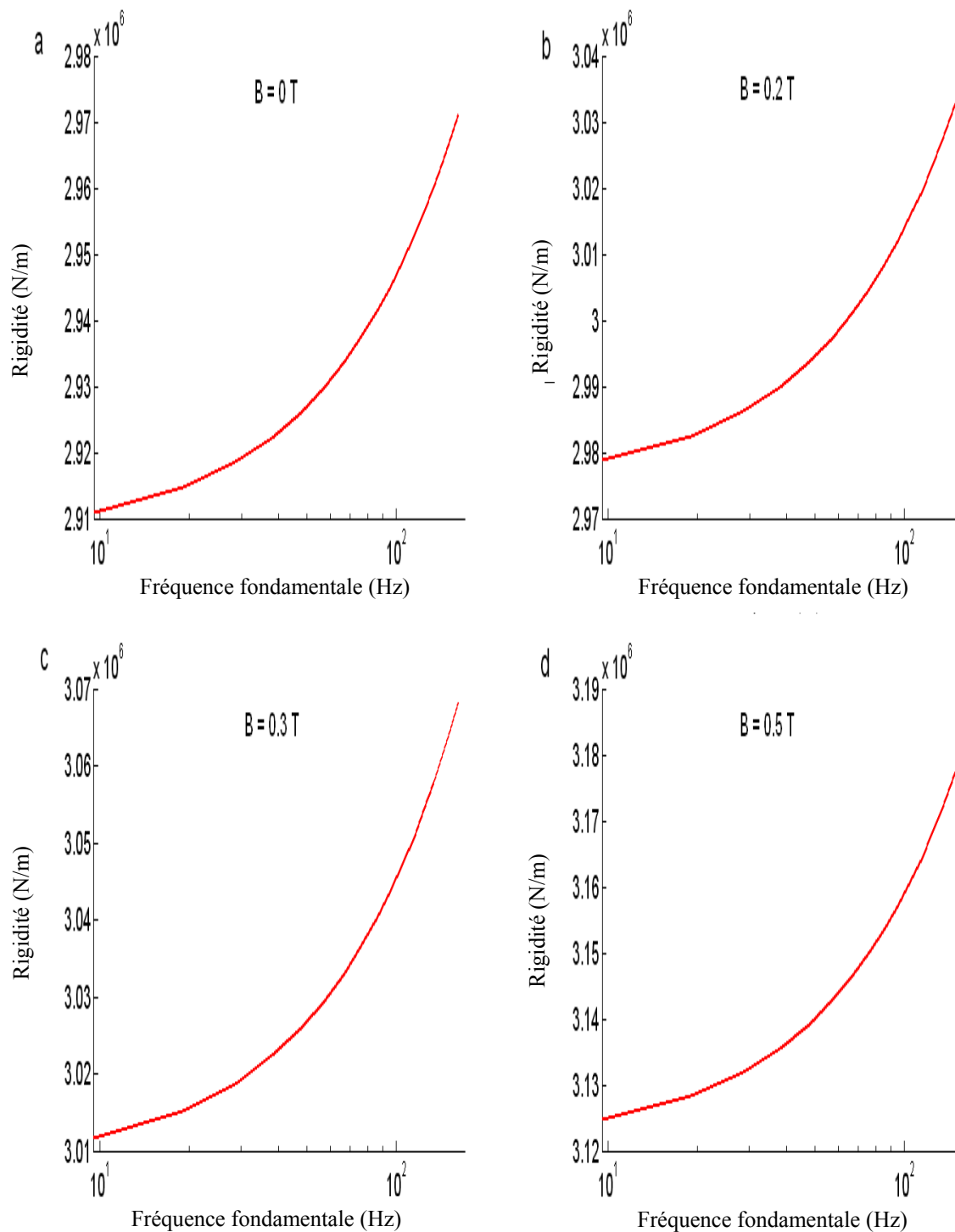


Fig.4.9. Variation de la rigidité en fonction de fréquence sous champ magnétique

La Fig.4.10 présente la variation de la rigidité en fonction du facteur de perte structural. On observe que la rigidité augmente assez rapidement avec l'augmentation du facteur de perte, réciproquement aux matériaux classiques ou composites et ceci donne l'objectif principal de l'utilisation de ces structures intelligentes dans divers domaines de pointe.

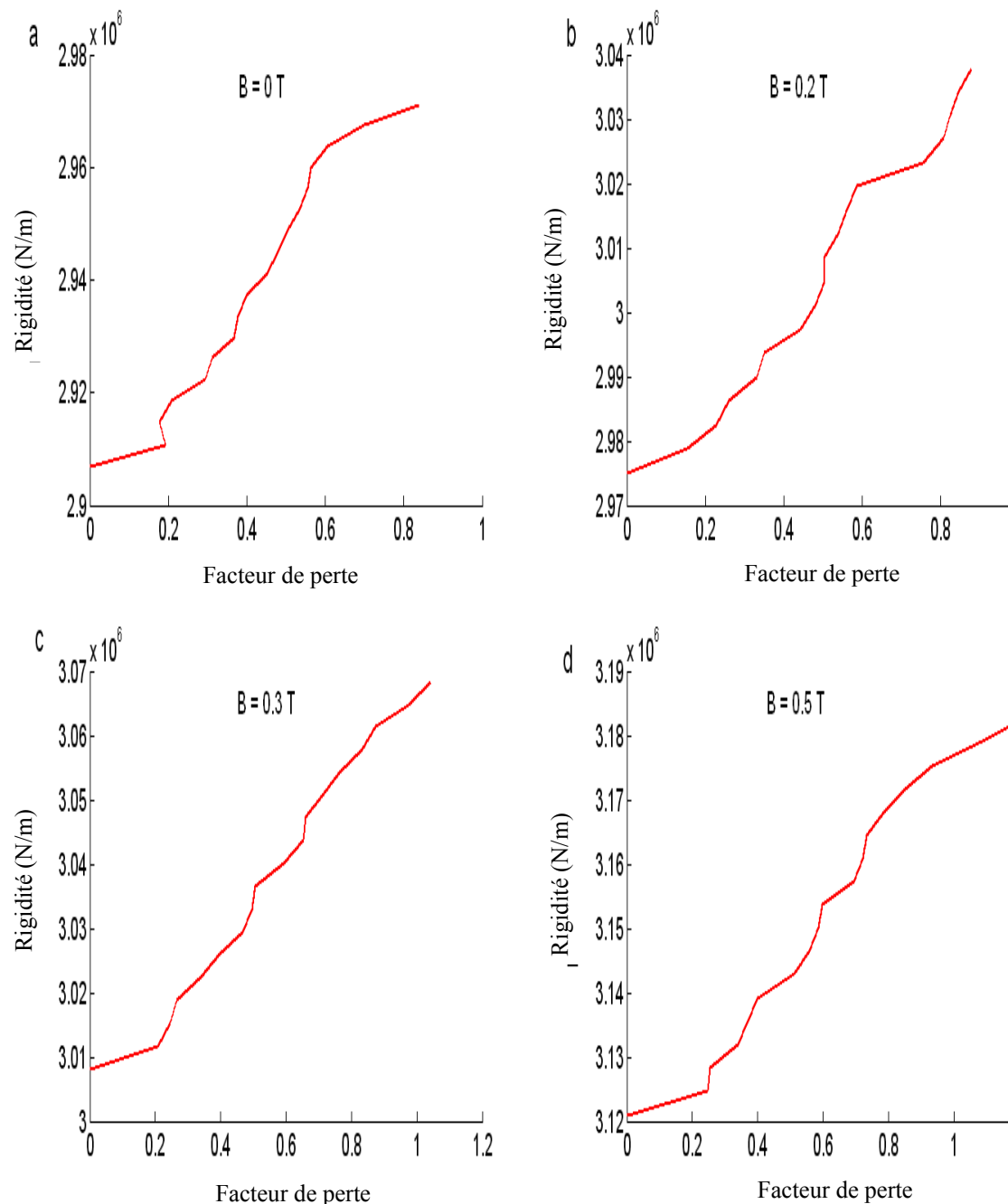


Fig.4.10. Variation de la rigidité en fonction du facteur de perte sous champ magnétique

4.5. Comparaison et validation des résultats

Dans le but de tester la fiabilité de notre modèle, on a simulé le problème de cisaillement sous champ magnétique dans le code Abaqus. On a choisi parmi les modèles viscoélastiques intégrés dans Abaqus celui qui recale au mieux le comportement expérimental du matériau en cisaillement. Le modèle viscoélastique choisi dans Abaqus, correspond au modèle de Maxwell généralisé dont les paramètres exploités sont trouvés au moyen d'essais de cisaillement présenté dans l'[Annexe C](#).

La [Fig. 3.6](#) présente le maillage de la structure. Un élément hexaédrique linéaire à 8 nœuds a été choisi. On a utilisé la méthode d'intégration réduite. On a constaté une convergence plus facile. Un résultat de simulation de la structure, dans le cas de déformation plane en cisaillement sous excitation harmonique par une force magnétique, est illustré dans la [Fig. 4.11](#). Selon la [table 4.3](#), on remarque une petite différence notable entre les résultats expérimentaux et les résultats donnés par Abaqus. Ceci peut être expliqué par la complexité du modèle utilisé dans Abaqus (viscoélasticité + dynamique). Nous signalons que cette complexité de modélisation dans le code Abaqus, nous a créé des difficultés de convergence.

Les valeurs de l'amplitude maximale de la plaque chargée par 30% des particules de fer, trouvées par la méthode de Ritz, obtenues par la fonction d'approximation (50) à trois termes, sont comparées dans la [table 4.3](#) à celles obtenues par le code de calcul Abaqus et par l'expérimental. De la confrontation entre ces valeurs, on constate pratiquement un rapprochement entre elles avec un écart faible qui reste toujours admissible.

Table 4.3. Confrontation des résultats trouvés par différentes méthodes

B(T)	Déformation maximale w_{\max} (mm)					
	Expérimental	Ritz	Abaqus (FEM)	$\Delta_{R-E}(\%)$	$\Delta_{FEM-E}(\%)$	$\Delta_{FEM-R}(\%)$
0	11.60	13.28	13.31	14.48	14.74	00.22
0.20	10.40	10.88	10.53	04.60	01.25	03.32
0.35	08.42	07.28	08.61	15.66	02.26	18.27
0.50	06.25	06.40	05.74	02.40	10.90	11.50

La [Fig.4.11](#) montre les déformées obtenues par la méthode de Ritz et les déformées obtenues par le code de calcul Abaqus. On observe que les déformées simulées par la méthode des éléments finis (Abaqus) sont conformes aux déformées simulées par les fonctions d'approximation (3.46) et (3.47).

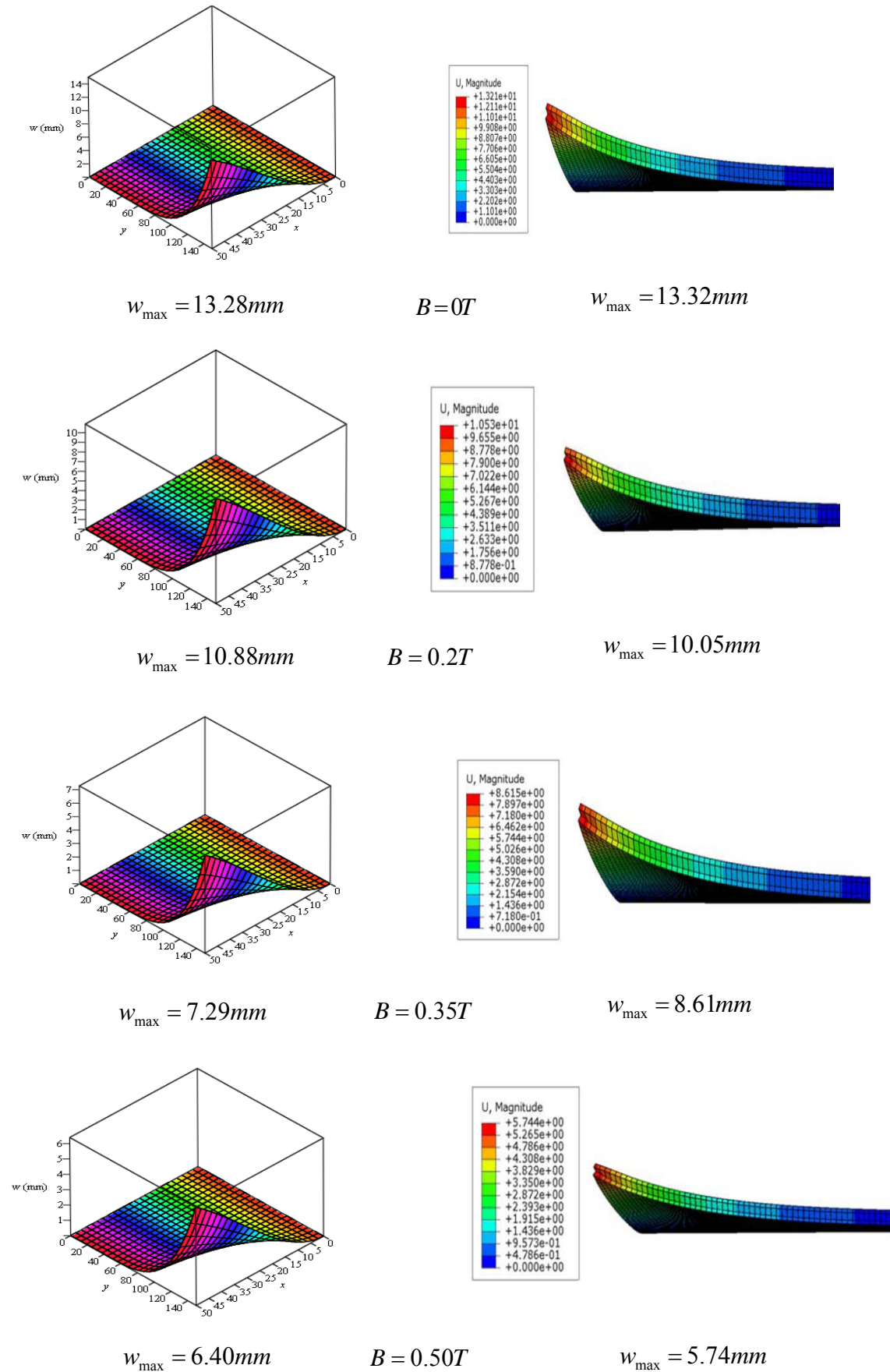


Fig.4.11. Confrontation des résultats trouvés par la méthode de Ritz et FEM

La variation de l'amplitude en fonction du rapport $R = \frac{a}{b}$ de $R = \frac{1}{3}$ qui correspond à la géométrie de la plaque étudiée dans la partie expérimentale à $R = 1$ pour une plaque carrée, est présentée sur la Fig.4.12 pour un champ magnétique qui varie de 0T à 0.5T. On constate une convergence rapide entre les courbes simulées par la MEF et les courbes tracées par l'approximation à trois termes pour un rapport $R \leq 0.85$. Au de là de $R \geq 0.85$, on observe une légère divergence. Cette divergence peut être due au fait que les fonctions d'approximation (38) et (39) vérifient exactement les conditions aux frontières (3.44) ; mais elles ne vérifient que d'une manière approchée les conditions de frontières (3.45), dans le cas des cotés libres de la plaque.

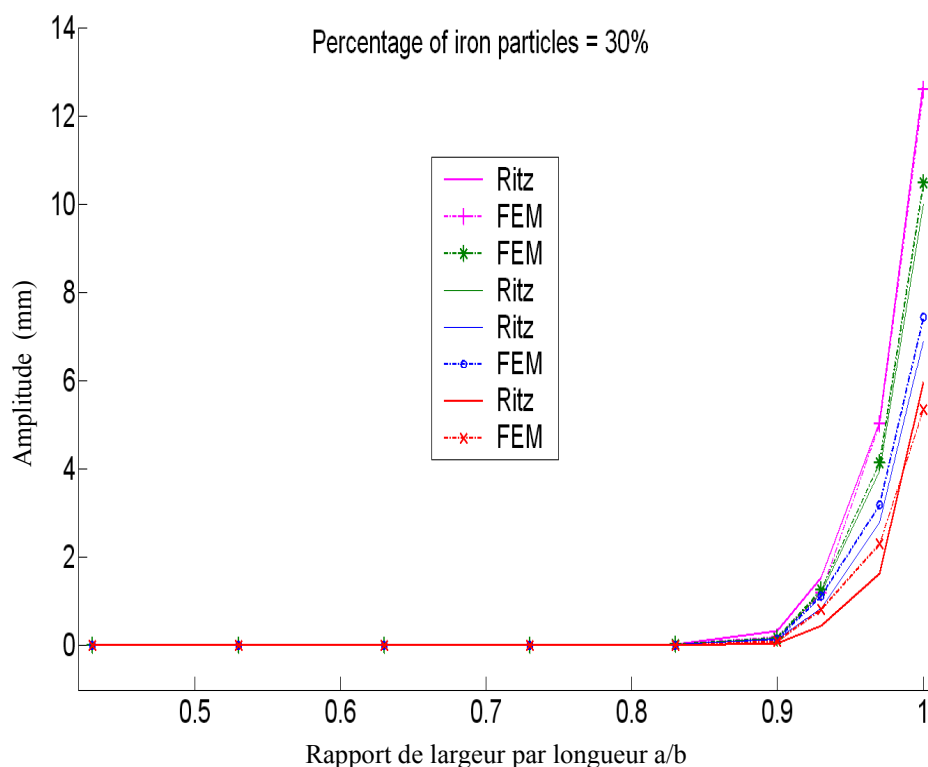


Fig.4.12. Confrontation des amplitudes en fonction de rapport R trouvées par FEM et méthode Ritz

La Fig.4.13 présente la variation de l'amplitude vibratoire trouvée par les trois méthodes, expérimentale, l'approximation approchée de Ritz et la méthode FEM sous le code de calcul Abaqus. On observe que la valeur de l'amplitude augmente assez rapidement à une valeur crête dans la plage de fréquence qui varie de 12Hz à 15Hz, puis diminue d'une manière rapide et inversement avec l'augmentation des fréquences. On mentionne que l'écart de différence entre la valeur de fréquence de résonance où l'amplitude est maximale pour les trois méthodes

peut être interprété par l'influence des paramètres suivants: la taille des éléments de maillage par le code de calcul Abaqus, la vérification seulement d'une manière approchée des conditions aux frontières libres de la plaque par les fonctions d'approximation (3.46) et (3.47) et les conditions aux frontières expérimentales qui doivent être conformes à celle du modèle utilisé par le code du calcul Abaqus, ce qui est en général difficile à respecter rigoureusement. On remarque clairement l'influence importante du champ magnétique sur l'atténuation de l'amplitude vibratoire.

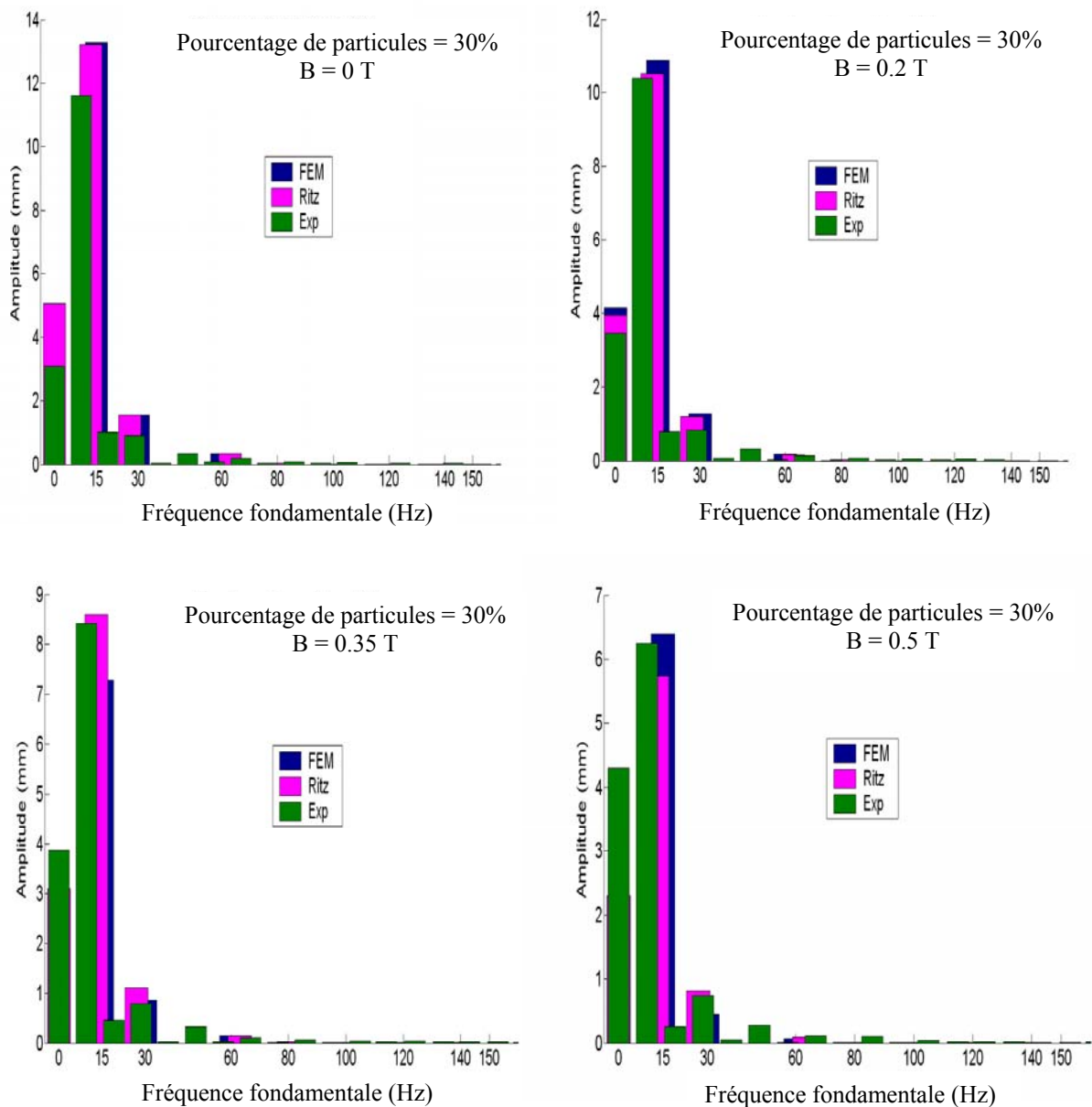


Fig.4.13. Confrontation d'évolution d'amplitude en fonction de la fréquence de résonance par les trois méthodes, Expérimentale, Ritz, FEM

La [table 4.4](#) ci-dessous présente une comparaison des résultats expérimentaux du facteur de perte d'énergie avec ceux trouvés par la méthode des éléments finis à l'aide du code de calcul Abaqus pour des valeurs du champ magnétique de 0T, 0.35T et 0.5T.

Des tests vibratoires sous Abaqus ont été effectués afin de converger les résultats obtenus numériquement à ceux que donnés par la méthode expérimentale. On remarque que les résultats numériques sont légèrement supérieurs aux résultats expérimentaux. L'écart moyen des résultats des deux méthodes est de 0.05 pour un champ magnétique nul, 0.08 pour le champ magnétique 0.35T et de 0.03 pour un champ magnétique de 0.5T. Ce que montre que le modèle choisi en Abaqus est convenable au modèle expérimental.

Table.4.4. Comparaison des valeurs du facteur de perte trouvées par les méthodes, expérimentale et FEM

f (Hz)	0T			0.35T			0.5T		
	Exp	FEM	$\Delta(\%)$	Exp	FEM	$\Delta(\%)$	Exp	FEM	$\Delta(\%)$
0	1.19	1.26	05.88	0.84	1.02	21.43	0.53	0.54	01.99
100	1.14	1.20	05.26	0.89	0.98	10.11	0.48	0.50	04.16
200	1.09	1.17	07.34	0.77	0.84	09.10	0.43	0.47	09.30
300	1.05	1.12	10.66	0.64	0.78	21.87	0.41	0.42	02.44
400	1.00	1.02	02.00	0.62	0.71	14.52	0.36	0.39	08.33
500	0.96	1.04	08.33	0.54	0.61	12.96	0.30	0.34	13.33
600	0.92	0.97	05.43	0.47	0.56	19.15	0.28	0.30	07.14
700	0.88	0.92	04.54	0.44	0.47	06.82	0.24	0.26	08.33
800	0.84	0.89	05.95	0.35	0.41	17.14	0.20	0.23	15.00
900	0.81	0.85	04.94	0.27	0.31	14.80	0.17	0.21	23.53
1000	0.78	0.82	05.13	0.21	0.20	05.00	0.16	0.19	18.75

La [Fig.4.14](#) Représente la comparaison entre les courbes simulées à partir des données expérimentales et celles tracées par les résultats donnés par le code de calcul Abaqus. On voit que les courbes correspondantes aux valeurs du champ magnétique de 0.35T et 0.5T sont divergentes au début, puis convergentes, progressivement avec l'augmentation des fréquences. Par contre, les courbes correspondantes au champ magnétique de 0T sont très proches et ceci est dû à l'influence du champ magnétique sur les propriétés rhéologiques de l'élastomère.

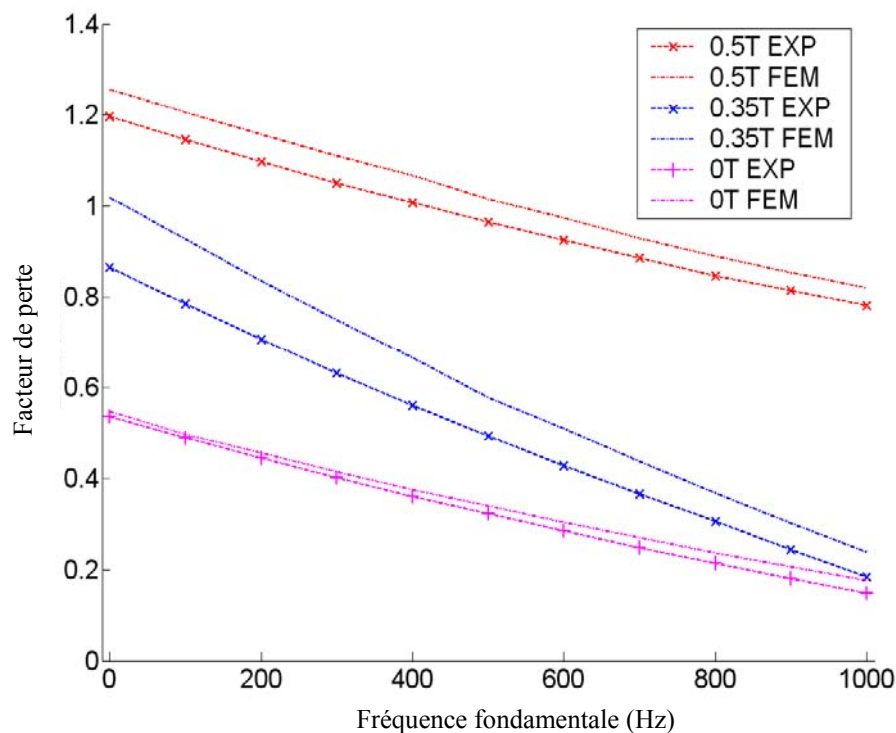


Fig.4.14. Confrontation d'évolution du facteur de perte en fonction de fréquence de résonance par les méthodes, Expérimental et FEM

Pour les trois méthodes employées, l'amplitude maximale diminue avec l'augmentation de l'intensité de champ magnétique (Fig.4.15). Ces résultats ont démontré une grande influence de l'application et de l'augmentation de l'intensité du champ magnétique sur l'atténuation d'amplitude de résonance de la plaque.

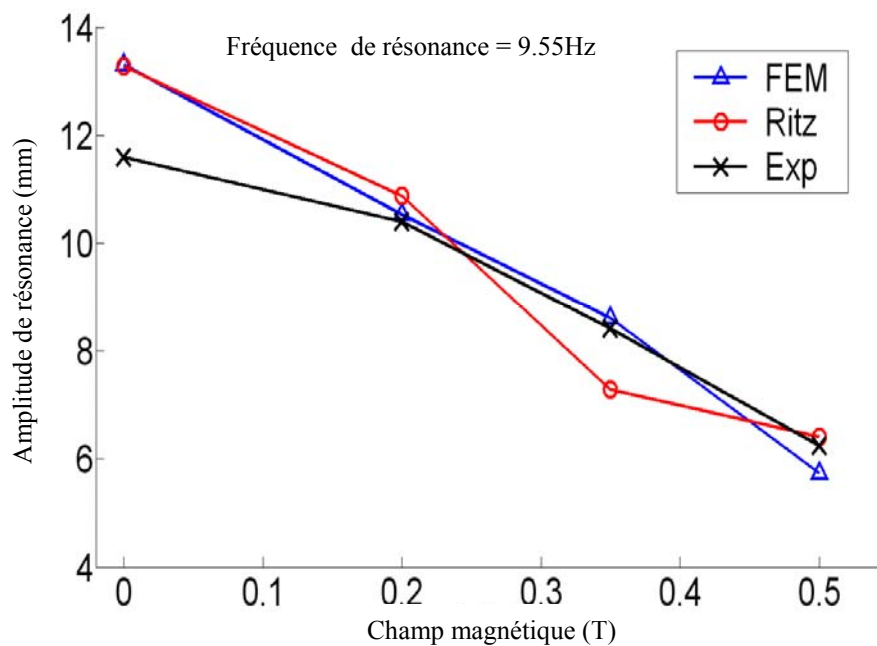


Fig.4.15. Variation de l'amplitude maximale en fonction du champ magnétique

La Fig.4.16 montre la variation de l'amplitude de résonance maximale de la plaque où l'élastomère est chargé par 30% des microparticules de fer avec ou sans l'influence de différentes intensités du champ magnétique (0.2T, 0.35T, 0.5T). Fig.4.16 prouve également que l'amplitude de résonance diminue de manière peu significative quand le taux de chargement et l'intensité du champ magnétique augmente.

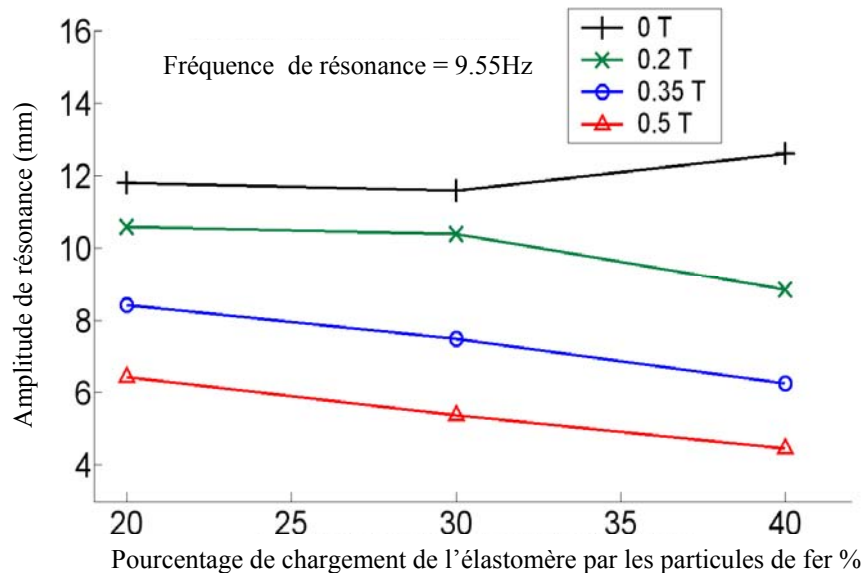


Fig.4.16. Impact de l'intensité du champ magnétique sur l'amplitude de résonance en fonction du rapport de chargement des particules ferromagnétiques dans MRE

4.6. Conclusion

Dans ce chapitre, une caractérisation de l'élastomère chargé à 30% en particules ferromagnétiques et une étude expérimentale de la réponse dynamique des plaques en élastomère magnétorhéologique avec différents chargements, soumises à une excitation harmonique par une force magnétique est présentée. Le premier objectif étant la détermination du module complexe et le facteur de perte de l'élastomère chargé par les particules de fer sous différentes intensités du champ magnétique. Le deuxième objectif étant la détermination de la réponse vibratoire des différentes plaques pour différents chargements de l'élastomère et sous l'impact de différentes intensités du champ magnétique et la détermination des propriétés amortissantes ainsi que la rigidité. Cette étude expérimentale a pour objectif de valider la simulation et l'approche numérique par la méthode de Ritz. Ainsi, le modèle numérique permet d'appréhender au mieux la détermination de la réponse dynamique des matériaux complexes.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Le but de ce travail de recherche est consacré à apporter une contribution sur la détermination de la réponse dynamique des plaques sandwichs ayant un cœur en élastomère magnétorhéologique.

L'étude bibliographique met en évidence une grande diversité des recherches liées aux matériaux en élastomère magnétorhéologique (Matériaux complexes) tant sur l'aspect composition, élaboration que d'un point de vue de identification des propriétés viscoélastiques, ainsi que la détermination de la réponse dynamique. Dans ce travail on s'est intéressé particulièrement à la détermination de la réponse vibratoire des plaques sandwichs en élastomère chargé par différents pourcentages de particules de fer, soumises à divers intensités de champ magnétique.

Les travaux menés pour répondre à la problématique de la thèse ont été développés principalement autour de trois parties. Dans la première partie, on a développé une approche analytique qui donne le système d'équation régissant le mouvement vibratoire des plaques sandwichs soumises à un champ magnétique. Dans la seconde partie, on a élaboré une approche énergétique de résolution du problème complexe non linéaire régissant les vibrations forcées des plaques sandwichs magnétorhéologiques. Cette approche est basée sur la méthode de Ritz. L'approche a été entièrement développée à l'aide des logiciels Maple et Matlab pour une plaque sandwich magnétorhéologique et a permis de caractériser la réponse de la plaque. Une attention particulière a été portée sur le choix des fonctions d'approximations. La seconde étape a été consacrée à la modélisation des réponses vibratoires des plaques par la méthode des éléments finis sous environnement du code de calcul Abaqus. Cette méthode permet de prendre en compte de façon générale la dépendance en fréquence de l'amortissement. Elle a été implantée par des lois viscoélastiques constantes et des lois viscoélastiques variables, représentées par le modèle de Maxwell généralisé. La troisième partie est basée sur une analyse expérimentale de la réponse des plaques sandwichs à cœur en élastomère magnétorhéologique, chargé à 20%, 30% et 40% des particules de fer. Ce dispositif expérimental a permis de déduire aisément les modules de cisaillement sous l'intensité du champ magnétique variable, puis le module global de la structure multicouche

en connaissant les propriétés de chaque couche. Ensuite, on s'est intéressé à étudier l'influence de forte non linéarité du comportement de l'élastomère induit par le champ magnétique.

Cette contribution apportée dans cette thèse, a montré clairement l'efficacité de l'approche numérique choisie qui est basée sur le choix de la base fonctionnelle, afin d'assurer une meilleure convergence des solutions, ainsi que l'avantage de traiter ce type de structures par la méthode des éléments finis sous le code de calcul Abaqus ; qui offre plus d'efficacité. Afin de corroborer l'exactitude et la convergence des méthodes numériques proposées, une étude expérimentale a été présentée. On a constaté une corrélation entre les résultats. Les données de la littérature en particulier dans le cas des plaques sandwichs magnétorhéologiques sont rares, sauf le travail fait par [Jia-Yi Yeh](#) en 2013 seulement sur les vibrations libres des plaques sandwichs en élastomère magnétorhéologique et [Ying et al](#) en 2014 sur les vibrations forcées des plaques sandwichs en élastomère magnétorhéologique soumises à une excitation exclusivement aléatoire.

Cette étude menée par trois méthodes : la méthode expérimentale, la méthode basée sur l'approche de Ritz et la méthode des éléments finis, a montré l'efficacité d'utilisation de ces nouvelles structures pour réduire les problèmes de vibration non linéaire à travers le contrôle du niveau d'amplitude dynamique par l'application d'un champ magnétique, plus explicitement la maîtrise de deux caractéristiques antagonistes : la rigidité et l'amortissement.

Perspectives

Les travaux réalisés au cours de cette thèse ouvrent la voix à nombreux axes de recherches :

Les résultats présentés dans ce manuscrit ont permis de valider les méthodes numériques, mais dans le cas général et surtout dans le cas des vibrations non linéaires des plaques sandwichs en élastomère magnétorhéologique. Il serait envisageable de mener d'autres essais expérimentaux afin de bien concrétiser les résultats, surtout pour des modèles viscoélastiques dépendant de la fréquence.

Dans ce travail, les structures sandwichs ont été modélisées en utilisant un élément fini de type plaque. Il serait souhaitable de développer un élément fini de type coque en tenant

compte des courbures, afin de modéliser des structures sandwichs de géométrie plus complexe.

Dans la théorie d'étude des vibrations non linéaires qui à été présentée, la réponse non linéaire est approchée pratiquement par le mode de vibration linéaire. Une autre issue à explorer consisterait à approcher la réponse non linéaire par un modèle vraiment non linéaire.

L'analyse qui à été menée ne tient compte que de la dépendance en fréquence de l'élastomère magnétorhéologique, mais en réalité, il y a aussi la dépendance en température. Il serait envisageable de prendre en compte ce couplage fréquence-température dans la modélisation.

Annexes

Annexe A

Les éléments de matrice \mathbf{K}_{imnj}

$$\begin{aligned} K_{11} &= D_{11}I_{m1}^{22}J_{n1}^{00} + [D_{12}(I_{m1}^{20}J_{n1}^{02} + I_{m1}^{02}J_{n1}^{20}) + 4D_{66}I_{m1}^{11}J_{n1}^{11}]R^2 + D_{22}I_{m1}^{00}J_{n1}^{22}R^4 + \frac{Rabc^3}{24G_c}I_{m1}^{11}J_{n1}^{00} + \\ &\quad \frac{R^2a^2c^3}{24G_c}I_{m1}^{00}J_{n1}^{11} + Ra^3b(I_{m1}^{00}J_{n1}^{00} + I_{m1}^{00}J_{n1}^{00}) \\ K_{12} &= D_{11}I_{m1}^{22}J_{n2}^{00} + [D_{12}(I_{m1}^{20}J_{n2}^{02} + I_{m1}^{02}J_{n2}^{20}) + 4D_{66}I_{m1}^{11}J_{n2}^{11}]R^2 + D_{22}I_{m1}^{00}J_{n2}^{22}R^4 + \frac{Rabc^3}{24G_c}I_{m1}^{11}J_{n2}^{00} + \\ &\quad \frac{R^2a^2c^3}{24G_c}I_{m1}^{00}J_{n2}^{11} + Ra^3b(I_{m1}^{00}J_{n2}^{00} + I_{m1}^{00}J_{n2}^{00}) \\ K_{13} &= D_{11}I_{m1}^{22}J_{n3}^{00} + [D_{12}(I_{m1}^{20}J_{n3}^{02} + I_{m1}^{02}J_{n3}^{20}) + 4D_{66}I_{m1}^{11}J_{n3}^{11}]R^2 + D_{22}I_{m1}^{00}J_{n3}^{22}R^4 + \frac{Rabc^3}{24G_c}I_{m1}^{11}J_{n3}^{00} + \\ &\quad \frac{R^2a^2c^3}{24G_c}I_{m1}^{00}J_{n3}^{11} + Ra^3b(I_{m1}^{00}J_{n3}^{00} + I_{m1}^{00}J_{n3}^{00}) \\ K_{22} &= D_{11}I_{m2}^{22}J_{n2}^{00} + [D_{12}(I_{m2}^{20}J_{n2}^{02} + I_{m2}^{02}J_{n2}^{20}) + 4D_{66}I_{m2}^{11}J_{n2}^{11}]R^2 + D_{22}I_{m2}^{00}J_{n2}^{22}R^4 + \frac{Rabc^3}{24G_c}I_{m2}^{11}J_{n2}^{00} + \\ &\quad \frac{R^2a^2c^3}{24G_c}I_{m2}^{00}J_{n2}^{11} + Ra^3b(I_{m2}^{00}J_{n2}^{00} + I_{m2}^{00}J_{n2}^{00}) \\ K_{23} &= D_{11}I_{m2}^{22}J_{n3}^{00} + [D_{12}(I_{m2}^{20}J_{n3}^{02} + I_{m2}^{02}J_{n3}^{20}) + 4D_{66}I_{m2}^{11}J_{n3}^{11}]R^2 + D_{22}I_{m2}^{00}J_{n3}^{22}R^4 + \frac{Rabc^3}{24G_c}I_{m2}^{11}J_{n3}^{00} + \\ &\quad \frac{R^2a^2c^3}{24G_c}I_{m2}^{00}J_{n3}^{11} + Ra^3b(I_{m2}^{00}J_{n3}^{00} + I_{m2}^{00}J_{n3}^{00}) \\ K_{33} &= D_{11}I_{m3}^{22}J_{n3}^{00} + [D_{12}(I_{m3}^{20}J_{n3}^{02} + I_{m3}^{02}J_{n3}^{20}) + 4D_{66}I_{m3}^{11}J_{n3}^{11}]R^2 + D_{22}I_{m3}^{00}J_{n3}^{22}R^4 + \frac{Rabc^3}{24G_c}I_{m3}^{11}J_{n3}^{00} + \\ &\quad \frac{R^2a^2c^3}{24G_c}I_{m3}^{00}J_{n3}^{11} + Ra^3b(I_{m3}^{00}J_{n3}^{00} + I_{m3}^{00}J_{n3}^{00}) \end{aligned}$$

Les éléments de matrice \mathbf{M}_{imnj}

$$\begin{aligned} M_{11} &= 2b^3\rho_{t,b}I_{m1}^{00}J_{n1}^{00} + b^3\rho_cI_{m1}^{00}J_{n1}^{00} \\ M_{12} &= 2b^3\rho_{t,b}I_{m1}^{00}J_{n2}^{00} + b^3\rho_cI_{m1}^{00}J_{n2}^{00} \\ M_{13} &= 2b^3\rho_{t,b}I_{m1}^{00}J_{n3}^{00} + b^3\rho_cI_{m1}^{00}J_{n3}^{00} \\ M_{21} &= 2b^3\rho_{t,b}I_{m2}^{00}J_{n1}^{00} + b^3\rho_cI_{m2}^{00}J_{n1}^{00} \\ M_{22} &= 2b^3\rho_{t,b}I_{m2}^{00}J_{n2}^{00} + b^3\rho_cI_{m2}^{00}J_{n2}^{00} \\ M_{23} &= 2b^3\rho_{t,b}I_{m2}^{00}J_{n3}^{00} + b^3\rho_cI_{m2}^{00}J_{n3}^{00} \end{aligned}$$

$$M_{13} = 2b^3 \rho_{t,b} I_{m3}^{00} J_{n1}^{00} + b^3 \rho_c I_{m3}^{00} J_{n1}^{00}$$

$$M_{23} = 2b^3 \rho_{t,b} I_{m3}^{00} J_{n2}^{00} + b^3 \rho_c I_{m3}^{00} J_{n2}^{00}$$

$$M_{33} = 2b^3 \rho_{t,b} I_{m3}^{00} J_{n3}^{00} + b^3 \rho_c I_{m3}^{00} J_{n3}^{00}$$

Annexe B

Les données expérimentales

Tble7. Donnée expérimentales

Magnetic field B = 0T (MER)			
Strain rate (s ⁻¹)	G' (Pa)	G'' (Pa)	tan(δ)
0.00192978	2832015.17	549072.595	0.19388053
0.00493925	1985253.89	406397.203	0.20470792
0.00720365	1748054.78	365511.130	0.20909592
0.00971442	1553543.42	323908.435	0.20849654
0.01944100	1218576.77	245279.539	0.20128362
0.03358440	1004655.94	210453.197	0.20947788
Magnetic field B = 0.2T (MER)			
Strain rate (s ⁻¹)	G' (Pa)	G'' (Pa)	tan(δ)
0.00482997	2482323.26	698193.408	0.28126611
0.00724993	2150933.76	612395.328	0.28471138
0.00966975	1943827.97	555301.958	0.28567444
0.01936920	1540413.31	429654.048	0.27892128
0.03382170	1294958.78	347533.114	0.26837388
0.04869460	1151706.05	307070.227	0.26662205
Magnetic field B = 0.35T (MER)			
Strain rate (s ⁻¹)	G' (Pa)	G'' (Pa)	tan(δ)
0.00488696	2692910.98	757058.688	0.28113023
0.00723629	2348825.86	667522.752	0.28419423
0.00967814	2128935.17	605651.712	0.28448575
0.01926820	1690617.98	477558.125	0.28247548
0.03405320	1421575.68	389343.533	0.27388168
0.04877340	1280673.98	346123.085	0.27026635
Magnetic field B = 0.5T (MER)			
Strain rate (s ⁻¹)	G' (Pa)	G'' (Pa)	tan(δ)
0.00483404	2917610.88	736339.776	0.25237765
0.00726212	2526391.87	653690.304	0.25874462
0.00969288	2294115.07	594897.638	0.25931465
0.0193179	1816645.63	468517.632	0.25790260
0.0339186	1511861.57	384718.234	0.25446657
0.0487865	1346509.06	344926.138	0.25616325

Annexe C

Vérification des fonctions d'approximations à trois termes, pour : $\beta = 10^4$

Pour $m=1, n=1, b=150, a=50$

$$\frac{d^2 X_m}{dx^2} = \frac{1}{5 \times 10^3 b^2} \left(\frac{x}{10^4} - 1 \right)^2 + \frac{x}{125 \times 10^5 b^3} \left(\frac{x}{10^4 b} - 1 \right) + \frac{1}{5 \times 10^{12}} \frac{x^2}{b^4}$$

$$\frac{d^2 X_m}{dx^2} = \frac{1}{1125 \times 10^4} \left(\frac{1}{15 \times 10^5} x - 1 \right)^2 + \frac{x}{421875 \times 10^8} \left(\frac{1}{15 \times 10^5} x - 1 \right) + \frac{x^2}{253125 \times 10^{15}}$$

$$\frac{d^2 X_m}{dx^2} = \frac{149970001}{1687 \times 10^{12}} = 9 \times 10^{-10} \approx 0$$

$$\frac{d^2 Y_n}{dy^2} = \frac{1}{5 \times 10^3 a^2} \left(\frac{y}{10^4 a} - 1 \right)^2 + \frac{y}{125 \times 10^5 a^3} \left(\frac{y}{10^4 a} - 1 \right) + \frac{y^2}{5 \times 10^{11} a^4}$$

$$\frac{d^2 Y_n}{dy^2} = \frac{1}{125 \times 10^5} \left(\frac{y}{5 \times 10^5} - 1 \right)^2 + \frac{y}{15625 \times 10^8} \left(\frac{y}{5 \times 10^5} - 1 \right) + \frac{y^2}{3125 \times 10^{15}}$$

$$\frac{d^2 Y_n}{dy^2} = \frac{49910027}{625 \times 10^{12}} = 8 \times 10^{-8} \approx 0$$

$$\frac{d^3 X_m}{dx^3} = \frac{3x-3}{25 \times 10^9 b^3} + \frac{3x}{25 \times 10^{10} b^4}$$

$$\frac{d^3 X_m}{dx^3} = \frac{x}{2109375 \times 10^{13}} - \frac{1}{28125 \times 10^9}$$

$$\frac{d^2 X_m}{dx^2} = \frac{14999}{421875 \times 10^{12}} = 3 \times 10^{-15} \approx 0$$

$$\frac{d^3 Y_n}{dy^3} = \frac{3y-3}{25 \times 10^{10} a^4} + \frac{3y}{25 \times 10^{10} a^4}$$

$$\frac{d^3 Y_n}{dy^3} = \frac{3y}{78125 \times 10^{13}} - \frac{3}{3125 \times 10^9}$$

$$\frac{d^3 Y_n}{dy^3} = \frac{14991}{15625 \times 10^{12}} = 9 \times 10^{-13} \approx 0$$

Pour $m=1$, $n=2$, $b=150$, $a=50$

$$\frac{d^2 X_m}{dx^2} = \frac{1}{5 \times 10^3 b^2} \left(\frac{x}{10^4 b} - 1 \right)^2 + \frac{x}{125 \times 10^5 b^3} \left(\frac{x}{10^4 b} - 1 \right) + \frac{x^2}{5 \times 10^{11} b^4}$$

$$\frac{d^2 X_m}{dx^2} = \frac{1}{1125 \times 10^5} \left(\frac{x}{15 \times 10^5} - 1 \right)^2 + \frac{x}{421875 \times 10^8} \left(\frac{x}{15 \times 10^5} - 1 \right) + \frac{x^2}{253125 \times 10^{15}}$$

$$\frac{d^2 X_m}{dx^2} = \frac{149970001}{16875 \times 10^{10}} = 9 \times 10^{-10} \approx 0$$

$$\frac{d^2 Y_n}{dy^2} = \frac{y^3}{10^8 a^3} \left(\frac{y}{10^4 a} - 1 \right)^2$$

$$\frac{d^2 Y_n}{dy^2} = \frac{3y}{625 \times 10^{10}} \left(\frac{y}{5 \times 10^5} - 1 \right)^2 + \frac{3y^2}{15625 \times 10^{14}} \left(\frac{y}{5 \times 10^5} - 1 \right) + \frac{y^3}{15625 \times 10^{20}}$$

$$\frac{d^2 Y_n}{dy^2} = \frac{89892027}{125 \times 10^{16}} = 7 \times 10^{-11} \approx 0$$

$$\frac{d^3 X_m}{dx^3} = \frac{3x-3}{25 \times 10^{10} b^4} + \frac{3x}{25 \times 10^{10} b^4}$$

$$\frac{d^3 X_m}{dx^3} = \frac{x}{2109375 \times 10^{13}} - \frac{1}{28125 \times 10^9}$$

$$\frac{d^3 X_m}{dx^3} = \frac{14999}{421875 \times 10^{12}} = 3 \times 10^{-15} \approx 0$$

$$\frac{d^3 Y_n}{dy^3} = \frac{3}{5 \times 10^9 a^3} \left(\frac{y}{10^4 a} - 1 \right)^2 + \frac{9y}{25 \times 10^{10} a^4} \left(\frac{y}{10^4 a} - 1 \right) + \frac{9y^2}{5 \times 10^{15} a^5}$$

$$\frac{d^3 Y_n}{dy^3} = \frac{3}{625 \times 10^{10}} \left(\frac{y}{5 \times 10^5} - 1 \right)^2 + \frac{9y}{15625 \times 10^{14}} \left(\frac{y}{5 \times 10^5} - 1 \right) + \frac{9y^2}{15625 \times 10^{20}}$$

$$\frac{d^3 Y_n}{dy^3} = \frac{29928027}{625 \times 10^{17}} = 4 \times 10^{-14} \approx 0$$

Pour m=1, n=3, b=150, a=50

$$\frac{d^2 X_m}{dx^2} = \frac{l}{5 \times 10^3 b^2} \left(\frac{x}{10^3 b} - l \right)^2 + \frac{x}{125 \times 10^5 b^3} \left(\frac{x}{10^4 b} - l \right) + \frac{x^2}{5 \times 10^{11} b^4}$$

$$\frac{d^2 X_m}{dx^2} = \frac{l}{1125 \times 10^5} \left(\frac{x}{15 \times 10^5} - l \right)^2 + \frac{x}{421875 \times 10^8} \left(\frac{x}{15 \times 10^5} - l \right) + \frac{x^2}{253125 \times 10^{15}}$$

$$\frac{d^2 X_m}{dx^2} = \frac{149970001}{16875 \times 10^{12}} = 9 \times 10^{-10} \approx 0$$

$$\frac{d^2 Y_n}{dy^2} = \frac{3y^2}{25 \times 10^{10} a^4} \left(\frac{y}{10^3 a} - l \right)^2 + \frac{y^3}{625 \times 10^{12} a^5} \left(\frac{y}{10^3 a} - l \right) + \frac{y^4}{5 \times 10^{19}}$$

$$\frac{d^2 Y_n}{dy^2} = \frac{3y^2}{15625 \times 10^{14}} \left(\frac{y}{5 \times 10^5} - l \right)^2 + \frac{y^3}{1953125 \times 10^{17}} \left(\frac{y}{5 \times 10^5} - l \right) + \frac{y^4}{78125 \times 10^{25}}$$

$$\frac{d^2 Y_n}{dy^2} = \frac{1078920243}{25 \times 10^{18}} = 4 \times 10^{14} \approx 0$$

$$\frac{d^3 X_m}{dx^3} = \frac{3(x-l)}{25 \times 10^{10} b^3} + \frac{3x}{25 \times 10^{10} b^4}$$

$$\frac{d^3 X_m}{dx^3} = \frac{x}{2109375 \times 10^{13}} - \frac{l}{28125 \times 10^9}$$

$$\frac{d^3 X_m}{dx^3} = \frac{14999}{421875 \times 10^{12}} = 3 \times 10^{-15} \approx 0$$

$$\frac{d^3 Y_n}{dy^3} = \frac{3y}{125 \times 10^9 a^4} \left(\frac{y}{10^4 a} - l \right)^2 + \frac{9y^2}{125 \times 10^{13} a^5} \left(\frac{y}{10^3 a} - l \right) + \frac{3y^3}{125 \times 10^{17}}$$

$$\frac{d^3 Y_n}{dy^3} = \frac{3y}{78125 \times 10^{13}} \left(\frac{l}{5 \times 10^5} - l \right)^2 + \frac{9y^2}{390625 \times 10^{18}} \left(\frac{y}{5 \times 10^5} - l \right) + \frac{3}{1953125 \times 10^{23}}$$

$$\frac{d^3 Y_n}{dy^3} = \frac{179730081}{3125 \times 10^{20}} = 6 \times 10^{-16} \approx 0$$

Bibliographique

- [1] ZENKERT D., The handbook of sandwich construction. EMAS Publishing, 1997.
- [2] HOFF N.J., MAUTNER S.E., Sandwich construction. Aeronautical Engineering Review, Vol 3, Aug 1944., 1944.
- [3] AEROSPATIALE, Matériaux composites : dans la grande mutation des structures. Plaquette interne., 1986.
- [4] SCHULZE E.J., KESACK W.J., Honeycomb sandwich composite structures used on the V22-Osprey fuselage. Proceeding of the 22nd International SAMPE technical conference, Boston MA 1990., 1990.
- [5] OLSSON K.A., MAKINEN K.E., HELLBRATT S.E., The development of sandwich structures for naval vessel during 25 years. Proceedings of the Euromech 360 Colloquium, Saint-Etienne 1997, A Vautrin, Kluwer Academic Publishers., 1997.
- [6] GUSTAFSSON R. N-G., Hybrid stainless assemblies for weight reduction and performance. Proceedings of the Fourth International Conference on Sandwich Construction, Stockholm 1998, E-MAS Publishing., 1998.
- [7] KLEIN Hermann: General about buckling tests with thin-walled shells. Rapport DLR- Mitt; 89-13., 1989.
- [8] ZENKERT D., The handbook of sandwich construction. EMAS Publishing., 1997.
- [9] DEN HAAN L.; G REIF., Challenges for teaming-up sandwich technology and business success in rail transportation. Proceedings of the Fourth International Conference on Sandwich Construction, Stockholm 1998, E-MAS Publishing., 1998.
- [10] GAY Daniel., Matériaux Composites. Editions HERMES., 1991.
- [11] J.E.C. : Comptes rendus des Journées Européennes des Composites. Composites n°25-26., 1998.
- [12] JEAN-MARIE BERTHELOT., Mécanique des Matériaux Composites. Editions HERMES., 2010.
- [13] NOOR AK., et al., Computational Models for Sandwich Panels and Shells, Appl Mech Rev, vol.49, pp.155-199, 1996.
- [14] FEICHTINGER KA., Test methods and performance of structural core materials-1. Static properties, 4a ASM Int. Engineering Society of Detroit Advanced Composites Conf and Exposition, Sept., 1988.
- [15] DE HAVILLAND DH.98 MOSQUITO.2007. In site de tous les avions militaires [En ligne]. <http://aviation-militaire.kazeo.com>. (Site consulté le 23 juillet 2013).
- [16] BOUKHILI R., Notes de cours matériaux composites, 2010.
- [17] KUJALA K. and TUHKARI J., All-steel corrugated-core sandwich panels for ship structures, Solihull ed: EMAS, 1989, pp. 411-422.

- [18] KIMPARA I., et al., Design and evaluation of advanced composite honeycomb sandwich structures for marine uses, ed: EMAS, 1989, pp. 37-46.
- [19] KOCH T., Advanced vacuum bagging techniques on sandwich construction, the core material in boat building sandwich construction, Pelf/Polimex. Padova, Italie, 1990.
- [20] WEISSMAN-BERMAN D., Marine sandwich structures, Part 1, SAMPE journal, vol. 28, juillet/août 1992.
- [21] GAY D., Les matériaux sandwiches. Matériaux composites, 2 éd. Paris: Hermès, 1989.
- [22] MORGAN K., Optimization of thin skinned and core properties of high performance sandwich structures, Composite structures, Vol. 30, 1990.
- [23] GORDIN S., Tolérance aux dommages des matériaux composites aéronautiques Ph.D., Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal, 2008.
- [24] HOSLER, BURKETT, TARKANIAN., Prehistoric polymers: rubber processing in Ancient Mesoamerica, Science, 284 (1999), 1988-1990.
- [25] GENNES P. G. De Scaling Concepts in Polymer Physics. Ithaca, New York, USA, 1979.
- [26] Doi M. and EDWARDS S. F.. Dynamics of polymer solution. Oxford University press, 1986.
- [27] BOUCHEREAU M.N., Génie Mécanique des caoutchoucs, Apollor, INPL, 1997.
- [28] GROBLER J. H. A., MCGILL W., Effect of network heterogeneity on tensile and tear strength of radiation, peroxide, efficiency and conventional cured polyisoprene, J. Appl. Sci., 32, 287, 1994.
- [29] WOLFF S., WANG, M. J., TAN E. H., Surface Energy of Fillers and its effect on Rubber Reinforcement I, Kautschuk Gummi Kunststoffe, 47, 780, 1994.
- [30] SERISAWA H. NAKAMURA T., ITO M., TANAKA K., NOMURA A., Effects of oxidation of Carbon Black on the properties of Carbon Black-Natural Rubber system, Polymer Journal, 15, 201, 1983.
- [31] TRESSAUD, SHIRASAKI T., NANSE G., PAPIRER E., Surface modifications of Carbon Black in CF4 radiofrequency plasmas, Third international conference on carbon black, Octobre 2000.
- [32] DONNET J. B., The chemical Reactivity of Carbons, 6, 161, 1968.
- [33] WOLFF S., Conference on tire Science and technology, The tyre Society 1984, Akron, USA, 1984.
- [34] VIDAL A., PAPIRER E., JIAO W. M., DONNET J. B., Modification of silica surface by grafting alkyl chain. I. Characterization of silica surfaces by inverse gas-solid chromatography at zero surface coverage, chromatographia, 23, 121, 1987.
- [35] LAPRA A., Caractérisation moléculaire et propriétés mécaniques des réseaux élastomères SPR renforcés par la silice, Thèse, Université de Pierre et Marie Curie, Paris IV, 1999.

- [36] LADOUCE L., BOMAL Y., Dynamic Mechanical Properties of Precipitated Silica Filled Rubber : Influence of Morphology and Coupling Agent, Paper 33, Meeting of the rubber division, Amerin Chemical Society, Dallas April 2000, Abstract in Rubb. Chem. Technol., 73, 789, 2000.
- [37] BENNANI A., Elaboration, Comportement et durée de vie en fatigue du caoutchouc naturel renforcé de silice. PhD thesis, Centre des matériaux P.M Fourt de l'école des Mines de Paris, 2009.
- [38] MELE P., MARCEAU S., BROWN D., PUYDT Y., ALBEROL N. D., Reinforcement effects infractal structure filled rubber, Polymer, 43, 5577, 2002.
- [39] FREAKLEY P. K., CLARKE J., Reduction in Viscosity of an SBR Compound Caused by Mastication and Disagglomeration during Mixing, Rubb. Chem. Technol., 67,700, 1995.
- [40] REICHERT W. F., GORITZ D., DUSCHL E. J., The double network a model describing filled elastomers, Polymer,34,1216,1993.
- [41] HGGERS H., SHMMER P., Reinforcement mechanisms in Carbon Black and Silica located Rubber at low Stresses, Rubb. Chem. Technol., 69, 253, 1996.
- [42] AGARWAL N., FARRIS R. J., Thermodynamics of deformation of latex blend coating and its implications for tailoring their properties, J. Coat. Technol., 71, 61, 1999.
- [43] MEDALIA A. I., Electrical Conduction in Carbon Black Composites, Rubb. Chem. Technol., 59, 432, 1986.
- [44] PAYNE A. R., Low Strain Dynamic Properties of Filled Rubbers, Rubb. Chem. Technol., 44, 440, 1971.
- [45] HESS W. M., Characterization of dispersion, Rubb. Chem. Technol., 64,386,1991.
- [46] VOET A., Dynamic mechanical properties and electrical resistance of carbone black filled vulcanized at minor and major extensions, Colloq. Int. CNRS. Obernai,247, 1975.
- [47] DELATTRE A., LEJEUNES S., MÉO S., LACROIX F., RICHARD C., Caractérisation et modélisation d'un élastomère dissipatif : application au pré-dimensionnement de pièces lamifiées élastomère-métal, 11e Colloque National en Calcul des Structures,13-17 Mai 2013.
- [48] GELFER M.Y., and al., Relationships between structure and rheology in model nanocomposites of ethylene-vinyl-based copolymers and organoclays, Macromolecules, 38 (2005) 3765-3775.
- [49] YANG Y., and al., Temperature effects on the rheological properties of carbon nanotube-in-oil dispersions, Colloids and surfaces A, 298 (2007), 216-224.
- [50] Groupe Français de Rhéologie., Dictionnaire de rhéologie, Groupe français de rhéologie, volume 56 p. (1990).
- [51] PERSOZ. B., La rhéologie, Monographie Masson et Cie, (1969).

- [52] E. M. Kerwin. Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 31(7) :952–962, 1959.
- [53] D. Ross and E. M. Kerwin. Damping of flexural vibration in plates by free and constrained viscoelastic layers. Technical report, BBN Report 623, 1959.
- [54] E. E. Ungar. Loss factors of viscoelastically damped beam structures. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 34 :1082–1089, 1962.
- [55] Y. Y. Yu. Damping of flexural vibrations of sandwich plates. *Journal of Aerospace Science*, 29 :790–803, 1962.
- [56] R.A. DiTaranto. Theory of vibratory bending for elastic and viscoelastic layered finite length beams. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics*, 87 :881–886, 1965.
- [57] D.J. Mead and S. Markus. The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 10 (2) :163–175, 1969.
- [58] D.J. Mead and S. Markus. Loss factors and resonant frequencies of encastré damped sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, 12 :99–112, 1970.
- [59] M. J. Yan and E. H. Dowell. Governing equations for vibrating constrained-layer damping of sandwich plates and beams. *Journal of Applied Mechanics*, 39 :1041–1046, 1972.
- [60] Y. V. K. Sadasiva Rao and B.C. Nakra. Vibrations of unsymmetrical sandwich beams and plates with viscoelastic cores. *Journal of Sound and Vibration*, 34 (3) :309–326, 1974.
- [61] V. Oravsky, S. Markus, and O. Simkova. A new approximate method of finding the loss factors of a sandwich cantilever. *Journal of Sound and Vibration*, 33 :335–352, 1974.
- [62] D.K. Rao. Frequency and loss factors of sandwich beams under various boundary conditions. *Mechanical Engineering Science*, 20 :271–282, 1978.
- [63] D.J. Mead. A comparison of some equations for the flexural vibration of damped sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, 83(3) :363–377, 1982.
- [64] J. F. He and B.A. Ma. Analysis of flexural vibration of viscoelastically damped sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*, 126 :37–47, 1988.
- [65] Y. P. Lu, J. W. Killian, and G. C. Everstine. Vibrations of three layered damped sandwich plate composites. *Journal of Sound and Vibration*, 64 :63–71, 1979.
- [66] C. D. Johnson, D. A. Kienholz, and L. C. Rogers. Finite element prediction of damping in beams with constrained viscoelastic layers. *Shock and Vibration Bulletin*, 51 :71–81, 1981.
- [67] C.D. Johnson and D.A. Kienholz. Finite element prediction of damping in structures with constrained viscoelastic layers. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 20 :1284–1290, 1982.

- [68] M. L. Soni. Finite element analysis of viscoelastically damped sandwich structures. *Shock and Vibration Bulletin*, 55 (1):97–109, 1981.
E. M. Daya and M. Potier-Ferry. A shell finite element for viscoelastically damped Sandwich structures. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 11 :39–56, 2002.
- [69] E. M. Daya and M. Potier-Ferry. A shell finite element for viscoelastically damped Sandwich structures. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 11 :39–56, 2002.
- [70] L. Duigou, E. M. Daya, and M. Potier-Ferry. Iterative algorithms for nonlinear eigenvalue problems. Application to vibrations of viscoelastic shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :1323 – 1335, 2003.
- [71] E. Ioannides and P. Grootenhuis. A finite element analysis of the harmonic response of damped three-layer plates. *Journal of Sound and Vibration*, 67(2) :203–218, November 1979.
- [72] B.A. Ma and J.F. He. A finite element analysis of viscoelastically damped sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*, 152(1) :107–123, 1992.
- [73] R. Rickards, A. Chate, and E. Barkanov. Finite element analysis of damping the vibrations of laminated composites. *Computers and Structures*, 47(6) :1005–1015, 1993.
- [74] Howard A. Barnes, *A handbook of elementary rheology*, University of Wales Institute of Non-Newtonian Fluid Mechanics, Aberystwyth, First published 2000, ISBN 0-9538032-0-1.
- [75] A. C. Thomas, *analyse du comportement des élastomères*, Thèse de doctorat.
- [76] K. B. A. Ahmed, *Relations entre propriétés rhéologiques et structure microscopique de dispersions de particules d'argile dans des solutions de polymères*, Thèse de doctorat (2010).
- [77] GARG D.P, ANDERSON G.L, *Research in active composite materials and structures: an overview*, *Proc. SPIE 3992* (2000) 2-12.
- [78] TAKAGI T., *Present State and Future of the Intelligent Materials and Systems in Japan*, *J. Intelligent Mater. Syst. Struct.* 10 (1999) 575.
- [79] COQUELLE E., *Propriétés élastiques et viscoélastiques de matériaux composites adaptatifs*, Thèse, Université de Nice Sophia-Antipolis, 2004.
- [80] HOSLER, BURKETT, TARKANIAN, *Prehistoric polymers: rubber processing in Ancient Mesoamerica*, *Science*, 284 (1999), 1988-1990.
- [81] BENOIT H.C., *Les polymères*, *Encyclopédie Universelle* (2003).
- [82] DIANI J., *Contribution à l'étude du comportement élastique et de l'endommagement des matériaux élastomères*, Thèse de doctorat (1999) Paris.
- [83] ZRINYI M., BARSZ L., BUKI A., FERROGEL: a new magneto-controlled elastic medium, *Polymer Gels and Networks* 5 (1997) 415-427.
- [84] GINDER J.M., *Rheology controlled by magnetic fields*, in: *Encyclopedia of Applied Physics*, vol. 16, VCH Publisher Inc., New York (1996).

- [85] WINSLOW W., Induced fibrillation on suspensions”, *Journal of Applied Physics*, 20 (1949) 1137-1140.
- [86] GIGBIN Z., JILKEN L., The response of an elastomer filled with soft ferrite to mechanical and magnetic influences”, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 37 (1983) 267-276.
BEDNAREK S., Elastomery magnetoreologiczne właściwości, technologia, zastosowania, *Inżynieria Materiałowa* 1 (2003) 39-44.
- [87] BEDNAREK S., Elastomery magnetoreologiczne właściwości, technologia, zastosowania, *Inżynieria Materiałowa* 1 (2003) 39-44.
- [88] ZHOU G.Y., Shear properties of magnetorheological elastomer, *Smart Materials and Structures* 12 (2003) 139-146.
- [89] BANKS H.T., PINTER G.A., POTTER L.K., GAITENS M.J., YANYO L.C., Modeling of Nonlinear Hysteresis in Elastomer under Uniaxial Tension, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 10-February 1999.
- [90] CARLSON J.D., JOLLY M.R., MR fluid, foam and elastomer devices, *Mechatronics* 10 (2000), pp. 555-569.
- [91] FARSHAD M., Le ROUX M., Compression properties of magnetostrictive polymer composite gels, *Polymer Testing* 24 (2005) 163-168.
- [92] KANKANALA S.V., TRIANTAFYLLIDIS N., on finitely strained magnetorheological elastomer, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 52 (2004) 2869-2908
- [93] WANG Y., HU Y., CHEN L., GONG X., JIANG W., ZHANG P., CHEN Z., Effects of rubber/magnetic particle interactions on the performance of magnetorheological elastomers, *Polymer Testing* 25 (2006) 262–267.
- [94] GUAN X., DONG X., OU J., Magnetostrictive effect of magnetorheological elastomer, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 320 (2008) 158–163.
- [95] VICENTE J., BOSSIS G., LACIS S., GUYOT M., Permability measurements in cobalt ferrite and carbonyl iron powders and suspensions; *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 251 (2002) 100-108.
- [96] AN Y., SHAW M.T., Actuating properties of soft gels with ordered iron particles: basis for a shear actuator; *Smart Materials and Structures* 12 (2003) 157-163.
- [97] KALLIO M., AALTO S., LINDROOS T. INNI I, Preliminary test on a MRE device, *AMAS Workshop on Smart Materials and Structures SMART’03*, Jadwisin, 2-5.09. 2003, conference proceedings pp. 353-360.
- [98] LOKANDER M., STENBERG B., Improving the magnetorheological effect in isotropic magnetorheological rubber materials, *Polymer Testing* 22 (2003) 677-680.
- [99] DISHOVSKY N., RUSKOVA K., RADULOV I., “In situ” magnetic modification of polar elastomers, *Materials Research Bulletin* 36 (2001) 35–45.
- [100] HANSAKA M., Preparation and Properties of Magnetic Vibration Damper, *Proc. Internoise* 93 (1993) 859-862.

- [101] HANSAKA M., MIFUNE N., Damping properties of Magnetic Vibration Damper (MVD), Proc. Inter-noise 94 (1994) 693-696.
- [102] BEDNAREK S., The coupling of magnetostriction and magnetoresistance in elastic ferromagnetic composites with conducting matrix, Materials Science and Engineering B63 (1999) 228–233.
- [103] ULANSKI J., KRRZYSZEWSKI M., Polymers, electrical and electronic properties, in: Encyclopedia of Applied Physics, vol. 14, VCH Publisher Inc., New York 1996.
- [104] ROTH S., Survey of industrial applications of conducting polymers, Acta Physica Polonica 87 (1995) 4-5.
- [105] COQUELLE E., BOSSIS G., Mullins effect in elastomers filled with particles aligned by a magnetic field, International Journal of Solids and Structures 43 (2006) 7659–7672.
- [106] HUA-XIA Deng, XING-LONG G., Application of magnetorheological elastomer to vibration absorber, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 13 (2008) 1938–1947.
- [107] JOLLY M.R., CARLSON J.D. et al, The magnetoviscoelastic response of elastomer composites consisting of ferrous particles embedded in a polymer matrix. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 7 (1996) 613–622.
- [108] DEMCHUK S.A., KUZMIN V.A., Viscoelastic properties of magnetorheological elastomer in the regime of dynamic deformation. Journal of Engineering Physics and Thermophysics 75 (2), (2002) 396–400.
- [109] DAVIS L.C., Model of magnetorheological elastomers. Journal of Applied Physics 85 (6), (1999) 3348–3351.
- [110] ZHOU G.Y., Shear property of a magnetorheological elastomer. Smart Materials and Structures 12, (2003) 139–146.
- [111] ZHOU G.Y., WANG Q., Use of magnetorheological elastomer in an adaptive sandwich beam with conductive skins. Part I: Magnetoelastic loads in conductive skins, International Journal of Solids and Structures 43 (2006) 5386–5402.
- [112] ZHOU G.Y., WANG Q., Use of magnetorheological elastomer in an adaptive sandwich beam with conductive skins. Part II: Dynamic properties, International Journal of Solids and Structures 43 (2006) 5403–5420.
- [113] DWIVEDY S.K., MAHENDRA N., K.C. SAHU, Parametric instability regions of a soft and magnetorheological elastomer cored sandwich beam, Journal of Sound and Vibration 325 (2009) 686 – 704.
- [114] NAYAK B., DWIVEDY S.K., MURTHY K.S.R.K., Dynamic analysis of magnetorheological elastomer-based sandwich beam with conductive skins under various boundary conditions, Journal of Sound and Vibration 330 (2011) 1837-1859.
- [115] KIRCHHOFF G. 1850 Mathemetical Journal 40, 51-58. UG berdas Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen scheibe.

- [116] LOVE A. E. H., 1944. New York: Dover. A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity.
- [117] LEISSA, 1969 NASA, SP-160. Vibration of plates.
- [118] TURNER M. J. CLOUGH, MARTIN R. W. and al. 1956 Journal of Aerosol Science, N23, P805-823. Stiffness and deflection analysis of complex structure.
ZIENKIEWICZ, 1977, New York: Mc Graw-Hill second edition, the finite element method.
- [119] ZIENKIEWICZ, 1977, New York: Mc Graw-Hill second edition, the finite element method.
- [120] BOGNER F. K., 1966Proceeding of the Conference on Matrix Method in Structural Mechanics. Wright-Patterson Air Force / Air Force Flight Dynamics Lab. TR-66-80. The generation of interelement-Compatible Stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas.
- [121] Germain P. : Mécanique, Tome 1. Ellipses, Paris, 1986.
- [122] Germain P. et Muller P. : Introduction à la mécanique des milieux continus. Masson, Paris, 2 éditions, 1995.
- [123] MINDLIN R.D. "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates". J.Appl.Mech., Vol 18, 31-38 (1951).
- [124] REISSNER.E., The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J. Appl. Mech., vol. 12, pages 69/77, 1945.
- [125] O. C. Zienkiewicz et R. L. Taylor : The Finite Element Method, Fifth edition Volume 2, Solid Mechanics. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [126] Jia-Yi Yeh, Vibration analysis of sandwich rectangular plates with magnetorheological elastomer damping treatment, Journal of Smart Materials and Structures. 22(2013) 035010 (8pp).
- [127] Z. G. Ying, Y. Q. Ni, S. Q. Yes, Stochastic micro-vibration suppression of a sandwich plate using a magnetorheological viscoelastomer core, Journal of Smart Materials and Structures. 23(2014) 025019 (11pp).
- [128] Feng-Ming Li, Kikuo Kishimoto, Wen-Hu Huang. The calculations of natural frequencies and forced vibration responses of conical shell using the Rayleigh–Ritz method, Mechanics Research Communications 36 (2009) 595–602.
- [129] J. M. Whitney, Structural analysis of laminated anisotropic plates, Technomic Publishing Company, 851 New Holland Avenue, 1987.
- [130] W. Tongan, V. Sokolinsky, S. Rajaram, S. R. Nutt, Consistent higher-order free vibration analysis of composite sandwich plates, Composite Structures 82 (2008) 609–621.
- [131] J. M. Berthelot, Mechanical Behaviour of Composite Materials and Structures, 3rd edition, Technical & Documentation, 1999.
- [132] J. de Vicente, G. Bossis, S. Lacis, M. Guyot, Permeability measurements in cobalt ferrite and carbonyl iron powders and suspensions, Journal of Magnetism and Magnetic Materials 251 (2002) 100–108.

- [133] C. Hoffmann, M. Franzreb, A novel repulsive-mode high gradient magnetic separator. Part I. Design and experimental results, IEEE T Magn, 40 (2004) 456-461.
- [134] Y.K. Cheung, D. Zhou. Vibration analysis of symmetrically laminated rectangular plates with intermediate line supports, Computers and Structures 79 (2001) 33-41.