

*République Algérienne Démocratique et Populaire*

*Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*

**UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA**

**Faculté des Hydrocarbures et de la Chimie**

**BOUMERDES**



*Département Transport et Equipements des Hydrocarbures*

**Mémoire de Magister**

**Spécialité : Génie mécanique**

**Option : Thermo-fluide**

Présenté par :

**Ali GRINE**

**THEME**

**ETUDE DE LA CONVECTION FORCEE EN REGIME  
TRANSITOIRE SUR PLAQUE PLANE .  
IDENTIFICATION DU COEFFICIENT D'ECHANGE.**

Soutenu publiquement le : **22/12 / 2005**

Devant le jury composé de :

ZERAIBI. N	Maître de Conférences ( UMBB)	Président
HEDIBEL. M	Maître de Conférences ( UMBB)	Examineur
MAKHLOUF . S	Maître de Conférences (UMMTO)	Examineur
MOHAMMEDI. K	Maître de Conférences ( UMBB)	Examineur
AISSANI. S	Maître de Conférences ( UMBB)	Rapporteur

**Boumerdès 2005**

*République Algérienne Démocratique et Populaire*

*Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*

**UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA**

**Faculté des Hydrocarbures et de la Chimie**

**BOUMERDES**



*Laboratoire de Génie Physique des Hydrocarbures*

**Mémoire de Magister**

**Spécialité : Génie mécanique**

**Option : Thermo-fluide**

Présenté par :

**Ali GRINE**

**THEME**

**ETUDE DE LA CONVECTION FORCEE EN REGIME  
TRANSITOIRE SUR PLAQUE PLANE  
« Identification du coefficient d'échange »**

Soutenu publiquement le : **22/12 / 2005**

Devant le jury composé de :

ZERAIBI. N	Maître de Conférences ( UMBB)	Président
HEDIBEL. M	Maître de Conférences ( UMBB)	Examineur
MAKHLOUF . S	Maître de Conférences (UMMTO)	Examineur
MOHAMMEDI. K	Maître de Conférences ( UMBB)	Examineur
AISSANI. S	Maître de Conférences ( UMBB)	Rapporteur

**Boumerdès 2005**

*République Algérienne Démocratique et Populaire*

*Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*

**UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA**

**Faculté des Hydrocarbures et de la Chimie**

**BOUMERDES**



*Département Transport et Equipements des Hydrocarbures*

**Mémoire de Magister**

**Spécialité : Génie mécanique**

**Option : Thermo-fluide**

**Présenté par :**

**Ali GRINE**

**THEME**

**ETUDE DE LA CONVECTION FORCEE EN REGIME  
TRANSITOIRE SUR PLAQUE PLANE**

**La soutenance aura lieu le:22/12 / 2005 à 9 h30 à la salle R 18**

Devant le jury composé de :

ZERAIBI. N	Maître de Conférences ( UMBB)	Président
HEDIBEL. M	Maître de Conférences ( UMBB)	Examineur
MAKHOLOUF . S	Maître de Conférences (UMMTO)	Examineur
MOHAMMEDI. K	Maître de Conférences ( UMBB)	Examineur
AISSANI. S	Maître de Conférences ( UMBB)	Rapporteur

**Boumerdès 2005**

*République Algérienne Démocratique et Populaire*

*Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*

**UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA**

**Faculté des Hydrocarbures et de la Chimie**

**BOUMERDES**



*Département Transport et Equipements des Hydrocarbures*

**Mémoire de Magister**

**Spécialité :** *Génie mécanique*

**Option :** *Thermo-fluide*

Présenté par :

**Ali GRINE**

**THEME**

**ETUDE DE LA CONVECTION FORCEE EN REGIME  
TRANSITOIRE SUR PLAQUE PLANE .  
IDENTIFICATION DU COEF D'ECHANGE.**

Soutenu publiquement le: **22/12 / 2005**

Devant le jury composé de :

ZERAIBI. N	Maître de Conférences ( UMBB)	Président
BENAYAD. S	Docteur d'Etat, SH IAP Boumerdès	Examineur
HEDIBEL. M	Maître de Conférences ( UMBB)	Examineur
MOHAMMEDI. K	Maître de Conférences ( UMBB)	Examineur
AISSANI. S	Maître de Conférences ( UMBB)	Rapporteur

**Boumerdès 2005**



TABLE DE MATIERES

**Nomenclature**

**INTRODUCTION GENERALE** .....1

**CHAPITRE I**

***SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE***

I.1 Convection forcée externe en régime transitoire.....7  
     I.1.1 – plaque épaisseur nulle .....7  
     I.1.2 – Plaque à épaisseur finie .....9  
         I.1.2.1 – Capacité thermique négligeable .....9  
         I.1.2.2 – Capacité thermique non négligeable .....10  
     I.2 – Mesure de coefficient d’échange par méthode impulsionnelle .....11  
         I.2.1 – Excitation thermique par un moyen optique .....12  
         I.2.2 – Excitation thermique par effet électrique .....15  
     I.3 – Conclusion.....17

**CHAPITRE II**

***MODELE MATHEMATIQUE***

II.1 – Introduction .....18  
     II.2 – Principe expérimental .....18  
     II.3 – Modèle 1 : Température imposée en  $x = 0$  .....19  
         II.3.1 – Equation de la propagation de la chaleur.....19  
         II.3.2 – Conditions aux limites.....19  
         II.3.3 – Recherche de la solution  $\theta_1(x, t)$  par la théorie des fonctions de Green.....21  
         II.3.4 – Recherche de la solution  $\theta_2(x, t)$  (Théorème de Duhamel).....23  
         II.3.5 – Recherche de la fonction de Green.....25  
             II.3.5.1 – Méthode de séparation de variables.....25  
                 II.3.5.1.1 Définition des fonctions propres et valeurs propres.....25  
                 II.3.5.1.2 Calcul numérique des valeurs propres.....27  
             II.3.5.2 Méthode directe par la transformée de Laplace.....28  
         II.3.6 – Représentation des fonctions  $f(t)$  et  $\bar{f}(p)$  .....30  
         II.3.7 – Etude du régime d’échauffement.....31  
             II.3.7.1 – Profil de température .....32  
             II.3.7.2 Densité de flux de chaleur et coefficient d’échange.....33

II.3.8 Etude du régime de relaxation.....	36
II.3.8.1 – Profil de température.....	37
II.3.8.2 Densité de flux et coefficient d'échange thermique.....	38
II.4 Conclusion .....	40

### CHAPITRE III

#### *INSTRUMENTATION ET APPAREILS DE MESURES*

III.1 – Introduction .....	41
III.2 – Description du banc d'essai expérimental .....	41
III.3 – Chaîne de mesure.....	43
III.3.1 Mesure des températures.....	43
III.3.2 L'anémométrie avec sonde télescopique.....	44
III.3.3 Propriétés thermophysiques des plaques d'essais.....	44
III.4 Identification du flux de chauffage $\varphi_i$ et du coefficient d'échange $h_e$ .....	44
III.4.1 Etude théorique du problème.....	46
III.4.1.1 Calcul du coefficient d'échange interne $h_i$ .....	47
III.4.1.2 Calcul du coefficient d'échange externe $h_e$ .....	48
III.4.2 Identification de $h_e$ et $\varphi_i$ par variation d'épaisseur.....	49
III.4.2.1 Présentation de la méthode d'identification.....	49
III.4.2.1.1 Cas d'un coefficient d'échange $h_e$ constant .....	49
III.4.2.1.2 Cas d'un coefficient d'échange $h_e$ dépend linéairement de la température.....	50
III.4.2.2 Etude de sensibilité de la plaque.....	51

### CHAPITRE IV

#### *EXPERIMENTATION, RESULTATS ET ANALYSE*

IV.1 – Introduction .....	52
IV.2 - Choix du matériau constituant la plaque .....	53
IV.3 Calcul du flux incident $\varphi_i$ et le coefficient d'échange $h_i$ en régime permanent...53	
IV.4 Analyse des résultats et comparaison.....	55
IV.4.1 Analyse des résultats.....	55
IV.4.1.1 Profils de température.....	55

## Table de matières

---

IV.4.1.2 Flux de chaleur.....	58
IV.4.1.3 Coefficients d'échange radiatif et convectif.....	59
IV.4.2 Comparaisons du modèle mathématique avec la simulation numérique...	62
IV.4.2.1 Plaque de vitrocéramique.....	62
IV.4.2.2 Plaque d'Aluminium.....	65
IV.5 Conclusion.....	67
CONCLUSION GENERALE.....	68
<b>Références bibliographiques</b> .....	69
Annexe 1 : Solution exacte.....	73
Annexe 2 : Profil de température et flux de chaleur lors de la phase de relaxation.....	75
Annexe 3 : Etude par simulation numérique du coefficient d'échange .....	77

## Nomenclature

$a$	diffusivité thermique, $m^2s^{-1}$
$B_n$	constante d'intégration
$e$	épaisseur de la plaque, $m$
$c$	la chaleur massique, $J/kg.K$
$E(x - \xi)$	fonction de Heaviside
$f_\infty, f_\infty'$	température pariétale en régime permanent, $^\circ C$
$f(t), f'(t)$	température pariétale en $x = 0$ , $^\circ C$
$G$	fonction de Green
$\bar{G}$	transformée de Laplace de $G$
$Gr$	nombre de Grashof
$h_i$	coefficient de transfert thermique (face inférieure) $W.m^{-2}.K^{-1}$
$h_e$	coefficient de transfert thermique (face supérieure) $W.m^{-2}.K^{-1}$
$Nu$	nombre de Nusselt
$Pr$	nombre de Prandtl
$p, q$	variables de Laplace
$Ra$	nombre de Rayleigh
$t$	temps, $s$
$T_\infty$	température ambiante, $^\circ C$
$T_0$	température initiale de la plaque, $^\circ C$
$u, u^*, w, w^*$	fonctions mathématiques
$U$	Vitesse d'écoulement, $m/s$

### *Symboles grecs*

$\lambda$	Conductivité thermique de la plaque, $W.m^{-1}.K^{-1}$
$\theta(x, t)$	champs de température dans la plaque = $T(x, t) - T_{\infty}$ , °C
$\delta(x - \xi), \delta(t)$	distribution de Dirac
$\varphi_i(t)$	densité de flux de chauffage absorbé, $W.m^{-2}$
$\varphi(t)$	densité de flux pariétal, $W.m^{-2}$
$\bar{\theta}$	transformée de Laplace de $\theta$
$\alpha_n$	valeurs propres de Laplacien
$\psi_n(x)$	fonctions propres de Laplacien
$\Gamma$	fonction gamma
$x, y, \xi$	variable d'espace, $m$
$\rho$	masse volumique de la plaque $kg/m^3$

### *Indices et exposants*

i	inférieure ou incident
e	extérieure
c	convection
r	rayonnement
0	régimes permanents
m	monté en température (chauffage)
d	descente en température (relaxation)
f	fluide



## INTRODUCTION

La connaissance et la bonne maîtrise du coefficient d'échange convectif sont des étapes importantes dans le dimensionnement optimisé de tout procédé industriel faisant intervenir la convection comme mode de transfert de la chaleur. L'identification expérimentale du coefficient d'échange convectif entre une paroi et un fluide en écoulement est souvent basée sur la mesure du flux et de la température à la surface de la paroi soumise à l'écoulement. Cette identification est le plus souvent réalisée lorsque le régime thermique est permanent dans la paroi. Dans le cas d'expérimentations en régime transitoire dans le solide, les modèles les plus couramment utilisés sont ceux basés sur le principe de la méthode flash appliqué à une paroi. Ce type de méthode n'est pas sans inconvénients, car l'application de l'impulsion de flux peut perturber les couches limites thermique et dynamique ainsi que la prise de mesure de température et/ou du flux à la paroi du solide.

Nous proposons dans ce travail une méthode non destructive pour la détermination du coefficient d'échange convectif en régime transitoire où la seule mesure effectuée est celle du profil de température superficielle obtenue par une Caméra Infrarouge.

Le flux superficiel, non mesuré, est obtenu à partir du profil de température enregistré, grâce au modèle théorique en utilisant la méthode des fonctions de Green. La plaque est chauffée sur sa face inférieure par un créneau de flux de longue durée permettant d'atteindre le régime permanent, évitant la perturbation de la couche limite thermique sur la face supérieure.

### 1. Notion de coefficient d'échange par convection

Lorsqu'un fluide (gaz ou liquide) est en écoulement anisotherme, son mouvement s'accompagne d'un transfert de chaleur : il s'agit de « convection thermique ». Si le mouvement est occasionné par des forces agissant à l'intérieur du fluide, on parle de *convection naturelle* ou libre. Ces forces sont le plus souvent l'action du champ de pesanteur due aux gradients de masse volumique générés dans le fluide par les gradients de température. Maintenant si le mouvement du fluide a une origine mécanique (pompe, ventilateur, gradient naturel de pression...) on est en présence de *convection forcée*. Il

peut advenir aussi que les causes mécaniques et thermiques coexistent, on est alors en régime de convection mixte.

Les phénomènes de convection (entre un fluide en mouvement et une surface matérielle) sont omniprésents dans la vie quotidienne.

Ainsi, au contact d'un radiateur à eau, la température de l'air croît et sa masse volumique décroît. Cet air subit alors une poussée d'Archimède du fait de l'air environnant plus froid. Il se met donc en mouvement, en transportant de la chaleur fournie par le radiateur ; le transfert se passe en « convection naturelle externe ». Dans le radiateur où l'eau circule sous l'action d'une pompe mais avec une faible vitesse, il s'établit un régime de « convection mixte » où les effets de la convection forcée sont du même ordre que ceux de la convection naturelle due à la pesanteur.

Dans les échangeurs, où l'écoulement des fluides est presque toujours imposé, la chaleur transite entre un fluide et un autre, à travers la paroi qui les sépare, en « convection forcée interne ». Les écoulements sur les aubes d'un ventilateur ou d'une turbine, lorsque la température de ces derniers est différente de celle du fluide en mouvement, sont un exemple courant du transfert de chaleur par « convection forcée externe ».

Bien entendu, la convection forcée, interne ou externe, peut se produire avec « changement de phase », comme dans les évaporateurs et condenseurs des machines frigorifiques.

Dans tout transfert par convection thermique, la chaleur est transmise simultanément par la diffusion moléculaire et par le mouvement du fluide, ce dernier mode de transfert étant appelé « advection ». La convection thermique résulte de leur conjonction ; elle est donc inséparable de l'écoulement du fluide.

Au point de vue pratique, le plus important en thermoconvection est le calcul des flux de chaleur qui transitent entre les fluides et les parois solides. A cet égard, l'existence de la couche limite dynamique, et en particulier la condition de vitesse nulle à la paroi font qu'au voisinage de celle-ci c'est la conduction qui est dominante, l'advection prenant progressivement le relais quand on s'éloigne de la paroi. De telle

sorte que la densité de flux de chaleur à la surface se calcule à partir de la loi de Fourier :

$$\varphi_p = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (1)$$

Où  $\lambda$  désigne la conductivité thermique du fluide, et  $y$  la coordonnée perpendiculaire à la paroi, orientée vers le fluide.

Le coefficient d'échange convectif est usuellement défini par la loi de Newton :

$$\varphi_p = h(T_p - T_f) \quad (2)$$

Avec :

$h$  : Coefficient d'échange par convection ( $\text{W}/\text{m}^2\text{K}$ ) ;

$T_p$  : Température de paroi ;

$T_f$  : Température caractéristique du fluide.

Cette définition du coefficient d'échange est alors identique à la notion de résistance thermique en régime permanent. En effet, entre deux surfaces isothermes  $T_1$  et  $T_2$  reliées par un tube de flux, s'écoule un flux de chaleur de la forme :

$$\varphi_p = \frac{1}{R_t}(T_1 - T_2) \quad (3)$$

Où  $R_t$  est la résistance thermique dépendant de la géométrie et de la conductivité thermique.

Corrélativement, on considère que le transfert de chaleur entre le fluide et la paroi s'opère à travers un film de résistance thermique  $R_t = \frac{1}{h}$ . Ce « modèle conductif » de la convection est surtout intéressant dans le cas où on peut additionner des résistances thermiques, c'est-à-dire essentiellement lorsque le transfert a lieu d'un fluide à un autre à travers une paroi.

Cette définition du coefficient d'échange par convection  $h$  n'est pas sans inconvénients :

1. L'écart de température  $(T_p - T_f)$  peut être défini de différentes façons, en effet, s'il n'y a pas d'ambiguïté quant à la mesure de la température de paroi  $T_p$ , il n'en est pas de même pour le choix de la température  $T_f$  caractéristique de fluide. Dans le cas d'écoulement externe, et pour les trois types de convection (libre, mixte et forcée), on prend usuellement la température au loin de la paroi  $T_\infty$ . Dans le cas d'écoulement en canalisation, on peut utiliser soit une température de mélange qui tient compte du profil des vitesses, soit une température moyenne dans une section, soit la température dans l'axe de la section.
2. La formule (2) laisse penser que  $\varphi_p$  est proportionnel à l'écart de température  $(T_p - T_f)$ . Cette linéarité n'est fondée que si  $(T_p - T_f)$  reste faible.
3. En ce qui concerne le régime transitoire, on peut toujours à chaque instant, mesurer un écart de température  $\Delta T(t)$  en deux endroits et une densité de flux  $\varphi_p(t)$  traversant une surface donnée. Leur rapport  $\frac{\Delta T(t)}{\varphi_p(t)}$  aura la dimension d'une résistance thermique par unité de surface ou d'un coefficient d'échange. Ce terme devra, pour présenter un intérêt, subir peu de variations en fonction du temps ou encore mieux des variations prévisibles.

Malgré tous ces inconvénients, il ne faut tout de même pas sous-estimer l'intérêt pratique de ce coefficient  $h$  qui regroupe en une seule valeur les phénomènes de convection et qui mène ainsi à une description peut-être un peu schématique, mais bien commode pour approcher la réalité.

## 2. Intérêt de l'étude du régime instationnaire

Les transferts de chaleur par convection ont été essentiellement étudiés en régime permanent, mais la plupart des systèmes thermiques sont soumis à des conditions de fonctionnement variables dans le temps. Leur analyse devient donc essentielle à partir d'un certain niveau de conception en ingénierie. C'est pourquoi l'étude des mécanismes

fondamentaux de la convection en régime instationnaire constitue actuellement un thème « émergent ».

Ce mémoire comporte quatre parties principales :

- Le premier chapitre regroupe, sous forme de synthèse bibliographique, les différentes méthodes d'évaluation des coefficients d'échange convectifs dans le cas d'échanges fluide-paroi.
- Le deuxième chapitre présente les détails du modèle mathématique élaboré.
- Le troisième chapitre est consacré à la présentation de l'instrumentation et des différentes techniques expérimentales utilisées pour la prise de mesures.
- Les expériences réalisées, ainsi que les résultats et les analyses des essais sont regroupés dans le quatrième chapitre.

## ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Nous avons décomposé l'analyse bibliographique en deux grandes tranches :

\* La première concerne ce qui se passe dans le fluide. La résolution des équations de couches limites parfois couplées aux équations de la conduction dans le solide, est le travail essentiel à effectuer. Ce travail permet la détermination de la température et du flux à l'interface fluide-paroi, et par la suite celle du coefficient d'échange « h ».

Nous nous intéressons plus particulièrement dans cette première tranche de l'étude à la convection laminaire forcée en régime transitoire après une élévation brusque des conditions aux limites thermiques. Cette partie de l'analyse bibliographique sera appelée « convection forcée externe en régime transitoire ».

\* Dans la deuxième partie, on présentera les travaux relatifs à la mesure du coefficient de convection en analysant le comportement transitoire d'une paroi soumise à une perturbation. Celle-ci peut consister en une variation périodique de la température de paroi ou du fluide ou plus simplement en une impulsion du flux ou de la température pariétale.

On peut utiliser pour les relevés de températures des couples thermoélectriques et comme moyen d'excitation, la décharge d'un condensateur. Ces dernières années, nous avons noté l'apparition de techniques mettant en œuvre des méthodes sans contact et complètement non destructives. En effet, avec une excitation optique (lampe flash ou laser) et un moyen de mesure photothermique (détecteur infrarouge ou caméra de thermographie infrarouge). Cette partie de l'étude bibliographique sera baptisée « mesure de coefficient d'échange par méthode impulsionnelle » ; elle sera subdivisée en deux sous-parties :

- 1- La première aborde le cas où l'excitation est produite par un moyen optique.
- 2- La seconde est consacrée au cas où l'excitation thermique est produite par un effet électrique.

Bien évidemment, il existe une autre méthode pour mesurer le coefficient d'échange entre une paroi et un fluide en écoulement : c'est l'utilisation de fluxmètres thermiques, qui déterminent en régime permanent, la quantité de chaleur traversant la paroi du solide. Associé à deux mesures de températures, le flux de chaleur ainsi mesuré permet de calculer un coefficient d'échange par convection.

### I.1 Convection forcée externe en régime transitoire

L'étude de la couche limite laminaire en régime transitoire est basée sur le fait que seul le régime thermique, consécutif à une variation brusque des conditions aux limites thermiques instationnaires est pris en considération. Le régime dynamique est supposé permanent et indépendant du champ de température, ceci implique que les fluides soient non thermodépendants et newtoniens.

Nous n'analyserons donc que les principaux travaux concernant la convection laminaire externe en régime transitoire, inhérente à une variation brusque des conditions aux limites thermiques. Trois types de variation brusque des conditions thermiques existent : échelon de température à la paroi, variation du flux pariétal et changement brusque de la température de l'écoulement. Parmi ces trois types, nous nous intéressons à la variation du flux pariétal.

La condition de flux imposé à la paroi se rencontre certainement plus souvent que celle d'une température pariétale imposée, car elle correspond à des situations expérimentales plus proches de réalisations courantes (rayonnement reçu par la paroi, puissance dégagée par effet Joule...).

#### I.1.1 Plaque à épaisseur nulle

Parmi les auteurs qui ont étudié le régime transitoire de convection laminaire forcée quand le flux pariétal subit un échelon, citons **Adams, Gebhart [1], Polidori et al [2]**, ces derniers ont étendu la méthode intégrale de Karman – Pohlhausen au régime instationnaire. Ils ont adopté plusieurs profils de vitesses dans la couche limite dynamique stationnaire et un profil d'ordre deux pour la température dans la couche limite thermique transitoire.

Quand la plaque est isolée et de capacité calorifique nulle, c'est à dire qu'elle n'intervient pas dans le transfert de chaleur, les premiers auteurs ont montré que la différence entre l'évolution temporelle de la température pariétale en convection forcée, pour un profil de vitesse d'ordre trois, et la solution de la conduction dans un milieu semi-infini, est inférieure à 10%.

Dans leur étude, **Polidori et al**, établissent une simulation numérique basée sur la formulation de l'équation de l'énergie, une modélisation permettant de caractériser le coefficient d'échange convectif entre une couche limite dynamique établie et une plaque d'épaisseur nulle. Le comportement d'instabilité est du à l'inertie thermique de la couche limite, générée par une impulsion de flux de chaleur sur la face supérieure de la plaque.

Ces auteurs considèrent dans leur expérience, une plaque plane d'épaisseur nulle et de longueur supposée semi-infinie et le flux de chaleur est entièrement réfléchi dans le fluide.

Les auteurs tiennent à préciser que l'hypothèse d'une plaque infiniment mince sert à négliger le transfert radial de la chaleur.

Le flux imposé à  $t > 0$  est :

$$\phi_0 = -\lambda \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{y=0} \quad (\text{I.1})$$

Le champ de température est défini sous forme d'un polynôme comme suit :

$$\theta = \frac{\theta_p}{\delta_T^2} y^2 - 2 \frac{\theta_p}{\delta_T} y + \theta_p \quad (\text{I.2})$$

L'épaisseur de la couche limite thermique est alors déduite en remplaçant le terme

$\left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{y=0}$  par son expression dans l'équation précédente :

$$\delta_T = \frac{2\lambda_f \theta_p}{\phi_0} \quad (\text{I.3})$$

L'équation polynomiale du champ de vitesse est :

$$U = U_\infty \left[ \frac{2y}{\delta} - \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \quad (\text{I.4})$$

Où 
$$\delta = \frac{5x}{\text{Re}_x^{1/2}} \quad (\text{I.5})$$

La forme semi-intégrale de l'équation de l'énergie s'écrit :

$$\int_0^{\delta\tau} \frac{\partial\theta}{\partial t} dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta\tau} \theta U dy = -a_f \left( \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) \Big|_{y=0} \quad (I.6)$$

Ils intègrent ensuite l'équation semi-intégrale de l'énergie en remplaçant U et  $\theta$  par leurs expressions. Puis dans l'expression intégrée, ils remplacent la couche limite thermique par son expression en fonction du flux et des températures. L'expression résultante permet, connaissant le profil de température de la plaque, de calculer le coefficient d'échange convectif à partir de la relation de Newton vue dans l'introduction. Pour cela, on considère que la valeur du flux  $\phi_p(x,t)$  est égale à  $\phi_0$ , en prenant en compte l'hypothèse disant que la totalité du flux est réfléchi par la plaque.

Les auteurs ont, d'après les résultats expérimentaux, montré que l'évolution temporelle de la température à la paroi peut être approchée par une loi exponentielle avec une seule constante du temps.

$$\Theta_p(x,t) = \Theta_{p0}(x)e^{-t/\tau} + F(x) \quad (I.7)$$

Ils ont aussi déterminé une expression liant la constante de temps au nombre de Reynolds local.

$$\tau(x) = -4.25.10^{-19}(\text{Re}_x)^4 + 3.19.10^{-14}(\text{Re}_x)^3 - 9.12.10^{-10}(\text{Re}_x)^2 + 2.24.10^{-5}.\text{Re}_x \quad (I.8)$$

Suite à cela, le coefficient de convection s'exprime sous la forme suivante :

$$\text{D'où : } h(x,t) = 0.435 \lambda_f \text{Pr}^{1/3} \left( \frac{\rho U_\infty}{\mu x} \right)^{1/2} \left( 1 - e^{-t/\tau(x)} \right)^{-1} \quad (I.9)$$

Une bonne corrélation existe entre les différents résultats, ce qui permet de penser qu'il est possible de résoudre certains problèmes de convection en utilisant uniquement une approche analytique.

## **I.1.2 Plaque à épaisseur finie (couplage conduction – convection)**

### **I.1.2.1 – Capacité thermique négligeable**

Très récemment, les auteurs **M.Lachi et al [3]** ont cherché dans leurs études à caractériser les échanges thermiques avec couplage conduction – convection entre un

écoulement en convection forcée et une plaque plane, dont la face arrière est isolée. Dans leur modèle, ils considèrent le cas d'une plaque plane de longueur semi-infinie et d'épaisseur finie  $e$  et on néglige la conduction longitudinale dans la plaque en supposant que la longueur est très supérieure à son épaisseur. A un instant ( $t=0$ ), la plaque est impulsivement soumise à un échelon de flux énergétique uniforme  $\phi_0$  sur toute sa face supérieure en contact avec le fluide. On suppose que l'échelon de flux d'énergie généré sur l'interface solide-fluide est absorbé en partie par le solide et en partie rejeté dans le fluide.

Après avoir déterminé les profils de température et de vitesse, en utilisant la méthode de Karman – Pohlhausen dans le fluide, et le profil de température dans la plaque, ceux-ci sont injectés dans l'équation intégrale de l'énergie au sein de la couche limite thermique, qui est ensuite intégrée puis résolue avec les conditions aux limites. La forme finale de l'équation de l'énergie est une équation aux dérivées partielles qui leur permet de connaître le profil de température à l'interface  $\theta_p(x,t)$ , et de remonter au coefficient d'échange convectif local et instantané par la relation suivante :

$$h(x,t) = \frac{\phi_f(x,t)}{\theta_p(x,t)}$$

Pour la résolution numérique, ils ont utilisé la méthode des différences finies (schéma explicite). Ils ont déduit que les évolutions spatiales de la température à l'interface paramétrées par le temps, sont monotones croissantes et tendent progressivement vers des valeurs caractéristiques du régime d'équilibre thermique et les évolutions temporelles du coefficient de convection paramétrées par la position  $x$ , sont monotones décroissantes très rapidement au début de la phase transitoire pour tendre vers des valeurs limites correspondantes à celles du régime permanent.

### **I.1.2.2 – Capacité thermique non négligeable**

D'autres études se sont attachées au même problème en prenant en compte cette fois, l'épaisseur de la paroi ainsi que sa capacité calorifique. **Wang, Chung et Thomas [4]** ont considéré le cas d'un échelon de flux appliqué à la face inférieure d'une plaque d'épaisseur finie (l'écoulement principal ayant lieu sur la face supérieure), ils ont utilisé la méthode intégrale pour réduire l'équation aux dérivées partielles de l'énergie à une simple équation intégro-différentielle dont l'inconnue est la température à l'interface

fluide-paroi. L'équation obtenue est résolue numériquement en utilisant une technique de différence finie. Ainsi, deux cas d'écoulement sont considérés : un écoulement pariétal cisailé (profil de vitesse uniforme), et un écoulement dont le profil de vitesse dans la couche limite est du troisième ordre. Les auteurs montrent qu'à une abscisse donnée, le coefficient d'échange part d'une valeur relativement élevée pour tendre vers une valeur asymptotique décrivant le régime permanent. Ce coefficient peut passer par un minimum pour les écoulements cisailés. Ils notent qu'une capacité calorifique élevée de la paroi tend à diminuer la température à l'interface ainsi que le coefficient d'échange convectif. En outre, ils ont démontré que l'effet de la capacité thermique est négligeable en régime permanent.

### I.2 Mesure de coefficient d'échange par méthode impulsionnelle

Le principe sur lequel reposent les techniques de la méthode impulsionnelle est inspiré de la méthode de flash, développée par **W.J. Parker [5]** et son équipe en 1961 pour la caractérisation des matériaux et, en particulier, pour la mesure de leur diffusivité thermique. Cette méthode consiste à mesurer la réponse en température d'un échantillon à face parallèle, initialement à l'équilibre thermique, à une sollicitation en Dirac de flux sur l'une de ses faces.

Depuis, la méthode flash a été considérablement développée par de très nombreux auteurs et dans des buts aussi divers que la détermination des propriétés thermophysiques des matériaux, la mesure de résistance de contact ou encore la recherche des corrections à apporter aux thermogrammes du fait de la présence des pertes thermiques. Citons par exemple les travaux de **A.Degiovanni** et **D.Balageas [6]** sur la mesure de la diffusivité.

Ces dernières années, la méthode impulsionnelle par transmission (relevé de température en face arrière) tend à être remplacée par une variante dite par réflexion. Le dépôt d'énergie et la mesure s'effectuent sur la même face de l'échantillon. Cette méthode présente l'avantage de permettre des mesures même si la face arrière est inaccessible ou si l'échantillon est un mur semi-infini. Elle se révèle très intéressante pour des mesures sans contact donc non destructives.

Dans la littérature, l'excitation prend généralement deux formes : impulsion optique (laser ou lampe flash) ou bien effet électrique (décharge d'un condensateur sur un matériau conducteur électrique provoquant un échauffement par effet Joule). Nous exposons donc séparément, les principaux travaux antérieurs faits en utilisant l'une ou l'autre de ces excitations.

### I.2.1 Excitation thermique par un moyen optique

Depuis longtemps, le principe de la photothermique impulsionnelle par réflexion est utilisé par l'équipe de **Balageas**. Ces travaux prennent deux orientations principales : contrôle non destructif et caractérisation des matériaux d'une part, et mesure de transfert convectif d'autre part.

**D.Balageas** et **D.ory** [7] proposent dans un premier temps, des méthodes pour la mesure du coefficient d'échange  $h$  par thermographie infrarouge passive. La caméra de thermographie est intéressante car elle permet de visualiser un système entier et donc de réaliser des cartes de transfert surfacique. Ces auteurs ont étudié le transfert de chaleur entre une paroi initialement à la température  $T_0$  et un fluide en écoulement à une température  $T_\infty$ . La modélisation s'appuie sur un système de type mur semi-infini, connaissant l'évolution de la température entre le début du transfert convectif ( $t = 0$ ) et un instant  $t$ , les auteurs calculent le coefficient  $h$  par la relation :

$$h = \frac{b}{t^{1/2}} \operatorname{erfc}^{-1}(1 - \theta) \quad (\text{I.10})$$

avec :

$\theta$  : Température adimensionnelle  $(T_p - T_0)/(T_\infty - T_0)$

$b$  : Effusivité

$\operatorname{erfc}^{-1}(x)$  : Inverse de la fonction  $\exp(x^2) \cdot \operatorname{erfc}(x)$

$\operatorname{erfc}(x)$  : Fonction erreur complémentaire.

Afin d'accélérer les calculs, la fonction  $\operatorname{erfc}^{-1}$  est donnée sous forme d'un polynôme. Dans le but de généraliser ce type de mesure à d'autres systèmes thermiques, les auteurs étudient les effets de l'épaisseur finie dans deux cas : quand la face arrière de

la paroi est isolée thermiquement ou bien quand elle est supposée à température constante. Ces deux cas sont les plus rencontrés en aérospatiale, notamment au niveau de bord d'attaque des ailes ou du nez des avions. Pour chaque cas, les auteurs donnent sous forme polynomiale, l'écart sur la mesure de  $h$  entre le modèle mur semi-infini et le système d'épaisseur finie. Ils ont pu mettre en évidence l'existence de corrélations entre cet écart et des groupements adimensionnels formés à partir des nombres de Fourier et de Biot relatifs à l'épaisseur de la paroi.

Dans un deuxième temps, **D.Balageas** et **D.Boscher** [8], [9] proposent une méthode de thermographie active pour évaluer les pertes convectives d'un système afin de corriger les thermogrammes issus d'expériences de photothermique impulsionnelle. Ils déterminent, pour cela, des corrélations traduisant l'écart entre un thermogramme avec pertes et un thermogramme sans pertes. Les corrélations, fonctions des nombres sans dimension Biot et Fourier, sont données dans le cas du mur semi-infini et dans le cas du mur d'épaisseur finie, dont la face arrière est isolée ou bien soumise à la même condition de Fourier que la face avant. Cette méthode impose évidemment de connaître la valeur du coefficient  $h$ . A l'inverse, les auteurs étendent l'étude à la détermination des coefficients de transferts convectifs. Ils calculent la valeur du coefficient  $h$  à partir d'un thermogramme expérimental avec pertes et d'un thermogramme sans pertes. Cette méthode est appliquée à la détermination de  $h$  sur des maquettes en soufflerie.

En développant l'utilisation des moments temporels, ces auteurs ont donné l'expression analytique des moments temporels d'ordre 0 pour un milieu semi-infini, pour un mur d'épaisseur finie dont la face arrière est isolée et pour un mur d'épaisseur fini soumis sur sa face arrière à la même condition de Fourier que la face avant, soient:

➤ Mur semi-infini :  $m_0 = \frac{Q}{h}$

➤ Mur d'épaisseur finie avec face arrière isolée :  $m_0 = \frac{Q}{h}$

➤ Mur d'épaisseur finie avec condition de Fourier sur les deux faces :  $m_0 = \frac{Q}{h} \frac{1 + Bi}{2 + Bi}$

Avec :

$$m_0 = \int_0^{\infty} T(u) du$$

$B_i$  : nombre de Biot

Q : densité d'énergie absorbée par la paroi.

On constate, fait remarquable, que les résultats sont identiques pour le mur semi-infini et pour le mur d'épaisseur finie dont la face arrière est isolée. L'utilisation des moments temporels d'ordre 0 se heurte au fait que la convergence de l'intégrale sera d'autant plus longue que les pertes seront faibles, alors qu'expérimentalement les bornes d'intégration sont finies.

Les difficultés expérimentales rencontrées lors d'une telle mesure du coefficient de convection, lorsque ce dernier est faible, sont exposées par **B. Remy et al [10]**. Pour la détermination de ces coefficients les auteurs ont proposé différents modèles de complexité plus ou moins grande. En particulier, une méthode dite à deux flashes permet la réduction du nombre de paramètres à identifier et l'estimation des coefficients d'échange s'étendant de ceux de la convection forcée jusqu'à des valeurs proches de celles de la convection naturelle.

**Crowther [11]** a étudié dans le cadre de sa thèse, la faisabilité d'une méthode optique pour la mesure de coefficient d'échange convectif en utilisant une méthode impulsionnelle. Les cas de la convection naturelle et de la convection forcée sur une plaque plane sont étudiés. Comme les auteurs précédents, il a considéré des méthodes de détermination du coefficient de convection constant pendant l'expérience impulsionnelle.

Afin d'améliorer les échanges convectifs entre une plaque plane chauffée uniformément et un écoulement, les auteurs **J. Padet et al [12]** utilisent un modèle où le coefficient d'échange est supposé constant pendant l'expérience impulsionnelle, et un autre modèle où ils tiennent compte de sa variation dans le temps.

Dans le modèle à coefficient d'échange constant, l'énergie émise est supposée suffisamment faible pour ne pas perturber la couche limite. Le modèle de température choisi est celui obtenu par conduction dans un milieu semi-infini avec un coefficient d'échange constant.

En utilisant les conditions aux limites, la solution en température dans le milieu semi-infini pour une impulsion de flux très brève (Dirac) est alors obtenue, puis par application du produit de convolution, ils obtiennent l'expression pariétale du profil de température d'un mur semi-infini pour une excitation créneau de flux «  $t_c$  ».

Le modèle à coefficient constant est donc basé sur la méthode d'identification de paramètres. Ils cherchent alors la valeur du coefficient d'échange  $h$  par minimisation des écarts entre le thermogramme expérimental et le modèle analytique.

Dans le modèle à coefficient d'échange variable, ils ont admis que la couche limite thermique dépendait du temps, sous l'action de l'impulsion de flux envoyée par les lampes. En écrivant les équations de l'énergie et de la conservation de la masse, puis en introduisant la couche limite dynamique et une fonction courant particulière, ils aboutissent à l'équation différentielle de Blasius. Puis l'extension de la méthode différentielle en régime variable leur a permis de transformer l'équation de l'énergie en équation différentielle qu'ils ont résolu numériquement.

Leur étude montre qu'à la suite d'une impulsion brève de type Dirac, le coefficient peut être considéré comme constant car la couche limite n'est pas affectée. Par contre, dans le cas d'impulsion longue, de type créneau de flux, la couche limite est modifiée. L'hypothèse d'un  $h$  constant n'est plus envisageable. Le modèle de  $h$  variable donne de meilleurs résultats, et ceci d'autant plus que la durée du créneau s'allonge ou que la vitesse du fluide augmente.

### **I.2.2 – Excitation thermique par effet électrique**

Plusieurs auteurs ont cherché à caractériser le coefficient d'échange convectif en analysant le régime de relaxation de la paroi soumise à la décharge électrique d'un condensateur. Ce principe, est adopté par **Petit et al [13]**, **Massard et al [14]** pour identifier le coefficient de convection entre un tube cylindrique et un fluide en écoulement interne. Selon la nature thermique du fluide, les auteurs proposent deux

modélisations. La première ne tient compte que de l'évolution de la température de la paroi, considérant le fluide de température constante (cas de l'eau). La deuxième modélisation consiste à faire un bilan enthalpique entre la paroi et le fluide, dont la température est supposée variable (cas de l'air). Dans les deux cas, la vitesse du fluide est supposée uniforme, les échanges de chaleur paroi-milieu extérieur sont représentés par un coefficient d'échange constant et les propriétés thermophysiques de la paroi et du fluide sont constantes. Les auteurs définissent comme référence la température du thermogramme à l'instant à partir duquel le régime de relaxation prend une allure exponentielle. Dans cette portion de courbe, ils déterminent le temps nécessaire ( $t_e$ ) pour que la température de la paroi devient égale à  $\frac{1}{e}T_{ref}$ . Ils montrent qu'à chaque valeur de ce temps, correspond une valeur du coefficient d'échange. Ils montrent également, que la valeur du saut de température initial, provoqué par la décharge du condensateur, n'a pas d'influence sur le coefficient d'échange.

Les résultats obtenus sont en bon accord avec des corrélations usuelles.

**A.Hadi et A.Degiovani [15], [16] et [17]** traitent, dans leurs études, le cas d'une ailette cylindrique de petites dimensions. Les auteurs ont pu assimiler la réponse en température à une exponentielle pure et ils ont identifié  $h$  par les moments temporels d'ordre 0. Ils déterminent l'évolution théorique du moment  $m_0$  en fonction du  $h$ , puis ils calculent la valeur du coefficient de transfert issue du thermogramme expérimental. La valeur de  $h$  retenue est celle qui assure l'égalité des moments temporels  $m_0$  expérimental et théorique. Les résultats expérimentaux s'avèrent en bon accord avec ceux fournis par les formules de corrélations.

Le problème avec perturbation sinusoïdale de la température ou du flux sur une plaque plane, est abordé par **Abboudi et al [18]**. Les auteurs ont réalisé des cartographies de transfert thermique à l'aide d'une camera de thermographie infrarouge. A l'aide d'un bilan enthalpique sur l'ensemble du système, ils expriment le coefficient  $h$  en fonction de la densité de flux transmis au fluide, de la température de la paroi et de la température du fluide. Toutes ces grandeurs sont des fonctions de l'espace et du temps.

### I.3 Conclusion

Nous avons vu que les recherches concernant un échelon de flux pariétal ont été essentiellement abordées en utilisant la méthode intégrale de Karman-Pohlhausen. Cette méthode nécessite l'introduction d'un profil de vitesse et de température dans la couche limite, est généralement suivie par une résolution numérique.

Dans le même but, nous avons choisi de traiter le cas d'une variation de flux à la paroi, en utilisant, cette fois-ci, l'outil mathématique (fonction de GREEN [19], [20] et [21], BESSEL [22]).

En plus des échelons positifs (échauffement) sur le flux à la paroi, nous traitons le cas des échelons négatifs (relaxation) sur les mêmes conditions aux limites. La relaxation est un phénomène important au point de vue théorique et pratique, qui, à notre connaissance, n'a pas été traitée dans la littérature. Il est donc nécessaire d'aborder le problème complet d'échauffement + relaxation pour pouvoir dégager une loi d'évolution du coefficient de convection dans le cas de créneau de flux à la paroi. Cette loi sera utilisée pour le dépouillement des thermogrammes expérimentaux issus de la méthode impulsionnelle, lorsque le coefficient d'échange est supposé variable dans le temps. De plus, la connaissance des mécanismes de l'échauffement et de la relaxation permettrait de résoudre les problèmes de variation quelconque des conditions thermiques à la paroi.

Quant à la mesure du coefficient d'échange par méthode impulsionnelle, il est difficile d'apporter une conclusion définitive sur le phénomène de couplage conduction-convection. De ce fait, la perturbation du transfert par l'apport d'énergie pendant l'expérience impulsionnelle, nécessite une étude plus approfondie.

## MODÈLE MATHÉMATIQUE

### II.1 Introduction

Les méthodes de type différences finies, éléments finis, utilisées dans l'étude du comportement thermique des objets, sont basées sur la discrétisation spatiale des éléments constituants. Ces méthodes qui permettent de tenir compte de l'inertie de l'objet, ne fournissent des résultats corrects que si la discrétisation est très fine, ce qui entraîne un allongement du temps de calcul. Nous proposons ici des méthodes analytiques basées sur la théorie des fonctions de Green, qui permettent de s'affranchir de ces problèmes.

L'étude du comportement thermique d'une plaque plane soumise à des conditions aux limites variables exige une étude des phénomènes de transfert de chaleur en régime instationnaire.

Nous allons élaborer un modèle mathématique basé sur la théorie des fonctions de Green à partir de la résolution de l'équation de propagation de la chaleur dans la plaque plane.

La méthode de la fonction de Green, très connue dans nombreux domaines de la physique où elle s'est définitivement imposée, est encore assez peu utilisée en thermique. Son avantage principal est qu'elle permet de synthétiser le comportement thermique d'une structure solide même complexe. Cet avantage peut à priori paraître purement formel. Il n'en est rien car, comme nous le verrons, cette formulation s'accommode d'hypothèses physiques, concernant les échanges, moins restrictives que celles utilisées habituellement, et montre comment traiter des problèmes comme, par exemple, celui de coefficients d'échange convectif dépendant du temps.

### II.2 Principe expérimental

Une plaque plane constituée d'un matériau homogène est chauffée pendant un temps  $t_1$  sur sa face inférieure par un flux de rayonnement  $\varphi_i$  uniforme et constant et puis refroidie en diminuant le flux  $\varphi_0$  à  $\varphi_1 < \varphi_0$ . Cette plaque est soumise sur sa surface supérieure à un écoulement d'air de vitesse et de température  $U$  et  $T_\infty$  (figure II.1). Le transfert de chaleur superficiel sur la face inférieure est caractérisé par un coefficient d'échange convectif  $h_i^0$  constant déterminé à partir des lois de la convection naturelle

sur plaque plane. Le champ de température dans la plaque est supposé unidirectionnel et est désigné par  $T(x,t)$ . La température de la face supérieure de la plaque constitue la seule mesure expérimentale durant les phases de chauffage correspondant aux temps  $0 \leq t \leq t_1$  et de relaxation pour  $t \geq t_1$ . Les modèles thermocinétiques développés dans ce travail permettront de définir le coefficient d'échange convectif  $h_e$ .

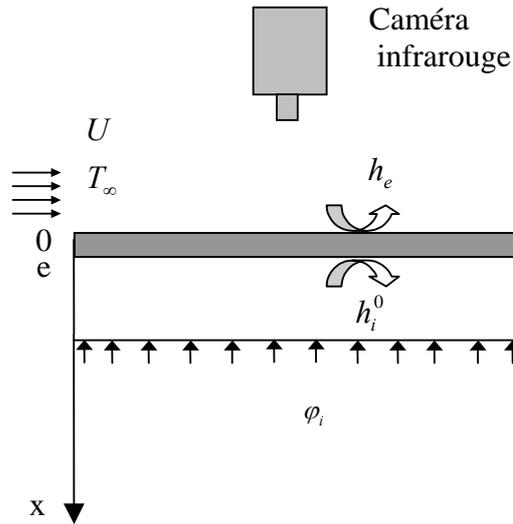


Figure II.1: Représentation schématique des conditions aux limites sur la plaque

### II.3 Modèle Mathématique : Température imposée en $x = 0$

A l'instant initial l'ensemble du système est à la température ambiante  $T_\infty$ . Cette température est prise comme origine des températures. On note :  $\theta(x,t) = T(x,t) - T_\infty$

#### II.3.1 Equation de propagation de la chaleur

La propagation de la chaleur dans la plaque plane étant supposée unidirectionnelle, et suit la loi de conduction :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{II.1})$$

Avec la condition initiale :  $\theta(x,0) = 0$

#### II.3.2 Conditions limites

La condition limite sur la face inférieure  $x = e$  s'écrit :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x}(x,t) \right|_{x=e} = -H_i^0 \theta(e,t) + \frac{\varphi_i(t)}{\lambda} \quad (\text{II.2})$$

Avec  $H_i^0 = \frac{h_i^0}{\lambda}$  et  $\varphi_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \varphi_0 & \text{si } 0 < t \leq t_1 \\ \varphi_1 & \text{si } t > t_1 \end{cases} \quad (\text{II.3})$

$\varphi_i(t)$  : le flux de chaleur de rayonnement absorbé par la plaque.

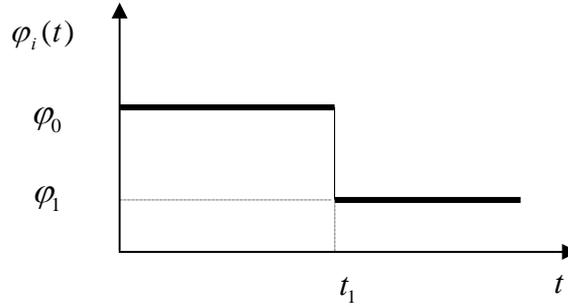


Figure II.2: Représentation du flux de chauffage (relaxation)

Sur la face supérieure  $x = 0$ , la condition limite s'écrit :

$$\theta(0,t) = f(t) \quad (\text{II.4})$$

La solution du problème (II.1-4) peut s'écrire sous la forme d'une somme de deux solutions [21] :

$$\theta(x,t) = \theta_1(x,t) + \theta_2(x,t) \quad (\text{II.5})$$

$\theta_1(x,t)$  : la solution du problème avec une température nulle en  $x = 0$ .

$\theta_2(x,t)$  : la solution du problème avec un flux absorbé nul  $\varphi_i(t) = 0$ .

L'équation (1) appliquée à  $\theta_1$  et  $\theta_2$  devient :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \theta_i(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta_i(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad i = 1 \text{ ou } 2 \quad (\text{II.6})$$

Avec les conditions limites :

$$\begin{cases} \theta_1(0,t) = 0 \\ \left. \frac{\partial \theta_1}{\partial x}(x,t) \right|_{x=e} = -H_i^0 \theta_1(e,t) + \frac{\varphi_i(t)}{\lambda} \\ \theta_1(x,0) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

et

$$\begin{cases} \theta_2(0,t) = f(t) \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial x}(x,t)|_{x=e} = -H_i^0 \theta_2(e,t) \\ \theta_2(x,0) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

### II.3.3 Recherche de la solution $\theta_1(x,t)$ par la théorie des fonctions de Green

La fonction de Green  $G(x,\xi,t)$  représente la réponse de la plaque à une impulsion de chaleur unité apportée au point  $\xi$  à l'instant  $t=0$ . La fonction de Green existe toujours et est unique et continue pour les temps strictement positifs. Lorsque  $t \rightarrow 0_+$  elle tend vers la distribution de Dirac :  $\delta(x-\xi)\delta(t)$

Pour résoudre analytiquement l'équation de propagation de la chaleur dans la plaque plane, définissons la fonction  $G(x,\xi,t)$  [24,25,26] comme solution du problème suivant :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial G}{\partial t}(x,\xi,t) - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,\xi,t) = \delta(x-\xi)\delta(t) \quad (\text{II.9})$$

Avec 
$$G(x,\xi,t) = 0 \quad \text{si} \quad t \leq 0 \quad (\text{II.10})$$

Cette fonction de Green  $G(x,\xi,t)$  doit vérifier les conditions aux limites :

$$\begin{cases} G(0,\xi,t) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi,t)|_{x=e} = -H_i^0 G(e,\xi,t) \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

Prenons les transformées de Laplace des équations (1) et (9) :

$$\begin{cases} \frac{p}{a} \bar{\theta}(x,p) - \frac{1}{a} \theta(x,0) - \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2}(x,p) = 0 \\ \frac{p}{a} \bar{G}(x,\xi,p) - \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial x^2}(x,\xi,p) = \delta(x-\xi) \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

En multipliant la première équation par  $\bar{G}(x, \xi, p)$  et la seconde par  $\bar{\theta}(x, p)$ , le système (II.12) devient :

$$\begin{cases} \frac{p}{a} \bar{\theta} \bar{G} - \frac{1}{a} \theta_0 \bar{G} - \bar{G} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{p}{a} \bar{G} \bar{\theta} - \bar{\theta} \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial x^2} = \bar{\theta} \delta(x - \xi) \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

Nous obtenons après soustraction des deux équations :

$$\frac{1}{a} \theta_0 \bar{G} + \left( \bar{G} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} - \bar{\theta} \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial x^2} \right) = \bar{\theta} \delta(x - \xi) \quad (\text{II.14})$$

En intégrant les deux membres de l'égalité dans l'intervalle  $[0, e]$ , on obtient :

$$\int_0^e \bar{\theta}(x, p) \delta(x - \xi) dx = \int_0^e \frac{\bar{G}(x, \xi, p)}{a} \theta_0(x) dx + \int_0^e \left( \bar{G} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} - \bar{\theta} \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial x^2} \right) dx \quad (\text{II.15})$$

Sachant que :

$$\int_0^e \bar{\theta}(x, p) \delta(x - \xi) dx = \bar{\theta}(\xi, p)$$

et en développant la deuxième intégrale du second membre de l'équation (15), nous obtenons :

$$\bar{\theta}(\xi, p) = \int_0^e \frac{\bar{G}(x, \xi, p)}{a} \theta_0(x) dx + \left[ \bar{G}(e, \xi, p) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}(x, p) \Big|_{x=e} - \bar{\theta}(e, p) \frac{\partial \bar{G}}{\partial x}(x, \xi, p) \Big|_{x=e} - \bar{G}(0, \xi, p) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}(x, p) \Big|_{x=0} + \bar{\theta}(0, p) \frac{\partial \bar{G}}{\partial x}(x, \xi, p) \Big|_{x=0} \right] \quad (\text{II.16})$$

Les deux termes de l'équation (II.16) sont respectivement, les contributions à la solution générale de la condition initiale et des conditions aux frontières.

'e' représente l'épaisseur de la plaque et  $G, \bar{G}$  sont respectivement les valeurs de la fonction de Green et de sa transformée de Laplace évaluées aux points de frontière 0, e. Cette forme de  $\bar{\theta}(\xi, p)$  est très générale. Dans le cas particulier de  $\theta_1$ , le premier terme est nul et dans le deuxième terme subsiste que :

$$\bar{\theta}_1(x, p) = \frac{1}{\lambda} \bar{G}(x, e, p) \bar{\varphi}_1(p) \quad (\text{II.17})$$

La transformée inverse de cette dernière donne :

$$\theta_1(x, t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^t \varphi_1(\tau) G(e, x, t - \tau) d\tau \quad (\text{II.18})$$

Ce profil permet, connaissant la fonction de Green, de déterminer l'évolution de la température dont les conditions limites (II.7).

### II.3.4 Recherche de la solution $\theta_2(x,t)$ (Théorème de Duhamel)

Le problème dont les conditions aux limites sont de type (II.8) présente une non homogénéité qui peut être traitée en appliquant le théorème de Duhamel [21].

On rappelle que le théorème de Duhamel ne peut s'appliquer que dans le cas des modèles ne présentant qu'une seule non homogénéité (soit par un terme de source de chaleur dans l'équation de propagation de la chaleur soit par un terme au niveau des conditions limites). Il faut également que le solide soit initialement à température nulle (Identique à température uniforme en faisant un simple changement de variable).

Les conditions limites du système (II.8) présentent donc une seule non homogénéité par le terme  $f(t)$ .

En remplaçant  $f(t)$  par 1, on obtient le problème auxiliaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} \frac{\partial \theta^*(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta^*(x,t)}{\partial x^2} = 0 \\ \theta^*(x,t) \Big|_{x=0} = 1 \\ \frac{\partial \theta^*(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=e} = -H_i^0 \theta^*(e,t) \\ \theta^*(x,0) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.19})$$

L'application de la transformée de Laplace sur les deux problèmes initial et auxiliaire permet d'écrire la relation analytique les reliant :

$$\bar{\theta}_2(x,p) = p \bar{f}(p) \bar{\theta}^*(x,p) \quad (\text{II.20})$$

On voit l'apparition d'une propriété importante de la transformée de Laplace et pour cela, il est très intéressant d'utiliser les transformées de Laplace en association avec le théorème de Duhamel.

Nous obtenons par l'application du théorème du produit de convolution, l'expression de la température  $\theta_2(x,t)$  :

$$\theta_2(x,t) = \int_0^t \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} \theta^*(x,t-\tau) d\tau + f(0) \theta^*(x,t) \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{II.21})$$

La solution du problème auxiliaire  $\theta^*(x,t)$  peut s'écrire sous la forme de la somme de deux solutions  $u^*(x)$  et  $w^*(x,t)$  respectivement du régime permanent et transitoire qui se présentent de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u^*(x)}{\partial x^2} = 0 \\ u^*(0) = 1 \\ \left. \frac{\partial u^*(x)}{\partial x} \right|_{x=e} = -H_i^0 u^*(e) \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

La solution permanente  $u^*(x)$  du système (II.22) s'écrit alors :

$$u^*(x) = 1 - \frac{H_i^0}{H_i e + 1} x \quad (\text{II.23})$$

et

$$\begin{cases} \frac{1}{a} \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = 0 \\ w^*(x,t) \Big|_{x=0} = 0 \\ \left. \frac{\partial w^*(x,t)}{\partial x} \right|_{x=e} = -H_i^0 w^*(e,t) \\ w^*(x,0) = -u^*(x) \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

En utilisant comme précédemment l'équation (II.16) [27], on trouve :

$$w^*(x,t) = - \int_0^e \frac{G(x,\xi,t)}{a} u^*(\xi) d\xi \quad (\text{II.25})$$

D'où :

$$\theta^*(x,t) = u^*(x) - \int_0^e \frac{G(x,\xi,t)}{a} u^*(\xi) d\xi \quad (\text{II.26})$$

La solution de cette dernière est explicitée en annexe 1.

En reportant la solution  $\theta^*(x,t)$  dans l'expression (II.21), on obtient :

$$\theta_2(x,t) = u^*(x)f(t) - \int_0^t \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} \int_0^e \frac{G(x,\xi,t-\tau)}{a} u^*(\xi) d\xi d\tau \quad (\text{II.27})$$

Finalement la solution complète du problème s'écrit :

$$\theta(x,t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^t \varphi_i(\tau) G(e,x,t-\tau) d\tau + u^*(x)f(t) - \int_0^t \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} \int_0^e \frac{G(x,\xi,t-\tau)}{a} u^*(\xi) d\xi d\tau \quad (\text{II.28})$$

Cette dernière nous permet donc, connaissant les fonctions,  $\varphi_i(t)$ ,  $f(t)$  et la fonction de Green  $G(x, \xi, t)$  de connaître l'évolution spatiale et temporelle de la température de la plaque plane d'épaisseur  $e$ , soumise à un flux de chauffage sur la face opposée à l'écoulement d'air.

La transformée de Laplace  $\bar{\theta}(x, p)$  s'écrira :

$$\bar{\theta}(x, p) = \frac{1}{\lambda} \bar{G}(e, x, p) \bar{\varphi}_i(p) + u^*(x) \bar{f}(p) - p \bar{f}(p) \int_0^e \frac{G(x, \xi, p)}{a} u^*(\xi) d\xi \quad (\text{II.29})$$

De même, on peut obtenir  $\bar{\theta}(x, p)$  directement à partir de l'équation (II.16) :

$$\bar{\theta}(x, p) = \frac{1}{\lambda} \bar{G}(x, e, p) \bar{\varphi}_i(p) + \bar{f}(p) \left. \frac{\partial \bar{G}}{\partial \xi}(x, \xi, p) \right|_{\xi=0} \quad (\text{II.30})$$

Ces deux expressions sont en fait équivalentes.

### II.3.5 Recherche de la fonction de Green

Il existe deux méthodes classiques pour déterminer la fonction de Green, solution du système (II.9 – II.11) :

- la méthode de séparation de variables ;
- la méthode de la transformée de Laplace.

#### II.3.5.1 Méthode de séparation de variable

##### II.3.5.1.1 Définition des fonctions propres et valeurs propres

La méthode de séparation des variables revient en fait, à rechercher les valeurs propres et fonctions propres  $\varphi_n(x)$  de l'opérateur différentiel  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , agissant sur l'espace des fonctions continues dans l'intervalle  $x \in [0, e]$ .

Cet espace étant muni du produit scalaire  $\langle \phi | \psi \rangle = \int_0^e \phi(x) \psi(x) dx$ , l'opérateur  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  est

hermitien (ou plutôt symétrique, puisque nous n'envisageons que des fonctions réelles). Ses valeurs propres sont donc réelles, les fonctions propres associées sont orthogonales, et il est toujours possible de les normer :  $\langle \phi_n | \psi_p \rangle = \delta_{np}$

Afin de trouver la fonction de Green pour ce problème, nous écrivons les transformées de Laplace du système (II.9-11).

$$\frac{p}{a}\bar{G}(x, \xi, p) - \frac{\partial^2 \bar{G}(x, \xi, p)}{\partial x^2} = \delta(x - \xi) \quad (\text{II.31})$$

$$\begin{cases} \bar{G}(0, \xi, p) = 0 \\ \left. \frac{\partial \bar{G}}{\partial x}(x, \xi, p) \right|_{x=e} = -H_i^0 \bar{G}(e, \xi, p) \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

On montre que l'équation (II.31) a pour solution :

$$\bar{G}(x, \xi, p) = a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(x)\psi_n(\xi)}{p + a\alpha_n^2} \quad (\text{II.33})$$

Où  $\psi_n(x)$  et  $\alpha_n$  sont respectivement les fonctions propres et les valeurs propres du Laplacien.

La transformée inverse de l'équation (II.33) est :

$$G(x, \xi, t) = a \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\psi_n(\xi) e^{-a\alpha_n^2 t} \quad (\text{II.34})$$

L'équation aux valeurs propres associées s'écrit :

$$\frac{d^2 \psi_n(x)}{dx^2} + \alpha^2 \psi_n(x) = 0 \quad 0 < x < e \quad (\text{II.35})$$

et admet comme solution :

$$\psi_n(x) = A_n \cos(\alpha_n x) + B_n \sin(\alpha_n x) \quad (\text{II.36})$$

Ces fonctions doivent satisfaire les conditions aux limites en  $x = 0$  et  $x = e$ .

$$\begin{cases} \psi_n(0) = 0 \\ \left. \frac{d\psi_n}{dx}(x) \right|_{x=e} + H_i^0 \psi_n(e) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.37})$$

Après avoir introduit la solution (II.36) dans le système d'équations (II.37), nous

obtenons l'équation transcendante donnant les  $\alpha_n$  :

$$\alpha_n \cot g(\alpha_n e) = -H_i^0 \quad (\text{II.38})$$

et celle donnant les fonctions propres  $\psi_n(x)$ .

$$\psi_n(x) = B_n \sin(\alpha_n x) \quad (\text{II.39})$$

La résolution de l'équation transcendante (II.38), donne un nombre infini discret de valeurs propres.

La normalisation des fonctions propres  $\psi_n$  permet de déterminer les coefficients  $B_n$  :

$$\int_0^e \psi_n^2(x) dx = B_n^2 \int_0^e \{\sin(\alpha_n x)\}^2 dx = 1 \quad (\text{II.40})$$

Ce qui donne :

$$B_n^2 = 2 \frac{\alpha_n^2 + H_i^{0^2}}{e(\alpha_n^2 + H_i^{0^2}) + H_i^0} \quad (\text{II.41})$$

Et finalement :

$$G(x, \zeta, t) = a \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \sin(\alpha_n x) \sin(\alpha_n \zeta) e^{-a\alpha_n^2 t} \quad (\text{II.42})$$

### II.3.5.1.2 Calcul numérique des valeurs propres

Il existe plusieurs méthodes de résolution numérique de l'équation transcendante (II.38) en particulier les méthodes numériques de Newton et celle de Dichotomie (Matlab).

Dans notre travail nous avons opté pour la méthode de Dichotomie.

Cette méthode revient à rechercher les points d'intersection, par encadrement de plus en plus serré, du graphe de la fonction  $\cot g(\alpha e)$ , qui est une fonction périodique singulière aux points  $\alpha = n\pi/e$  s'annulant entre chaque asymptote verticale, et du graphe de la fonction  $-\frac{H_i^0}{\alpha}$  qui admet une singularité au point  $\alpha = 0$ .

Cette méthode est intéressante car on sait à l'avance dans quels intervalles se trouvent ces points d'intersection (figure II.3). La méthode de Dichotomie est donc appliquée dans chaque intervalle délimité par deux asymptotes consécutives.

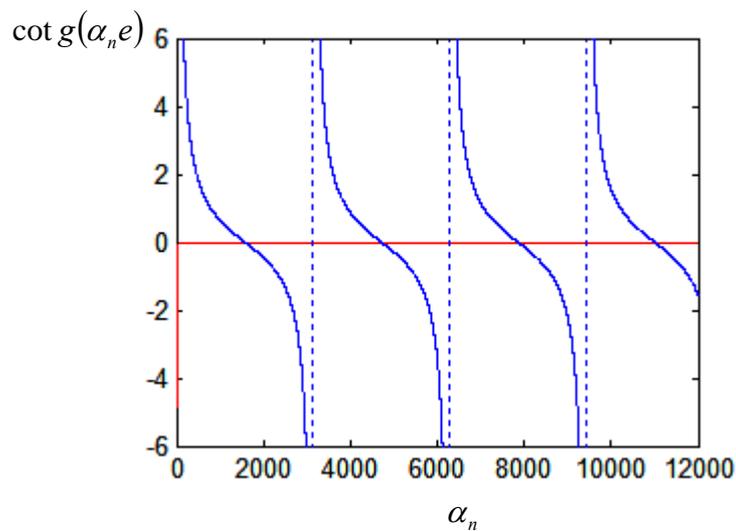


Figure II.3 : Valeurs propres de Laplacien

### II.3.5.2 Méthode directe par la transformée de Laplace

Il est possible de calculer analytiquement la transformée de Laplace de la fonction de Green [22].

La solution de l'équation (II.31) peut s'écrire aussi sous la forme suivante:

$$\bar{G}(x, \xi, p) = F(p)e^{-q|x-\xi|} + D(x, \xi, p) \quad (\text{II.43})$$

Avec 
$$q = \sqrt{\frac{p}{a}}$$

La dérivée première de l'équation (II.43) s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{G}(x, \xi, p)}{\partial x} = -q \frac{x-\xi}{|x-\xi|} F e^{-q|x-\xi|} + \frac{\partial D}{\partial x} \quad (\text{II.44})$$

Or, 
$$\frac{x-\xi}{|x-\xi|} = 2E(x-\xi) - 1$$

Et en utilisant la propriété de la fonction de Heaviside  $E(x-\xi)$  :

$$\frac{\partial}{\partial x}(E(x-\xi)) = \delta(x-\xi) \quad (\text{II.45})$$

La dérivée seconde de (II.43) s'écrira :

$$\frac{\partial^2 \bar{G}(x, \xi, p)}{\partial x^2} = q^2 F e^{-q|x-\xi|} - 2q\delta(x-\xi)F e^{-q|x-\xi|} + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \quad (\text{II.46})$$

On reporte l'expression (II.46) dans l'équation (II.31), on aura donc :

$$F(p) = \frac{1}{2q} \quad (\text{II.47})$$

Et 
$$q^2 D(x, \xi, p) - \frac{\partial^2 D(x, \xi, p)}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{II.48})$$

La solution générale de l'expression (II.48) peut toujours s'écrire :

$$D(x, \xi, p) = A(\xi, p)e^{-qx} + B(\xi, p)e^{qx} \quad (\text{II.49})$$

L'équation (II.43) devient donc :

$$\bar{G}(x, \xi, p) = \frac{1}{2q} e^{-q|x-\xi|} + A(\xi, p)e^{-qx} + B(\xi, p)e^{qx} \quad (\text{II.50})$$

La forme de  $A(\xi, p)$  et  $B(\xi, p)$  est explicitée par les conditions aux limites :

$$\bar{G}(x, \xi, p) \Big|_{x=0} = 0 \quad (\text{II.51})$$

$$\frac{\partial \bar{G}(x, \xi, p)}{\partial x} \Big|_{x=e} = -H_i^0 \bar{G}(x, \xi, p) \Big|_{x=e}$$

On y remplace l'expression de  $\bar{G}(x, \xi, p)$

$$\frac{e^{-q\xi}}{2q} + A(\xi, p) + B(\xi, p) = 0 \quad (\text{II.52})$$

$$\frac{(q - H_i^0)}{2q} e^{-q(e-\xi)} = (H_i^0 - q)A(\xi, p)e^{-qe} + (q + H_i^0)B(\xi, p)e^{qe}$$

Les termes  $A(\xi, p)$  et  $B(\xi, p)$  s'écrivent :

$$A(\xi, p) = \frac{1}{2q} \frac{(q - H_i^0)e^{-q(e-\xi)} + (q + H_i^0)e^{q(e-\xi)}}{(H_i^0 - q)e^{-qe} - (q + H_i^0)e^{qe}} \quad (\text{II.53})$$

$$B(\xi, p) = \frac{1}{2q} \frac{(q - H_i^0)e^{-q(e+\xi)} + (H_i^0 - q)e^{-q(e-\xi)}}{(H_i^0 - q)e^{-qe} - (q + H_i^0)e^{qe}}$$

Finalement la transformée de Laplace de la fonction de Green cherchée a la forme :

$$\bar{G}(x, \xi, p) = \frac{1}{2q} \left\{ \frac{(q - H_i^0)e^{-q|x-\xi|} + (q + H_i^0)e^{-q|x-\xi|+2qe}}{(q - H_i^0) + (q + H_i^0)e^{2qe}} + \frac{(H_i^0 - q)e^{-q(x-\xi)} - (q + H_i^0)e^{-q|x+\xi|+2qe}}{(q - H_i^0) + (q + H_i^0)e^{2qe}} \right. \\ \left. + \frac{(H_i^0 - q)e^{q(x-\xi)} + (q - H_i^0)e^{q|x+\xi|}}{(q - H_i^0) + (q + H_i^0)e^{2qe}} \right\} \quad (\text{II.54})$$

La forme de la fonction de Green donnée par l'expression (II.54) n'intervient pas dans les calculs ; seules ses valeurs aux frontières de la paroi,  $\bar{G}(e, \xi, p)$  et  $\left. \frac{\partial \bar{G}(x, \xi, p)}{\partial x} \right|_{x=0}$ ,

interviennent directement dans les équations du problème :

$$\bar{G}(e, \xi, p) = \frac{e^{-qe} (e^{q\xi} - e^{-q\xi})}{(q + H_i^0) + (q - H_i^0) e^{-2qe}} \quad (II.55)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{G}(x, \xi, p)}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{(q + H_i^0) e^{-q\xi} + (q - H_i^0) e^{q\xi - 2qe}}{(q + H_i^0) + (q - H_i^0) e^{-2qe}}$$

L'inversion de ces transformées de Laplace, techniquement très difficile, conduit de toute façon à la représentation en série (II.42).

Ces expressions permettent en revanche d'étudier le comportement de leurs originaux au voisinage de  $t=0$  et l'infinie, et les comportements asymptotiques pour qui l'approche par les séries ne permet pas de faire.

### II.3.6 – Représentation des fonctions $f(t)$ et $\bar{f}(p)$

La température imposée  $f(t)$  obtenue expérimentalement à l'aide de la caméra infrarouge est représentée mathématiquement sous la forme :

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) = f_\infty \left( 1 - \sum_{m=1}^M a_m e^{-\gamma_m t} \right) & \text{si } 0 \leq t \leq t_1 \\ f_2(t) = f_\infty' + (f_c - f_\infty') \sum_{k=1}^K b_k e^{-\delta_k (t-t_1)} & \text{si } t \geq t_1 \end{cases} \quad (II.56)$$

Avec :

$$f_c = f_1(t_1) = f_2(t_1) = f_\infty \left( 1 - \sum_{m=1}^M a_m e^{-\gamma_m t_1} \right) \quad (II.57)$$

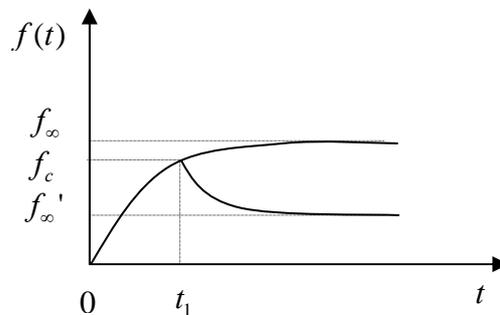


Figure II.4: Représentation du profil de température (chauffage – relaxation)

$f_\infty$  et  $f'_\infty$  sont respectivement les températures du régime permanent de la phase de chauffage et de relaxation et  $a_m, \gamma_m, b_k$  et  $\delta_k$  : les constantes utilisées dans les lissages des profils de température expérimentaux. Ces séries d'exponentielles doivent vérifier les contraintes suivantes :

➤ Condition initiale :

$$f_1(t=0) = 0 \Rightarrow \sum_{m=1}^M a_m = 1 \quad (\text{II.58})$$

➤ Condition de continuité :

$$f_1(t_1) = f_2(t_1) \Rightarrow \sum_{k=1}^K b_k = 1 \quad (\text{II.59})$$

La continuité de la fonction  $f(t)$  au point  $t = t_1$  permet, en utilisant la propriété de superposition des fonctions, d'écrire la fonction  $f(t)$  de la manière suivante :

$$f(t) = f_1(t) - E(t - t_1)\{f_1(t) - f_2(t)\} \quad (\text{II.60})$$

$E(t - t_1)$  est la fonction de Heaviside définie par :

$$E(t - t_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq t_1 \\ 1 & \text{si } t > t_1 \end{cases} \quad (\text{II.61})$$

La transformée de Laplace de la fonction  $f(t)$  est donc :

$$\bar{f}(p) = \bar{f}_1(p) - e^{-pt_1} \{\bar{f}_1^d(p) - \bar{f}_2^d(p)\} \quad (\text{II.62})$$

$\bar{f}_1(p)$  est la transformée de Laplace de la fonction  $f_1(t)$ .

$\bar{f}_1^d(p)$  et  $\bar{f}_2^d(p)$  sont respectivement les transformées de Laplace des fonctions  $f_1(t + t_1)$  et  $f_2(t + t_1)$ .

### II.3.7 – Etude du régime d'échauffement

On étudie le développement du régime convectif, consécutif à une excitation de flux positif sur la face inférieure de la paroi. On suppose que l'air est en écoulement et la plaque était initialement à la même température  $T_\infty$ , à partir d'un instant donné  $t = 0^+$ , la face inférieure de la plaque absorbe un flux de chaleur  $\varphi_0$  uniforme et constant. Si ce flux pariétal est maintenu constant dans le temps, un régime transitoire d'échauffement

dans la plaque se met en place. A la fin de cette phase transitoire, la température dans la plaque est devenue linéaire et donc le régime permanent est atteint.

### II.3.7.1 – Profil de température

Etudions maintenant l'évolution temporelle et spatiale du profil de température dans la plaque.

$$\begin{cases} f(t) = f_1(t) \\ \varphi_i(t) = \varphi_0 \end{cases} \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (\text{II.63})$$

Après avoir introduit cette dernière dans l'équation (II.28), on aura l'expression suivante :

$$\theta_m(x,t) = \frac{\varphi_0}{\lambda} \int_0^t G(e, x, t - \tau) d\tau + u^*(x) f_1(t) - \int_0^t \frac{\partial f_1(\tau)}{\partial \tau} \int_0^e \frac{G(x, \xi, t - \tau)}{a} u^*(\xi) d\xi d\tau \quad (\text{II.64})$$

En remplaçant les fonctions de Green et de température imposée à la surface, données respectivement par les expressions (II.42) et (II.56), on obtient le profil de température  $\theta_m(x,t)$  dans la phase en montée de température :

$$\begin{aligned} \theta_m(x,t) &= \left\{ \begin{aligned} &\frac{\varphi_0}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e) \sin(\alpha_n x)}{\alpha_n^2} (1 - e^{-a\alpha_n^2 t}) \\ &+ \left( 1 - \frac{H_i^0}{H_i^0 e + 1} x \right) f_{\infty} \left( 1 - \sum_{m=1}^M a_m e^{-\gamma_m t} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^M B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n x)}{\alpha_n} \frac{f_{\infty} \gamma_m a_m}{a \alpha_n^2 - \gamma_m} (e^{-\gamma_m t} - e^{-a\alpha_n^2 t}) \end{aligned} \right\} \\ &= \theta_1(x,t) + \theta_2(x,t) \end{aligned} \quad (\text{II.65})$$

Dans l'expression de :

$$\theta_1(x,t) = \frac{\varphi_0}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e) \sin(\alpha_n x)}{\alpha_n^2} (1 - e^{-a\alpha_n^2 t}) \quad (\text{II.66})$$

La série

$$\frac{\varphi_0}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e) \sin(\alpha_n x)}{\alpha_n^2}$$

est la solution permanente  $u(x)$  obéissant au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = 0 \\ u(0) = 0 \\ \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|_{x=e} = -H_i^0 u(e) + \frac{\varphi_0}{\lambda} \end{cases} \quad (\text{II.67})$$

La résolution de cette dernière donne :

$$u(x) = \frac{\varphi_0 / \lambda}{H_i^0 e + 1} x = \frac{\varphi_0}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e) \sin(\alpha_n x)}{\alpha_n^2} \quad (\text{II.68})$$

L'autre partie,  $-\frac{\varphi_0}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e) \sin(\alpha_n x)}{\alpha_n^2} e^{-a\alpha_n^2 t}$ , représente la solution transitoire.

On voit ici que, si on fait tendre le temps vers l'infini, la température tend vers une limite, indépendante de la variable  $t$ , correspondant au régime permanent qu'on utilisera plus tard pour la détermination de  $\varphi_0$  :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_m(x, t) = \frac{\varphi_0 / \lambda}{H_i^0 e + 1} x + \left( 1 - \frac{H_i^0}{H_i^0 e + 1} x \right) f_{\infty} \quad (\text{II.69})$$

En utilisant les fonctions (II.55) dans l'équation (II.29) ou (II.30), la transformée de Laplace de la température dans la phase de chauffage prend la forme suivante :

$$\overline{\theta}_m(x, p) = \frac{1}{\lambda} \frac{e^{-qe} (e^{qx} - e^{-qx})}{(q + H_i^0) + (q - H_i^0) e^{-2qe}} \frac{\varphi_0}{p} + \overline{f}_1(p) \frac{(q + H_i^0) e^{-qx} + (q - H_i^0) e^{qx-2qe}}{(q + H_i^0) + (q - H_i^0) e^{-2qe}} \quad (\text{II.70})$$

### II.3.7.2 Densité de flux de chaleur et coefficient d'échange

La densité de flux de chaleur à la paroi soumise au flux d'air s'exprime, à chaque instant, en fonction du gradient pariétal de  $\theta_m$  par rapport à  $x$  ; elle a l'expression suivante :

$$\varphi_m(t) = \lambda \left. \frac{\partial \theta_m}{\partial x}(x, t) \right|_{x=0} \quad (\text{II.71})$$

En utilisant l'expression du profil de température donné par l'équation (II.65), la densité de flux de chaleur pariétal en  $x = 0$  s'écrit :

$$\varphi_m(t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varphi_0}{H_i^0 e + 1} - \varphi_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e)}{\alpha_n} e^{-a\alpha_n^2 t} - \frac{h_i^0 f_{\infty}}{H_i^0 e + 1} \left( 1 - \sum_{m=1}^M a_m e^{-\gamma_m t} \right) \\ - \lambda f_{\infty} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\gamma_m a_m}{a\alpha_n^2 - \gamma_m} \left( e^{-\gamma_m t} - e^{-a\alpha_n^2 t} \right) \end{array} \right\} \quad (\text{II.72})$$

Ce flux s'annule en  $t = 0$  car la série  $\varphi_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e)}{\alpha_n}$  converge vers  $\frac{\varphi_0}{H_i^0 e + 1}$ , cela peut se vérifier en démontrant l'égalité suivante (voir annexe 1) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n x)}{\alpha_n} = 1 - \frac{H_i^0}{H_i^0 e + 1} x \quad \forall x \neq 0 \quad (\text{II.73})$$

D'où 
$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e)}{\alpha_n} = \frac{1}{H_i^0 e + 1} \quad (\text{II.74})$$

Quand  $t$  tend vers l'infini, le flux s'approche exponentiellement d'une valeur limite correspondante au régime permanent :

$$\varphi_m(t \rightarrow \infty) = \frac{\varphi_0}{H_i^0 e + 1} - \frac{h_i^0}{H_i^0 e + 1} f_{\infty} \quad (\text{II.75})$$

Mais cette représentation ne permet pas déterminer le comportement du flux de chaleur au voisinage de  $t = 0$ . Pour cette raison nous utilisons la transformée de Laplace de la température donnée par l'équation (II.70) pour déterminer la transformée de Laplace de la densité de flux en  $x = 0$ . En effet certains théorèmes sur la transformée de Laplace permettent de déterminer le comportement d'une fonction  $f(t)$  au voisinage de  $t = 0$  à partir du comportement asymptotique ( $p \rightarrow \infty$ ) de sa transformée de Laplace  $\bar{f}(p)$ .

De même, sous certaines conditions, le comportement de  $\bar{f}(p)$  au voisinage de  $p = 0$  permet de déterminer le comportement asymptotique de  $f(t)$  ( $t \rightarrow \infty$ ).

D'où l'intérêt de la formulation des solutions sous forme de transformées de Laplace. Les solutions sous forme de séries infinies permettent des calculs numériques performants, après réduction de celles-ci en séries finies, sauf au voisinage des changements brusques.

La densité de flux de chaleur à la surface  $x = 0$  s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_m(p) &= \frac{2qe^{-qe}}{(q + H_i^0) + (q - H_i^0)e^{-2qe}} \frac{\varphi_0}{p} + \lambda \bar{f}_1(p) q \frac{(q - H_i^0)e^{-2qe} - (q + H_i^0)}{(q - H_i^0)e^{-2qe} + (q + H_i^0)} \quad (\text{II.76}) \\ &= \frac{2q}{(q + H_i^0)e^{qe} + (q - H_i^0)e^{-qe}} \frac{\varphi_0}{p} - \frac{\lambda f_{\infty}}{p} \left( 1 - \sum_{m=1}^M \frac{a_m}{\frac{\gamma_m}{p} + 1} \right) q \frac{1 - \frac{(q - H_i^0)}{(q + H_i^0)} e^{-2qe}}{1 + \frac{(q - H_i^0)}{(q + H_i^0)} e^{-2qe}} \end{aligned}$$

Lorsque  $p$  (ou  $q$ ) est très grand :

$$\left(\frac{1}{\frac{\gamma_m}{p} + 1}\right) \rightarrow \left(1 - \frac{\gamma_m}{p} + \dots\right) \quad \text{et} \quad 1 \pm \frac{(q - H_i^0)}{(q + H_i^0)} e^{-2qe} \rightarrow 1 \quad (\text{II.77})$$

D'où la fonction  $\overline{\varphi}_m(p)$  s'écrit :

$$\overline{\varphi}_m(p) = \frac{2\varphi_0}{a} \frac{e^{-qe}}{q(q + H_i^0)} - \frac{\lambda f_\infty}{\sqrt{a}} \frac{1}{p^{3/2}} \sum_m a_m \gamma_m \quad (\text{II.78})$$

Dont l'original est :

$$\varphi_m(t) = \frac{2\varphi_0}{a} a e^{(H_i^0 e + a H_i^0 t)} \operatorname{erfc}\left(\frac{e}{2\sqrt{at}} + H_i^0 \sqrt{at}\right) - \frac{\lambda f_\infty}{\sqrt{a}} \sum_m a_m \gamma_m \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(3/2)} \quad (\text{II.79})$$

Pour  $x \rightarrow \infty$

$$\operatorname{erfc}(x) \approx \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \dots\right) \quad (\text{II.80})$$

Donc au voisinage de  $t = 0$ , le flux  $\varphi_m(t)$  prend la forme suivante :

$$\varphi_m(t) = \frac{4\varphi_0}{e} \sqrt{\frac{at}{\pi}} e^{-\frac{e^2}{4at}} - \frac{\lambda f_\infty}{\sqrt{a}} \sum_m a_m \gamma_m \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(3/2)} \quad (\text{II.81})$$

Toutes les dérivées d'ordres successifs de la première fonction de l'équation (II.81) s'annulent en  $t = 0$  (cette fonction n'a pas de développement limité au voisinage de  $t = 0$ ). Donc au voisinage de  $t = 0$ , le flux se comporte en  $\sqrt{t}$  lorsque la température superficielle se comporte linéairement au voisinage de  $t = 0$ .

De la même façon qu'en régime permanent, on définit un coefficient d'échange  $h_m$  sur la face supérieure par la relation :

$$h_m(t) = \left. \frac{\lambda \frac{\partial \theta_m(x,t)}{\partial x}}{\theta(x,t)} \right|_{x=0} = h_{mc}(t) + h_{mr}(t) \quad (\text{II.82})$$

Avec  $h_{mc}$  le coefficient de convection et  $h_{mr}$  le coefficient d'échange par rayonnement défini à partir du flux radiatif perdu par la plaque :

$$\varphi_r(t) = \varepsilon \sigma (T_p^4 - T_\infty^4) = \varepsilon \sigma (T_p^2 + T_\infty^2) (T_p + T_\infty) (T_p - T_\infty) = h_{mr}(t) \theta_p(t) \quad (\text{II.83})$$

Ave : 
$$h_{mr} = \varepsilon \sigma (T_p^2 + T_\infty^2) (T_p + T_\infty)$$

$T_p$  : la température en Kelvin de la face supérieure de la plaque

$$T_p (K) = f_\infty (^\circ C) + 273$$

En connaissant l'émissivité et la température de surface de la plaque, on peut calculer  $h_{mr}(t)$  à chaque instant.

Le coefficient de convection durant cette première phase s'écrit alors :

$$h_{mc}(t) = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \frac{\varphi_0}{H_i^0 e + 1} - \varphi_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e)}{\alpha_n} e^{-\alpha_n^2 t} - \frac{h_i^0 f_\infty}{H_i^0 e + 1} \left( 1 - \sum_{m=1}^M a_m e^{-\gamma_m t} \right) \\ - \lambda f_\infty \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\gamma_m a_m}{a \alpha_n^2 - \gamma_m} \left( e^{-\gamma_m t} - e^{-\alpha_n^2 t} \right) \end{array} \right\}}{f_\infty \left( 1 - \sum_{m=1}^M a_m e^{-\gamma_m t} \right)} - h_{mr}(t) \quad (\text{II.84})$$

Quand  $t$  tend vers l'infini, ce coefficient tend vers une limite constante correspondant au régime permanent :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_{mc}(t) = h_{mc}^0 = \frac{\varphi_0 - h_i^0 f_\infty}{f_\infty (H_i^0 e + 1)} - h_{mr}^0 \quad (\text{II.85})$$

Le coefficient  $h_{mc}(t)$  comportera donc au voisinage de  $t = 0$  une singularité en  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  provenant du premier terme de la relation (II.84).

### II.3.8 Etude du régime de relaxation

Etudions maintenant le cas où le flux absorbé  $\varphi_i(t)$  par la paroi inférieure change brusquement à l'instant  $t_1$ . Deux cas de figures se présentent :

Cas 1 :  $\varphi_i(t) = 0$  pour  $t > t_1$ . Dans ce cas, la plaque se refroidit pour prendre une température uniforme égale à  $T_\infty$ . Cette étude est présentée en annexe 2.

Cas 2 :  $\varphi_i(t) = \varphi_1 < \varphi_0$  pour  $t > t_1$ . La température de la paroi supérieure passe à une valeur  $f'_\infty$  inférieure à sa valeur initiale  $f_\infty$  mais qui reste tout de même supérieure à 0 (température de référence  $T_\infty$ ).

### II.3.8.1 – Profil de température

L'étude est la même que celle dans le cas d'échauffement. La seule différence est le flux absorbé par la paroi qui diminue brusquement de  $\varphi_0$  à  $\varphi_1$ .

$$\begin{cases} f(t) = f_2(t) \\ \varphi_i(t) = \varphi_1 \end{cases} \quad \text{pour } t \geq t_1 \quad (\text{II.86})$$

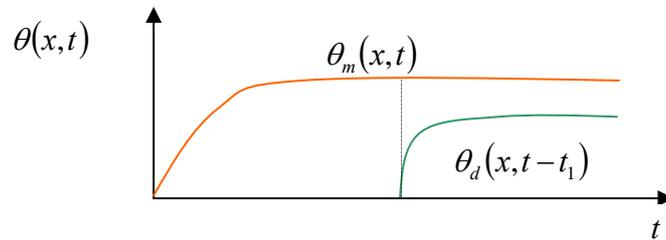
La solution en température donnée par l'équation (II.30) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\bar{\theta}(x, p) = \bar{\theta}_m(x, p) - e^{-pt_1} \bar{\theta}_d(x, p) \quad (\text{II.87})$$

Dont l'original est :

$$\theta(x, t) = \theta_m(x, t) - E(t - t_1) \theta_d(x, t - t_1) \quad (\text{II.88})$$

$\theta_d(x, t - t_1)$  est une température analogue à  $\theta_m(x, t)$  mais décalée d'un temps  $t_1$ .



En utilisant l'expression (II.28),  $\theta_d(x, t)$  a la même forme que  $\theta_m(x, t)$  et s'écrit :

$$\theta_d(x, t) = \left\langle \begin{aligned} & \frac{(\varphi_0 - \varphi_1)}{\lambda} \int_0^t G(e, x, t - \tau) d\tau + u^*(x) \{f_1(t + t_1) - f_2(t + t_1)\} \\ & - \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \{f_1(\tau + t_1) - f_2(\tau + t_1)\} \int_0^\xi \frac{G(x, \xi, t - \tau)}{a} u^*(x) d\xi d\tau \end{aligned} \right\rangle \quad (\text{II.89})$$

La fonction  $f_1(t)$  est simplement remplacée par la fonction  $f'(t) = f_1(t + t_1) - f_2(t + t_1)$  (de transformée de Laplace  $\bar{f}'(p) = \bar{f}_1^d(p) - \bar{f}_2^d(p)$ ) : elle s'annule en  $t = 0$  et tend exponentiellement vers  $f_\infty - f'_\infty$  quand  $t \rightarrow \infty$  et le flux  $\varphi_0$  est remplacé par  $\varphi_0 - \varphi_1$ .

$$f'(t) = (f_\infty - f_\infty') - f_\infty \sum_{m=1}^M a_m e^{-\gamma_m(t+t_1)} - (f_c - f_\infty') \sum_{k=1}^K b_k e^{-\delta_k t} \quad (\text{II.90})$$

Le comportement de la fonction  $\theta_d$  sera analogue à celui de  $\theta_m$ .

Après avoir introduit les expressions de  $G(x, \xi, t - \tau)$ ,  $f'(t)$  et  $u^*(x)$ , la fonction  $\theta_d(x, t)$  s'écrit :

$$\theta_d(x, t) = \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{\lambda} \right) \left\{ \frac{x}{H_i^0 e + 1} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e) \sin(\alpha_n x)}{\alpha_n^2} e^{-a\alpha_n^2 t} \right\} \\ & - \left( 1 - \frac{H_i^0}{H_i^0 e + 1} x \right) \left\{ (f_\infty - f_\infty') - f_\infty \sum_{m=1}^M a_m e^{-\gamma_m(t+t_1)} - (f_c - f_\infty') \sum_{k=1}^K b_k e^{-\delta_k t} \right\} \\ & - (f_c - f_\infty') \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^K B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n x)}{\alpha_n} \frac{b_k \delta_k}{a\alpha_n^2 - \delta_k} (e^{-\delta_k t} - e^{-a\alpha_n^2 t}) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^M B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n x)}{\alpha_n} \frac{f_\infty a_m \gamma_m}{a\alpha_n^2 - \gamma_m} e^{-\gamma_m t_1} (e^{-\gamma_m t} - e^{-a\alpha_n^2 t}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.91})$$

De même la transformée de Laplace s'écrit :

$$\overline{\theta}_d(x, p) = \frac{1}{\lambda} \frac{e^{-qe} (e^{qx} - e^{-qx})}{(q + H_i^0) + (q - H_i^0) e^{-2qe}} \frac{\varphi_0}{p} + \left\{ \overline{f}_1^d(p) - \overline{f}_2^d(p) \right\} \frac{(q + H_i^0) e^{-qx} + (q - H_i^0) e^{qx-2qe}}{(q + H_i^0) + (q - H_i^0) e^{-2qe}} \quad (\text{II.92})$$

### II.3.8.2 Densité de flux et coefficient d'échange thermique

De la même façon que dans le régime d'échauffement, la densité de flux de chaleur  $\varphi(t)$  à la paroi soumise au flux d'air en régime de relaxation s'exprime, à chaque instant, en fonction du gradient pariétal de  $\theta$  par rapport à  $x$ .

Pour les mêmes raisons que dans le paragraphe précédent,  $\varphi(t)$  pourra s'écrire :

$$\varphi(t) = \varphi_m(t) - E(t - t_1) \varphi_d(t - t_1) \quad (\text{II.93})$$

Dont la transformée de Laplace est :

$$\overline{\varphi}(p) = \overline{\varphi}_m(p) - e^{-pt_1} \overline{\varphi}_d(p) \quad (\text{II.94})$$

Où  $\varphi_d(t)$  s'écrit :

$$\varphi_d(t) = \left\{ \begin{aligned} & (\varphi_0 - \varphi_1) \left\{ \frac{1}{H_i^0 e + 1} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e)}{\alpha_n} e^{-\alpha_n^2 t} \right\} \\ & + \frac{h_i^0}{H_i^0 e + 1} \left\{ (f_{\infty} - f_{\infty}') - f_{\infty} \sum_{m=1}^M a_m e^{-\gamma_m(t+t_1)} - (f_c - f_{\infty}') \sum_{k=1}^K b_k e^{-\delta_k t} \right\} \\ & - \lambda (f_c - f_{\infty}') \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{b_k \delta_k}{a \alpha_n^2 - \delta_k} (e^{-\delta_k t} - e^{-\alpha_n^2 t}) - \lambda \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{f_{\infty} \gamma_m a_m}{a \alpha_n^2 - \gamma_m} e^{-\gamma_m t_1} (e^{-\gamma_m t} - e^{-\alpha_n^2 t}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.95})$$

et  $\overline{\varphi_d(p)}$  :

$$\overline{\varphi_d(p)} = \frac{2\varphi_0}{a} \frac{e^{-qe}}{q(q+H_i^0)} + \lambda \left\{ \frac{f_{\infty} - f_{\infty}'}{p} - f_{\infty} \sum_m \frac{a_m}{\gamma_m + p} - (f_c - f_{\infty}') \sum_n \frac{b_k}{\delta_k + p} \right\} q \frac{(q-H_i^0)e^{-2qe} - (q+H_i^0)}{(q-H_i^0)e^{-2qe} + (q+H_i^0)} \quad (\text{II.96})$$

L'étude asymptotique de  $\overline{\varphi_d(p)}$  au voisinage de  $p \rightarrow \infty$  permettra de calculer son original au voisinage de  $t = 0$ . Donc au voisinage de  $p \rightarrow \infty$  (ou  $q \rightarrow \infty$ ), la fonction  $\overline{\varphi_d(p)}$  se comporte comme :

$$\overline{\varphi_d(p)} = \frac{2\varphi_0}{a} \frac{e^{-qe}}{q(q+H_i^0)} - \lambda \frac{q}{p^2} \underbrace{\left\{ f_{\infty} \sum_m a_m \gamma_m e^{-\gamma_m t_1} + (f_c - f_{\infty}') \sum_k b_k \delta_k \right\}}_{A_{mk}} \quad (\text{II.97})$$

Dont l'original est :

$$\varphi_d(t) = \frac{4\varphi_0}{e} \sqrt{\frac{at}{\pi}} e^{\frac{e^2}{4at}} - \frac{\lambda A_{mn}}{\Gamma(3/2)\sqrt{a}} \sqrt{t} \quad (\text{II.98})$$

Cette dernière montre que  $\varphi(t)$  se comporte asymptotiquement, comme  $\sqrt{t}$ .

La valeur de  $h(t)$  s'exprime en fonction de la densité de flux et de la température à la paroi de la façon suivante :

$$h(t) = \frac{\varphi_m(t) - E(t-t_1)\varphi_d(t-t_1)}{f_1(t) - E(t-t_1)\{f_1(t) - f_2(t)\}} \quad (\text{II.99})$$

Le coefficient de convection correspondant au flux  $\varphi(t)$  dans cette phase s'écrit :

$$h_c(t) = \frac{\varphi_m(t) - \varphi_d(t-t_1)}{f_{\infty}' + (f_c - f_{\infty}') \sum_{k=1}^K b_k e^{-\delta_k(t-t_1)}} - h_r(t) \quad (\text{II.100})$$

## II.4 Conclusion

Dans cette partie de l'étude, nous avons présenté un modèle analytique décrivant la distribution de température dans une plaque plane soumise à des conditions aux limites transitoires.

Le développement de ce modèle est basé sur une méthode originale « la théorie des fonctions de Green », l'application de cette méthode à la résolution de l'équation de propagation de la chaleur nous a permis de déterminer directement et de manière rigoureuse, le flux pariétal et d'en déduire le coefficient d'échange convectif en régime transitoire.

## INSTRUMENTATION ET APPAREILS DE MESURES

### III.1 Introduction

Nous allons présenter dans ce chapitre les divers appareils de mesures et les techniques utilisés pour l'acquisition des données expérimentales.

Outre la présentation du banc d'essai expérimental, nous nous intéressons ensuite à la méthode de thermographie infrarouge, choisie pour réaliser les profils de températures à la surface de la plaque et au tube de Pitot ou l'anémométrie à fil chaud pour mesurer les vitesses d'écoulement dans la veine.

### III.2 Description du banc d'essais expérimental

Le but de ce travail est de tester un banc d'essais expérimental, permettant d'étudier les échanges de chaleur entre une plaque plane chauffée par infrarouge et un écoulement d'air sur sa face supérieure[28].



Figure III.1 : *Banc d'essais expérimental*

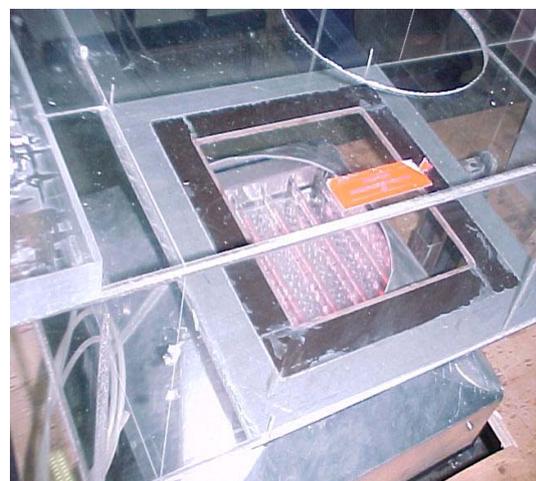
Le banc d'essai est composé d'une veine en plexiglas de section rectangulaire  $150 \times 300$  mm et de 2m de longueur (figure III.1). L'écoulement est réalisé par un ventilateur délivrant des débits variables. L'extrémité est laissée libre pour que l'écoulement d'air se fasse sans perturbations.

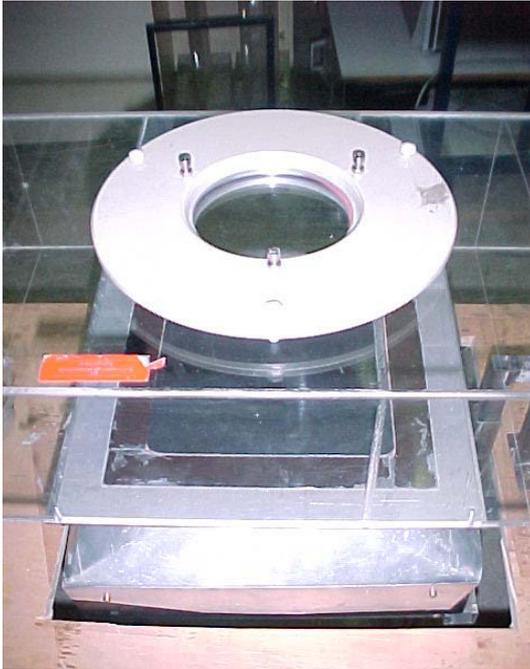
A l'autre extrémité, la section a été modifiée et un convergent a été placé afin d'obtenir dès l'entrée de la veine un écoulement stabilisé. Cette stabilisation est renforcée par l'adjonction d'une structure en alvéole entre le convergent et la veine, comme on peut le voir sur l'image ci-contre.



La plaque de mesure est de dimension  $170 \times 200$  mm et d'épaisseur  $e$ . Elle est déposée au fond de la veine de manière à être parallèle à l'écoulement. Nous avons ci-contre une vue de dessus de la veine comprenant la plaque et le système d'isolation mis en place pour protéger le plexiglas contre les trop hautes températures.

Le système de chauffage choisi est un ensemble de lampes infrarouges de puissance variable, permettant d'assurer un flux de type créneau pendant un temps  $t_1$ . Ce système de chauffage est muni d'un convergent en aluminium permettant de concentrer tout le rayonnement sur la surface inférieure de la plaque de mesure.





La face de la veine opposée à la plaque de mesure est équipée d'un hublot en fluorine. La fluorine présente l'avantage de posséder un coefficient de transmission dans le domaine de l'infrarouge permettant ainsi la détermination de la température de la surface de la plaque de mesure par thermographie infrarouge. Le coefficient de transmission de la fluorine, obtenu par étalonnage,  $\tau_f = 0,95 \pm 0,01$  dans la gamme de longueurs d'onde de la caméra utilisée.

### III.3 Chaîne de mesure

#### III.3.1 Mesure des températures

La température de la face de la plaque soumise à l'écoulement est déterminée à l'aide d'une caméra de thermographie infrarouge d'ondes courtes (2 à 5,4  $\mu\text{m}$ ) munie d'un objectif 20°. La fréquence d'acquisition des images est de 35 Hz. Lorsque la surface visée à travers un milieu parfaitement transparent, est noire et à la température  $T$ , la caméra délivre un signal  $I(T)$ . En situation de mesure, la caméra donne le niveau thermique numérisé en provenance d'une surface élémentaire de la plaque de mesure après atténuation par la fluorine et l'atmosphère. Ce niveau thermique intègre également celui de l'environnement se réfléchissant sur la surface de la plaque. Pour privilégier l'émission thermique de la plaque par rapport aux flux parasites réfléchis, sa surface supérieure est peinte en noir de manière à augmenter son émissivité. La surface inférieure est également peinte en noir dans le but d'augmenter la proportion du flux des lampes infrarouges absorbée par la plaque. Un étalonnage permet d'estimer l'émissivité de la plaque à  $\varepsilon = 0,93 \pm 0,02$ . Un second étalonnage est réalisé en situation de mesure et permet d'associer le niveau thermique donné par la caméra  $I(T)$  à la valeur de la température réelle de la plaque de mesure. L'estimation de l'incertitude sur la température  $T$  donne  $\Delta T = \pm 0,3^\circ\text{C}$  pour la gamme de température  $30^\circ\text{C} < T < 100^\circ\text{C}$ .

La température de l'air est mesurée dans le hall d'essais à l'aide de deux thermocouples de type K. L'erreur absolue commise sur cette température est estimée à  $\Delta T = \pm 0,3^\circ\text{C}$ .

La station de travail est un ordinateur conçu spécifiquement pour le traitement numérique des signaux reçus par la Caméra Infrarouge du système thermovision®900. Le logiciel d'exploitation utilisé est ERIKA™ version 3.11.



### III.3.2 L'anémométrie avec sonde télescopique

Pour la mesure de vitesses à l'intérieur de la veine d'essai, un anémométrie à sonde télescopique **Testo 425** a été utilisé pour les différentes expérimentations. Cet appareil a une précision de  $\pm 0,2\%$ , facilite les mesures dans les endroits difficiles d'accès et permet ainsi de déterminer des valeurs ponctuelles de la vitesse.

### III.3.3 Propriétés thermophysiques des plaques d'essais

Les essais ont été réalisés avec deux plaques de nature et d'épaisseur différente. Le tableau suivant résume les propriétés de ces plaques, issues des données des fournisseurs :

Type de plaque	Epaisseur e, en mm	Conductivité thermique $\lambda$ en $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$	Diffusivité thermique a en $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$
Vitrocéramique	3	1.09	$5,69 \cdot 10^{-7}$
Aluminium	1	210	$8,642 \cdot 10^{-5}$

Tableau III.1 : propriétés des plaques de mesure

### III.4 Identification du flux de chauffage $\varphi_i$ et du coefficient d'échange $h_e$

L'expérimentation menée sur le banc d'essais dont le schéma est représenté ci dessous, a pour objectif la mesure du coefficient d'échange convectif  $h_e$  ainsi que celle du flux incident sur la plaque plane reçu par sa face inférieure  $\varphi_i$ .

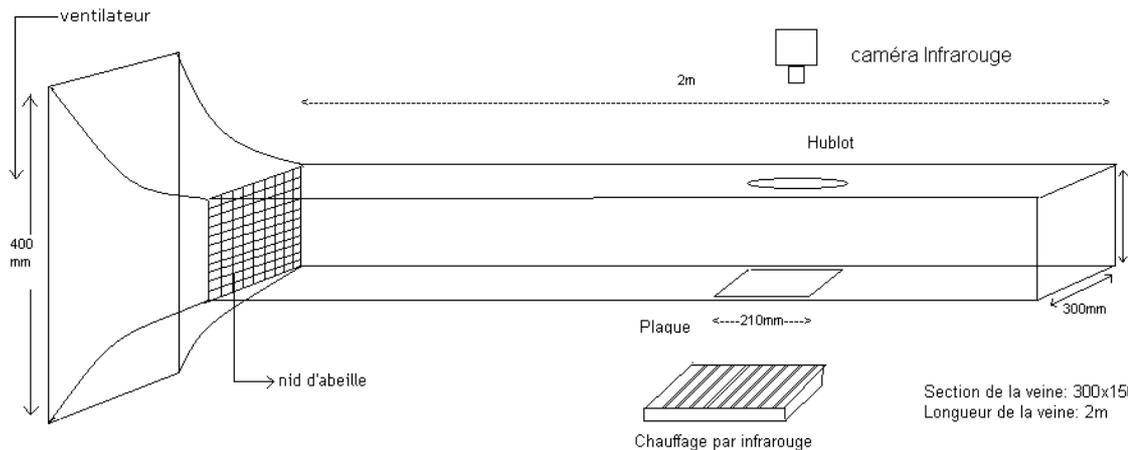


Figure III. 2 : Schéma de principe du banc d'essai expérimental

Mesurer un flux ou une densité de flux à la surface d'une paroi nécessite généralement l'implantation d'un « fluxmètre », mesure relativement complexe à mettre en œuvre. De plus ce type de mesure se fait avec contact et entraîne une perturbation de l'écoulement sur la plaque, c'est pour cela qu'on a opté pour d'autres méthodes.

En fonction de l'expérimentation étudiée, on note que :

- Dans le cas d'une convection naturelle, l'implantation de capteurs de flux sur la face inférieure de la plaque ne permet pas d'obtenir de manière fiable le coefficient de convection  $h_i$  ; les capteurs pouvant être endommagés par la chaleur. Cependant elle ne pose pas de problème sur la face supérieure de la plaque où le coefficient  $h_e$  peut être déterminé correctement.

- Dans le cas de la convection forcée : il résulte le même problème sur la face inférieure de la plaque que précédemment mais sur la face supérieure la présence de ces capteurs perturbe de manière non négligeable l'écoulement.

Ainsi dans le cas d'une convection forcée comme c'est le cas de notre étude, nous allons mettre en place différentes méthodes d'identification du coefficient d'échange et de  $\varphi_i$  totalement non destructives.

### III.4.1 Etude théorique du problème

Pour chaque série d'essais sur une plaque donnée, les flux  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sont maintenus constants quelle que soit la vitesse d'air soufflé. Pour identifier ces flux, on réalise au début de chaque série d'essais, une expérience avec une vitesse d'air soufflé nulle. On se place alors en convection naturelle et on chauffe la plaque jusqu'à ce que le régime thermique devient permanent.

L'application du modèle analytique développé précédemment permet d'écrire pour la phase de chauffage (II.65).

$$\theta(x, t \rightarrow \infty) = f_\infty + \left( \frac{\varphi_0}{\lambda(1 + H_i^0 e)} - \frac{H_i^0 f_\infty}{1 + H_i^0 e} \right) x \quad (\text{III.1})$$

Le profil de température est donc bien une fonction linéaire de  $x$  et le flux est constant dans toute la plaque durant le régime permanent.

Le flux pariétal sur la face exposée à l'écoulement est donné par :

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} (t \rightarrow \infty) = \frac{1}{2} h_e^0 f_\infty \quad (\text{III.2})$$

Ce flux est identique au flux  $\varphi_m(t \rightarrow \infty)$  obtenu à partir du profil de température théorique et donné par l'équation (II.75).

Soit :

$$\frac{1}{2} h_e^0 f_\infty = \frac{\varphi_0}{H_i^0 e + 1} - \frac{h_i^0}{H_i^0 e + 1} f_\infty \quad (\text{III.3})$$

On déduit alors la valeur de  $\varphi_0$  qui dépend de la température de la plaque en régime permanent, de sa conductivité thermique, de son épaisseur et des coefficients d'échanges.

$$\varphi_0 = f_\infty \left( h_i^0(\theta_i) + \frac{1}{2} h_e^0 + \frac{h_e^0 h_i^0(\theta_i) e}{2\lambda} \right) \quad (\text{III.4})$$

On retrouve le même résultat en utilisant l'analogie électrique au régime permanent du système.

On note que le flux  $\varphi_1$  correspond au régime de relaxation, se déduit de la même manière que  $\varphi_0$ .

Les coefficients d'échanges naturels du régime permanent, supposés constants, sont obtenus à partir des corrélations de la littérature [29].

### III.4.1.1 Calcul du coefficient d'échange interne $h_i$

On définit  $h_i$  coefficient d'échange global, combinaison des effets de convection et de rayonnement :

$$h_i = h_{ic} + h_{ir} \quad (\text{III.5})$$

En convection naturelle, pour calculer le coefficient d'échange convectif  $h_{ic}$  sur la face inférieure de la plaque plane exposée à l'air ambiant, nous pouvons toujours utiliser les corrélations pour une plaque plane données par le nombre de Nusselt en régime permanent :

$$Nu_l = 0.27.Ra_l^{0.25} \quad \text{valable pour } 3.10^5 \leq Ra \leq 3.10^{10}$$

Avec  $Ra = Gr.Pr$  où le nombre de Grashof est donné par  $Gr = \frac{g\beta\theta l^3}{\nu^2}$

On obtient :

$$h_{ic} = h_1^0 \theta_i^{0.25} \quad (\text{III.6})$$

Avec :

$$h_1^0 = 0.27 \frac{\lambda_f}{l} \left( \frac{g\beta l^3}{\nu^2} Pr \right)^{0.25} \quad (\text{III.7})$$

Le coefficient d'échange par rayonnement est défini à partir du flux radiatif perdu par la plaque [29] :

$$\varphi_{ir}(t) = \varepsilon\sigma(T_i^4 - T_\infty^4) = \varepsilon\sigma(T_i^2 + T_\infty^2)(T_i + T_\infty)(T_i - T_\infty) = h_{ir}(t)\theta_i(t) \quad (\text{III.8})$$

Avec :

$$\begin{cases} h_{ir} = \varepsilon\sigma(T_i^2 + T_\infty^2)(T_i + T_\infty) \\ \theta_i(t) = T_i - T_\infty \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

$T_i, T_\infty$  sont des températures en Kelvin.

En connaissant l'émissivité et la température à la surface de la plaque, on peut calculer  $h_{ir}(t)$  à chaque instant.

D'où :

$$\begin{cases} h_i(\theta_i) = h_1^0 \theta_i^{0.25} + \varepsilon\sigma(A_1 + A_2\theta_i + A_3\theta_i^2 + \theta_i^3) \\ \theta_i = \left(1 + h_e \frac{e}{\lambda}\right) f_\infty \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} A_1 = 4(273 + T_0)^3 \\ A_2 = 6(273 + T_0)^2 \\ A_3 = 4(273 + T_0) \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

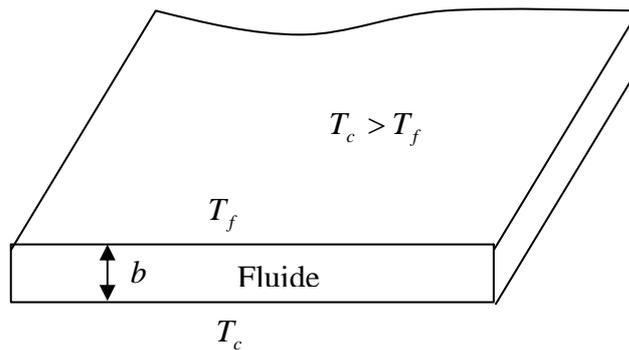
$T_0$  : Température initiale en °C .

### III.4.1.2 Calcul du coefficient d'échange externe $h_e^0$

Les corrélations utilisées en convection naturelle, pour le calcul du coefficient d'échange convectif  $h_{ec}^0$ , sont aussi données en fonction du nombre de Nusselt dans un canal rectangulaire. Le problème dans ce cas est assimilé à celui d'une cavité fermée par deux parois parallèles distantes de  $b$  (ou une couche fluide rectangulaire horizontale) chauffée par le bas, à températures imposées différentes  $T_c$  et  $T_f$ , les autres parois étant adiabatiques. On évalue les propriétés physiques à la température moyenne :  $\frac{T_c + T_f}{2}$  et le nombre de Rayleigh se calcule avec l'écart ( $T_c - T_f$ ) par les relations suivantes.

$$Nu_b = \frac{\lambda_e}{\lambda_f} = C Ra_b^n \quad \text{avec} \quad Nu_b = \frac{h_e^0 b}{\lambda_f} \quad \text{et} \quad Ra_b = \frac{g \beta [T_c - T_f] b^3}{a \nu}$$

$$\text{Dans notre configuration : } Ra_b > 3,2 \cdot 10^5 \Rightarrow \begin{cases} C = 0.061 \\ n = 1/3 \end{cases}$$



Après avoir évalué les coefficients d'échanges globaux en convection naturelle  $h_e^0$  et  $h_i^0$ , on utilise ensuite leurs valeurs pour calculer la densité de flux de chaleur absorbée par la plaque  $\varphi_i$ .

### III.4.2 Identification de $h_e$ et $\varphi_i$ par variation d'épaisseur

#### III.4.2.1 Présentation de la méthode d'identification

Afin d'identifier le coefficient d'échange  $h_e$  et le flux  $\varphi_i$ , on peut envisager une méthode basée sur la variation d'épaisseur de la plaque plane. C'est à dire qu'on réalise une même expérimentation pour des épaisseurs de plaque différentes et on en déduit le coefficient d'échange  $h_e$  et le flux  $\varphi_i$ .

Dans un premier temps nous allons étudier le cas où le coefficient de convection  $h_e$  est considéré comme constant.

##### III.4.2.1.1 Cas d'un coefficient d'échange $h_e$ constant

Il s'agit de considérer deux plaques de matériau identique mais d'épaisseurs différentes ; en écrivant la relation donnant le flux incident  $\varphi_i$  via l'analogie électrique pour chaque plaque, on obtient le système d'équations permettant de déterminer correctement le coefficient d'échange  $h_e^0$  et le flux  $\varphi_i$  :

$$\begin{cases} \varphi_i = f_{\infty 1} \left( h_{i1}^0(\theta_i) + \frac{1}{2} h_e^0 + \frac{h_e^0 h_{i1}^0(\theta_i) e_1}{2\lambda} \right) \\ \varphi_i = f_{\infty 2} \left( h_{i2}^0(\theta_i) + \frac{1}{2} h_e^0 + \frac{h_e^0 h_{i2}^0(\theta_i) e_2}{2\lambda} \right) \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

On note que :

- $\varphi_i$  est indépendant de l'épaisseur des plaques en présence.
- $h_e^0$  est supposé constant.
- $f_{\infty 1}$  et  $f_{\infty 2}$  températures relatives aux différentes épaisseurs déterminées grâce à la caméra infrarouge.
- $h_{i1}^0$  et  $h_{i2}^0$  sont donnés en convection naturelle et déterminés comme précédemment.

**III.4.2.1.2 Cas d'un coefficient d'échange  $h_e$  dépendant linéairement de la température**

Lorsque le coefficient d'échange dépend de la température  $f_\infty$  avec une évolution linéaire, on peut écrire le coefficient  $h_e$  sous la forme :

$$h_e(f_\infty) = Af_\infty + B \quad (\text{III.13})$$

A et B sont des constantes à déterminer.

Ainsi, l'écriture du flux  $\varphi_i$  pour trois épaisseurs différentes permet d'obtenir un nouveau système à 3 équations dont les inconnues sont A, B et  $\varphi_i$  :

$$\begin{cases} \varphi_i = f_{\infty 1} \left( h_{i1}^0(\theta_i) + \frac{1}{2} (Af_{\infty 1} + B) \left( 1 + \frac{h_{i1}^0(\theta_i) e_1}{\lambda} \right) \right) \\ \varphi_i = f_{\infty 2} \left( h_{i2}^0(\theta_i) + \frac{1}{2} (Af_{\infty 2} + B) \left( 1 + \frac{h_{i2}^0(\theta_i) e_2}{\lambda} \right) \right) \\ \varphi_i = f_{\infty 3} \left( h_{i3}^0(\theta_i) + \frac{1}{2} (Af_{\infty 3} + B) \left( 1 + \frac{h_{i3}^0(\theta_i) e_3}{\lambda} \right) \right) \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

$f_{\infty 1}$ ,  $f_{\infty 2}$  et  $f_{\infty 3}$  sont des températures pariétales du régime permanent pour différentes épaisseurs de la plaque, déterminées expérimentalement.

Ce nouveau système (III.14) permet de trouver le flux incident  $\varphi_i$  ainsi que le coefficient d'échange  $h_e$  linéaire, dépendant de la température pariétale  $f_\infty$  en régime permanent.

Cependant pour que cette méthode soit réalisable expérimentalement, il faut que l'écart de température  $f_{\infty 1} - f_{\infty 2}$  relative aux différentes épaisseurs soit non négligeable, au risque de ne pouvoir déterminer le coefficient d'échange et le flux  $\varphi_i$  correctement.

C'est à dire que lors des expérimentations il faut que cet écart de température reste significatif.

D'où une étude de sensibilité afin de déterminer sous quelles conditions et pour quels matériaux cette méthode d'identification est valable.

#### III.4.2.2 Etude de sensibilité de la plaque

On va réaliser cette expérimentation pour des plaques de vitrocéramique de conductivité  $\lambda = 1.09 \text{ W} / \text{m}^2 / \text{K}$ , et d'épaisseurs 3 mm et 6 mm.

On propose une étude de sensibilité en se basant sur l'inverse de la méthode proposée précédemment, c'est à dire qu'on va supposer connu le flux  $\varphi_i$  et le coefficient d'échange  $h_e^0$  ( $\varphi_i = 4400 \text{ W} / \text{m}^2$  et  $h_e^0 = 28 \text{ W} / \text{m}^2 / \text{K}$ ), et on va observer l'écart de température  $f_{\infty 1} - f_{\infty 2}$  relatif aux différentes épaisseurs.

La procédure a été mise en place ainsi que le programme de calcul, en faisant différents tests de voir pour quels matériaux cette méthode est réalisable et de valider ainsi la méthode.

Après calcul il s'avère que cet écart de température entre les deux plaques de matériau identique reste de l'ordre de quelques degrés ( $\cong 4^\circ\text{C}$ ), donc non négligeable et peut être déterminé par thermographie infrarouge.

En conclusion, cette méthode d'identification par variation d'épaisseur de la plaque peut nous permettre de déterminer d'une manière assez fiable le flux  $\varphi_i$  et le coefficient d'échange  $h_e^0$ .

On note que le Pyrex de conductivité  $\lambda = 1.16 \text{ W} / \text{m}^2 / \text{K}$  sensiblement proche de celle de la vitrocéramique pourrait satisfaire à cette méthode.

## RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

### IV.1 Introduction

Dans cette partie du travail, nous allons présenter les résultats des différents essais réalisés sur des plaques de vitrocéramique d'épaisseur 3 mm et d'aluminium d'épaisseur 1 mm.

Ces essais ont été menés afin de déterminer, à partir de la température pariétale évaluée par thermographie infrarouge, le flux pariétal échangé entre l'écoulement d'air et la plaque plane chauffée par rayonnement ainsi que le coefficient d'échange thermique en régime transitoire.

Nous allons calculer dans un premier temps les coefficients de convection naturelle  $h_i^0$ ,  $h_e^0$  et le flux incident sur la face inférieure  $\varphi_i$  dans le but de comparer les évolutions du coefficient d'échange convectif forcé  $h_e$  et du flux pariétal obtenus par modélisation mathématique et par simulation numérique.

Durant ces manipulations, nous avons réalisé, une expérimentation en convection naturelle pour les deux plaques planes et ainsi que deux autres expérimentations menées en convection forcée avec des vitesses d'air de 5 et 7 m/s.

Les mesures de vitesses du fluide ont été effectuées par la méthode de l'anémométrie fil chaud. Elles permettront le calcul des nombres sans dimensions comme le nombre de Reynolds et celui de Nusselt, afin d'évaluer le coefficient de transfert thermique entre la plaque plane et l'écoulement de l'air.

## IV.2 Choix du matériau des plaques

Les types de matériaux les plus appropriés dans l'expérience sont les aciers, les alliages d'aluminium, les alliages de cuivre, les alliages de zinc et certaines matières plastiques. Dans notre cas les plaques sont en vitrocéramique et en Aluminium ayant les caractéristiques suivantes (tableau IV.1) :

Type de plaque	Epaisseur (mm)	Capacité thermique massique $J.Kg^{-1}.K^{-1}$	Conductivité thermique $\lambda$ en $W.m^{-1}.K^{-1}$	Masse volumique $Kg/m^3$
Vitrocéramique	3	820	1.09	2230
Aluminium	1	900	210	2700

Tableau IV.1 : *Caractéristiques des plaques*

## IV.3 Identification du flux incident $\varphi_i$ et du coefficient d'échange $h_i^0$ en régime permanent

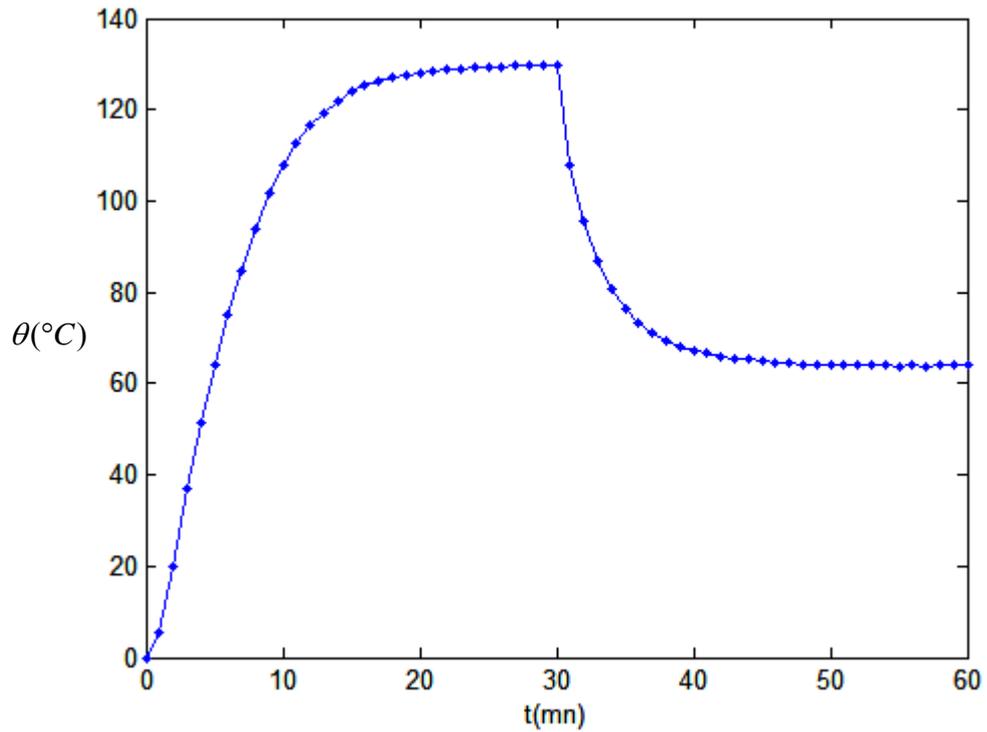
Nous allons évaluer le coefficient d'échange sur la face inférieure, et le flux incident en utilisant les corrélations pour une plaque plane.

On a effectué des essais de chauffage et de relaxation en convection naturelle (la plaque était simplement déposée au dessus des lampes infrarouges) et en convection forcée (vitesse d'écoulement de l'air 5 et 7 m/s). La durée de chauffage est de 30 mn pour chaque essai.

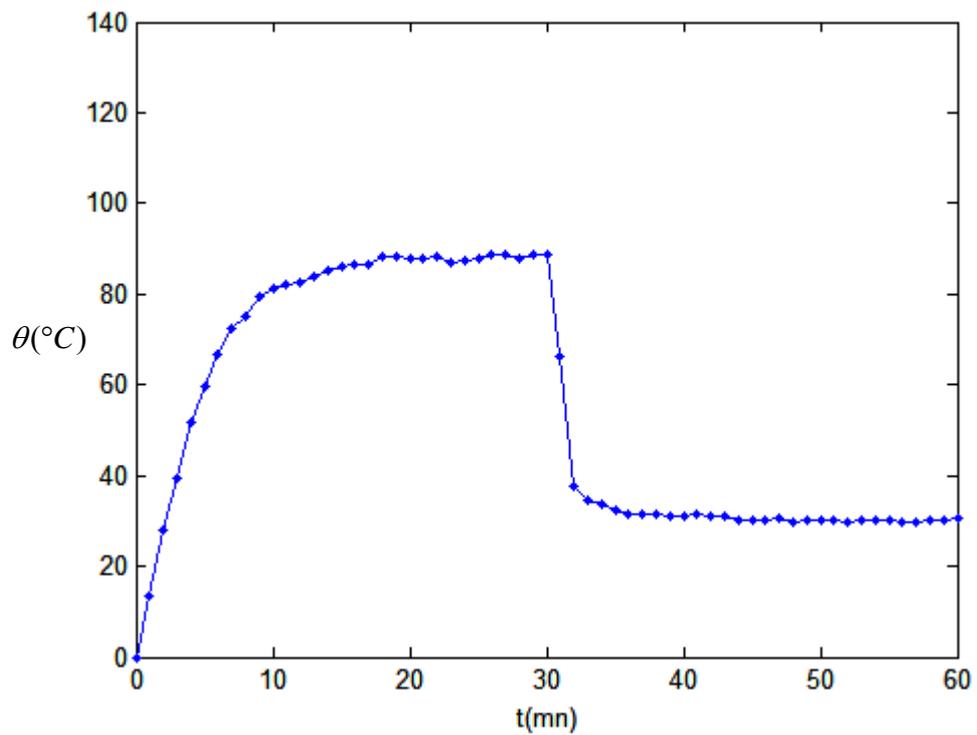
Une fois déterminés  $\varphi_i$  et  $h_i^0$ , on a évalué le coefficient d'échange  $h_e$  et le flux pariétal par modélisation mathématique et comparé les résultats obtenus à la simulation numérique.

Les figures IV.1 et IV.2 présentent l'évolution de la température en  $x = 0$  dans le cas de la plaque en Vitrocéramique, ainsi que celle en Aluminium.

Ces évolutions, obtenues à partir des mesures par la Caméra Infrarouge correspondent aux essais en convection naturelle visant à identifier les flux  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$ .



*Figure IV.1 : Profil de température en  $x = 0$  en convection naturelle - Plaque en Vitrocéramique -*



*Figure IV.2 : Profil de température en  $x = 0$  en convection naturelle - Plaque en Aluminium -*

En utilisant les équations développées dans le chapitre précédent, on obtient le flux absorbé  $\varphi_i$  (tableau IV.2):

Plaque	$\varphi_i$ (W/m <sup>2</sup> )	$T_0$ (°C)	$T_p$ (°C)	$\Delta T$ (°C)	$h_i$ (W/m <sup>2</sup> /K) [28]	$h_{ec}$ (W/m <sup>2</sup> /K) [28]	$h_{er}^0$ (W/m <sup>2</sup> /K) [28]
Vitrocéramique <i>e</i> 3 mm - 1.09	a-Phase de chauffage ;b- Phase de relaxation						
	<b>a) 4187</b>	20.5	150.2	129.7	13.88	7.48	10.23
	<b>b) 1562</b>	20.5	84.4	63.9	10.45	6.10	7.49
Aluminium <i>l</i> 1 mm - 210	a-Phase de chauffage ;b- Phase de relaxation						
	<b>a) 2394</b>	22.6	111.4	88.8	11.67	6.71	8.61
	<b>b) 616</b>	22.6	53.1	30.5	8.88	4.84	6.48

Tableau IV.2 : Flux absorbés en convection naturelle

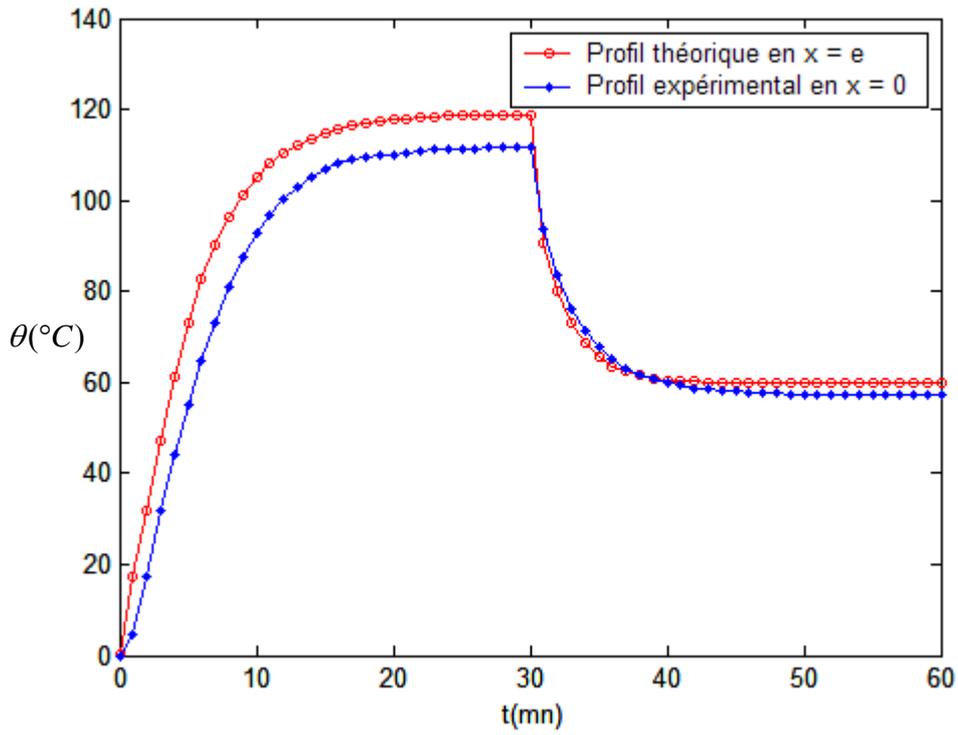
#### IV.4 Analyse des résultats et comparaison

##### IV.4.1 Analyse des résultats

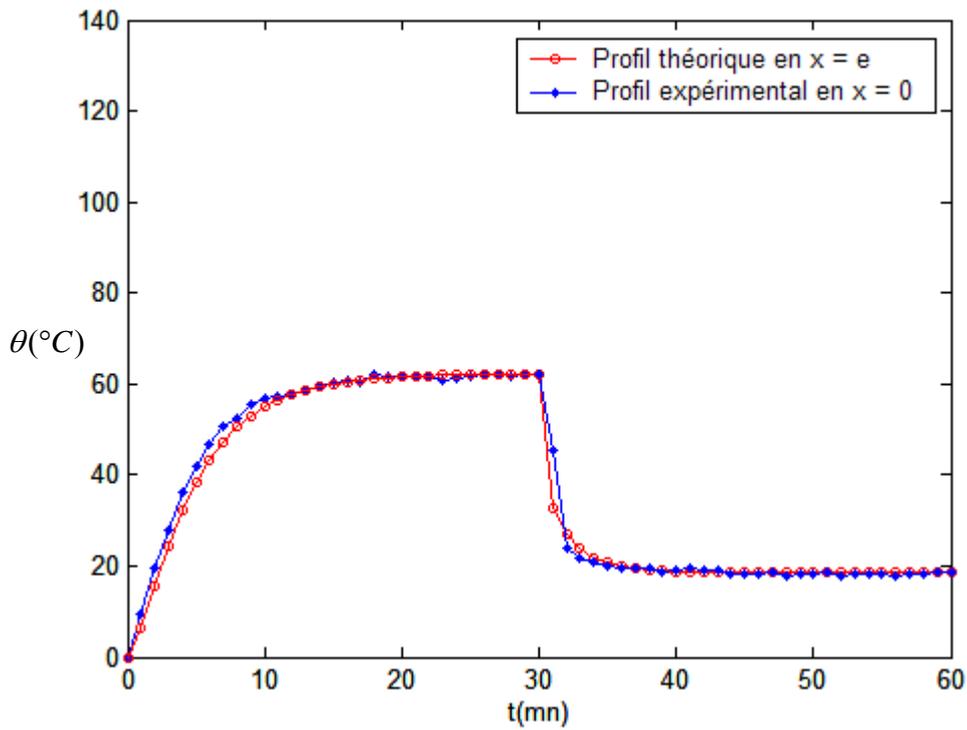
Nous allons présenter les différents résultats obtenus par des expérimentations pour les plaques d'aluminium et de vitrocéramique.

##### IV.4.1.1 Profils de température

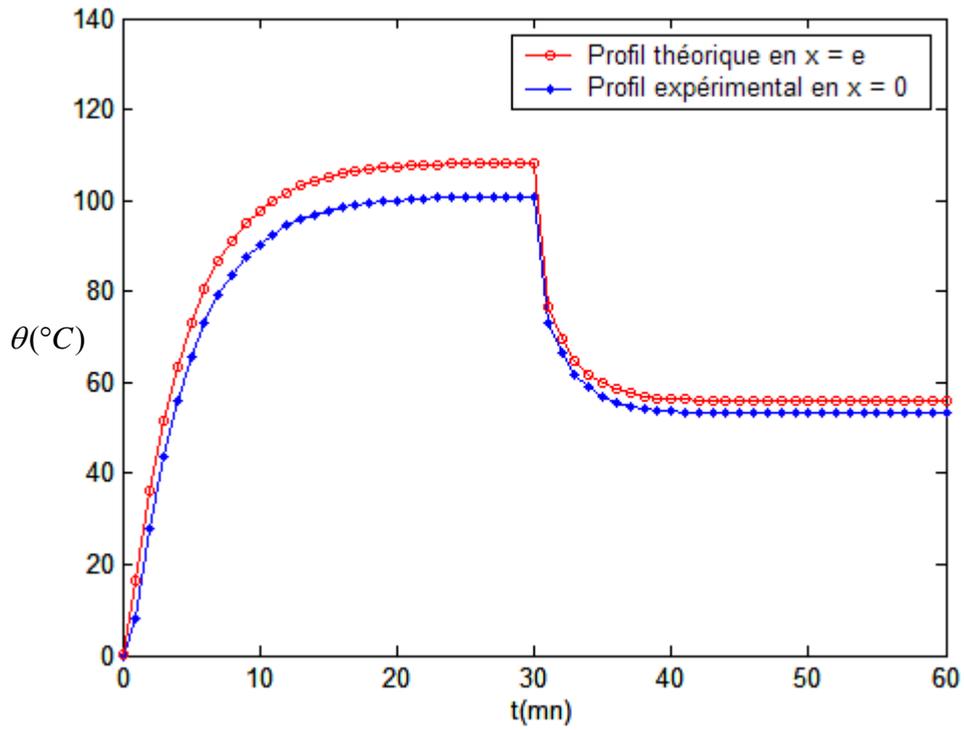
Nous présentons sur les figures (IV.3 à 6) l'évolution de la température expérimentale mesurée en  $x = 0$ , ainsi que le profil de température sur la face  $x = e$  pour des plaques planes de Vitrocéramique et d'Aluminium, en convection forcée. Les profils en  $x = e$  ont été déterminés en utilisant les équations (II.65-II.72).



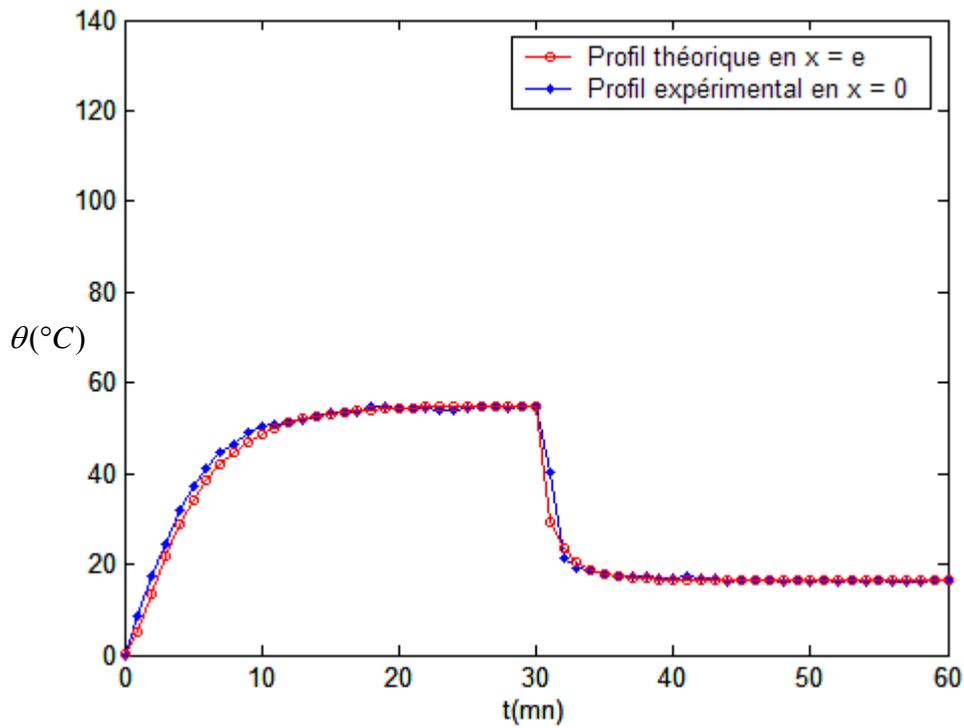
*Figure IV.3 : Profils de températures pour une vitesse d'écoulement 5 m/s  
- Plaque de Vitrocéramique -*



*Figure IV.4 : Profils de températures pour une vitesse d'écoulement 5 m/s  
- Plaque en Aluminium -*



*Figure IV.5 : Profils de températures pour une vitesse d'écoulement 7 m/s  
- Plaque en Vitrocéramique -*



*Figure IV.6 : Profils de températures pour une vitesse d'écoulement 7 m/s  
- Plaque en Aluminium -*

Les courbes de température présentées ci-dessus, montrent parfaitement que le temps pour lequel on atteint le régime permanent est de l'ordre de 20 mn de chauffage en convection naturelle ou forcée, s'en suit alors la phase de relaxation où la température baisse considérablement et se stabilise 15 mn après le début de cette phase est diminuée avec l'augmentation de la vitesse et cela quelque soit le type de matériau.

Pour la plaque de Vitrocéramique, on observe qu'en phase de montée en température, l'écart de température entre les faces inférieure et supérieure est de l'ordre de 4°C environ et en phase de relaxation cet écart reste de l'ordre de 2°C.

L'allure des courbes de l'Aluminium est sensiblement identique à celle de la plaque en vitrocéramique avec des valeurs différentes, du fait des propriétés thermiques et des épaisseurs différentes. On observe également que l'augmentation de la vitesse de l'air s'accompagne d'une diminution de la température au niveau de la plaque, ce qui s'avère être logique.

#### VI.4.1.2 Flux de chaleur

Sur les figures (IV.7) et (IV.8), nous montrons l'évolution des flux pariétaux en convection naturelle et ainsi qu'en convection forcée, pour deux vitesses différentes, pour des plaques de Vitrocéramique et d'Aluminium d'épaisseur finie.

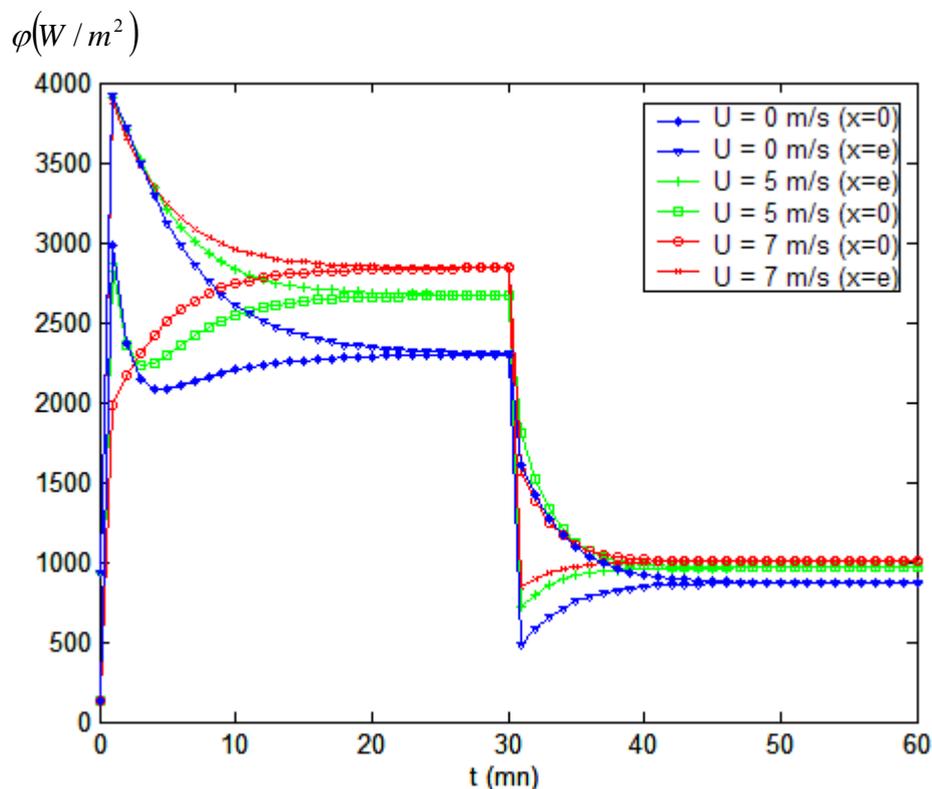
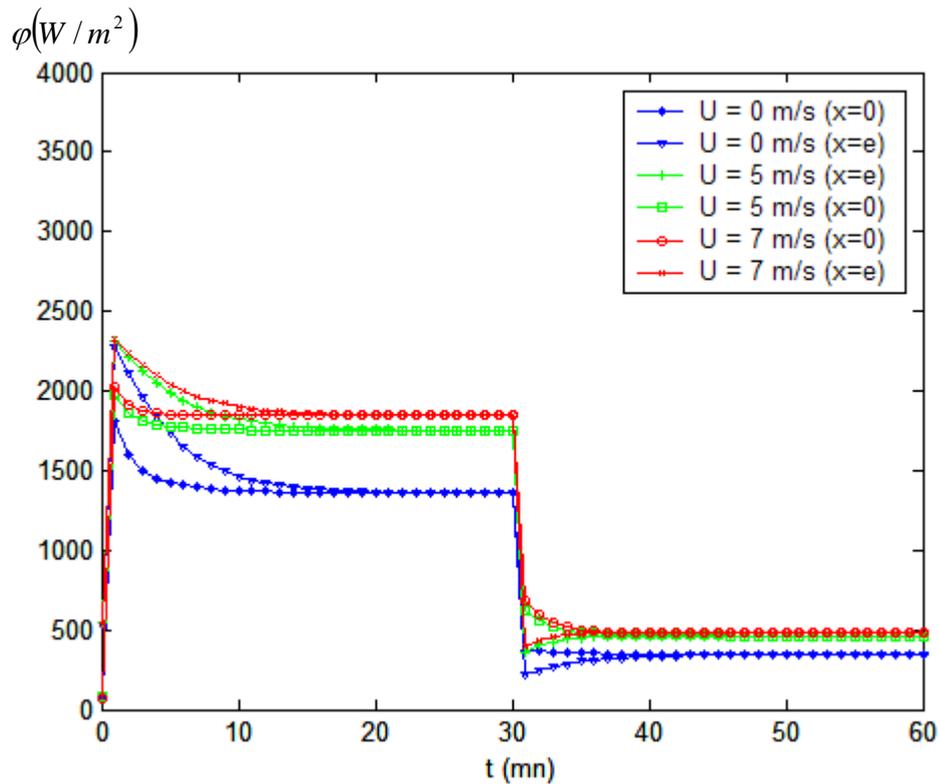


Figure IV.7 : Flux de chaleur pariétaux pour différentes vitesses d'écoulement – Plaque de Vitrocéramique



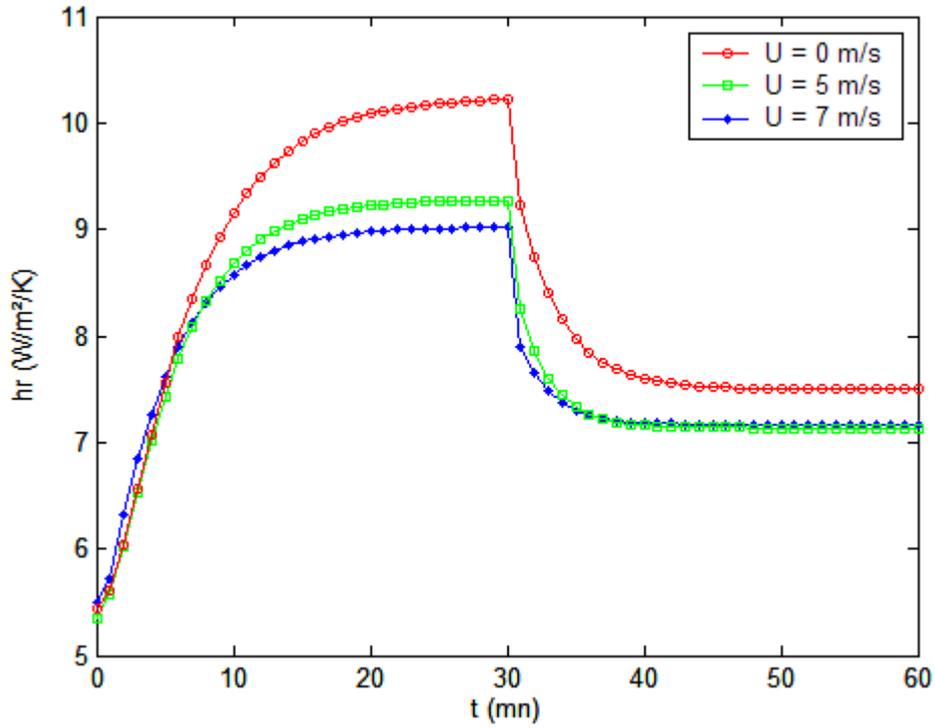
**Figure IV.8 :** Flux de chaleur pariétaux pour différentes vitesses d'écoulement – Plaque d'Aluminium

On constate pour la plaque de Vitrocéramique que l'écart de flux de chaleur entre la face  $x = 0$  et  $x = e$ , en régime transitoire, est très élevé.

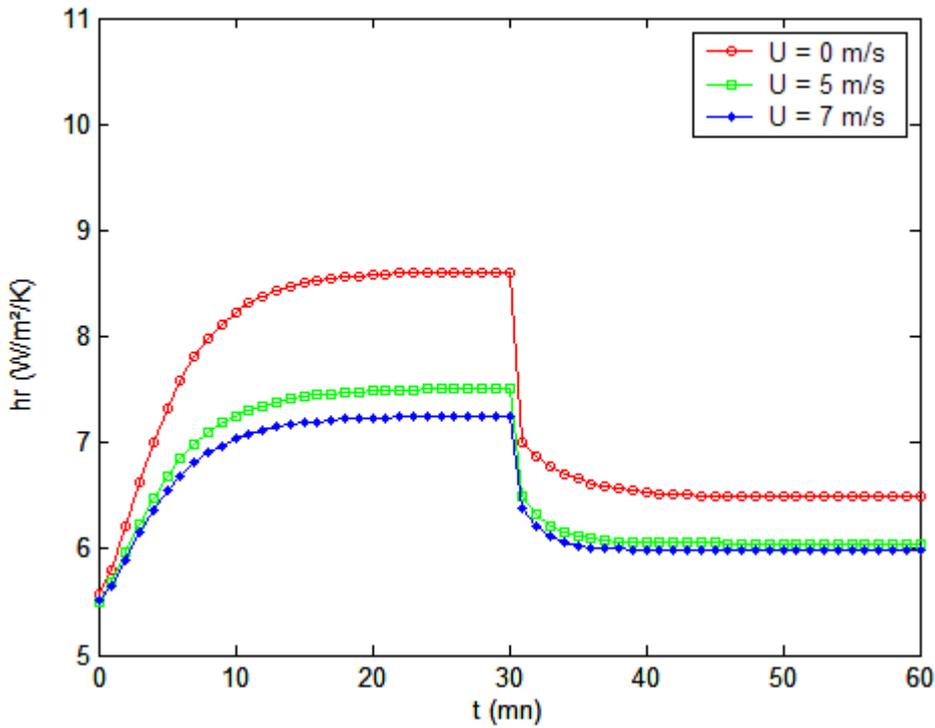
#### IV.4.1.3 Coefficients d'échange radiatif et convectif

Les figures (IV. 9, IV.10) et (IV.11, IV.12) représentent respectivement les coefficients d'échange radiatif et convectif au cours du temps suivant le modèle mathématique adopté.

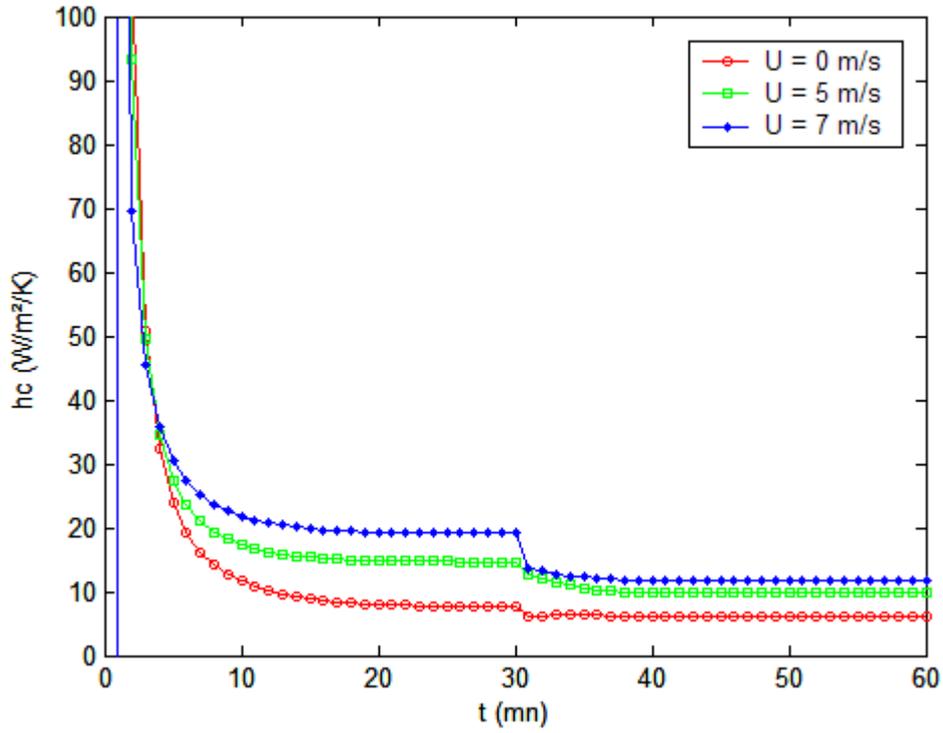
On remarque que le coefficient d'échange radiatif augmente progressivement pour se stabiliser à une valeur constante puis il diminue brusquement pour atteindre une autre valeur constante supérieure à sa valeur à  $t = 0$ , tandis que le coefficient de convection diminue très rapidement pour tendre vers une valeur constante correspondante au régime permanent. Ce coefficient n'est pas défini en  $t = 0$  : son inverse, la résistance thermique convective croît rapidement de 0 à sa valeur en régime permanent. La valeur de  $h_c$  du régime permanent est très proche de celle donnée par les corrélations [28] (tableau IV. 2).



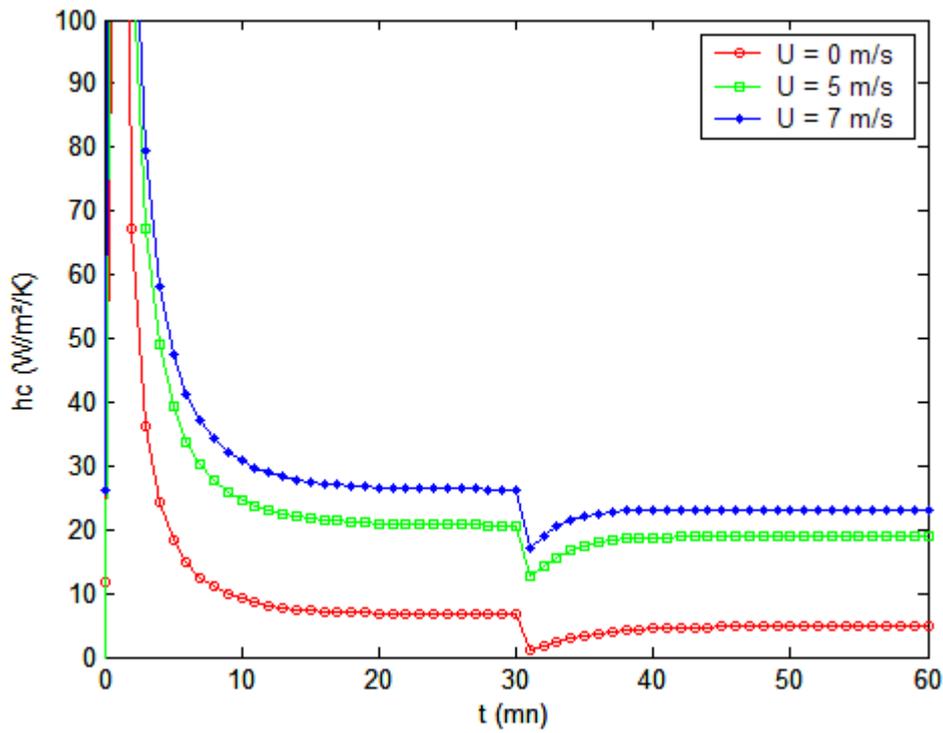
*Figure IV.9 : Coefficients d'échanges radiatifs pour différentes vitesses d'écoulement – Plaque de Vitrocéramique*



*Figure IV.10 : Coefficients d'échanges radiatifs pour différentes vitesses d'écoulement – Plaque d'Aluminium*



*Figure IV.11 : Coefficients d'échanges convectifs pour différentes vitesses d'écoulement – Plaque de Vitrocéramique*



*Figure IV.12 : Coefficients d'échanges convectifs pour différentes vitesses d'écoulement – Plaque d'Aluminium*

Plaque	$V$ (m/s)	Ecart (%)	$h_i^0$ ( $W/m^2K$ ) [28]	$h_{ec}^0$ ( $W/m^2K$ ) modèle	$h_{ec}^0$ ( $W/m^2K$ ) [28]	$h_{er}^0$ ( $W/m^2K$ ) [28]
Vitrocéramique 3 m 1.09	Phase de chauffage					
	5	16	12.93	16.22	19.31	9.27
	7	10.6	12.59	20.12	22.85	9.02
	Phase de relaxation					
	5	46	10.10	10.42	19.31	7.13
	7	42	10.10	13.32	22.85	7.16

Aluminium 1 mm 210	Phase de chauffage					
	5	4	10.34	20.10	19.31	7.51
	7	2.5	10.02	23.14	22.85	7.26
	Phase de relaxation					
	5	1	8.18	19.50	19.31	6.05
	7	1	8.06	23	22.85	5.99

Tableau IV.2 : Valeurs des coefficients d'échange en régime permanent

#### IV.4.2 Comparaisons du modèle mathématique avec la simulation numérique

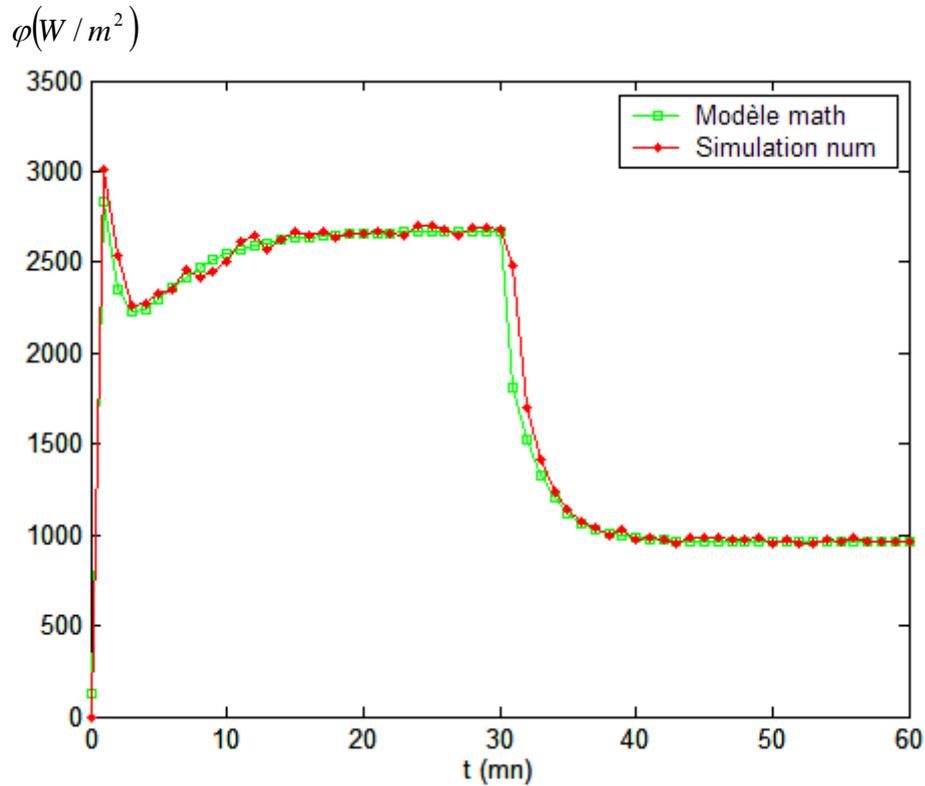
Dans le but de confirmer nos résultats théoriques, nous réaliserons une étude comparative entre la modélisation mathématique et la simulation numérique (voir annexe 3).

##### IV.4.2.1 Plaque de vitrocéramique

Pour la plaque de vitrocéramique des essais en convection naturelle, à 5m/s et 7m/s, ont été menés.

La modélisation mathématique et la simulation numérique de ces essais permettent d'obtenir la température de la face inférieure de la plaque et ainsi que la température aux différents points internes de la plaque plane.

Les figures ci-dessous représentent la comparaison du flux de chaleur et le coefficient d'échange, par la modélisation mathématique et la simulation numérique, pour des essais en convection naturelle et forcée.



*Figure IV.13 : Comparaison des flux de chaleur - Convection naturelle*

Les modèles mathématique et numérique donnent des résultats quasi-identiques dans les deux phases de chauffage et de relaxation validant ainsi les résultats obtenus par la modélisation mathématique. Ce qui est également constaté pour des expérimentations en convection forcée ( $V = 5$  et  $7$  m/s).

Les figures suivantes représentent l'évolution du flux pariétal et du coefficient d'échange convectif obtenus par modélisation théorique et simulation numérique.

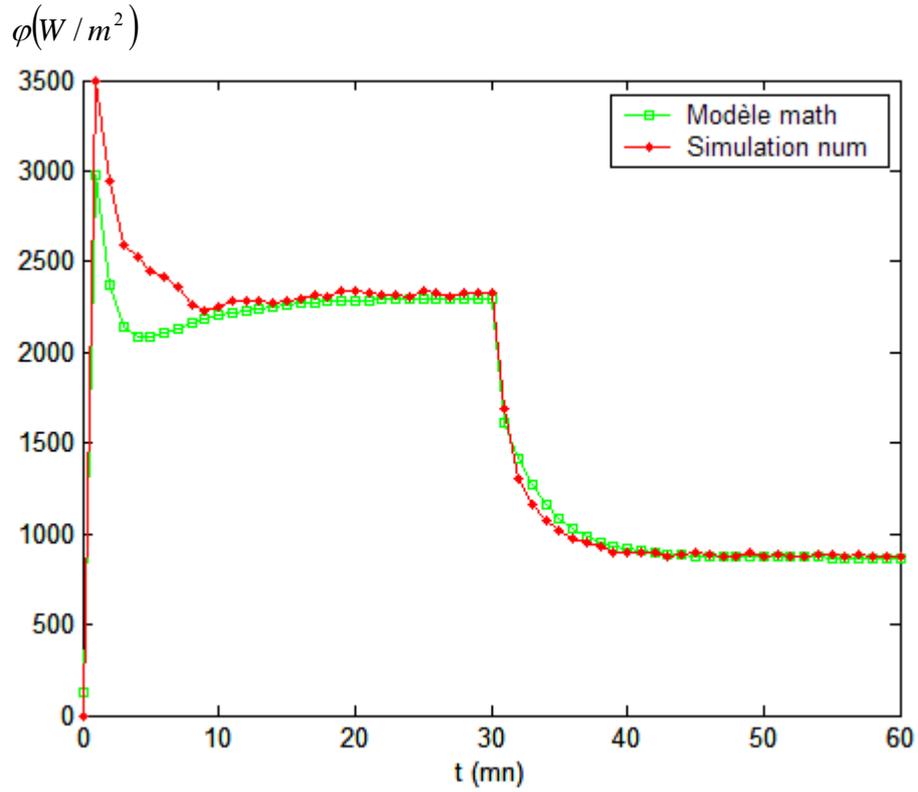


Figure IV.14 : Comparaison des flux de chaleur pariétal -  $U=5$  m/s

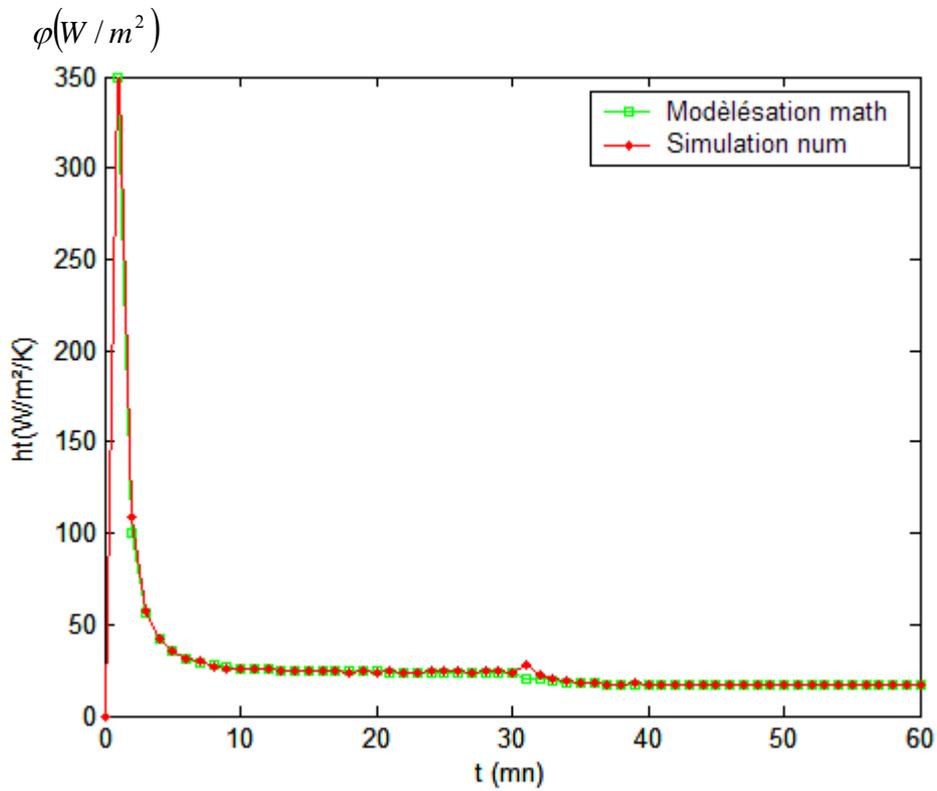


Figure IV.15 : Comparaison des coefficients d'échanges globaux pour une vitesse  $U=5$  m/s

#### IV.4.2.2 Plaque d'Aluminium

Pour la plaque d'aluminium les résultats obtenus par simulation et par modélisation restent sensiblement identiques.

Les différentes courbes qui montrent la comparaison de flux pariétal et du coefficient d'échange convectif par la modélisation mathématique et la simulation numérique sont illustrées ci-dessous.

Les figures IV.16 et IV.17 représentent respectivement l'évolution du flux pariétal et du coefficient d'échange global obtenus par modélisation mathématique et numérique.

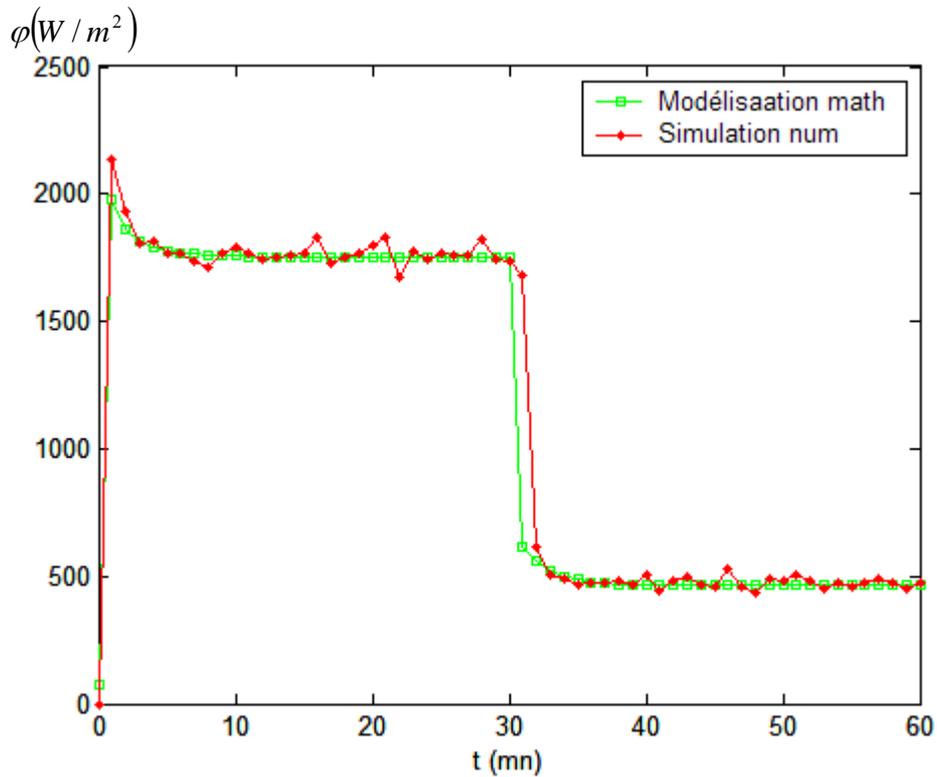
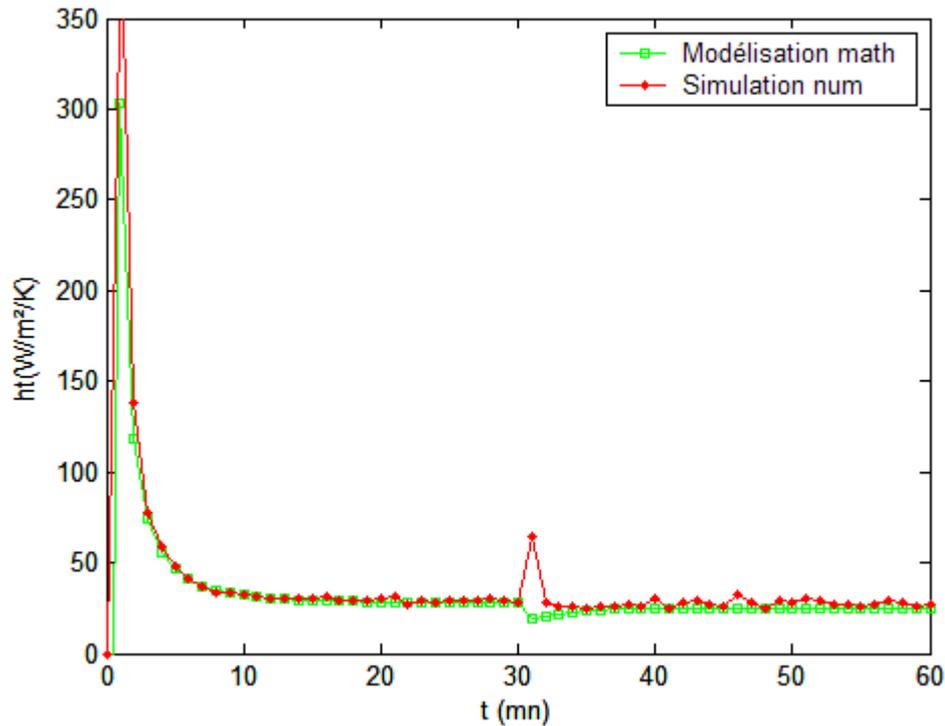


Figure IV.16 : Comparaison du flux de chaleur pariétal -  $U=5$  m/s



*Figure IV.17 : Comparaison de coefficients d'échanges globaux -  $U = 5$  m/s*

Pour la plaque d'aluminium les ordres de valeur pour la modélisation théorique et la simulation numérique restent sensiblement identiques, confirmant une autre fois que la modélisation mathématique donne des résultats sensiblement corrects.

En phase de montée en température le comportement du flux pariétal reste identique à celui de la plaque en vitrocéramique avec des ordres de valeurs différents. En effet ces plaques ont des propriétés thermiques et une épaisseur différentes, d'où elles n'absorbent pas la chaleur de la même manière.

Ainsi en phase de relaxation le flux devient constant une fois le régime permanent établi, confirmant ainsi les propriétés théoriques.

Enfin le flux pariétal est fonction de la vitesse au voisinage de la paroi, et augmente avec cette dernière.

## IV.5 Conclusion

Nous avons présenté les différentes évolutions du coefficient d'échange convectif  $h_e$ , la température aux faces inférieure et supérieure de la plaque et le flux pariétal.

Les différents résultats obtenus par modélisation mathématique et par simulation numérique sont sensiblement identiques. Cependant quelques fluctuations subsistent pour les valeurs issues de la simulation n'altérant en rien la validité de ces résultats. Un lissage permettrait d'obtenir des valeurs plus harmonieuses.

Ces résultats valident les différentes hypothèses théoriques de cette étude :

-en phase de montée en température et en phase de relaxation une fois le régime permanent établi, le coefficient d'échange convectif  $h_e$  ainsi que le flux pariétal restent constants,

-et enfin, ils sont fonction de la vitesse de l'écoulement au voisinage de la paroi et augmentent avec la vitesse.

Enfin, la comparaison du flux pariétal au flux incident  $\phi_i$  pour chaque plaque, permet de montrer qu'elles n'absorbent pas de la même manière, leur matériau et leur épaisseur étant différents.

## CONCLUSION GENERALE

Nous avons développé un modèle théorique pour le calcul du coefficient d'échange convectif en régime transitoire sur plaque plane chauffée. Ce modèle, couplé aux essais expérimentaux représentant les profils de température de surface de la plaque, nous a permis de déterminer le flux de chaleur pariétal et de déduire le coefficient d'échange convectif.

Nous constatons sur les courbes de température que la durée au bout de laquelle le régime permanent est atteint semble être très proche dans le cas de la plaque en Aluminium et celle de vitrocéramique de 20 mn. Ce régime semble être faiblement dépendant de l'inertie thermique du solide, transmettant la chaleur au fluide. Ce phénomène provient probablement de la nature du fluide dans lequel la conduction (très faible) domine par rapport à la convection au voisinage du solide.

Dans la formulation du modèle mathématique, nous avons utilisé la méthode de la fonction de Green qui permet de déterminer directement et de manière rigoureuse, le flux de chaleur à la paroi évitant ainsi la mesure du flux pariétal et la perturbation de la couche limite thermique et dynamique. Dans le modèle développé nous avons supposé que le coefficient de convection naturelle  $h_i^0$  reste constant durant le temps d'expérimentation.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **D. E. Adams** and **B. Gebhart**, *Transient forced convection from a flat plate subjected to a step energy input*, J. Heat Transfer, pp. 253-258, May 1964.
- [2] **G. Polidori**, **M. Lachi** and **J. Padet**, *Unsteady convective heat transfer on semi-infinite flat surface impulsively heated*. Int. Comm. Heat Mass Transfer, Vol.25, No. 1, pp. 33-42, 1998.
- [3] **M. Lachi**, **M. Rebay**, **E. Mladin**, et **J. Padet** : *Etude de la convection forcée transitoire sur une plaque plane avec la méthode intégrale*. Journée d'Etudes de la Société Française des Thermiciens, 4 Décembre 2003.
- [4] **R.C.C. Wang**, **B.T.F. Chung** and **L.C. Thomas** : *Transient Convective Heat Transfer for Laminar Boundary Layer Flow With Effects of Wall Capacitance and Resistance*. Journal of Heat transfer, Vol 99, Nov. 1977, pp 513-519.
- [5] **W.J. Parker**, **R.J. Jenkins**, **C.P. Bulter** and **G.L. Abbot**, *flash method in determining thermal diffusivity, heat capacity and thermal conductivity*. J. of Applied physics, vol. 32, 1961, p. 1679-1684.
- [6] **A.Degiovanni** et **D.Balageas** : *Mesure de la diffusivité thermique par la méthode Flash*. Technique de l'ingénieur, 10-1986, R 2 955.
- [7] **D. Balageas** et **D. Ory**, *Quelques améliorations dans la détermination des transferts convectifs à partir de la thermographie infrarouge*, la Recherche Aérospatiale, n° 3, pp. 213-219,1980.
- [8] **D. Balageas** et **D. Boscher**, *L'évaluation des pertes dans les expériences photothermiques impulsives. Application à la détermination des coefficients*

*de transfert convectif sur des maquettes en soufflerie*, C.R.A.S. Paris, t. 305, Série II, pp. 13-16, 1987.

- [9] **D. Balageas, D. Boscher, A. Deom, J. Fournier et R. Henry**, *La thermographie infrarouge : un outil quantitatif à la disposition du thermicien*. R.G.T.n° 322 p.501-510, 1988.
- [10] **B. Remy, A. Degiovanni et D. maillet**, *Mesure de coefficient d'échange pour des écoulements à faible vitesse* , Rev. Gén. De Thermique, n° 397, Janvier 1995. pp. 28-42.
- [11] **D. J. Crowther**, *Etude et développement d'une méthode optique pour la mesure du coefficient de convection*, Thèse de Doctorat de l'université de Reims, Mars 1990.
- [12] **M. Lachi, M. Rebay et J. Padet**, *Identification du coefficient d'échange convectif par la méthode photothermique impulsionnelle*. SFT. 27 mars 2002 Paris.
- [13] **D. Petit. J. Dard et A. Degiovanni**, *Détermination du coefficient d'échange entre un fluide et une paroi*. Rev. Gén. Therm. n° 238 Octobre 1981 pp 719-732.
- [14] **A. Massad. J. Dard. P. Gervais. et M. Laurent** : *Coefficients d'échange dans une conduite cylindrique, Evaluation expérimentale*, R.G.T., n° 286, octobre 1985. pp731-737.
- [15] **A. Hadi et A. Degiovanni**, *Mesure par une méthode transitoire du coefficient d'échange le long d'une ailette en milieu confiné*, R.G.T., n° 304, Avril 1987. pp 251-262.
- [16] **A. Degiovanni**, *Diffusivité et méthode Flash*, R.G.T., n° 185. pp 420-442. 1977.

- [17] **A. Degiovanni**, *Une nouvelle technique d'identification de la diffusivité thermique pour la méthode « flash »*. Revue. Phys. App. 21. 1986. 229-237.
- [18] **S. Abboudi. A. Ropke et F. Papini** : *Etude expérimentale du transfert thermique en régime instationnaire dans un conduit. Mesure des coefficients de transfert métal-fluide*, R.G.T., n° 322, pp731-737. 1988.
- [19] **R. Ben Younes**, *Prévision numérique et expérimentale de la réponse intrinsèque d'un échangeur en régime continu*. Thèse à l'université de Valenciennes. N°39-135. 1993.
- [20] **D. Khaine**, *Etude théorique du comportement thermique d'un bâtiment par la théorie des fonctions de Green*. Thèse à l'université de Valenciennes. n° 55-489. 2000.
- [21] **Carslaw H.S., Jaeger J.C.** Conduction of heat in solids. Oxford University Press, 1959.
- [22] **D. Khaine, J.Y. Desmons, A. Khaine, R. Ben Younes et M. Le ray**, *Simulation du comportement thermique d'un local par la méthode des fonctions de Green*. Int. J. Therm. Sci. n° 38 p.340-347. 1999.
- [23] **I. S. Gradshteyn et M. Ayzhik**, Table Of Intergrals, Series, and Products - -
- [24] **G. F. Roach**. Green's Functions. Combridge University Press, London. New York. New Rochelle. Second Edition.
- [25] **D. Duffy**. Green's Functions With Applications. Studies in Advanced Mathematics. Chapman and Hall / CRC. ISBN 1-58488-110-0. QA 371. D74.2001;
- [26] **S. Doniach and E.H. Sondheimer**. Green's Functions For Solids State Physicists. ISBN. 1-86094-078-1. First Published 1998.

- [27] **A. Bairi** , et **N.Laraqi**, *Diagrams for fast transient conduction in sphere and long cylinder subject to sudden and violent thermal effects on its surface. Applied thermal Engineering n° 23 , P 1373-1390, December 2002.*
- [28] **A. Grine** . Mise en place d'un banc d'essais de la convection thermique en régime transitoire. Mémoire de DEA en mécanique énergétique de l'Université de Valenciennes, Juillet 2003.
- [29] **JF.Sacadura**. Initiation aux transferts thermiques. Cast. INSA de Lyon.Tec. et doc. de Paris. 1980.

a	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
$A_n$	constante d'intégration
Bi	$=h.e/\lambda$ nombre de Biot
$B_n$	constante d'intégration
e	épaisseur de la plaque, $m$
$F_0$	$=a.t/e^2$ , nombre de Fourier
G	fonction de Green
$\overline{G}$	transformée de Laplace de G
h	coefficient de transfert thermique, $W.m^{-2}.K^{-1}$
H	$=h/\lambda$ coefficient de transfert adimensionné
p	
q	
t	temps, $s$
$T_\infty$	température ambiante, $^\circ C$
$T_0$	température initiale de la plaque, $^\circ C$
u, u', w	fonctions mathématiques
x	variable d'espace, $m$
$x^*$	$= x/e$ variable d'espace adimensionné
<i>Symboles grecs</i>	
$\lambda$	conductivité thermique, $W.m^{-2}.K^{-1}$
$\theta(x,t)$	$= T(x,t) - T_\infty$ , température, $^\circ C$
$\delta(t)$	distribution de Dirac
$\varphi$	densité de flux, $W.m^{-2}$
$\varphi^*$	densité de flux, $W.m^{-2}$
$\Psi$	
$\mu_n$	valeur propre adimensionné
$\overline{\theta}$	transformée de Laplace de $\theta$
$\theta^*$	$=\theta(x,t)/\theta(x,\infty)$
$\alpha_n$	valeurs propres de Laplacien
$\xi$	variable d'espace, $m$
<i>Indices et exposants</i>	
0	flux de la phase de chauffage
1	flux de la phase de relaxation
i	inférieure, ou incident

e	extérieure
c	chauffage
r	refroidissement

**Solution exacte**

En reprenant l'équation (II.19) du modèle analytique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} \frac{\partial \theta^*(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta^*(x,t)}{\partial x^2} = 0 \\ \theta^*(x,t) \Big|_{x=0} = 1 \\ \frac{\partial \theta^*(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=e} = -H_i^0 \theta^*(e,t) \\ \theta^*(x,0) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

La solution du problème auxiliaire  $\theta^*(x,t)$  peut s'écrire sous la forme de la somme de deux solutions  $u^*(x)$  et  $w^*(x,t)$  respectivement du régime permanent et transitoire qui se présentent de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u^*(x)}{\partial x^2} = 0 \\ u^*(0) = 1 \\ \frac{\partial u^*(x)}{\partial x} \Big|_{x=e} = -H_i^0 u^*(e) \end{array} \right. \quad (2)$$

La solution du régime permanent  $u^*(x)$  du système (2) s'écrit alors :

$$u^*(x) = 1 - \frac{H_i^0}{H_i^0 e + 1} x \quad (3)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} \frac{\partial w^*(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 w^*(x,t)}{\partial x^2} = 0 \\ w^*(x,t) \Big|_{x=0} = 0 \\ \frac{\partial w^*(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=e} = -H_i^0 w^*(e,t) \\ w^*(x,0) = -u^*(x) \end{array} \right. \quad (4)$$

En utilisant l'équation (II.16) du modèle analytique, on trouve :

$$w^*(x,t) = - \int_0^e \frac{G(x,\xi,t)}{a} u^*(\xi) d\xi \quad (5)$$

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a\alpha_n^2 t} \varphi_n(x)$$

$$A_n(0) = \int_0^e \varphi_n(\xi) w(\xi, 0) d\xi$$

$$A_n(0) = - \int_0^e \varphi_n(\xi) u(\xi) d\xi$$

Avec :

$$\varphi_n(\xi) = B_n \sin \alpha_n(\xi)$$

$$A_n = - \int_0^e B_n \sin(\alpha_n \xi) \left( - \frac{H_i^0}{H_i^0 e + 1} \xi + 1 \right) d\xi$$

$$A_n = \frac{H_i^0}{H_i^0 e + 1} B_n \int_0^e d\xi - \int_0^e B_n \sin(\alpha_n \xi) d\xi$$

$$A_n = B_n \left\langle \frac{H_i^0}{(H_i^0 e + 1) \alpha_n^2} \{ -\alpha_n \xi \cos(\alpha_n \xi) + \sin(\alpha_n \xi) \} + \frac{\cos(\alpha_n \xi)}{\alpha_n} \right\rangle_0^e$$

$$A_n = \frac{H_i^0 B_n}{(H_i^0 e + 1) \alpha_n^2} \{ -\alpha_n e \cos(\alpha_n e) + \sin \alpha_n e \} + \frac{B_n}{\alpha_n} \{ \cos(\alpha_n e) - 1 \}$$

$$A_n = \frac{H_i^0 B_n \sin(\alpha_n e)}{(H_i^0 e + 1) \alpha_n^2} (H_i^0 e + 1) + \frac{B_n}{\alpha_n} \{ \cos(\alpha_n e) - 1 \}$$

$$A_n = \frac{H_i^0 B_n \sin(\alpha_n e)}{\alpha_n^2} + \frac{B_n}{\alpha_n} \{ \cos(\alpha_n e) - 1 \}$$

$$A_n = - \frac{B_n}{\alpha_n} \tag{6}$$

D'où :

$$w(x, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin \alpha_n x}{\alpha_n} e^{-a \alpha_n^2 t} \tag{7}$$

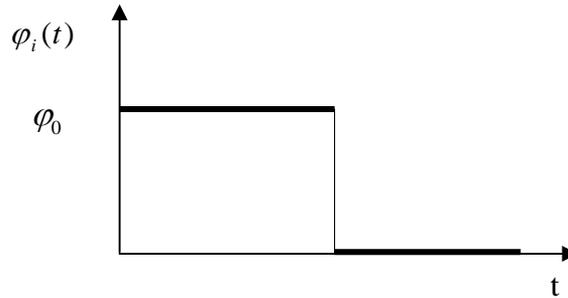
$$\theta^*(x, t) = u^*(x) - \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin \alpha_n x}{\alpha_n} e^{-a \alpha_n^2 t} \tag{8}$$

En appliquant la condition aux limites du système (1) à cette dernière, on trouve :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin \alpha_n x}{\alpha_n} = \left( 1 - \frac{H_i^0}{H_i^0 e + 1} x \right)} \tag{9}$$

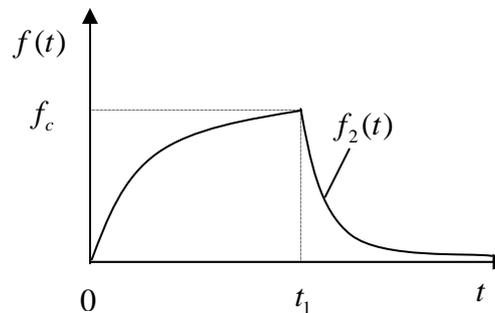
### Profil de température et flux de chaleur lors de la phase de relaxation

Etudions maintenant le cas où le flux absorbé  $\varphi_i(t)$  par la paroi inférieure change brusquement à l'instant  $t_1$  et tend vers 0. On se place dans le cas 1  $\varphi_i(t)=0$  pour  $t > t_1$  cité dans le texte. Dans ce cas, la plaque se refroidit pour prendre une température uniforme égale à  $T_\infty$ .



La température imposée représentée dans le texte par  $f_2(t)$  est déterminée expérimentalement à l'aide de la caméra infrarouge et est représentée mathématiquement cette fois-ci par la forme suivante :

$$f_2(t) = f_c \sum_{k=1}^K b_k e^{-\delta_k(t-t_1)} \quad \text{si } t \geq t_1 \quad (1)$$



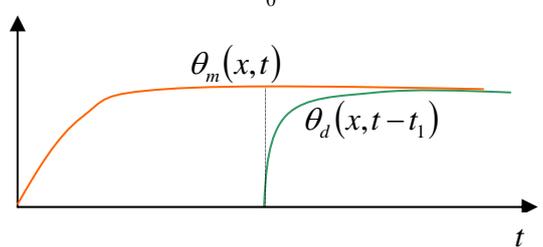
Et  $b_k$  et  $\delta_k$  : les constantes utilisées dans les lissages des profils de température expérimentaux.

Cette série d'exponentielles doit vérifier la contrainte suivante :

$$\text{➤ Condition de continuité : } f_2(t_1) = f_c \Rightarrow \sum_{k=1}^K b_k = 1 \quad (2)$$

L'étude est la même que celle dans le cas d'échauffement. La seule différence est le flux absorbé par la paroi nul dans ce cas.

$\theta_d(x, t-t_1)$  est une température analogue à  $\theta_m(x, t)$  mais décalée d'un temps  $t_1$  ; elle s'écrit :

$$\theta_d(x,t) = \left\langle \begin{aligned} & \frac{\varphi_0}{\lambda} \int_0^t G(e,x,\tau) d\tau + u^*(x) \{f_1(t+t_1) - f_2(t+t_1)\} \\ & - \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \{f_1(\tau+t_1) - f_2(\tau+t_1)\} \int_0^e \frac{G(x,\xi,t-\tau)}{a} u^*(x) d\xi d\tau \end{aligned} \right\rangle \quad (3)$$


La fonction  $f_1(t)$  est simplement remplacée par la fonction  $f'(t) = f_1(t+t_1) - f_2(t+t_1)$  dont la forme est analogue à  $f_1(t)$  : elle s'annule en  $t=0$  et tend exponentiellement vers  $f_\infty$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

$$f'(t) = f_\infty \left\{ 1 - \sum_{m=1}^M c_m e^{-\gamma_m t} - \frac{f_c}{f_\infty} \sum_{k=1}^K b_k e^{-\delta_k t} \right\} \quad (4)$$

Avec

$$c_m = a_m e^{-\gamma_m t_1}$$

$a_m, \gamma_m$  : constantes de lissage du profil de température.

Le comportement de la fonction  $\theta_d$  sera analogue à celui de  $\theta_m$ .

Après avoir introduit les expressions de  $G(x,\xi,t-\tau)$ ,  $f'(t)$  et  $u^*(x)$ , la fonction  $\theta_d(x,t)$  s'écrit :

$$\theta_d(x,t) = \left\{ \begin{aligned} & \frac{\varphi_0/\lambda}{H_i^0 e + 1} x - \frac{\varphi_0}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e) \sin(\alpha_n x)}{\alpha_n^2} e^{-a\alpha_n^2 t} - \left( 1 - \frac{H_i^0}{H_i^0 e + 1} x \right) \left( f_c \sum_{k=1}^K b_k e^{-\delta_k t} - f_\infty \left( 1 - \sum_{m=1}^M a_m e^{-\gamma_m (t+t_1)} \right) \right) \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^K B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n x)}{\alpha_n} \frac{f_c b_k \delta_k}{a\alpha_n^2 - \delta_k} \left( e^{-\delta_k t} - e^{-a\alpha_n^2 t} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^M B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n x)}{\alpha_n} \frac{f_\infty a_m \gamma_m}{a\alpha_n^2 - \gamma_m} e^{-\gamma_m t_1} \left( e^{-\gamma_m t} - e^{-a\alpha_n^2 t} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

La densité de flux de chaleur  $\varphi(t)$  à la paroi soumise au flux d'air  $\varphi(t)$  pourra s'écrire :

$$\varphi(t) = \varphi_m(t) - E(t-t_1)\varphi_d(t-t_1) \quad (6)$$

Où  $\varphi_d(t)$  s'écrit :

$$\varphi_d(t) = \left\{ \begin{aligned} & \frac{\varphi_0}{H_i^0 e + 1} - \varphi_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e)}{\alpha_n} e^{-a\alpha_n^2 t} - \frac{h_i^0}{H_i^0 e + 1} \left( f_c \sum_{k=1}^K b_k e^{-\delta_k t} - f_\infty \left( 1 - \sum_{m=1}^M a_m e^{-\gamma_m (t+t_1)} \right) \right) \\ & + \lambda \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{f_c b_k \delta_k}{a\alpha_n^2 - \delta_k} \left( e^{-\delta_k t} - e^{-a\alpha_n^2 t} \right) - \lambda \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{f_\infty \gamma_m a_m}{a\alpha_n^2 - \gamma_m} e^{-\gamma_m t_1} \left( e^{-\gamma_m t} - e^{-a\alpha_n^2 t} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

## Etude par simulation numérique du coefficient d'échange he pour une plaque dans la veine d'essai.

On veut par cette simulation numérique déterminer l'évolution au cours du temps du coefficient d'échange global  $h_e$  en convection forcée en supposant connues  $h_i$  (coefficient d'échange global sur la face inférieure de la plaque plane),  $\varphi_i$  (le flux de chauffage par rayonnement) et la température sur la face supérieure de la plaque  $f(t)$  obtenue par la thermographie infrarouge.

On définit un coefficient d'échange global  $h_i$  comme étant la somme du coefficient de convection et du rayonnement :

$$h_i = h_{ic} + h_{ir} \quad (1)$$

Le coefficient de convection  $h_{ic}$  est obtenu en prenant en compte les corrélations en convection naturelle sur la plaque plane.

### 1 Mise en évidence du problème

On rappelle que dans ce problème, il s'agit d'une plaque plane d'épaisseur finie  $e$  placée à l'intérieur d'une veine d'essai et soumise à un flux de chauffage sur sa face inférieure en présence d'un écoulement d'air sur l'autre face.

L'équation de propagation de la chaleur est supposée unidirectionnelle et s'écrit :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

Avec :  $a = \lambda / \rho c$

On écrit les conditions aux limites spécifiques à ce problème :

#### o *Sur la face supérieure de la plaque :*

Cette face est soumise à l'écoulement d'air de la veine d'essai et est caractérisée par le coefficient d'échange convectif  $h_e$  ou bien  $\left( H_e = \frac{h_e}{\lambda} \right)$ , d'où la condition limite

suivante :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) \right|_{x=0} = H_e(t) \theta(0, t) \quad (3)$$

○ *Sur la face inférieure de la plaque :*

Cette face est chauffée par infrarouge et le flux incident sur la plaque délivré par ce système de chauffage est nommé  $\varphi_i$ . La condition limite s'écrit :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) \right|_{x=e} = -H_i^0 \theta(e, t) + \frac{\varphi_i(t)}{\lambda} \quad (4)$$

## 2 Discrétisation par différences finies

Cette méthode a une approche de type différences finies : la plaque doit être découpée en  $i-1$  tranches d'épaisseur  $dx$  correspondant ainsi à  $i$  nœuds de discrétisation si l'on place un nœud sur chaque surface (figure 1).

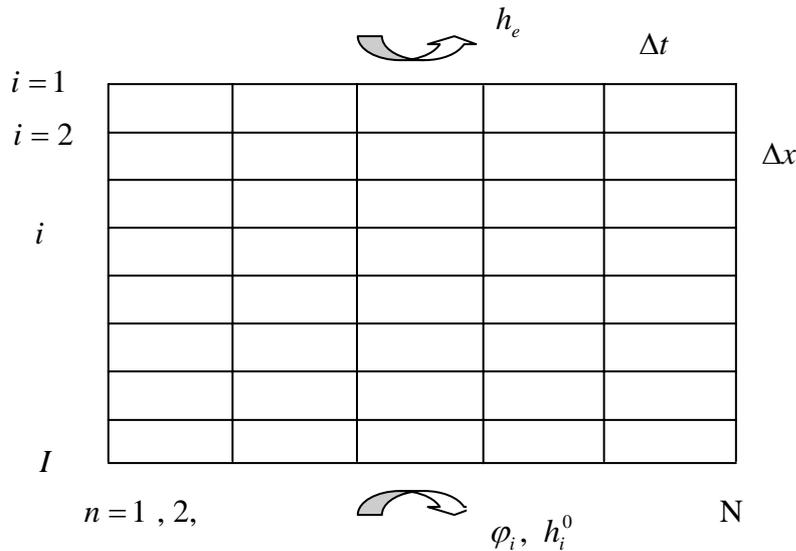


Figure 1 : *Discrétisation de la plaque par différences finies*

La méthode par différences finies est une méthode basée sur l'équation de l'énergie locale discrétisée et résolue de proche en proche. Pour effectuer la discrétisation de la plaque on exprime l'opérateur différentiel en un point en fonction de l'inconnu aux points voisins, en réalisant un développement de Taylor à l'ordre 1 du champ de température en un point.

## 2.1 Discrétisation de l'équation de la chaleur

Pour discrétiser l'équation de la chaleur de manière adéquate on utilise une méthode implicite, cette méthode possède l'avantage d'être stable.

La notion de stabilité n'a de sens véritable que dans le cas d'un problème d'évolution comme dans cette étude  $h_e(t)$ . La stabilité d'un schéma aux différences finies traduit le fait que des erreurs locales à un instant donné s'affaiblissent quand  $t$  augmente.

Ainsi pour l'équation de la chaleur on obtient une équation implicite en écrivant le Laplacien de la température à l'instant  $t + \Delta t$  où la solution n'est pas connue :

$$\frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\Delta t} = a \frac{\theta_{i-1}^{n+1} - 2\theta_i^{n+1} + \theta_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (5)$$

En posant  $r = a\Delta t / \Delta x^2$ , on peut exprimer la température à l'instant  $t + \Delta t = (n+1)\Delta t$  en fonction des températures à l'instant  $t = n\Delta t$ , soit :

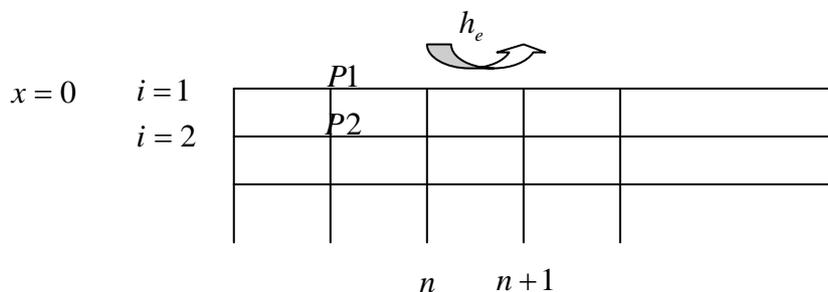
$$\theta_i^{n+1} = \frac{\theta_i^n + r(\theta_{i+1}^{n+1} + \theta_{i-1}^{n+1})}{1 + 2r} \quad (6)$$

## 2.2 Discrétisation des conditions limites : schéma du 1<sup>er</sup> ordre en $\Delta t$ et $\Delta x$

### o Face supérieure de la plaque :

On suppose ici une condition limite de flux imposé. La condition limite de flux s'écrit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) \Big|_{x=0} = \varphi(x=0, t) \quad (7)$$



On discrétise l'équation de la chaleur autour du point P1 :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_{P_1} - a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)_{P_1} = 0 \quad (8)$$

$$\theta_1^n = \theta_1^{n+1} - \Delta t \left.\frac{\partial \theta}{\partial t}\right|_{P_1} + O(\Delta t^2) \quad (9)$$

On a alors :

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial t}\right|_{P_1} = \frac{\theta_1^{n+1} - \theta_1^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (10)$$

De même :

$$\theta_{P_2} = \theta_{P_1} + \Delta x \left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{P_1} + \frac{\Delta x^2}{2} \left.\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right|_{P_1} + O(\Delta x^3) \quad (11)$$

Or le flux s'écrit :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{P_1} = \frac{\varphi^{n+1}}{\lambda} \quad (12)$$

Soit :

$$\theta_2^{n+1} - \theta_1^{n+1} = \frac{\Delta x}{\lambda} \varphi^{n+1} + \frac{\Delta x^2}{2} \left.\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right|_{P_1} + O(\Delta x^3) \quad (13)$$

On en déduit alors :

$$\left.\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right|_{P_1} = 2 \frac{\theta_2^{n+1} - \theta_1^{n+1}}{\Delta x^2} - \frac{2}{\lambda \Delta x} \varphi^{n+1} + O(\Delta x) \quad (14)$$

Dans l'équation de la chaleur (en négligeant le terme en  $O(\Delta x, \Delta t)$ ) :

$$\frac{\theta_1^{n+1} - \theta_1^n}{\Delta t} = \frac{2a}{\Delta x^2} (\theta_2^{n+1} - \theta_1^{n+1}) - \frac{2a}{\lambda \Delta x} \varphi^{n+1} \quad (15)$$

Avec :  $\varphi^{n+1} = h_e^n \theta_1^{n+1}$  (16)

On en déduit  $h_e$  à l'instant  $n+1$  :

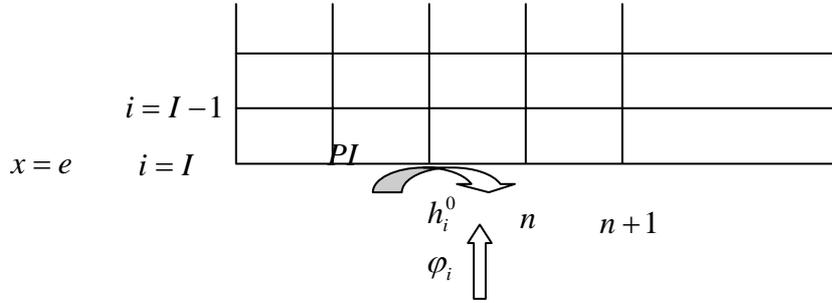
$$h_e^{n+1} = \frac{1}{\alpha \theta_1^{n+1}} \left\{ -(1+2r)\theta_1^{n+1} + \theta_1^n + 2r\theta_2^{n+1} \right\} \quad (17)$$

Avec :  $\alpha = \frac{2a\Delta t}{\lambda \Delta x}$

○ *Face inférieure de la plaque :*

On a ici une condition limite de flux :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=e} = -\frac{\varphi(x=e, t)}{\lambda} \quad (18)$$



On discrétise l'équation de la chaleur autour du point PI :

$$\left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_{PI} - a \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)_{PI} = 0 \quad (19)$$

$$\theta_i^n = \theta_i^{n+1} - \Delta t \left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_{PI} + O(\Delta t^2) \quad (20)$$

On a alors :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_{PI} = \frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (21)$$

De même :

$$\theta_{PI-1} = \theta_{PI} - \Delta x \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{PI} + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right|_{PI} + O(\Delta x^3) \quad (22)$$

Or le flux s'écrit sur cette face de la plaque :

$$\left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{PI} = -\frac{\varphi^{n+1}}{\lambda} \quad (23)$$

Où :

$$\varphi^{n+1} = -\varphi_i + h_i^0 \theta_i^{n+1}$$

(24)

Soit :

$$\theta_{I-1}^{n+1} = \theta_I^{n+1} + \frac{\Delta x}{\lambda} \varphi^{n+1} + \frac{\Delta x^2}{\lambda} \left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right|_{PI} + O(\Delta x^3) \quad (25)$$

On déduit alors :

$$\left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right|_{PI} = 2 \frac{\theta_{I-1}^{n+1} - \theta_I^{n+1}}{\Delta x^2} - \frac{2}{\lambda \Delta x} \varphi^{n+1} + O(\Delta x) \quad (26)$$

En négligeant le terme en  $O(\Delta x, \Delta t)$ , l'équation de propagation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\theta_I^{n+1} - \theta_I^n}{\Delta t} - \frac{2a}{\Delta x^2} (\theta_{I-1}^{n+1} - \theta_I^{n+1}) + \frac{2a}{\lambda \Delta x} \varphi^{n+1} = 0 \quad (27)$$

On déduit alors  $\theta_I$  à l'instant  $n+1$  :

$$\theta_I^{n+1} = \frac{1}{1 + 2r + \alpha h_i^0} \{ \theta_I^n + 2r \theta_{I-1}^{n+1} + \alpha \varphi_i \} \quad (28)$$

### 3 Résolution du système d'équations

On écrit le système d'équations du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_e^{n+1} = \frac{1}{\alpha \theta_1^{n+1}} \{ -(1+2r)\theta_1^{n+1} + \theta_1^n \} + \frac{2r}{\alpha \theta_1^{n+1}} \theta_2^{n+1} \\ \theta_2^{n+1} = \frac{1}{1+2r} \theta_2^n + \frac{r}{1+2r} \theta_3^{n+1} + \frac{r}{1+2r} \theta_1^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \theta_{i>2}^{n+1} = \frac{1}{1+2r} \theta_i^n + \frac{r}{1+2r} \theta_{i+1}^{n+1} + \frac{r}{1+2r} \theta_{i-1}^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \theta_I^{n+1} = \frac{1}{1+2r + \alpha h_i^0} \theta_I^n + \frac{2r}{1+2r + \alpha h_i^0} \theta_{I-1}^{n+1} + \frac{\alpha \varphi_i}{1+2r + \alpha h_i^0} \end{array} \right. \quad (29)$$

En posant le vecteur :

$$X = \begin{pmatrix} h_e \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_i \\ \vdots \\ \theta_I \end{pmatrix} \quad (30)$$

On écrit le système d'équation sous la forme :

$$X^{n+1} = AX^{n+1} + BX^n + C \quad (31)$$

Où :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2r}{\alpha\theta_1^{n+1}} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{1+2r} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{r}{1+2r} & 0 & \frac{r}{1+2r} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{2r}{1+2r+\alpha h_i^0} & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+2r} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{1+2r+\alpha h_i^0} & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\alpha\theta_1^{n+1}} \{(1+2r)\theta_1^{n+1} - \theta_1^n\} \\ \frac{r}{1+2r} \theta_1^{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\alpha\varphi_i}{1+2r+\alpha h_i^0} \end{bmatrix} \quad (33)$$

On obtient le vecteur  $X$  à l'instant  $n+1$  à partir de l'expression à l'instant  $n$ , d'où l'écriture suivante :

$$X^{n+1} = (Id - A)^{-1} [BX^n + C] \quad (34)$$

On réalise un programme de calcul du coefficient de convection et son évolution en fonction du temps.

### Modélisation du mur mince isotherme (Formulation classique)

On peut résoudre de nombreux problèmes avec une précision suffisante en admettant que la résistance interne est négligeable, c'est-à-dire que la conductivité thermique est infinie. On suppose qu'à chaque instant la température est uniforme dans la paroi, elle dépend donc de la variable temps.

Soit une plaque plane sans épaisseur, initialement à  $T_\infty$ , soumise à une excitation créneau. Effectuons un bilan thermique entre les instant  $t$  et  $t + dt$  suivant le premier principe de la thermodynamique : la variation d'énergie interne est égale à la somme des quantités de chaleur reçues ou perdues, soit :

- Variation d'énergie interne :  $\rho C S e df(t)$
- Apport d'énergie :  $\varphi_i S dt$
- Pertes d'énergie :  $-(h_e + h_i) S f(t) dt$

$$\rho C S e d\theta = (h_e + h_i) S \theta(t) dt + \varphi_i S dt \quad (18)$$

Après simplification, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\rho C e \frac{d\theta}{dt} = -(h_e + h_i) \theta(t) + \varphi(t) \quad (19)$$

➤ *En montée de température* :  $0 < t < t_1$

$$\varphi_i = \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad h_e = \frac{\varphi_0 - \rho c e \frac{df_1(t)}{dt}}{f_1(t)} - h_i \quad (20)$$

➤ *En descente de température* :  $t > t_1$

$$\varphi_i = \varphi_1 \quad \Rightarrow \quad h_e = \frac{\varphi_1 - \rho c e \frac{df_2(t)}{dt}}{f_2(t)} - h_i \quad (21)$$

Le modèle obtenu est très simple. Le traitement de thermogrammes expérimentaux s'avérera par conséquent rapide.