

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

INSTITUT NATIONAL DE GENIE MECANIQUE

LABORATOIRE DE MECANIQUE

MEMOIRE DE MAGISTER

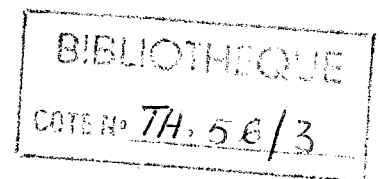
Spécialité : GENIE MECANIQUE

SOUTENU PAR

MADANI BAYA

Ingénieur d'état en Mécanique

INGM Boumerdes



Sujet :

**DYNAMIQUE DES SYSTEMES MULTICORPS :
APPLICATION A LA CONCEPTION MECANIQUE DES ROBOTS**

le : 07 / 06 / 1998

devant le jury :

MM : CHELGHOUM Abdelkrim	Professeur (USTHB)	Président
DJEDDI Mebrouk	Professeur (INHC)	Rapporteur
OUALI Mohamed	Maître de conférence (Univ.Blida)	Examineur
KIRATI Tayeb	Docteur (INGM)	Examineur
YOUSNADJ Ali	Docteur (EMP)	Examineur
KHOUKHI Amar	Professeur (ESIEE-Paris)	Invité

SOMMAIRE

INTRODUCTION	1
Chapitre I : DESCRIPTION DES SYSTEMES POLYARTICULES	
I-1 - Introduction	6
I-2 - Définition des systèmes polyarticulés	6
I-3 -Exemple : Structure mécanique d'un Robot manipulateur	7
I-4 -Définitions de base et terminologie	7
4-1-Articulation ou joint	7
a)-Articulation rotoïde	7
b)-Articulation prismatique	7
4-2-Coordonnées généralisées d'une structure polyarticulée	8
4-3-Espace opérationnel	9
4-4-Espace articulaire	9
I-5- Description cinématique des systèmes polyarticulés	10
5-1-Paramètres de Denavit-Hartenberg (DH)	10
5-2-Definitions et notations	10
I-6- Changement de repères affines	12
6-1-Coordonnées homogènes d'un point	12
6-2-Composantes homogènes d'un vecteur libre	12
6-3-Transformation homogène	13
I-7-Différents modèles rencontrés	14
7-1- Modèle géométrique	14
7-2- Modèle cinématique	14
7-3- Modèle dynamique	15
I-8-Conclusion	18

Chapitre II : MODELE DYNAMIQUE DES SYSTEMES POLYARTICULES

A ELEMENTS RIGIDES

II-1- Introduction	20
II-2-Formalismes de mise en équation	20
II-3-Formalisme de Lagrange	22
3-1-Hypothèses de travail	22
3-2-Mise en équation	22
3-3-Propriétés des coefficients dynamiques	24
3-4-Methode de Uicker	25
3-4-1-Expression de la matrice d'inertie	28
3-4-2-Expression de la matrice des termes de Coriolis	28
3-4-4-Expression du vecteur force dûe au champ de gravité	28
II-4 -Formes et applications du modèle dynamique	29
4-1-Probleme inverse	29
4-2-Probleme direct	31
II-5 -Conclusion	33

Chapitre III : MODELE DYNAMIQUE DES SYSTEMES POLYARTICULES

A JOINTS DEFORMABLES

III-1-Introduction	35
III-2-Modelisation d'un joint déformable	35
2-1-Situation du problème	35
2-2-Constituants technologiques d'une liaison	36
2-3-Description d'un actionneur électrique	37
III-3-Construction du modèle dynamique	41
3-1-Hypothèses de travail	41
3-2-Mise en équation par le formalisme de Lagrange	42
3-2-1-Energie cinétique du système	42
3-2-2-Energie potentielle du système	43
3-2-3-Energie de dissipation dans le joint	44
III-4 -Résolution des équations	46
III-5-Presentation de l'organigramme general	48
III-6-Conclusion	49

Chapitre IV : APPLICATIONS

Application 1 : Mecanisme à 2 degré de liberté	51
Application 2 : Mecanisme à 4 degrés de liberté	56
Application 3 : Mecanisme du robot à 3 degrés de liberté.....	63

CONCLUSION GENERALE	84
---------------------------	----

BIBLIOGRAPHIE

ANNEXES

- A 1 : Changement de repère affine
- A 2 : Description de l'orientation d'un solide
- A 3 : Matrice de transformation homogène
- A 4 : Dérivation de la matrice de transformation homogène
- A 5 : Expression de l'énergie cinétique
- A 6 : Expression des coefficients dynamiques
- A 7 : Exemple de validation

REMERCIEMENTS

Le travail de recherche que nous avons élaboré dans le cadre de la préparation de notre mémoire de Magister a été réalisé au laboratoire de Mécanique de l'Institut National de Génie Mécanique de Boumerdes sous la direction du professeur **DJEDDI Mebrouk** de l'Institut National des Hydrocarbures et de la Chimie de Boumerdes . Je lui exprime ma sincère reconnaissance pour ses orientations pratiques et appréciables au cours de la réalisation de ce travail .

Je remercie très vivement le professeur **CHELGHOUM Abdelkrim** de l'Institut de Génie Civil de l'Université des Sciences et Technologies Houari Boumediène de m'avoir fait l'honneur de s'intéresser à mon travail et de présider le jury .

Je remercie le professeur **KHOUKHI Amar** de l'Ecole Supérieure d'Ingénieurs en Electronique et Electrotechnique de Paris pour bien avoir voulu accepter de juger ce travail et me faire l'honneur de participer au jury .

Je remercie le Maître de conférence **OUALI Mohamed** de l'Université de Blida pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et sa participation au jury .

Je tiens à exprimer ma sincère reconnaissance au Docteur **KIRATI Tayeb** de l'Institut National de Génie Mécanique de Boumerdes pour ses directives et orientations pratiques et appréciables au cours de la réalisation de ce travail .

Je remercie le docteur **YOUSNADJ Ali** de l'Ecole Militaire Polytechnique pour bien avoir voulu accepter de juger ce travail et me faire l'honneur de participer au jury .

Sans oublier de remercier vivement Monsieur **HOCINE Faycal** , Directeur de l'Institut National de Génie Mécanique de Boumerdes pour m'avoir permis d'effectuer ce travail dans de bonnes conditions .

Je tiens aussi à exprimer mes sincères reconnaissances à toutes les personnes qui m'ont encouragé à faire ce travail particulièrement les membres du laboratoire de Mécanique .

تلخيص

الهدف من هذا العمل هو جلب تشرية لدراسة ديناميكا الميكانيزمات المتعددة الاجسام ذات السلاسل الحركية البسيطة مستوية او فضائية وذات المفاصل اللينة لايجاد معادلات الحركة اعتمدنا على استعمال طريقة لافرونج مع طريقة ويكبر وبالتالي النموذج الديناميكي لتلك الميكانيزمات معطى عن طريق مجموعة معادلات تفاضلية ولاخطية ، حل مجموعة هذه المعادلات سوف ينجز بطريقة رانج كوتا باربعة تقريبات

البرنامج الذي انجزناه بلغة الفورترن يسمح بمعالجة النوعين من المسائل :

(١) المباشرة

(٢) العكسي

لاجل كل الميكانيزمات ذات الهياكل الصلبة من جهة و الهياكل ذات المفاصل اللينة من جهة أخرى مما جعلنا نكتسب أداة للاعانة في التصميم الميكانيكي للروبوت مفتاح الكلمات : ديناميكا ، الميكانيزمات ، الروبوت ، المفاصل اللينة

Resumé

L'objet de ce travail est d'apporter une contribution à l'étude de la dynamique des systèmes polyarticulés à chaîne cinématique simple , plans ou spatiaux , et à joints flexibles .

L'approche utilisée dans la formulation du problème est basée sur l'emploi du formalisme de Lagrange associé à la méthode de Uicker , ainsi le modèle dynamique d'un tel mécanisme est décrit par un ensemble d'équations différentielles couplées et non linéaires . La résolution de ce système d'équations différentielles sera faite à l'aide de la méthode de Runge-Kutta à quatre approximations

Le programme que nous avons élaboré en fortran permet de traiter les deux types de problèmes

1)- Direct

2)- Inverse

pour tous les systèmes polyarticulés à structure parfaitement rigide d'une part et les systèmes à joints flexibles d'une autre part , ce qui constitue un outil d'aide à la conception mécanique des robots .

Mots clé : dynamique , mécanismes , robots , joints flexibles

Abstract

the objective of this work is to bring a contribution to the study of multi-articulated systems dynamics with simple cinematic chains , and with flexible joints .

the approach used in the problem formulation , is based on the use of Lagrangien formalism associated to the Uicker's method , thus the dynamic model of this mecanism is described by a set of coupled and non linear differential equations .

The resolution of this set differential equations will be done with the use of the Runge-Kutta method with four approximations .

The Fortran program that we have built deals with the the too type of problems :

1)- Direct

2)- Inverse

for all the multi-articulated systems with a perfect rigid structure in one hand and all the systems with flexible joints in the other hand , these constitute an aid tool to the mechanical conception of the robots .

NOMENCLATURE

- R_i : Un repère affine relié au corps C_i de la chaîne : $R_i(o_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$
- A_i : Indique la liaison
- σ_i : Variable binaire
- $T_{(i-1)i}$: Matrice de transformation homogène
- X : Matrice unicolonne des coordonnées opérationnelles
- $J(q)$: Matrice jacobienne
- $[A]$: Matrice d'inertie
- $[B]$: Matrice des termes de Coriolis.
- $[C]$: Matrice des termes centrifuges
- G : Matrice unicolonne des forces généralisées de gravité.
- Γ : Matrice unicolonne des forces généralisées non conservatives
- E_p : Représente l'énergie potentielle du système .
- A_i : Désigne la quantité d'accélération généralisée
- F_i : Désigne les forces généralisées
- E_D : Fonction de dissipation
- $[I_k]$: Matrice des moments d'ordre deux de S_k en O_k dans le repère R_k .
- $[J_k]$: Pseudo matrice d'inertie relative au corps S_k de la chaîne dans le repère R_k .
- m_k : Masse du solide S_k
- G_k : Centre de masse de S_k
- g : Matrice unicolonne des composantes du champ de pesanteur exprimé dans le repère de base R_0
- N_i : Rapport de transmission du i ème actionneur $N_i \geq 1$
- \dot{q}_i : Vitesse généralisée relative au segment i
- \dot{q}_{mi} : Vitesse d'entrée du réducteur i
- q_{1i} : Variable relative à la génératrice tachymétrique i
- q_{2i} : Variable relative au moteur i
- q_{3i} : Variable relative au réducteur i

q_{4i} : Variable relative au segment porteur i

$[I_a]$: Matrice des inerties des actionneurs

$[K]$: Matrice de rigidité des joints

q_{2i-1} : Variable articulaire délivrée par l'actionneur i

q_{2i} : Variable articulaire prise par le segment i

$\{\phi\}$: Matrice unicolonne des déplacements angulaires

$\{\dot{\phi}\}$: Matrice unicolonne constituée des vitesses relatives angulaires

$[D]$: Matrice des coefficients d'amortissements

$q = (q_1, q_2 \dots q_n)^T$: Matrice unicolonne des variables articulaires.

$\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2 \dots \dot{q}_n)^T$: Matrice unicolonne des vitesses articulaires.

$\ddot{q} = (\ddot{q}_1, \ddot{q}_2 \dots \ddot{q}_n)^T$: Matrice unicolonne des accélérations généralisées

$\theta_i, r_i, \alpha_i, d_i$: Paramètres de Denavit - Hartenberg

$C\theta_i = \cos \theta_i$

$S\theta_i = \sin \theta_i$

M_{gi} : Moment de l'effort de gravité du i ème segment par rapport à l'origine O_i

M_{ui} : Moment de l'effort de rappel du i ème ressort d'équilibrage .

F_{si} : Effort de rappel du i ème ressort d'équilibrage .

L_{oi} : Elongation du i ème ressort d'équilibrage .

C_{gi} : Couple de gravité du i ème segment

q_i^1 : Variable articulaire délivrée par le moteur (après réducteur)

q_i^2 : Variable articulaire prise par le segment

INTRODUCTION

Le développement industriel a de tout temps puisé sa dynamique dans le souci constant de l'homme de :

- produire toujours plus de biens de consommation et à moindre coût pour améliorer ses conditions de vie .
- construire des machines capables de dépasser ses limites tant physiques qu'intellectuelles .
- se libérer des tâches ingrates , fastidieuses , épuisantes ou dangereuses pour s'investir dans des missions plus valorisantes pour l'esprit .

La conception des mécanismes dépend de multiples paramètres qui rendent complexe la résolution des problèmes de mécanique à plusieurs degrés de liberté ; la théorie est bien connue mais la mise en oeuvre dépasse souvent la capacité humaine .

Par ailleurs , les performances souhaitées pour les mécanismes polyarticulés développés de nos jours sont de plus en plus élevées , leur conception est donc de plus en plus difficile .

Dès lors on comprend l'intérêt d'un outil de calcul automatique permettant de simuler le comportement dynamique d'un mécanisme .

Un tel outil doit être général , et pouvant prendre en compte la diversité des mécanismes rencontrés .

La construction du modèle dynamique a fait l'objet de plusieurs travaux et investigations ces dernières années . Les représentations employées sont essentiellement basées sur une approche classique dans laquelle les mécanismes sont considérés comme un assemblage de corps rigides . Cette approche simplifiée s'avère dans plusieurs cas suffisante pour représenter le comportement dynamique des systèmes polyarticulés , cependant dans certains cas il est nécessaire de considérer des modèles plus élaborés .

Les systèmes polyarticulés sont destinés à être légers , résistants et rapides , ces exigences élevées obligent l'utilisation d'éléments moins massifs et à des vitesses de plus en plus élevées .

Cependant , cela est toujours accompagné par l'apparition des phénomènes transitoires et d' "hésitation" dus à la déformation dans les éléments structuraux du mécanisme .

Ce comportement vibratoire peut affecter considérablement les performances du système , de ce fait il est devenu indispensable de prendre en compte les propriétés élastiques de ces systèmes afin de pouvoir étudier leur comportement vibratoire .

La déformation des systèmes polyarticulés est localisée au niveau des éléments constituant sa structure mécanique , on peut citer :

- La déformation de la partie porteuse ou segments structuraux : élasticité répartie .
- La déformation au niveau des articulations ou joints : élasticité localisée .

Une recherche bibliographique nous a permis de tracer l'historique du modèle dynamique des systèmes polyarticulés .

En 1963 H.J.FLECHER et L.RONGUED ont étudié le mouvement d'un satellite composé de deux corps liés par un joint rotoïde dans le champ de pesanteur , ensuite HOOKER.W.W et G.MARGULIES ont généralisé ce travail pour un système à $n+1$ corps connectés par des articulations à 1 et 2 degrés de liberté .

En 1973 , ce travail est simplifié par P.W.LIKINS en prenant seulement des liaisons à 1 ddl .

1978 J.J.UICKER propose une méthode basée sur les équations de LAGRANGE , il fait appel à la notion de matrice de passage généralisée d'ordre 4 préconisée pour la première fois par DENAVIT et HARTENBERG .

Au cours des travaux récents sur la commande en temps réel , plusieurs chercheurs ont utilisé le formalisme de NEWTON-EULER qui leur a permis le calcul récurrent des forces et/ou couples . Plusieurs travaux ont été présentés par des chercheurs , ces travaux sont basés sur une approche théorique qui consiste à considérer le mécanisme comme un assemblage de corps rigides .

En 1966 NEUBAUER , COHEN et HALL ont été parmi les premières personnes citées dans la littérature pour leur contribution à l'élaboration du modèle dynamique des mécanismes déformables , ils ont étudié le mécanisme de bielle manivelle dont la bielle est supposée déformable . En supposant que l'amplitude des mouvements vibratoires est petite par rapport aux grands mouvements rigides, ils ont pu linéariser les équations du mouvement .

En 1971 JASINSKI , LEE et SANDOR proposent une méthode pour résoudre le problème des mécanismes plans . Ils tiennent compte des vibrations transversales et longitudinales de l'élément , ils utilisent la méthode variationnelle de GALERKINE pour transformer le système d'équations aux dérivées partielles en un système d'équations différentielles ordinaires .

C'est dans ce contexte que nous avons abordé ce travail ; notre objectif est de mettre au point un programme de calcul automatique des modèles de systèmes mécaniques pour pouvoir simuler leur comportement dynamique et disposer d'un outil pouvant aider à la conception mécanique .

Pour cela nous nous intéressons à la modélisation du comportement dynamique des structures polyarticulées à joints déformables . Cette étude se limitera à des structures à chaînes cinématiques simples largement répandues en robotique .

L'approche utilisée dans la formulation du problème est basée sur l'emploi du formalisme de Lagrange associé à la méthode de Uicker ; l'application directe de ce formalisme aboutit à un algorithme compact décrivant les équations du mouvement qui se prêtent directement à être intégrées .

Le modèle dynamique d'un tel mécanisme est décrit par un ensemble d'équations différentielles couplées et non linéaires , la résolution de ce système sera faite à l'aide de la méthode de Runge-Kutta à quatre approximations .

Notre mémoire se compose de quatre chapitres :

Le premier chapitre est destiné à la description des systèmes polyarticulés , leur morphologie et leur cinématique , aussi nous rappelons les différents modèles employés lors de la mise au point de leur commande ou de leur conception , parmi ces modèles nous citons :

- Le modèle géométrique
- Le modèle cinématique
- Le modèle dynamique.

Nous terminons ce chapitre par une étude comparative entre un mécanisme rigide et un mécanisme à joint flexible . Cette étude illustrée sur une barre articulée montre la différence entre les deux approches pour la modélisation cinématique à adopter .

Le second chapitre est consacré à la présentation de la méthodologie d'obtention du modèle dynamique basée sur le formalisme de Lagrange et la méthode de Uicker et cela pour les systèmes polyarticulés à chaîne cinématique simple et à éléments structuraux rigides .

Cependant dans la réalité l'hypothèse de la rigidité parfaite n'est pas satisfaite d'où la nécessité de l'étude des systèmes avec prise en compte de la déformation .

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des systèmes à joints déformables .

Dans cette partie nous présentons une modélisation complète d'un joint déformable et pour un système simplifié qui consiste à considérer seulement la déformation à la sortie du réducteur , en se basant toujours sur le formalisme de Lagrange , nous présentons la manière d'obtention des équations du mouvement . Pour la résolution on utilise la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 .

Le quatrième chapitre contient des applications illustrant les possibilités du programme que nous avons élaboré dans le cadre de ce travail .

Le choix des exemples que nous présentons obéit à deux impératifs :

- Premier impératif pédagogique : Analyser et valider les résultats issus du programme sur des mécanismes simples .
- Deuxième impératif pratique : Montrer comment dans son état actuel , le programme peut constituer un outil d'aide à la conception mécanique .

CHAPITRE I

DESCRIPTION DES SYSTEMES
POLYARTICULES

I-1- INTRODUCTION :

Ce premier chapitre sera consacré à la présentation de quelques généralités et définitions concernant les systèmes polyarticulés afin de décrire leur morphologie . Nous présentons aussi une méthode adéquate pour la description de leur cinématique ; et par la suite , à travers un exemple simple nous montrons la différence entre un système "rigide" et un système à joint "flexible" [1]

I-2- DEFINITION DES SYSTEMES POLYARTICULES [2] [5] [6]

Une structure polyarticulée est un ensemble de corps liés les uns par rapport aux autres par des liaisons appelées articulations.

Les articulations rencontrées dans la plupart des réalisations technologiques appartiennent à la classe 5 et sont de type:

- rotoïde
- ou prismatique

On distingue 3 types de chaînes polyarticulées : les chaînes ouvertes simples (fig I-1a), les chaînes arborescentes (fig I-1b) et les chaînes complexes (fig I-1c) .

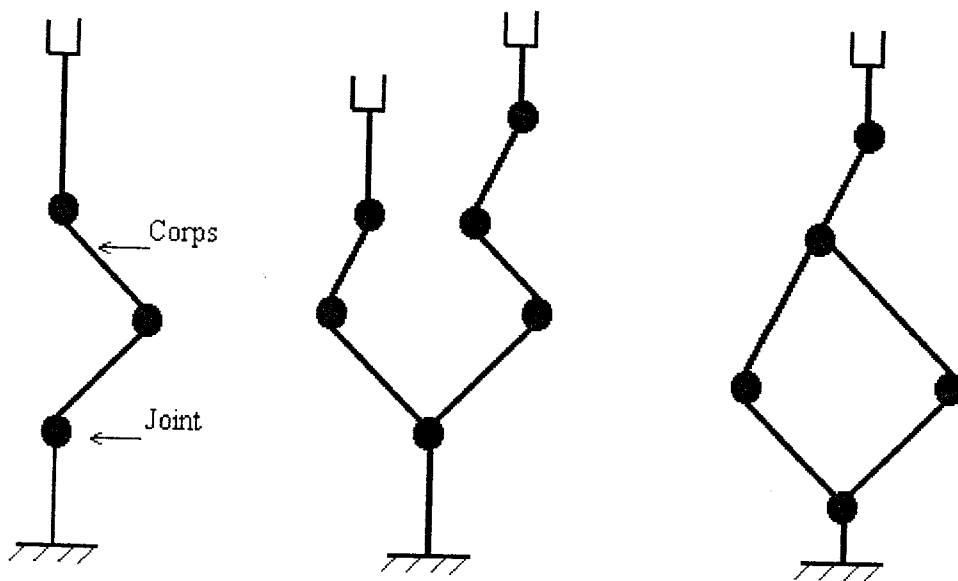


fig I-1a - Chaîne ouverte simple

fig I-1b - Chaîne arborescente

fig I-1c - Chaîne complexes

I-3-EXEMPLE : STRUCTURE MECANIQUE D'UN ROBOT MANIPULATEUR

La structure mécanique d'un robot manipulateur est une structure à chaîne cinématique simple ou complexe . Elle est constituée de deux sous ensembles distincts: un (ou plusieurs) organe(s) terminal (aux) et une structure mécanique articulée appelée porteur .

- **Le porteur** : c'est une structure polyarticulée qui a pour rôle d'amener l'organe terminal dans une position donnée .

- **L'organe terminal** : c'est tout dispositif destiné à manipuler des objets, il s'agit donc d'une interface qui permet au robot d'interagir avec son environnement .

*)- On convient d'appeler généralement porteur les trois premiers corps du robot , les corps restants forment le poignet caractérisé par des dimensions plus petites et une masse faible .

I-4-DEFINITIONS DE BASE ET TERMINOLOGIE : [2]

Pour décrire la partie mécanique des systèmes polyarticulés, on propose de donner quelques définitions de base et une terminologie qui sera utilisée dans les chapitres suivants .

I-4-1-Articulation ou joint :

Une articulation intervient entre deux solides tout en limitant le nombre de degrés de liberté de l'un par rapport à l'autre .

On appelle classe d'une liaison le complément à six de son nombre de degrés de liberté .

En robotique on utilise des articulations de classe 5; ainsi les liaisons à plusieurs degrés de liberté sont décomposées en d'autant de liaisons à un degré de liberté par adjonction de corps fictifs . On distingue deux types de liaisons de classe 5 :

a) - **Liaison rotoïde** : liaison de type pivot réduisant le mouvement entre deux corps en une rotation autour d'un axe qui leur est commun , elle est notée (R) fig. I-2a

b) - **Liaison prismatique** : Il s'agit d'une liaison de type glissière réduisant le mouvement entre deux corps en une translation le long d'un axe commun , elle est notée (P) fig. I-2b

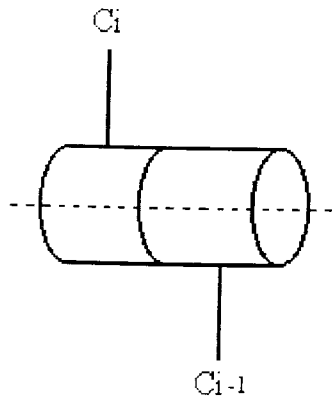


fig I-2a : Liaison rotoïde - R

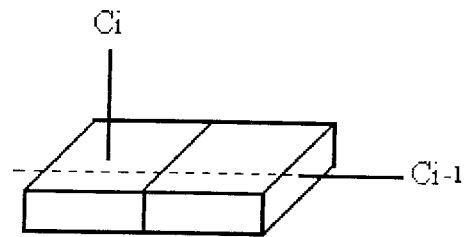


fig I-2b : Liaison prismatique - P

I-4-2-Coordonnées généralisées d'une structure polyarticulée :

Soit une structure polyarticulée constituée d'une chaîne de corps reliés les uns par rapport aux autres à l'aide de liaisons de classe 5 .

Soit R_i un repère affine relié au corps C_i de la chaîne , le repère R_{i-1} est relié au corps C_{i-1}

On définit les coordonnées généralisées comme étant le nombre minimal de paramètres qui permet de définir la situation du corps C_i par rapport au corps C_{i-1} .

La situation d'un corps est définie par sa position et son orientation . Six paramètres suffisent pour déterminer la situation , trois pour spécifier la position et trois pour l'orientation .

- La position peut être définie par les coordonnées cartésiennes , sphériques ou cylindriques .
 - L'orientation peut être définie de plusieurs manières, les plus courantes sont celles qui utilisent :

- Les cosinus directeurs .
- Les angles d'Euler .
- Les angles de Roulis - Tangage - Lacet .
- Les paramètres d'Euler ou d'Olinde Rodrigue , ou quaternions .

Dans le cas des systèmes polyarticulés , pour déterminer la situation on utilise les paramètres de Denavit et Hartenberg (D-H) qui seront ultérieurement développés , alors on choisit les coordonnées généralisées en nombre minimal soit le nombre de degré de liberté de la liaison .

Exemple

Un robot manipulateur à chaîne ouverte simple de type 3R-1P est composé de trois liaisons rotoides et une liaison prismatique . les coordonnées généralisées sont en nombre de 4 . fig I-3

- q_1 , q_2 , q_3 : sont des coordonnées généralisées de rotation.

- q_4 : est la coordonnée généralisée de translation .

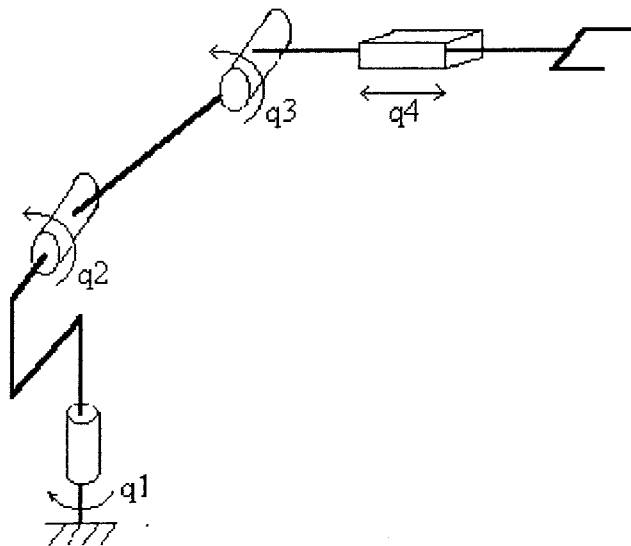


fig I-3 : Structure mécanique d'un robot manipulateur 3R-1P

I-4-3-Espace opérationnel

L'espace opérationnel est celui dans lequel est représenté la situation de l'organe terminal, sa dimension peut être inférieure ou égale à 6 .

I-4-4-Espace articulaire

On appelle espace articulaire ou espace de configuration celui dans lequel est représentée la configuration articulaire d'une structure polyarticulée . Il caractérise l'état de la structure représentant la situation de ses différents corps .

I-5- DESCRIPTION CINEMATIQUE DES SYSTEMES POLYARTICULES [2] [5] [6]

I-5-1-Paramètre de Denavit - Hartenberg (D.H)

La modélisation cinématique des systèmes polyarticulés exige une méthode adéquate pour la description de leur morphologie .

Pour cela plusieurs méthodes et notations ont été proposées , la plus répandue est celle de Denavit - Hartenberg .

Dans ce qui suit nous présentons la définition des paramètres de Denavit - Hartenberg ainsi qu'une notation homogène qui permet de décrire toutes les structures à chaîne ouverte simple .

I-5-2-Définitions et notations

Un mécanisme à chaîne ouverte simple est un système composé de $n+1$ corps notés $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ et de n articulations : A_1, A_2, \dots, A_n tel que :

- C_0 : désigne la base
- L'articulation A_i connecte le corps C_i au corps C_{i-1}
- A chaque corps C_i est associé un repère R_i d'origine O_i et d'axes orthonormés X_i, Y_i, Z_i
- Z_i est l'axe de la liaison A_i
- X_i est porté par la perpendiculaire commune à Z_i et Z_{i+1} .

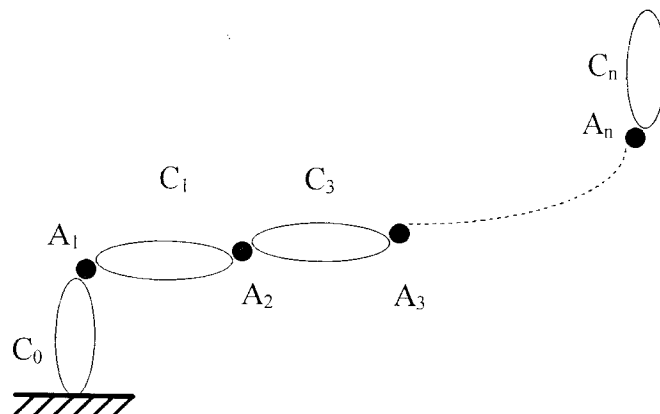


fig I-4a : Structure à chaîne cinématique simple

- Pour définir le repère R_i par rapport au repère R_{i-1} on utilise les 4 paramètres notés θ_i , r_i , α_i , d_i appelés paramètres de Denavit - Hartenberg définis comme suit :

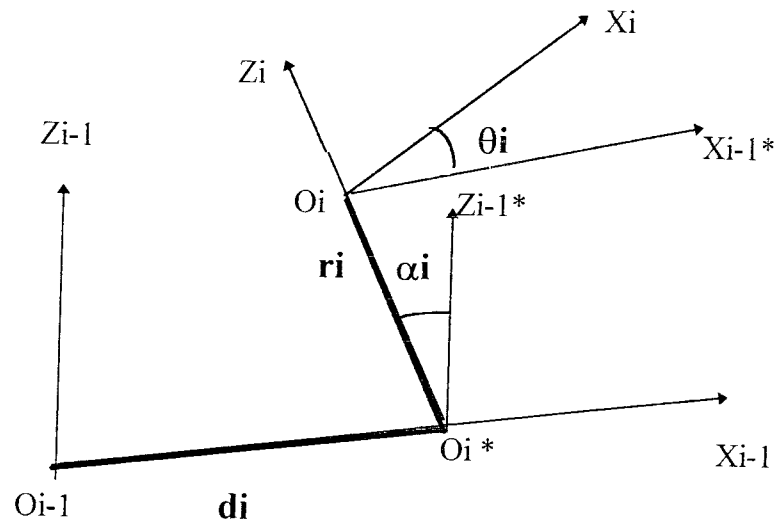


fig I-4b : paramètres de Denavit - Hartenberg (D-H)

- α_i : Angle entre \vec{Z}_{i-1} et \vec{Z}_i autour de \vec{X}_{i-1} : $\alpha_i = (\vec{Z}_{i-1}, \vec{Z}_i)$
- d_i : Distance entre O_{i-1} et Z_i le long de X_{i-1} : $d_i = \vec{O}_{i-1} O_i \cdot \vec{X}_{i-1}$ ($d_i \geq 0$)
- θ_i : Angle entre \vec{X}_{i-1} et \vec{X}_i autour de \vec{Z}_i : $\theta_i = (\vec{X}_{i-1}, \vec{X}_i)$
- r_i : Projection orthogonale de $O_{i-1}O_i$ sur \vec{Z}_i : $r_i = \vec{O}_{i-1} O_i \cdot \vec{Z}_i$

Ainsi la coordonnée généralisée associée à l'articulation A_i sera θ_i si A_i est rotoïde et r_i si A_i est prismatique

En introduisant une variable binaire σ_i la variable articulaire q_i peut s'écrire comme suit :

$$q_i = \bar{\sigma}_i \theta_i + \sigma_i r_i \quad (1.1)$$

avec :

$$\bar{\sigma}_i = 1 - \sigma_i$$

$\sigma_i = 1$ si A_i est une liaison prismatique

$\sigma_i = 0$ si A_i est une liaison rotoïde

I-6-CHANGEMENT DE REPERES AFFINES

I-6-1 -Les coordonnées homogènes d'un point : [1] [2]

En coordonnées homogènes la représentation d'un point se fait par une matrice unicolonne à quatre composantes , les trois premières sont les coordonnées cartésiennes du point et la 4ème composante est considérée comme un facteur d'échelle et prise égale a 1 .

(voir annexe 1) .

$$\overrightarrow{O_i M} = x_{mi} \cdot \vec{x}_i + y_{mi} \cdot \vec{y}_i + z_{mi} \cdot \vec{z}_i$$

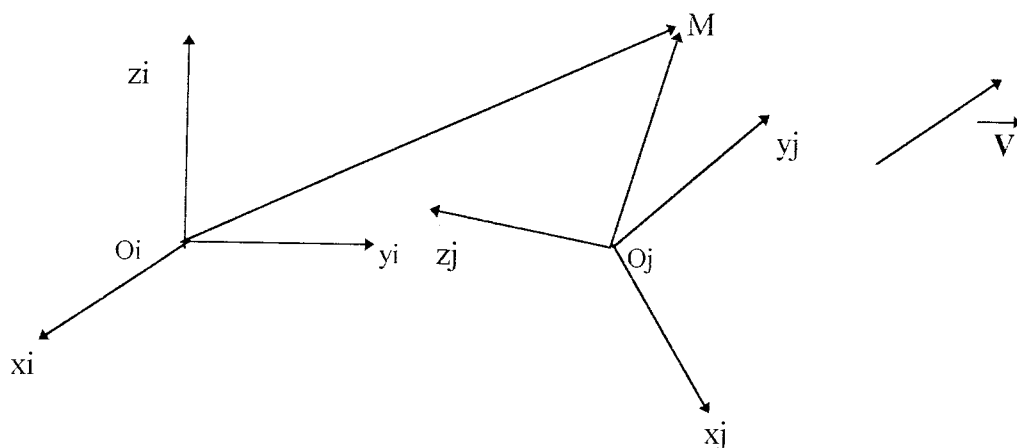
$$\overrightarrow{O_i M} \longrightarrow \{U\}_i^T = (x_{mi}, y_{mi}, z_{mi}, 1)$$

tel que :

$$x_{mi} = \overrightarrow{O_i M} \cdot \vec{x}_i$$

$$y_{mi} = \overrightarrow{O_i M} \cdot \vec{y}_i$$

$$z_{mi} = \overrightarrow{O_i M} \cdot \vec{z}_i$$



I-6-2 -Les composantes homogènes d'un vecteur libre :

La représentation d'un vecteur libre se fait aussi par 4 composantes les 3 premières sont les composantes du vecteur , la 4ème composante est un facteur d'échelle égale a zéro .

$$\vec{V} \longrightarrow \{V\}_i^T = (u_i, v_i, w_i, 0) \quad \text{tel que :}$$

$$u_i = \vec{V} \cdot \vec{x}_i$$

$$v_i = \vec{V} \cdot \vec{y}_i$$

$$w_i = \vec{V} \cdot \vec{z}_i$$

I-6-3 -Transformation homogène : [1] [2] [5] [6]

Si le repère $R_i(o_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ subit une transformation quelconque de translation et/ou de rotation qui l'amène sur le repère $R_j(o_j, \bar{x}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j)$, cette transformation est définie par la matrice T_{ij} appelée matrice de transformation homogène de dimension 4*4 (voir annexe 1)

$$\vec{o_i o_j} = p_{jx} \cdot \bar{x}_i + p_{jy} \cdot \bar{y}_i + p_{jz} \cdot \bar{z}_i$$

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{x}_i \bar{x}_j & \bar{x}_i \bar{y}_j & \bar{x}_i \bar{z}_j & p_{jx} \\ \bar{y}_i \bar{x}_j & \bar{y}_i \bar{y}_j & \bar{y}_i \bar{z}_j & p_{jy} \\ \bar{z}_i \bar{x}_j & \bar{z}_i \bar{y}_j & \bar{z}_i \bar{z}_j & p_{jz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En utilisant les paramètres de D-H on définit la matrice de transformation homogène comme suit :

Si un repère absolu R_0 subit n transformations successives , la ieme transformation est définie par rapport au repère R_{i-1} par la matrice $T_{(i-1)i}$:

$$T_{(i-1)i} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & d_i \\ C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i & -r_i S\alpha_i \\ S\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & r_i C\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alors la transformation T_{0n} peut être déduite par composition à gauche de ces transformations on aura :

$$T_{0n} = T_{01} \cdot T_{12} \cdot T_{23} \dots \dots \dots T_{(n-1)n} \quad (1.2)$$

$$T_{0n} = \prod_{i=1}^n T_{(i-1)i}$$

Les paramètres de D-H ainsi que la matrice de transformation homogène que nous venons de présenter seront utilisés pour l'élaboration du modèle dynamique .

I-7-DIFFERENTS MODELES RENCONTRES : [2] [6] [15]

La conception , la simulation et la commande des manipulateurs nécessitent de disposer des différents modèles du mécanisme. On rencontre trois modèles :

- Modèle géométrique direct et inverse
- Modèle cinématique direct et inverse
- Modèle dynamique direct et inverse

Avant de présenter la méthode d'obtention du modèle dynamique , objet de notre étude nous allons rappeler brièvement les modèles géométrique et cinématique ainsi que les méthodes employées pour leur construction .

I-7-1-Modèle géométrique :

Le modèle géométrique direct permet de connaître la situation de l'organe terminal par rapport à un repère de référence en fonction des variables articulaires, il s'écrit :

$$X = f(q) \quad (1.3)$$

tel que :

X est la matrice unicolonne des coordonnées opérationnelles

$q = (q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)^T$ est la matrice unicolonne des variables articulaires.

Le modèle géométrique inverse est la relation réciproque du problème direct , il permet l'obtention des variables articulaires q correspondant à une situation du robot décrite par ses coordonnées opérationnelles .

I-7-2-Modèle cinématique :

Le modèle cinématique direct permet de calculer la vitesse de l'organe terminal dans l'espace opérationnel en fonction des vitesses articulaires .il s'écrit :

$$\dot{X} = J(q) \cdot \dot{q} \quad (1.4)$$

Tel que $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n)^T$

$J(q)$ est la matrice jacobienne donnée par : $J(q) = \frac{\partial f}{\partial q}$

Le modèle cinématique inverse permet de calculer le vecteur des vitesses articulaires \dot{q} en fonction des vitesses opérationnelles \dot{X}

$$\text{il s'écrit : } \begin{cases} \dot{q} = J^{-1}(q) \cdot \dot{X} \\ \det J \neq 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Pour l'obtention de ce modèle deux classes de méthodes sont employées :

- Les méthodes analytiques qui procèdent par dérivation des modèles géométriques .
- Les méthodes qui consistent à inverser le modèle cinématique direct .

I-7-3- Modèle dynamique

Notre travail consiste en première partie à construire le modèle dynamique direct et inverse en indéformable pour les mécanismes à structure plane ou spatiale , à liaisons prismatiques ou rotoides parfaites et à chaîne cinématique simple .

Pour la 2ème partie nous allons aborder la construction du modèle dynamique avec prise en compte de la déformation des joints .

Le modèle dynamique des systèmes polyarticulés est donné par des équations permettant de décrire leur comportement mécanique . Il permet de résoudre deux types de problèmes :

Type I - Problème direct

Type II - Problème inverse

a)- Modèle dynamique direct

Il exprime le vecteur accélération en fonction des couples et/ou force délivrés par les actionneurs , il s'écrit :

$$\ddot{q} = g(\Gamma, q, \dot{q}) \quad (1.6)$$

b) - Modèle dynamique inverse

Ou tout simplement modèle dynamique permet d'exprimer le vecteur forces généralisées Γ en fonction des variables vitesses et accélérations articulaires , il est donné sous la forme :

$$\Gamma = f(q, \dot{q}, \ddot{q}) \quad (1.7)$$

Dans le cas des systèmes rigides (segments porteurs et joints rigides), le modèle dynamique est formé par un ensemble d'équations différentielles couplées et non linéaires, il est donné sous la forme matricielle suivante : [1] [2] [5] [6]

$$\Gamma = [A] \ddot{q} + [B] \dot{q} \dot{q} + [C] \dot{q}^2 - G \quad (1.8)$$

ou :

$[A]$ représente la matrice d'inertie symétrique définie positive, ses éléments sont fonction des variables articulaires.

$[B]$ matrice des termes de Coriolis, elle est aussi fonction des variables articulaires q .

$[C]$ matrice des termes centrifuges fonction de q

G matrice unicolonne, représentant les forces généralisées dues au champ de pesanteur.

Γ matrice unicolonne des forces généralisées non conservatives.

$\ddot{q} = (\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n)^T$ vecteur des accélérations généralisées

$\dot{q} \dot{q} = (\dot{q}_1 \dot{q}_2, \dot{q}_1 \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_1 \dot{q}_n, \dot{q}_2 \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_{n-1} \dot{q}_n)^T$

$\dot{q}^2 = (\dot{q}_1^2, \dot{q}_2^2, \dot{q}_3^2, \dots, \dot{q}_n^2)^T$

Cette modélisation simplifiée s'appuie sur l'hypothèse des corps rigides : tous les constituants de la structure mécanique sont assimilés à des corps parfaitement rigides. Cependant l'hypothèse de la rigidité parfaite n'est jamais exactement satisfaite et dans certains cas il est nécessaire de considérer des modèles plus élaborés qui prennent en compte les propriétés élastiques des éléments constitutifs du système.

Notre travail se situe dans ce contexte mais pour des structures à joints déformables, dans ce qui suit nous allons montrer à travers un exemple simple la différence qui existe entre un système rigide et un système à joints déformables.

Pour cela on considère une structure plane constituée d'une barre articulée en O_0 fig. I-5

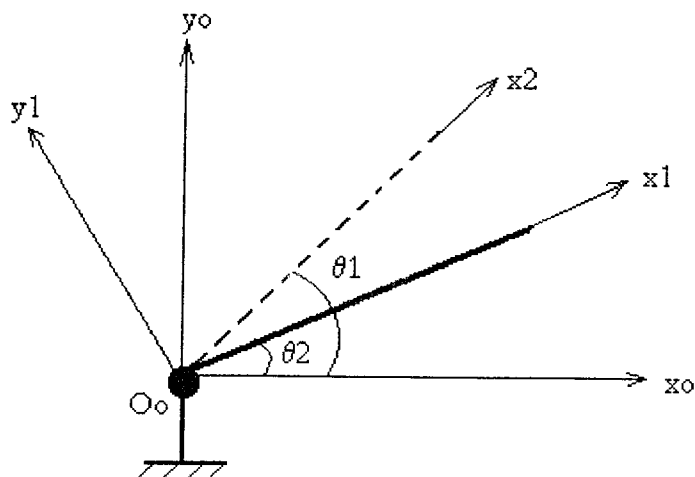


fig. I-5 Mécanisme à joint déformable - Modèle cinématique

1)- Dans le cas rigide on remarque que la configuration de la structure dans le temps est donnée par le paramètre $\theta_2(t)$, le système est à un degré de liberté.

Le modèle dynamique pour cette structure est une équation différentielle d'ordre deux, elle s'écrit sous la forme :

$$C = f(\theta_2, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_2)$$

C est le couple appliqué au niveau de l'articulation.

2)- Dans le cas du système à joint déformable le paramètre θ_2 reste insuffisant pour donner la configuration de la structure, car la position prise par la barre ne coïncide pas avec la position délivrée par l'actionneur cela est dû à la déformation flexible considérée à la sortie de l'arbre du réducteur, donc on introduit deux paramètres θ_1 et θ_2 tel que θ_1 définit la position délivrée par l'actionneur et θ_2 définit la position prise par la barre.

Le modèle dynamique d'un tel mécanisme est donné par un système de deux équations du second ordre. Cela va être détaillé dans les chapitres suivants.

I-8-CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons donné quelques généralités et définitions concernant les systèmes polyarticulés , ces définitions reviendront souvent dans les chapitres suivants et certaines seront reformulées de façon plus précises .

Nous avons ensuite présenté une méthode de description des systèmes polyarticulés qui repose sur l'emploi des paramètres de Denavit - Hartenberg permettant de modéliser avec des notations homogènes toutes les structures polyarticulées à chaîne cinématique simple .

Dans le chapitre suivant nous allons présenter une méthodologie de construction du modèle dynamique direct et inverse dans le cas des structures à corps rigides .

CHAPITRE II

MODELE DYNAMIQUE DES SYSTEMES POLYARTICULES A ELEMENTS RIGIDES

1- INTRODUCTION

Le modèle dynamique d'un système polyarticulé est la procédure d'obtention des équations décrivant son comportement dynamique . Le modèle dynamique possède 3 applications essentielles:

1ère application : Simulation du comportement dynamique du système et dimensionnement des actionneurs .

2ème application : identification paramétrique (determination de la masse , inertie , raideur)

3ème application : permet d'effectuer la synthèse de la commande dynamique .

Le but de ce chapitre est de présenter une méthodologie d'obtention du modèle dynamique qui peut être appliqué systématiquement à tous les systèmes polyarticulés ayant une structure à chaîne cinématique simple . Une fois le modèle construit nous présentons l'étude du comportement de quelques mécanismes polyarticulés en "indéformable" à corps rigides .

2-FORMALISMES DE MISE EN EQUATION :

L'obtention du modèle dynamique des systèmes polyarticulés a fait l'objet de plusieurs études [3] [4] [5] [6] [7] [11] , ces études utilisent plusieurs formalismes de mise en équation , dans ce qui suit nous présentons les principales méthodes couramment employées .

Pour cela nous distinguons les méthodes qui fournissent le modèle sous une forme **implicite** générale en coordonnées , vitesses et accélérations généralisées , dans laquelle aucune séparation entre les différentes variables n'apparaît et qui est sous la forme

$$\Gamma = f(q, \dot{q}, \ddot{q}) \quad (2.1)$$

de celles qui le fournissent sous une forme **explicite** dans laquelle les accélérations généralisées apparaissent séparément des coordonnées et vitesses généralisées .

Notons que chaque forme du modèle implicite ou explicite présente son intérêt :

- la forme implicite utilise moins d'opérations arithmétiques que la forme explicite et permet ainsi de répondre aux exigences de la commande en temps réel .

- La forme explicite seule permet le calcul du modèle dynamique direct qui exprime les accélérations généralisées en fonction des coordonnées , vitesses et efforts généralisés .

$$\ddot{q} = [A]^{-1} (\Gamma - [B] \dot{q} \dot{q} - [C] \dot{q}^2 + G) \quad (2.2)$$

Elle permet par exemple d'étudier en simulation le comportement dynamique d'un système polyarticulé soumis à des efforts imposés .

Pour l'obtention de ce modèle plusieurs formalismes existent , les plus souvent utilisés sont :

- Le formalisme de Newton -Euler pour la forme explicite
- Le formalisme de Lagrange pour la forme explicite

- Le formalisme de Newton-Euler consiste à écrire le théorème de la résultante et du moment dynamiques pour chacun des n corps de la chaîne , les équations vectorielles qui en résultent contiennent à la fois les efforts d'interaction entre corps et les efforts généralisés des actionneurs .

La difficulté inhérente de ce formalisme réside dans l'élimination des efforts d'interaction .

- Le formalisme de Lagrange consiste à calculer tout d'abord le lagrangien du système .i.e son énergie cinétique et potentielle et en déduire le modèle dynamique en calculant des dérivées et des dérivées partielles du lagrangien du système .

Les n équations scalaires obtenues dans le cas des systèmes à liaisons parfaites et holonomes ne font intervenir que les efforts généralisés actifs .

L'avantage de ce formalisme réside dans l'élimination automatique des efforts d'interaction .

Le formalisme de Lagrange est utilisé dans notre étude , cette approche particulière est assez simple à mettre en oeuvre et elle est bien adaptée aux techniques de calcul manuel ainsi qu'aux méthodes de calcul assisté par ordinateur .

L'application directe de ce formalisme et de la matrice de transformation homogène de Denavit - Hartenberg conduit à un algorithme compact pour décrire les équations dynamiques du système mécanique .

3-FORMALISME DE LAGRANGE :

3-1-Hypothèses de travail :

Dans cette étude nous nous limitons au cas des systèmes ayant les caractéristiques suivantes :

- des structures à chaîne cinématique ouverte simple , plane ou spatiale
- les segments porteurs sont supposés parfaitement rigides .
- les liaisons sont supposées holonomes et parfaites (rigides , sans jeu)
- les liaisons sont de classe 5 et peuvent être des joints rotoides ou prismatiques
- les frottements sont du type visqueux .

3-2-Mise en équation par le formalisme de Lagrange [5] [6]

L'énergie cinétique du système est une forme quadratique des vitesses articulaires :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{q}^T [A] \dot{q}$$

tel que :

[A] : matrice (n*n) symétrique définie positive d'éléments génériques $A_{ij}(q)$ dépendant des variables articulaires q .

$\dot{q} = (\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3 \ \dots \ \dot{q}_n)^T$ matrice unicolonne des vitesses généralisées

L'énergie potentielle est due au champ de pesanteur , alors l'effort généralisé exercé par le champ de pesanteur sur l'articulation i s'écrit :

$$G_i = - \frac{\partial E_p}{\partial q_i}$$

E_p : représente l'énergie potentielle externe du système .

Le principe des puissances virtuelles donne les équations suivantes :

$$A_i = F_i \tag{2.3}$$

A_i : désigne la quantité d'accélération généralisée

F_i : désigne les forces généralisées

tel que : $A_i = \partial_i (E_c)$

$$\partial_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i}$$

$$F_i = - \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_p}{\partial q_i} + \Gamma_i$$

E_D Energie de dissipation par effet du frottement visqueux .

Γ_i Forces généralisées non conservatives .

Les n équations scalaires de Lagrange peuvent se mettre sous la forme suivante (voir annexe3)

$$\Gamma_i = \sum_{j=1}^n \left[A_{ij} \cdot \ddot{q}_j + \sum_{k=j+1}^n \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k + \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{jj}}{\partial q_i} \right) \cdot \dot{q}_j^2 \right] - G_i \quad (2.4)$$

avec :

$$B_{i,jk} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} \quad (2.5)$$

$$C_{ij} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{jj}}{\partial q_i} \quad (2.6)$$

$$G_i = - \frac{\partial E_p}{\partial q_i} \quad (2.7)$$

Γ : matrice unicolonne des forces généralisées

$[A]$: matrice carrée de dimension (n*n), symétrique définie positive . C'est la matrice masse du système , elle intervient dans le calcul du couple/force d'inertie exprimé par le

produit $[A] \ddot{q}$

$[B]$ matrice de dimension (n*(n-1) n/2) , matrice des termes de Coriolis

$[C]$ matrice de dimension (n*n) appelée matrice des termes centrifuges

G : matrice colonne de dimension $(n*1)$, représentant les forces généralisées dues au champs de pesanteur .

$\ddot{q} = (\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n)^T$ matrice unicolonne des accélérations généralisées

$\dot{q}\dot{q} = (\dot{q}_1\dot{q}_2, \dot{q}_1\dot{q}_3, \dots, \dot{q}_1\dot{q}_n, \dot{q}_2\dot{q}_3, \dots, \dot{q}_{n-1}\dot{q}_n)^T$

$\dot{q}^2 = (\dot{q}_1^2, \dot{q}_2^2, \dot{q}_3^2, \dots, \dot{q}_n^2)^T$

Les n équations peuvent être regroupées sous la forme matricielle suivante :

$$\Gamma = [A] \ddot{q} + [B] \dot{q}\dot{q} + [C] \dot{q}^2 - G \quad (2.8)$$

Les éléments des matrices A , B , C et G s'appellent les coefficients dynamiques du système , ils sont fonction des paramètres géométriques et inertiels du mécanisme .

3-3-Propriétés des coefficients dynamiques : [5]

Afin de réduire le nombre de termes à calculer nous utilisons les propriétés des coefficients dynamiques suivantes :

- pour la matrice des termes de Coriolis .

$$B_{i,jk} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i}$$

$$B_{i,jl} = -B_{l,ij} \quad \text{si } j \leq i \text{ et } l$$

$$B_{i,jj} = -B_{j,ij} \quad \text{si } j \leq i$$

$$B_{i,jk} = 0 \quad \text{si } j \leq i$$

- pour la matrice des termes centrifuges .

$$C_{ij} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{,ij}}{\partial q_i}$$

$$C_{ij} = -\frac{1}{2} B_{j,ji} \quad \text{si } j > i$$

$$C_{ii} = 0$$

Le comportement dynamique d'un système polyarticulé dans le cas rigide est régi par l'équation (2.8) qui représente un système d'équations différentielles du second ordre, couplées et non linéaires.

Bien qu'il soit le plus adapté pour la mise en équation des systèmes polyarticulés, le formalisme de Lagrange présente l'inconvénient du calcul des dérivées et des dérivées partielles du Lagrangien du système. Pour pallier cette difficulté on fait appel à la méthode de Uicker que nous allons développer dans la suite.

3-4-Methode de Uicker [5] [6]

S'appuyant sur le formalisme de Lagrange, la méthode de Uicker fait appel à deux notions essentielles :

- La notion de matrice de passage dans l'espace R4: matrice homogène.
- La notion de matrice d'inertie homogène d'un corps.

Soit un système polyarticulé à chaîne cinématique simple et soit S_k un corps appartenant à la chaîne, $R_k(o_k, \bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ est un repère relatif lié au corps S_k .

Soit M_k un point appartenant au solide S_k tel que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_0 M_k} &\longrightarrow [O_0 M_k] \\ \overrightarrow{O_k M_k} &\longrightarrow [O_k M_k] \end{aligned}$$

$$[O_0 M_k] = [T_{0k}] \cdot [O_k M_k] \quad \| O_k M_k \| = \text{cte} \quad (\text{cas des corps rigides})$$

calculons la vitesse

$$[V^0(M_k)] = \frac{d^0}{dt} [O_0 M_k] = \frac{d^0}{dt} ([T_{0k}] \cdot [O_k M_k])$$

L'énergie cinétique du solide est S_k donnée par :

$$E_{ck} = \frac{1}{2} \int_{S_k} [V^0(M_k)]^2 dm$$

$$E_{ck} = \frac{1}{2} \text{Trace} \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \text{Trace} \left[\left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right]_{S_k} \int [O_k M_k] [O_k M_k]^T dm \cdot \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] \right] q_j q_l$$

$$[J_k] = \int_{S_k} [O_k M_k] [O_k M_k]^T dm$$

$[J_k]$ est la pseudo matrice d'inertie de dimension (4*4) ,relative au corps S_k de la chaîne dans le repère R_k .

Elle est constituée par :

- le moment d'ordre zéro de S_k : m_k masse de S_k
- le moment d'ordre un de S_k : $m_k \cdot \overrightarrow{O_k G_k}$ tel que G_k est le centre de masse de S_k
- le moment d'ordre deux de S_k : qui représente la matrice d'inertie $[I_k]$ en O_k dans le repère R_k .

$$[I_k] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$[J_k] = \begin{bmatrix} (-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})/2 & -I_{xy} & -I_{xz} & m \bar{x} \\ -I_{xy} & (I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})/2 & -I_{yz} & m \bar{y} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & (I_{xx} + I_{yy} - I_{zz})/2 & m \bar{z} \\ m \bar{x} & m \bar{y} & m \bar{z} & m \end{bmatrix}$$

$$E_{ck} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \text{Trace} \left[\left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] \right] q_j q_l$$

L'énergie cinétique totale du système est donnée par :

$$E_c = \sum_{k=1}^n E_{ck}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \text{Trace} \left[\left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] \right] q_j q_l$$

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \left[\sum_{k=\max(1,j)}^n \text{Trace} \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] \right] q_j \dot{q}_l \quad (2.9)$$

On pose
$$A_{jl} = \sum_{k=\max(1,j)}^n \text{Trace} \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right]$$

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n A_{jl} q_j \dot{q}_l \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} \left[\dot{q} \right] [A] \left[\dot{q} \right]$$

L'énergie cinétique d'un système polyarticulé est une forme quadratique des vitesses articulaires .

Les éléments de la matrice d'inertie $[A]$ sont donnés par la relation suivante :

$$A_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^n \text{Trace} \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_i} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \quad (2.10)$$

3-4-1-Expression de la matrice d'inertie[A]

Les éléments de la matrice $[A]$ sont donnés par l'expression suivante (voir annexe 5)

$$A_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^n \text{Trace} \left[\left[\Omega_{0i} \cdot T_{0k} \right] [J_k] \left[\Omega_{0j} \cdot T_{0k} \right]^T \right] \quad (2.11)$$

3-4-2-Expression de la matrice des termes de Coriolis

Les éléments de la matrice des termes de Coriolis sont donnés par l'expression suivante (voir annexe 5)

$$B_{i,jl} = \sum_{k=\max(i,j,l)}^n \text{Trace} \left[\left[\Omega_{0j} \cdot \Omega_{0l} \cdot T_{0k} \right] [J_k] \left[\Omega_{0j} \cdot T_{0k} \right]^T \right] \quad (2.12)$$

3-4-3-Expression de la matrice des termes centrifuges :

Les éléments de la matrice des termes centrifuges sont donnés par l'expression suivante (voir annexe 5)

$$C_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^n \text{Trace} \left[\left[\Omega_{0j} \cdot \Omega_{0j} \cdot T_{0k} \right] \left[J_k \right] \left[\Omega_{0j} \cdot T_k \right]^T \right] \quad (2.13)$$

3-4-4-Expression du vecteur force de gravité

$$E_p = \sum_{i=1}^n (-m_i \cdot g \cdot T_i \cdot u_i) \quad \text{donc} \quad G_i = - \frac{\partial E_p}{\partial q_i}$$

$$G_i = \sum_{i=1}^n -m_i \cdot g \cdot \left(\frac{\partial T_{0i}}{\partial q_i} \right)$$

$$G_i = \sum_{i=1}^n -m_i \cdot g \cdot T_{0i} \cdot \Omega_{0i} \quad (2.14)$$

E_p : énergie potentielle du système

m_k : masse du solide S_k

G_k : centre de masse de S_k

$[g]$: vecteur accélération de la pesanteur exprimé dans le repère de base R_0 .

tel que :

$$\Omega_{jl} = T_{jl} \cdot \Omega_{ll} \cdot T_{lj} \quad (2.15)$$

$$\text{et } \Omega_{ll} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-\sigma_l) & 0 & 0 \\ (1-\sigma_l) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_l \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\sigma_j = 0$ pour une liaison rotoïde

$\sigma_j = 1$ pour une liaison prismatique

4-FORMES DU MODELE DYNAMIQUE :

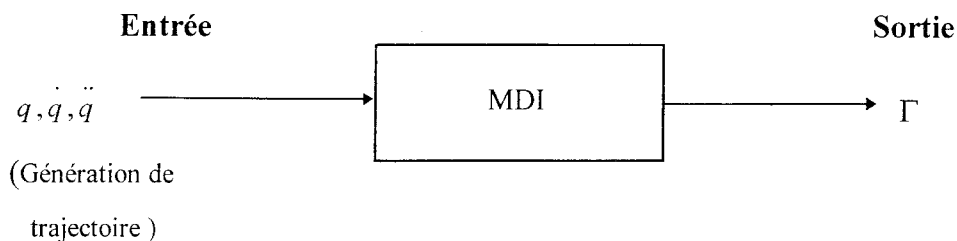
Quel que soit le formalisme employé , deux utilisations du modèle dynamique sont envisagées

- a) - 1ere application : modèle inverse .
- b)- 2eme application : modèle direct .

4-1-Probleme inverse :

Le modèle dynamique inverse d'un système polyarticulé est constitué par les relations qui expriment les forces généralisées (ou couples) exercés par les actionneurs aux niveaux des articulations en fonction de leurs positions , vitesses et accélérations articulaires .

$$\Gamma = f(q, \dot{q}, \ddot{q})$$

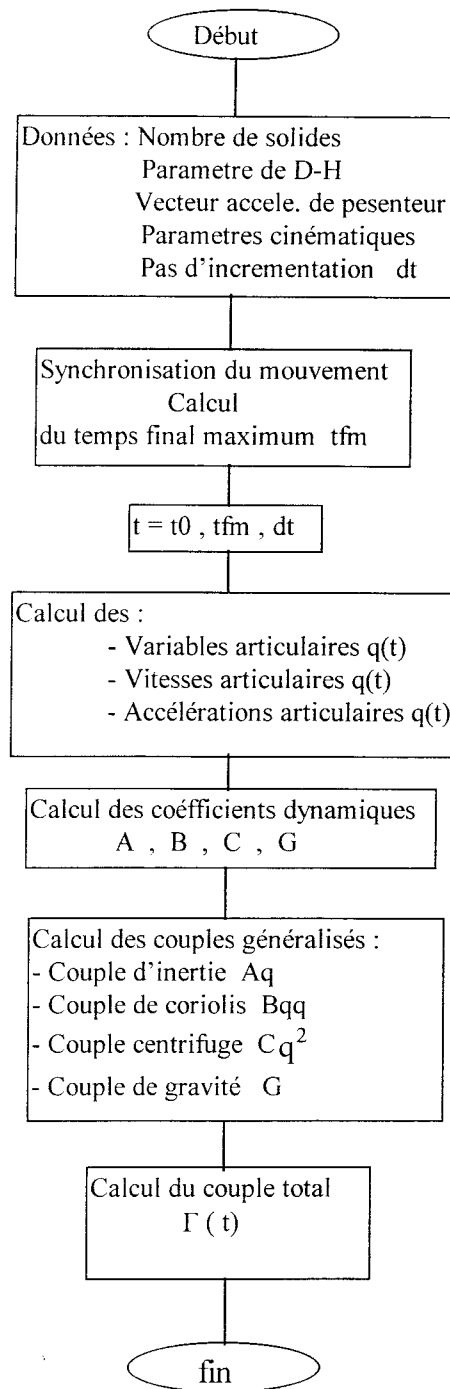


Le modèle dynamique inverse est aussi appelé modèle dynamique .

En utilisant le formalisme de Lagrange , le modèle dynamique inverse est donné par le système d'équations (2.8) suivant :

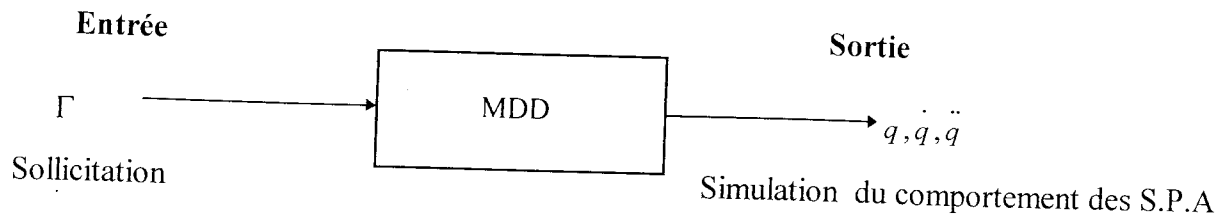
$$\Gamma = [A] \cdot \ddot{q} + [B] \cdot \dot{q}\dot{q} + [C] \cdot \dot{q}^2 - G$$

Rappelons ici que les coefficients dynamiques A , B , C et G sont construits en utilisant la méthode de Uicker - Kahn . Par la suite nous présentons un organigramme qui permet la construction du modèle dynamique inverse .



4-2-Problème direct :

Le modèle dynamique direct consiste à déterminer les variables articulaires en fonction des forces (ou/et couple) généralisées



Le calcul des variables articulaires se fait en résolvant le système d'équations différentielles non linéaires suivant :

$$\begin{cases} \Gamma = [A] \cdot \ddot{q} + [B] \cdot \dot{q}\dot{q} + [C] \cdot \dot{q}^2 - G \\ \text{à } t = t_0 \quad q(t_0) = q_0, \quad \dot{q}(t_0) = \dot{q}_0 \end{cases} \quad (2.16)$$

La résolution de ce système d'équations peut se faire par plusieurs méthodes d'intégration numérique [3] [4] [9] [10] telle que :

- Méthode d'Euler
- Méthode de Runge-Kutta
- Méthode de Newmark

Dans cette étude nous avons utilisé la méthode de Runge-Kutta à 4 approximations qui offre une précision satisfaisante au problème, et se prête facilement à la programmation. Le schéma d'intégration est défini comme suit :

$$\frac{d}{dt}[Y] = f(t, Y) \quad \text{avec } [Y] = [Y_0] \text{ pour } t = t_0$$

avec la méthode de Runge kutta on a :

$$[Y]_{t+dt} = [Y]_t + \frac{1}{6}[[K1] + 2[K2] + 2[K3] + [K4]]$$

$$[K1] = f(t, [Y]) \cdot dt$$

$$[K2] = f\left(t + \frac{dt}{2}, [Y] + \frac{[K1]}{2}\right) \cdot dt$$

$$[K3] = f\left(t + \frac{dt}{2}, [Y] + \frac{[K2]}{2}\right) \cdot dt$$

$$[K4] = f(t + dt, [Y] + [K3]) \cdot dt$$

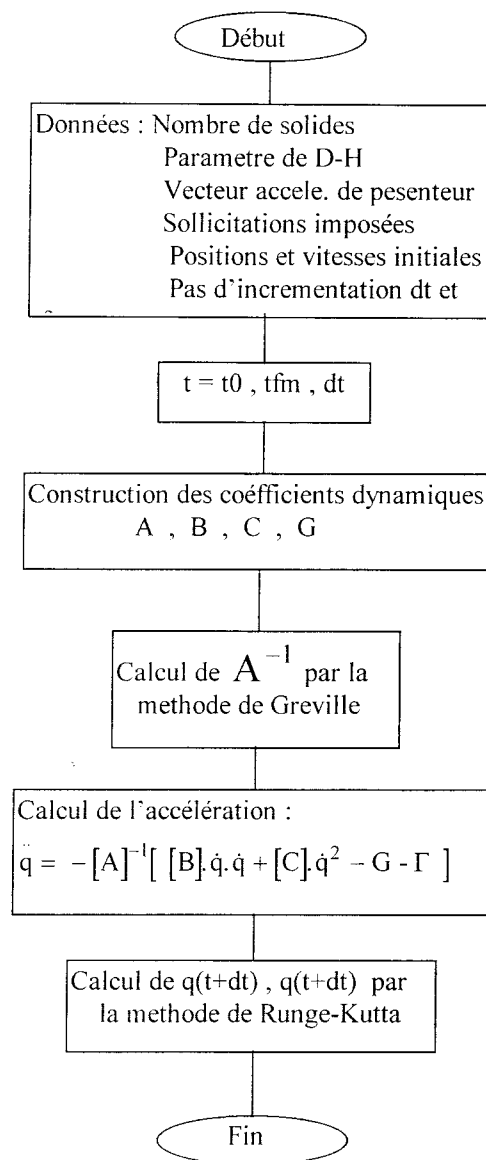
Le système d'équations peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \ddot{q} = -[A]^{-1} [[B].\dot{q}.\dot{q} + [C].\dot{q}^2 - G - \Gamma] \\ t = t_0 \quad q(t_0) = q_0 \quad , \quad \dot{q}(t_0) = \dot{q}_0 \end{cases} \quad (2.17)$$

$$[y] = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad , \quad f(t, Y) = \frac{d}{dt}[Y] = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -[A]^{-1} [[B].\dot{q}.\dot{q} + [C].\dot{q}^2 - G - \Gamma] \end{bmatrix}$$

et ainsi on peut directement appliquer le schéma d'intégration .

Dans ce qui suit nous allons expliciter les différentes étapes qui permettent la construction du modèle dynamique direct pour les systèmes polyarticulés à corps rigides.



5-CONCLUSION :

Ce chapitre a été consacré à l'élaboration du modèle dynamique des systèmes polyarticulés à chaîne cinématique simple.

En utilisant le formalisme de Lagrange associé à la méthode de Uicker les équations du mouvement sont obtenues sous forme matricielle explicite se prêtant directement à la résolution par la méthode de Runge-Kutta .

Cette modélisation simplifiée s'appuie sur l'hypothèse des corps rigides : tous les constituants de la structure mécanique sont assimilés à des corps parfaitement rigides. Cependant l'hypothèse de la rigidité parfaite n'est jamais exactement satisfaite .

La flexibilité du système peut survenir de la déformation de ses différentes parties à savoir :

- la déformation des segments porteurs
- la déformation des joints .

Ceci conduit à un comportement vibratoire influant considérablement sur les performances dynamiques du système .

Le chapitre suivant sera consacré à l'étude des systèmes polyarticulés à joints déformables afin de mettre en évidence l'influence de la déformation sur le comportement mécanique du système .

CHAPITRE III

MODELE DYNAMIQUE DES SYSTEMES

POLYARTICULES

A JOINTS DEFORMABLES

1-INTRODUCTION

L'analyse du comportement dynamique des systèmes polyarticulés nécessite de disposer de modèles adéquats prenant en compte les propriétés mécaniques du système réel avec une précision suffisante .

Dans le modèle simplifié que nous avons présenté au chapitre-II tous les constituants de la structure mécanique (segments , éléments de transmission.....) sont considérés comme des éléments parfaits dont la déformation a été négligée .

Cette approche simplifiée s'avère dans plusieurs cas suffisante pour représenter le comportement des systèmes polyarticulés avec une précision acceptable . Cependant dans certains cas il est nécessaire de considérer des modèles plus élaborés . Par exemple les oscillations significatives d'une structure polyarticulée peuvent survenir de l'élasticité de certains constituants qui , dans la réalité , ne sont jamais absolument rigides .

Ces oscillations peuvent affecter considérablement les performances dynamiques du système . Il est nécessaire de tenir compte des propriétés élastiques pour pouvoir analyser le comportement vibratoire du système mécanique soumis à des sollicitations dynamiques [1] [15].

Ce troisième chapitre sera consacré à la construction du modèle dynamique pour les systèmes polyarticulés à chaîne cinématique simple prenant en compte :

- L'élasticité des liaisons mécaniques
- La dissipation d'énergie dans les liaisons

2-MODELISATION D'UN JOINT DEFORMABLE : [1] [15] [16] [17]

2-1-Position du problème:

Les systèmes polyarticulés sont destinés à être légers , solides , rapides et précis . Ces exigences de performances élevées obligent l'utilisation d'éléments moins massiques à des vitesses de plus en plus élevées : c'est le problème d'optimisation de la structure du système mécanique qui est appelé à travailler dans des conditions de sévérité telle que la déformation ne peut plus être négligée .

Cette déformation est à l'origine des oscillations importantes du système polyarticulé. Ces oscillations indésirables peuvent provoquer une détérioration considérable des performances du système :

- réduisent énormément sa précision
- compliquent son contrôle

et parfois mènent à des endommagements de la structure .

Pour analyser de telles oscillations et développer des méthodes efficaces pour atténuer leurs effets indésirables, il est nécessaire de tenir compte des propriétés élastiques de ces systèmes. La déformation des systèmes polyarticulés est localisée au niveau des éléments constituant sa structure mécanique, on y distingue :

- la déformation des segments (éléments structuraux)
- la déformation au niveau des articulations ou joints

Selon plusieurs auteurs [1] [15] [16] [17] [18] la déformation des systèmes polyarticulés est prépondérante aux niveaux des joints (élasticité concentrée), la contribution de l'élasticité dans les segments (élasticité répartie) est moins importante. La même constatation peut être faite pour ce qui est de la dissipation de l'énergie mécanique.

Cette partie sera consacrée à l'étude du comportement élastique des structures polyarticulées à joints déformables.

La prise en compte de la déformation répartie dans les segments sort du cadre de notre travail, seule l'élasticité des liaisons est considérée dans cette deuxième approche.

2-2-Constituants technologiques d'une liaison : [1] [15] [21] [22]

Pour transmettre le mouvement aux différents corps d'une chaîne articulée trois types d'actionneurs sont utilisés. Il s'agit des actionneurs :

- électriques
- pneumatiques
- hydrauliques

Les actionneurs pneumatiques ont l'avantage de développer des couples massiques assez importants mais exigent des compresseurs ainsi que des circuits de distribution et de filtrage pour l'énergie pneumatique ce qui rend leur emploi assez limité.

Pour la motorisation des mécanismes lourds on fait appel aux actionneurs hydrauliques qui se caractérisent par une puissance spécifique élevée.

Les actionneurs électriques associés à des réducteurs restent les plus utilisés vue leur facilité d'emploi et de contrôle.

Les réducteurs employés sont de type différentiel (tel que : Harmonic-Drive) et permettent des rapports de réduction élevés en un seul étage avec un encombrement réduit relativement à la solution que procure les engrenages classiques. Ils supportent des couples élevés et résistent aux chocs induits, mais présentent cependant une insuffisance dans la rigidité des axes avec parfois des hystérésis importantes.

2-3-Description d'un actionneur électrique:

Dans ce chapitre nous allons considérer seulement le cas des joints rotoides car pour les joints prismatiques la déformation est moins significative .

On considère aussi que chaque actionneur i agit sur un seul corps C_i de la chaîne et il est monté au niveau de l'articulation A_i .

2-3-1-Liaison rigide

Dans le cas des joints rigides , à chaque segment est associée une variable articulaire q_i délivrée par le moto-reducteur . fig (III-1)

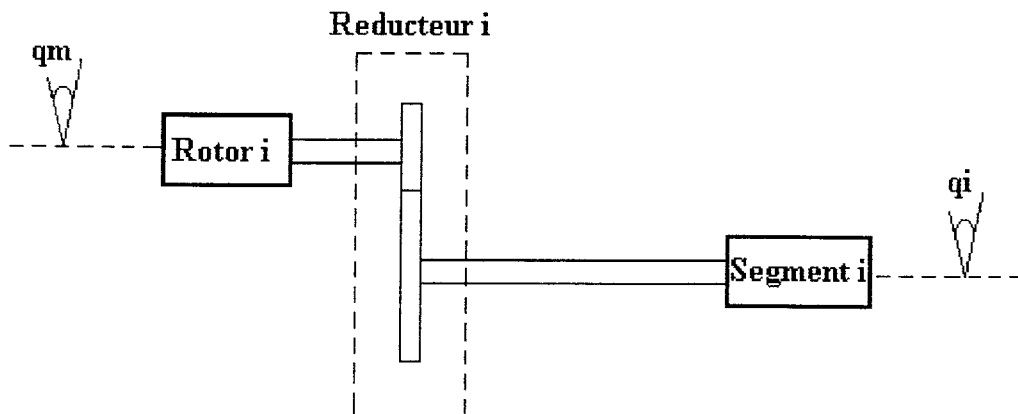


fig III-1 -Schema synoptique d'un axe motorisé

tel que : N_i est le rapport de réduction

q_i : vitesse généralisée relative au segment i

q_m : vitesse d'entrée du reducteur i

$$q_i = \frac{1}{N_i} \cdot q_m \quad (3.1)$$

2-3-2-Liaison déformable

Pour décrire une liaison déformable, nous utilisons le modèle rhéologique ressort - amortisseur montés en parallèle et à caractéristiques linéaires.

Dans ce cas la variable articulaire délivrée par le moto-réducteur n'est plus égale à la variable articulaire prise par le segment i .

Un axe motorisé est constitué de plusieurs éléments qui permettent la transmission du mouvement au segment porteur tel que :

- une génératrice tachymétrique d'inertie J_1 .
- un moteur électrique de masse m_2 , d'inertie J_2 et de constante d'amortissement b_2 .
- un réducteur de masse m_3 , d'inertie J_3 et de constante d'amortissement b_3 .

Donc le cas général il faut considérer toutes les déformations élastiques de ces différents éléments, à savoir : [1] [12] [8] [9]

- La déformation de torsion entre la génératrice tachymétrique et le moteur caractérisée par la constante de rigidité K_{12} et le coefficient d'amortissement b_{12} .
- La déformation de torsion entre le moteur et le réducteur caractérisée par K_{23} et b_{23} .
- La déformation de torsion entre le réducteur et le segment porteur caractérisée par K_{34} et b_{34} . Ceci peut être schématisé comme suit : fig III-2
- Déformation répartie du segment.

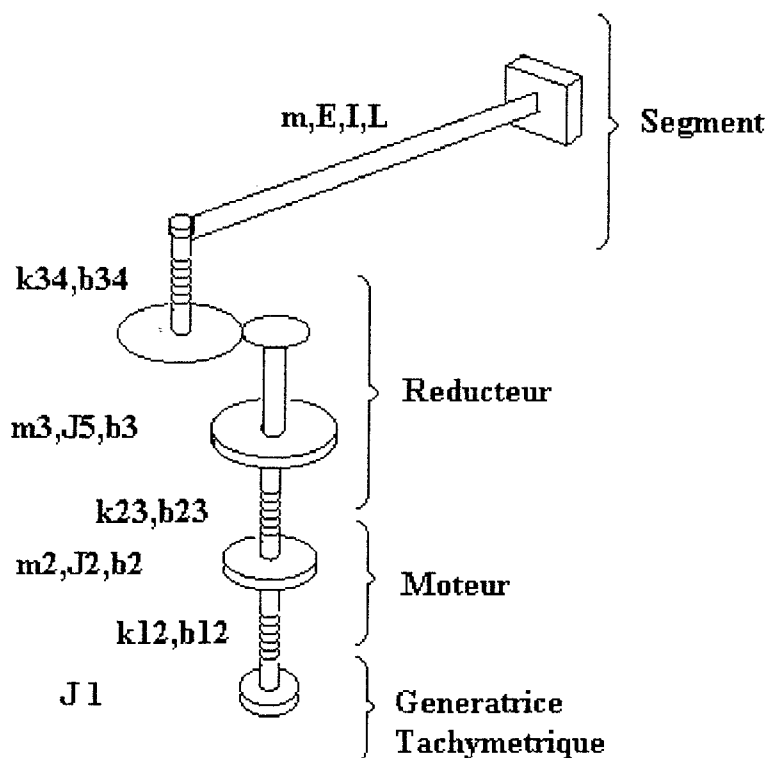


fig III-2 - Modèle d'une articulation rotative motorisée.

Donc pour chaque joint i , il faut définir quatre variables articulaires : q_{1i} , q_{2i} , q_{3i} , q_{4i} telles que :

q_{1i} : variable relative à la génératrice tachymétrique

q_{2i} : variable relative au moteur

q_{3i} : variable relative au réducteur

q_{4i} : variable relative au segment porteur

Cela peut être schématisé comme l'indique la fig III-3

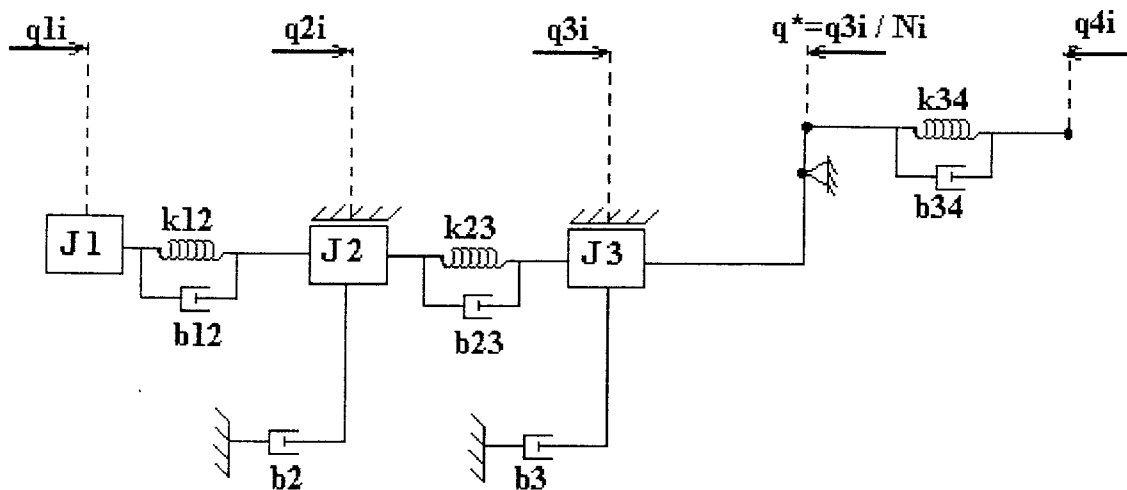


fig III-3 - Schéma définissant les degrés de liberté relatifs au joint flexible

Compte tenu de l'utilisation visée du modèle que l'on se propose de construire, nous allons adopter un modèle cinématique simplifié dans lequel la déformation du joint est supposée localisée à la sortie du réducteur [1] [12] [22] à [27], [36] à [62] ceci conduit à adopter le modèle représenté fig III-4

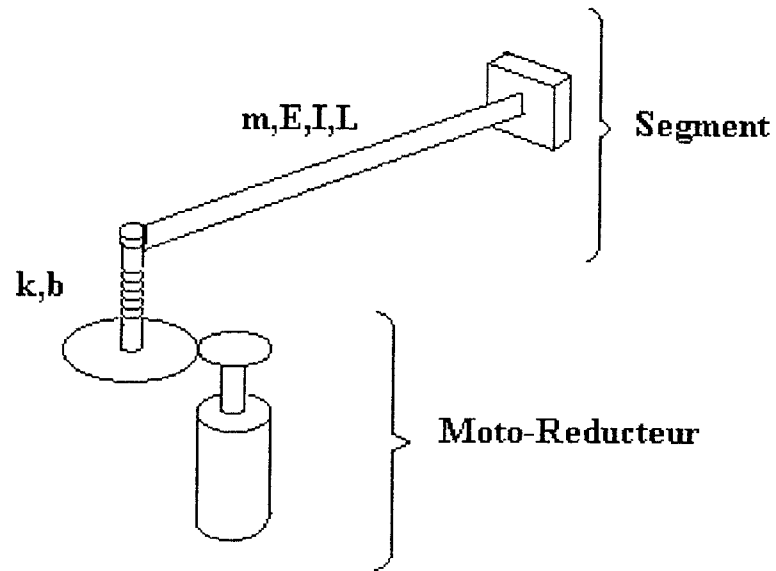


fig III -4 - Définition du modèle simplifié adopté pour une liaison déformable

Cette modélisation simplifiée conduit au schéma équivalent suivant :

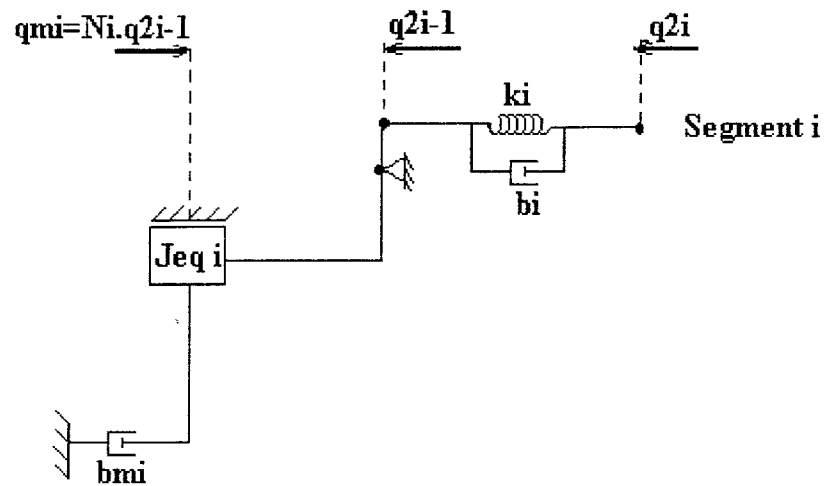


fig III-5 - Schéma équivalent d'un joint flexible

Le travail que nous allons présenter repose sur cette modélisation du joint flexible . La description cinématique d'une telle modélisation exige pour chaque articulation i de prendre deux variables articulaires q_{2i-1} et q_{2i} (fig III-6) :

Il faut noter que cette modélisation du joint déformable reste toujours une modélisation simplifiée car le cas complet il y a lieu de considérer toutes les déformations dues à la torsion qui existe à travers tout le joint .

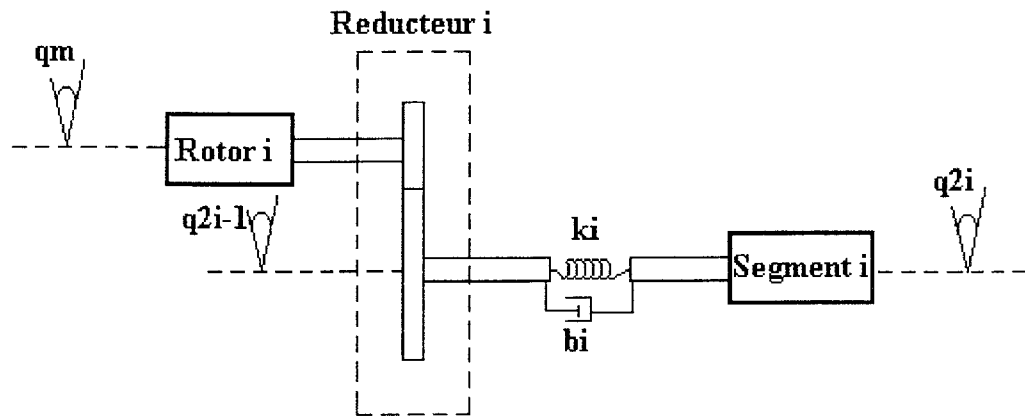


fig III-6 - Définition du modèle cinématique simplifié adopté

Dans ce cas pour chaque articulation on associe 2 variables articulaires q_{2i-1} et q_{2i} telles que

$$q_{2i-1} = \frac{1}{N_i} q_m \quad (3.2)$$

q_{2i-1} : variable articulaire délivrée par l'actionneur i

q_{2i} : variable articulaire prise par le segment i

3-CONSTRUCTION DU MODELE DYNAMIQUE

3-1-hypothèses de travail :

Dans ce chapitre nous allons étudier le cas des systèmes à chaînes cinématiques simples . planes ou spatiales avec les hypothèses suivantes .

H1- Les segments sont supposés parfaitement rigides

H2- Les liaisons peuvent être des joints rotoides ou prismatiques

H3- Les liaisons sont supposées élastiques à caractéristiques linéaires .

H4- La dissipation d'énergie dans les liaisons est décrite au moyen du modèle d'amortissement "visqueux" .

3-2-mise en équation :

Pour la mise en équation du modèle dynamique nous avons utilisé le formalisme de Lagrange associé à la méthode de Uicker , démarche déjà adoptée au chapitre-II et qui conduit au calcul de :

- Energie cinétique du système $E_c = E_c(q_{2i-1}, q_{2i}, \dot{q}_{2i})$

- Energie potentielle du système $E_p = E_p(q_{2i-1}, q_{2i})$

- Energie de dissipation par frottement visqueux dans le joint $E_D = E_D(q_{2i-1}, q_{2i})$

3-2-1-Energie cinétique du système :

L'énergie cinétique des systèmes polyarticulés à joints flexibles est calculée en considérant la structure comme une chaîne ouverte simple à $2n$ éléments les n segments et les n actionneurs qu'on peut mettre sous la forme quadratique suivante :

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot \dot{q}_{2i}^T \cdot [A] \cdot \dot{q}_{2i} + \frac{1}{2} \cdot \dot{q}_{2i-1}^T \cdot [Ia] \cdot \dot{q}_{2i-1} \quad (3.3)$$

tel que :

[A] : représente la matrice masse relative aux coordonnées généralisées q_{2i} , de dimension $(n*n)$ symétrique définie positive .

[Ia] : matrice des inerties des actionneurs de dimension $(n*n)$ diagonale , construite par les éléments de type : $N_i^2 Ia_i$ tel que :

N_i : rapport de transmission du i ème actionneur $N_i \geq 1$

Ia_i : inertie du rotor et du premier étage du réducteur du i ème actionneur .

\dot{q}_{2i} : vitesse généralisée relative au i ème segment .

\dot{q}_{2i-1} : vitesse généralisée relative au i ème actionneur .

3-2-2-Energie potentielle du système

L'énergie potentielle est calculée de la même façon que dans le cas rigide mais en considérant la structure comme une chaîne cinématique simple a $2n$ éléments , les n segment et les n actionneurs

$$E_p = E_p(\text{ext}) + E_p(\text{int})$$

$$E_p(\text{ext}) = E_p(\text{Pesanteur})$$

$$E_p(\text{int}) = E_p(\text{Elastique})$$

Etant donné que la déformation des joints est représentée par un ressort de torsion à caractéristique linéaire, l'énergie potentielle élastique peut être mise sous la forme :

$$E_{p(\text{int})} = \sum_{i=1}^n E_{p_i}(q_{2i-1}, q_{2i})$$

$$E_{p(\text{int})} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} K_i (q_{2i-1} - q_{2i})^2$$

En posant $\varphi_i = q_{2i-1} - q_{2i}$

$$E_{p(\text{int})} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} K_i (\varphi_i)^2$$

K_i représente la constante de rigidité du ième joint élastique

φ_i représente le déplacement angulaire relatif au niveau du ième joint

Sachant que l'énergie potentielle élastique est une forme quadratique des déplacements angulaires, on peut la mettre sous la forme matricielle suivante :

$$E_{p(\text{int})} = \frac{1}{2} \{\varphi\}^T [K] \{\varphi\} \quad (3.4)$$

$\{\varphi\}$ matrice unicolonne des déplacements angulaires

$[K]$ matrice de rigidité des joints, de dimension $(n \times n)$, diagonale.

L'énergie potentielle de pesanteur a été déjà calculée (cas indéformable) elle dépend seulement des variables articulaires q_{2i} .

$$E_{p(\text{ext})} = E_{pg} = \sum_{i=1}^n E_{pg_i}(q_{2i})$$

3-2-3-Energie de dissipation dans le joint :

Du fait qu'on considère le joint a caractère dissipatif donc il faut tenir compte de l'énergie dissipée dans le joint due au frottement de type visqueux.

C'est une forme quadratique des vitesses angulaires relatives des joints , on aura :

$$E_D = \sum_{i=1}^n E_{D_i} (q_{2i-1}, q_{2i-1})$$

$$E_D = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} b_i (q_{2i-1} - q_{2i})^2$$

$$E_D = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} b_i (\dot{\varphi}_i)^2$$

$$E_D = \frac{1}{2} \left\{ \dot{\varphi} \right\}^T [D] \left\{ \dot{\varphi} \right\} \quad (3.5)$$

avec :

$\left\{ \dot{\varphi} \right\}$: matrice unicolonne constituée des vitesses relatives angulaires

$[D]$: matrice des coefficients d'amortissements , dimension $(n*n)$, diagonale

L'application du principe des puissances virtuelles et le formalisme de Lagrange conduisent aux $2n$ équations suivantes :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} = - \frac{\partial E_D}{\partial q_j} - \frac{\partial E_p}{\partial q_j} + \Gamma_j \quad \text{pour } j = 1, 2n \quad (3.6)$$

Ces $2n$ équations peuvent se metrent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} + \frac{\partial E_{pg}}{\partial q_j} - K_i (q_{2i} - q_{2i-1}) - b_i (q_{2i} - q_{2i-1}) = \Gamma_i & \text{si } j = 2i - 1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} + \frac{\partial E_{pg}}{\partial q_j} + K_i (q_{2i} - q_{2i-1}) + b_i (q_{2i} - q_{2i-1}) = 0 & \text{si } j = 2i \end{cases} \quad (3.7)$$

En posant la variable articulaire $[q] = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ telle que :

$$[q_1] = [q_{2i-1}] \quad \text{et} \quad [q_2] = [q_{2i}] \quad i = 1, n$$

On aura le système d'équations suivant : [1] [36]à [63]

$$\begin{cases} [A].\ddot{q}_1 + [B].\dot{q}_1.\dot{q}_1 + [C].\dot{q}_1^2 - G + [K].(q_1 - q_2) + [D](\dot{q}_1 - \dot{q}_2) = 0 \\ [Ia]\ddot{q}_2 - [K](q_1 - q_2) - [D](\dot{q}_1 - \dot{q}_2) = \Gamma \end{cases} \quad (3.8)$$

avec :

[A] matrice masse , [B] et [C] sont les matrices de coriolis et centrifuge et G la matrice unicolonne des termes de gravité . Elle se calcule de la même façon que dans le cas du modèle rigide présenté en (Chapitre II) .

Ainsi le système d' équations (3.8) permet de décrire le comportement mécanique d'un système polyarticulé à joints déformables et dissipatifs .

C'est un système différentiel du deuxième ordre à 2n équations couplées et non linéaires .

Si le système mécanique à étudier est à joints parfaitement rigides (le coefficient de rigidité $K \rightarrow \infty$

et $b \rightarrow 0$ donc $q_1 \rightarrow q_2$ et la différence $q_1 - q_2 \rightarrow 0$

le système d'équation (3.8) devient :

$$\begin{cases} [A_s].\ddot{q}_1 + [B].\dot{q}_1.\dot{q}_1 + [C].\dot{q}_1^2 - G = 0 & (1) \\ [Ia]\ddot{q}_1 = \Gamma & (2) \end{cases} \quad (3.9)$$

tel que [A_s] est la matrice d'inertie de la partie segments et [Ia] est la matrice d'inertie de la partie actionneur

Si on additionne membre à membre les équations (1) et (2) on retrouve les équations du mouvement des systèmes polyarticulés en indéformable données par l'équation matricielle (2.8) :

$$\Gamma = [A] \ddot{q} + [B] \dot{q} \dot{q} + [C] \dot{q}^2 - G$$

tel que [A] = [A_s] + [Ia] est la matrice d'inertie du système totale

Ceci conduit à retrouver le modèle mathématique d'un système à joints parfaitement rigides .

4- RESOLUTION DES EQUATIONS :

Pour la résolution du système d'équations (3.8) on utilise la méthode de Runge - Kutta à 4 approximations . Pour cela le système est réarrangé de la manière suivante :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -[A]^{-1} [[B].\dot{q}_1.\dot{q}_1 + [C].\dot{q}_1^2 - G + [K].(q_1 - q_2) + [D](\dot{q}_1 - \dot{q}_2)] \\ \ddot{q}_2 = [Ia]^{-1} [\Gamma + [K](q_1 - q_2) + [D](\dot{q}_1 - \dot{q}_2)] \end{cases} \quad (3.10)$$

avec les condition initiales suivantes :

$$\begin{cases} q_1(t_0) = q_{10} & , & \dot{q}_1(t_0) = \dot{q}_{10} \\ q_2(t_0) = q_{20} & , & \dot{q}_2(t_0) = \dot{q}_{20} \end{cases}$$

Le système d'équations (II-a) est transformé de telle manière a l'adapter à une forme classique prête pour la résolution avec la méthode de Runge-Kutta , ce qui nous conduit à poser :

$$[y] = \begin{bmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad \text{et donc nous avons :} \quad \frac{d[y]}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \ddot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} \quad \text{par ailleurs nous aurons :}$$

$$\frac{d[y]}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ -[A]^{-1} [[B].\dot{q}_1.\dot{q}_1 + [C].\dot{q}_1^2 - G + [K].(q_1 - q_2) + [D].(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)] \\ \dot{q}_2 \\ [Ia]^{-1} [\Gamma + [K].(q_1 - q_2) + [D].(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)] \end{bmatrix}$$

que nous posons sous la forme suivante :

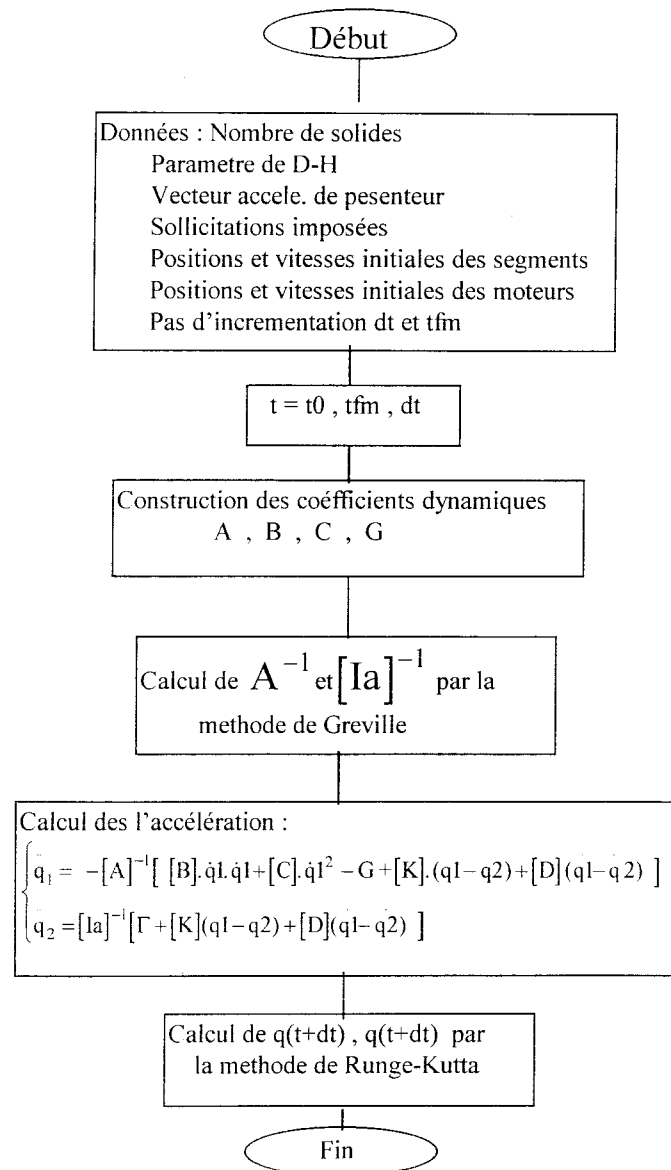
$$\frac{d}{dt}[y] = f(t, [y])$$

sachant que $[y(t_0)] = [y_0]$ on aura le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[y] = f(t, [y]) \\ [y] = [y_0] \quad \text{pour } t = t_0 \end{cases}$$

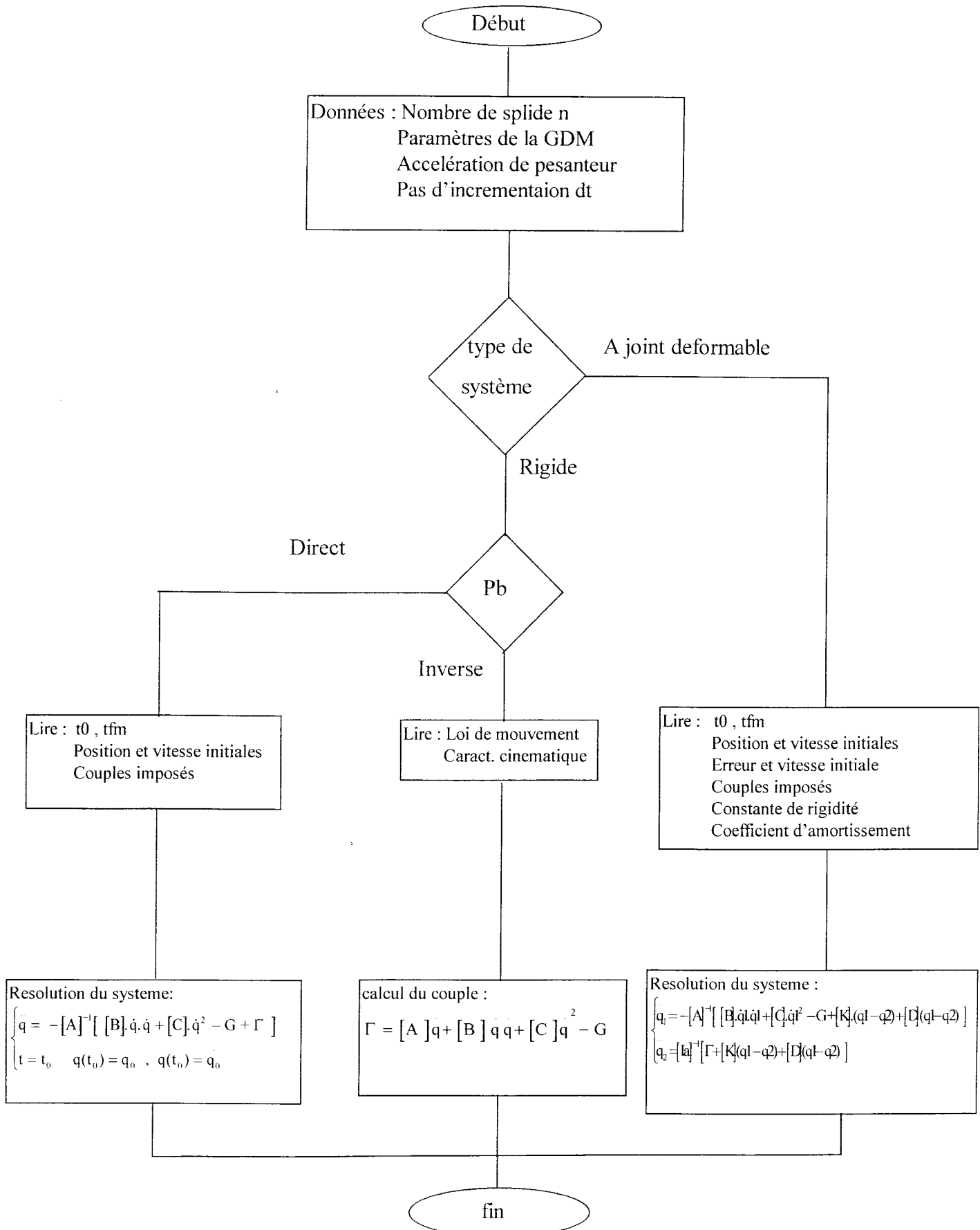
Ce système d'équations se prête directement à la résolution avec la méthode de Runge-Kutta .

L'organigramme suivant présente les différentes étapes de la construction du modèle dynamique des systèmes polyarticulés à joints flexibles ainsi que la résolution du modèle direct



5-PRESENTATION DE L'ORGANIGRAMME GENERAL

Le programme que nous avons élaboré est écrit en Langage Fortran , il tourne sur PC et compatibles , son organigramme général se présente comme suit :



6-CONCLUSION :

Nous avons établi dans ce chapitre une procédure d'obtention du modèle dynamique pour les structures polyarticulées à joints déformables.

La mise en équation est basée sur le formalisme de Lagrange associé à la méthode de Uicker

Nous avons montré qu'un tel modèle est représenté par $2n$ équations différentielles couplées et non linéaires . Notre souci a été aussi de résoudre ce système complexe pour pouvoir exploiter les résultats d'une telle étude ; pour cela la méthode de Runge-Kutta a été utilisée .

Dans le chapitre suivant nous allons présenter quelques applications sur des cas simples pour pouvoir valider et analyser les résultats obtenus par le programme mis au point dans cette étude .

CHAPITRE IV

APPLICATIONS

Application 1 : Mécanisme à 2 degrés de liberté

Dans cette première application nous allons donner un modèle détaillé d'un système simple à une articulation en considérant l'hypothèse de la flexibilité du joint , et cela dans le but de comparer et de valider les résultats de notre programme de simulation en première partie , et d'étudier ensuite l'influence de la variation du coefficient de rigidité sur le comportement du système , pour cela nous nous référons à la fig. IV-1 pour la définition des différentes variables

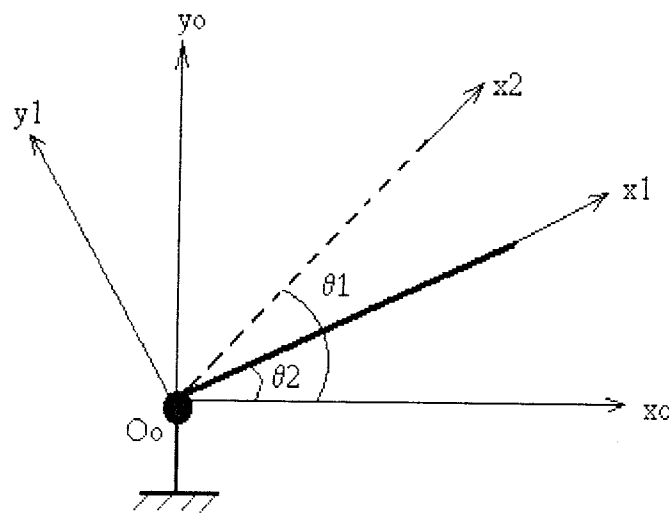


Fig. IV-1 Mécanisme à une barre (deux degrés de liberté)

Nous considérons que nous avons un actionneur constitué d'un moteur d'inertie J_M , connecté à travers un réducteur d'inertie négligeable à un segment considéré comme une barre uniforme de longueur L et de masse m . La flexibilité du joint est modélisée par un ressort de torsion linéaire avec une constante de rigidité K

Les caractéristiques géométriques sont comme suit :

La longueur de la barre $L=3$ m , sa masse $m=10$ kg considérée comme uniformément répartie sur sa longueur .

Le coefficient du frottement visqueux au niveau du palier du segment est $B_L = 36$ Nm/rd.s⁻¹

Pour le moto-reducteur , il est constitué par un moteur électrique caractérisé par une inertie

$J_M = 0.04 \text{ kg.m}^2$ et un coefficient du frottement visqueux de $B_M = 0.015 \text{ Nm/rd.s}^{-1}$, le réducteur est du type Harmonic-Drive d'inertie négligeable et permettant un rapport de réduction égale à N tel que $N = 100$ en un seul étage. L'intensité du champ de pesanteur $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

En utilisant le formalisme de Lagrange, le mouvement d'un tel mécanisme est décrit par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{3} m L^2 \ddot{\theta}_L + B_L \dot{\theta}_L + mg \frac{L}{2} \sin \theta_L + k(\theta_L - \theta_M) = 0 \\ J_M \ddot{\theta}_M + B_M \dot{\theta}_M + k(\theta_L - \theta_M) = \Gamma_M \end{cases} \quad (4.1)$$

Sachant que les expressions des énergies cinétique, potentielle et de dissipation sont comme suit :

$$E_c = \frac{1}{6} m L^2 \dot{\theta}_L^2 + \frac{1}{2} J_M \dot{\theta}_M^2, \quad E_p = mg \frac{L}{2} \cos \theta_L + \frac{1}{2} k(\theta_L - \theta_M)^2$$

$$E_D = \frac{1}{2} B_L \dot{\theta}_L^2 + \frac{1}{2} B_M \dot{\theta}_M^2$$

En première partie nous considérons le système comme étant rigide, nous introduisons la variable angulaire $\theta(t)$ comme une fonction sinusoïdale de la forme : $\theta(t) = \sin 8t$ tracée sur la fig. IV-2, pour cela l'actionneur doit délivrer un couple Γ porté sur la fig. IV-3.

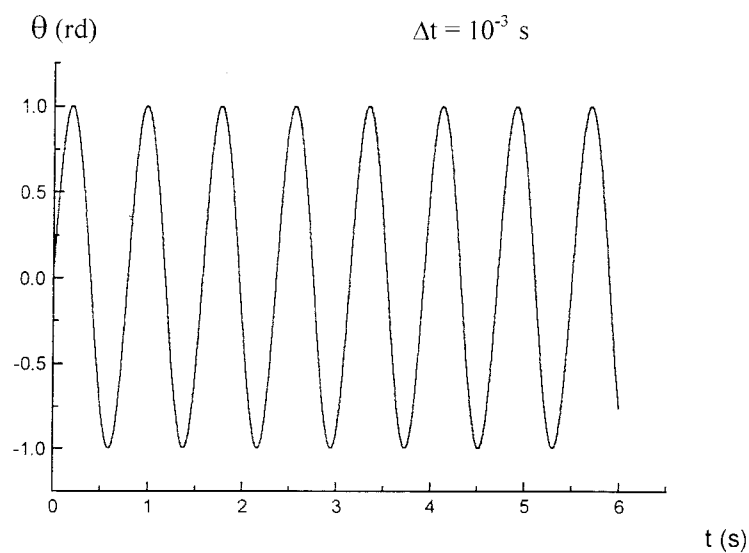


fig. IV-2 Position angulaire $\theta(t)$ donnée à la barre

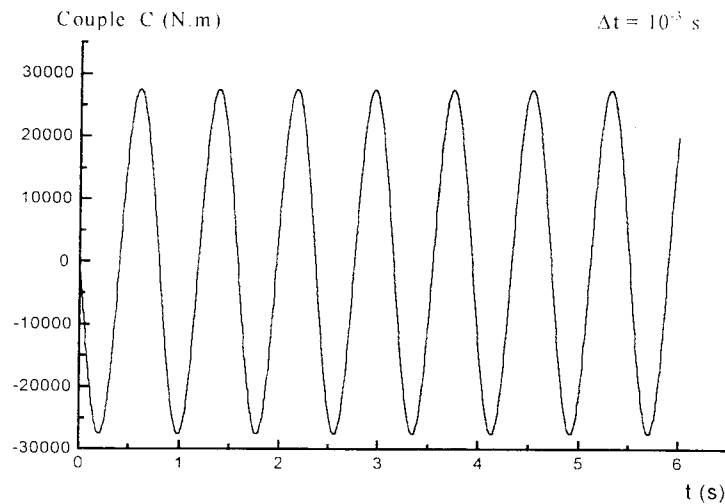


fig. IV-3 Couple Γ délivré par l'actionneur

En deuxième partie , nous considérons le système à joint flexible avec un coefficient de rigidité $K=10000$ N.m /rd , nous introduisons comme données le couple Γ de la fig. IV-3 et nous traçons sur le même graphe la position délivrée par l'actionneur et la position prise réellement par le segment fig. IV-4 , et sur la fig. IV-5 nous traçons l'écart entre ces deux positions . Nous remarquons clairement le comportement d'un tel système , et l'écart important entre ces deux positions .

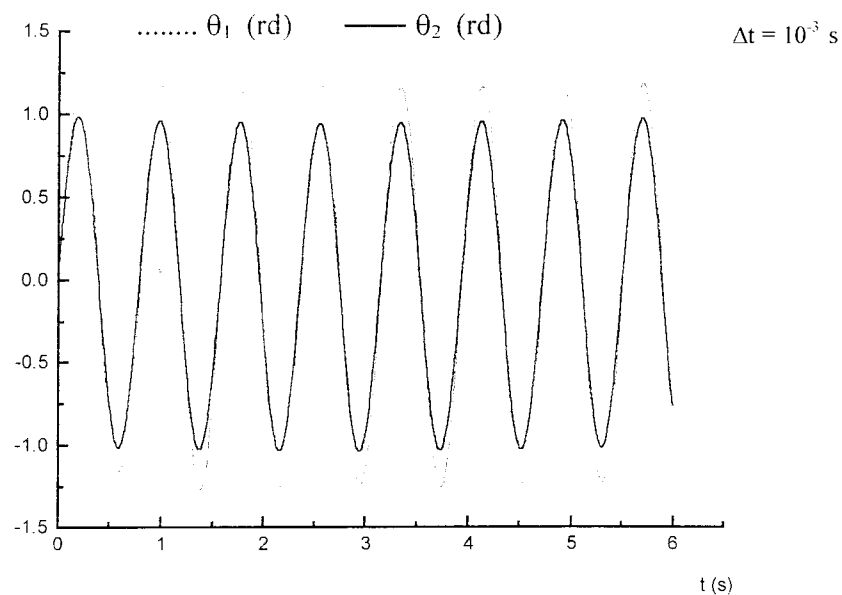


fig. IV-4 θ_1 position délivrée , θ_2 position prise pour $K=10000$ N.m /rd

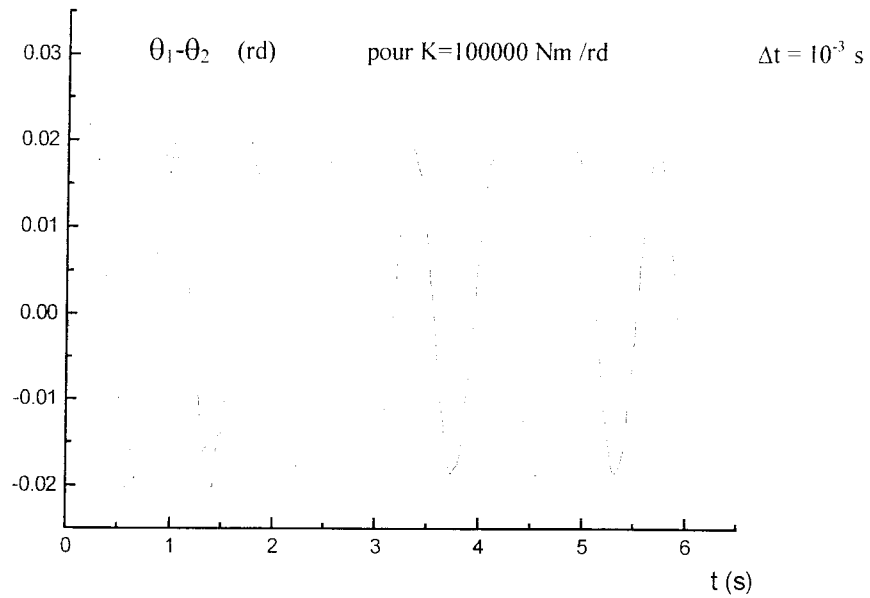


fig. IV-7 Erreur $\theta_1 - \theta_2$ pour $K=100000$ Nm /rd

En conclusion , cette première partie nous a permis de voir l'influence du coefficient de rigidité sur le comportement de ce système , on remarque que plus on augmente la rigidité K du joint on s'approche de plus en plus du cas rigide .

De plus cette étude nous a permis de comparer nos résultats avec ceux de la référence [54] et nous pouvons dire que les résultats obtenus par notre programme sont conformes aux résultats donnés par [54] .

Application 2 : Mécanisme à 4 degrés de liberté

Dans cette deuxième simulation nous allons considérer un mécanisme constitué de deux barres présenté fig. IV-8 , les caractéristiques mécaniques et géométriques sont données par les grandeurs suivantes :

Les longueurs des barres sont $L_1 = L_2 = 1\text{m}$

Les masses : $m_1 = m_2 = 5\text{ kg}$

Les inertie des actionneurs $I_{r1} = I_{r2} = 0.333 \cdot 10^{-3}\text{ kg.m}^2$

Les rapport de transmission $N_1 = N_2 = 100$

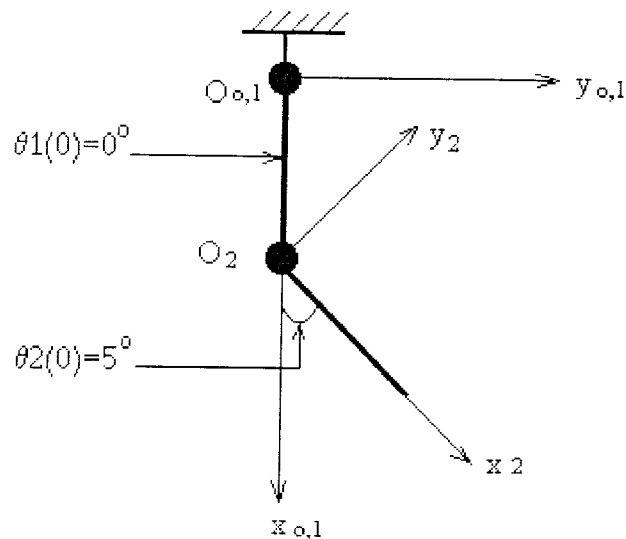
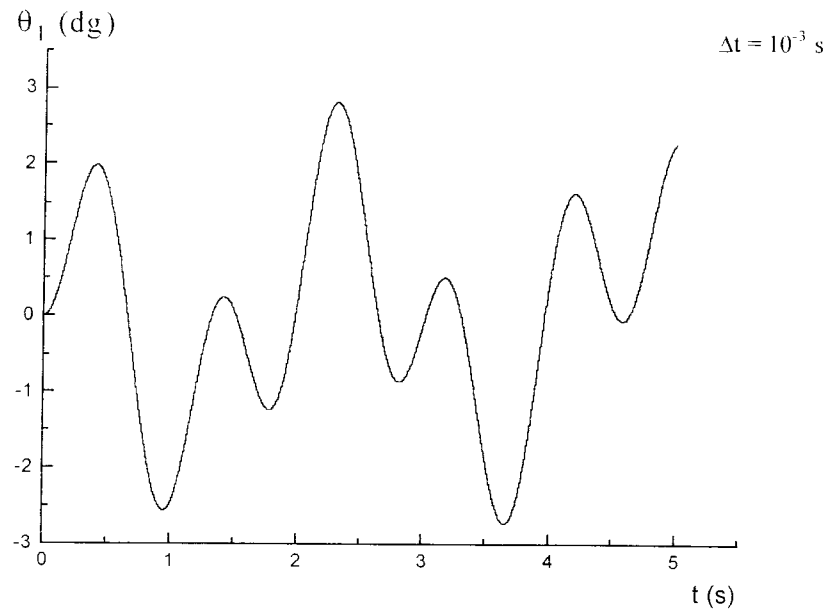
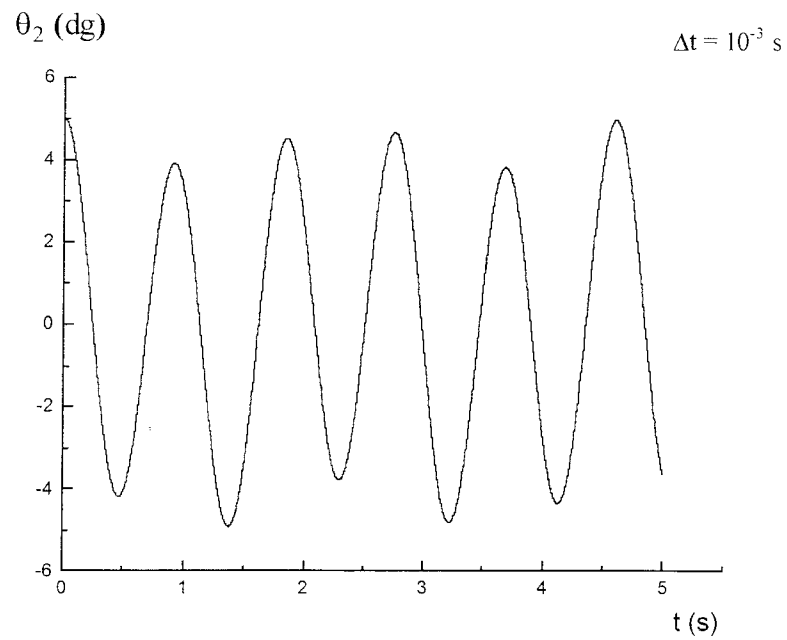


fig. IV-8 Configuration du mécanisme à $t=0\text{ s}$

Etude 1 :

Le mécanisme se déplace librement et sans frottement sous l'effet du champ de pesanteur. L'état d'équilibre est défini par $\theta_1 = \theta_2 = 0^\circ$.

Nous déplaçons le système à une position $\theta_1 = 0^\circ$ et $\theta_2 = 5^\circ$ et nous effectuons un "lâché" sans vitesse initiale en considérant la structure parfaitement rigide, sur les fig. IV-9 et fig. IV-10 nous avons donné l'évolution des déplacements angulaires θ_1 et θ_2 dans le temps. ces résultats ont été comparés avec ceux de la référence[13].

fig. IV-9 θ_1 calculé dans le cas rigidefig. IV-10 θ_2 calculé dans le cas rigide

Par la suite nous considérons la structure à joints flexibles avec une rigidité $K_1=K_2=200$ Nm / rd et nous effectuons le même "lâché" ; la réponse à une telle sollicitation est donnée par les fig. IV-9 et fig. IV-10 .

Pour mieux visualiser ce comportement , nous avons déterminé l'écart entre la position délivrée par l'actionneur et la position prise par le segment , le résultat est porté sur les fig. IV-12 et fig. IV-14

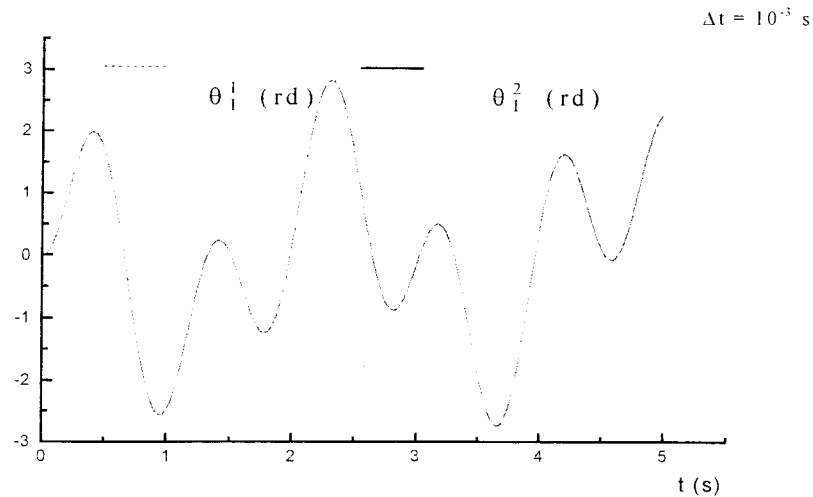


fig. IV-11 θ_1^1 et θ_1^2 pour $K_1=K_2=200$ Nm / rd

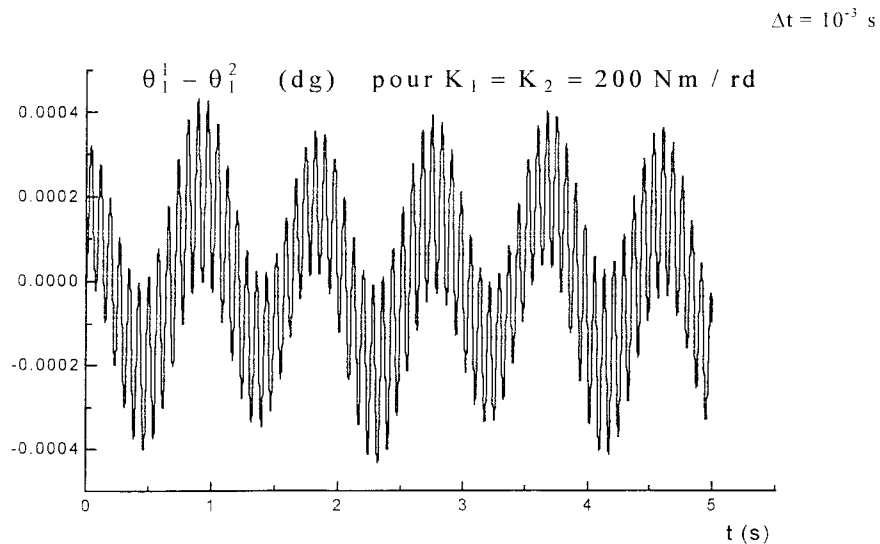


fig. IV-12 $\theta_1^1 - \theta_1^2$ (dg) pour $K_1 = K_2 = 200$ Nm / rd

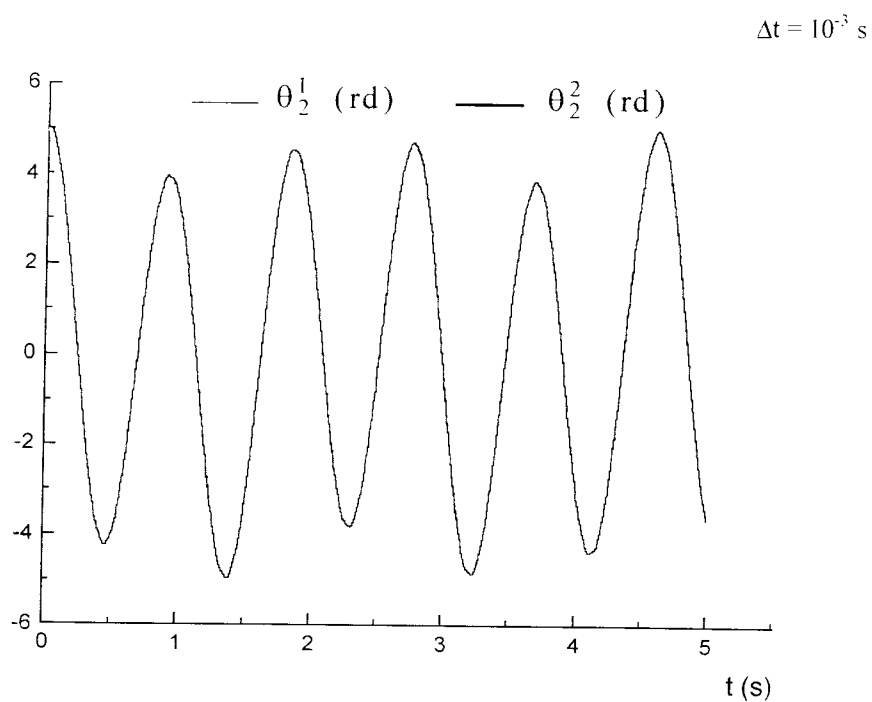


fig. IV-13 θ_2^1 et θ_2^2 pour $K_1=K_2=200$ Nm / rd

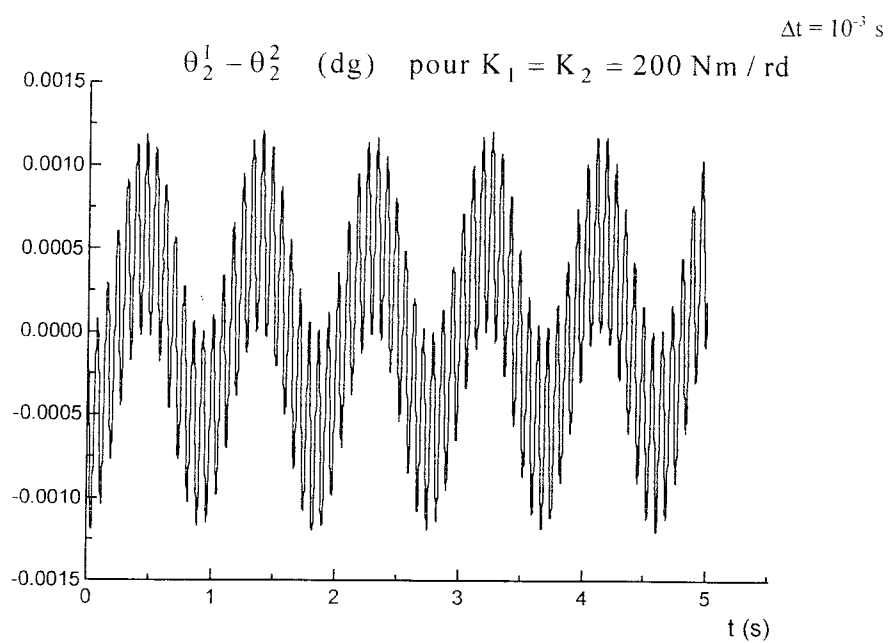


fig. IV-14 $\theta_2^1 - \theta_2^2$ (dg) pour $K_1 = K_2 = 200$ Nm / rd

Etude 2 :

Dans ce qui suit nous allons prendre le même exemple de l'application 2 avec les mêmes caractéristique et nous augmentons les inerties des actionneurs ainsi que les rapports de réductions , tels que : $I_{r1} = I_{r2} = 0.3 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$ et $N_1 = N_2 = 160$

On déplace le système à une position $\theta_1 = 0^0$ et $\theta_2 = 7^0$ et on le lâche sans appliquer aucun couple aux niveaux des articulations , nous observons les déplacement angulaires sur les fig. II-15 , fig. II-16 pour le cas rigide .

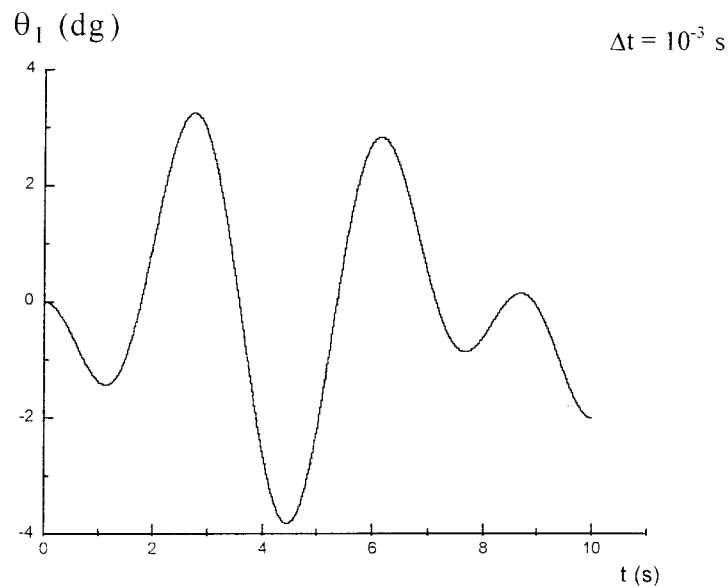


fig. IV-15 θ_1 calculé dans le cas rigide

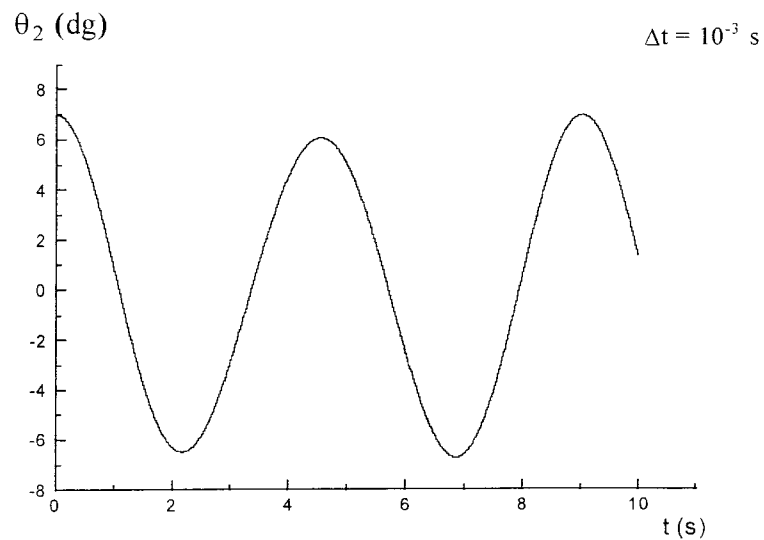


fig. IV-16 θ_2 calculé dans le cas rigide

Pour le cas à joint flexible et une rigidité $K_1 = K_2 = 1000 \text{ Nm / rd}$, nous traçons les différentes positions angulaires correspondantes et l'écart du à la déformation des joints.

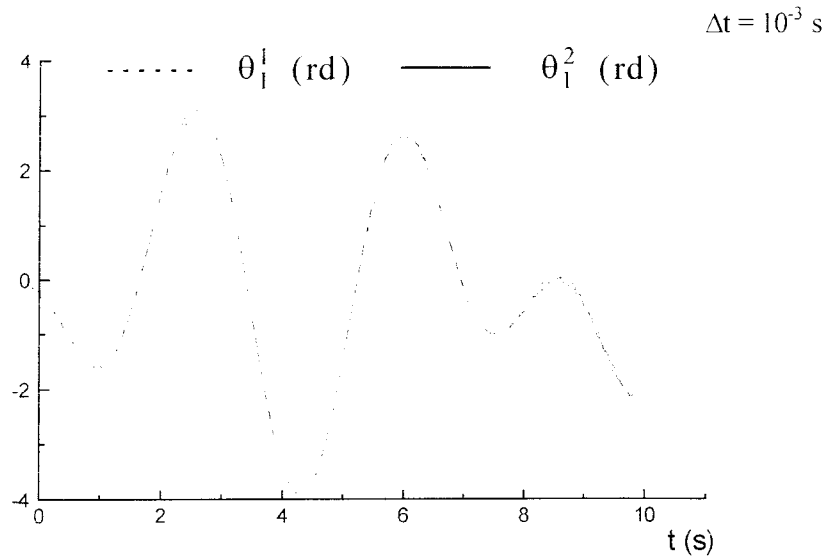


fig. IV-17 θ_1^1 et θ_1^2 pour $K_1=K_2=1000 \text{ Nm / rd}$

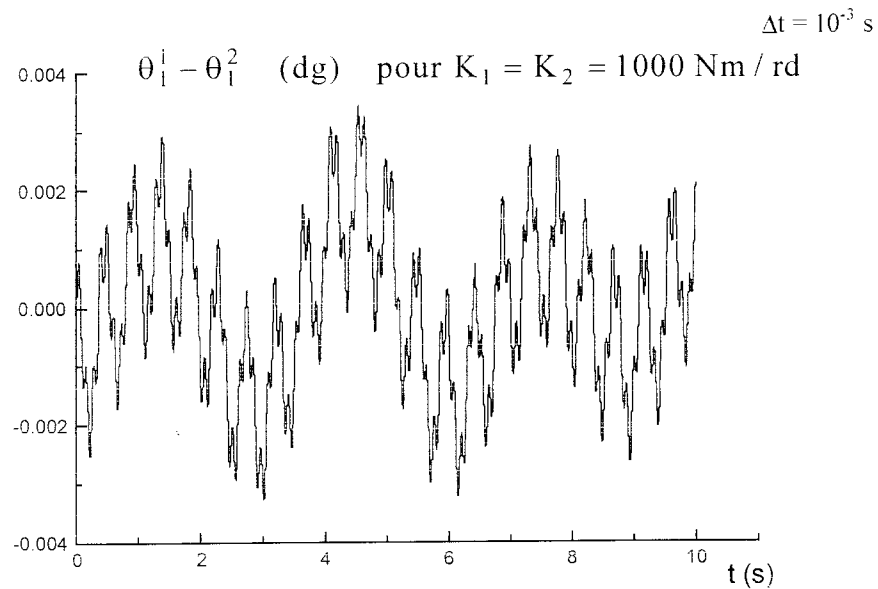


fig. IV-18 $\theta_1^1 - \theta_1^2$ (dg) pour $K_1 = K_2 = 200 \text{ Nm / rd}$

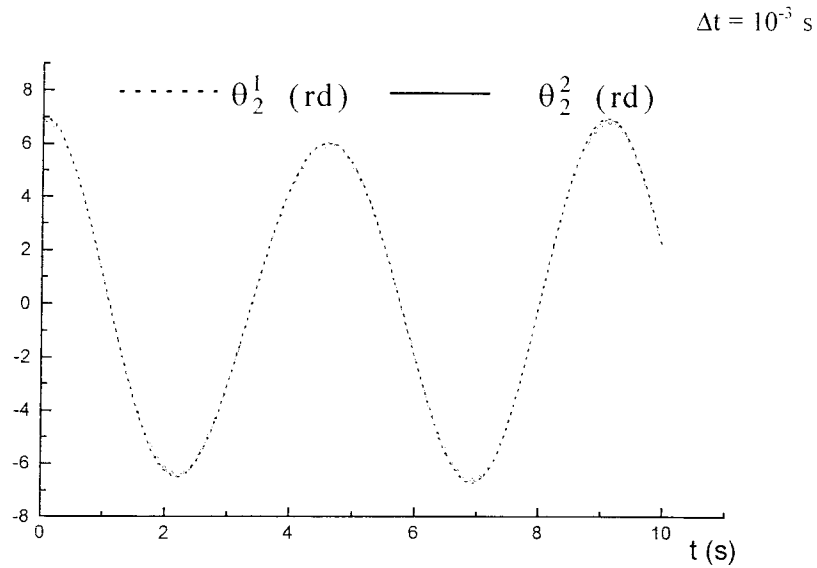


fig. IV-19 θ_2^1 et θ_2^2 pour $K_1=K_2=1000 \text{ Nm / rd}$

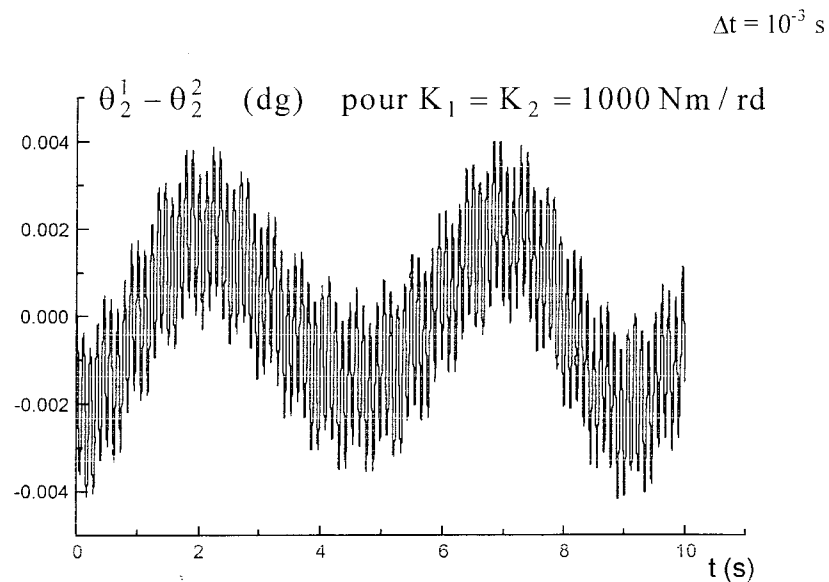


fig. IV-20 $\theta_2^1 - \theta_2^2 \text{ (dg)}$ pour $K_1 = K_2 = 1000 \text{ Nm / rd}$

Nous remarquons dans ce cas que l'effet de la flexibilité des joints se traduit par le comportement vibratoire présenté clairement sur le fig. II-17 et fig. II-19, l'écart est plus important entre la position délivrée par l'actionneur et la position prise par le segment pour chaque chaînon.

Application 3

La simulation suivante sera faite sur un mécanisme spatial d'un robot PUMA à 3 ddl . Cette application comporte deux parties : la première aura pour but de mettre en évidence l'intérêt de l'équilibrage statique d'un mécanisme et dans la deuxième partie le principe d'équilibrage sera utilisé dans l'étude d'un exemple d'un robot expérimental développé au laboratoire LMS de l'ENSAM de Paris .

Partie 1

l'analyse dynamique des mouvements des robots met en évidence le rôle prépondérant de la pesanteur .

Le bilan des énergies à mettre en oeuvre pour animer ces mécanismes montre que l'effort utile est souvent nettement inférieur à celui qui est nécessaire pour vaincre l'effet de la gravité .

Par ailleurs sur le plan algorithmique , les performances de la commande dynamique se trouvent limitées par le temps de calcul supplémentaire que nécessite la prise en compte de l'effet de gravité .

A l'arrêt le porteur doit conserver une posture donnée ce qui implique que les moteurs associés aux réducteurs réversibles doivent être toujours alimentés pour s'opposer aux couples dus à la pesanteur, cet état de fonctionnement est peu recommandable pour des catégories de moteurs et de réducteurs exemple : moteurs à courant continu et réducteurs réversibles .

Donc il est très utile de doter ces robots d'un système d'équilibrage statique engendrant des efforts qui compensent les effets de pesanteur . On distingue plusieurs techniques d'équilibrages tel que l'équilibrage par contre poids , par ressort, par parallélogramme etc .

Afin de montrer l'intérêt de l'équilibrage statique nous présentons l'exemple suivant :

Cet exemple que nous allons traiter est tiré de la référence [14] , c'est un système composé de 3ddl , les segments sont assimilés à des tiges , les articulations sont de type rotoïde fig. IV-21 .

Les caractéristiques géométriques massiques et cinématiques du système sont données par les tableaux IV-1 et IV-2 , les résultats ont été comparés avec ceux de la référence [14] .

Cas1 Equilibrage par contre poids

la fig. III-2 représente le schéma du mécanisme équilibré par contre poids , ses caractéristique géométriques et massiques sont données par le tableau III-3 .

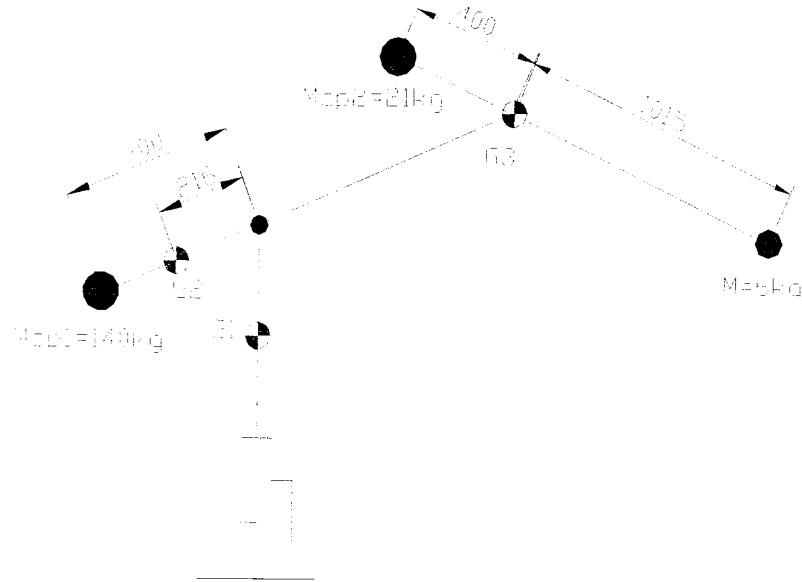


fig. IV-22 . Principe d'équilibrage statique par contre poids

Paramètre	corps 1	corps 2	corps 3
m_i (kg)	-	173	72.2
I_{xi} (kg.m)	-	9.9	15.6
I_{yi} (kg.m)	-	10.2	15.8
I_{zi} (kg.m)	4.36	1.14	0.5

Tableau IV-3 . Caractéristiques géométriques et massiques du système équilibré.

(masses et inerties des actionneurs et contre poids incluses)

On trace les différents couples aux articulations pour le mécanisme avec et sans équilibrage par contre poids :

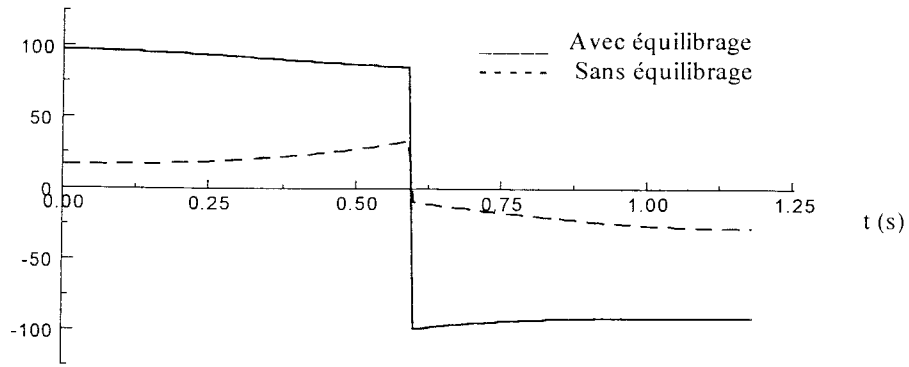


fig. IV-23 . Tracé du couple C1 avec et sans équilibrage par contre poids

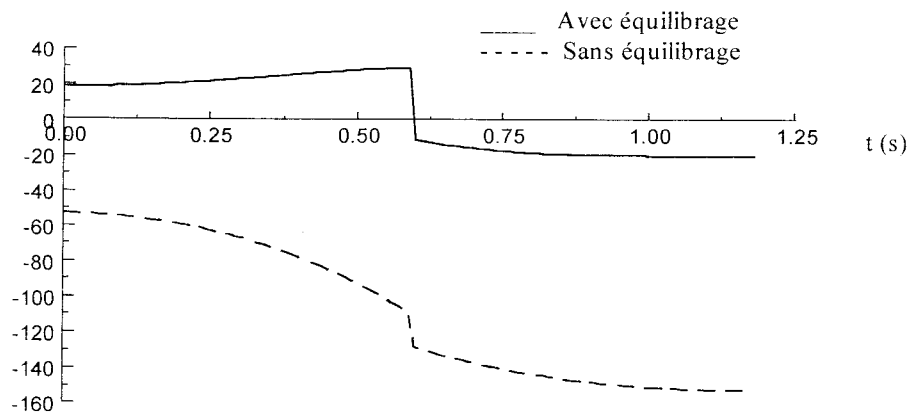


fig. IV-24 . Tracé du couple C2 avec et sans équilibrage par contre poids

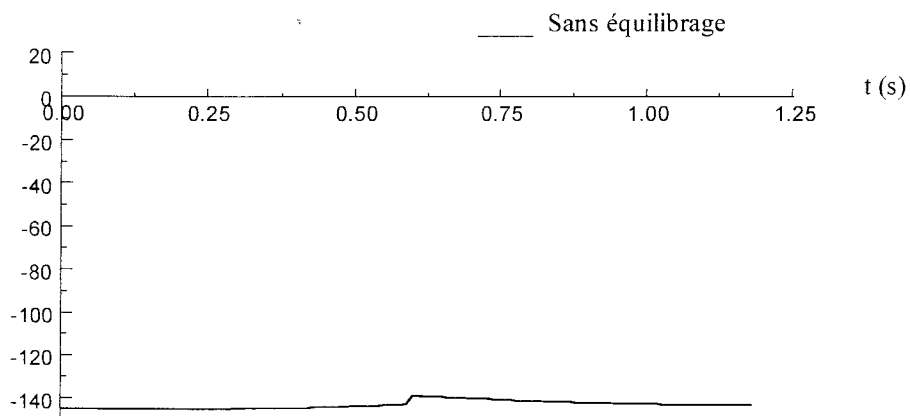


fig. IV-25 . Tracé du couple C3 sans équilibrage .

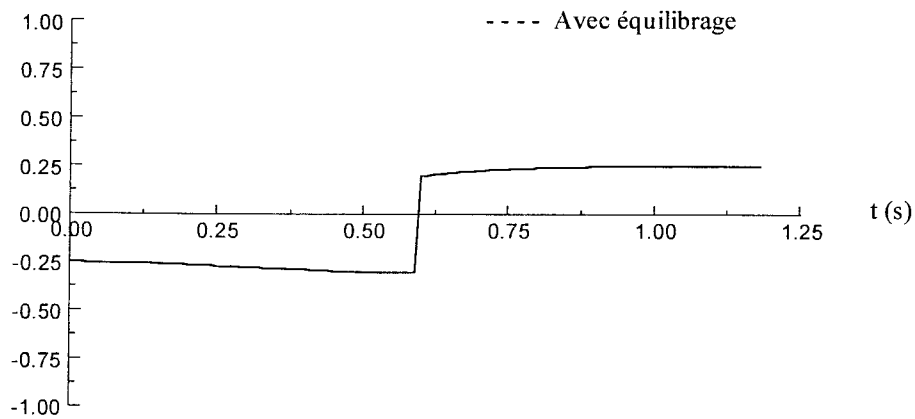


fig. IV-26 . Tracé du couple C3 avec équilibrage par contre poids

On remarque que :

- le couple C1 de la première articulation augmente si on ajoute le système d'équilibrage par contre poids .
- le couple C2 a beaucoup diminué pour le mécanisme équilibré.
- la réduction du couple C3 est significative , le troisième corps est totalement équilibré par contre poids .

Cas2 Equilibrage par redistribution de masses

Dans ce cas les corps du mécanisme sont construits à section variable . Le schéma du mécanisme est présenté par la fig. IV-27

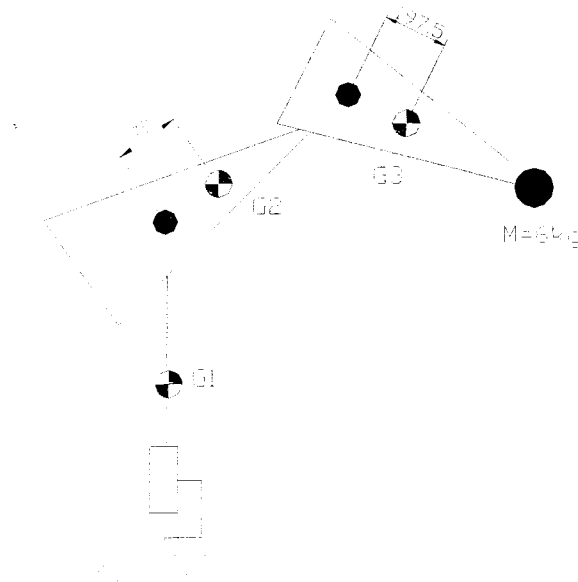


fig. IV-27 . Schéma cinématique du mécanisme équilibré par redistribution des masses .

Le tableau IV-3 présente ses différentes caractéristiques géométriques et massiques.

Paramètre	corps 1	corps 2	corps 3
m_i (kg)	-	33	36.2
I_{xi} (kg.m)	-	5	6.5
I_{yi} (kg.m)	-	5	6.5
I_{zi} (kg.m)	4.36	0.8	0.2

Tableau IV-3 . (masses et inerties des actionneurs et de la charge incluses)

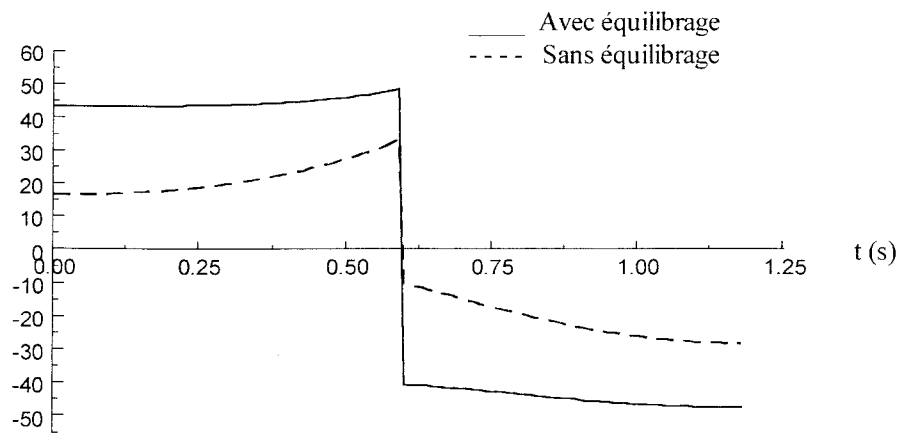


fig. IV-28. Tracé du couple C1 avec et sans équilibrage par redistribution de masses .

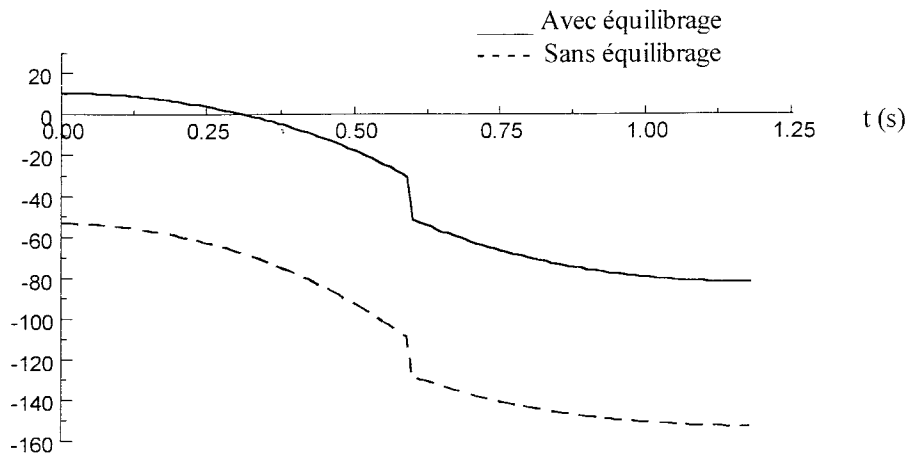


fig. IV-29. Tracé du couple C2 avec et sans équilibrage par redistribution de masses .

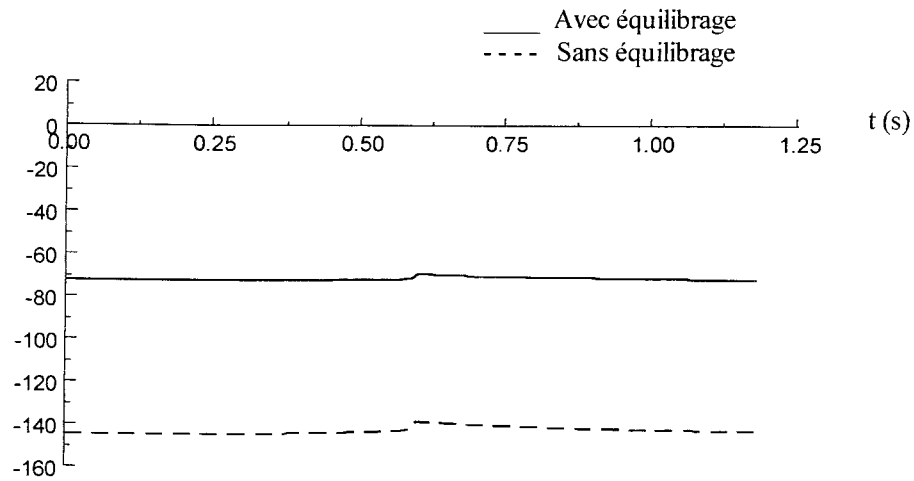


fig. IV-30. Tracé du couple C3 avec et sans équilibrage par redistribution de masses .

Les fig. IV-28 , IV-29 , IV-3 présentent les différents couples aux niveaux des articulations . Une diminution de tous les couples est observée , l'effet indésirable sur le couple C1 décrit dans l'équilibrage par contre poids n'apparaît plus . Si on arrive à diminuer les distances O_1G_1 et O_2G_2 les couples C1 et C2 deviennent de plus en plus faibles .

Cas3 Equilibrage par ressorts

L'effet de la gravité est éliminé en utilisant des ressorts ; pour cela plusieurs solutions existent. La fig. IV-31 montre le schéma d'une solution développée dans la référence [14] et que nous allons adopter .

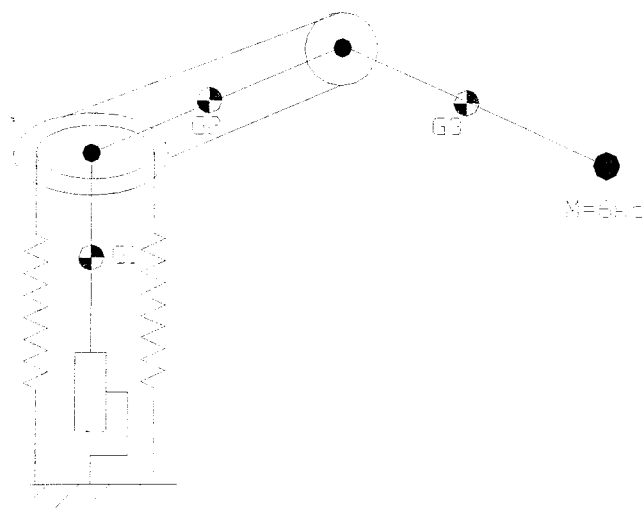


fig. IV-31 . Schéma d'équilibrage statique par ressorts .

Dans ce cas les paramètres géométriques et massiques ne changent pas , il suffit d'équilibrer le moment de gravité en utilisant des ressorts .

Le moment de gravité du ième corps peut s'écrire : $Mg_i = m_i g L_i \cos q_i$

Pour obtenir un équilibrage total il est nécessaire d'assurer l'égalité du moment de gravité Mg_i et le moment de rappel Mu_i .

$Mu_i = Fs_i h_i(q_i)$, Fs_i effort de rappel $Fs_i = k_i Lo_i(q_i)$

k_i est le coefficient de rigidité du ressort , $Lo_i(q_i)$ est la déflexion du ressort .

Donc le rôle de la came est de transformer la caractéristique linéaire de l'effort de rappel en une caractéristique non linéaire pour équilibrer la gravité .

les fig. III-11 , III-12 , III-13 montrent les couples résultants .

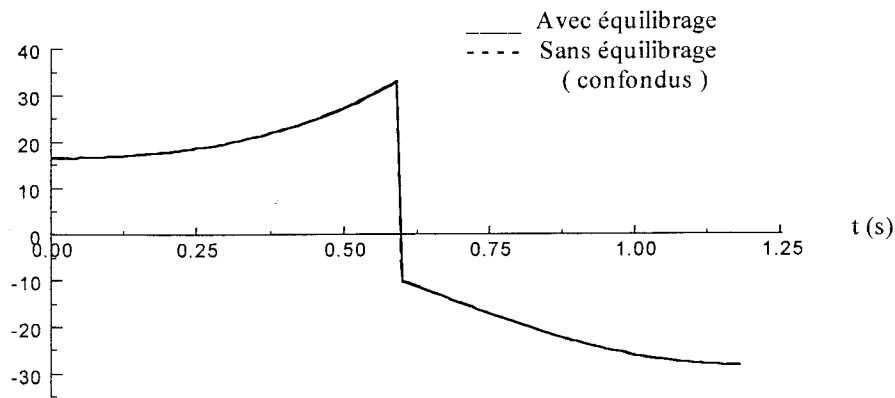


fig. III-12. Tracé du couple C1 avec et sans équilibrage par ressorts .

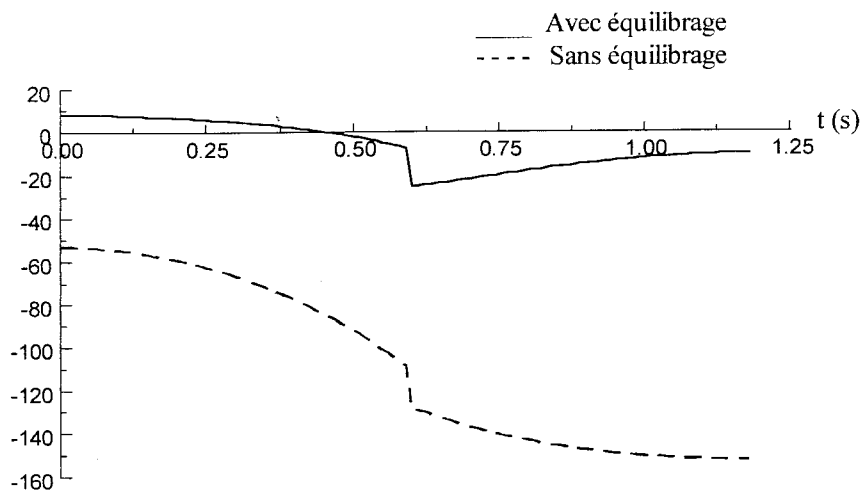


fig. III-13. Tracé du couple C2 avec et sans équilibrage par ressorts .

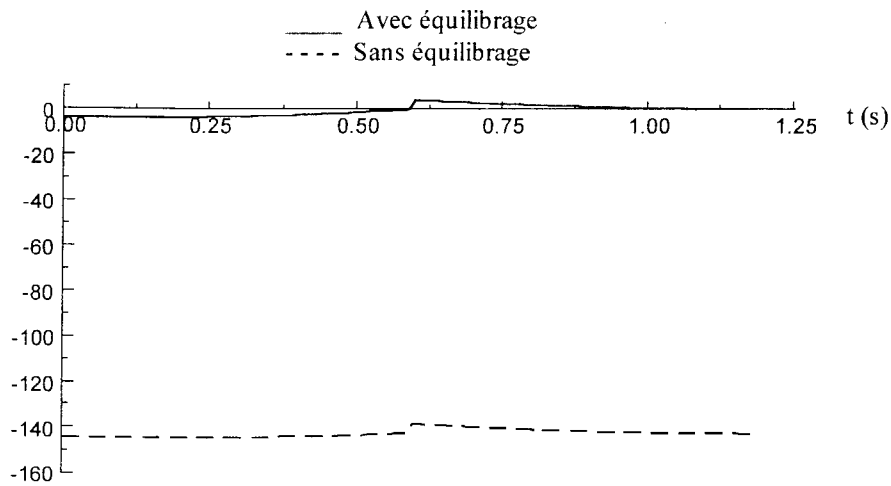


fig. III-14. Tracé du couple C_3 avec et sans équilibrage par ressorts .

On remarque qu'il y'a eu une diminution considérable des couples C_2 et C_3 du fait que le terme de gravité est prédominant dans cette exemple . Ce résultat est très intéressant mais l'équilibrage par ressort occasionne des effets indésirables telles que les vibrations des ressorts , la difficulté de la transmission du moment de rappel au joint correspondant , pour cela l'équilibrage total avec ressort est peu recommandable .

Cas4 Equilibrage par ressort et contre poids

Dans ce cas le deuxième corps est équilibré par ressort et le troisième par contre poids comme indique la fig. III-15 . Les caractéristiques du mécanisme sont données par le tableau III-4 .

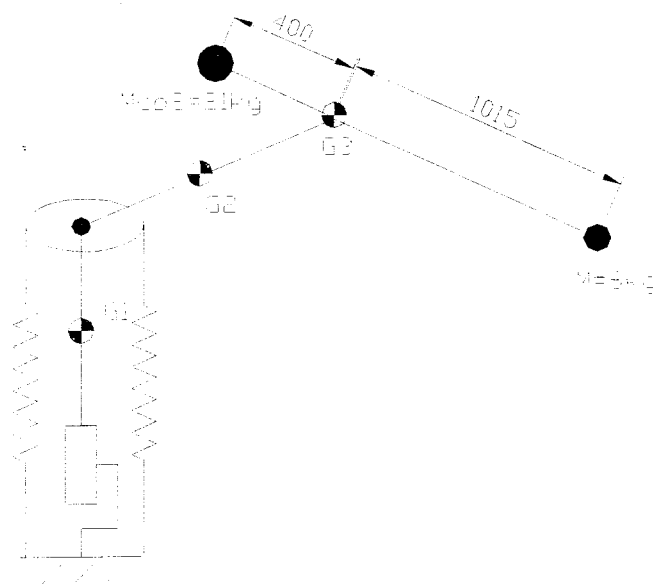


fig. III-15 . Schéma d'équilibrage par contre poids et ressort .

Paramètre	corps 1	corps 2	corps 3
m_i (kg)	-	33	72.2
I_{xi} (kg.m)	-	0.91	15.6
I_{yi} (kg.m)	-	1.46	15.8
I_{zi} (kg.m)	4.36	0.62	0.5

Tableau 4 (masses et inerties des actionneurs et de la charge incluses)

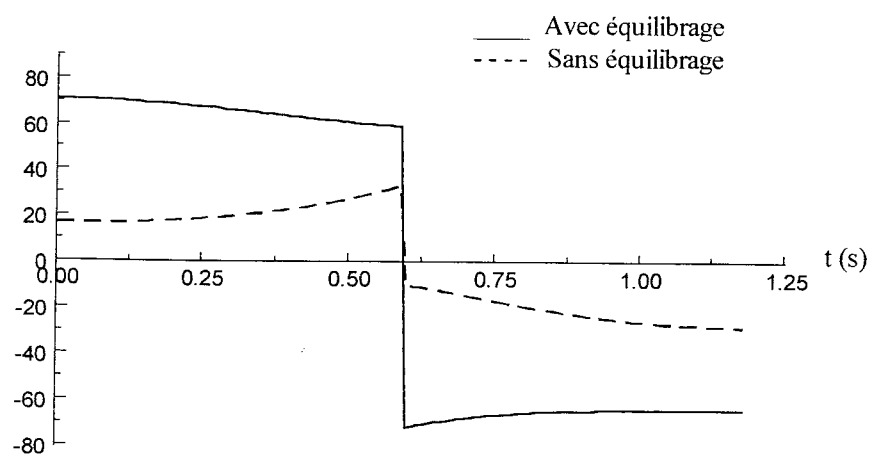


fig. III-16. Tracé du couple C1 avec et sans équilibrage par contre poids et ressort .

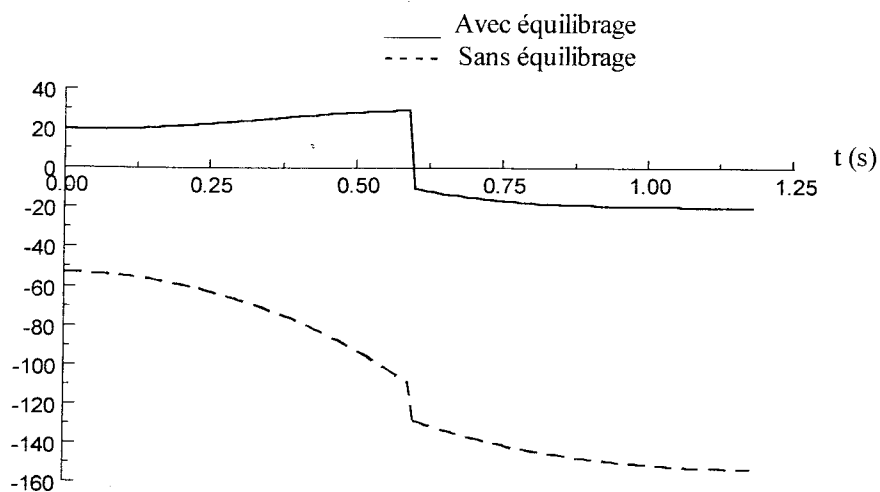


fig. III-17. Tracé du couple C2 avec et sans équilibrage par contre poids et ressort .

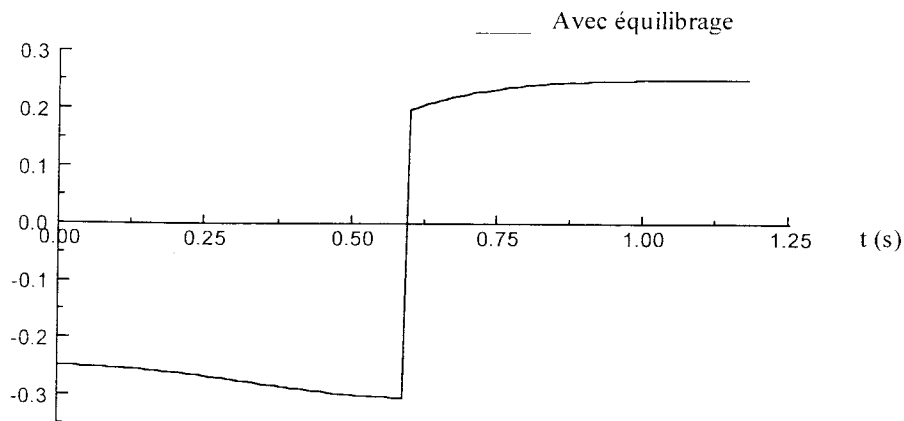


fig. III-18. Tracé du couple C3 avec équilibrage par contre poids et ressort .

Les figures III-16 , III-17 , III-18 présentent les différents couples aux articulations .

On remarque que cette combinaison des deux méthodes permet d'aboutir à une meilleure solution .

Conclusion

Dans cette première partie nous avons considéré le problème de l'équilibrage statique du mécanisme du robot PUMA et ses conséquences sur son comportement dynamique . Il a été montré par cette exemple que l'équilibrage possède des effets positifs sur les caractéristiques dynamiques du mécanisme respectivement selon la méthode d'équilibrage .

Pour les systèmes statiquement équilibrés , les équations du mouvement sont simplifiées ce qui implique la simplicité de la commande.

La combinaison d'équilibrage par contre poids et ressorts offre une meilleure amélioration du comportement dynamique . En outre l'équilibrage par ressort augmente la complexité mécanique du système en ajoutant le mécanisme de transmission du moment d'équilibrage au joint correspondant , et l'utilisation de l'équilibrage total par contre poids nécessite un actionneur de très grande puissance pour la première articulation .

En résumé , l'équilibrage statique implique un certain compromis entre le bénéfice d'un simple contrôle , la puissance nécessaire des actionneurs et la complexité du mécanisme .

Partie 2:

Dans cette deuxième partie nous effectuons une simulation sur un prototype de robot modulaire MAC allégé dont certaines parties sont réalisées en matériaux composites, développé en 1983 au sein du Laboratoire de Mécanique et Structure à l'ENSAM de Paris .

Cette exemple se compose de trois corps tubulaires en acier suffisamment épais pour être considéré comme rigide avec les accélérations et les forces en présence et de trois liaisons pivots dont le premier axe est vertical et les deux autres horizontaux . Les motorisations sont assurées par trois moteurs à courant continu couplés par le biais de réducteurs Harmonic-Drive à chacune des articulations. [3] [4] [7] [8] [12]

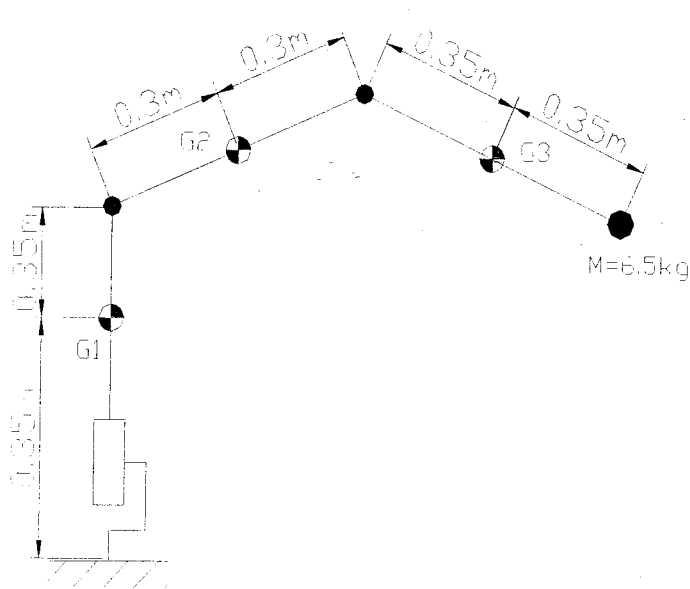


fig . III-19 . Schéma cinématique du mécanisme

Des systèmes d'équilibrage par ressorts et contre poids compensent l'action de la pesanteur sur les bras 2 et 3 pour limiter les couples moteurs nécessaires : d'abord une masse pour équilibrer le 3ème bras et ensuite un ressort pour équilibrer le 2ème bras , le schéma est donné sur la fig. III-20 .



fig . III-20 . Schéma d'équilibrage étudié

1- Caractéristiques du mécanisme :

Ce mécanisme est constitué de trois corps considérés comme étant des segments de longueurs $L_1 = 0.7$ m selon l'axe Z_1 , $L_2 = 0.6$ m selon l'axe X_2 et $L_3 = 0.7$ m selon l'axe X_3 Les masses sont considérées concentrées aux centres de gravité des corps tel que : $m_1 = 16$ kg concentrée à la position $Z_1 = 0.35$ m , $m_2 = 3.5$ kg concentrée en $X_2 = 0.3$ m et $m_3 = 3$ kg concentrée en $X_3 = 0.35$ m .

Le système comporte aussi des masses concentrées tel que : la masse $M_1 = 12$ kg est placée à la distance $X_2 = 0.7$ m , la masse $M_2 = 6.5$ kg est placée à la distance $X_3 = 0.7$ m et la masse $M_3 = 21$ kg est placée à la distance d telle que $0.188 \text{ m} \leq d \leq 0.288 \text{ m}$

1- Définition des actionneurs : Les trois liaisons sont des joints rotoides munis de moteurs électriques à courant continu et des réducteurs de type Harmonic-Drive , le tableau suivant montre leurs différentes caractéristiques

Paramètres	Actionneurs 1 et 2	Actionneur 3
- Inerties rotor [kg.m ²]	0.7900 10 ⁻³	0.1500 10 ⁻³
- Inerties arbre entrée réducteur [kg.m ²]	0.8510 10 ⁻⁴	0.5564 10 ⁻³
- Rapport de réduction [rd.s ⁻¹]	160	200
- Coefficients du frottement visqueux [Nm / rd.s ⁻¹]	0.3820 10 ⁻³	0.6684 10 ⁻⁴
- Frottement sec [Ncm]	9	3

Tableau III-5 . Caractéristiques des moteurs et réducteurs

3-Equilibrage du porteur :

- a) - Equilibrage du segment 3 par contre poids de masse 21 kg
 b) - Equilibrage des segments 2 et 3 par un ressort de caractéristiques :
- Géométriques : $0.08 \text{ m} \leq R \leq 0.115 \text{ m}$

$$\beta = 135 \text{ degrés}$$

- Raideur :
$$F(\text{daN}) = \begin{cases} 16500 x & x \leq 0.12 \text{ m} \\ 225000 x^2 - 37500 x + 3240 & x \geq 0.12 \text{ m} \end{cases}$$

4- Caractéristiques cinématiques :

Dans cette exemple on adopte une loi de mouvement trapézoïdale avec les caractéristiques suivantes :

Axe	1	2	3
Vitesse max. (rd/s)	2.5	2.5	2.5
Accel max. (rd / s ²)	8	8	8
Débattements (dgr)	(0, 180)	(0, 90)	(20, 120)

Tableau .III-6 . Caractéristiques cinématiques

Sur les fig. III- 21 , 22 et 23 on trace les différents couples appliqués aux articulations ainsi que la contribution du couple du à l'effet de gravité dans le cas du système non équilibré .

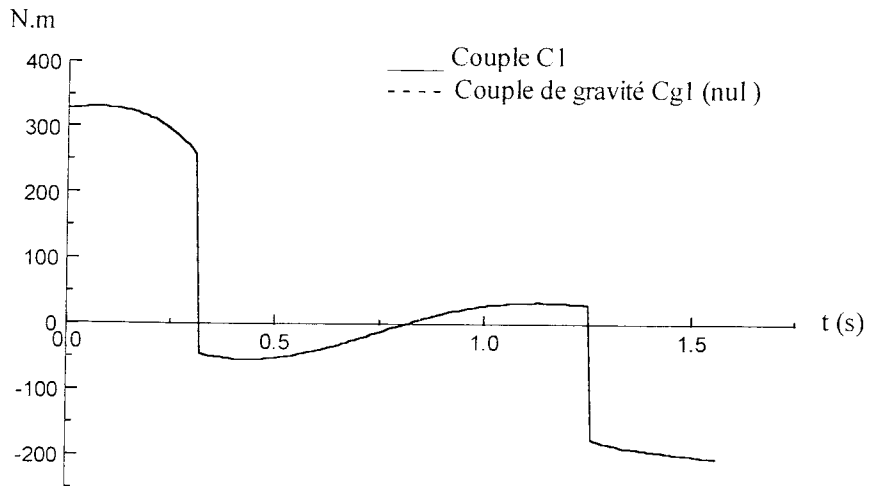


fig. III-21. Tracé du couple total C_1 et le couple de gravité C_{g1}

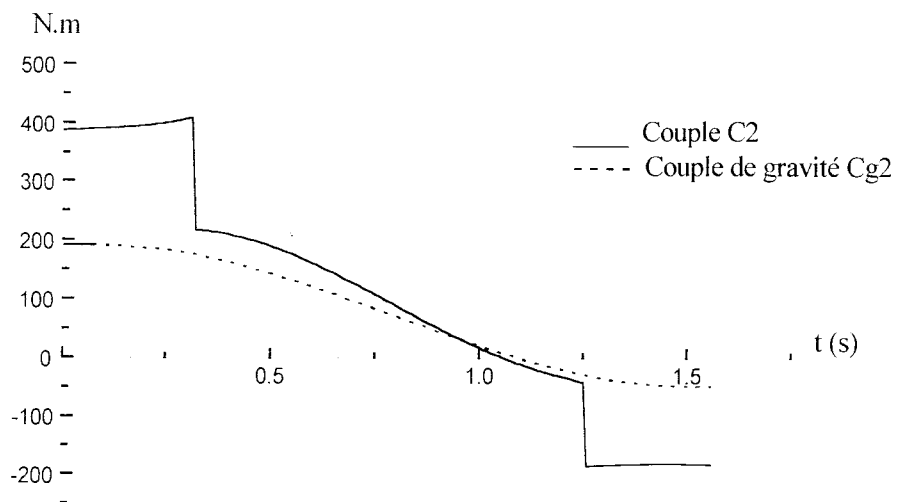


fig. III-22. Tracé du couple total C_2 et le couple de gravité C_{g2}

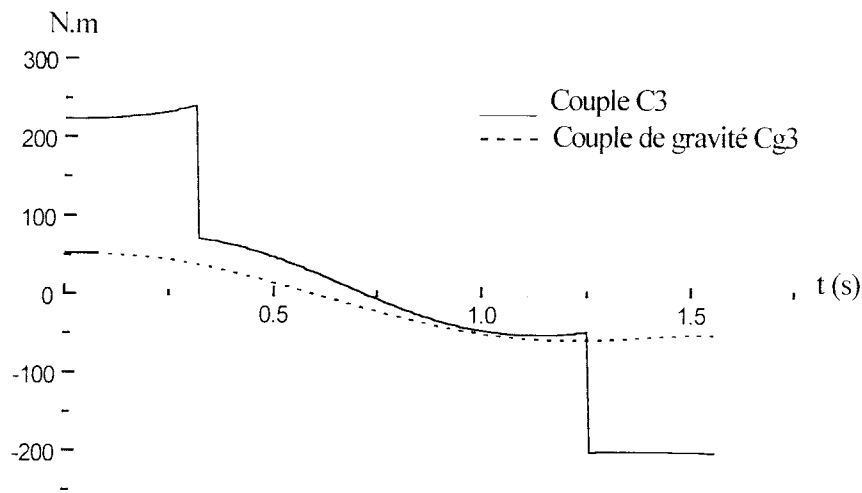


fig. III-23. Tracé du couple totale C3 et le couple de gravité Cg3

On remarque que l'effet de gravité est très important aux niveaux des articulation 2 et 3 , pour cela il est nécessaire d'utiliser un système d'équilibrage qui va compenser ces effets de gravité , le principe utilisé est détaillé sur la fig. III-20 .

Pour avoir un équilibrage parfait il faut déterminer les deux paramètres : d distance de l'emplacement du contre poids et R le rayon du bras du ressort tel que :

$$\begin{cases} 0.188 \text{ m} \leq d \leq 0.288 \text{ m} \\ 0.08 \text{ m} \leq R \leq 0.115 \text{ m} \end{cases}$$

La valeur de la distance d est donnée de telle façon à annuler le couple du à la gravité pour le

troisième bras : $\frac{\partial E_{pg}}{\partial q_3} = 0$ pour cela on a $d = 0.26667 \text{ m}$

Pour la distance R , elle est donnée de façon à minimiser la somme du couple de gravité du

bras 2 et le couple de rappel délivré par le ressort c.à.d $\frac{\partial (E_{pg} + E_{pk})}{\partial q_2} \rightarrow 0$

pour cela on a $R = 0.107 \text{ m}$. La détermination de ces deux paramètres est faite automatiquement par notre programme de simulation .

La fig. III-24 nous permet de constater la variation du couple de rappel pour quelques valeurs de R .

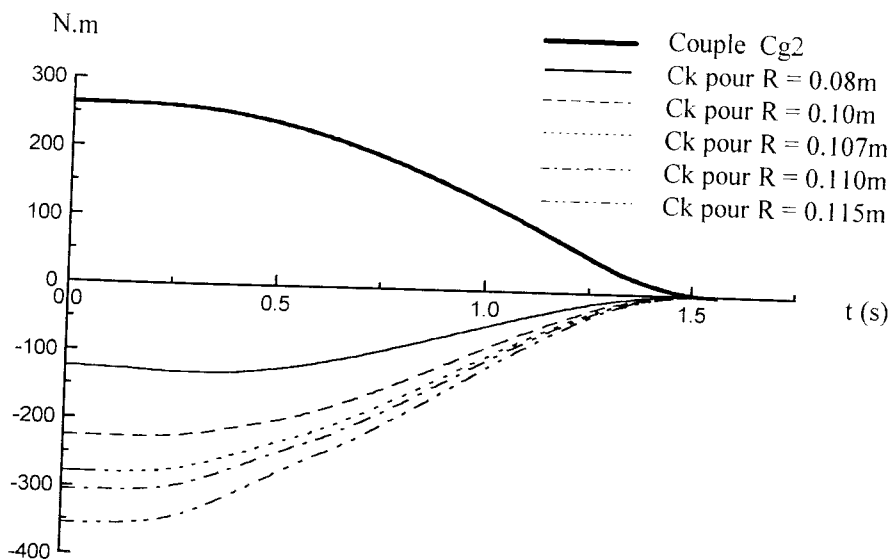


fig. III-24. Tracé du couple de gravité C_{g2} et du couple de rappels C_k

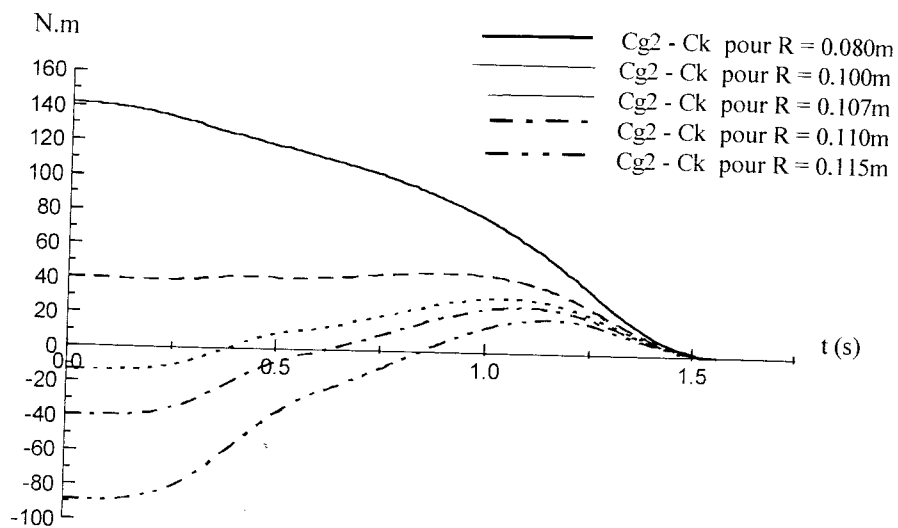


fig. III-25. Tracé de la somme du couple de gravité C_{g2} et du couple de rappel C_k

On remarque effectivement que la valeur $R=0.107m$ minimise la somme du couple de gravité et le couple de rappel donc c'est cette valeur de R qui permet un meilleur équilibrage de l'effet de gravité sur l'axe 2 du porteur .

Par la suite nous allons tracer les différents couples aux articulations après équilibrage avec la valeur de $R = 0.107 \text{ m}$ et $d = 0.26667 \text{ m}$.

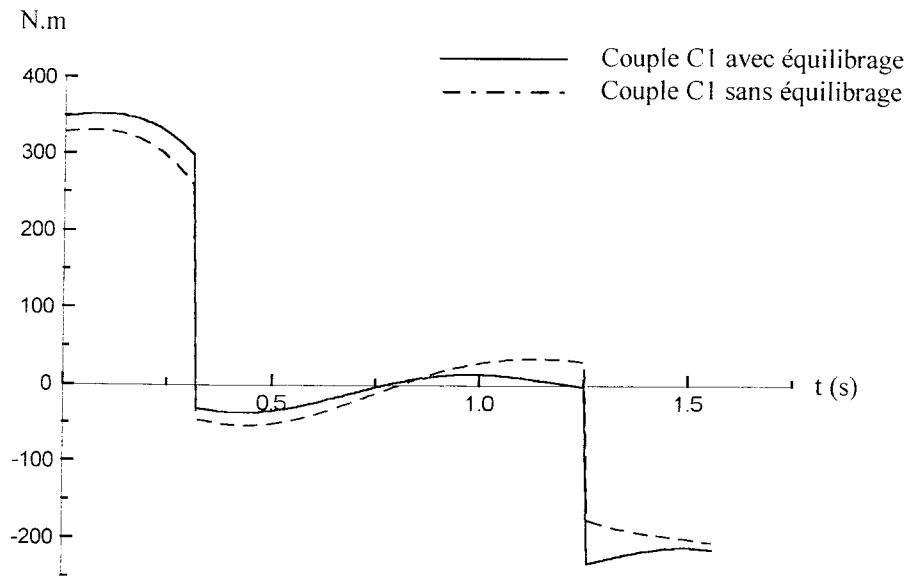


fig. III-26. Tracé du couple C1 avec et sans équilibrage

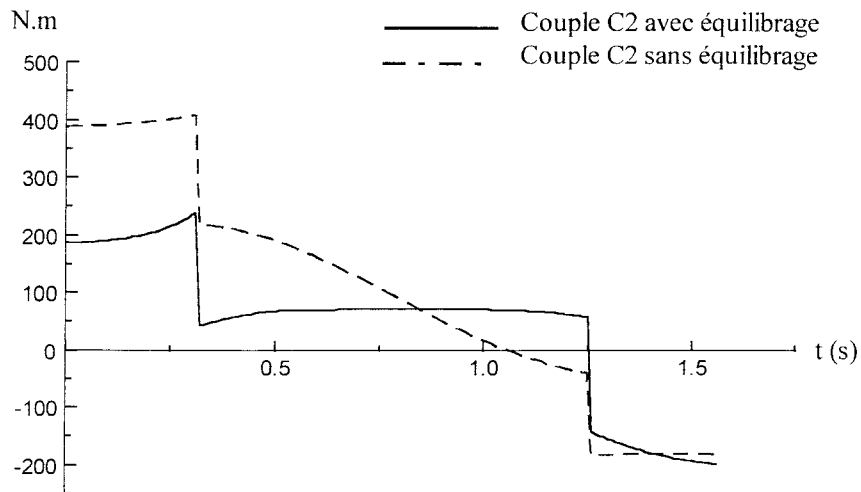


fig. III-27. Tracé du couple C2 avec et sans équilibrage

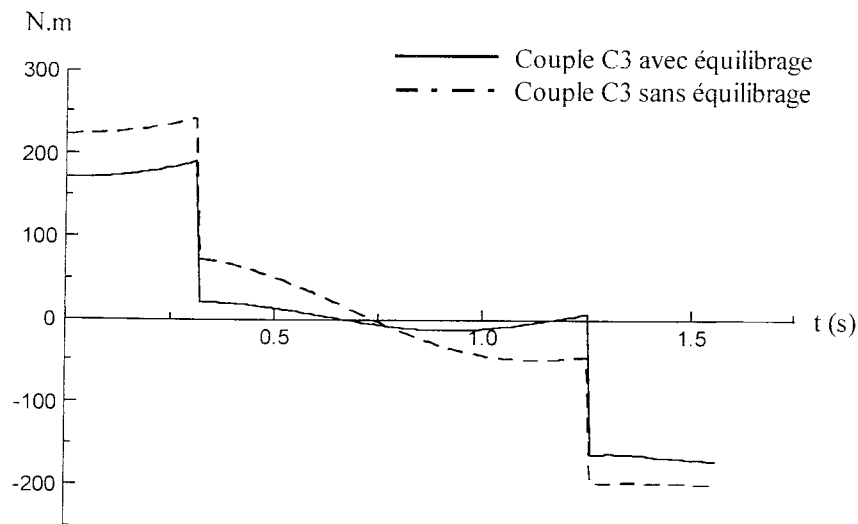


fig. III-28. Tracé du couple C3 avec et sans équilibrage

En utilisant la méthode d'équilibrage par contre poids et ressort nous remarquons que nous arrivons à éliminer pour le bras 3 et à diminuer au maximum pour le bras 2 la valeur du couple de gravité .

La construction technologique de ce système d'équilibrage est très intéressante du fait qu'il comporte les deux variables géométriques d et R : pour chaque donnée cinématique ou de charge à transporter , le système est automatiquement équilibré en déterminant les valeurs optimums de d et R qui minimisent l'effet indésirable de la gravité.

Afin d'observer le comportement du système en tenant compte de l'hypothèse de la flexibilité des joints , nous proposons d'étudier le même mécanisme avec les mêmes caractéristiques géométriques et massiques mais les joints sont considérés flexibles avec les constantes de rigidité $K_1 = K_2 = K_3 = 10000 \text{ Nm / rd}$, sur les fig.III-29 , 30 , 31 on montre le comportement dynamique d'un tel système .

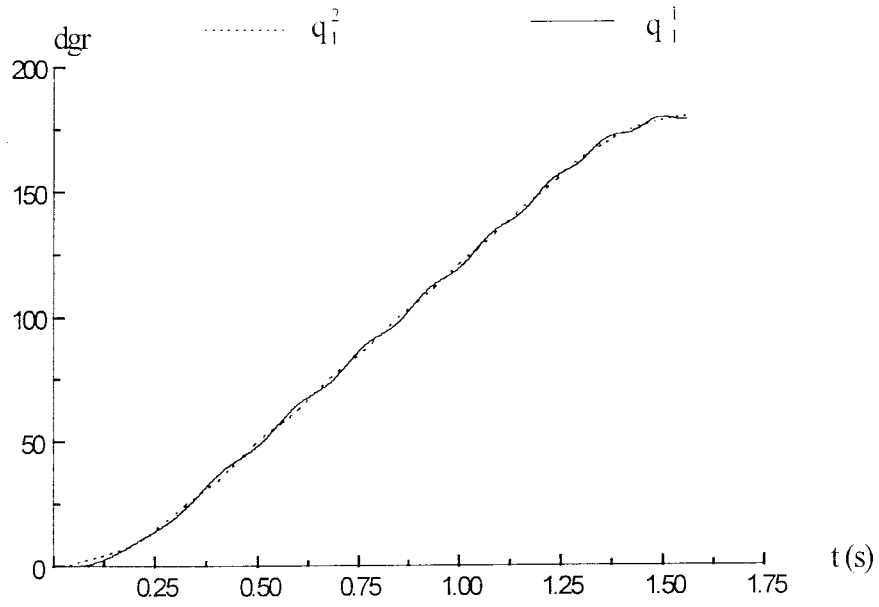


fig. III-29. Tracé de la variable angulaire délivrée par le moteur (après réducteur) q_1^1 et celle prise par segment q_1^2

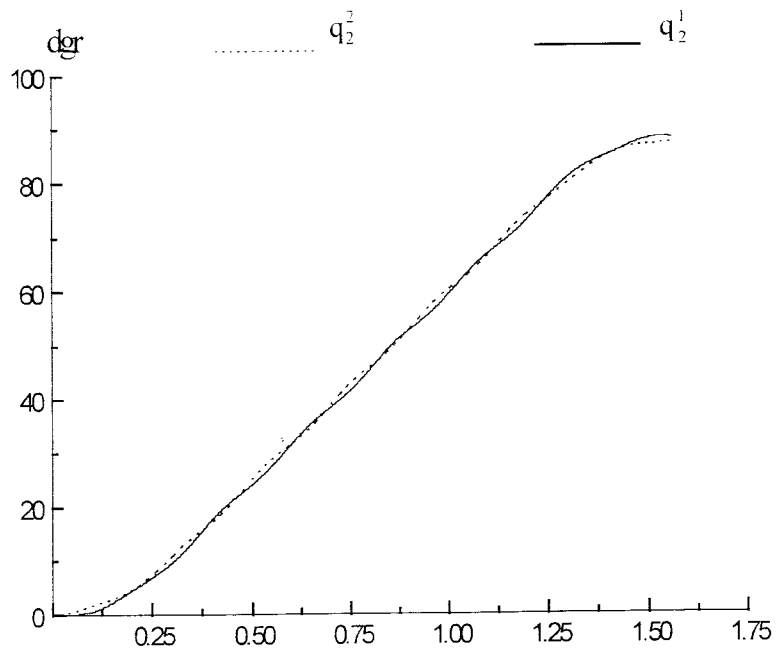


fig. III-30. Tracé de la variable angulaire q_2^1 et q_2^2

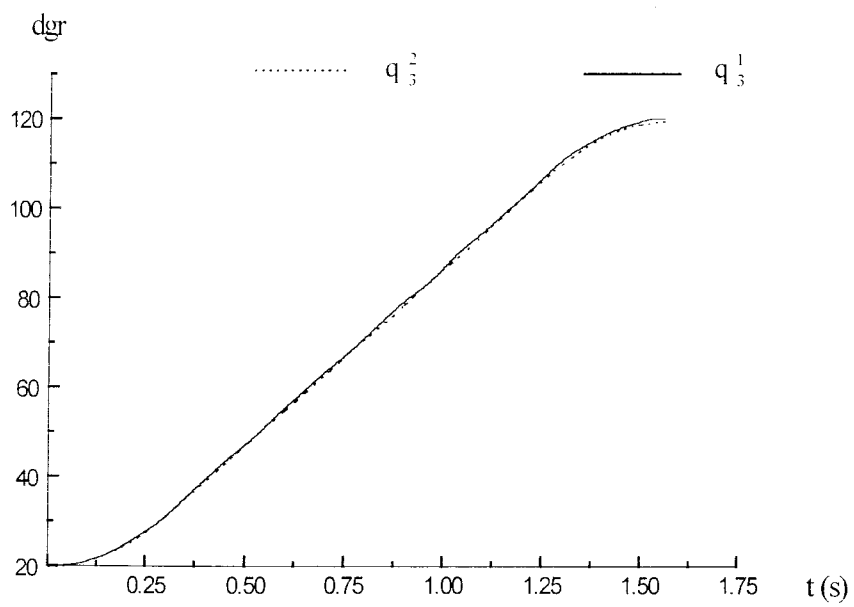


fig. III-31. Tracé de la variable angulaire q_3^1 et q_3^2

CONCLUSION GENERALE

L'objet du travail présenté dans ce mémoire est d'apporter une contribution à l'étude du comportement dynamique des systèmes polyarticulés à joints déformables .

Nous avons axé ce travail sur les mécanismes à chaîne cinématique simple , plans ou spatiaux et à joints rotoïdes ou prismatiques .

Nous avons montré dans cette étude que si l'obtention à la main des équations du mouvement ne présente pas de difficultés théoriques , elle devient extrêmement longue et fastidieuse lorsque le nombre de degrés de liberté du mécanisme est élevé , c'est pourquoi nous avons développé un programme général de construction du modèle dynamique des systèmes polyarticulés .

Le programme que nous avons élaboré en fortran permet de traiter tous les systèmes polyarticulés à structure parfaitement rigide d'une part et les systèmes à joints déformables d'une autre part . Pour cela une modélisation générale d'un joint flexible est présentée , ensuite nous nous sommes limités à une présentation simplifiée qui consiste à considérer juste la déformation à la sortie du moto-réducteur qui constitue le joint .

Pour la mise en équation le formalisme de Lagrange est utilisé dans cette étude , ce qui a permis d'aboutir à un algorithme compact pour décrire les équations dynamiques du mouvement .

A travers des exemples , nous avons mis en évidence les effets de vibration dus à la déformation des joints , ces effets se traduisent par des oscillations indésirables et un phénomène vibratoire qui doit être atténué .

Dans la dernière application , nous nous sommes intéressés dans la première partie au problème d'équilibrage statique . Cette étude nous a permis de faire une comparaison entre les différentes méthodes et de proposer la solution la plus adéquate . Dans la deuxième partie , nous avons montré , sur un exemple de taille « industrielle » , la possibilité qu'offre le programme pour concevoir un système d'équilibrage statique .

Cette étude peut être poursuivie dans les voies suivantes :

- Compléter ce travail en vue d'avoir un outil (plus général) d'aide à la conception mécanique des robots .
- Minimiser le temps de calcul afin de rendre le programme compatible avec les exigences d'une commande en temps réel .
- Prendre en compte la déformation propre des « éléments structuraux ».

BIBLIOGRAPHIE

[1] - F.CHERNOUSKO ; N .BOLOTNIK ; V.GRADETSKY
Manipulation robots dynamics and optiomisation . CRC 1993.

[2] - E.DOMBRE ; W .KHALIL
Modelisation et commande des robots. Hermes 1988

[3] -Marc DIJOURD
Simulation dynamique des mécanismes flexibles.
Thèse de doctorat ENSAM de Paris , 25 Avril 1997

[4] -Marguerite GILBERT
Problème liés à l'intégration numérique des équations de la dynamique des système déformables . Thèse de doctorat ENSAM de Paris , 15 Decembre 1997

[5] - MARIE JOSE ALDON
Elaboration automatique des méthodes dynamiques des robots en vue de leur conception et leur commande . Thèse de doctorat d'état, universite de Longe Doc Montpellier 1982.

[6] - MARC RENAND
Contribution à la modelisation et à la commande dynamique des robots manipulateurs .
Thèse de doctorat d'état université Paul Sabatier de Toulouse , septembre 1980

[7] -Said BENHLIMA
Identification des paramètres dynamiques des systhèmes mécanioque articulés complexes.
Thèse de doctorat ENSAM de Paris , 13 Mai 1993

[8] -Hamid HADJ-LARBI
Modelisation et commande des systèmes souples .
Thèse de doctorat ENSAM de Paris , 19 Septembre 1991

[9] -Etienne VALDES

Contribution à la commande hybride force-position des manipulateurs flexibles .

Thèse de doctorat ENSAM de Paris , 14 Janvier 1993

[10] -Sayed Hossein AKHAVAN GHADAKI

Dynamique des systèmes flexibles . Thèse de doctorat ENSAM de Paris , 24 Janvier 1992

[11] - FARHANG SAKHITAB - YAZDI

Contribution à la simulation du comportement dynamique des mécanismes tridimensionnels

Application à la conception des robots manipulateurs. Octobre 1983.

[12] -Tayeb KIRATI

Etude et réalisation d'un robot modulaire allégé utilisant les matériaux composites .

Thèse de doctorat ENSAM de Paris , 25 Avril 1986

[13] - A.M BENSEFIA

Etude dynamique des systèmes polyarticulés plans flexibles .

Thèse de Magistère . Laboratoire de mécanique INGM Boumerdes 1997.

[14] -M.KOLARSKI ; M.VUKOBRATOVIC ; B.BOROVAC

Dynamic analysis of balanced robot mechanisms . Mech.Mach theory ,1994 , vol 29 N° 3

[15] - P.ANDRE ; J.M KAUFFMANN ; F.LHOTE. ; J.P.TAILLARD

Les robots : Tome 4 Les constituants technologiques . Hermes 1983

[16] - B. CUNY

Modélisation des systèmes mécaniques articulés

Tome 1 et 2 E NSAM- INGM Mai 1995.

[17] - S.AHMAD

Control of cooperative multiple flexible joint robot . IEEE 1993 , vol 23 , N°3 , PP 833-839

[18] -E.SHINI ; D.A.STREIT

Harmonic synthesis theory for dynamic spring balancing .

Jornal of dynamic systems mesurment and control , March 1997 , vol 119 , PP 61-68

[19] -M.JANKOVIC

Observer based control for elastic joint robots . IEEE , 1995 , vol 11 , N° 4 , PP 618-623

[20] - M.GERADIN

Aspect numérique et logiciels de l'approche élément fini à l'analyse dynamique des systèmes articulés flexibles . Colloque INSAM de Paris 1997 , PP 356-361

[21] -A.BARRACO ; B.CUNY

Dynamique des systèmes évolutifs . Colloque INSAM de Paris 1997 , PP 412-421

[22] -P.CHEDMAIL ; PH.DEPINCE ; F.BENNIS

Modélisation des robots souples . Application à l'identification des paramètres inertiels et de raideurs . Colloque INSAM de Paris 1997 , PP 437-442

[23] -E.M.DAYA ; M.POTIER-FERRY

Vibration et stabilité des longues structures flexibles , une technique de calcul lineaire et non lineaire . Colloque INSAM de Paris 1997 , PP 395-402

[24] -J.D.BOISSONAT ; B.FAVERJON ; J.P.MERLET

Technique de la robotique architecture et commande HERMES 1988

[25] - K.P.JAUKOUSKI ; H.VAN BRUSSEL

An approach to decete inverse dynamics control of flexible joint Robots . IEEE 1992
vol 8 , N° 5 , PP 651-658

[26] - P.TOMEI

Tracking control of flexible joint Robots with uncertain parametres and disturbances.

IEEE 1994 , vol 39 , N°5 , PP 1067-1072

[27] - H.BBRUSSEL

Comparison of control algorithmics for flexible joint robots implemented on a industriel robot
IEE 1991.

[28] - M.J.HASHIMOTO ; Y.J.KIWOSAWA ; R.P. PAUL

A Torque sensing technique for robots with harmonioc drives . IEEE 1993.

[29] -H.C.MOULIN ; E.BAYOU

Accuracy of discrete models for the solution of the inverse dynamics problem for flexible arms
feasible trajectories . Transaction of ASME 1997 , vol 119 , PP 396 - 403

[30] -S.ORAL ; S.KEMAL IDIR

Optimum design of high-speed flexible robotic arms with dynamic behavior constraints
Computer and structures 1997 , vol 65 , N° 2 , PP 255-259

[31] - W.YIM ; S.N.SINGH

Non linear inverse and predictive end point trajectory control of flexible macro-micro
manipulateurs . Transaction of ASME , septembre 1997 , vol 119 , PP 412-419

[32] -M.HILLER

Modeling , simulation and control design for large and heavy manipulateurs .
Robotics and autonomous systems , september 1996 , PP 167-177

[33] -S.A.LUKOWSKI ; L.A.MEDEKESZA

Frictional coupling mechanism in multidisk stepless transmission with internal contact .
Transaction of ASME , September 1988

[34] -J.RYU ; SANG.SUP.KIM ; SUNG.SOO.KIM

A criterion on inclusion of stress stiffening effects in flexible multibody dynamic system
simulation . Computer and structures 1997

[35] -L.BEINER

Singularity avoidance for articulated robots . Robotics and autonomous systems .
1997 , PP 39-47

[36] -M.M.BRIDGES ; D.M.DAWSON

Redesign of robust controllers for rigid-link flexible-joint robotic manipulators actuated with
Harmonic-Drive . IEE 1995 , vol 142 , N° 5 , PP 508-514

[37] -P.SICARD ; S.M.JAVARD SADR

Comparison of reduced state and full state passive control laws for flexible joint robots.
IEEE 1995 , PP 75-78

[38] -ZHIHUA.QU

Input- output robust tracking control design for flexible joint robot. IEEE 1995 , vol 40 , N° 1
PP 78-83

[39] -K.A.TAHBOUB ; P.C.MULLER

A new control method applied to robot with joint elasticity. IEEE 1994 , PP 565-570

[40] -M.M.BRIDGES ; D.M.DAWSON ; ZHIHUA.QU ; S.C.MARTINDAL

Robust control of rigid-link flexible-joint robots with redundant joint actuators . IEEE 1994
vol 24 , N° 7 , PP 961-970

[41] - K.P.JAUKOWSKI ; H.A.EL MARAGHY

Dynamic decoupling for hybrid control of rigid / flexible- joint robots interacting with the
environment. IEEE 1992 , vol 22 , N° 4 , PP 736-747

[42] - H.SIRA RAMIREZ ; S.AHMAD ; M. ZRIBI

Dynamique feedback control of robotic manipulators with joint flexibility . IEEE 1992

[43] -K. KHORASANI

Adaptive control of flexible joint robots . IEEE 1992 , vol 8 , N° 2 , PP 250-267

[44] -M. HASWIMOTO ; Y.KOYOSAWA ; H.HIRABAYASTHI ; R.P.PAUL
A joint torque sensing technique for Robots with Harmonic drive . IEEE 1991, PP 1034-1039

[45] -M.C. READMAN ; P.R.BELANGER
Analysis and control of flexible joint Robot . IEEE 1990

[46] - J.Y.HUNG ; S.T. HUNG ; B.R. CAIN
Using a priori knowledge to design a controller for flexible joint Robots . IEEE 1990.

[47] -S.H. LIN. ; S.TOSUNOGLU. ; D.TESAR.
Control of a six-degrees of freedom flexible industrial manipulators. IEEE 1991, PP 24-30

[48] - K.KHORASANI
Non linear control of flexible joint manipulators : A single Line case study. IEEE 1990
vol 35 , N°10 , PP 1145-1149

[49] - P.TOMEI
An observer for flexible joint Robots . IEEE 1990 , vol 35 , N°6 , PP 739-743

[50] - K.P.CHEN ; L.C. FU
Non linear adaptive motion control for a manipulators with flexibles joints. IEEE 1989,
PP 1201-1206

[51] - M.W. SPONG.
On the force control problem for flexible joint manipulators . IEEE 1989 , vol 34 , N°1 ,
PP 107-111

[52] - N.K. M'SIRDI ; A. BENNANI
Non linear adaptive control for Robot manipulators with elastic joints. Application of passive
systems Approach . Laboratoire de Robotique de paris (UA CNRS 1305) 1993

[53] - K.KHOROSANI ; N. RABINDRAN.
A Robot control Designe for flexible joint manipulators , IEE 1993

[54] - M.W SPONG ; K.KHORASANI ; P.V. KOKOTOVIC

An integral manifold Approach to the feed back control of flexible joint Robots . IEEE 1987
vol RA-3 , N° 4 , PP 292-300

[55] -R. MARINO ; M.W. SPONG.

Non linear control technique for flexible joint manipulators : A single link case study .
IEEE 1986 , PP 1030-1036

[56] - P .TOMEI ; S. NICISIA ; A. FICOLA

An Approach to the adaptive contrôle of elastic at joint Robots. IEEE 1986 , PP 552-558

[57] - K. KHORASANI ; M.W.SPONG

Invariant manifolds (with flexible joint). And their Application to Robot manipulators.
University of Illinois at Urbana- Champaign IEEE 1985 , PP 978-983

[58] - A DE LUCA ; A ISIDORI ; F .NICOLO

An Application of Non linear model Matching to the dynamic control of Robot Arm with
elastic joint. Copyright robot control . 1985 , PP 55-61

[59] - A DE LUCA ; A ISIDORI ; F .NICOLO

Control of robot arm with elastic joint via non linear Dynamic Feedback .

Proceeding of 24 th conference on decision and control Ft..Landerdal . December 1985.
PP 1671-1679

[60] - J.JE.SLOTINE ; S. HONG.

Two time scale sliding control of manipulators with flexible joints . IEE 1987 . PP 805-811

[61] - E.WEHLI

A global Approach for describing the dynamic behavior of a Robot manipulator with flexible
links and joints . C.R.S.M .Internal Research Reprt . January 1988.

[62] - F. PFEIFFER ; B.GEBLER

A multistage Approach to the dynamics and control of elastic Robots. IEEE 1988

[63] - E.WEHLI ; T. KOKKINIS

Dynamic Behaviors of a flexible Robotic Manipulator. University of California, Santa Barbara
U.S.A

[64] - B.GEBLER

Feed forwards control strategy for an industrial Robot with elastic links and joints. IEEE 1987.
PP 923-928

[65] - A.GUPTA ; M.A TOWNSEND

On the equation of motion for Robot arm and open kinematic chain.

Journal of Mechanism transmission and Automation in design. Septembre 1988 , vol 110 ,
PP 287-294

[66] - C.W CHANG ; A.A SHABANA

Spatial dynamics of deformable Multibody system with variable Kinematic structure.

Part 1 : Dynamique Model . Transaction of ASME 1990 , vol 112 , PP 160-167

[67] - C.W.CHANG ; A.A SHABANA

Spatial Dynamics of deformable Multibody system with variable kinematic structure .

part 2 : velocity transformation . Transaction of ASME 1990 , vol 112 , PP 153-159

[68] - M.C.GOOD ; L.M.SWEET ; K.L.STROBEL

Dynamic models for control system design of integrated robot and drive systems

Journal of dynamic systems measurement and control . march 1985 , vol 107 , PP 53-59

[69] - A.BARACCO

Modèle dynamique des manipulateurs . Ensam-Paris decembre 1986

[70] - A.NAOUFEL ; A.COMBESURE ; R.J.GIBERT

Analyse dynamique des robots souples Colloque maghrebin sur les modeles numerique de
l'ingenieur , novembre 1991

[71] - F.M.AMIROUCHE ; M. XIE

An explicit matrix formulation of the dynamical equations for flexible multibody systems
Computers and structure 1993

[72] - S.NICISIA ; F.NICOLO ; D. LENTINI

Dynamical control of industrial robot with elastic and dissipative joints . Control science and
technologie 1981 , PP 1933-1941

[73] - R.A WEHAGE ; A.A SHABANA ; Y.L HWANG

Projection methodes in flexible Multibody Dynamics , part II : Dynammmics and recursive
projection methods . International journal for Numerical methods in engineerings 1992

[74] - G.R WIDMANN ; S. AHMAD

Control of industrial robots with flexible joints . IEEE 1987 , PP 145-151

[75] - C.H. LOW

On the accuracy of the numerical integral for the analysis of dynamic response.
Computers and structures 1992.

[76] - S.GUPTA ; M.A TOWNSEND

On the equations of motion for robot arms and open kinematic chains.
Jornnal if mecanismes, transmissions and automation in design septembre 1988.

[77] - P.MINOTTI .

Decouplage dynamique des manipulateurs proposition de solutions mecaniques.
Mech. Mach theory 1991 , vol 26 , N°1 , PP 107-122

[78] - S.BENHLIMA ; A. BARRACO ; B.CUNY ; H. HADJ-LARBI.

Robust Estimation of essential parameters of robots. ENSAM Paris 1990.

[79] - A.CASSANO ; A.CARDONA

A comparaisson between three variable step Algorithms for the inegration of the equations of
Motion in structurral dynamics . Latin Americain Research 1991.

[80] - J.K.MILLS

Control of robotic manipulators with flexible joints during constrained motion task execution .
IEEE 1989.

[81] - K.KHORASANI

Robust adaptive stabilization of flexible joint manipulators. IEEE 1989 , PP 1194-1199

[82] -B.C. CHION ; M.SHAHINPOOR

The effect of joint and link flexibilitie on the dynamic stability controlled manipulators.
IEEE 1989 , PP 398-403

[83] - A.LIEGEOIS

Modelisation et commande des robots manipulateurs .Technnnique de l'ingenieur R 7 730
1988.

[84] - M. FAYOLLE.

Aspects mecaniques en robotique . technique de l'ingenieur B7 190

[85] - M.GIORDANO ; J. LOTTIN

Cours de robotique, description et fonctionnement des robots industriels.

Ed Armand Colin 1990

ANNEXES

ANNEXE 1 : Changement de repère affine

Etant donnés deux repères orthonormés direct R_i et R_j tels que :

$$R_i(o_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$$

$$R_j(o_j, \bar{x}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j)$$

$$\vec{o_i o_j} = p_x \cdot \bar{x}_i + p_y \cdot \bar{y}_i + p_z \cdot \bar{z}_i$$

Soit un point M quelconque tel que :

$$\vec{o_i M} = x_{mi} \cdot \bar{x}_i + y_{mi} \cdot \bar{y}_i + z_{mi} \cdot \bar{z}_i$$

$$\vec{o_j M} = x_{mj} \cdot \bar{x}_j + y_{mj} \cdot \bar{y}_j + z_{mj} \cdot \bar{z}_j$$

Selon la relation de Charll on a : $\vec{o_i M} = \vec{o_i o_j} + \vec{o_j M}$

$$\vec{o_i M} \cdot \bar{x}_i = \vec{o_i o_j} \cdot \bar{x}_i + \vec{o_j M} \cdot \bar{x}_i$$

$$x_{mi} = p_x + x_{mj} \cdot \bar{x}_j \cdot \bar{x}_i + y_{mj} \cdot \bar{y}_j \cdot \bar{y}_i + z_{mj} \cdot \bar{z}_j \cdot \bar{z}_i$$

Et sous forme matricielle :

$$x_{mi} = \begin{bmatrix} \bar{x}_i \bar{x}_j & \bar{x}_i \bar{y}_j & \bar{x}_i \bar{z}_j & p_x \\ \bar{y}_i \bar{x}_j & \bar{y}_i \bar{y}_j & \bar{y}_i \bar{z}_j & p_y \\ \bar{z}_i \bar{x}_j & \bar{z}_i \bar{y}_j & \bar{z}_i \bar{z}_j & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{mj} \\ y_{mj} \\ z_{mj} \\ 1 \end{bmatrix}$$

de même pour y_{mi} et z_{mi} et on aura finalement :

$$\begin{bmatrix} x_{mi} \\ y_{mi} \\ z_{mi} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_i \bar{x}_j & \bar{x}_i \bar{y}_j & \bar{x}_i \bar{z}_j & p_x \\ \bar{y}_i \bar{x}_j & \bar{y}_i \bar{y}_j & \bar{y}_i \bar{z}_j & p_y \\ \bar{z}_i \bar{x}_j & \bar{z}_i \bar{y}_j & \bar{z}_i \bar{z}_j & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{mj} \\ y_{mj} \\ z_{mj} \\ 1 \end{bmatrix}$$

la matrice $T_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{x}_i \bar{x}_j & \bar{x}_i \bar{y}_j & \bar{x}_i \bar{z}_j & p_x \\ \bar{y}_i \bar{x}_j & \bar{y}_i \bar{y}_j & \bar{y}_i \bar{z}_j & p_y \\ \bar{z}_i \bar{x}_j & \bar{z}_i \bar{y}_j & \bar{z}_i \bar{z}_j & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est dite matrice de transformation

homogène .

ANNEXE 2 : Description de l'orientation d'un solide

Cosinus directeurs

L'orientation est définie par la donnée de 3 vecteurs s , n , a constituants 9 éléments appelés cosinus directeurs. Ces vecteurs étant unitaires et orthogonaux.

- La donnée de 2 vecteurs arbitraires parmi les 3 est suffisante puisque le 3eme se déduit directement.
- Trois composantes seulement sont indépendantes.

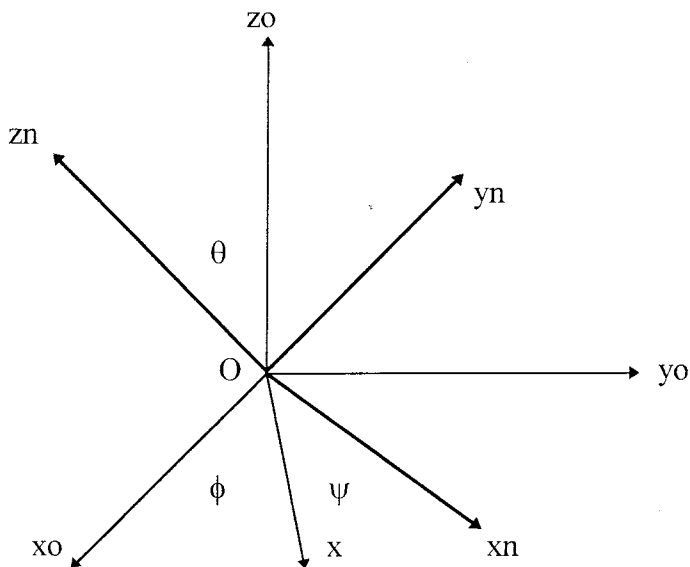
Cette méthode est donc redondante. La matrice d'orientation s'écrit :

$$[A_{CD}] = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x \\ s_y & n_y & a_y \\ s_z & n_z & a_z \end{bmatrix}$$

- Angles d'Euler

L'orientation d'un repère R_n par rapport à un repère R_o est déterminée par 3 angles ϕ , θ , ψ appelées ϕ (precession), θ (nutation), ψ (rotation propre)

Les angles d'Euler correspondent à une première rotation autour de Z , suivie d'une rotation autour du nouvel axe X , suivie d'une dernière rotation autour du nouvel axe Z .



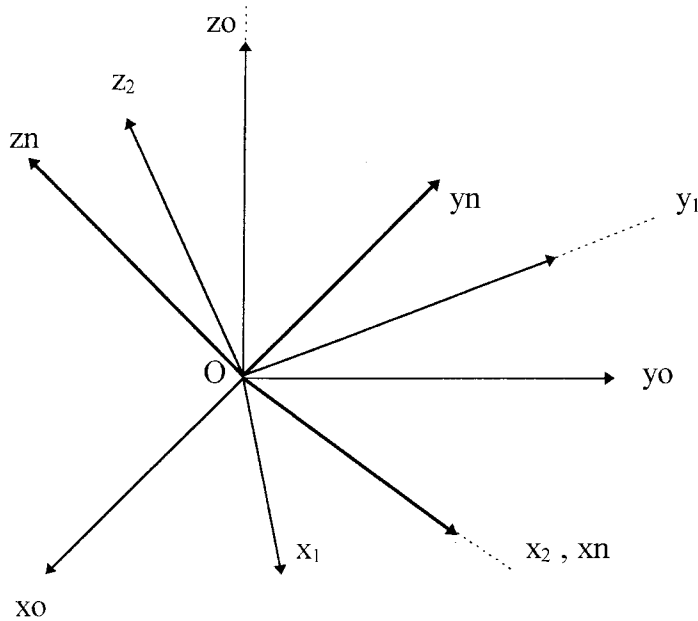
La matrice d'orientation est :

$$A_{EUL} = A(\bar{z}, \phi) \cdot A(\bar{x}, \theta) \cdot A(\bar{z}, \psi)$$

$$A_{EUL} = \begin{bmatrix} c\phi c\psi - s\phi c\theta s\psi & -c\phi s\psi - s\phi c\theta c\psi & s\phi c\theta \\ s\phi c\psi - c\phi c\theta s\psi & -s\phi s\psi - c\phi c\theta c\psi & -c\phi s\theta \\ s\theta s\psi & s\theta c\psi & c\theta \end{bmatrix}$$

- Angles de Roulis-Tangage-Lacet

La convention adoptée est celle de la fig. 2, les angles ϕ , θ , ψ désignent respectivement le Roulis, le Tangage, le Lacet tel que :



La matrice d'orientation est :

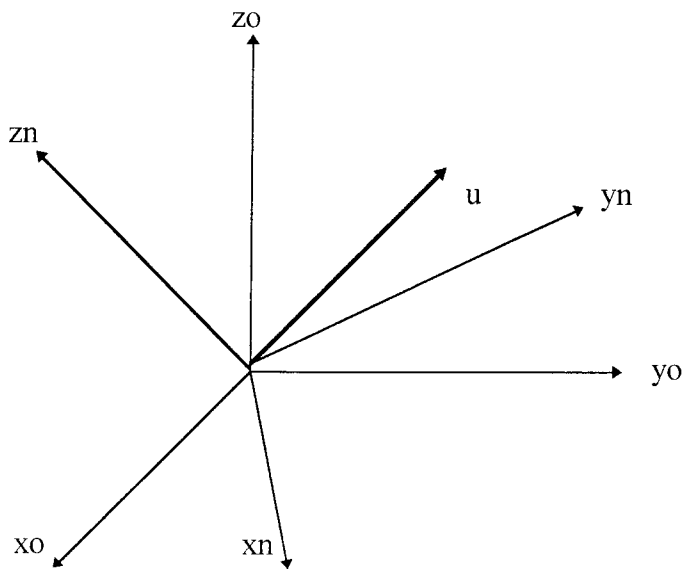
$$A_{RTL} = A(\bar{z}, \phi) \cdot A(\bar{y}, \theta) \cdot A(\bar{x}, \psi)$$

$$A_{EUL} = \begin{bmatrix} c\phi c\theta & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi & s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi \\ s\phi c\theta & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & -c\phi s\psi - s\phi s\theta c\psi \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi \end{bmatrix}$$

Paramètres d'Euler ou paramètres d'Olinde-Rodrigues ou quaternions

L'orientation est dans cette représentation, exprimée par 4 paramètres qui décrivent une rotation unique équivalente θ ($0 \leq \theta \leq 180$) autour d'un axe de vecteur unitaire u , alors les paramètres d'Euler sont définis par :

$$\begin{cases} \lambda_1 = c(\theta / 2) \\ \lambda_2 = u_x s(\theta / 2) \\ \lambda_3 = u_y s(\theta / 2) \\ \lambda_4 = u_z s(\theta / 2) \end{cases}$$



La matrice d'orientation

$$A_{PU} = A(\bar{u}, \theta)$$

$$A_{PU} = \begin{bmatrix} 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - 1 & 2(\lambda_2\lambda_1 - \lambda_1\lambda_4) & 2(\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3) \\ 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4) & 2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2) - 1 & 2(\lambda_3\lambda_4 - \lambda_1\lambda_2) \\ 2(\lambda_2\lambda_4 - \lambda_1\lambda_3) & 2(\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2) & 2(\lambda_1^2 + \lambda_4^2) - 1 \end{bmatrix}$$

ANNEXE 3 : Matrice de transformation homogène

Soit R_{i-1} un repère orthonormé lié au corps C_{i-1} de la chaîne qui constitue le système polyarticulé, soit R_i un repère lié au corps C_i .

la matrice de transformation homogène $T_{(i-1)i}$ permet de définir le repère R_i par rapport au repère R_{i-1} . En utilisant les paramètres de Denavit-Hartenberg cette transformation est composée par un produit de quatre transformations qu'on définit comme suit :

$$T_{(i-1)i} = \text{Rot}(\bar{x}_{(i-1)}, \alpha_i) \cdot \text{Trans}(\bar{x}_{(i-1)}, d_i) \cdot \text{Rot}(\bar{z}_i, \theta_i) \cdot \text{Trans}(\bar{z}_i, r_i)$$

$$\text{Rot}(\bar{x}_{(i-1)}, \alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \text{Trans}(\bar{x}_{(i-1)}, d_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}(\bar{z}_i, \theta_i) = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \text{Trans}(\bar{z}_i, r_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -r_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alors on aura :

$$T_{(i-1)i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & d_i \\ c\alpha_i \cdot s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i & -r_i s\alpha_i \\ s\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i c\theta_i & c\alpha_i & r_i c\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ANNEXE 4 : Dérivation de la matrice de transformation homogène

soit T_{ij} la matrice de transformation homogène du repère R_i au repère R_j qu'on peut mettre sous forme :

$$T_{ij} = T_{i(i+1)} \cdot T_{(i+1)(i+2)} \cdots T_{(j-1)j} \quad , \quad \text{elle dépend des variables } q_{i+1}, \dots, q_j$$

pour calculer la dérivée partielle de T_{ij} par rapport à la variable q_1 on distingue les deux cas suivants :

1er cas: $i \geq 1 > j$

les éléments de la matrice T_{ij} ne dépendent pas de q_1 alors :

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial q_1} = [0]$$

2eme cas :: $i < 1 \leq j$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{ij}}{\partial q_1} &= \frac{\partial}{\partial q_1} \left[T_{i(i+1)} \cdot T_{(i+1)(i+2)} \cdots T_{(j-1)j} \right] \\ &= T_{i(i+1)} \cdot T_{(i+1)(i+2)} \cdots T_{(l-2)(l-1)} \cdot \left(\frac{\partial T_{(l-1)l}}{\partial q_1} \right) \cdot T_{(l-1)l} \cdots T_{(j-1)j} \end{aligned}$$

Sachant que :

$$\frac{\partial T_{(l-1)l}}{\partial q_1} = T_{(l-1)l} \cdot \Omega_{II}$$

$$\text{et } \Omega_{II} = \begin{bmatrix} 0 & -(1 - \sigma_1) & 0 & 0 \\ (1 - \sigma_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\sigma_j = 0$ pour une liaison rotoïde

$\sigma_j = 1$ pour une liaison prismatique

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial q_l} = T_{i(l-1)} \cdot T_{(l-1)l} \cdot \Omega_{ll} \cdot T_{lj} = T_{il} \cdot \Omega_{ll} \cdot T_{lj}$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial q_l} = T_{il} \cdot \Omega_{ll} \cdot T_{lj}$$

On pose $\Omega_{jl} = T_{jl} \cdot \Omega_{ll} \cdot T_{lj}$ et on peut écrire

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial q_l} = T_{il} \cdot \Omega_{ll} \cdot T_{lj} = T_{ij} (T_{jl} \cdot \Omega_{ll} \cdot T_{lj}) = T_{ij} \cdot \Omega_{jl}$$

$$\begin{aligned} \text{Notons ici que : } \Omega_{il} \cdot T_{ij} &= (T_{il} \cdot \Omega_{ll} \cdot T_{li}) \cdot T_{ij} = T_{ij} \cdot T_{jl} \cdot \Omega_{ll} \cdot T_{lj} \\ &= T_{ij} (T_{jl} \cdot \Omega_{ll} \cdot T_{lj}) = T_{ij} \cdot \Omega_{jl} \end{aligned}$$

Donc on a $\Omega_{il} \cdot T_{ij} = T_{ij} \cdot \Omega_{jl}$

finalement on peut écrire :

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial q_l} = \begin{cases} [0] & \text{si } i \geq l > j \\ T_{ij} \cdot \Omega_{jl} & \text{si } i < l \leq j \end{cases}$$

Matrice d'un système constitué de n corps :

Soit T_{0n} la matrice de transformation homogène du repère R_0 au repère R_n alors :

$$\frac{\partial T_{0n}}{\partial q_l} = \begin{cases} [0] & \text{si } 0 \geq l > n \\ T_{0n} \cdot \Omega_{nl} & \text{si } 0 < l \leq n \end{cases}$$

Dérivée de la matrice de transformation homogène par rapport au temps :

$$dT_{ij} = \sum_{k=i+1}^j \frac{\partial T_{ij}}{\partial q_k} \cdot dq_k$$

$$\frac{dT_{ij}}{dt} = \sum_{k=i+1}^j \frac{\partial T_{ij}}{\partial q_k} \cdot \frac{dq_k}{dt}$$

Il existe deux formes pour la dérivée de T_{ij} par rapport au temps :

$$1) - \frac{dT_{ij}}{dt} = \sum_{k=i+1}^j \Omega_{ik} \cdot T_{ij} \cdot \dot{q}_k = \left(\sum_{k=i+1}^j \Omega_{ik} \cdot \dot{q}_k \right) T_{ij}$$

$$2) - \frac{dT_{ij}}{dt} = \sum_{k=i+1}^j T_{ij} \cdot \Omega_{jk} \cdot \dot{q}_k = T_{ij} \left(\sum_{k=i+1}^j \Omega_{jk} \cdot \dot{q}_k \right)$$

$$\text{Donc } \frac{dT_{ij}}{dt} = \left(\sum_{k=i+1}^j \Omega_{ik} \cdot \dot{q}_k \right) T_{ij} = T_{ij} \left(\sum_{k=i+1}^j \Omega_{jk} \cdot \dot{q}_k \right)$$

ANNEXE 5 : Expression de l'énergie cinétique

Expression de la matrice d'inertie A :

Soit M_k un point appartenant au solide S_k tel que :

$$\overrightarrow{O_0 M_k} = T_{0k} \cdot \overrightarrow{O_k M_k} \quad \left\| \overrightarrow{O_k M_k} \right\| = \text{cte} \quad \text{cas des corps rigides}$$

$$V^0(M_k) = \frac{d^0}{dt} (\overrightarrow{O_0 M_k}) = \frac{d^0}{dt} (T_{0k}) \cdot [O_k M_k]$$

Soit deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} alors $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \text{Trace}([a] \cdot [b]^T)$

$$[V^0(M_k)]^2 = \text{Trace}([V^0(M_k)][V^0(M_k)]^T)$$

$$[V^0(M_k)]^T = [O_k M_k]^T \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j \right)^T = [O_k M_k]^T \sum_{j=1}^k \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right]$$

L'énergie cinétique du solide S_k est donnée par :

$$E_{ck} = \frac{1}{2} \int_{S_k} [V^0(M_k)]^2 dm$$

$$E_{ck} = \frac{1}{2} \int_{S_k} \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^k \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \dot{q}_j [O_k M_k] [O_k M_k]^T \sum_{l=1}^k \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] \dot{q}_l \right] dm$$

$$E_{ck} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \text{Trace} \left[\left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \right]_{S_k} [O_k M_k] [O_k M_k]^T dm \cdot \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] \dot{q}_j \dot{q}_l$$

$$[J_k] = \int_{S_k} [O_k M_k] [O_k M_k]^T dm$$

$[J_k]$ c'est la pseudo matrice d'inertie de dimension (4*4) relative au corps S_k de la chaîne dans le repère R_k .

Elle est constitué a partir :

- du moment d'ordre zéro de S_k : m_k masse de S_k
- des moments d'ordre un de S_k : G_k centre de masse de S_k
- des moments d'ordre deux de S_k qui représente la matrice d'inertie $[I_k]_k$ en O_k dans le repère R_k .

$$[I_k] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$[J_k]_k = \begin{bmatrix} (-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})/2 & -I_{xy} & -I_{xz} & m\bar{x} \\ -I_{xy} & (I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})/2 & -I_{yz} & m\bar{y} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & (I_{xx} + I_{yy} - I_{zz})/2 & m\bar{z} \\ m\bar{x} & m\bar{y} & m\bar{z} & m \end{bmatrix}$$

$$E_{ck} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \text{Trace} \left[\left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] \right] \dot{q}_j \dot{q}_l$$

L'énergie cinétique totale du système est donnée par :

$$E_c = \sum_{i=1}^n E_{ck}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \text{Trace} \left[\left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] \right] \dot{q}_j \dot{q}_l$$

En tenant compte de l'annexe 3 on a :

$$\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} = \begin{cases} [0] & \text{si } j > k \\ T_{0k} \cdot \Omega_{0j} & \text{si } j \leq k \end{cases}$$

$$\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} = \begin{cases} [0] & \text{si } l > k \\ T_{0k} \cdot \Omega_{0l} & \text{si } l \leq k \end{cases}$$

$$\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} = \begin{cases} [0] & \text{si } l > k \\ T_{0k} \cdot \Omega_{0l} & \text{si } l \leq k \end{cases}$$

puisque $\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} = [0]$ si $j > k$ et $\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} = [0]$ si $l > k$ Alors on peut écrire :

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \text{Trace} \left[\left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] \right] \dot{q}_j \dot{q}_l$$

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \text{Trace} \left[\left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] \right] \dot{q}_j \dot{q}_l$$

pour cela:

$$\left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] = \begin{cases} 0 & \text{si } k < \max(l, j) \\ \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] & \text{si } k \geq \max(l, j) \end{cases}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \left[\sum_{k=\max(l, j)}^n \text{Trace} \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right] \right] \dot{q}_j \dot{q}_l$$

On pose
$$A_{jl} = \sum_{k=\max(l, j)}^n \text{Trace} \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_l} \right]$$

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n A_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q} \end{bmatrix} [A] \begin{bmatrix} \dot{q} \end{bmatrix}$$

\Rightarrow L'énergie cinétique d'un système polyarticulé est une forme quadratique des vitesses articulaires .

Les éléments de la matrice d'inertie $[A]$ sont donnés par la relation suivante :

$$A_{ij} = \sum_{k=\max(i, j)}^n \text{Trace} \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_i} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_j} \right]$$

ANNEXE 6 : Expression des coefficients dynamiques

Expression des éléments de la matrice des termes de Coriolis :

$$B_{i,jl} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_l} + \frac{\partial A_{il}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jl}}{\partial q_i}$$

$$B_{i,jl} = 2 \sum_{k=\max(i,j,l)}^n \text{Trace} \left[\left[\frac{\partial^2 T_{0k}}{\partial q_j \partial q_l} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_i} \right] \right]$$

$$B_{i,jl} = 2 \sum_{k=\max(i,j,l)}^n \text{Trace} \left[\left[\Omega_{0j} \cdot \Omega_{0l} \cdot T_{0k} \right] [J_k]_k \left[\Omega_{0j} \cdot T_{0k} \right]^T \right]$$

Expression des éléments de la matrice des forces centrifuges :

$$C_{ij} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{jj}}{\partial q_i}$$

$$C_{ij} = 2 \sum_{k=\max(i,j)}^n \text{Trace} \left[\left[\frac{\partial^2 T_{0k}}{\partial q_j \partial q_j} \right] \cdot [J_k] \cdot \left[\frac{\partial T_{0k}}{\partial q_i} \right] \right]$$

$$C_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^n \text{Trace} \left[\left[\Omega_{0j} \cdot \Omega_{0j} \cdot T_{0k} \right] [J_k]_k \left[\Omega_{0j} \cdot T_{0k} \right]^T \right]$$

Expression des éléments du vecteur force de gravité :

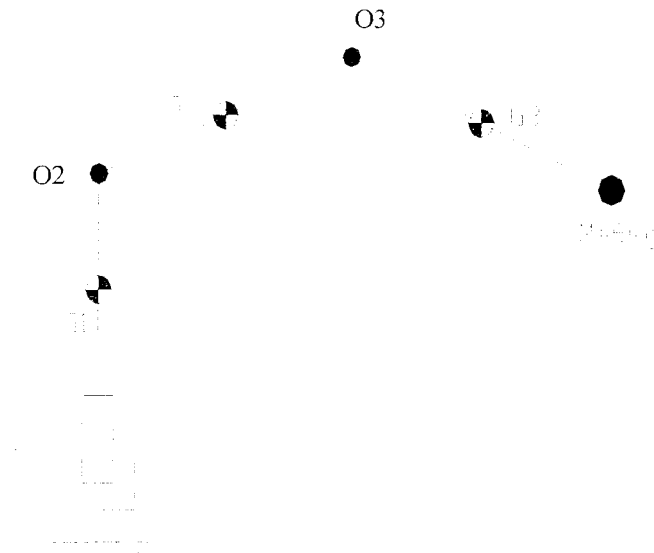
$$E_p = \sum_{i=1}^n (-m_i \cdot g \cdot T_i \cdot u_i) \quad \text{donc} \quad G_i = -\frac{\partial E_p}{\partial q_i}$$

$$G_i = \sum_{i=1}^n -m_i \cdot g \cdot \left(\frac{\partial T_{0i}}{\partial q_i} \right)$$

$$G_i = \sum_{i=1}^n -m_i \cdot g \cdot T_{0i} \cdot \Omega_{0i}$$

ANNEXE 7 : Exemple de validation

la validation a été faite sur un robot PUMA à trois degrés de liberté dont le schéma est donné par la fig. 1



Calcul des vitesses

Le calcul des vitesses de rotation et vitesses linéaires se font par les équations de composition de vitesses :

$$\Omega_j = \Omega_{j-1} + \bar{\sigma}_j \cdot \dot{q}_j \cdot a_j$$

$$V_j = V_{j-1} + \Omega_{j-1} \wedge P_j + \sigma_j \cdot \dot{q}_j \cdot a_j$$

a_j : le vecteur unitaire selon Z

Ω_j : Le vecteur vitesse angulaire du corps C_j

V_j : Vitesse absolue du point O_j

Pour un robot dont la base est fixe , les conditions initiales sont données par :

$$\Omega_0 = 0 ; V_0 = 0$$

Alors si on veut déterminer la vitesse du point O_j exprimée dans R_j

$$\Omega_j^j = A_{j-1}^j \cdot \Omega_{j-1}^{j-1} + (1 - \sigma_i) \cdot \dot{q}_j \cdot a_j^j$$

$$V_j^j = A_{j-1}^j \left[V_{j-1}^{j-1} + \Omega_{j-1}^{j-1} \wedge P_j^{j-1} \right] + \sigma_j \dot{q}_j \cdot a_j^j$$

Ω_j^j : vitesse angulaire du corps C_j exprimée dans R_j

A_{j-1}^j : Matrice de passage du repère R_{j-1} à R_j

P_j^{j-1} : vecteur position $[O_{j-1} O_j]$ exprimé dans R_{j-1}

$V_j^j = V_{O_j}$ (exprimée dans le repère R_j)

$V_{j-1}^{j-1} = V_{O_j}$ (exprimée dans le repère R_{j-1})

$$A_{j-1}^j = \begin{bmatrix} c\theta_i & c\alpha_i \cdot s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i \\ -s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & s\alpha_i c\theta_i \\ 0 & -s\alpha_i & c\alpha_i \end{bmatrix} ; \quad P_j^{j-1} = \begin{bmatrix} d_i \\ -r_i s\alpha_i \\ r_i c\alpha_i \end{bmatrix}$$

Calcul des vitesses angulaires

$$\Omega_0^0 = [0 \ 0 \ 0]^T, \quad \Omega_1^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T$$

$$\Omega_2^2 = A_1^2 \cdot \Omega_1^1 + \dot{q}_2 \cdot a_2^2$$

$$\Omega_2^2 = \begin{bmatrix} c2 & 0 & s2 \\ -s2 & 0 & c2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T$$

$$\Omega_2^2 = \begin{bmatrix} s2 \dot{\theta}_1 & c2 \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T$$

$$\Omega_3^3 = A_2^3 \cdot \Omega_2^2 + \dot{q}_3 \cdot a_3^3$$

$$\Omega_3^3 = \begin{bmatrix} c3 & s3 & 0 \\ -s3 & c3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s2 \dot{\theta}_1 & c2 \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T$$

$$\Omega_3^3 = \begin{bmatrix} s_{23}\dot{\theta}_1 & c_{23}\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T$$

Calcul des vitesses de translation

$$V_0^0 = 0 \quad , \quad V_1^1 = 0 \quad , \quad V_2^2 = 0$$

$$V_3^3 = A_2^3 \cdot V_3^2 \quad , \quad V_3^2 = V_2^2 + \Omega_2^2 \wedge P_3^2$$

$$V_3^2 = \begin{bmatrix} s_2\dot{\theta}_1 & c_2\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \wedge \begin{bmatrix} d_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_2 d_3 & -c_2 d_3 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T$$

$$V_3^3 = \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_2 d_3 & -c_2 d_3 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T$$

$$V_3^3 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 d_3 s_3 & \dot{\theta}_2 d_3 c_3 & -c_2 d_3 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T$$

Calcul de l'énergie cinétique

$$E_c = \sum_{i=1}^n E_{ci}$$

L'énergie cinétique s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} [\Omega_i \cdot I_{Gi} \cdot \Omega_i + m_i \cdot V_{Gi} \cdot V_{Gi}]$$

$$V_{Gi} = V_{oi} + \Omega_i \wedge O_i G_i$$

$$E_c = \frac{1}{2} [\Omega_i \cdot [I_{oi}] \cdot \Omega_i + m_i \cdot V_{oi} \cdot V_{oi} + 2V_{oi} (\Omega_i \wedge m \cdot O_i G_i)]$$

$[I_{oi}]$ est le tenseur d'inertie du solide C_i en O_i

$$[I_{oi}^i] = [I_{Gi}^i] - m_i [O_i G_i][O_i G_i] = [I_i^i]$$

$$[I_i^i] = \begin{bmatrix} xx_i & xy_i & xz_i \\ xy_i & yy_i & yz_i \\ xz_i & yz_i & zz_i \end{bmatrix} \quad , \quad m_i [O_i G_i] = [m_i x_i \quad m_i y_i \quad m_i z_i]^T$$

L'énergie cinétique peut se mettre sous la forme :

$$E_c = \frac{1}{2} \left[\dot{q} \right] [A] \left[\dot{q} \right]$$

Calcul de l'énergie cinétique des différents corps :

$$E_{c1} = \frac{1}{2} \left[\Omega_1 \cdot [I_{o1}] \cdot \Omega_1 + m_1 \cdot V_{o1} \cdot V_{o1} + 2V_{o1} (\Omega_1 \wedge m \cdot [O_1 G_1]) \right]$$

$$E_{c1} = \frac{1}{2} \Omega_1 \cdot [I_{o1}] \cdot \Omega_1$$

$$E_{c1} = \frac{1}{2} I_{zz1} \cdot \dot{\theta}_1^2$$

$$E_{c2} = \frac{1}{2} \Omega_2 \cdot [I_{o2}] \cdot \Omega_2 \quad , \quad \text{On pose } c_j = \cos \theta_j \quad , \quad c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j) \quad \text{même pour sin}$$

$$E_{c2} = \frac{1}{2} \left[\left(I_{xx2} \cdot s_2^2 + I_{yy2} \cdot c_2^2 + 2I_{xy2} \cdot c_2 \cdot s_2 \right) \dot{\theta}_1^2 + I_{zz2} \cdot \dot{\theta}_2^2 + 2(I_{xz2} \cdot s_2 + I_{yz2} \cdot c_2) \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \right]$$

$$E_{c3} = \frac{1}{2} \left(I_{xx3} \cdot s_{23}^2 + I_{yy3} \cdot c_{23}^2 + 2I_{xy3} \cdot c_{23} \cdot s_{23} + 2m\bar{x}_3 c_2 \cdot c_{23} \cdot d_3 - 2m\bar{y}_3 c_2 \cdot s_{23} \cdot d_3 + m_3 d_3^2 c_2^2 \right)$$

$$\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \left(m_3 d_3^2 + I_{zz3} + 2m\bar{x}_3 c_3 \cdot d_3 - m\bar{y}_3 \cdot s_3 \cdot d_3 \right) \cdot \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_{zz3} \cdot \dot{\theta}_3^2 + (I_{xz3} \cdot s_{23} + I_{yz3} \cdot c_{23} - m\bar{z}_3 \cdot s_2 \cdot d_3)$$

$$\dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 + (I_{xz3} \cdot s_{23} + I_{yz3} \cdot c_{23}) \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_3 + (I_{zz3} + m\bar{x}_3 c_3 \cdot d_3 - m\bar{y}_3 \cdot s_3 \cdot d_3) \dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_3$$

L'énergie cinétique s'écrit sous la forme quadratique suivante : $E_c = \frac{1}{2} \left[\dot{q} \right] [A] \left[\dot{q} \right]$

Alors on déduit les éléments de la matrice d'inertie $[A]$

$$A_{11} = I_{zz1} + I_{xx2} \cdot s_2^2 + I_{yy2} \cdot c_2^2 + 2I_{xy2} \cdot c_2 \cdot s_2 + I_{xx3} \cdot s_{23}^2 + I_{yy3} \cdot c_{23}^2 + 2I_{xy3} \cdot c_{23} \cdot s_{23} + 2m\bar{x}_3 c_2 \cdot c_{23} \cdot d_3 - 2m\bar{y}_3 c_2 \cdot s_{23} \cdot d_3 + m_3 d_3^2 c_2^2$$

$$A_{22} = I_{zz2} + m_3 d_3^2 + I_{zz3} + 2m\bar{x}_3 c_3 \cdot d_3 - m\bar{y}_3 \cdot s_3 \cdot d_3$$

$$A_{33} = I_{zz3}$$

$$A_{12} = I_{xz2} \cdot s_2 + I_{yz2} \cdot c_2 + I_{xz3} \cdot s_{23} + I_{yz3} \cdot c_{23} - m\bar{z}_3 \cdot s_2 \cdot d_3$$

$$A_{13} = I_{xz3} \cdot s_{23} + I_{yz3} \cdot c_{23}$$

$$A_{23} = I_{zz3} + m\bar{x}_3 c_3 \cdot d_3 - m\bar{y}_3 \cdot s_3 \cdot d_3$$

Calcul de l'énergie potentielle

Soit $g^T [0 \ 0 \ g_3]^T$ le vecteur accélération de la pesanteur, alors l'énergie potentielle

$$\text{s'écrit : } E_p = -\sum_{j=1}^3 M_j \cdot g^T (P_j^0 + A_j^0 \cdot [0_j G_j]) = -\sum_{j=1}^3 M_j \cdot g^T A_j^0 (P_j^j + [0_j G_j])$$

$$A_j^{j-1} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 \\ s\theta_i c\alpha_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i \\ s\alpha_i s\theta_i & c\theta_i s\alpha_i & c\alpha_i \end{bmatrix} ; \quad P_{j-1}^j = \begin{bmatrix} -d_i c\theta_i \\ d_i s\theta_i \\ -r_i \end{bmatrix}$$

$$E_{p_1} = -[0 \ 0 \ g_3]^T \begin{bmatrix} c l & -s l & 0 \\ s l & c l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m\bar{x}_1 \\ m\bar{y}_1 \\ m\bar{z}_1 \end{bmatrix} = -g_3 m\bar{z}_1$$

$$E_{p_2} = -M_2 \cdot g^T A_2^0 (P_2^2 + [0_2 G_2])$$

$$E_{p_2} = -g_3 (m\bar{x}_2 s_2 + m\bar{y}_2 c_2)$$

$$E_{p_3} = -M_3 \cdot g^T A_3^0 (P_3^3 + [0_3 G_3])$$

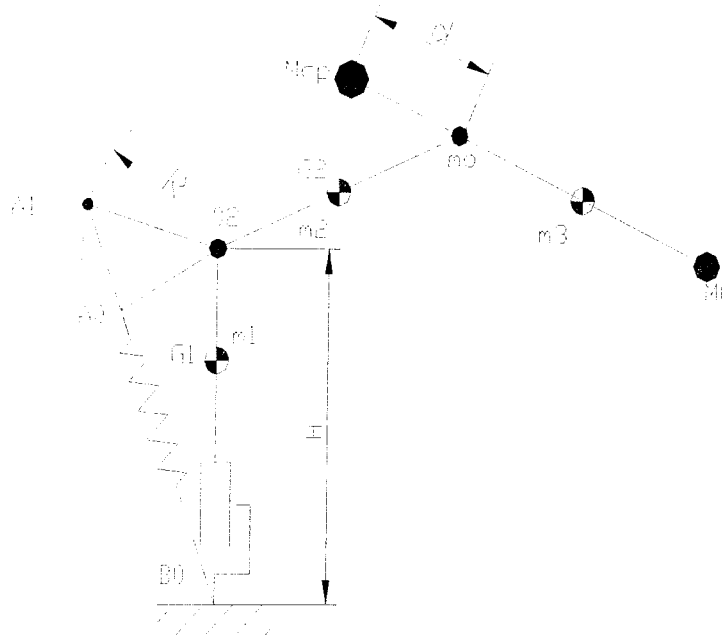
$$E_{p_2} = -g_3 (m\bar{x}_3 s_{23} + m\bar{y}_3 c_{23} + d_3 \cdot s_2)$$

Alors les forces de gravité sont données par

$$Q_2 = \frac{\partial E_p}{\partial \theta_2} = -g_3 (m\bar{x}_2 c_2 - m\bar{y}_2 s_2 + m\bar{x}_3 c_{23} - m\bar{y}_3 s_{23} + m_3 d_3 c_2)$$

$$Q_3 = \frac{\partial E_p}{\partial \theta_3} = -g_3 (m\bar{x}_3 c_{23} - m\bar{y}_3 s_{23})$$

Pour le système équilibré :



Si on introduit le système d'équilibrage l'énergie potentielle du système devient :

$$E_p = E_{p_{G_i}} + E_p(\text{ressort})$$

Détermination de $E_p(\text{ressort})$

$$E_{pr} = \frac{1}{2} k(L - L_0)^2$$

$$\text{On a : } \vec{B_0A_1} = \vec{B_0O_2} + \vec{O_2A_1} \quad ; \quad B_0A_1^2 = B_0O_2^2 + O_2A_1^2 = L^2$$

$$L^2 = H^2 + R^2 + 2RH \cdot \cos(B_0O_2, O_2A_1)$$

$$L^2 = H^2 + R^2 - 2RH \cdot \cos(\alpha - \theta - \pi)$$

$$L^2 = H^2 + R^2 + 2RH \cdot \cos(\alpha - \theta)$$

$$B_0A_0^2 = B_0O_2^2 + O_2A_0^2 = L_0^2$$

$$L_0^2 = H^2 + R^2 + 2RH \cdot \cos \alpha$$

$$L^2 = L_0^2 + 2RH \cdot \cos(\alpha - \theta) - 2RH \cdot \cos \alpha$$

$$\text{On a : } \sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} (-\cos(a + b) + \cos(a - b)) \quad \text{a lors :}$$

$$\cos(\alpha + \theta) - \cos \alpha = 2 \sin \frac{2\alpha - \theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2}$$

$$L^2 = L_0^2 + 4RH \cdot \sin \frac{\theta}{2} \sin(\alpha - \frac{\theta}{2})$$

$$x = L - L_0 = \left(H^2 + R^2 + 2RH \cdot \cos(\alpha - \theta) \right)^{\frac{1}{2}} - \left(H^2 + R^2 + 2RH \cdot \cos \alpha \right)^{\frac{1}{2}}$$

Le ressort possède une caractéristique non linéaire, l'effort de rappel est donné par :

$$F(\text{daN}) = \begin{cases} 16500 x & x \leq 0.12 \text{ m} \\ 225000 x^2 - 37500 x + 3240 & x \geq 0.12 \text{ m} \end{cases}$$

$$F = \frac{\partial E_{pr}}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_{pr}}{\partial \theta_2} = \frac{\partial E_{pr}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta_2} = F \frac{\partial x}{\partial \theta_2}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta_2} = \begin{cases} 16500 x \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & x \leq 0.12 \text{ m} \\ (225000 x^2 - 37500 x + 3240) \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & x \geq 0.12 \text{ m} \end{cases}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_2} = \frac{-HR \sin(\alpha - (\frac{\pi}{2} - \theta_2))}{\left(H^2 + R^2 + 2H \cdot R \cos(\alpha - (\frac{\pi}{2} - \theta_2)) \right)^{0.5}}$$

$$Q_1 = 0$$

$$Q_2 = \frac{\partial E_{p_G}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial E_{pr}}{\partial \theta_2}$$

$$Q_3 = \frac{\partial E_{p_G}}{\partial \theta_3}$$

Pour que le robot soit en équilibre il faut que $E_p = \text{cte} \quad \forall q_i$ Donc $\frac{\partial E_p}{\partial q_i} = 0 \quad \forall q_i$

$$\text{on aura : } Q_3 = \frac{\partial E_{p_G}}{\partial \theta_3} = 0, \quad -g_3(m\bar{x}_3 + M \cdot l_3 - M_{cp} \cdot d) = 0 \quad \forall q_i$$

$$d = \frac{m\bar{x}_3 + M \cdot l_3}{M_{cp}}$$

$$Q_2 = \frac{\partial E_{p_G}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial E_{pr}}{\partial \theta_2} \rightarrow 0 \quad \text{alors il faut minimiser la somme } \frac{\partial E_{p_G}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial E_{pr}}{\partial \theta_2} \text{ et on}$$

détermine la valeur de R optimum.