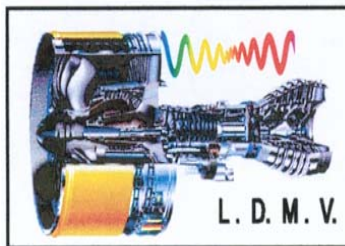


République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université M'hamed BOUGARA Boumerdes



Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département : Génie Mécanique
Laboratoire : Dynamique des Moteurs et Vibroacoustique



Mémoire de Magister

Thème :

**Analyse spectrale des vibrations
Application à la maintenance des équipements mécaniques**

Présenté par : **Nouredine CHIKH**

Soutenu le : 30 - 06 - 2005

Devant le jury composé de :

MM.	S. RECHAK	Professeur	ENP	Alger	Président
	B. NECIB	Professeur	UM.	Constantine	Examineur
	K. BADDARI	Professeur	UMB.	Boumerdes	Examineur
	M.O. SI-CHAIB	M.C	UMB.	Boumerdes	Examineur
	A. NOUR	Professeur	UMB.	Boumerdes	Encadreur

Année universitaire 2004/2005

AVANT PROPOS

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire dynamique des moteurs et vibroacoustique de la Faculté des Sciences de l'Ingénieur à l'université de Boumerdes.

*Je tiens à exprimer mes remerciements et ma profonde reconnaissance à Monsieur **Abdelkader NOUR**, Professeur à l'UMB Boumerdes, directeur du laboratoire LDMV et directeur de mémoire, pour l'aide et les encouragements dont il a fait preuve à mon égard, ainsi que pour son soutien moral et matériel, qui ont permis à ce travail d'aboutir.*

*Que Monsieur **SI-CHAIB Med Ouali**, Maître de Conférences à l'université de Boumerdes, qui n'a jamais ménagé ses efforts pour m'apporter aide et encouragements, trouve ici l'expression de ma profonde gratitude, comme je le remercie pour avoir accepté de faire partie du jury.*

*Je remercie vivement Monsieur **Said RECHAK**, Professeur à l'ENP Alger, de l'honneur qu'il me fait de juger ce travail et d'avoir accepté la présidence du jury.*

*Que Monsieur **Kamel BADDARI**, Professeur à l'université de Boumerdes, doyen de la faculté des sciences, trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance d'avoir accepté de faire partie du jury.*

*J'adresse aussi mes vifs remerciements à Monsieur **Brahim NECIB**, Professeur à l'UM Constantine, pour avoir accepté de faire partie du jury.*

Je n'oublierai pas de remercier chaleureusement aussi tous mes collègues enseignants et mes amis pour le soutien et l'encouragement qu'ils ont eu à mon égard pour faire aboutir ce travail.

ملخص

مراقبة الآلات المحورية يستعمل فيها طرق التحليل الطيفي للاهتزازات التي تتركز على تنظيم الإشارات. المقاربة الكلاسيكية بتحويلات فورييه تتوافق أساسا مع الإشارات الدورية ولكن لها حدود بالنسبة للإشارات المركبة أو غير الثابتة .

ولهذا تحسين التدقيق الترددي يفرض الاستعانة بالطرق الثابتية ؛ تمثيل زمن التردد أو نموذجية الارتداد الذاتي . الغرض من هذه الدراسة هو من جهة بيان الأداة الكلاسيكية المستعملة في حقل التحليل الاهتزازي ، ومن ناحية أخرى معرفة إسهام الطرق الثابتية ذات الارتداد الذاتي . خوارزميات ليفنسون – دوربان و بورغ اختبرت على الإشارات الاصطناعية وعلى الإشارات الملتقطة على منضدة التجربة

كلمات المفتاح : اهتزازات – التحليل الطيفي – التشخيص - الطرق الثابتية.

Résumé :

La surveillance des machines tournantes se fait de plus en plus par l'analyse spectrale des vibrations. Les méthodes d'analyse dépendent de l'organisation des signaux.

L'approche classique par la transformée de Fourier (Fast Fourier Transform) est bien adaptée aux signaux essentiellement périodiques. Cependant, elle présente des limitations pour des signaux se caractérisant par des signatures complexes, ou des non stationnarités.

A cet effet, l'amélioration de la résolution fréquentielle s'impose, en faisant appel aux méthodes paramétriques, la représentation temps-fréquence (WV) ou la modélisation Auto régressive AR(p).

L'objectif de cette étude est de présenter, d'une part, l'outil classique utilisé dans le domaine de l'analyse vibratoire (FFT), et d'autre part, de voir la contribution des méthodes paramétriques auto régressives (corrélation et maximum d'entropie). Les algorithmes de Levinson-Durbin et de Burg ont été testés sur des signaux artificiels ainsi que des signaux recueillis sur banc d'essai.

Mots clés : vibrations – analyse spectrale – diagnostic – méthodes paramétriques

Abstract:

Vibrations monitoring of rotating machines is increasingly carried out by use of spectral analysis. The methods of analysis depend on the signal shape.

The conventional approach by use of Fourier transform (Fast Fourier Transform), well suited to harmonic signals cannot handle arbitrary and more complex signals. To this end, resolution in the frequency domain has to be extended to the so-called parametric methods i.e: The resolution in the time frequency domain (WV) or Auto regressive model AR(p).

The aim of this study is two fold: to present the traditional approach of vibrations analysis (FFT), as well as its extension to the more general parametric method : The autoregressive model (correlation and maximum entropy).The Levinson-Durbin and Burg algorithms have been checked on artificially generated as well as on real signals.

Keywords : vibrations – spectral analysis – diagnosis – parametric methods .

Nomenclature

$x(t)$: Signal temporel analogique.
f	: Fréquence (Hz).
$X(f)$: Transformée de Fourier de $x(t)$.
$ X(f) $: Spectre d'amplitude du signal.
$\varphi(f)$: Spectre de phase.
T_o	: Période (s).
f_o	: Fréquence (Hz).
ω_o	: Pulsation (rad/s).
t_e	: Durée d'échantillonnage (s).
f_e	: Fréquence d'échantillonnage (Hz).
f_{\max}	: Fréquence maximale d'analyse (Hz).
N	: Nombre d'échantillons du signal.
Δf	: Résolution fréquentielle (Hz).
Δt	: Durée d'observation du signal (s).
X_m	: Amplitude moyenne du signal.
X_c	: Amplitude crête.
X_{cc}	: Amplitude crête à crête.
X_{eff}	: Amplitude efficace.
F_f	: Facteur de forme.
$p(x)$: Densité de probabilité.
μ	: Variance.
σ	: Ecart-type.
K	: Kurtosis.
F_c	: Facteur de crête.
f_c	: Fréquence de coupure.
B	: Bande de fréquence d'analyse.
dB	: Décibel.
p	: Facteur de zoom.
$C_p(\tau)$: Cepstre (transformée inverse du logarithme du spectre).
F_{rot}	: Fréquence de rotation.
f_e	: Fréquence d'engrènement.
f_p	: Fréquence de passage de courroie.
z	: Nombre de dents de l'engrenage.
F_{be}	: Fréquence de passage d'un défaut sur la bague externe du roulement.
F_{bi}	: Fréquence de défaut sur la bague interne.
F_c	: Fréquence de passage d'un défaut de cage.
F_e	: Fréquence de passage d'un défaut de bille.
d	: Diamètre de l'élément roulant.
D	: Diamètre moyen du roulement.
N_b	: Nombre d'éléments roulants.
α	: Angle de contact.
F_c	: Fréquence de coïncidence.

- $x(n)$: Signal échantillonné ou processus modélisé.
 $u(n)$: Excitation.
 $H(z)$: Fonction de transfert.
 a_i : Les paramètres de la partie autorégressive (AR).
 b_i : Les paramètres de la partie moyenne ajustée (MA).
 p : Nombre de paramètres ou ordre du modèle AR.
 q : Nombre de paramètres ou ordre du modèle MA.
 $A(z)$: Transformée en z de la branche AR.
 $B(z)$: Transformée en z de la branche MA.
 $X(z)$: Transformée en z du processus $x(n)$.
 $\hat{X}(n)$: Prédiction de l'échantillon $x(n)$.
 $e_p(n)$: Erreur de prédiction linéaire (EPL).
 $e_p^p(n)$: Erreur de prédiction progressive.
 $e_p^r(n)$: Erreur de prédiction rétrograde.
 ζ : Erreur quadratique moyenne.
 $S_x(f)$: Densité spectrale de puissance.
 f_r : Fréquence réduite.
 σ^2 : Variance.
 $C_{xx}(k)$: Fonction d'autocorrelation.
 $x^*(n)$: Conjugué de $x(n)$.
 K_p : Coefficient de corrélation partielle ou coefficient de réflexion.

Abréviations

- RMS : Root Mean Square.
 TFD : Transformée de Fourier Discrète.
 FFT : Fast Fourier Transform.
 DSP : Densité spectrale de puissance.
 ARMA : Modèle auto régressif à moyenne ajustée.
 AR : Modèle auto régressif.
 MA : Modèle à moyenne ajustée.
 FPE : Final prediction error.
 AIC : Akaike information criterion.
 RSB : Rapport signal sur bruit.

Figures :

- Figure I-1** Classification et traitement des signaux.
Figure I-2 Grandeurs caractéristiques d'un signal périodique.
Figure I-3 Vibration complexe quelconque.
- Figure II-1** Décomposition d'un signal vibratoire en deux composantes harmoniques.
Figure II-2 Représentation spectrale des composantes du signal donné.
Figure II-3 Exemples de conversion temps/fréquence.
Figure II-4 Les différentes étapes de traitement du signal.
Figure II-5 Exemple d'un signal motif.
Figure II-6 Effet d'échantillonnage dans le domaine temporel.
Figure II-7 Les différents types de filtres.
Figure II-8 a- Signal vibratoire temporel mesuré sur un arbre tournant à 1500 tr/mn.
Figure II-8 b- Spectre d'amplitude correspondant.
Figure II-9 Schéma de principe d'une analyse en mode de base et en mode zoom.
Figure II-10 Exemple d'un signal modulé (a) en amplitude (b) en fréquence.
- Figure III-1** Défaut de balourd.
Figure III-2 Image vibratoire théorique d'un balourd.
Figure III-3 Défaut d'alignement.
Figure III-4 Image vibratoire théorique d'un défaut d'alignement.
Figure III-5 Schéma d'un roulement.
Figure III-6 Image vibratoire théorique d'un écaillage affectant la bague externe.
Figure III-7 Image vibratoire théorique d'un écaillage affectant la bague interne.
Figure III-8 Image vibratoire théorique d'un défaut affectant un élément roulant.
Figure III-9 Schéma simplifié d'un engrenage.
Figure III-10 Image vibratoire théorique d'un engrenage en bon état.
Figure III-11 Image vibratoire théorique d'une dent détériorée sur la roue motrice.
- Figure IV-1** Modélisation paramétrique.
Figure IV-2 Principes d'estimation de la densité spectrale de puissance par les méthodes paramétriques.
Figure IV-3 Prédiction directe et rétrograde d'ordre p.
Figure IV-4 Critère de sélection de l'ordre du modèle.
- Figure V-1** Signal simulé N=200 échantillons $f_e=120$ Hz.
Figure V-2 Résolution de la méthode de corrélation en fonction du nombre d'échantillons N et problème du choix de l'ordre p.
Figure V-3 Evolution de la variance et de l'erreur de prédiction finale (FPE) en fonction de l'ordre p.
Figure V-4 Résolution de la DSP et choix de l'ordre p (Méthode de Burg).
Figure V-5 Evolution de la variance et de l'erreur de prédiction finale FPE en fonction de l'ordre p.
Figure V-6 Résolution de la méthode de Corrélation en fonction du Rapport Signal/Bruit.
Figure V-7 Résolution de la méthode de Burg en fonction du rapport Signal/Bruit.
Figure V-8 Schéma du banc d'essai.
Figure V-9 Signal temporel en déplacement (direction : radiale horizontale).

Figure V-10	Spectre d'amplitude.
Figure V-11	Signal temporel - palier 1, direction radiale horizontale.
Figure V-12	Spectre FFT du signal [10 – 100] Hz, Moyennage sur 8 spectres.
Figure V-13	Spectre paramétrique AR (corrélation).
Figure V-14	Spectre paramétrique AR (Burg).
Figure V-15	Spectre FFT [10 - 1000] Hz, (N=2048 points, Fe=2.06 khz).
Figure V-16	Spectre paramétrique AR (Corrélation).
Figure V-17	Spectre paramétrique AR (Burg).
Figure V-18	Spectre paramétrique (Corrélation) en échelle linéaire.
Figure V-19	Spectre paramétrique (Burg) en échelle linéaire.
Figure A1-1	Produit de convolution par un peigne de Dirac.

Tableaux :

Tableau I-1	Choix des indicateurs de mesure.
Tableau II-1	Choix des indicateurs de mesure.
Tableau III-1	Reconnaissance des principaux défauts.
Tableau.III-2	Exemple de fréquences caractéristiques de roulements.
Tableau III-3	Effet des défauts sur les signaux vibratoires.
Tableau III-4	Exemple de fiche cinématique.
Tableau A2.1	Définition temporelle de quelques fenêtres.
Tableau A2.2	Caractéristiques des fenêtres.
Tableau A3.1	Niveaux vibratoires admissibles sur les machines tournantes.

Sommaire

	<i>page</i>
<i>Introduction générale</i>	5
Chapitre I <i>Eléments d'analyse des signaux vibratoires</i>	
<i>Introduction</i>	9
I-1 ... <i>Grandeurs caractéristiques d'un signal périodique</i>	10
I-2 ... <i>Caractéristiques statistiques d'un signal aléatoire</i>	11
2-1 ... <i>Densité de probabilité</i>	11
2-2 ... <i>Valeur moyenne (espérance mathématique)</i>	11
2-3 ... <i>Variance</i>	11
2-4 ... <i>Ecart type</i>	11
2-5 ... <i>Kurtosis</i>	11
2-6 ... <i>Facteur de crête</i>	12
I-3 ... <i>Grandeurs scalaires des signaux échantillonnés</i>	12
I-4 ... <i>Choix des grandeurs de mesure</i>	13
I-5 ... <i>Passage de la représentation temporelle à la représentation en fréquence</i> <i>et inversement</i>	13
5-1 ... <i>Signal périodique</i>	14
5-2 ... <i>Signal analogique non périodique</i>	14
5-3 ... <i>Cas d'un signal échantillonné</i>	15
I-6 ... <i>Transformée de Fourier discrète</i>	16
I-7 ... <i>Transformée de Fourier rapide</i>	16
I-8 ... <i>Indicateurs spectraux de base</i>	17
<i>Conclusion</i>	18
Chapitre II <i>Techniques de traitement du signal</i>	
<i>Introduction</i>	20
II-1 ... <i>Représentation en temps et en fréquence d'un signal</i>	20
II-2 ... <i>Conditionnement et traitement du signal</i>	22
2-1 ... <i>Acquisition du signal</i>	23
2-2 ... <i>Numérisation et échantillonnage</i>	24
2-3 ... <i>Filtrage (ou bande passante)</i>	24
2-3-1 <i>Filtre passe-bas</i>	25
2-3-2 <i>Filtre passe-bande</i>	25
2-3-3 <i>Filtre passe-haut</i>	25
2-4 ... <i>Amplification</i>	26
2-5 ... <i>Fenêtrage et périodisation</i>	26
2-6 ... <i>Le moyennage synchrone</i>	26
2-7 ... <i>Représentation graphique d'un spectre</i>	26
2-8 ... <i>Interprétation physique des spectres</i>	27
2-9 ... <i>La fonction zoom</i>	28
2-10 ... <i>Autres techniques</i>	29
2-10-1 <i>Le cepstre</i>	29
2-10-2 <i>Démodulation d'amplitude</i>	31
2-10-3 <i>Démodulation de fréquence</i>	31

2-11 ... Choix de la chaîne et des indicateurs de mesure	31
2-11-1 Choix des bons indicateurs	31
2-11-2 Considération sur le choix de la chaîne de mesure	32
conclusion	32

Chapitre IIIAnalyse des défauts dans les machines tournantes

Introduction	35
III-1 ...Défaut de balourd	35
III-2 ...Défaut d'alignement	37
III-3 ...Défauts spécifiques aux roulements	38
3-1 Généralités	38
3-2 Caractéristiques fréquentielles	38
3-3 Quelques images vibratoires théoriques	40
III-4 ...Défauts d'engrenage	41
4-1 Généralités	41
4-2 Caractéristiques fréquentielles	42
III-5 ...Autres types de défauts	43
III-6 ...Recherche des symptômes et images vibratoires	44
6-1 Etude préalable du fonctionnement de l'installation	44
6-2 Prise de mesures	44
6-3 Exemple de fiche cinématique	45
6-4 Traitement des signaux	46
6-5 Fiabilité du diagnostic	46
III-7 ...Installations à chaîne cinématique complexe	46
Conclusion	48

Chapitre IV.....Méthodes paramétriques Modélisation auto régressive

Introduction	50
IV-1 ...Modélisation paramétrique	50
1-1 Généralités	50
1-2 Description des modèles	51
1-2-1 Modèles Auto régressif à moyenne ajustée (ARMA)	51
1-2-2 Modèles Auto régressif (AR)	52
1-2-3 Modèles à moyenne ajustée (MA)	52
IV-2 Choix du modèle	53
IV-3 Propriétés de la modélisation AR	54
3-1 Prédiction linéaire	54
3-2 Erreur de prédiction progressive et rétrograde	55
IV-4 Densité spectrale de puissance des modèles Auto Régressifs	55
4-1 Estimation de la DSP d'un modèle AR	55
IV-5 Equations des coefficients AR	56
5-1 Equations de YULE –WALKER	56
5-2 Algorithme de Levinson – Durbin	57
5-3 Algorithme de Burg	58

5-3-1 Calcul des erreurs	59
5-3-2 Détermination de la relation de récursion pour l'erreur progressive	59
5-3-3 Détermination de la relation de récursion pour l'erreur rétrograde.....	60
5-4 Détermination de l'ordre du modèle	62
Conclusion.....	64

Chapitre V.....Applications

V-1 Mise en œuvre des algorithmes de Levinson et de Burg.....	65
V-2 Acquisition des signaux sur banc d'essai.....	74
V-2-1 Description de la plate-forme expérimentale.....	74
V-2-2 Instrumentation utilisée.....	76
V-2-3 Identification de la fréquence de résonance de l'arbre.....	76
conclusion	82
Conclusion générale	83
Bibliographie	85
Annexes	

Introduction

Introduction générale

L'outil le plus important du traitement du signal est l'analyse spectrale. Ceci est justifié par le fait qu'une description fréquentielle est souvent à la base d'une plus grande compréhension des phénomènes mis en jeu, en fournissant un complément d'information à la seule description temporelle [ABD 93]. Cette analyse repose sur la décomposition des signaux en leurs principales composantes fréquentielles, une pratique très répandue, et fournit des paramètres pertinents dans des domaines aussi divers que : géophysique, communication, médecine et énergie.

Le problème qui se pose en analyse spectrale est d'arriver à partir d'un nombre fini d'échantillons d'un processus à *estimer* au mieux sa densité spectrale de puissance. Plusieurs méthodes d'estimation sont connues, parmi celles-ci les méthodes dites classiques qui stipulent que la densité spectrale de puissance est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrelation du processus étudié (méthode du correlogramme). La méthode du périodogramme est basée sur un théorème relatif aux processus déterministes où la densité spectrale de puissance est donnée par le carré du module de la transformée de Fourier du signal.

L'analyse spectrale des vibrations est un outil privilégié de la surveillance des machines tournantes dans le cadre de la maintenance conditionnelle voire prédictive. Les méthodes de surveillance sont basées sur l'étude des modifications de certains *descripteurs* ou *indicateurs* issus de signaux vibratoires. Car les vibrations engendrées par les pièces en mouvement sont les images des efforts dynamiques de ces pièces, et l'analyse des spectres issus de signaux multi capteurs permet de déceler la variation du comportement, et de surveiller la structure par rapport à certains seuils au-delà desquels, la fiabilité est compromise et l'instabilité est destructrice. Dans ce contexte, l'approche par analyse de Fourier (spectres FFT) est efficace et permet de détecter un bon nombre de défauts dans les machines tournantes se caractérisant par des signaux vibratoires riches en harmoniques, cet outil se trouve implanté dans la totalité des systèmes de surveillance.

Le spectre, servant à l'identification et au diagnostic, est un graphe sur lequel sont représentées les amplitudes et les fréquences de toutes les composantes vibratoires élémentaires (appelées raies) caractérisant le fonctionnement d'une machine. Et l'interprétation consiste à trouver l'origine cinématique de chaque composante.

La fiabilité et le coût de la surveillance par l'analyse des vibrations, la précocité de révélation des défauts sont fonctions du choix des indicateurs mais aussi de nombreux autres paramètres liés à la prise de mesure et à l'exploitation des résultats.

Néanmoins, il existe des cas où l'analyse simple de Fourier s'avère inefficace dans le cas de signaux aléatoires, ou présentant des non-stationnarités, et il est légitime d'espérer que d'autres méthodes apportent un plus à l'analyse de Fourier.

A cet effet, dans les années récentes, les méthodes d'analyses sont focalisées sur des techniques de modélisation paramétrique auto régressive et qui ont apporté un plus à la détection de certains défauts dans les machines tournantes.

Selon la référence [SID 90], le suivi de l'erreur de prédiction linéaire permet la détection précoce de l'écaillage sur une dent à partir d'essais conduits sur des réducteurs.

Selon la référence [DRO 92], la comparaison de modèles auto régressifs à l'aide de la distance Log-spectrale a permis de détecter des défauts d'écaillage sur des engrenages.

L'auteur de la référence [BAR 92] a montré que les coefficients de corrélation partielle K_i et les coefficients cepstraux C_i calculés à partir des coefficients a_i des modèles auto régressifs ont de très bonnes aptitudes à la classification(en réseaux de neurones) et sont de bons descripteurs pour un diagnostic automatique.

Selon la référence [MOL 92], les coefficients cepstraux des modèles AR améliorent la reconnaissance du cliquetis moteur avec des techniques de classification.

Selon la référence [ABU 03], l'auteur a montré que la méthode d'ondelettes et les valeurs crêtes du spectre de la méthode du maximum d'entropie (Burg) sont beaucoup plus efficaces que les moments statistiques temporels, dans les réseaux de neurones pour la détection et la classification d'usure d'outils en utilisant les signaux vibratoires.

Dans cette étude, l'objectif est de présenter les techniques classiques d'analyse vibratoire basées sur la transformée de Fourier bien adaptées aux signaux essentiellement périodiques des machines tournantes, et de voir la contribution de méthodes paramétriques (modélisation Auto régressive) pour la caractérisation des signaux à caractère aléatoire (stationnaire).

De ce fait, le présent mémoire s'articule sur cinq chapitres.

Dans le chapitre I, on fait un rappel des définitions de certains éléments d'analyse des signaux vibratoires et de leurs grandeurs caractéristiques, ainsi qu'une présentation de l'outil mathématique nécessaire à l'analyse spectrale.

Le chapitre II présente les différentes étapes de conditionnement et de traitement que doit subir un signal vibratoire analogique issu d'un capteur, avant d'être exploité sous forme d'un spectre : outil fondamental de diagnostic. La fiabilité du diagnostic repose aussi sur des techniques de traitements spécifiques à certains types de défauts.

Dans le chapitre III, on fait état des principaux défauts couramment rencontrés dans les machines tournantes ainsi que leurs signatures vibratoires.

Le chapitre IV aborde une modélisation paramétrique des signaux, outil d'analyse répandu principalement dans les domaines de la géophysique et l'automatique. La modélisation auto-régressive trouve son application dans le diagnostic des machines tournantes dans le cas de certains défauts se manifestant selon un caractère aléatoire, elle est basée sur le suivi de l'erreur de prédiction en testant son éloignement par rapport à un bruit blanc, et il y a existence de défaut dès qu'il y a présence de non stationnarité dans le signal vibratoire.

Le chapitre V est consacré aux applications, dont les résultats sont présentés après la mise en œuvre des algorithmes des méthodes paramétriques, et ceci en vue de voir leurs performances sur des signaux tests artificiels bruités, ainsi que des signaux réels recueillis sur banc d'essai.

Chapitre I

Eléments d'analyse des signaux vibratoires

Chapitre I

Eléments d'analyse des signaux vibratoires

Introduction

Les vibrations des machines sont toujours liées à leur fonctionnement, et sont l'image de leurs efforts internes, elles sont donc un bon indicateur de leur état mécanique. Cela veut dire que pour surveiller l'état de santé de la machine, il suffit en principe de mesurer et de caractériser l'évolution de ses vibrations. Par conséquent, en fonction du paramètre vibratoire qui évolue, il est possible de repérer une anomalie.

Mais pour extraire de l'information contenue dans un signal, il faut effectuer un traitement qui dépendra généralement de la nature du signal (figure I-1) [MOR 92].

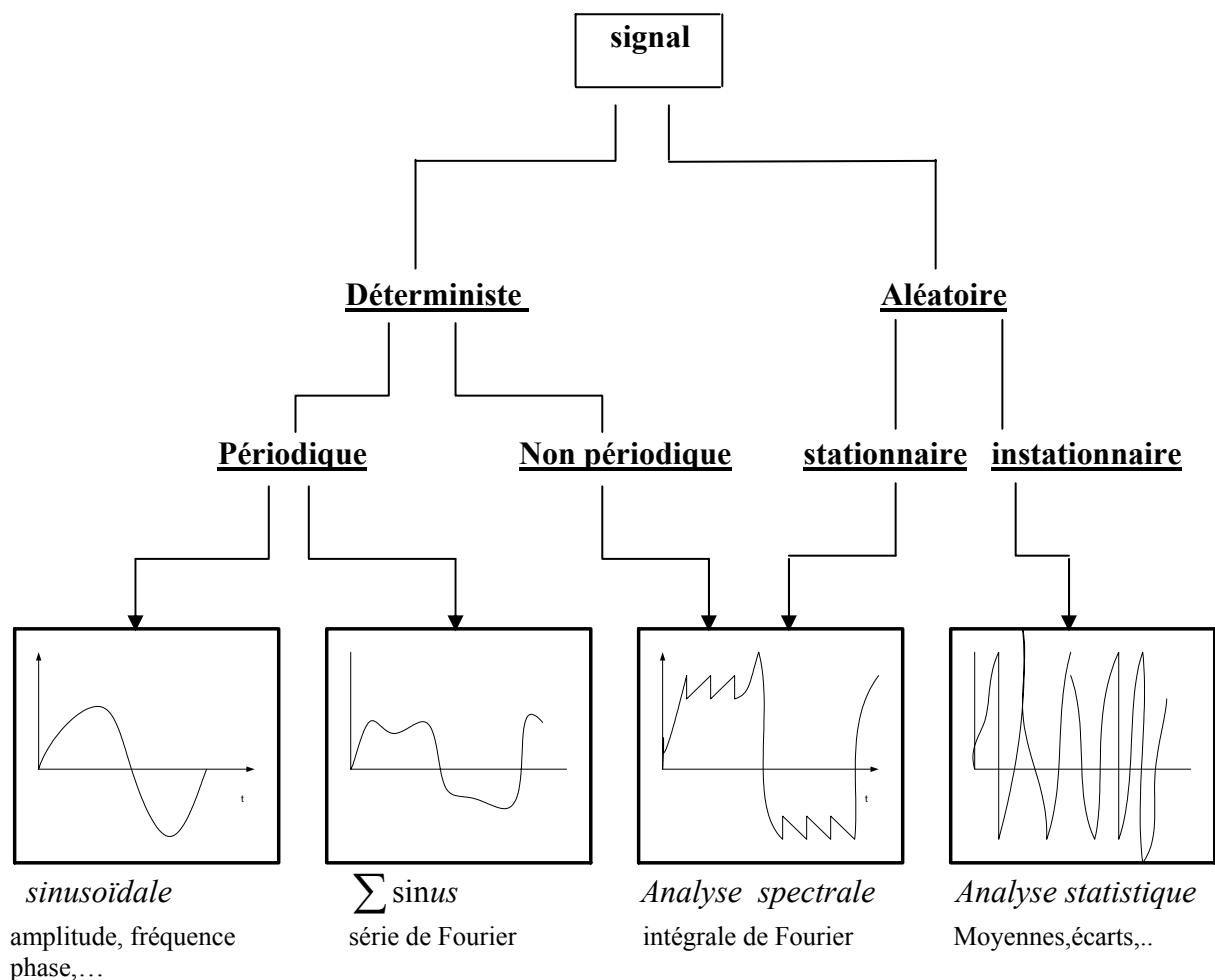


Figure I.1 Classification et traitement des signaux

I-1 Grandeurs caractéristiques d'un signal périodique

Un système mécanique est dit en vibration lorsqu'il oscille autour de sa position d'équilibre. Un signal vibratoire périodique $x(t)$ est caractérisé par (voir FigureI-2) :

- sa période T_0 ,
- sa fréquence $f_0 = 1/T_0$,
- sa pulsation $\omega_0 = 2\pi f_0$,
- sa valeur moyenne $X_m = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) dt$ (I.1)

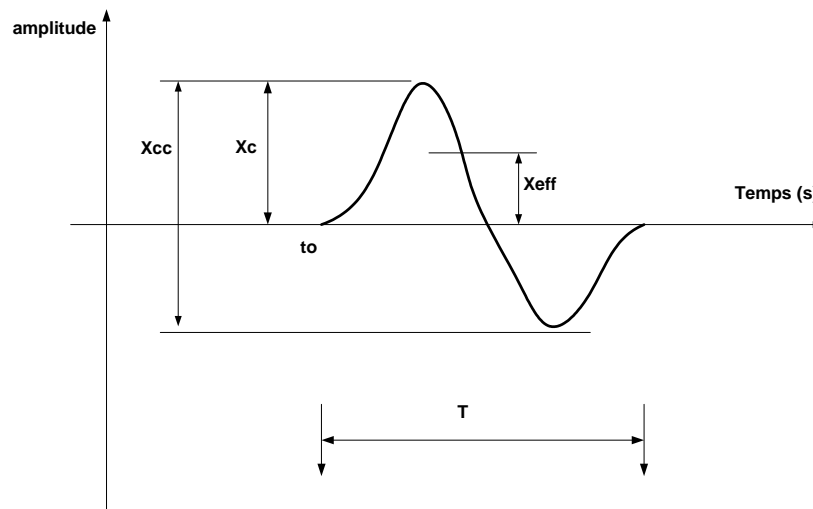


Figure I-2 Grandeurs caractéristiques d'un signal périodique.

- Son amplitude crête (X_c) : amplitude maximale par rapport aux points d'équilibre (niveau crête).
- son amplitude crête à crête (X_{cc}) : la somme de la valeur crête positive et l'amplitude crête négative.
- Son amplitude efficace X_{eff} (RMS : root mean square) :

$$X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x^2(t) dt} \quad (I.2)$$

La valeur efficace représente la puissance du signal,

et $\int_{t_0}^{t_0+T_0} x^2(t) dt$ représente l'énergie du signal.

- ses fréquences harmoniques $n f_0$, $n = 1, 2, 3, \dots, n$ ième harmonique.
pour $n=1$ la fréquence est dite aussi fondamentale.

- son facteur de forme : $F_f = \frac{X_{eff}}{X_m}$

I-2- Caractéristiques statistiques d'un signal aléatoire

I-2-1 Densité de probabilité

La probabilité $p(x, dx)$ pour que la variable aléatoire soit comprise entre x et $x+dx$ est égale par définition à : $p(x) dx$,

$p(x)$ est la densité de probabilité, il est à rappeler que cette quantité est normée, autrement dit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1 \quad (I.3)$$

I-2-2 Valeur moyenne (moment statistique d'ordre 1)

Elle est définie à partir de la variable $x(t)$ et de la densité de probabilité $p(x)$ par :

$$x_m = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx \quad (I.4)$$

I-2-3 Variance (moment statistique d'ordre 2)

La variance est définie par :

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-x_m)^2 p(x-x_m) dx \quad (I.5)$$

I-2-4 Ecart type (valeur quadratique moyenne)

C'est la quantité σ telle que : $\sigma = \sqrt{\mu}$ (I.6)

I-2-5 Kurtosis (distribution de l'amplitude)

C'est un paramètre qui tend à quantifier l'aplatissement de la courbe de densité de probabilité du signal, il est défini par :

$$K = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-x_m)^4 p(x) dx}{\sigma^4} \quad (I.7)$$

Ce paramètre est très important pour la surveillance des roulements (vibrations de type impulsionnel). Un roulement en bon état engendre un signal vibratoire dont la distribution de l'amplitude est gaussienne, avec un Kurtosis K voisin de 3.

I-2-6 Facteur de crête

Le facteur de crête est défini par le rapport de la valeur crête sur la valeur efficace :

$$F_c = \frac{X_c}{X_{eff}} \quad (I.8)$$

Cet indicateur est un outil qui permet de mettre en évidence les roulements en phase de dégradation. Lorsque le facteur de crête est faible, il convient de s'assurer que la valeur efficace (ou la valeur crête) de l'amplitude n'est pas en progression, ce qui signifie que l'état du roulement est en dégradation.

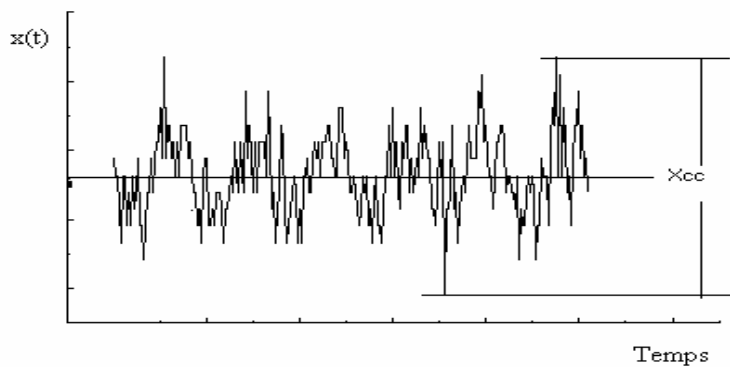


Figure I-3 Vibration complexe quelconque.

I-3 Grandeurs scalaires des signaux échantillonnés

Pour les signaux échantillonnés, les indicateurs scalaires généralement retenus qui peuvent avoir une signification physique ou dont l'évolution dans le temps renseigne sur l'aggravation d'un défaut sont donnés par les expressions suivantes:

Energie :
$$E = \sum_{k=1}^N x_k^2$$

Puissance :
$$P = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^2$$

Amplitude crête :
$$X_{crete} = \sup_{k=1, N} |x_k|$$

Valeur efficace :
$$X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2}$$

Valeur moyenne :
$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$$

Kurtosis :
$$k = \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^4}{X_{eff}^4}$$

$$\text{Facteur de crête} : FC = \frac{X_{\text{crête}}}{X_{\text{eff}}}$$

I-4- Choix des grandeurs de mesure

Les grandeurs retenues pour la mesure des vibrations mécaniques sont :

- le déplacement (en μm ou mm),
- la vitesse (en m/s),
- l'accélération (en m/s^2 ou g).

On choisira préférentiellement :

- La grandeur déplacement pour détecter des phénomènes à basse fréquence ;
- La grandeur vitesse pour détecter des phénomènes se situant dans une large gamme de fréquence;
- La grandeur accélération pour détecter des phénomènes à haute fréquence.

En pratique, l'obtention de la vitesse ou le déplacement, à partir de l'accélération s'effectue au moyen d'une intégration électronique. Mais l'opération inverse, crée un important bruit de fond qui affecte la qualité de la mesure.

Le tableau I-1 recense les choix des indicateurs de vibrations à mesurer [BOU 98] :

<i>Indicateur vibratoire</i>	<i>Amplitude mesurée en</i>
Déplacement x	valeur crête X_c valeur crête à crête X_{cc}
Vitesse v	valeur crête X_c valeur efficace X_{eff}
Accélération γ	valeur efficace X_{eff}

Tableau I-1. Choix des indicateurs de mesure

Les raisons de ces choix sont les suivantes :

- La mesure de l'amplitude crête ou crête à crête pour le déplacement permet de voir l'ampleur du phénomène.
- La mesure de l'amplitude efficace pour la vitesse ou l'accélération permet de mettre en évidence l'énergie dépensée.

I-5- Passage de la représentation temporelle à la représentation en fréquence et inversement

Un signal peut être représenté soit dans le domaine temporel soit dans le domaine en fréquence, on rappelle le théorème de *Parseval* qui s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \quad (I.9)$$

Ce dernier exprime que l'énergie du signal est indépendante du mode de représentation.

Dans ce qui suit, on donnera les résultats de passage d'une représentation à une autre. Ce résultat s'obtient par la transformation de Fourier selon le type de signal considéré.

I-5-1 Signal périodique

Un signal analogique périodique de période T peut se mettre sous la forme d'une somme de termes sinusoïdaux de fréquence f multiple de la fréquence f_0 dite fréquence fondamentale, soit :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n f_0 t + b_n \sin 2\pi n f_0 t \quad (\text{I.10})$$

ou a_n et b_n sont les coefficients de la série de Fourier calculés à partir des relations :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \overline{x(t)}$$

et pour $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt \quad b_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt \quad (\text{I.11})$$

On note ici que seule la représentation unilatérale (fréquence positive) a une réalité physique.

La décomposition fréquentielle de $x(t)$ s'écrit :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n) \quad \text{avec} \quad c_n = 2\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{et} \quad \varphi_n = \arctg\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) \quad (\text{I.12})$$

Le spectre de Fourier d'un signal périodique est un spectre discret . Il est donc constitué d'une composante de fréquence nulle d'amplitude a_0 et d'un peigne de raies espacées de f_0 et d'amplitude c_n .

I-5-2 Signal analogique non périodique

Si le signal $x(t)$ n'est pas périodique, on obtient les mêmes résultats que précédemment, en faisant tendre la période T vers l'infini, l'intervalle $f_0 = \frac{1}{T}$ tendra vers zéro et $X(f_k)$ deviendra une fonction continue $X(f)$ de f , donnée par :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-2\pi j f t} dt \quad (\text{I.13})$$

cette équation est appelée transformée de Fourier directe, elle donne le spectre de fréquence du signal temporel $x(t)$.

Inversement, le signal $x(t)$ s'obtient à partir de $X(f)$ par :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{2\pi j f t} df \quad (\text{I.14})$$

équation appelée transformée de Fourier inverse.

$$x(t) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{TF}} \\ \xleftarrow{\text{TF}^{-1}} \end{array} X(f) \text{ (spectre d'amplitude)}$$

Remarque :

La transformée de Fourier est généralement complexe, et peut se décomposer en partie réelle et partie imaginaire :

$$X(f) = \text{Re}(X(f)) + j \text{Im}(X(f))$$

la partie réelle donnée par :

$$\text{Re}(X(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos 2\pi f t dt$$

et la partie imaginaire s'exprime par :

$$\text{Im}(X(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin 2\pi f t dt$$

Le spectre d'amplitude est donné par :

$$|X(f)| = \sqrt{(\text{Re}(X(f)))^2 + (\text{Im}(X(f)))^2}$$

Le spectre de phase est donné par :

$$\varphi(f) = \text{arctg}\left(\frac{-\text{Im}(X(f))}{\text{Re}(X(f))}\right)$$

I-5-3 Cas d'un signal échantillonné

Une fonction échantillonnée est une suite discrète de valeurs équidistantes dans le temps. L'exploitation d'une telle fonction est devenue importante avec le développement des traitements numériques de données. Dans ce cas, on a :

$$x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t_k) \exp(-j2\pi f t_k) \quad (\text{I.15})$$

avec t_k : $k^{\text{ième}}$ échantillon dans le temps de $x(t)$.

et inversement :

$$x(t_k) = \frac{1}{f_e} \int_{\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} X(f) \cdot \exp(j2\pi f t_k) df \quad (\text{I.1})$$

avec f_e : fréquence d'échantillonnage (ou intervalle entre deux lignes fréquentielles)

1-6 Transformée de Fourier Discrète (TFD)

La fonction $x(t)$ représentant un signal analogique devra être échantillonnée en des points discrets $x(n.t_e)$;

t_e : étant le pas d'échantillonnage

n : le numéro d'échantillons ($n=0 \rightarrow N-1$).

Son spectre peut être calculé en substituant à l'intégrale de Fourier, la transformée de Fourier discrète calculée à partir d'un nombre fini d'échantillons N .

$$t \longrightarrow n.t_e \quad f \longrightarrow k \Delta f \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \longrightarrow \sum_0^{N-1} \quad dt \longrightarrow t_e$$

$$X(k \Delta f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n.t_e) \exp(-j2\pi kn/N) \quad k=0, N/2 \quad (\text{I.17})$$

$$x(n.t_e) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k \Delta f) \exp(j2\pi kn/N) \quad n=0, N-1 \quad (\text{I.18})$$

avec :

- t_e : pas d'échantillonnage .
- n : numéro de l'échantillon .
- k : le numéro de la ligne fréquentielle .
- Δf : l'intervalle entre deux lignes fréquentielles.
- N : nombre d'échantillons du signal $x(t)$.

1-7 Transformée de Fourier Rapide (FFT)

La transformée de Fourier rapide est un algorithme qui permet d'obtenir la transformée de Fourier discrète du signal échantillonné et permet aussi de réduire le nombre d'opérations arithmétique nécessaires à cette opération. Avec cet algorithme, le temps de calcul de la transformée d'un signal défini par N points est proportionnel à $N \log_2 N$ au lieu de la valeur théoriquement nécessaire N^2 . Son importance augmente aussi avec l'évolution du traitement digital des signaux [BOU 98].

Le signal étant échantillonné avec une période t_e , on dispose donc d'une durée d'observation $\Delta t = N.t_e$ du signal, et on calcule la transformée de Fourier (grandeur complexe) sur cette durée du signal et on déduit le spectre sur $N/2$ points dans le domaine fréquentiel (partie réelle et partie imaginaire). On admettra aussi qu'on ne tient pas compte des fréquences négatives (Cf. Annexe A2).

I-8 Indicateurs spectraux de base

L'indicateur spectral de base que l'on puisse définir est le spectre d'amplitude du signal qui mathématiquement représente le module de la transformée de Fourier discrète de ce signal.

Un spectre est un graphe dans lequel l'axe des abscisses représente une échelle des fréquences, on distingue :

- Le spectre d'**amplitude** : on porte en ordonnée le module de la transformée de Fourier.

$$|X(f)|$$

- Le spectre de **phase** : on porte en ordonnée la phase de la transformée de Fourier

$$\varphi(f)$$

- Le spectre d'**énergie** ou DSE (densité spectrale énergétique) : notion utilisée dans le cas des signaux à énergie finie, on porte en ordonnée le carré de la transformée de Fourier.

$$|X(f)|^2$$

- Le spectre de **puissance** ou DSP (densité spectrale de puissance) : c'est le cas des signaux à puissance finie, signaux réels.

On porte en ordonnée le carré du module de la transformée de Fourier divisé par une durée d'observation Δt :

$$\frac{|X(f)|^2}{\Delta t}$$

Conclusion

Ce chapitre a été consacré à une présentation de l'organisation du signal en général ainsi que des définitions de certaines grandeurs caractéristiques des signaux vibratoires qui joueront le rôle d'indicateurs (ou descripteurs) et qui feront l'objet de suivi de la tendance ou de surveillance par rapport à certains seuils (alarmes), définis par les fournisseurs des systèmes de surveillance vibratoire, au delà desquels une intervention de maintenance s'avère indispensable.

Un rappel de certains éléments d'analyse des signaux a été abordé, tels que la transformée de Fourier discrète, outil classique d'analyse spectrale qui a prouvé son efficacité pour les signaux à caractère périodique (cas des machines tournantes).

Néanmoins, il peut exister d'autres descripteurs qui sont spécifiques aux fournisseurs de matériel de surveillance et qui sont sensibles à certains défauts, cela nécessite aussi une qualification qui relève souvent de la compétence de spécialiste.

Le chapitre suivant sera consacré aux différentes étapes de traitement que devra subir un signal, ce qui constitue la phase de conditionnement pour l'élaboration de spectre.

Chapitre II

Techniques de traitement du signal

Chapitre II

Techniques de traitement du signal

Introduction

La plupart des systèmes de surveillance et diagnostic des équipements industriels utilisés dans l'industrie actuellement sont basés sur l'analyse de Fourier, d'une part parce qu'on décrit les phénomènes vibratoires dans le domaine fréquentiel, et d'autre part, par l'existence de processeur rapide de calcul de la transformée de Fourier utilisant l'algorithme FFT. Dans ce contexte, l'analyse spectrale fournit et continuera de fournir un outil naturel pour le traitement des signaux en mécanique. On souligne aussi que, suite au développement de l'outil informatique, la plupart des techniques sont actuellement implantées sur micro-ordinateur de type PC.

II-1- Représentation en temps et en fréquence d'un signal

La représentation en fonction du temps d'un signal vibratoire est utilisée pour suivre le comportement vibratoire d'une machine en fonction de ses paramètres de fonctionnement. Cette représentation est facile à exploiter lorsque le signal est simple (vibration sinusoïdale induite par le balourd d'un rotor), mais elle devient inexploitable lorsque le signal est complexe comme dans le cas de sollicitations multiples. A cet effet, ce signal peut être décomposé en différentes composantes sinusoïdales et ceci pour faciliter son interprétation (Figure II-1).

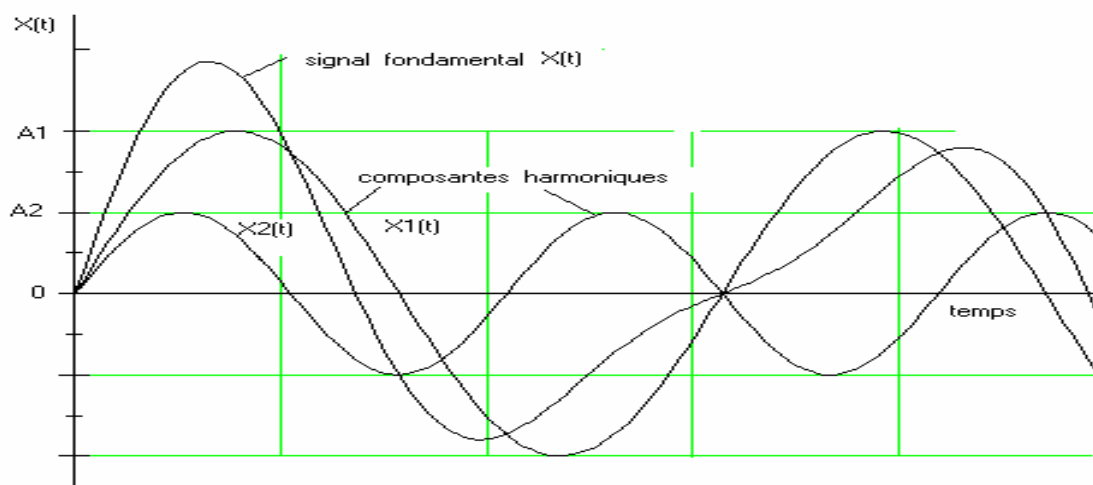


Figure II-1 Décomposition d'un signal vibratoire en deux composantes harmoniques.

La représentation du signal en fonction de la fréquence (représentation spectrale) permet de décomposer un signal complexe en composantes sinusoïdales caractérisées par leur amplitude et leur fréquence (Figure II.2).

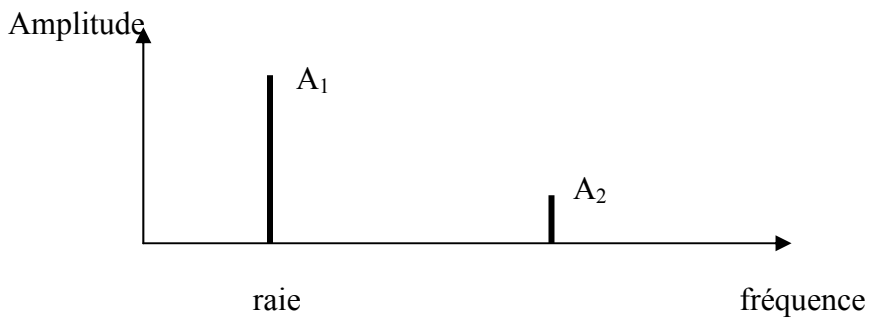


Figure II-2 Représentation spectrale des Composantes du signal donné.

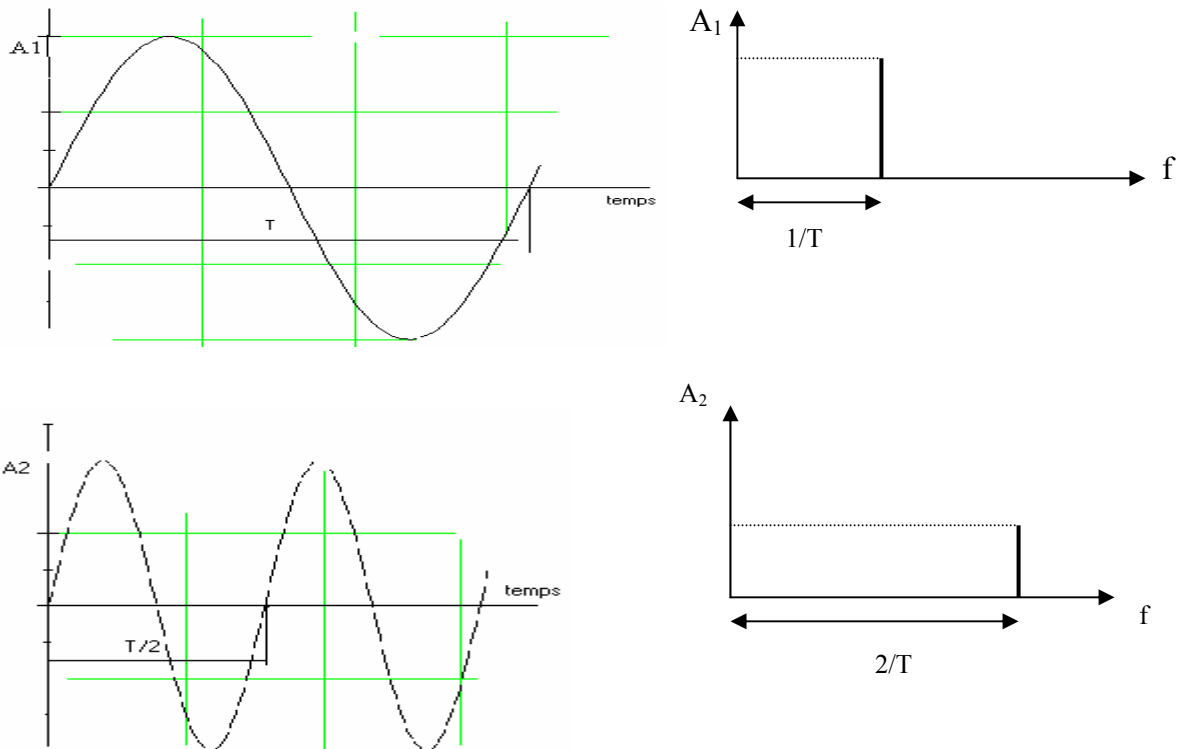


Figure II-3 Exemples de conversion temps/fréquence

II-2- Conditionnement et traitement du signal

Les signaux vibratoires, sous forme analogique, vont subir un certain nombre de traitements en vue d'obtenir un spectre d'amplitude. Néanmoins, il faut prendre un certain nombre de précautions pour que l'analyse soit valable.

Le calcul de la TFD nécessite d'échantillonner le signal, qui s'effectue sur un nombre fini de N échantillons.

Calculer la transformée de Fourier sur un nombre fini d'échantillons revient à assimiler le signal à analyser à un signal motif de durée $\Delta t = N/f_e$ (f_e : fréquence d'échantillonnage) et à le rendre périodique en le convoluant par un peigne de Dirac de pas Δt . Ces opérations entraînent quelques modifications entre le spectre calculé et le spectre réel.

Le conditionnement du signal se résume dans les étapes suivantes (Figure II-4) :

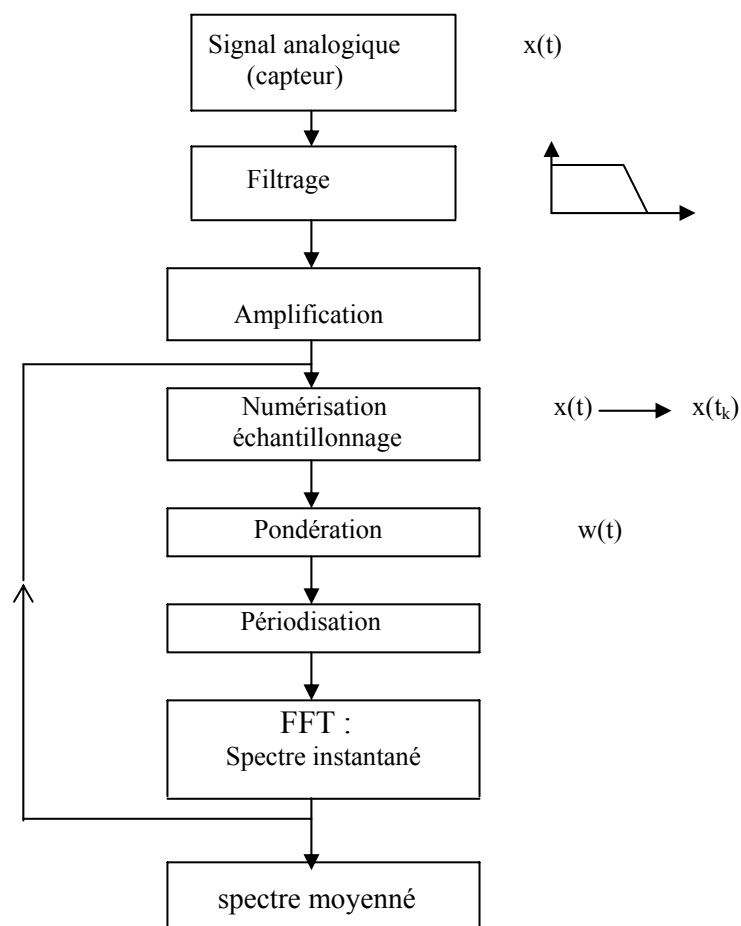


Figure II-4 Les différentes étapes de traitement du signal

2-1- Acquisition du signal

2-1-1 Durée d'acquisition du signal

L'acquisition du signal se fait au moyen d'un capteur (accéléromètre, vélocimètre ou proximètre), qui permet de délivrer une tension électrique proportionnelle à la grandeur physique mesurée, un capteur d'accélération peut aussi contenir un préamplificateur du signal.

Si B signifie la largeur de la bande de fréquence $[0 \text{ à } f_{\max}]$ dans laquelle on veut calculer le spectre, alors, le temps d'acquisition Δt d'un bloc de N points est donné par la relation :

$$\Delta t = \frac{N}{f_e} = \frac{N}{2.56 B} \quad \text{durée d'observation du signal (Figure II-5)}$$

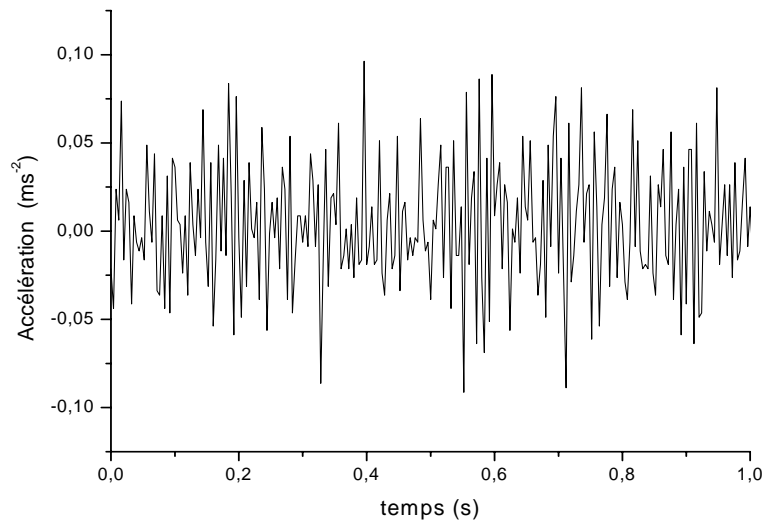


Figure II-5 Exemple d'un signal motif ($\Delta T=1$ s)

On remarque que plus la plage de fréquence B est petite, plus le temps nécessaire à l'acquisition est long, c'est le cas des machines tournantes à basse vitesse.

2-1-2 Gamme de la fréquence d'analyse

Pour analyser un signal, la plage de fréquence qu'il conviendra de choisir dépend du souci de l'utilisateur et de la cinématique de la machine. Ainsi dans une machine tournante équipée de paliers munis de roulements à billes, l'utilisateur sera intéressé :

- dans un premier temps, par les vibrations synchrones de la vitesse de rotation, c'est à dire aux phénomènes basse fréquence (de 0 à 1000 Hz). On dispose du filtre passe-bas qui remplit cette fonction.
- dans le deuxième temps, on s'intéresse à la totalité du signal et les mesures sont faites en adoptant la bande maximale [0 à 10 000 Hz].

2-2- Numérisation et échantillonnage

La numérisation est une opération qui permet de discrétiser le signal analogique $x(t)$, en une suite finie de points $x(t_k)$ (Figure II-6), elle se réalise au moyen d'un convertisseur analogique/numérique, à la fréquence f_e (égale à $1/t_e$), cette étape est nécessaire en vue de calculer la transformée de Fourier discrète du signal à l'aide de l'algorithme FFT, et élaborer par la suite le spectre d'amplitude.

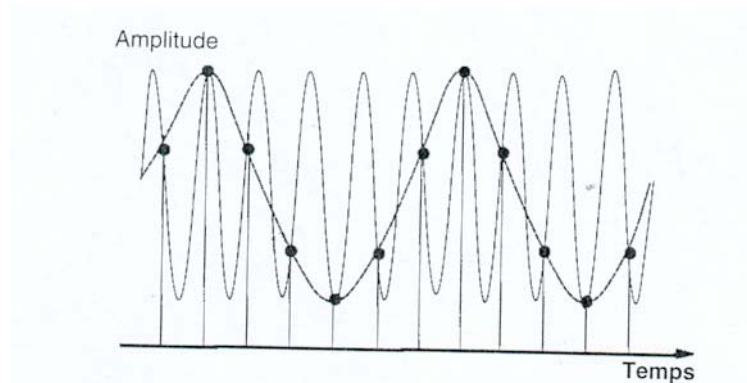


Figure II-6 Effet d'échantillonnage dans le domaine temporel.

(Signal identique en amplitude mais différent en fréquence)

2-3 Filtrage (ou bande passante)

Le filtrage est une étape utile et importante dans la phase de conditionnement et traitement du signal, il permet de réduire la bande passante de celui-ci en choisissant une plage de fréquences bien définie, ceci repose sur la connaissance de la cinématique de la machine ainsi que la nature des défauts à diagnostiquer. Ceci a pour conséquence l'élimination des composantes de fréquences indésirables susceptibles de masquer certains phénomènes vibratoires qu'on veut surveiller.

Cette opération se réalise grâce à trois types de filtres.

2-3-1 Filtre passe-bas

Ce type de filtre ne laisse passer que les composantes dont les fréquences sont en dessous d'une valeur donnée, il est utilisé pour éviter le repliement du spectre (Figure II-7 a).

2-3-2 Filtre passe-bande

Ce filtre ne laisse passer que les composantes dont les fréquences sont situées dans une bande de fréquence définie, alors que les autres composantes sont rejetées (Figure II-7 b).

2-3-3 Filtre passe-haut

Le filtre passe-haut ne laisse passer que les composantes dont les fréquences se situent au dessus d'une fréquence donnée (Figure II-7 c).

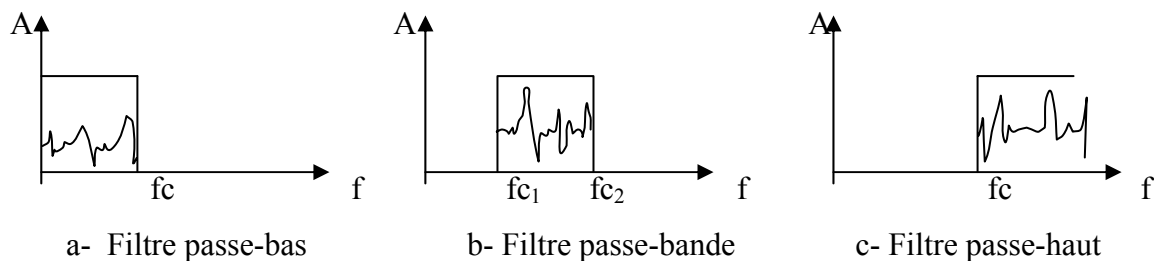


Figure II-7 Les différents types de filtres
(f_c : fréquence de coupure)

L'échantillonnage a pour effet de créer artificiellement de part et d'autres de la fréquence d'échantillonnage des spectres fictifs, identiques au spectre réel. Ce phénomène est appelé repliement du spectre. Pour cela, la fréquence d'échantillonnage doit être au moins égale au double de la fréquence maximale du signal : **théorème de Shannon** :

$$f_e = 2.56 f_{\max}$$

f_{\max} : étant la fréquence la plus élevée des composantes élémentaires du signal.

En effet, le signal est filtré avec un filtre passe-bas (de fréquence de coupure $f_e/2$), très sélectif, appelé filtre anti-repliement.

Si N est le nombre d'échantillons constituant un bloc, le spectre est calculé sur $N/2,56$ lignes spectrales afin de minimiser les effets de non-linéarité du filtre anti-repliement autour de sa fréquence de coupure. La plupart des appareils de mesure existant sur le marché ont généralement 400 ou 800 lignes spectrales.

2-4- Amplification

C'est une amplification simple de la tension de sortie du capteur. On note ici qu'un amplificateur doit avoir des qualités de : grande gamme fréquentielle, polyvalence et faible bruit .

2-5- Fenêtrage et périodisation

La pondération du signal analysé doit être appropriée aux signaux étudiés . Les fenêtres de pondération les plus utilisées sont la fenêtre rectangulaire pour les signaux transitoires et la fenêtre de Hanning pour les signaux périodiques: cas des machines tournantes (Cf. Annexe A2).

Théoriquement, le calcul de la transformée de Fourier doit s'effectuer sur un signal dont la durée est infinie .Or, en pratique, cette transformée ne peut se calculer que sur une fenêtre temporelle de largeur Δt . Il est donc nécessaire de considérer que le signal est nul en dehors de cette fenêtre et de le rendre infini en le répétant identique à lui même, la période de ce nouveau signal est Δt .

La périodisation du signal a pour effet d'échantillonner le spectre de ce signal à une fréquence Δf , appelée résolution ou finesse d'analyse, est telle que :

$$\Delta f = 1/\Delta t$$

Alors le spectre du signal est établi pour une suite de points espacés de Δf .

2-6- Le moyennage synchrone

L'analyse synchrone est applicable notamment aux machines tournantes. Il s'agit d'effectuer le moyennage d'un signal temporel, afin d'annuler les composantes aléatoires ou bruit du signal qui ne sont pas liées à la vitesse de rotation (composantes indésirables). Ainsi, le signal représentant une dizaine de tours de l'arbre contient plus d'information qu'un signal représentant une fraction de tour.

En effet, le spectre moyenné est le résultat de la moyenne arithmétique de n spectres, ce dernier étant plus lisible qu'un spectre issu du calcul d'un seul bloc Δt de N points.

2-7- Représentation graphique d'un spectre

Pour une bonne lisibilité d'un spectre, le choix des échelles pour la représentation graphique est déterminant :

- L'échelle de l'axe des ordonnées peut être linéaire en unité physique, dans ce cas le spectre ne met en évidence que les raies d'amplitude prépondérantes, alors que les raies de faible amplitudes seront noyées dans le bruit de fond, alors qu'elles véhiculent souvent de l'information.

- Une autre unité adoptée est le **décibel (dB)**, dans ce cas le spectre montre des composantes de rapport d'amplitude très élevée et met en évidence des familles d'harmoniques, riches en informations pour le diagnostic. Ce type d'échelle privilégie la lisibilité des composantes basses fréquences correspondant notamment aux premiers ordres de la fréquence de rotation.

$$L(\text{ en dB}) = 10 \log(A/A_0)^2 = 20 \log(A/A_0)$$

L : est la valeur de la grandeur en ordonnée.

A : valeur de la grandeur mesurée en unité physique.

A₀ : une valeur de référence prise généralement égale à 1 en unité physique.

D'autres représentations peuvent être utilisées, selon les fabricants d'appareils de mesure (Shenck, IRD, B & K...), on peut retrouver : g/SE, BCU, SPM, ...

Ces indicateurs sont définis à partir d'une mesure des amplitudes crête et efficace du signal dans une bande de fréquence étroite et centrée sur la fréquence de résonance du capteur.

2-8 Interprétation physique des spectres

L'interprétation physique des spectres a pour but de relier l'effet à la cause, c'est à dire de déterminer, pour chacune des raies du spectre, la force excitatrice qui l'a engendrée.

Dans les machines tournantes, il existe de multiples causes d'excitation que l'on peut classer en deux catégories principales, suivant qu'elles sont ou non synchrones de la fréquence de rotation ou de l'un de ses harmoniques.

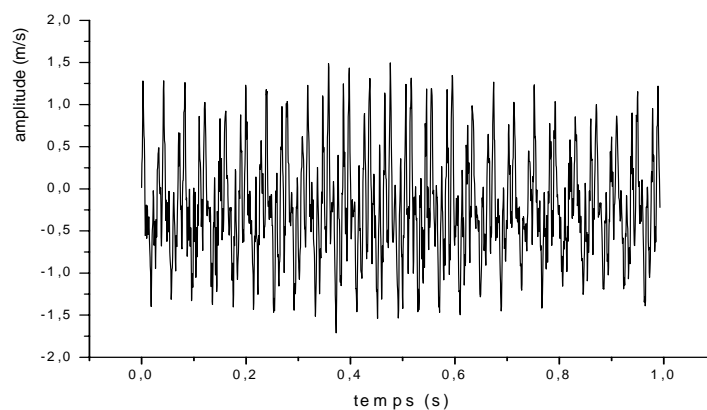


Figure II-8 a- Signal vibratoire temporel mesuré sur un arbre tournant à 1500 tr/mn.

Le spectre d'amplitude présenté en figure II-8 b) met en évidence un défaut d'une amplitude prépondérante à la fréquence de rotation ($F_r=25$ Hz), il s'agit d'un phénomène de balourd.

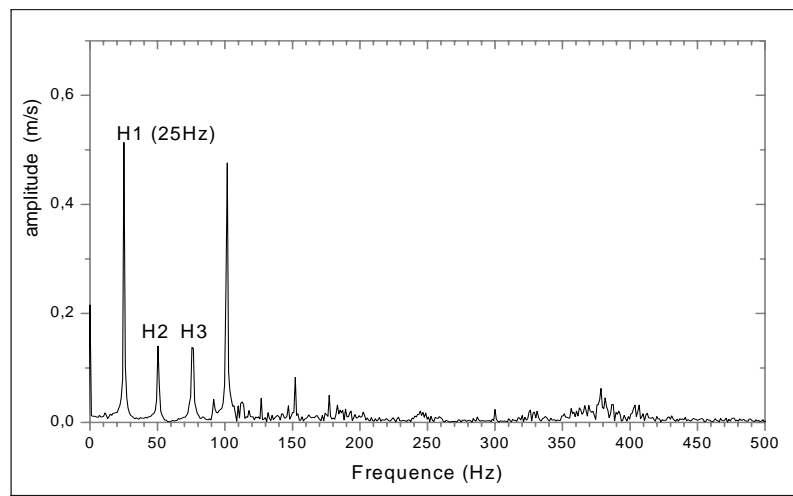


Figure II-8 b- Spectre d'amplitude correspondant

2-9 La fonction zoom

La fonction zoom autorise une augmentation de la résolution d'analyse, grâce à une concentration des lignes spectrales dans une bande de fréquences restreinte autour d'une fréquence centrale sélectionnée afin d'obtenir des résolutions satisfaisantes.

Si le nombre de lignes fréquentielles d'analyse est N_f et B la largeur de la bande d'analyse $[0 - f_{\max}]$, la résolution d'analyse Δf est égale à B/N_f , cette résolution peut être insuffisante pour séparer deux composantes de fréquences voisines dans un spectre.

La résolution voulue est alors :

$$\Delta f_i = \frac{B}{p \cdot N_f}$$

p : étant le facteur de zoom, varie le plus souvent de 2 à 512 (de forme 2^n , selon les analyseurs), et dépend de la cinématique de la machine dont on veut faire le diagnostic.

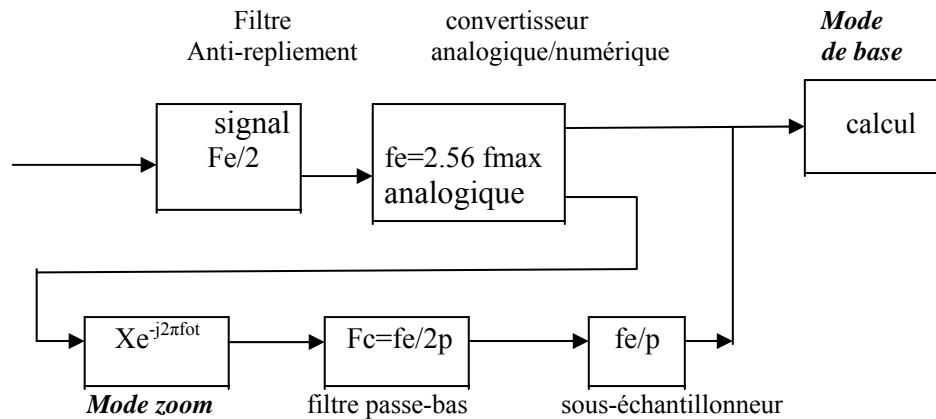


Figure II-9 Schéma de principe d'une analyse en mode de base et en mode zoom.

avec :

f_0 : fréquence centrale de zoom

p : le facteur de zoom

f_c : fréquence de coupure

2-10 Autres techniques

La transformée de Fourier du signal n'est pas le seul indicateur spectral que l'on puisse définir. D'autres techniques peuvent révéler des modifications significatives sur le signal à un stade précoce. Le cepstre, l'analyse spectrale des fonctions de modulation des principales composantes caractéristiques et des réponses des résonances excitées, les spectres de phase sont les techniques les plus intéressantes, et se révèlent plus performantes dans le cas d'un certain nombre de défauts. Ces indicateurs sont bien adaptés à la surveillance des machines à chaîne cinématique complexe.

2-10-1 Le cepstre

Le cepstre est une technique de traitement du signal précieuse, très utilisée dans certains domaines tels que la géophysique, les télécommunications et l'acoustique. Il constitue une aide efficace à l'interprétation des spectres, en permettant une identification rapide de structures périodiques spectrales souvent complexes.

Il est défini comme étant la transformée de Fourier inverse du logarithme décimal du spectre :

$$C_p(\tau) = \text{TF}^{-1} \{ \log |X(f)| \}$$

Ici le symbole TF^{-1} signifie la transformée de Fourier inverse.

La variable τ a la dimension d'un temps et est appelée « quéfrence ».

Cependant, le cepstre d'un signal temporel représente une image temporelle de ce dernier.

Cette fonction permet de rechercher, d'identifier toute famille de composantes périodiques dans un spectre qui peuvent se présenter soit sous forme de peigne de raies ou de bandes latérales de modulation autour d'une fréquence cinématique, chose qui n'est pas évidente visuellement sur un spectre.

Elle permet donc de mettre en évidence un certain nombre de défauts induisant des chocs périodiques (tels que jeux, desserrage, défauts de roulements, défauts de dentures...).

2-10-2 Démodulation d'amplitude - fréquence

Un signal sinusoïdal modulé peut être défini par la fonction (figure II-10):

$$x(t) = m(t) A_0 \sin(2\pi f_p t + \varphi(t))$$

la composante $A_0 \sin(2\pi f_p t)$, qui porte les informations contenues dans les fonctions de modulation est appelée « porteuse », et on a :

la fonction de modulation d'amplitude : $m(t)$

la fonction de modulation de phase : $\varphi(t)$

la fonction de modulation de fréquence : $f(t) = f_p + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}$

taux de modulation d'amplitude : $T_{am} = \frac{\sup(m(t)) - \inf(m(t))}{2A_0}$

taux de modulation de la fréquence : $T_{fm} = \frac{\sup(f(t)) - \inf(f(t))}{2f_p}$;

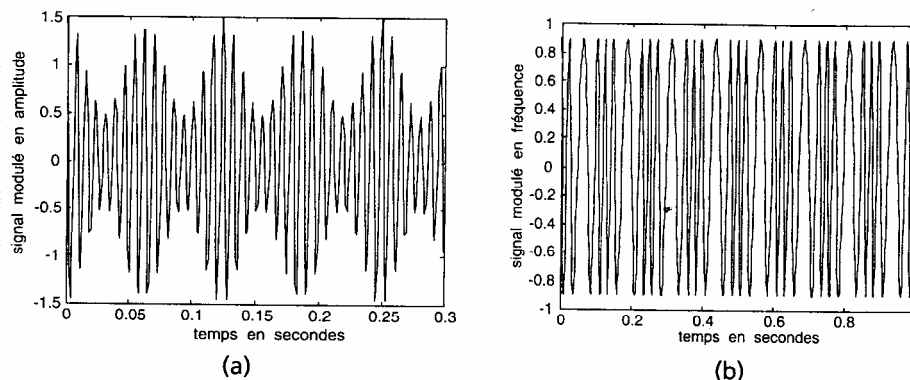


Figure II-10 Exemple d'un signal modulé
(a) en amplitude
(b) en fréquence

L'amplitude ou la fréquence d'une composante sinusoïdale peut varier de manière périodique. Une modulation d'amplitude traduit des variations périodiques d'efforts induites par exemple par un défaut d'excentricité. Une modulation de fréquence traduit des variations

périodiques de la vitesse de rotation instantanée induites par des jeux angulaires. Ces deux phénomènes sont intimement liés.

10-2-1 Démodulation d'amplitude

Cette technique, connue aussi sous le nom de détection d'enveloppe, permet d'analyser la forme du signal, notamment lorsque un défaut excite un mode de résonance de la structure. Il s'agit de filtrer le signal autour d'une fréquence de résonance identifiée sur le spectre.

10-2-2 Démodulation de fréquence

Cette technique permet d'identifier les défauts qui sont induits par des variations périodiques de la vitesse instantanée de rotation (tels que fissure, jeu de clavette, ...). On note que ces défauts se traduisent sur un spectre par une légère augmentation du niveau vibratoire.

2-11 Choix de la chaîne et des indicateurs de mesure

2-11-1 Choix des bons indicateurs

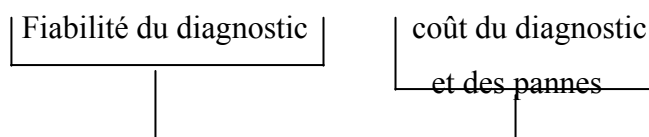
Le tableau II-1 donne une synthèse du choix des indicateurs de mesure selon les défauts les plus fréquents :

		<i>Indicateurs</i>
<i>Quelques exemples d'organes surveillés</i>	<i>Roulements</i>	<i>Accélération SPM (shock pulse method) Facteur de crête Kurtosis Démodulation d'amplitude Cepstre</i>
	<i>Engrenages</i>	<i>Accélération Cepstre Démodulation d'amplitude Kurtosis</i>
	<i>Paliers fluides</i>	<i>Déplacement (relatif ou absolu)</i>
<i>Nature Des vibrations générées</i>	<i>Vibration de type impulsif</i>	<i>Accélération Kurtosis Facteur de crête Cepstre Démodulation d'amplitude</i>
	<i>Vibration de type sinusoïdal</i>	<i>Déplacement, vitesse ou Accélération</i>
<i>Plage de fréquences où le défaut est le plus facilement identifiable</i>	<i>Basses fréquences</i>	<i>Déplacement ou vitesse</i>
	<i>Moyennes fréquences</i>	<i>Vitesse ou accélération</i>
	<i>Hautes fréquences</i>	<i>Accélération</i>

Tableau II-1 Choix des indicateurs de mesure

2-11-2 Considération sur le choix de la chaîne de mesure

Le choix du type de matériel à utiliser, ainsi que les techniques à mettre en oeuvre sont fonction des applications recherchées. Il convient mieux d'utiliser des techniques simples pour des machines simples et des techniques plus élaborées pour des machines à diagnostic complexe. La qualité du diagnostic repose essentiellement sur les techniques utilisées, il s'agit de trouver le meilleur équilibre entre :



Diagnostic fiable = chaîne de mesure + expérience du diagnosticien

Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les différentes étapes de traitement qui constituent la phase conditionnement du signal vibratoire en vue d'en extraire de l'information contenue dans celui-ci à partir de l'élaboration d'un spectre.

On a cité les techniques de démodulation d'amplitude et de fréquence qui s'avèrent délicates à utiliser et aussi très performantes pour identifier à un stade précoce certains types de défauts, car ces derniers induisent des énergies vibratoires extrêmement faibles, cependant, les indicateurs classiques de surveillance basés sur l'évolution de la puissance du signal ne peuvent mettre en évidence ces types de défauts qu'à un stade beaucoup plus tardif. Ces techniques existent sur peu de systèmes et restent de la compétence de spécialiste, car en plus de la connaissance de la cinématique de la machine, il faudra connaître les types de défauts qui puissent s'y produire ainsi que les fréquences avec lesquelles ils se manifestent.

Le chapitre suivant fera l'objet d'une analyse des principaux défauts rencontrés ainsi que des éléments nécessaires à la méthodologie de recherche de symptômes pour l'élaboration d'un diagnostic.

Chapitre III

Analyse des défauts dans les machines tournantes

Chapitre III

Analyse des défauts dans les machines tournantes

Introduction

La connaissance des images vibratoires et de la cinématique de la machine permet d'avoir une idée sur les indicateurs à mesurer ainsi que le traitement du signal nécessaire au calcul de ces indicateurs, ou à la mise en évidence de ces images. Malgré qu'une même image vibratoire peut correspondre à plusieurs défauts, à ce moment, il faut faire des analyses complémentaires et rechercher d'autres symptômes susceptibles de déceler l'hypothèse la plus probable.

Le tableau III-1 recense les images vibratoires et les fréquences d'apparition des principaux défauts qui puissent apparaître sur les machines tournantes [BRZ 90] [BOU 98]:

Type d'anomalie	Vibration		Remarques
	Fréquence	Direction	
Balourd	$1 \times f_{rot}$	radiale	Amplitude proportionnelle à la vitesse de rotation
Défaut d'alignement	$2 \times f_{rot}$	axiale et radiale	Vibration axiale plus importante
Défaut de fixation	$1,2,3,4 \times f_{rot}$	radiale	
Excitation électrique	$1,2,3,4 \times 50 \text{ Hz}$	axiale et radiale	
Vitesse critique de rotation	fréquence critique du rotor	radiale	Apparaît en régime transitoire et s'atténue ensuite.
Courroie en mauvais Etat	$1,2,3,4 \times f_p$	radiale	
Engrenage Endommagé	fréq. d'engrènement $f_e = z \times f_{rot}$	radiale et axiale	
Faux rond d'un Pignon	$f_e \pm f_{rot \text{ pignon}}$	radiale et axiale	Bandes latérales autour de la fréquence d'engrènement.
Excitation Hydrodynamique	fréquence de passage des aubes	radiale et axiale	
Détérioration d'un Roulement	Hautes Fréquences	radiale et axiale	Ondes de choc dues aux Ecaillages

f_{rot} : fréquence de rotation.

f_e : fréquence d'engrènement.

f_p : fréquence de passage de la courroie.

z : nombre de dents de l'engrenage.

Tableau III-1 Reconnaissance des principaux défauts.

III-1- Défaut de balourd

Un balourd est une dissymétrie de masse par rapport à l'axe de rotation. Car en pratique, il n'est pas possible de faire coïncider l'axe de rotation avec le centre de gravité de chaque tranche élémentaire du rotor. Il en résulte que l'arbre en rotation est soumis à des forces centrifuges qui le déforment. Ces efforts se traduisent par des vibrations liées à la vitesse de rotation. En général, ce déséquilibre peut provenir de défauts d'usinage, de montage, d'altérations mécaniques et thermiques (figure III-1).

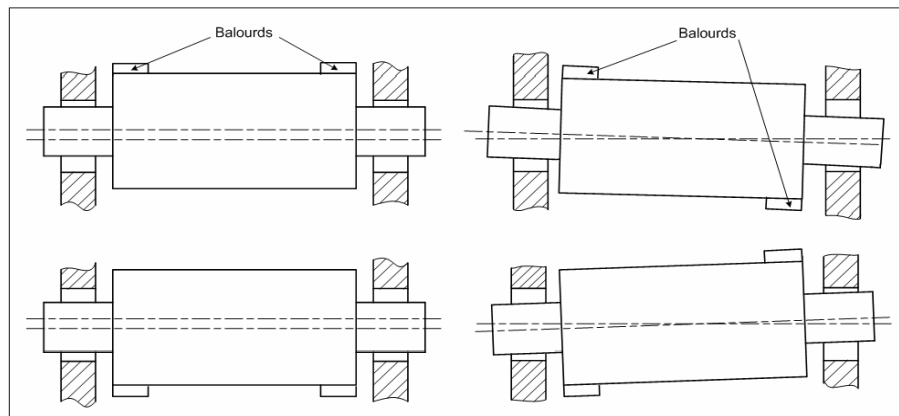


Figure III-1 Défaut de balourd

Le balourd engendre en pratique une vibration radiale qui croît fortement avec la vitesse de rotation et qui va se traduire sur le spectre par la présence d'amplitude prépondérante à la fréquence de rotation du rotor et cette vibration ne contient que peu d'harmoniques (figure III-2).

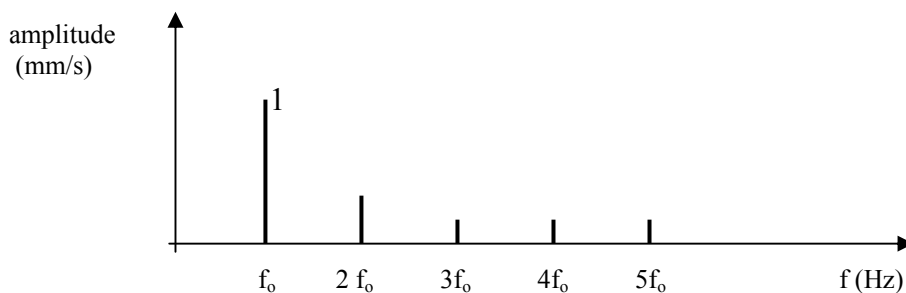


Figure III-2 Image vibratoire théorique d'un balourd.
 f_0 : fréquence de rotation.

III-2- Défaut d'alignement

Un défaut d'alignement peut être (figure III-3):

- Un défaut de concentricité: les axes des arbres présentent un désalignement au niveau de l'accouplement.
- Un défaut angulaire: les axes des deux paliers d'un même arbre ne sont pas concentriques.

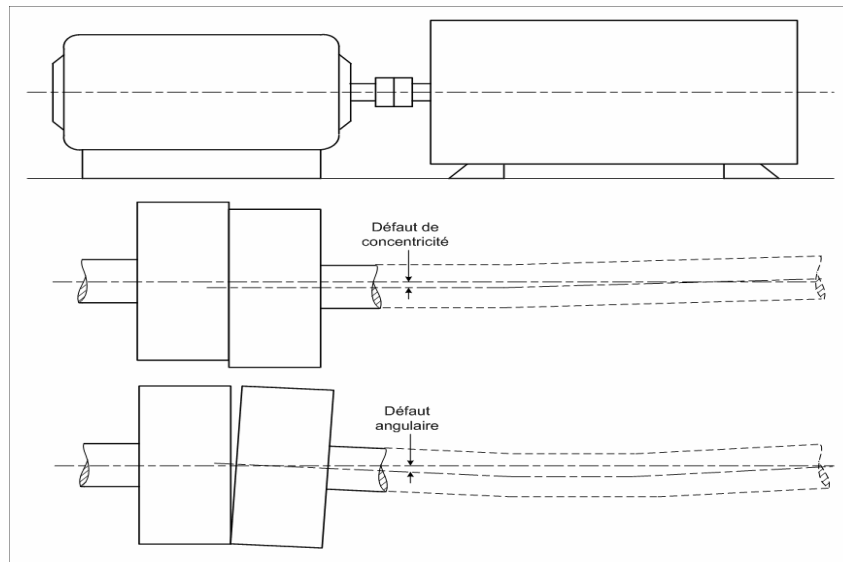


Figure III-3 Défaut d'alignement

En conséquence, ces défauts engendrent des vibrations dans la direction radiale et axiale, et sur le spectre elles se traduisent par (voir figure III-4):

- l'existence de composantes d'ordre 2, 3 ou 4 de la fréquence de rotation avec des amplitudes supérieures à celle de la composante d'ordre 1 (mesurée en accélération, direction radiale).
- L'existence de composantes d'ordre 1, 2 ou 3 de la fréquence de rotation dont les amplitudes sont supérieures à celles correspondantes aux mesures radiales (la mesure est axiale en accélération).

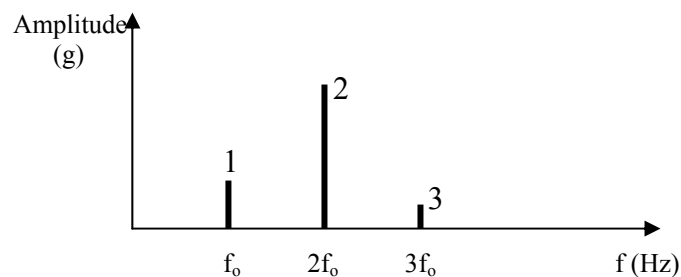


Figure III-4 Image vibratoire théorique d'un défaut d'alignement.

III-3 Défauts spécifiques aux roulements

3-1 Généralités

Les roulements sont des éléments très répandus et sollicités dans les machines tournantes et sont la cause principale de leurs défaillances. Les défauts qu'ils peuvent présenter sont : l'écaillage, le grippage, la corrosion, ...etc, et qu'on pourra classer en deux types :

- Les défauts répartis qui se manifestent par un spectre vibratoire large bande affectant le niveau global des vibrations.
- Les défauts ponctuels qui génèrent des chocs à chaque passage en coïncidence d'un élément roulant avec le défaut.

Parmi les méthodes de surveillance de roulements les plus communément utilisées, on peut citer celles consistant à contrôler la température du palier, les vibrations ou le bruit émis [CAR 90].

La mesure du signal vibratoire se fait en mode accélération, et les descripteurs sensibles aux défauts de roulements sont:

- La valeur efficace ;
- La valeur crête ;
- Le facteur de crête ;
- et le Kurtosis.

Toute anomalie affectant un roulement nécessite une analyse plus approfondie de son état vibratoire et exige, en plus de la connaissance de sa géométrie :

- Un accéléromètre permettant de faire des mesures jusqu'à 5 kHz au moins ;
- Un analyseur permettant de faire la fonction 'zoom' ainsi que la démodulation d'amplitude;
- Le suivi systématique de l'évolution de la vibration ainsi que l'observation de la tendance.

3-2 Caractéristiques fréquentielles

La connaissance de la cinématique du roulement se résume par quatre fréquences caractéristiques, pour chaque type de roulement (Figure III-5) [CAR 90] [BOU 98] :

- Fréquence de passage des billes sur un défaut de bague externe (supposée fixe):

$$\square \quad F_{be} = \frac{1}{2} F_r N_b \left[1 - \frac{d}{D} \cos \alpha \right]$$

- Fréquence de passage des billes sur un défaut de bague interne (solidaire de l'arbre tournant):

$$\square \quad F_{bi} = \frac{1}{2} F_r N_b \left[1 + \frac{d}{D} \cos \alpha \right]$$

- Fréquence de passage d'un défaut de cage :

$$F_c = \frac{1}{2} F_r \left[1 - \frac{d}{D} \cos \alpha \right]$$

- Fréquence de passage d'un défaut de bille sur les bagues interne ou externe :

$$F_e = \frac{1}{2} F_r \frac{D}{d} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \cos \alpha \right)^2 \right]$$

avec:

N_b , le nombre d'éléments roulants (billes ou rouleaux),

D , le diamètre primitif (ou moyen),

d , le diamètre des éléments roulants,

α , l'angle de contact,

F_r , la fréquence de rotation de l'arbre

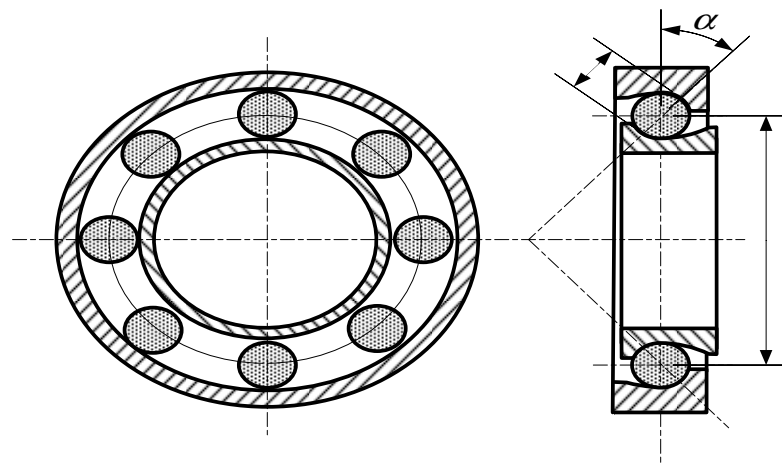


Figure III-5 Schéma d'un roulement

Le tableau III-2 donne les fréquences caractéristiques de quelques types de roulements en fonction de la fréquence de rotation [BOU 98]:

Références des roulements	fréquence de bague externe	fréquence de bague interne	fréquence de cage	fréquence des éléments
6318 SKF	3.039 Fr	4.906 Fr	0.3867 Fr	4.427 Fr
6318 FAG	3.582 Fr	5.418 Fr	0.3979 Fr	4.696 Fr
7318 SKF	4.960 Fr	7.040 Fr	0.4133 Fr	4.248 Fr
22320 FAG	5.608 Fr	8.393 Fr	0.4005 Fr	4.712 Fr

Tableau.III-2 Exemple de fréquences caractéristiques de roulements (exprimées en fonction de la fréquence de rotation).

3-3 Quelques images vibratoires théoriques

Les figures III-6, III-7 et III-8 représentent des images vibratoires théoriques d'un défaut affectant les éléments du roulement :

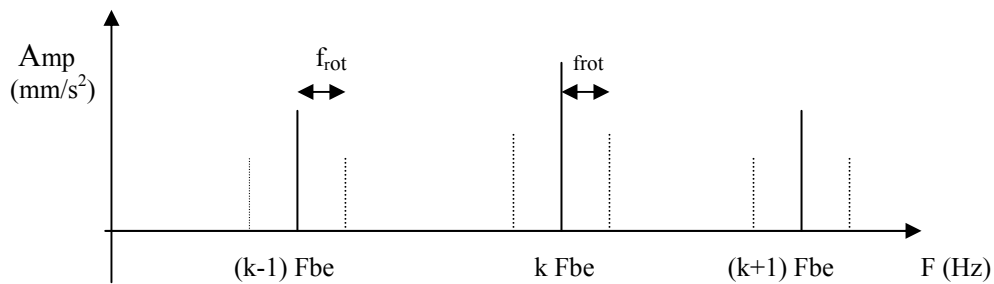


Figure III-6 Image vibratoire théorique d'un écaillage affectant la bague externe.

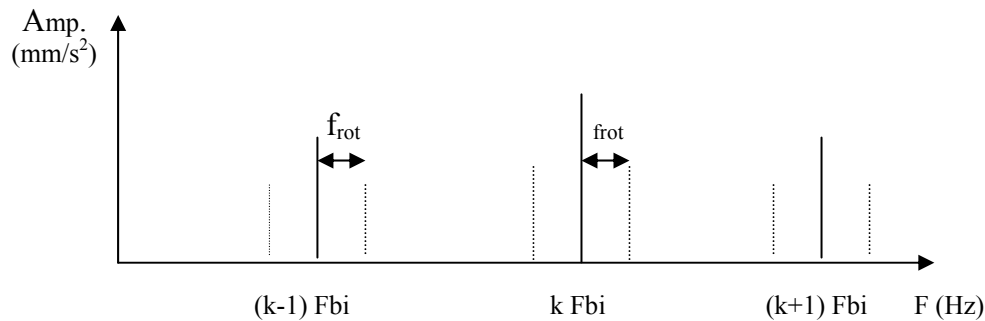


Figure III-7 Image vibratoire théorique d'un écaillage affectant la bague interne.

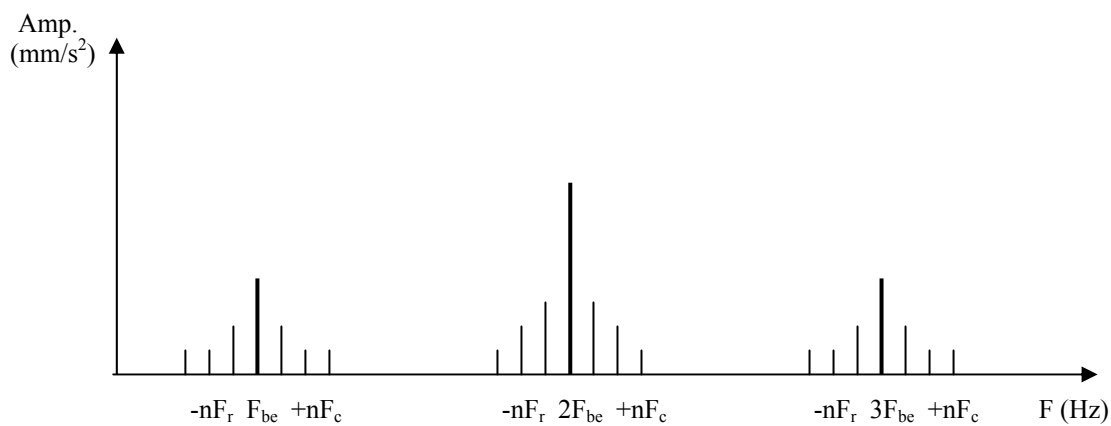


Figure III-8 Image vibratoire théorique d'un défaut affectant un élément roulant.

avec :

- F_r : fréquence de rotation,
- F_{be} : fréquence de passage d'un défaut de bille,
- F_c : fréquence de passage d'un défaut de cage.

Remarques :

- L'amplitude de la vibration engendrée par un défaut sur la bague externe sera plus importante car le capteur est monté sur un palier solidaire de celle-ci.
- Un écaillage génère une vibration de type choc dont le spectre présente de nombreuses composantes harmoniques et dont les harmoniques d'ordre $n > 1$ sont généralement d'amplitude supérieure à la fondamentale.
- Un défaut d'alignement de la bague génère une vibration de type sinusoïdale dont le spectre présente peu de composantes harmoniques, la fondamentale est nettement prépondérante.

III-4 Défauts d'engrenages**4-1 Généralités**

Les réducteurs (ou multiplicateurs) à engrenages sont des éléments universellement répandus en mécanique, très sollicités, complexes à dimensionner et à réaliser (calcul, choix et traitement des matériaux, taillage des dents,...). Leur durée de vie est limitée, l'apparition d'un défaut sur une dent entraîne la rupture de celle-ci et induit des dégâts importants. Diagnostiquer le défaut à l'état précoce est donc une garantie pour éviter l'accident et de diminuer les coûts de maintenance.

Plusieurs mécanismes sont générateurs des détériorations des engrenages, tels que : fatigue, piqûres, grippage, défauts de traitement thermique ou d'usinage ...etc.

Le tableau III-3 montre les effets des défauts sur les signaux vibratoires [SID 91]:

<i>Défauts de dentures</i>	<i>Signal temporel de Vibration</i>	<i>Spectre Associé</i>
<i>Usure</i>	Augmentation du niveau RMS Modulation d'amplitude	augmentation des raies d'engrènements et des harmoniques raies latérales
<i>Fissure</i>	impulsion Modulation de phase	large bande raies latérales
<i>Ecaillage</i>	impulsion/chocs faibles à l'état précoce	large bande
<i>Fracture</i>	chocs importants	large bande

Tableau III-3. Effet des défauts sur les signaux vibratoires.

En effet, selon la synthèse du tableau précédent, pour la détection de l'usure, il est clair d'utiliser l'amplitude RMS et la modulation d'amplitude comme outil de diagnostic.

4-2 Caractéristiques fréquentielles

Considérons un engrenage simple composé de deux roues dentées, possédants z_1 et z_2 dents et tournant aux fréquences f_1 et f_2 (figure III-9) :

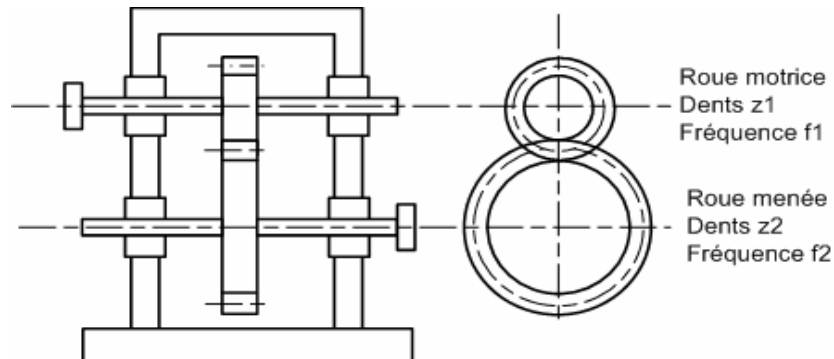


Figure III-9 Schéma simplifié d'un engrenage.

La fréquence d'engrènement est définie par : $f_e = z_1 \cdot f_1 = z_2 \cdot f_2$

Théoriquement, si l'engrenage est sain, l'image vibratoire est un spectre constitué de composantes dont les fréquences correspondent à la fréquence d'engrènement f_e et à ses harmoniques. Les amplitudes sont conditionnées par la charge à vaincre par l'engrènement (Figure III-10).

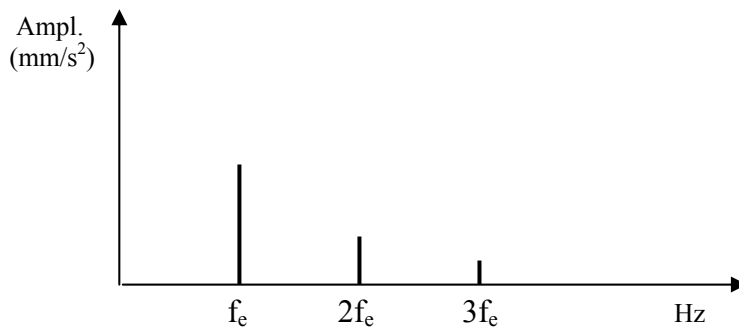


Figure III-10 Image vibratoire théorique d'un engrenage en bon état.

Si l'une des deux roues possède une dent détériorée, il se produit un choc périodique à la fréquence de rotation de la roue. Alors, le spectre montre la fréquence d'engrènement et un peigne de raies dont le pas correspond à la fréquence de rotation (Figure III-11).

S'il y a une dent détériorée sur chaque roue dentée, le spectre montre :

- un peigne de raies correspondant aux multiples de la fréquence de rotation f_1 .
- un peigne de raies correspondant aux multiples de la fréquence de rotation f_2 .
- un peigne de raies correspondant aux multiples de la fréquence de choc des deux dents détériorées appelée fréquence de coïncidence F_c (rapport de la fréquence d'engrènement sur le plus petit commun multiple des nombres de dents z_1 et z_2) :

$$F_c = \frac{F_e}{PPCM(z_1, z_2)}$$

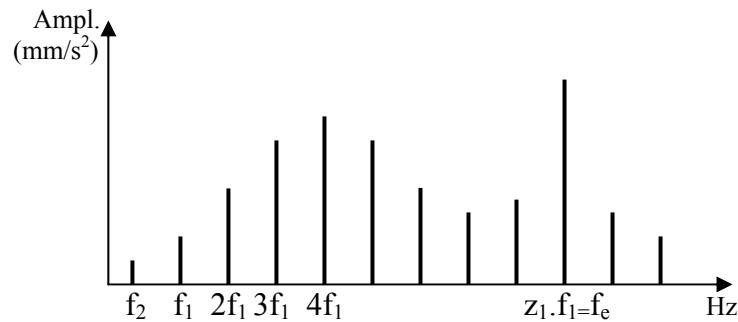


Figure III-11 Image vibratoire théorique d'une dent détériorée sur la roue motrice.

Dans le cas des engrenages, la mesure de la vibration se fait en mode accélération car elle favorise l'appréciation des composantes à haute fréquence. Aussi, il faut disposer d'un accéléromètre permettant de faire des mesures jusqu'à 5 kHz, et un système de traitement ayant les fonctions 'Zoom' ou 'la démodulation d'amplitude'.

III-5 Autres types de défauts

Dans ce chapitre, on a cité les défauts fréquemment rencontrés dans le cas des machines tournantes, néanmoins, il peut y exister d'autres défauts qui influent considérablement sur le comportement vibratoire de la machine, on peut citer :

- défauts spécifiques aux paliers fluides,
- défauts de transmissions par courroies,
- défauts induits par un frottement rotor/stator,
- défauts dus à une anomalie électromagnétique,
- les phénomènes de chocs,
- les défauts spécifiques aux pompes, turbines, compresseurs,...

III-6 Recherche des symptômes et images vibratoires

Cette méthodologie repose sur les étapes suivantes :

6-1 Etude préalable du fonctionnement de l'installation

Une bonne compréhension du fonctionnement de la machine et de ses organes annexes permet d'avoir une idée sur les défauts qui peuvent l'affecter, ceci constitue une aide précieuse à la recherche de symptômes. Ainsi l'établissement d'une fiche cinématique de la machine (fréquence de rotation des lignes d'arbres, fréquences des défauts de roulements, d'engrènement,...etc) est nécessaire pour :

- connaître les fréquences de certaines composantes cinématiques de base autour desquelles des traitements spécifiques seraient effectués tels que : zoom, démodulation...
- dégager les plages de fréquences dans lesquelles se situent les défauts que l'on recherche.
- Connaître les résolutions fréquentielles Δf nécessaires et ceci pour pouvoir dissocier sur un spectre des fréquences voisines.

6-2 Prise de mesures

Cette phase est conditionnée par l'étape précédente, et doit tenir compte des éléments suivants :

- Choix du type de capteur à utiliser pour le prélèvement (sensibilité, gamme de fréquence),
- Choix des emplacements des capteurs sur les paliers (accessibilité),
- Définir la bande passante de la chaîne, sa dynamique de résolution, ainsi que la fréquence de résonance des capteurs,
- Le temps d'acquisition est fonction de la cinématique de la machine et des traitements envisagés.

6-3 Exemple d'une fiche cinématique**INSTALLATION : MOTOVENTILATEUR****ELEMENTS CINEMATIQUES*****Moteur***

Nbre encoches	Nbre Pales	Diam. Poulie mm	Roulements	
			COE	CE
48	11	357.4	SKF 6219	SKF NU 219

Ventilateur

Nbre Pales	Diam. Poulie Mm	Roulements	
		Coté poulie	Coté turbine
17	233.4	SKF NU 315	SKF 6219

Courroies: trapézoïdale

<i>Type : 6 SPB 3550 longueur (mm) : 3550</i>
--

FREQUENCES CARACTERISTIQUES (Hz)

Fréquence de rotation du moteur : 24.80

Fréquence de passage des encoches : 1190.40

Fréquence de passage de pales : 272.80

(ventilateur)

Fréquence de rotation du ventilateur : 37.80

Fréquence de passage de courroies : 7.84

Fréquence de passage de pales : 642.60

FREQUENCES DE DEFAUTS DE ROULEMENTS (Hz)

Référence	Cage	Bague.ext	Bague.int.	éléments	Fréq. rot
6219	10.15	101.46	146.54	131.94	24.80
NU 219	10.63	170.06	226.74	170.06	24.80
NU 219 E	10.46	177.76	243.84	154.36	24.80
NU 315	15.38	184.52	269.08	195.70	37.80
NU 315 E	15.09	196.15	295.25	179.80	37.80
6219	15.46	201.04	290.36	201.10	37.80

Tableau III-4 Exemple de fiche cinématique [BOU 03]

6-4 Traitement des signaux

Après la prise des mesures (souvent en mode accélération), et l'adoption d'une échelle, on établit :

- Les spectres de la valeur crête et efficace de l'amplitude du signal, pour chaque palier et direction de mesure et aussi pour les différentes plages de mesure ;
- Recherche des composantes sous-harmoniques de la fréquence de rotation ;
- Détermination des déphasages relatifs entre la composante d'ordre 1 de la fréquence de rotation pour deux mesures radiales orthogonales ;
- Recherche de l'existence de phénomènes de modulation autour de chaque composante cinématique de base ;
- Détermination des fréquences de répétition de chocs,
- Recherche si nécessaire d'autres phénomènes particuliers (non stationnarité, cyclo-stationnarité...).

6-5 Fiabilité du diagnostic

Parmi les éléments qui apportent une aide appréciable dans la formulation du diagnostic, il est nécessaire de :

- Disposer de la fiche cinématique de la machine, l'historique des pannes ainsi que les modifications apportées sur cette dernière.
- Connaître la signature vibratoire initiale de l'installation lors de sa mise en service (état sain).

Néanmoins, ces éléments sont rarement disponibles ou dans certains cas incomplets, voir inexistants ce qui nécessite de suivre une démarche rigoureuse en méthodologie.

III-7 Installations à chaîne cinématique complexe

Lorsqu'il s'agit d'une installation dont la chaîne cinématique est constituée de plusieurs lignes d'arbres de vitesses de rotation très différentes entraînés par des engrenages, l'utilisation d'indicateurs scalaires à large bande (découlant des valeurs crêtes et efficaces) s'avèrent inaptes à assurer la détection précoce de défauts car le signal vibratoire provenant d'un capteur fixé sur un palier ne présente pas les vibrations de l'arbre supporté par le palier, mais aussi les vibrations induites par la rotation de toutes les autres lignes d'arbres transmises à ce palier à travers les liaisons.

En conséquence, le signal vibratoire induit par un défaut affectant une ligne d'arbre lente peut être noyé dans le bruit induit par les lignes d'arbres de fréquence de rotation plus élevées et par l'engrènement des différents trains d'engrenages.

Conclusion

Les compétences d'un expert en surveillance et diagnostic de machines sont essentielles pour définir les techniques de traitement du signal spécifiques adaptées à chaque type d'installation. Ainsi, la fiabilité du diagnostic repose essentiellement sur une bonne connaissance des défauts. C'est pourquoi la première démarche d'une action de surveillance est de rechercher quels sont les incidents les plus fréquemment rencontrés sur la machine à surveiller, comment ils se manifestent et quelle est leur signature.

Chapitre IV

Méthodes paramétriques Modélisation Auto Régressive

Chapitre IV

Méthodes paramétriques

Modélisation Auto Régressive

Introduction

Dans les années récentes, l'intérêt du traitement du signal s'est focalisé sur des techniques de modélisation paramétriques qui s'opposent aux techniques fréquentielles plus classiques [SID 90], [SID 91], [DRO 92], [FRO 92]. A cela deux raisons majeures :

- Les limites des techniques d'analyse basées sur la transformée de Fourier dans le cas de signaux à caractère aléatoire (phénomènes non organisés).
- L'évolution des moyens de calcul.

Ces techniques consistent à déterminer un modèle mathématique linéaire pour représenter le processus générateur du signal, considéré comme un signal aléatoire stationnaire. Il s'agira donc d'un problème d'estimation de la densité spectrale de puissance DSP, et conduira à une estimation des paramètres du modèle selon un critère de minimisation de l'erreur commise.

On peut citer plusieurs études qui ont montré l'apport de ces techniques pour la surveillance des machines. Selon la référence [SID 90], le suivi de l'erreur de prédiction linéaire permet la détection précoce de l'écaillage sur une dent à partir d'essais conduits sur des réducteurs.

Dans la référence [ABU 03], l'auteur a montré que la méthode des ondelettes et celle du maximum d'entropie (Burg) sont beaucoup plus efficaces que les moments statistiques temporels pour la détection et la classification d'usure d'outils en utilisant les signaux vibratoires.

IV-1 Modélisation paramétrique

1-1 Généralités

En automatique, il est classique d'utiliser des modèles de représentation pour modéliser un système avec des entrées et des sorties (figure IV-1). La même approche peut être adoptée pour modéliser un signal aléatoire, supposé stationnaire (caractéristiques statistiques invariables dans le temps). On fait l'hypothèse que le signal échantillonné $x(n)$ est la sortie d'un filtre excité par un bruit blanc. En effet, l'estimation de la densité spectrale d'un processus aléatoire est un problème qui peut être résolu par une modélisation paramétrique. Cette dernière permet de représenter toute l'information spectrale par un faible nombre de paramètres.

Un modèle paramétrique peut être représenté par la figure suivante:

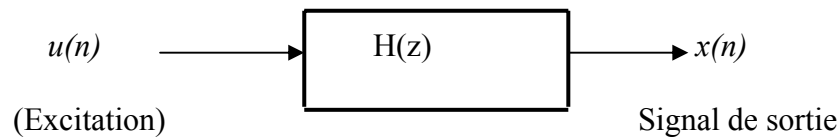


Figure IV-1. Modélisation paramétrique.

où

$x(n)$: est le processus modélisé.

$H(z)$: est la fonction de transfert du modèle.

$u(n)$: est une excitation.

Selon la forme de la fonction de transfert $H(z)$, trois types de modèles paramétriques sont disponibles:

Modèle ARMA : Autorégressif à Moyenne Ajustée ARMA(p,q) ;

Modèle AR : Autorégressif AR(p) ;

Modèle MA : à Moyenne Ajustée MA(q) ;

1-2 Description des modèles

1-2-1. Modèles Auto - Régressif à moyenne ajustée

Un modèle Auto - Régressif à Moyenne Ajustée d'ordre (p,q), noté **ARMA(p,q)**, est le plus répandu des modèles, il est défini par l'équation aux différences suivante:

$$\sum_{i=0}^p a_i x(n-i) = \sum_{i=0}^q b_i u(n-i) \quad (\text{IV.1})$$

$a_i : 0 \leq i \leq p$ représentent les paramètres de la partie Auto - Régressive (AR).

$b_i : 0 \leq i \leq q$ représentent les paramètres de la partie Moyenne Ajustée (MA)

p : est l'ordre de la partie AR.

q : est l'ordre de la partie MA.

avec $a_0 = b_0 = 1$

D'où, l'expression (IV.1) devient:

$$x(n) = -\sum_{i=1}^p a_i x(n-i) + \sum_{i=1}^q b_i u(n-i) + u(n) \quad (\text{IV.2})$$

En prenant la transformée en z des deux membres de l'expression (IV.1), nous aboutissons à la fonction de transfert du modèle ARMA.

$$H(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{1 + \sum_{i=1}^q b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (\text{IV.3})$$

où

$$z = e^{j2\pi f}$$

$H(z)$: représente la fonction de transfert du modèle.

$A(z)$: est la transformée - en - z de la branche AR

$$A(z) = \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}$$

$B(z)$: est la transformée en z de la branche MA

$$B(z) = \sum_{i=0}^q b_i z^{-i}$$

Le modèle ARMA peut donc être interprété comme un filtre de fonction de transfert $H(z)$, ayant des pôles et des zéros, excité par une entrée $U(z)$ et délivrant à sa sortie un signal $X(z)$. Les polynômes $A(z)$ et $B(z)$ sont caractérisés par la position de leurs racines dans le plan complexe.

1-2-2. Modèles Auto - Régressif (AR)

Dans le cas où les paramètres b_i sont nuls pour $1 \leq i \leq q$, le modèle (IV.2) s'écrit :

$$x(n) = - \sum_{i=1}^p a_i x(n-i) + u(n) \quad (\text{IV.4})$$

Ainsi, le polynôme $B(z)$ se réduit à une constante $B(z) = 1$ et la fonction de transfert $H(z)$ ne contient alors que des pôles.

Pour cette raison, ce modèle est aussi appelé un modèle tout pole.

1-2-3. Modèles à moyenne ajustée (MA)

Dans ce cas, supposons que les paramètres AR sont nuls pour $1 \leq i \leq p$, ce qui donne :

$$x(n) = - \sum_{i=1}^q b_i u(n-i) + u(n) \quad (\text{IV.5})$$

La fonction de transfert correspondante est alors $H(z) = B(z)$. Elle se caractérise par un polynôme n'ayant que des zéros, ce qui définit un modèle tout - zéro.

IV-2 Choix du modèle

L'identification d'un modèle pour un processus observé revient à estimer les paramètres $(a_i)_{i=1,p}$ et $(b_i)_{i=1,q}$, dont le nombre est inconnu a priori, et par la suite estimer la densité spectrale de puissance. En général, le nombre de paramètres figurant dans le modèle est inférieur au nombre de données N (figure IV-2).

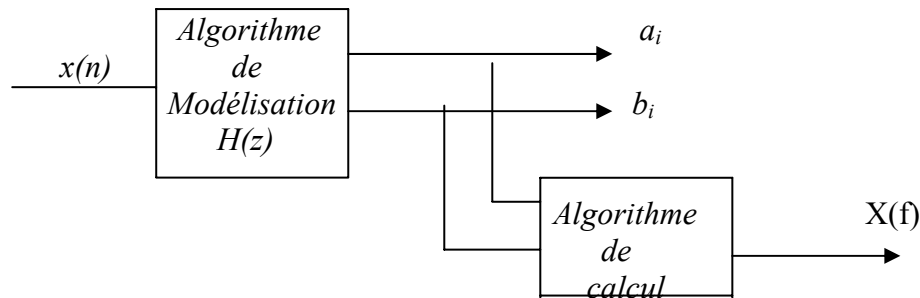


Figure IV-2 Principes d'estimation de la densité spectrale de puissance par les méthodes paramétriques.

A ce niveau, plusieurs questions peuvent être soulevées :

- 1- Quel est le type de modèle à utiliser ARMA, AR, ou MA ?
- 2- Comment et selon quel critère doit-on déterminer les coefficients du modèle particulier qui convient le mieux aux données observées ?
- 3- Quel est le nombre minimal de paramètres (ordre du modèle) qui pourra représenter convenablement le signal.

Les modèles ARMA sont les plus appropriés à représenter parfaitement les systèmes étudiés, cependant, la difficulté avec ces modèles est due à l'aspect non linéaire de la partie MA, cette modélisation est aussi très coûteuse en temps de calcul pour des performances souvent voisines de celles d'une modélisation AR. Certains auteurs ont essayé de comparer les performances obtenues par les modèles AR et ARMA, dont on cite certaines conclusions [OUA 93] :

- Difficulté de déterminer l'ordre (p,q) ;
- Difficulté d'estimer les paramètres AR et MA;
- Convergence des algorithmes non démontrée ;
- Risque d'obtention de modèles instables.

Le modèle auto régressif est le plus utilisé à cause des algorithmes de calcul rapides et robustes d'identification qu'il génère (algorithme de Levinson) [GUE 90].

Pour estimer les coefficients du modèle AR, il est nécessaire de définir un critère de coût sur l'erreur commise qu'il faudra minimiser. Le critère usuel est la minimisation de la variance de l'erreur de prédiction. Ce critère est pourvu d'une signification physique : c'est une énergie.

En outre, d'autres raisons nous incitent à estimer la densité spectrale d'un processus en effectuant une modélisation auto régressive, parmi lesquelles on peut citer :

- Le spectre AR autorise une meilleure résolution fréquentielle.
- L'estimation des paramètres du modèle s'effectue par résolution d'équations linéaires, ce qui entraîne une réduction du nombre d'opérations et, par conséquent du temps de calcul.
- La représentation du signal, ainsi modélisé, par un faible nombre de paramètres. Ce qui constitue une compression de données pouvant atteindre un facteur 50. Cette propriété est intéressante surtout en transmission de données où le débit d'information requis sera faible.

IV-3 Propriétés de la modélisation AR

3-1 Prédiction linéaire

La modélisation AR consiste à représenter le signal $x(n)$, comme une combinaison linéaire des échantillons qui le précèdent, et de l'entrée actuelle $u(n)$:

$$x(n) = -\sum_{i=1}^p a_i x(n-i) + u(n) ; \quad b_0 = 1$$

Si on définit une prédiction de l'échantillon $x(n)$ en fonction des p échantillons précédents:

$$\hat{x}(n) = -\sum_{i=1}^p a_i x(n-i)$$

Alors $u(n)$ apparaît comme une erreur sur le modèle, et elle s'écrit:

$$e_p(n) = x(n) - \hat{x}(n)$$

qui est appelée erreur de prédiction linéaire (EPL) ou résidu.

Ainsi, quand l'excitation est inaccessible, l'estimation des paramètres du modèle sera basée exclusivement sur l'observation du signal, l'erreur $u(n)$ sera considérée comme source de bruit agissant sur le système.

3-2 Erreurs de prédiction progressive et rétrograde

Il y a deux manières différentes pour obtenir l'erreur de prédiction :

- Une correspond à la prédiction progressive (directe ou forward) :

C'est l'erreur de l'échantillon $x(n)$ à partir des p échantillons passés, on a :

$$e_p^p(n) = x(n) - \hat{x}(n) = \sum_{i=0}^p a_i^p x(n-i); \quad a_0^p = 1$$

- Et l'autre à la prédiction rétrograde (inverse ou backward) :

C'est l'erreur commise lors de l'estimation de l'échantillon $x(n-p)$ à partir de l'ensemble des échantillons : $[x(n-p+1) \dots x(n-1) \ x(n)]$, ainsi on aura :

$$e_p^r(n) = x(n-p) - \hat{x}(n-p)$$

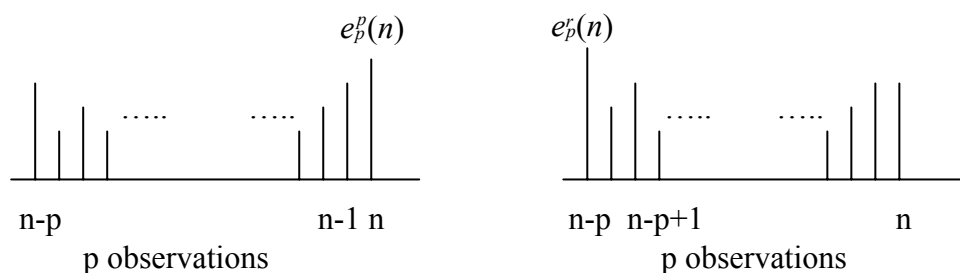


Figure IV-3 Prédiction directe et rétrograde d'ordre p

IV-4 Densité spectrale de puissance de modèles Auto Régressifs

4-1 Estimation de la DSP d'un modèle AR

La densité spectrale du processus Auto - Régressif $x(n)$ est donnée par :

$$S_x(z) = E \{ X(z) X^*(z) \} \quad (IV.6)$$

où

* : désigne la quantité conjuguée.

E : est l'opérateur Espérance mathématique.

$X(z)$: est la transformée - en - z du processus $x(n)$.

Puisque $x(n)$ est la sortie d'un filtre tout - pôle de fonction de transfert $1/A(z)$ et d'entrée $u(n)$ il peut donc être exprimé dans le domaine complexe z :

$$X(z) = H(z) \cdot U(z) = \frac{1}{A(z)} \cdot U(z)$$

Or, $u(n)$ est un bruit blanc stationnaire de moyenne nulle et de variance σ^2 , donc le signal généré sera stationnaire si le filtre de fonction de transfert $1/A(z)$ est stable : c'est à dire si l'ensemble des pôles de cette fonction de transfert se trouve à l'intérieur du cercle unité.

En remplaçant $X(z)$ par son expression, $S_x(z)$ devient :

$$S_x(z) = \frac{1}{|A(z)|^2} E\{U(z) \cdot U^*(z)\}$$

L'entrée étant un bruit, on aura :

$$E\{U(z) \cdot U^*(z)\} = S_u(z) = \sigma^2$$

Et finalement,

$$S_x(z) = \frac{\sigma^2}{|A(z)|^2}$$

D'après (4.3), la densité spectrale du processus **AR** $x(n)$ s'exprime sous la forme :

$$S_x(f) = \frac{\sigma^2}{\left|1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}\right|^2} \quad (\text{IV.7})$$

Avec $z = e^{2\pi i f_r}$, $f_r = \frac{f}{f_e}$

Où f_r : représente la fréquence réduite définie sur l'intervalle $-1/2 \leq f_r \leq 1/2$.

et f_e : la fréquence d'échantillonnage.

Par conséquent, pour estimer la densité spectrale d'un processus AR, on est amené à calculer les coefficients AR (a_1, a_2, \dots, a_p) , la variance σ^2 et l'ordre du modèle (p).

IV-5 Equations des coefficients AR

Les paramètres a_i ($1 \leq i \leq p$), la variance σ^2 et l'ordre p sont déterminés par résolution des équations de YULE-WALKER.

5-1 Equations de YULE-WALKER

Le principe consiste à déterminer le lien entre les paramètres AR inconnus et la fonction d'auto corrélation $C_{xx}(k)$ supposée connue.

$$C_{xx}(k) = E\{x(n+k)x^*(n)\} \quad (\text{IV.8})$$

On aboutit à : (cf. Annexe A4-1)

$$E\{u(n+k)x^*(n)\} = \begin{cases} 0 & k > 0 \\ \sigma^2 & k = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.9})$$

Ce qui permet d'exprimer la matrice d'auto corrélation par les équations suivantes :

$$C_{xx}(k) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^p a_i C_{xx}(k-i) & k \geq 1 \\ \sum_{i=1}^p a_i C_{xx}(-i) + \sigma^2 & k = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.10})$$

Ce système est appelé équations de YULE-WALKER.

L'expression (IV.10) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} C_{xx}(0) & C_{xx}(-1) & \cdots & C_{xx}(-p) \\ C_{xx}(1) & C_{xx}(0) & \cdots & C_{xx}(-(p-1)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{xx}(p) & C_{xx}(p-1) & \cdots & C_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.11})$$

- $C_{xx}(k)$ est définie positive c'est à dire que les valeurs propres de cette matrice sont positives. Cette propriété assure la positivité de la densité spectrale estimée.
- $C_{xx}(k)$ est une matrice Hermitienne ($C_{xx}^*(k) = C_{xx}(-k)$) (symétrique dans le cas des signaux réels).
- $C_{xx}(k)$ est une matrice de Toeplitz car les éléments de chaque diagonale (principale et secondaire) sont égaux.

Ces deux dernières propriétés inspirent, naturellement, l'utilisation d'un algorithme rapide pour déterminer les paramètres AR. C'est l'objet de l'algorithme de Levinson-Durbin.

5-2 Algorithme de Levinson – Durbin

L'application de l'algorithme de Levinson-Durbin pour résoudre le système d'équations de Yule-Walker défini en (IV.11) nécessite p^2 opérations seulement, alors que le plus performant algorithme d'analyse numérique classique (Gauss, par exemple), requiert p^3 opérations.

Les paramètres **AR** se calculent de manière récursive :

$$(a_{11}, \sigma_1^2), (a_{21}, a_{22}, \sigma_2^2), \dots, (a_{p1}, a_{p2}, \dots, a_{pp}, \sigma_p^2) \quad (\text{IV.12})$$

Initialisation

$$a_{11} = -C_{xx}(1)/C_{xx}(0)$$

$$\sigma_1^2 = (1 - |a_{11}|^2)C_{xx}(0)$$

La récursion $k = 2, 3, \dots, p$ donne :

$$a_{kk} = - \left[C_{xx}(k) + \sum a_{k-1,l} C_{xx}(k-l) \right] / \sigma_{k-1}^2$$

$$a_{kl} = a_{k-1,l} + a_{kk}^* a_{k-1,k-l}$$

$$\sigma_k^2 = (1 - |a_{kk}|^2) \sigma_{k-1}^2$$

Les paramètres choisis correspondent à l'ordre optimal $k = p$, seront donc

$(a_{p1}, a_{p2}, \dots, a_{pp}, \sigma_p^2)$ et joueront le rôle, respectivement, de $(a_1, a_2, \dots, a_p, \sigma^2)$.

5-3 Algorithme de Burg

Les paramètres a_{kk} obtenus par l'algorithme de Levinson-Durbin peuvent être supérieurs à l'unité, ce qui entraîne une instabilité du filtre AR. Afin d'éliminer cet inconvénient majeur, Burg propose un algorithme de calcul en se basant sur la minimisation de la somme de l'erreur quadratique moyenne progressive et de l'erreur quadratique moyenne rétrograde, connue aussi sous le nom de la méthode de l'entropie maximum (MEM).

La prise de la moyenne est réalisée, sous les hypothèses de stationnarité et d'ergodisme, à l'aide d'une simple sommation sur un ensemble d'échantillons :

$$\zeta_p = \sum_{n=p}^{N-1} |e_p^p(n)|^2 + \sum_{n=p}^{N-1} |e_p^r(n)|^2 \quad (\text{IV.13})$$

e_p^p : désigne l'erreur progressive à l'ordre p.

e_p^r : désigne l'erreur rétrograde à l'ordre p.

5-3.1 Calcul des erreurs

L'erreur progressive est définie comme étant l'erreur commise lorsqu'un échantillon est prédit par une combinaison linéaire des échantillons le précédant dans le temps.

$$\text{Ainsi l'échantillon : } \hat{x}(n) = -\sum_{k=1}^p a_k x(n-k) \quad (\text{IV.14})$$

Entraîne l'erreur progressive

$$e_p^p(n) = x(n) - \hat{x}(n)$$

L'erreur rétrograde est définie comme étant l'erreur commise lorsqu'un échantillon est perdu par une combinaison linéaire des échantillons postérieurs.

Ainsi l'échantillon

$$\hat{x}(n-p) = -\sum_{k=1}^p a_k^* x(n+k-p) \quad (\text{IV.15})$$

Entraîne l'erreur rétrograde

$$e_p^r(n) = x(n-p) - \hat{x}(n-p)$$

Pour déterminer les a_k optimaux, il faudrait donc estimer l'échantillon qui se rapproche le plus de $x(n)$, d'où l'utilisation du critère d'optimisation :

Minimisation de l'erreur quadratique moyenne

Remarque :

L'indice supérieur (ou exposant) apparaissant dans e^p indique qu'il s'agit de l'erreur progressive, alors que p placé comme "indice inférieur" indique qu'il s'agit d'un calcul à l'ordre p .

Ainsi, e_p^p signifie qu'il s'agit de l'erreur progressive à l'ordre p .

5-3.2 Détermination de la relation de récursion pour l'erreur progressive

L'estimation de l'échantillon $x(n)$ est donnée par :

$$\hat{x}(n) = -\sum_{k=1}^p a_{pk} x(n-k)$$

L'erreur progressive due à cette estimation s'écrit :

$$\begin{aligned} e_p^p(n) &= x(n) - \hat{x}(n) \\ &= x(n) + \sum_{k=1}^p a_{pk} x(n-k) \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

En appliquant la récursion de Levinson, (cf Annexe A4-2), on aboutit à :

$$e_p^p(n) = e_{p-1}^p(n) + k_p e_{p-1}^r(n-1) \quad (\text{IV.17})$$

Le coefficient $k_p = a_{pp}$ est appelé coefficient de corrélation partielle (coefficient PARCOR) ou coefficient de réflexion.

5-3.3 Détermination de la relation de récursion pour l'erreur rétrograde

L'erreur de prédiction rétrograde peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$e_p^r(n) = x(n-p) - \hat{x}(n-p)$$

$$e_p^r(n) = x(n-p) + \sum_{k=1}^p a_{pk}^* x(n+k-p) \quad (\text{IV.18})$$

La détermination des coefficients a_{ii} revient à minimiser l'erreur quadratique moyenne :

$$\zeta_p = \sum_{n=p}^{N-1} |e_p^p(n)|^2 + \sum_{n=p}^{N-1} |e_p^r(n)|^2 \quad (\text{IV.19})$$

selon le critère :

$$\frac{\partial \zeta_p}{\partial k_p} = 0 \quad (\text{IV.20})$$

Et on aboutit à la relation des coefficients de corrélation partielle (cf. annexe A4-3):

$$\hat{k}_k = a_{kk} = \frac{-2 \sum_{i=p}^{N-1} e_{k-1}^p(i) e_{k-1}^r(i-1)^*}{\sum_{i=k}^{N-1} \left[|e_{k-1}^r(i-1)|^2 + |e_{k-1}^p(i)|^2 \right]} \quad k=1, \dots, p \quad (\text{IV.21})$$

Il est clair que k_p , ainsi défini est toujours de module inférieur à l'unité, ce qui garantit la stabilité du filtre AR.

L'algorithme de Burg peut donc se résumer à :

Algorithme de Burg

Initialisation

$$C_{xx}(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2$$

$$\sigma_0 = C_{xx}(0)$$

$$e_0^p(i) = x(i) \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$e_0^r(i) = x(i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

calcul des coefficients de réflexion

pour $k = 1, 2, \dots, p$

$$\hat{k}_k = a_{kk} = \frac{-2 \sum_{i=p}^{N-1} e_{k-1}^p(i) e_{k-1}^r(i-1)^*}{\sum_{i=k}^{N-1} \left[\left| e_{k-1}^r(i-1) \right|^2 + \left| e_{k-1}^p(i) \right|^2 \right]}$$

calcul de la récursion de Levinson

$$a_{kj} = a_{k-1,j} + a_{kk} a_{k-1,k-j} \quad j = 1, \dots, k-1$$

$$\sigma_k^2 = (1 - |a_{kk}|^2) \sigma_{k-1}^2$$

calcul des erreurs

$$e_k^p(i) = e_{k-1}^p(i) + a_{kk} e_{k-1}^r(i-1) \quad i = k+1, \dots, N-1$$

$$e_k^r(i) = e_{k-1}^r(i-1) + a_{kk} e_{k-1}^p(i) \quad i = k, k+1, \dots, N-2$$

estimation de la DSP

$$DSP(f) = \frac{\sigma_p^2 t_e}{\left| 1 + \sum_{i=1}^p a_i \exp(-j2\pi f i t_e) \right|^2} \quad k = 0, \dots, N/2$$

$t_e = 1/F_e$: durée d'échantillonnage, et $f = k.F_e/2$

5-4 Détermination de l'ordre du modèle

Le meilleur choix de l'ordre du modèle **AR** étant souvent inconnu a priori, il est donc nécessaire, en pratique, de postuler plusieurs ordres et de choisir l'ordre qui semble le plus approprié. A cet effet, différents critères fondés sur l'erreur de prédiction sont évalués pour indiquer quel ordre du modèle choisir.

L'expérience montre que si le processus original est un **AR(p)**, c'est-à-dire un processus Autorégressif d'ordre p , alors le choix d'un modèle d'ordre inférieur à p entraîne une estimée spectrale lissée.

Théoriquement, si un ordre $k > p$ est choisi et si la fonction d'auto corrélation est estimée sans erreur, alors les paramètres **AR** estimés du modèle **AR(k)** seront :

$$\hat{a}_{k,i} = \begin{cases} a_{p,i} & \text{pour } i = 1, 2, \dots, p \\ 0 & \text{pour } i = p+1, p+2, \dots, k \end{cases}$$

et une densité spectrale correcte en résultera. Toutefois, des pics "fantômes", dus aux erreurs d'estimation, peuvent apparaître lorsque l'ordre du modèle est surestimé.

En fait, tout ordre fini d'un modèle **AR** introduit un biais du à l'inadéquation de la modélisation. Un compromis doit être réalisé entre le désir de choisir un ordre élevé pour réduire le biais et un ordre faible pour réduire les erreurs d'estimation.

Différentes mesures visant à déterminer l'ordre du modèle ont été proposées, elles sont fondées sur la puissance de l'erreur d'estimation. Généralement, elles tentent de choisir un ordre qui minimise la puissance de l'erreur de prédiction mais en même temps un ordre aussi faible que possible. Puisqu'à partir de la récursion de Levinson, σ_k^2 décroît de façon monotone en fonction de k et atteint un minimum en $k = p$ pour un **AR(p)**. Il est donc raisonnable que la puissance de l'erreur de prédiction soit l'indicateur central pour la sélection de l'ordre du modèle.

Deux méthodes ont été proposées par **Akaike** [KAY 81] pour le choix de l'ordre optimal :

La première méthode connue sous l'appellation de critère **FPE** (Erreur de Prédiction Finale ou Final Prediction Error) estime l'ordre du modèle qui minimise :

$$FPE(k) = \frac{N+k}{N-k} \sigma_k^2$$

Où, σ_k^2 : représente la variance estimée du bruit (ou puissance de l'erreur de prédiction)

N : nombre d'échantillons du signal analysé $x(n)$.

Il est clair que lorsque σ_k^2 , décroît avec k (c'est à dire pour k croissant), le terme $(N+k) / (N-k)$ croît avec k et rend compte de la croissance de la variance de la puissance de l'erreur de prédiction due à une mauvaise estimation des coefficients de prédiction. Le critère FPE est un estimateur de la puissance de l'erreur de prédiction adapté à l'estimation des coefficients de prédiction directement à partir des données.

La seconde méthode, de loin la plus utilisée, est appelée critère **AIC** (Akaike Information Criterion), ce critère minimise :

$$AIC(k) = N \log(\sigma_k^2) + 2k$$

et s'applique même à la détermination de l'ordre de modèles autres que le modèle AR, par exemple des modèles MA ou ARMA.

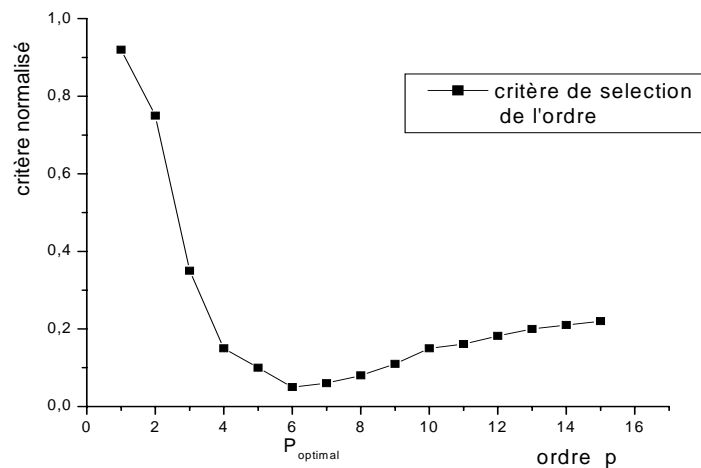


Figure IV-4 Critère de sélection de l'ordre du modèle.

Conclusion

Dans cette partie, on a présenté les fondements des algorithmes d'estimation de la densité spectrale de puissance des processus auto régressifs appliquées aux signaux supposés aléatoires stationnaires en tant qu'outil d'analyse spectrale.

Un estimateur sans biais, ayant une faible variance ainsi qu'une bonne résolution est une qualité très recherchée. Ceci dépend étroitement de quelques facteurs qui sont le nombre d'échantillons (ou durée d'observation), la fréquence d'échantillonnage ainsi que le rapport signal sur bruit.

Le chapitre V sera consacré aux applications, tout en essayant de voir l'influence de ces facteurs (le nombre d'échantillons et le rapport signal sur bruit) sur ces différentes questions.

Chapitre V

Applications

Chapitre V

Applications

V-1 Mise en œuvre des algorithmes de Levinson-Durbin et de Burg

Après avoir décrit les algorithmes d'estimation de la DSP, les algorithmes de Levinson-Durbin et de Burg ont été mis en œuvre sous forme d'un programme (en Langage Fortran, Cf. Annexe A5) qui permet :

- d'estimer les paramètres a_i ($i=1,p$) d'un modèle AR,
- d'estimer la densité spectrale de puissance,
- de ressortir l'évolution de la variance de l'erreur ainsi que de l'erreur de prédiction finale (FPE) en fonction de l'ordre du modèle p.

On essaie de voir dans cette partie l'aptitude de la détection de composantes fréquentielles proches dans un signal, ceci afin d'évaluer leurs performances, car la résolution des méthodes AR dépend à la fois du nombre de points N, de l'ordre du modèle p, ainsi que du rapport signal sur bruit. Pour illustrer ces points, on considère le signal test de plusieurs sinusoïdes bruitées :

$$x(t_k) = \sum_{i=1}^3 a_i \cos(2\pi f_i t_k + \varphi_i) + b(k) \quad k=1, N$$

$$t_k = k \cdot t_e$$

$$a_1 = 1 ; f_1 = 15 \text{ Hz} ; \varphi_1 = 0$$

$$a_2 = 0.5 ; f_2 = 23 \text{ Hz} ; \varphi_2 = 0$$

$$a_3 = 1 ; f_3 = 50 \text{ Hz} ; \varphi_3 = 0$$

t_e : durée d'échantillonnage
 $b(k)$: un bruit additif.

Pour le signal test proposé, on introduit le nombre d'échantillons N, la fréquence maximale d'analyse F_{\max} (la fréquence d'échantillonnage sera $f_e \geq 2 \cdot F_{\max}$) ainsi qu'un ordre max p_{\max} , l'algorithme (de Levinson ou de Burg selon le choix) estime les paramètres $(a_i)_{i=1,p_{\max}}$. Ainsi, un ordre choisi p, qui correspond à une variance minimale, serait introduit pour estimer la densité spectrale de puissance (normalisée) en échelle logarithmique (dB) dans une bande de fréquence $[0 \text{ à } f_e/2]$, avec un nombre de lignes spectrales égal à $N/2$, et une résolution fréquentielle égale à F_e/N .

Génération d'un bruit blanc

Pour générer des nombres pseudo aléatoires compris entre 0 et 1, on dispose de la fonction **Ran(x)**, qui fait partie du compilateur Fortran. L'intervalle d'observation [0 à N-1] a été divisé en des sections dont le nombre Nsec est au choix, et puis on prend la moyenne arithmétique de ces échantillons sur le nombre Nsec, et ceci pour minimiser la variance du bruit, selon le schéma suivant :

Pour k=1 , Nsec, faire

Pour i=0, N-1, faire

$$B(k,i) = \text{ran}(x)$$

Fin de pour

Fin de pour

$$B(i) = \frac{\sum_{k=1}^{N_{\text{sec}}} B(k,i)}{N_{\text{sec}}}, \quad i=0, N-1$$

Le décibel étant défini à partir du rapport des puissances ou des amplitudes de deux signaux

(signal/bruit) :

$$dB = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} \quad \text{avec } P_1 \text{ et } P_2 \text{ les puissances des signaux.}$$

Ou $dB = 20 \log_{10} \frac{A_2}{A_1}$ avec A_1 et A_2 les amplitudes.

En prenant un rapport signal sur bruit de 20 dB, le signal simulé se présente de la façon suivante

(Figure V-1) :

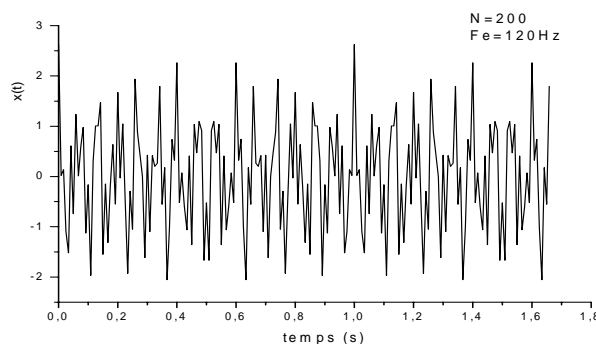


Figure V-1 Signal simulé N=200 échantillons

$f_c = 120$ Hz

Les courbes de la DSP sont présentées dans les figures V-2 a) b) et c) pour différentes valeurs du nombre d'échantillons et du nombre des paramètres.

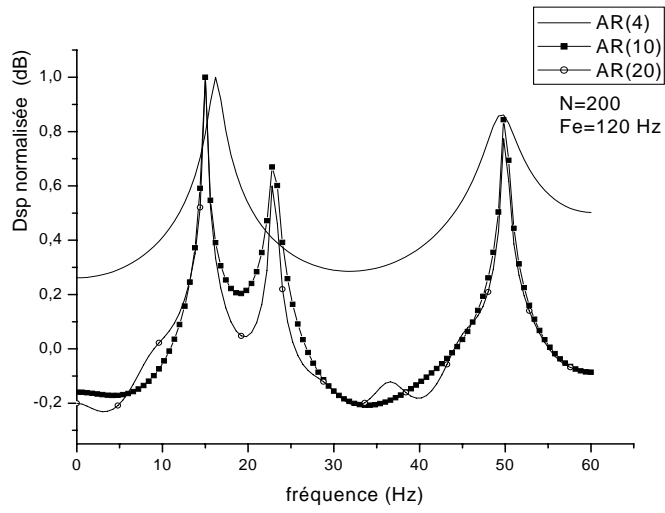


Figure V-2 a) $N=200$ échantillons

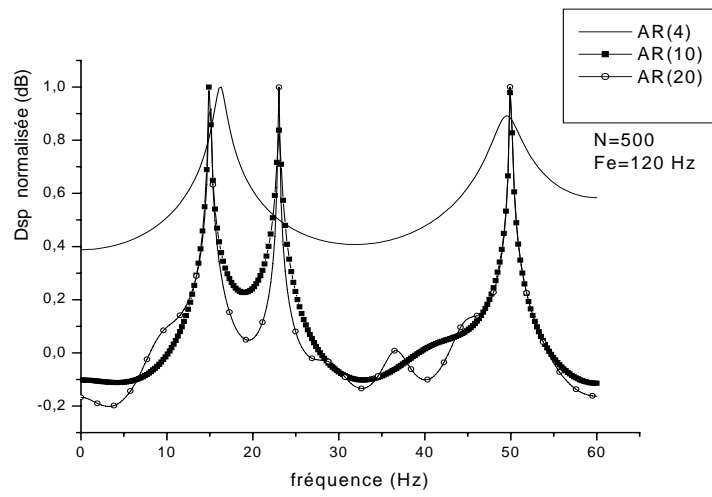


Figure V-2 b) $N=500$ échantillons

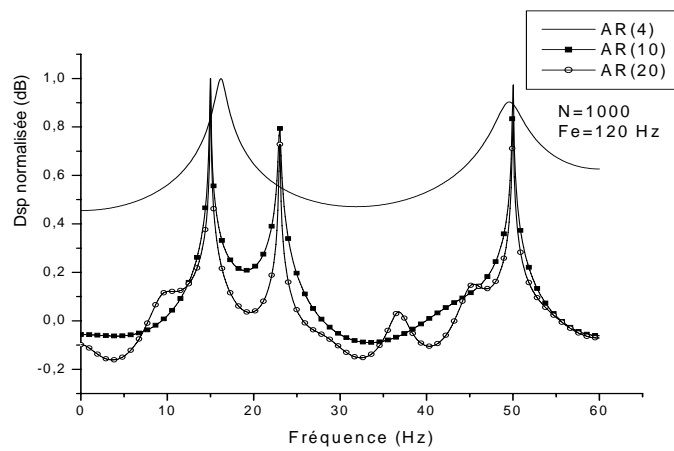


Figure V-2 c) $N=1000$ échantillons

Résolution de la méthode de corrélation en fonction du nombre d'échantillons N et problème du choix de l'ordre p .

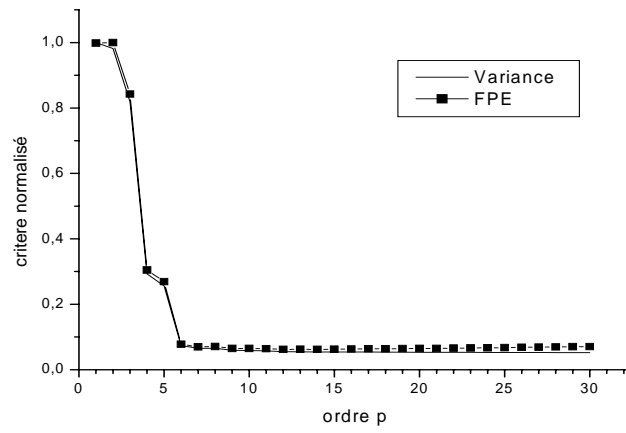


Figure V-3 a) N=200 échantillons

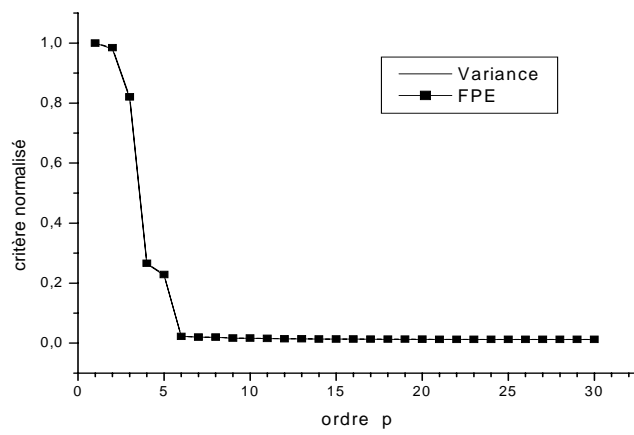


Figure V-3 b) N=1000 échantillons

Evolution de la variance et de l'erreur de prédiction finale (FPE) en fonction de l'ordre p.

Avec l'algorithme de Burg (méthode du maximum d'entropie) :

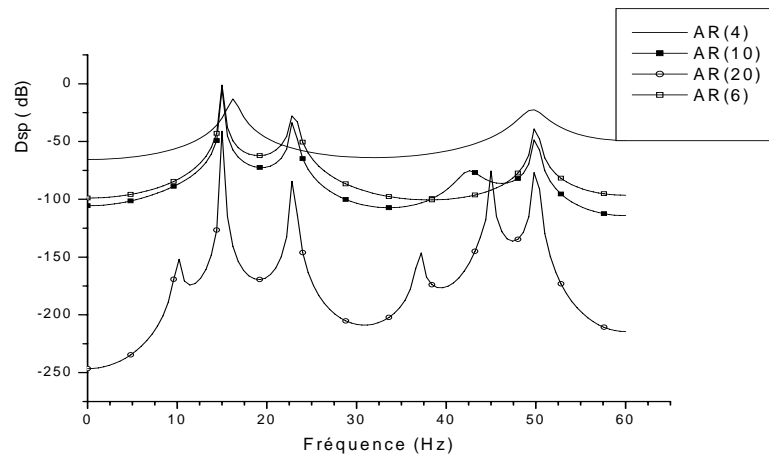


Figure V-4 a) N=200 échantillons

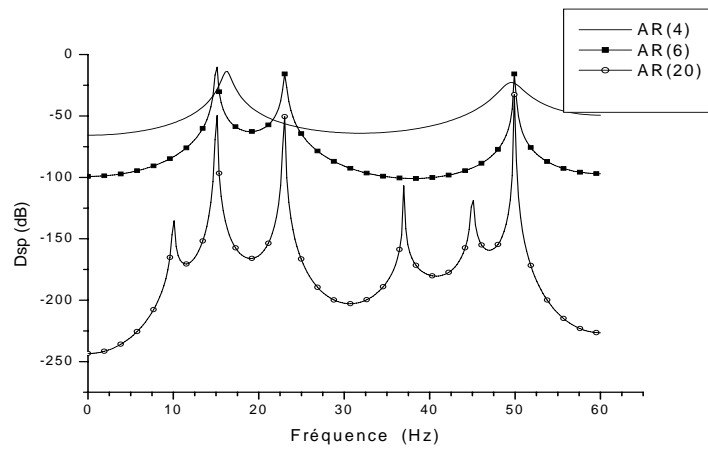


Figure V-4 b) N=500 échantillons

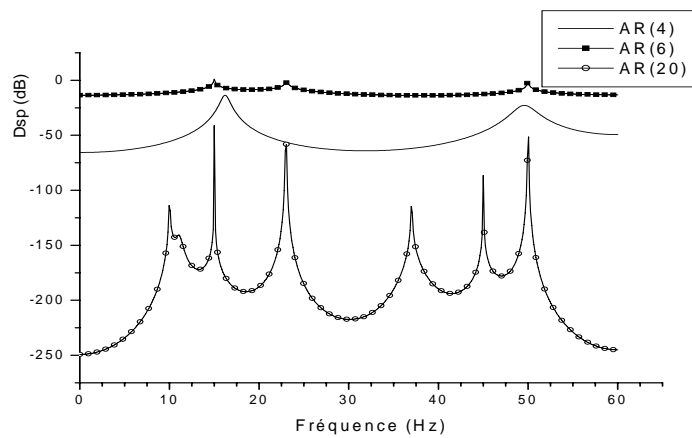


Figure V-4 c) N=1000 échantillons

Résolution de la DSP et choix de l'ordre p (Méthode de Burg)

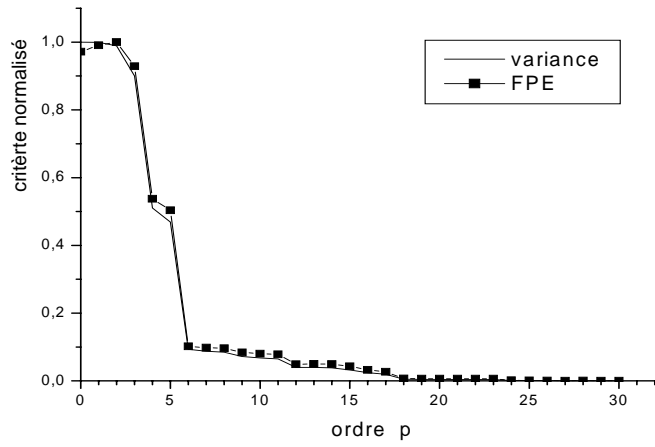


Figure V-5 a) N=100 échantillons

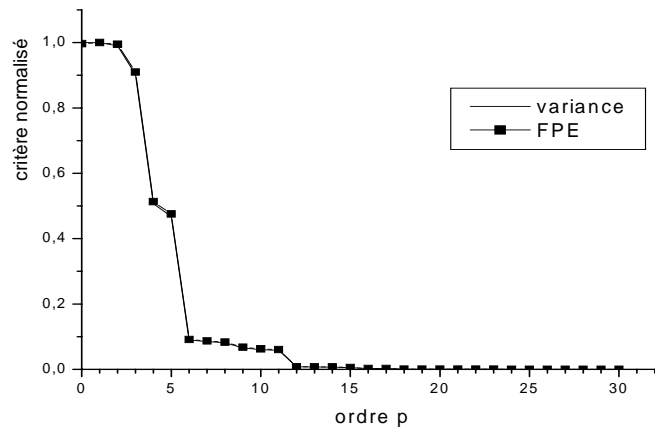


Figure V-5 b) N=500 échantillons

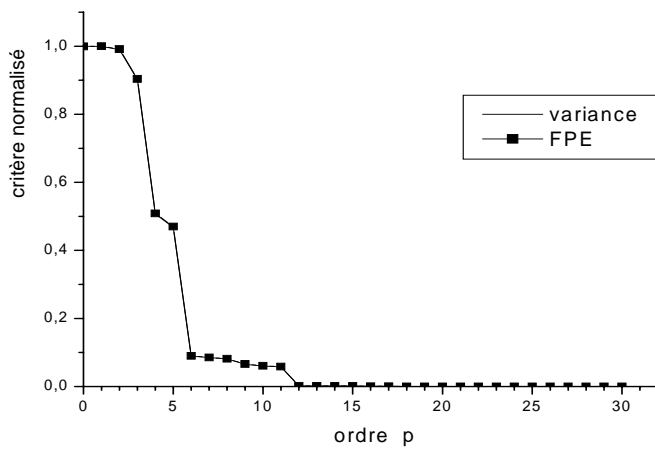


Figure V-5 c) N=2000 échantillons

Evolution de la variance et de l'erreur de prédiction finale FPE en fonction de l'ordre p

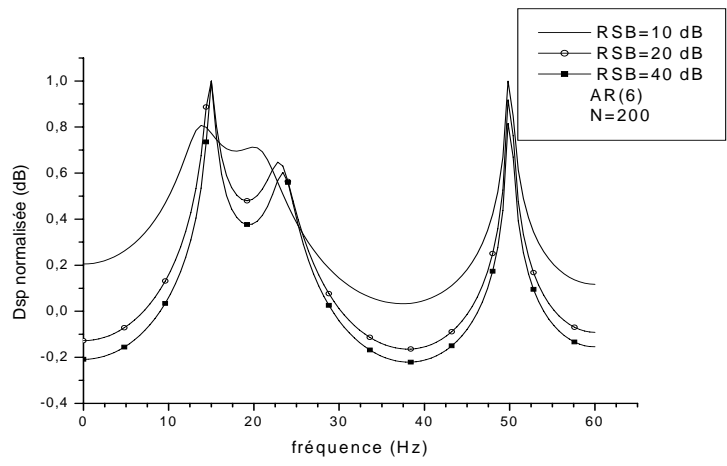


Figure V-6 Résolution de la méthode de Corrélation en fonction du Rapport Signal/Bruit.

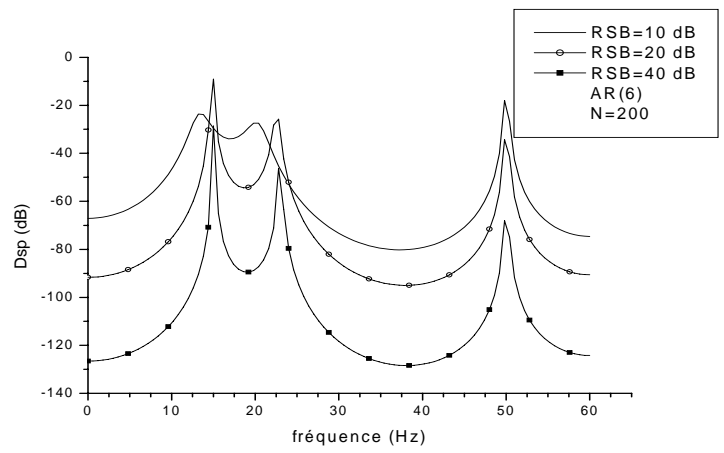


Figure V-7 Résolution de la méthode de Burg en fonction du rapport Signal/Bruit.

Avec l'algorithme de **Levinson**, les courbes de densités spectrales de puissance tracées en figures V-2 (a,b,c) pour différentes valeurs du nombre d'échantillons N , montrent que pour détecter les composantes fréquentielles contenues dans le signal bruité (Figure V-1, avec un rapport signal/bruit de 20 dB), la densité spectrale de puissance, dépend du nombre de paramètres p suffisant pour représenter complètement le signal.

Dans la figure V-2 a), un ordre AR(4) a été choisi, il y a apparition uniquement de deux fréquences (15 Hz et 50 Hz), c'est à dire que l'ordre est sous-estimé. Mais pour un ordre de AR(20), il y a apparition des trois fréquences du signal ainsi que des pics parasites , l'ordre est surestimé. Alors que pour un ordre AR(10), on voit bien que trois fréquences sont visibles, mais cet ordre est légèrement surestimé, car, si on examine l'évolution de la variance de l'erreur, ou l'erreur de prédiction finale (FPE) (Figures V-3 a et b) , on voit que cette dernière décroît et atteint un minimum pour $p=6$ et reste sensiblement constante jusqu'à l'ordre max donné et ceci même si on augmente le nombre d'échantillons.

On remarque aussi qu'on a une stabilité du modèle, car un test sur les valeurs des paramètres a_i par rapport à l'unité dans l'algorithme de Levinson a été introduit, c'est à dire que les paramètres obtenus sont inférieurs à l'unité.

Avec la méthode de **Burg** (dite aussi méthode de l'entropie max), on obtient une densité spectrale de puissance lissée, figures V-4 (a-b-c), on remarque aussi que les mêmes conclusions peuvent être faites, c'est à dire pour un ordre AR(6) on a clairement les trois fréquences (15 Hz, 23 Hz et 50 Hz) qui sont visibles sur le spectre , pour un AR(4) l'ordre est sous-estimé, mais pour un AR(20), il y a apparition de pics parasites, l'ordre est surestimé. Aussi, dans ce cas, la stabilité du modèle est garantie.

L'examen des courbes de densité spectrale présentées en figures V-6 et V-7, montrent que la résolution des méthodes de corrélation et de Burg dépend du rapport signal sur bruit, les composantes fréquentielles contenues dans le signal test sont détectées, avec un ordre sélectionné AR(6), en augmentant le rapport signal sur bruit c'est à dire signal faiblement bruité, pour un nombre d'échantillons relativement faible, les mêmes résultats ont été obtenus en prenant un nombre d'échantillons élevé.

V-2 Acquisition de signaux sur banc d'essai

Quelques mesures ont été prises sur un banc d'essai existant au niveau du laboratoire Dynamique des Moteurs & Vibroacoustique. Le banc d'essai permet l'étude de l'équilibrage dynamique de rotors, et ceci en créant spontanément un défaut de balourd.

5-2-1 Description de la plate-forme expérimentale

Le banc d'essai est constitué des éléments suivants :

- Un moteur électrique à courant continu dont la vitesse varie de 0 à 1500tr/min
- Un rotor entraîné par le moteur, composé d'un arbre monté sur deux paliers à roulements 40 BE 01 et comprend deux disques percés de 40 trous égaux et équidistants.
- Cet ensemble est monté sur une table de type portique (Figure V-8).

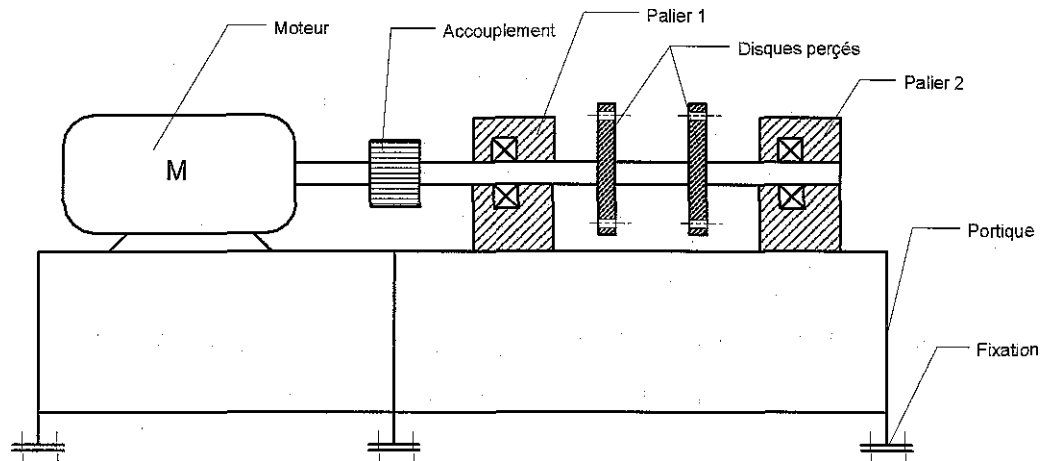


Figure V-8 Schema du banc d'essai

Les roulements supportant l'arbre sont de type à billes dont les caractéristiques sont :

Référence roulement	Diamètre Moyen D(mm)	Diamètre des billes d (mm)	Nombre de billes N	Angle de contact α
Palier 1 SNR 6208 1 rangée	60.00	12.00	9	0
Palier 2 SNR 1208 2 rangées	60.00	6.00	17	0

Pour une fréquence de rotation de $F_r=25$ Hz, les fréquences caractéristiques des éléments des roulements sont :

Référence roulement	Fréquence de bague externe F_{be} (Hz)	Fréquence de bague interne F_{bi} (Hz)	Fréquence de cage F_c (Hz)	Fréquence de billes F_e (Hz)
Palier 1 6208	90	135	10	60
Palier 2 1208	191.25	233.75	11.25	123.75

V-2-2 Instrumentation utilisée

a- Ensemble BRUEL & KJAER

Pour la prise de mesures, l'ensemble B & K suivant a été utilisé :

- Accéléromètres piézo électriques: type 4370, sensibilité de charge : 9.84 pC/ms^{-2}
type 4384, sensibilité de charge : 1.002 pC/ms^{-2} .
- Un amplificateur de charge type 2635 en sortie : accélération, vitesse ou déplacement.
- Un sélecteur de canal qui comporte 8 voies.

b- Carte d'acquisition

La carte utilisée FAST LAB pour la conversion analogique/numérique a les caractéristiques suivantes:

- 8 voies analogiques simples
- 2 calibres programmables : 0/10 V et -5/+5 V.
- temps d'échantillonnage de 5 μs à 1000 s (cas d'acquisition en monovoie).

c- Logiciel d'acquisition:

Le logiciel utilisé pour le traitement et la visualisation de données : 'PHYSCOPE', permettant de :

- programmer les paramètres de réglage :
 - L'affectation des voies d'acquisition,
 - Le nombre de points,
 - La durée d'échantillonnage,
 - Le facteur d'amplification,
 - Le nombre de moyennes,
 - L'acquisition automatique,
- Faire une analyse des signaux, feuille de calcul ainsi que d'autres fonctions (lissage, interpolation...).

V-2-3 Identification de la fréquence de résonance de l'arbre

Le mode de résonance de l'arbre a été excité en faisant tourner le moteur à la vitesse de 720 tr/min ($F=12 \text{ Hz}$), le signal présenté en Fig.V-9 a été pris sur le palier de l'arbre coté accouplement, direction radiale horizontale, avec un moyennage en 16 acquisitions.

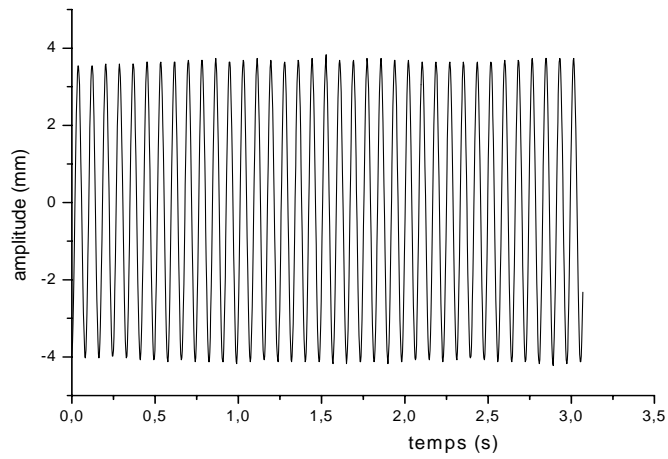


Figure V-9 Signal temporel en déplacement
(direction : radiale horizontale)

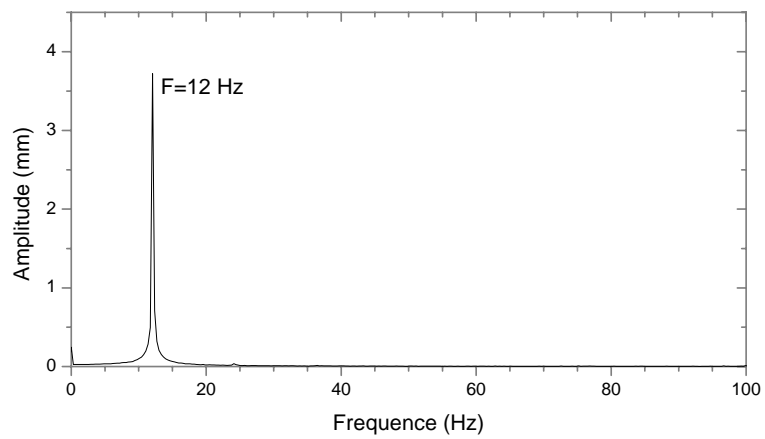


Figure V-10 Spectre d'amplitude

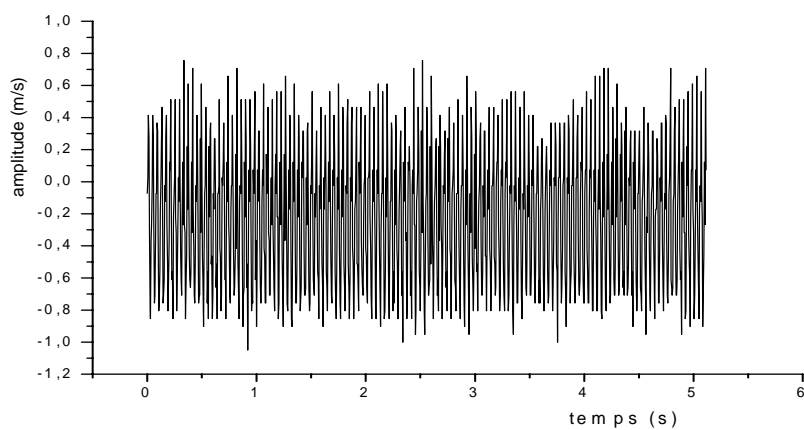
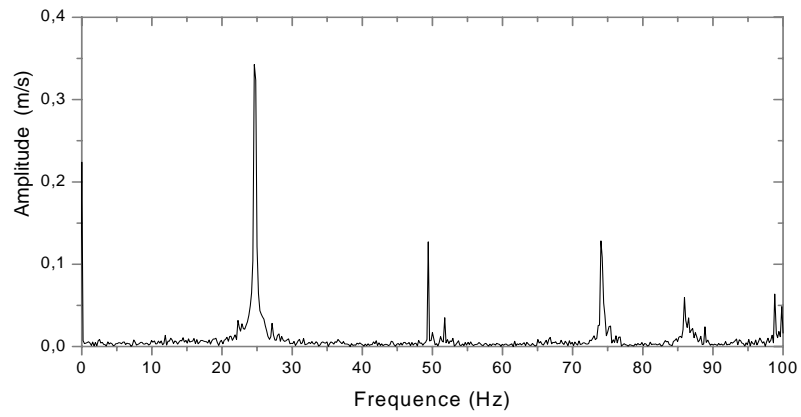


Figure V-11 Signal temporel - palier 1, radiale horizontale-
fréquence de rotation = 25 Hz
N=1024 points, $f_c=200$ Hz



**Figure V-12 Spectre FFT du signal [10 – 100] Hz
Moyennage sur 8 spectres.**

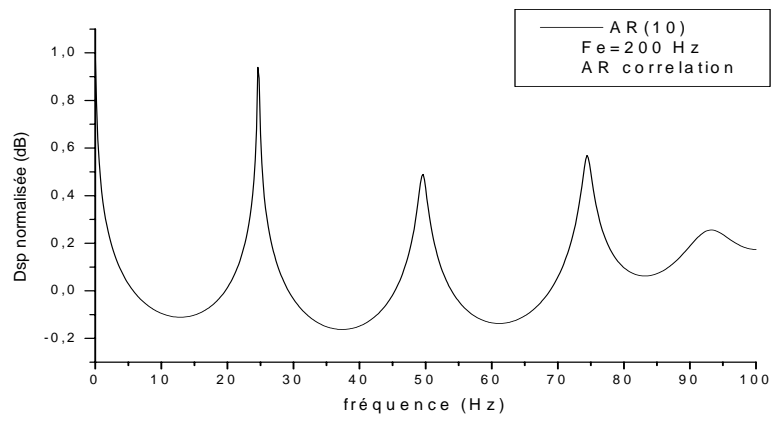


Figure V-13 Spectre paramétrique AR (corrélation)

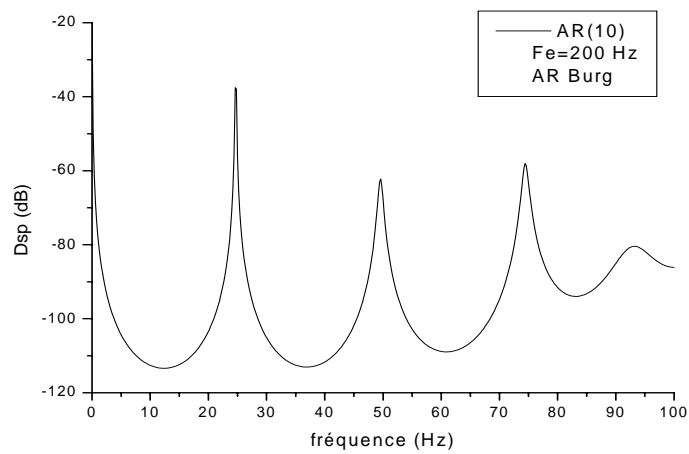
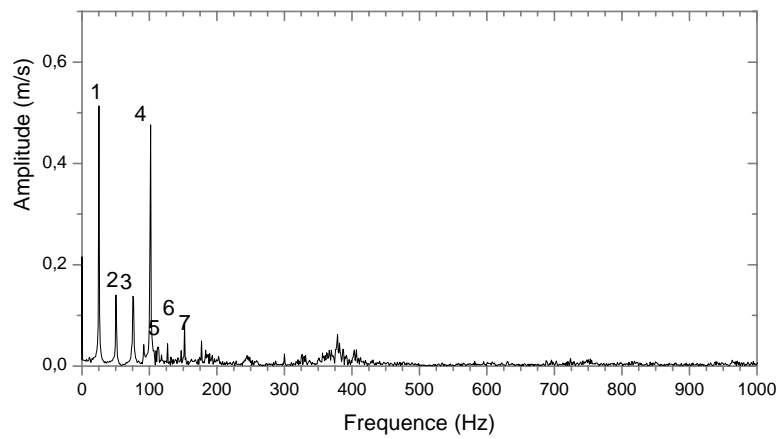


Figure V-14 Spectre paramétrique AR (Burg)



**Figure V-15 Spectre FFT [10 - 1000] Hz
(N=2048 points, Fe=2.06 khz)**

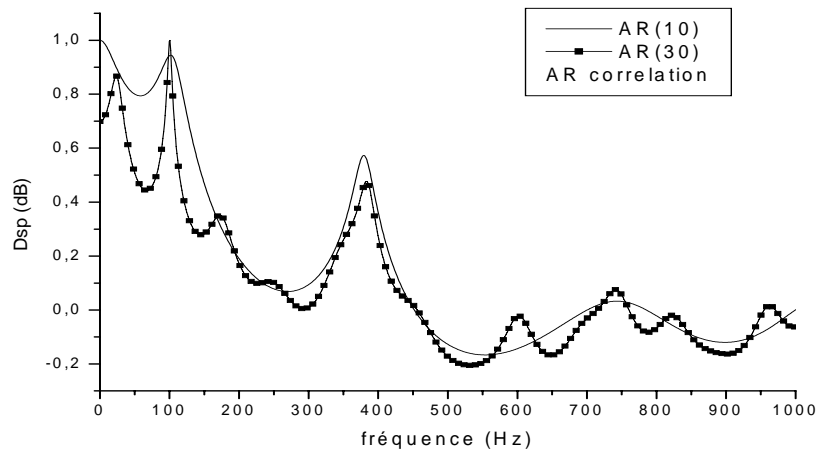


Figure V-16 Spectre paramétrique AR (Corrélation)

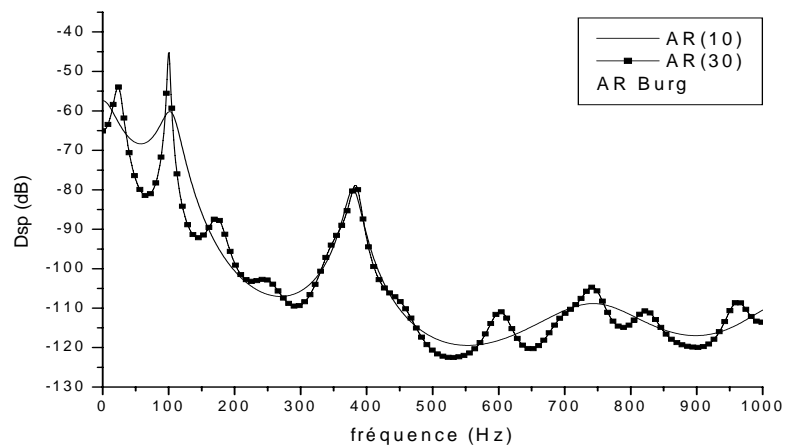
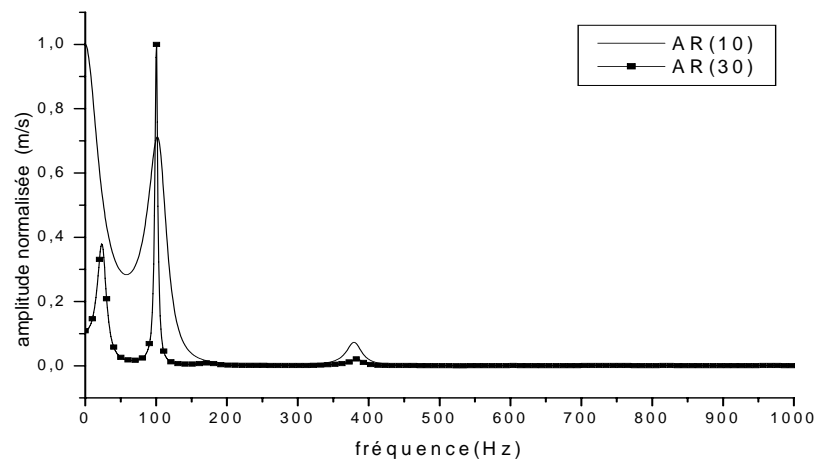
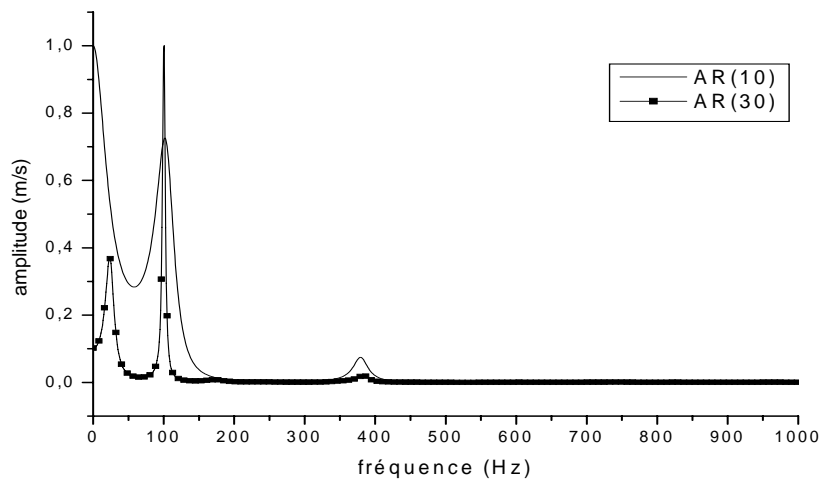


Figure V-17 Spectre paramétrique AR (Burg)



**Figure V-18 Spectre paramétrique (Corrélation)
en échelle linéaire.**



**Figure V-19 Spectre paramétrique (Burg)
en échelle linéaire.**

Le spectre de la figure V-12, calculé dans la plage [0 -100 Hz], met en évidence l'existence d'une composante d'une amplitude prépondérante à la fréquence de rotation 25 Hz et des harmoniques multiples, il s'agit d'un phénomène de balourd qui se manifeste à la fréquence de rotation (l'harmonique fondamentale est à 25 Hz), qui est visible au niveau du palier 1 (coté accouplement).

Sur le même palier, en prenant une plage de fréquence de [10 – 1000] Hz, figure V-15, le phénomène de balourd est toujours apparent, et l'harmonique qui apparaît à 4 fois la fréquence de rotation (100 Hz) met en évidence l'existence d'un défaut de fixation de la bague intérieure du roulement du palier 2 (remarqué lors du changement de ce roulement), ceci a induit un défaut d'alignement de l'axe du rotor avec celui du moteur d'entraînement.

L'examen des figures V-12, V-13 et V-14, montre que les raies spectrales contenues dans le spectre FFT sont apparentes au niveau des spectres paramétriques AR (méthode de corrélation et de Burg), mais on obtient une densité spectrale lissée (échelle logarithmique).

Sur les spectres paramétriques des figures V-16 et V-17 établis avec les méthodes de corrélation et de Burg, on remarque que si on prend un ordre du modèle AR(10), les raies spectrales ne sont pas visibles sur les spectres, alors que pour AR(30), les composantes à 25 Hz et 100 Hz apparaissent clairement, mais il y a apparition de pics parasites, car l'échelle logarithmique permet de montrer des composantes de rapport d'amplitudes très élevées. Alors, le passage en échelle linéaire permet de voir clairement ces deux composantes (figure V-18 et V-19).

Conclusion

Dans cette dernière partie, on a présenté les fondements des algorithmes d'estimation de la densité spectrale de puissance en tant que moyen de traitement de l'information et outil d'analyse spectrale paramétrique.

Les méthodes paramétriques sont appropriées pour des signaux générés par des processus auto régressifs. Elles ont une bonne résolution spectrale et s'adaptent bien à l'analyse des signaux de courte durée.

A l'issue de ces résultats, on remarque que la méthode de Burg offre une bonne résolution et une faible variance par rapport à la méthode de corrélation, mais elle présente l'inconvénient de dédoublement des raies pour des signaux à fréquences pures, ce qui est très gênant pour la détection de composantes fréquentielles noyées dans du bruit.

Le plus simple des estimateurs classiques possède une variance qui ne peut diminuer en agissant sur le nombre d'échantillons N , et la segmentation des échantillons en plusieurs sections (spectre moyenné) permet de réduire la variance. La résolution fréquentielle dépend du nombre d'échantillons N . Dans le cas où on ne peut pas augmenter N , la diminution de la variance ne peut être qu'au prix de l'augmentation du biais.

Les imperfections des méthodes classiques (périodogramme et correlogramme) sont liées essentiellement à l'hypothèse faite sur le signal ou sa fonction d'auto corrélation, en considérant que ce dernier est nul en dehors de la période d'observation. De ceci résulte une mauvaise résolution surtout si la période d'observation est faible.

Les méthodes paramétriques permettent de contourner cette difficulté en postulant un modèle particulier du signal, modèle AR, pour la méthode de Burg. En conséquence, la résolution spectrale est meilleure comparée aux méthodes classiques.

La difficulté majeure avec la modélisation AR est l'optimisation de l'ordre p du modèle, pour représenter parfaitement le signal, car la densité spectrale de puissance est estimée sur la base de ces paramètres. Un ordre sous-estimé entraîne une perte d'information dans le signal et la DSP ne permet pas de visualiser toutes les composantes fréquentielles.

Conclusion générale

Dans une première partie de cette étude, on a présenté l'outil classique de l'analyse spectrale qui est la transformée de Fourier et les éléments nécessaires au traitement pour extraire l'information contenue dans le signal, en vue de faire un diagnostic, et localiser l'origine cinématique du défaut. On note aussi que le descripteur, qu'il faut choisir doit être sensible au défaut à surveiller, est un élément important dans l'analyse.

L'analyse est liée à la qualité des mesures, qui dépend à son tour d'un certain nombre de facteurs qu'il faudra choisir judicieusement (type de capteur, gamme de fréquence, l'échantillonnage...). Les signaux vibratoires des machines tournantes sont riches en harmoniques et contiennent aussi du bruit, qu'il faudra minimiser en effectuant un moyennage sur un nombre de spectres, car recueillir un signal sur une fraction d'un tour d'arbre ne véhicule pas souvent de l'information, il faut au moins une dizaine de tours.

La finalité de l'analyse est le diagnostic, dont la fiabilité dépend essentiellement de l'expérience qui joue un rôle capital dans la recherche de symptômes et la localisation de l'origine du défaut.

Dans une deuxième partie, on a abordé une modélisation paramétrique auto régressive des signaux avec la méthode de corrélation (algorithme de Levinson) et la méthode du maximum d'entropie (algorithme de Burg). Ces algorithmes ont été mis en œuvre pour tester ces méthodes du point de vue résolution en fonction du nombre d'échantillons et du rapport signal sur bruit. Disposer d'une courte durée d'observation (un faible nombre d'échantillons) influe considérablement sur la densité spectrale de puissance (ou spectre) constituant l'outil de diagnostic. L'avantage de l'application des méthodes paramétriques dans les processus aléatoires, est qu'elles sont faciles à mettre en œuvre. L'algorithme de Levinson permet la résolution des équations normales en inversant la matrice de type Toeplitz et fournit la valeur de l'erreur de prédiction à chaque étape. Cette erreur fera l'objet de suivi en testant son éloignement par rapport à un bruit blanc et ceci pour caractériser certains défauts.

La modélisation AR pose un problème important relatif à l'optimisation du nombre des paramètres du modèle p (ou filtre), les critères classiques (à titre d'exemple FPE, AIC) ont tendance à sous-estimer l'ordre. Dans le programme de simulation, on introduit un ordre max (p_{\max}). L'algorithme fournit la variance de l'erreur pour toute les valeurs [0 à p_{\max}], puis l'ordre est choisi en fonction de la variance. Par la suite, on estime la densité spectrale de puissance.

Les spectres paramétriques obtenus comparés aux spectres FFT permettent la révélation de défauts sur des signaux caractérisant des balourds, avec un nombre de paramètres relativement élevés.

Pour cette raison, introduire un critère d'optimisation du nombre des paramètres du filtre est très important, qui s'appliquera même à des modèles adaptatifs.

Les modèles AR présentent un autre avantage car ils permettent de fournir de descripteurs importants tels que, les coefficients cepstraux, calculés à partir des coefficients du filtre et la distance Log-spectrale entre deux spectres paramétriques, dont le suivi fera l'objet de détection de défauts de non stationnarités.

Cette étude présente un intérêt scientifique pour une extension de ce travail à la version adaptative des algorithmes AR pour suivre l'évolution des signaux aléatoires caractérisant certains défauts comme l'usure ou l'écaillage, et ce en disposant de moyens de traitement et d'une chaîne de mesure expérimentale évolués.

BIBLIOGRAPHIE

[ABD 93]- L. ABDELOUEL

Estimation spectrale basée sur la modélisation autoregressive , application à la détection des périodicités cachées dans les phénomènes aléatoires, Thèse de Magister, ENP, mai 1993.

[ABU 03]- I. ABU-MAHFOUZ

Drilling wear detection and classification using vibration signals and artificial network, International journal of machine tools & manufacture N° 43, 2003, pp. 707-720.

[ALT 01]- J. ALTMANN, J. MATHEW

Multiple band-pass autoregressive demodulation for rolling element bearing fault diagnosis,
Mechanical systems and signal processing, 2001, pp. 963-977.

[ARQ 96]- P. ARQUES

Diagnostic prédictif de l'état des machines,
édition Masson 1996.

[BAR 91]- O. BARDOU, M. SIDAHMED, M. WATREMETZ

Détection précoce de fuites aux soupapes
CETIM – Informations N° 125 décembre 1991, pp 63-67.

[BAR 92]- O. BARDOU, M. SIDAHMED, M. BONNAVION

Détection précoce des fuites aux systèmes d'échappement-refoulement des machines alternatives par analyse des vibrations,
Progrès récents des méthodes acoustiques et vibratoires
Conf. internationale 27-29 oct 1992, Senlis, France.

[BAS 88]- M. BASSEREAU

Surveillance et maintenance des turbines hydrauliques,
Mécanique matériaux électricité N° 424 mars-avril 1988, pp 4-5.

[BOU 03]- A. BOULENGER, C. PACHAUD

Analyse vibratoire en maintenance, surveillance et diagnostic des machines,
Edition Dunod , L'USINE NOUVELLE 2003

[BOU 83]- B. BOUIZEM

Analyse des vibrations des machines tournantes
Application à un réducteur à engrenage, Mémoire de Magister, USTOran, mars 1983.

[BOU 88]- L. BOURGAIN, R. DART, J. BOURGAIN

Machines tournantes et circuits pulses, applications industrielles et médicales de l'analyse spectrale, Edition Dunod 1988.

[BOU 98]- A. BOULENGER, Ch. PACHAUD

Surveillance des machines par analyse des vibrations, du dépistage au diagnostic,
Edition Afnor 1998.

[BRZ 90]- J. BRZENSKI

Surveillance des machines par les vibrations,
Conférence CETIM : la maintenance conditionnelle des machines, stratégie et méthodes
Troyes (France) 1-2 fev. 1990, pp 51-60.

[CAR 90]- D. CARREAU

Surveillance des roulements par l'analyse des vibrations,
CETIM - Informations N° 115 avril 1990, pp 30-39.

[DRO 92]- K. DROUCHE, M. SIDAHMED

Détection de défauts d'engrenages par analyse vibratoire, congrès SFM/ SFA: Progrès
récents des méthodes acoustiques et vibratoires, senlis 26-28 octobre 1992, pp 163-172.

[DUM 01]- J. DUMAS, B. BENNEVAULT

Analyse du signal (FFT et filtrage numérique) & analyse des systèmes,
Document 01-dB-stell, MVI Technologies group, février 2001.

[ENG 90]- M. ENGELHARDT

ARME : un système d'aide au diagnostic appliqué à l'analyse vibratoire des machines
tournantes, Troyes 1-2 fev. 1990, pp147-157.

[FLE 01]- G. FLEURY

Analyse spectrale, Méthodes non-paramétriques et paramétriques,
Edition ellipses, 2001.

[FLE 88]- J. P. FLECKENSTEIN, D . LEREVEREND, P. NEAU

La surveillance vibratoire des groupes turboalternateurs à EDF
Mécanique matériaux électricité N° 424 mars-avril 1988, pp 24-26.

[FRO 92]- L. FROMAIGET

Surveillance de motopompes à roulements à l'aide de méthodes acoustiques et
vibratoires.

Progrès récents des méthodes acoustiques et vibratoires,
Conf. Internationale 27-29 oct.1992 , senlis France.

[GIR 90]- M. GIRAUD.P, T. HAMONVILLE

Diagnostic en ligne de l'état d'une machine tournante,
Mécanique matériaux électricité, N° 434 mai-juin 1990, pp 76-78.

[GUE 90]- C. GUENGUEN

Etat du traitement du signal, perspectives (Résumé),
Conférence CETIM : Le traitement du signal en mécanique, Senlis 7-8 mars 1990.

- [KAY 81]- S.M.KAY and MARPLE, J R**
Spectrum Analysis – a modern perspective,
Proceedings of the IEEE, vol.69 N° 11, pp 1379-1419, Nov.1981.
- [KIO 97]- M. KIOUS, M. DJEDDI**
Surveillance et diagnostic des machines tournantes par analyse du signal vibratoire:
application aux roulements.
COM CND'97 Conférence maghrébine sur le contrôle non destructif,
Alger 28-30 juin 1997.
- [LAL 99]- C. LALANNE**
Vibrations aléatoires, tome 3,
édition Hermes 1999.
- [LEC 89]- J. C. LECOUFLE**
La maintenance conditionnelle par l'analyse des vibrations exemple des pompes,
CETIM - Informations, N° 113 décembre 1989, pp 39-43.
- [LEE 98]- S.K. LEE and P. R. WHITE**
The enhanced of impulsive noise and vibration signals for fault detection in rotating
And reciprocating machinery,
Journal of sound and vibration (1998), pp.485-505.
- [MAG 81]- J.P. DE MAGNEE**
Analyse des vibrations pour la surveillance des machines rotatives,
L'industrie française/ Achats et entretien N° 330, 05-1981, pp35-46.
- [MAK 75]- J. MAKHOUL**
Linear prediction : a tutorial review,
Proceedings of the IEEE, vol.63 N° 4, April 1975,pp 561-580.
- [MAX 81]- J. MAX**
Méthodes et techniques du traitement du signal et application aux mesures physiques
3° édition, Masson 1981.
- [MCC 98]- A.C. McCORMICK, A. K. NANDI**
Cyclostationnarity in rotating machine vibrations,
Mechanical systems and signal processing (1998), vol.12, pp. 225-242.
- [MIC 00]- MICHAEL S. JOHNSON Jr.**
Vibration test for bearing wear,
ASHRAE Journal, October 2000, pp.52-56.
- [MOL 92]- F. MOLINARO, F. CASTANIE**
Détection du cliquetis moteur à l'aide des techniques de classification en traitement du
signal
Progrès récents des méthodes acoustiques et vibratoires
Conf. internationale 27-29 oct 1992, Senlis, France.

[MOR 92]- J. MOREL

Vibrations des machines et diagnostic de leur état mécanique,
Edition Eyrolles (Paris) 1992.

[NAJ 88]- M. NAJIM

Modélisation et identification en traitement du signal, édition Masson 1988.

[OUA 93]- A. OUAHABI

Techniques avancées de traitement du signal et applications,
édition connaissance du monde, Alger 1993.

[PAC 93]- Ch. PACHAUD, A. BOULENGER

Techniques de diagnostic au service de l'ingénieur maintenance,
Maintenance et Entreprise, N° 458 jan-fev. 1993, pp 25-36.

[PRE 90]- A. PREUMONT

Vibrations aléatoires et analyse spectrale,
édition Lavoisier 1990.

[QIN 01]- L. QING, W. HSU-PIN

A case study on multisensor data fusion for imbalance diagnosis of rotating machine,
Artificial Intelligence for Engineering Design Analysis and Manufacturing,
Cambridge university press 2001.

[SAB 90]- J. SABOT, PH. BRIERE, J.P. LIAUDET

Comportement vibratoire des transmissions à engrenages : origine, caractéristiques et
conséquences, Mécanique matériaux électricité N° 434 mai-juin 1990, pp 79-80.

[SID 90]- M. SIDAHMED, Y. GRENIER

Surveillance et diagnostic de réducteurs à engrenages, conférence CETIM : le traitement
du signal en mécanique, senlis(France) 7-8 mars 1990, pp 29-41.

[SID 91]- M. SIDAHMED, C. GARNIER

Détection de défauts dans les engrenages,
CETIM- Informations N° 124 octobre 1991, pp 71-74.

[SID 91]- M. SIDAHMED

Traitement du signal : détection précoce des défaillances de machines,
CETIM – Informations N° 123 juillet 1991, pp 58-62.

[VRA 03]- V. VRABIE, P. GRANJON, C. MARONI, B. LEPRETTRE

Application of spectral Kurtosis to bearing fault detection in induction methods,
Workshop on nonlinear signal and image processing, NSIP03, june 2003.

[WAL 94]- E. WALTER, L. PRONZATO

Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales.
édition Masson 1994.

ANNEXES

ANNEXE A1**DEFINITIONS****A1-1- Produit de convolution :**

On appelle produit de convolution de deux fonctions f et g noté $f * g$, la fonction z définie par l'intégrale :

$$z(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt$$

Cet opérateur joue un rôle considérable en physique et en mathématique du signal puisqu'il relie dans le domaine temporel la réponse $s(t)$ d'un système linéaire à l'excitation d'entrée $e(t)$ par l'intermédiaire de la réponse impulsionnelle $h(t)$,

$$S(t) = h(t) * e(t)$$

Le produit de convolution d'une fonction $x(t)$ par la distribution de Dirac traduite $\delta(t-t_0)$ translate $x(t)$ de t_0 sur l'axe du temps.

Le produit de convolution d'une fonction par un peigne de Dirac de pas T_0 répète cette dernière identique à elle-même .

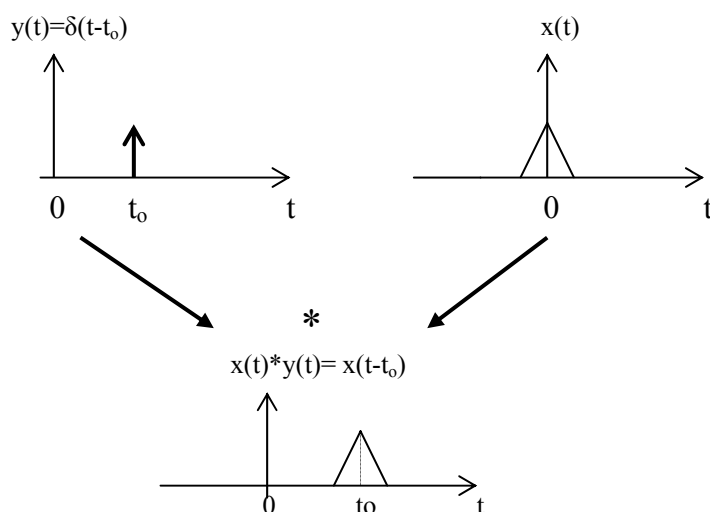


Figure A1-1 Produit de convolution par un peigne de Dirac

Toute fonction de période T_0 peut être considérée comme le produit de convolution d'une fonction motif par un peigne de Dirac de pas T_0 .

A1-2 - La Corrélation :

Cette fonction consiste à déterminer s'il existe une relation entre deux signaux, s'ils se superposent le mieux possible, ou vérifier la périodicité d'un signal invisible, On distingue l'auto corrélation et l'inter corrélation.

Fonction d'auto corrélation : (recherche de périodicité ou de retard)

$$\text{Signal analogique :} \quad C_{xx} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} x(t) x^*(t - \tau) dt$$

$$\text{Signal discret :} \quad C_{xx}(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) x(k+i)$$

Fonction d'inter corrélation : (détection de relation de cause à effet)

$$\text{Signal analogique :} \quad C_{xy} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x(t) y^*(t - \tau) dt$$

$$\text{Signal discret :} \quad C_{xy}(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) y(k+i)$$

ANNEXE A2**A2-1 Transformée de Fourier rapide (FFT) :**

La version numérique de la transformée de Fourier continue d'un signal discret $x(kT_e)$ est donnée par :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \cdot \exp(-j2\pi f \cdot nT_e) \quad (\text{A2.1})$$

T_e : est la période d'échantillonnage.

Mais, pratiquement il est impossible d'évaluer l'expression (A2.1) sur un nombre infini d'échantillons. On doit se limiter à la durée du signal $N \cdot T_e$. De plus, avec un système de traitement numérique, on ne peut évaluer $X(f)$ en fonction de la variable continue f . Il faut procéder à une discrétisation de la fréquence. Comme $X(f)$ est périodique, de période $1/T_e$, en prélevant N échantillons avec un pas d'échantillonnage $\Delta f = 1/N \cdot T_e$, on aura :

$$X(k \cdot \Delta f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \exp(-j2\pi k \cdot \Delta f \cdot nT_e) \quad (\text{A2.2})$$

ou simplement,

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi kn/N) \quad (\text{A2.3})$$

Si on pose :

$$W = \exp(-j2\pi/N)$$

la somme finie (A2.3) s'écrit :

$$X(k) = X(0) + X(1) \cdot W^k + X(2) \cdot W^{2k} + X(3) \cdot W^{3k} \dots + X(N-1) \cdot W^{(N-1)k} \quad (\text{A2.4})$$

Ou sous la forme :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{nk}, \quad k=0, \dots, N-1$$

Si l'on regroupe les termes d'ordre paire et impaire, on obtient :

$$P(k) = X(0) + X(2) \cdot W^{2k} + X(4) \cdot W^{4k} + \dots + X(N-2) \cdot W^{(N-2)k} \quad (\text{A2.5})$$

$$I(k) = X(1) + X(3) \cdot W^{2k} + X(5) \cdot W^{4k} + \dots + X(N-1) \cdot W^{(N-2)k} \quad (\text{A2.6})$$

$P(k)$ et $I(k)$ sont aussi des TFD d'ordre moitié M ($M=N/2$), indépendantes l'une de l'autre. Ceci permet de réitérer le procédé sur des intervalles d'ordre $M/2$.

Généralement, N est une puissance de 2 ($N=2^p$), le calcul de la TFD nécessite N^2 opérations mais avec la FFT, on fait beaucoup mieux, $N \log_2 N$.

A2-2 - Caractéristiques de quelques fenêtres d'apodisation

1. Présentation du problème

Dans un traitement numérique, il est impensable d'utiliser tous les échantillons d'un signal. On limite donc le nombre d'échantillons à N . Cela revient en fait à multiplier le signal de départ par une fenêtre rectangulaire w_r de N échantillons.

La multiplication par cette fenêtre dans le domaine temporel se traduit, dans le domaine fréquentiel, par un produit de convolution de la transformée de Fourier de cette fenêtre avec celle du signal.

La fenêtre temporelle $w_r(k)$ est un rectangle de largeur N , centré sur 0:

$$w_r(k) = \text{Rect}_N(k + N/2)$$

Sa transformée de Fourier $W_r(f)$ appelée fenêtre spectrale est donnée, pour N impair par:

$$W_R(f) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \exp(-2j\pi f k) = \frac{\sin(\pi f N)}{\sin(\pi f)}$$

On peut vérifier que ce spectre sera d'autant plus exact que N sera plus grand. Mais, puisqu'on est obligé de limiter N (pour les besoins des calculs), on utilise d'autres moyens pour atténuer l'effet des lobes secondaires.

L'importance des perturbations est liée aux propriétés de la transformée de Fourier de la fenêtre rectangulaire.

On cherche donc des fonctions fenêtre permettant de limiter le nombre d'échantillons et dont la transformée de Fourier a des lobes secondaires moins prononcés.

Cependant, la réduction des lobes secondaires se fait en contrepartie de l'élargissement du lobe principal. Le choix d'une fenêtre se fait donc en fonction de deux critères:

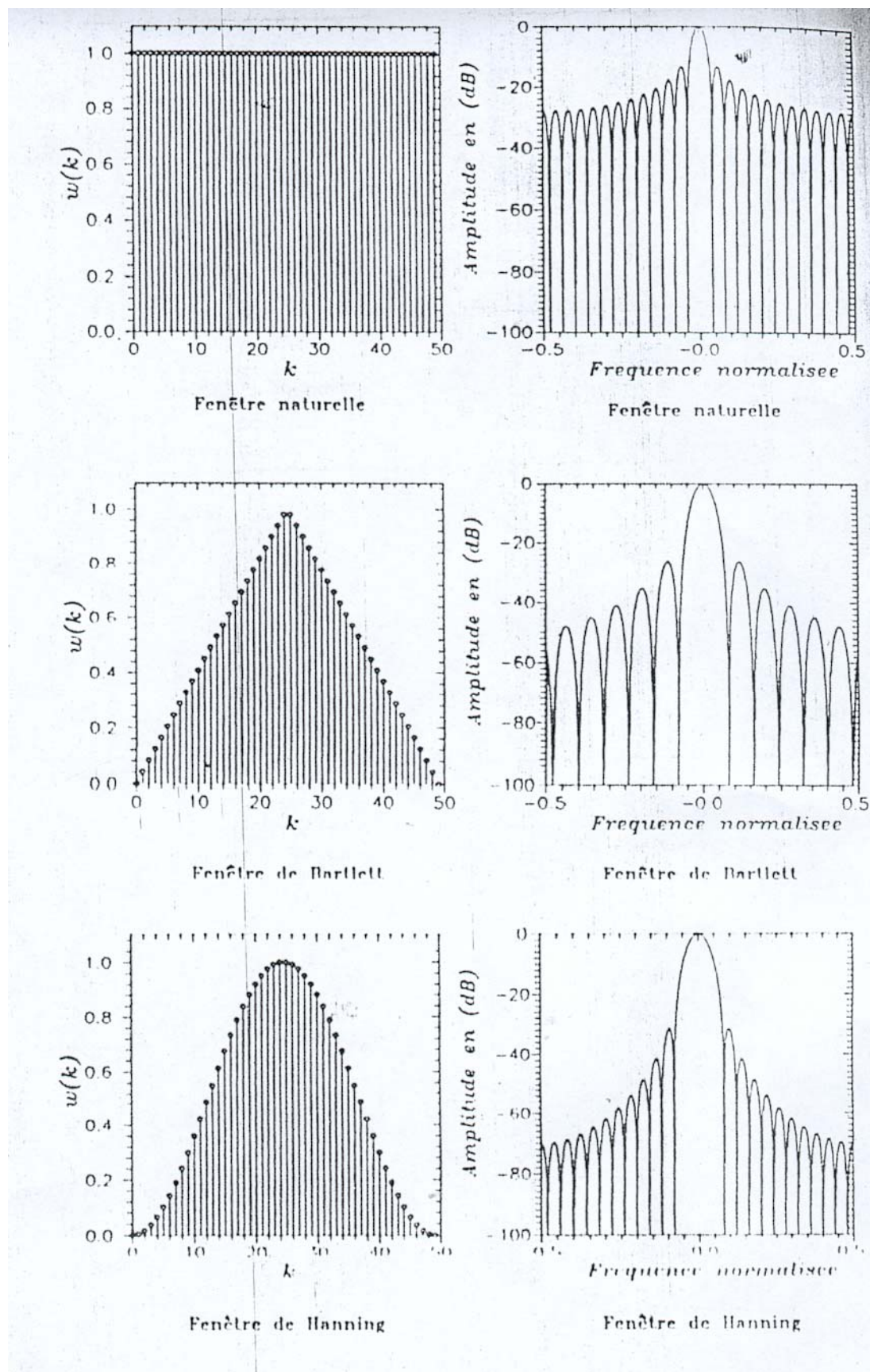
- la largeur du lobe principal,
- le rapport λ_r des amplitudes du premier lobe secondaire et du lobe principal (exprimé en dB).

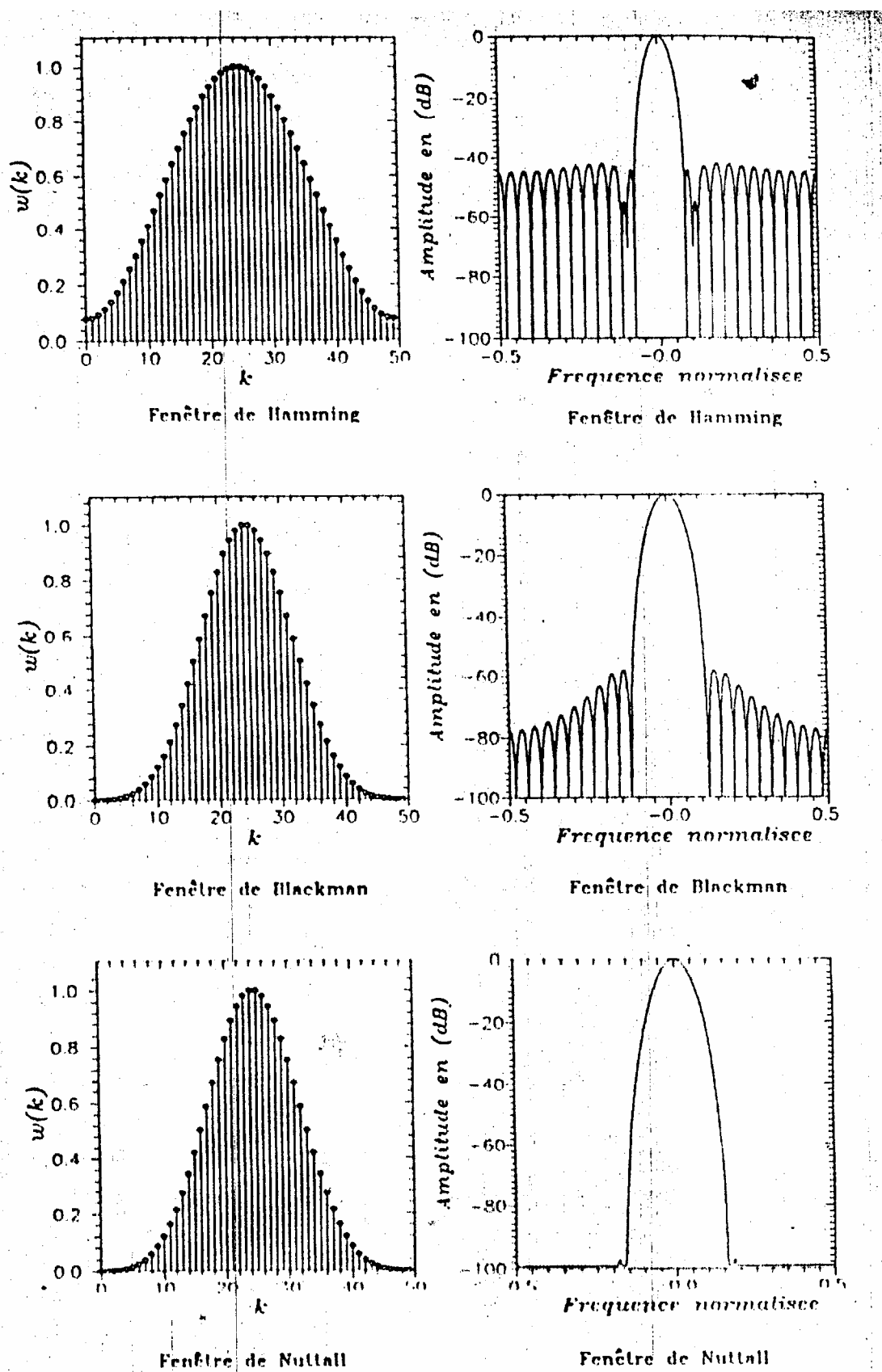
Tableau A2.1 : Définition temporelle de quelques fenêtres

Fenêtre	$w(t)$	
<i>Rectangle</i>	1	
<i>Hanning</i>	$0.50 w_0(t) + 0.50 w_1(t)$ $w(t) = 0$	pour $ t \leq \frac{\Delta t}{2}$ pour $ t \geq \frac{\Delta t}{2}$
<i>Haming</i>	$0.54 w_0(t) + 0.46 w_1(t)$ $w(t) = 0$	pour $ t \leq \frac{\Delta t}{2}$ pour $ t \geq \frac{\Delta t}{2}$
<i>Blackman</i>	$0.42 w_0(t) + 0.5 w_1(t) + 0.08 w_2(t)$ $w(t) = 0$	pour $ t \leq \frac{\Delta t}{2}$ pour $ t \geq \frac{\Delta t}{2}$
<i>Flat Top</i>	$0.2156 w_0(t) + 0.4167 w_1(t) + 0.2772 w_2(t)$ $+ 0.0836 w_3(t) + 0.0069 w_4(t)$ $w(t) = 0$	pour $ t \leq \frac{\Delta t}{2}$ pour $ t \geq \frac{\Delta t}{2}$

Tableau A2.2 : Caractéristiques des fenêtres

Fenêtre	Largeur du lobe central (en Δf)	Rapport des amp. λ_r (dB) 1 ^{er} lobe sec./pic central
<i>Rectangle</i>	2	-13.3
<i>Hanning</i>	4	-31.5
<i>Haming</i>	4	-43
<i>Blackman</i>	6	-58.1
<i>Flat Top</i>	10	-82.9





ANNEXE A3

Normes

A3-1 La procédure AFNOR 90-300 :

Après s'être assuré que l'appareillage dont on dispose est bien normalisé, on mesurera l'intensité vibratoire d'une machine selon la procédure décrite dans la norme française AFNOR E 90-3002. Cette norme présente une large concordance avec la norme internationale ISO 2372.

A3-2 Définition :

Selon cette norme, l'intensité vibratoire est « la plus grande des mesures en vitesse vibratoire efficace, dans la gamme des fréquences 10-1000 Hz, sur chaque palier, support et bride, dans trois directions perpendiculaires entre elles »
(horizontale , verticale, axiale).

A3-3 Seuils de jugement :

Vu la diversité des machines, il est impossible d'avoir des valeurs universelles et absolues de niveaux de sévérité. C'est pourquoi, il existe des guides qui proposent des valeurs globales de niveaux de vibrations pour établir approximativement la sévérité des machines et pour aider à établir les niveaux d'alarmes et de pré alarme (voir tableau A3-1 : AFNOR E90 300(ISO 2372)). Ces guides sont ajustés selon :

- le type de machines ;
- le type de support ;
- la puissance de la machine ;
- les machines neuves ou usagées ;
- des machines à longue durée de vie(>1000h)
ou courte durée de vie (<1000 h).

Niveaux vibratoires admissibles (mm/s en RMS)		Groupe 1		Groupe 2		Groupe 3		Groupe 4	
Amplitude efficace de la vitesse vibratoire (mm/s) [0 - 1000Hz]	28-		Mauvais		Mauvais		Mauvais		Mauvais
	18-		Mauvais		Mauvais		Mauvais	18	Limite
	11.2-		Mauvais		Mauvais	11.2	Limite		Limite
	7.1-		Mauvais	7.1	Limite		Limite	7.1	Moyen
	4.5-	4.5	Limite		Limite	4.5	Moyen		Moyen
	2.8-		Limite	2.8	Moyen		Moyen	2.8	Bon
	1.8-	1.8	Moyen		Moyen	1.8	Bon		Bon
	1.12-		Moyen	1.12	Bon		Bon		Bon
	0.71-	0.71	Bon		Bon		Bon		Bon
	0.45-		Bon		Bon		Bon		Bon

Tableau A3-1. Niveaux vibratoires admissibles sur les machines tournantes

Groupe 1 : Éléments de moteurs ou de machines, qui dans ces conditions normales de fonctionnement, sont intimement solidaires de l'ensemble d'une machine. (Les moteurs électriques produits en série, de puissance allant jusqu'à 15 kW sont des exemples typiques de machines de ce groupe).

Groupe 2 : Machines de taille moyenne (en particulier les moteurs électriques de puissance comprise entre 15 et 75 kW) sans fondations spéciales. Moteurs montés de façon rigide ou machines (puissances jusqu'à 300 kW) sur fondations spéciales.

Groupe 3 : Moteurs de grandes dimensions et autres grosses machines ayant leurs masses tournantes montées sur des fondations rigides et lourdes , relativement rigides dans le sens de la vibration.

Groupe 4 : Moteurs de grandes dimensions et autres grosses machines ayant leurs masses tournantes montées sur des fondations relativement souples dans le sens de la vibration (exemple : groupe turbogénérateurs, particulièrement ceux qui sont installés sur des fondations légères).

ANNEXE A4
Modélisation paramétrique AR

A4-1 Equations de YULE-WALKER :

Ces équations traduisent le lien entre la fonction d'auto corrélation $C_{xx}(k)$, supposée connue, et les paramètres du modèle :

On a :

$$C_{xx}(k) = E \left\{ x(n+k) x^*(n) \right\} \quad (\text{A4.1})$$

$$\begin{aligned} &= E \left\{ x^*(n) \left(-\sum_{i=1}^p a_i x(n-i+k) + u(n+k) \right) \right\} \\ &= E \left\{ -\sum_{i=1}^p a_i x(n-i+k) x^*(n) \right\} + E \left\{ x^*(n) u(n+k) \right\} \\ &= -\sum_{i=1}^p a_i E \left\{ x(n-i+k) x^*(n) \right\} + E \left\{ x^*(n) u(n+k) \right\} \\ &= -\sum_{i=1}^p a_i C_{xx}(k-i) + E \left\{ x^*(n) u(n+k) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A4.2})$$

Si $H(z)$ est la fonction de transfert d'un filtre stable et causal alors :

$$\begin{aligned} E \left\{ u(n+k) x^*(n) \right\} &= E \left\{ u(n+k) \sum_{l=0}^{\infty} h^*(l) u^*(n-l) \right\} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} h^*(l) E \left\{ u(n+k) u^*(n-l) \right\} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} h^*(l) C_{uu}(-(l+k)) \end{aligned}$$

Ou $h(l)$ est la réponse impulsionnelle d'un filtre causal et stable dont l'entrée est un bruit blanc centré et réduit.

Or $C_{uu}(-(l+k)) = C_{uu}(l+k)$ et $C_{uu}(l+k) = \sigma^2 \delta(l+k)$ donc :

$$\begin{aligned} E \left\{ u(n+k) x^*(n) \right\} &= \sum_{l=0}^{\infty} h^*(l) \sigma^2 \delta(l+k) \\ &= \sigma^2 h^*(-k) \end{aligned}$$

La réponse impulsionnelle (échantillonnée) à l'origine étant égale à :

$$h^*(0) = \left[\lim_{z \rightarrow \infty} H(z) \right]^* = 1$$

Nous aboutissons à

$$E \left\{ u(n+k)x^*(n) \right\} = \begin{cases} 0 & k > 0 \\ \sigma^2 & k = 0 \end{cases}$$

Ainsi, on exprime la matrice d'auto corrélation par les équations :

$$C_{xx}(k) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^p a_i C_{xx}(k-i) & k \geq 1 \\ \sum_{i=1}^p a_i C_{xx}(-i) + \sigma^2 & k = 0 \end{cases} \quad (\text{A4.3})$$

système appelé : équations de Yule -Walker.

A4-2 Relation de récursion pour l'erreur progressive :

On a l'estimé de $x(n)$ qui s'exprime par :

$$\hat{x}(n) = -\sum_{k=1}^p a_{pk} x(n-k)$$

Il génère une erreur progressive :

$$\begin{aligned} e_p^p(n) &= x(n) - \hat{x}(n) \\ &= x(n) + \sum_{k=1}^p a_{pk} x(n-k) \end{aligned} \quad (\text{A4.4})$$

Nous avons, d'après la récursion de Levinson :

$$a_{pk} = a_{p-1,k} + a_{pp} a_{p-1,p-k}^* \quad k = 2, 3, \dots, p$$

En insérant cette récursion dans l'expression de l'erreur on aura :

$$\begin{aligned} e_p^p(n) &= x(n) + \sum_{k=1}^p (a_{p-1,k} + a_{pp} a_{p-1,p-k}^*) x(n-k) \\ e_p^p(n) &= x(n) + \sum_{k=1}^{p-1} (a_{p-1,k} + a_{pp} a_{p-1,p-k}^*) x(n-k) + a_{pp} a_{p-1,0}^* x(n-p) \\ a_{p-1,0} &= 1 \end{aligned}$$

$$e_p^p(n) = x(n) + \sum_{k=1}^{p-1} (a_{p-1,k} + a_{pp} a_{p-1,p-k}^*) x(n-k) + a_{pp} x(n-p)$$

$$e_p^p(n) = x(n) + \sum_{k=1}^{p-1} a_{p-1,k} x(n-k) + a_{pp} \left[\sum_{k=1}^{p-1} a_{p-1,p-k}^* x(n-k) + x(n-p) \right] \quad (\text{A4.5})$$

On définit :

$$e_{p-1}^r(n) = x(n-p) + \sum_{k=1}^p a_{pk}^* x(n+k-p)$$

et

$$e_{p-1}^r(n-1) = x(n-p) + \sum_{k=1}^{p-1} a_{p-1,k}^* x(n+k-p) \quad (\text{A4.6})$$

En posant $k = p - k$ l'expression (A4.6) devient, comme tenu que $a_{p-1,p} = 0$:

$$e_{p-1}^r(n-1) = x(n-p) + \sum_{k=1}^{p-1} a_{p-1,p-k}^* x(n-k) \quad (\text{A4.7})$$

En insérant l'expression (A4.7) dans (A4.5), l'erreur progressive s'écrira sous la forme :

$$e_p^p(n) = e_{p-1}^p(n) + k_p e_{p-1}^r(n-1) \quad (\text{A4.8})$$

Le coefficient $k_p = a_{pp}$ est appelé coefficient de corrélation partielle (coefficient PARCOR) ou coefficient de réflexion.

A4-3 Relation de récursion pour l'erreur rétrograde :

L'erreur de prédiction rétrograde peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
e_p^r(n) &= x(n-p) + \sum_{k=1}^p a_{pk}^* x(n+k-p) \\
&= x(n-p) + \sum_{k=1}^{p-1} a_{pk}^* x(n+k-p) + a_{pp}^* x(n) \\
&= x(n-p) + \sum_{k=1}^{p-1} (a_{p-1,k}^* + a_{pp}^* a_{p-1,p-k}) x(n+k-p) + k_p^* x(n) \\
&= x(n-p) + \sum_{k=1}^{p-1} a_{p-1,k}^* x(n+k-p) + k_p^* x(n) + \sum_{k=1}^{p-1} a_{p-1,p-k} x(n+k-p)
\end{aligned} \tag{A4.9}$$

D'après les deux expressions (A4.4) et (A4.5), l'erreur rétrograde devient :

$$e_p^r(n) = e_{p-1}^r(n-1) + k_p^* e_{p-1}^2(n) \tag{A4.10}$$

Par conséquent déterminer les coefficients a_{ii} revient à minimiser l'erreur

$$\zeta_p = \sum_{n=p}^{N-1} \left| e_p^p(n) \right|^2 + \sum_{n=p}^{N-1} \left| e_p^r(n) \right|^2$$

L'utilisation du critère de minimisation de l'erreur quadratique moyenne s'effectue comme suit :

$$\frac{\partial \xi_p}{\partial k_p} = 0$$

En substituant les expressions (A4.8) et (A4.10) dans ζ_p , celle-ci ne devient fonction que des coefficients de réflexion (inconnus) et de l'erreur de prédiction d'ordre (p-1) (connue).

Ainsi, seuls les coefficients $a_{kk} = k_k (k=1, \dots, p)$ sont à estimer, et sont obtenus comme

$$\begin{aligned}
\xi_p &= \sum_{n=p}^{N-1} \left| e_{p-1}^p(n) + k_p e_{p-1}^r(n-1) \right|^2 + \sum_{n=p}^{N-1} \left| e_{p-1}^r(n-1) + k_p^* e_{p-1}^p(n-1) \right|^2 \\
\frac{\partial \xi_p}{\partial k_p} &= \frac{\partial}{\partial k_p} \left[\sum_{n=p}^{N-1} (e_{p-1}^p(n) + k_p e_{p-1}^p(n-1)) (e_{p-1}^p(n)^* + k_p^* e_{p-1}^r(n-1)^*) \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial k_p} \left[\sum_{n=p}^{N-1} (e_{p-1}^r(n-1) + k_p^* e_{p-1}^r(n)) (e_{p-1}^r(n-1)^* + k_p e_{p-1}^p(n)^*) \right] \\
\frac{\partial \xi_p}{\partial k_p} &= \sum_{n=p}^{N-1} e_{p-1}^r(n-1) (e_{p-1}^p(n)^* + k_p^* e_{p-1}^r(n-1)^*) + \sum_{n=p}^{N-1} e_{p-1}^p(n)^* (e_{p-1}^r(n-1) + k_p^* e_{p-1}^p(n))
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \xi_p}{\partial k_p} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=p}^{N-1} e_{p-1}^r(n-1)(e_{p-1}^p(n)^* + k_p^* e_{p-1}^r(n-1)^*) + \sum_{n=p}^{N-1} e_{p-1}^p(n)^* (e_{p-1}^r(n-1) + k_p^* e_{p-1}^p(n)) = 0$$

$$\sum_{n=p}^{N-1} \left[e_{p-1}^r(n-1)e_{p-1}^p(n)^* + k_p^* \left| e_{p-1}^p(n-1) \right|^2 + e_{p-1}^p(n)^* (e_{p-1}^r(n-1) + k_p^* \left| e_{p-1}^p(n) \right|^2) \right] = 0$$

$$\sum_{n=p}^{N-1} \left[k_p^* \left[\left| e_{p-1}^r(n-1) \right|^2 + \left| e_{p-1}^p(n) \right|^2 \right] + e_{p-1}^r(n-1)e_{p-1}^p(n)^* + e_{p-1}^r(n-1)e_{p-1}^p(n)^* \right] = 0$$

$$\sum_{n=p}^{N-1} k_p^* \left[\left| e_{p-1}^r(n-1) \right|^2 + \left| e_{p-1}^p(n) \right|^2 \right] = -2 \sum_{n=p}^{N-1} \left[e_{p-1}^r(n-1)e_{p-1}^p(n)^* \right]$$

$$k_p^* = \frac{-2 \sum_{n=p}^{N-1} e_{p-1}^r(n-1)e_{p-1}^p(n)^*}{\sum_{n=p}^{N-1} \left[\left| e_{p-1}^r(n-1) \right|^2 + \left| e_{p-1}^p(n) \right|^2 \right]} \quad (\text{A4.11})$$

Finalement, le coefficient de corrélation partielle est donné par

$$k_p = \frac{-2 \sum_{n=p}^{N-1} e_{p-1}^p(n-1)e_{p-1}^r(n)^*}{\sum_{n=p}^{N-1} \left[\left| e_{p-1}^r(n-1) \right|^2 + \left| e_{p-1}^p(n) \right|^2 \right]}$$

Les coefficients de corrélation partielle sont obtenus pour $k = 1$ à p par

$$\hat{k}_k = a_{kk} = \frac{-2 \sum_{i=p}^{N-1} e_{k-1}^p(i)e_{k-1}^r(i-1)^*}{\sum_{i=k}^{N-1} \left[\left| e_{k-1}^r(i-1) \right|^2 + \left| e_{k-1}^p(i) \right|^2 \right]} \quad (\text{A4.12})$$

Il est clair que k_p , ainsi défini est toujours de module inférieur à l'unité, ce qui garantit la stabilité du filtre **AR**.

ANNEXE A5Programme d'estimation

```

!-----
!           Estimation de la densité spectrale de puissance
!           par modélisation Auto Régressive avec:
!           Algorithme de Levinson-Durbin
!           Algorithme de Burg
!-----
REAL X(0:2500)
  dimension t(0:2500),SIG(0:100),a(0:100,0:100)
!
  OPEN(4,FILE='P1H1000.DAT',STATUS='OLD')
  write(*,10)
5  write(*,9)
  READ(*,*) IER
  IF(IER.EQ.1) THEN
    PRINT*,'Nombre de points'
    READ(*,*) N
    CALL TEST(N,X,Te)
  ELSE
  IF(IER.EQ.2) THEN
    PRINT*,'Nombre de points'
    READ(*,*) N
    do jr=0,N-1
      READ(4,*)T(jr),X(jr)
    enddo
    Te=T(1)-T(0)
    print*,'frequence echantillonnage',1/te, ' Hz'
  ELSE
    PRINT*,' Donnees incorrectes'
    GOTO 5
  ENDIF
  ENDIF

! Moyenne et variance du signal
  S=0.
  do jr=0,N-1
    S=S+X(jr)
  enddo
  average=S/N
  var=0
  do jr=0,N
    var=var+(x(jr)-average)**2
  enddo
  var=var/N
  print*,' '
!   print*,' moy et variance',average,var

```

```

!
  print*,'choisir : 1- Levinson'
  print*,'          2- Burg'
  read* ,jkr
    if(jkr.eq.1) then
      CALL Levinson1(X,N,Te)
    else
      CALL ARBURG(X,N,Te)
  endif
  CLOSE(4)
!
9   FORMAT(2(/),5X,'TAPER :',15X,'1- Donnees TEST',2(/),27X,
  $'2- Fichier')
10  FORMAT(3(/),10x,'ESTIMATION DE LA DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE'
  $,3(/),15X,'-MODELISATION AUTOREGRESSIVE',2(/))
40  stop
  END
!
!
SUBROUTINE TEST(N,X,te)
  DIMENSION t(0:2500),X(0:2500),b(0:2500,500)
  Dimension Bruit(0:2500)
  REAL amp(3),freq(3),phi(3),moy
  data amp/1,.5,1/freq/15,23,50/phi/0,0,0/
  OPEN(1,FILE='DONN1.DAT',STATUS='OLD')
  OPEN(5,file='bruit.dat',status='old')
  PI=4*ATAN(1.)
  print*,'Nombre de sections'
  read* , Nsec
  print* , 'Frequence max. en Hz'
  read* ,Fmax
  print*,'rapport signal/bruit'
  read* ,RSB
  Fe=2*Fmax  ! Frequence échantillonnage
  te=1./Fe
  dt=N*te    ! durée observation
  idum=2751
! generation du bruit
! Nsec : est le nombre de sections
! la fonction ran génère des nombres
! aléatoires entre 0 et 1
  do kr=1,Nsec
    do i=0,N-1
      b(i,kr)=ran(idum)
    enddo
  enddo
  bruit(i)=0.
  do i=0,N-1
    do kr=1,Nsec
      bruit(i)=bruit(i)+b(i,kr)
    enddo
  enddo

```



```

        enddo
        bruit(i)=bruit(i)/Nsec
        write(5,*) i,bruit(i)
        enddo
        s=0
        do i=0,N-1
        s=s+bruit(i)
        enddo
        moy=s/N
        var=0
        do i=0,N-1
        var=var+(bruit(i)-moy)**2
        enddo
        var=sqrt(var/N)
        print*,'moy et variance du bruit',moy,var
!
        DO 11 I=0,N-1
        x(i)=0
        do j=1,3
        x(i)=x(i)+amp(j)*cos(2*PI*freq(j)*i*te+phi(j))
        enddo
!
! Ajout du bruit
        facteur=exp(RSB/8.685890)
        X(i)=X(i)+bruit(i)/facteur
!
        print*,'bruit',i,bruit(i),x(i)
        WRITE(1,*) i*te,X(i)
11 CONTINUE                                ! fin de boucle sur i
        END subroutine test

!-----
! FR : Fréquence réduite (0,1/2).
! Methode de correlation :
! -Algorithme de Levinson.
! -Critere de minimisation de la variance de l'erreur.
!-----
        SUBROUTINE Levinson1(X,N,Te)
        REAL X(0:2500),A(0:100,0:100),SIG(100),FPE(100)
        $,RXX(0:2500),AMDL(100)
        INTEGER PMAX,P
        OPEN(2,STATUS='old',FILE='VARIANCE.DAT')
        open(3,status='old',file='correl.dat')
        PRINT*,'Donner l"ordre max'
        READ(*,*) PMAX
!-----
! Initialisation de l'algorithme
        DO K=0,PMAX
        RXX(K)=0.

```

```

DO I=0,N-1
RXX(K)=RXX(K)+X(I)*X(I+K)
ENDDO
  write(3,*) k,RXX(k)
ENDDO
A(1,1)=-RXX(1)/RXX(0)
SIG(1)=(1-abs(A(1,1))**2)*RXX(0)
  FPE(1)=(N+1)*sig(1)/(N-1)
!
! Calcul des coefficients de reflexion
DO K=2,PMAX
  s=0.
  do j=1,k-1
    s=s+a(k-1,j)*RXX(k-j)
  enddo
  A(k,k)=-RXX(k)+s/sig(k-1)
  IF(ABS(A(k,k)).GT.1) THEN
    PRINT*, 'INSTABILITE'
    STOP
  ELSE
    do j=1,k-1
      A(k,j)=A(k-1,j)+A(k,k)*A(k-1,k-j)
    enddo
    sig(k)=(1-abs(A(k,k))**2)*sig(k-1)
  FPE(k)=(N+k+1)*SIG(k)/(N-k-1)
!
!   AMDL(k)=N*log(sig(k))+k*log(N)
  write(2,*) k,sig(k),fpe(k)
ENDIF
enddo
sigmax=0
fpemax=0
do k=1,pmax
  if(sig(k).GE.sigmax) then
    sigmax=sig(k)
  else
    endif
  if(fpe(k).GE.fpemax) then
    fpemax=fpe(k)
  else
    endif
  write(2,*) k, sig(k)/sigmax,fpe(k)/fpemax
enddo
do k=1,pmax-1
!
!   print*,abs((sig(k+1)-sig(k))/sigmax)
  if(abs((sig(k+1)-sig(k))/sigmax).le.0.01) then
    p=k
    goto 13
  else
    endif
enddo

```

```

13  print*, 'ordre selectionne p=', p
    print*, 'ordre choisi'
    read*, p
    SIGMA=SIG(p)
!
    CALL DSP(N,A,P,SIGMA,Te)
    Close(2)
    END SUBROUTINE levinson1
!
!
SUBROUTINE DSP(N,A,P,SIGMA,Te) ! densité spectrale de puissance
REAL A(0:100,0:100),FR(0:1500),DSPP(0:1500)
COMPLEX SOMME
INTEGER P
OPEN(4,file='dssp.dat',status='old')
!   print*,n,p,sigma,te
!   print*, '-----'
!   print*,(a(p,j),j=1,p)
!   print*, '-----'
PI=4*ATAN(1.)
Fe=1/Te
dt=N*Te
df=1/dt ! résolution fréquentielle
DSPMAX=0
DO ak=0,N/2
  somme=cmplx(0.,0.)
  FR(ak)=ak*Fe/N
    DO I=1,p
      Somme=Somme+CMPLX(A(P,i),0)*CMPLX(COS(2*PI*FR(ak)*i*Te),
$-SIN(2*PI*FR(ak)*i*Te))
    ENDDO
!
    DSPP(ak)=20*a log10(SIGMA**2*Te/CABS(cmplx(1.,0.)+somme)**2)
!   print*, dspp(ak), dspmax
  IF(DSPP(ak).GE.DSPMAX) THEN
    DSPMAX=DSPP(ak)
  ELSE
    ENDIF
  ENDDO
  if(dspmax.eq.0) then
    dspmax=1
  else
    endif
  do j=0,N/2
    WRITE(4,*) FR(j),DSPP(j)/DSPMAX
  enddo
  close(4)
  WRITE(*,15)
15 FORMAT(//,5X,'FICHER de la DSP: DSSP.DAT')
END subroutine DSP

```

```

!
! -Algorithme de BURG.
! -Critere de minimisation de la variance de l'erreur.
!
SUBROUTINE ARBURG(X,N,Te)
REAL X(0:2500),A(0:100,0:100),SIG(0:100),EP(0:2500,0:2500),
SER(0:2500,0:2500),FPE(0:100),AIC(0:100)
INTEGER PMAX,P
OPEN(2,STATUS='old',FILE='VARIANCE.DAT')
PRINT*,'Donner l''ordre max'
READ(*,*) PMAX
! -----
! Initialisation de l'algorithme
SIG(0)=0.
A(0,0)=0.
DO IK=0,N-1
SIG(0)=SIG(0)+X(IK)*X(IK)
ENDDO
SIG(0)=SIG(0)/N
DO I=1,N-1
EP(0,I)=X(I)
ENDDO
DO I=0,N-1
ER(0,I)=X(I)
ENDDO
! write(2,*) 0,sig(0),(N+1)*sig(0)/(N-1)
! Calcul des coefficients de reflexion
DO K=1,PMAX
S1=0.
S2=0.
DO I=K,N-1
S1=S1+EP(K-1,I)*ER(K-1,I-1)
S2=S2+ER(K-1,I-1)**2+EP(K-1,I)**2
ENDDO
A(K,K)=-2*S1/S2
! Calcul de la recursion de Levinson
DO J=1,K-1
A(K,J)=A(K-1,J)+ A(K,K)*A(K-1,K-J)
ENDDO
SIG(K)=SQRT((1-abs(A(k,k))**2))*SIG(K-1)
FPE(k)=(N+k+1)*SIG(k)/(N-k-1)
! write(2,*) k,sig(k),fpe(k)
! Calcul des erreurs
DO I=K+1,N-1
EP(K,I)=EP(K-1,I)+A(K,K)*ER(K-1,I-1)
ENDDO
DO I=K,N-2
ER(K,I)=ER(K-1,I-1)+A(K,K)*EP(K-1,I)
ENDDO

```

```

!      write(*,*) k,(a(k,i),i=k,0,-1)
!      write(*,*) (ep(k,i),i=k+1,n)
!      write(*,*) (er(k,i),i=k+1,n)
ENDDO
fpe(0)=(N+1)*sig(0)/(N-1)
  sigmax=sig(0)
  fpemax=fpe(0)
  do k=1,pmax
    if(sig(k).GE.sigmax) then
      sigmax=sig(k)
    else
      endif
    if(fpe(k).GE.fpemax) then
      fpemax=fpe(k)
    else
      endif
    write(2,*) k, sig(k)/sigmax,fpe(k)/fpemax
  enddo
do k=0,pmax-1
  print*,abs((sig(k+1)-sig(k))/sigmax)
  if(abs((sig(k+1)-sig(k))/sigmax).le.0.01) then
    p=k
    goto 15
  else
    endif
  enddo
15  print*,'ordre selectionne p=',p
!
  PRINT*,'Ordre choisi '
  read*,p
  SIGMA=SIG(P)
  CALL DSP(N,A,P,SIGMA,te)
  Close(2)
END subroutine ARBURG
!

```