

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique



Université M'Hamed Bougara BOUMERDES

Faculté des sciences de l'Ingénieur

Département de Génie Mécanique



Mémoire de Magister

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Modélisation et Simulation en Mécanique

Présenté par

Antar TAHIRI

Thème :

Etude théorique des transferts thermoconvectifs d'un fluide Non-Newtonien en écoulement dans un conduit

Jury :

Dr. Kamel MOHAMMEDI	MC (A), UMB Boumerdès	Président
Pr. Henda KAHALERRAS	Professeur, USTHB	Examineur
Dr. Mourad BALISTROU	MC (A), UMB Boumerdès	Examineur
Dr. Madjid HACHEMI	MC (A), UMB Boumerdès	Examineur
Pr. Kacem MANSOURI	Professeur, UMB Boumerdès	Encadreur

BOUMERDES 2010

SOMMAIRE

Remerciements	i
Résumé	ii
NOMENCLATURE	vi
INTRODUCTION GENERALE	1

CHAPITRE 1

Recherche bibliographique	3
1.1. Etat de l'art	4
1.2. Revue bibliographique	4
1.2.1. Ecoulement d'un fluide newtonien avec l'effet de la dissipation visqueuse	4
1.2.2. Ecoulement d'un fluide non- newtonien avec l'effet de dissipation visqueuse	10
1.3. Etude du comportement des fluides non-Newtonien	17
1.3.1. Définition des fluides Newtoniens et non-Newtoniens	17
1.3.2. Classification des Fluides non- Newtonien	18
1.3.2.1. Comportement des fluides indépendants du temps	18
1.3.2.1.1. Fluides pseudo plastiques (shear thinning)	19
1.3.2.1.1.1. Modèles mathématiques du fluide pseudo plastique	19
1.3.2.1.1.1. a. Modèle loi de puissance	19
1.3.2.1.1.1. b. Modèle du Carreau	20
1.3.2.1.1.1. c. Modèle d 'Ellis	20
1.3.2.1.2. Fluides viscoplastiques	21
1.3.2.1.2. 1. Modèles mathématiques du fluide viscoplastique	22
1.3.2.1.2.1. a. Modèle plastique de Bingham	22
1.3.2.1.2.1. b. Modèle de Herschel–Bulkley	22
1.3.2.1.2.1. c. Modèle de Casson	22
1.3.2.1.3. Fluides dilatants (shear thickening)	23
1.3.2.2. Comportement des fluides dépendant du temps	23
1.3.2.2.1. Thixotropie	23
1.3.2.2.2. La Rhéopexie	24
1.3.2.3. Comportement des fluides viscoélastiques	24
1.4. Profile de vitesse dans le cas d'un fluide non- Newtonien	25
1.4.1. Introduction	25

1.4.2. Profil de vitesse pour le Modèle loi de puissance	25
1.4.3. Cas d'un conduit circulaire	26
1.4.4. Cas de deux plaques parallèles	26

CHAPITRE 2

Ecoulement d'un fluide Non- Newtonien entre deux plaques parallèles	28
--	----

A. Cas de température imposée à la paroi.	29
2.1. Description du problème.	29
2.2. Formulation du problème.	29
2.3. Résolution du problème	31
2.3.1. Calcul de la température de mélange	34
2.3.2. Calcul du Nombre de Nusselt local	34
2.4. Résultats et discussions	35
B. Cas de la paroi soumise à un coefficient d'échange avec le milieu extérieur	42
2. 5. Introduction.	42
2. 6. Formulation du problème	42
2.7. Résolution du problème	43
2. 7.1. Calcul de la température de mélange	46
2. 7.2. Calcul du nombre de Nusselt local	46
2.8. Racines de l'équation transcendante et valeurs propres	46
2. 9. Résultats et discussion	47
2. 9. 1. Distribution de la température axiale et de mélange	47
2. 9. 2. Evolution du nombre de Nusselt	49
2.10. Conclusion	55

CHAPITRE 3

Résolution du problème de Graetz Non-Newtonien d'un écoulement dans un conduit circulaire. 56

A. Cas de température imposée à la paroi	57
3.1. Introduction	57
3.2. Description et Formulation du problème.	57
3.3. Résolution du problème.	59
3.3.1. Calcul de la température de mélange	62
3.3.2. Calcul du nombre de Nusselt local	62
3.3.3. Racines de l'équation transcendante σ_i et valeurs propres μ_i	62
3.4. Validation des résultats	62
3.4.1. La température axiale	63
3.4.2. La température de mélange.	63
3.4.3. Nombre de Nusselt.	63
B. Cas de la paroi est soumise à un coefficient d échange convectif	70
3.5. Introduction	70
3.6. Description et Formulation du problème	70
3.7. Résolution du problème	71
3.8. Racines de l'équation transcendante et valeurs propres	74
3.9. Validation du nombre de Nusselt pour différents valeurs du nombre de Biot	75
3.10. Distribution de la température axiale et de mélange	76
3.11. Evolution du nombre de Nusselt	80
3.12. Conclusion	85

CHAPITRE 4

Simulation numérique par la méthode des volumes finis 86

4.1. Introduction	87
4.2. Mise en équation	87
4.2.1. Cas de la température constante imposée à la paroi	87
4.2.1.1. Adimensionnement des équations	88
4.2.2. Cas du flux constant imposé à la paroi	88
4.2.2.1. Adimensionnement des équations	88

4.2.3. Cas d'un échange convectif avec le milieu extérieur	89
4.2.3.1. Adimensionnement des équations	89
4.3. Résolution du problème	89
4.3.1. Description et principe de la méthode	89
✓ 1 ^{ère} étape le maillage	90
✓ 2 ^{ème} étape l'intégration	90
4.3.2. Discrétisation du problème	90
4.3.2.1. Cas de la température imposée à la paroi	90
4.3.2.1.1. Implémentation des conditions aux limites	92
4.3.2.2. Cas d'un flux constant imposé à la paroi	93
4.3.2.3. Cas d'un échange convectif avec le milieu extérieur	93
4.3.3. Résolution du système d'équations	96
4.4. Validation des résultats	96
4.4.1. La température axiale	96
4.4.2. La température de mélange	99
4.4.3. Nombre de Nusselt local	99
4.5. Distribution de la température	109
4.6. Distribution de la température de mélange	110
4.7. Evolution du nombre de Nusselt	111
4.8. Conclusion	112
 CONCLUSION GENERAL ET PERSPECTIVES	 113
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	115
ANNEXE	
FONCTIONNELLE ET FORMULATION VARIATIONNELLE	118

Remerciements

Le travail présenté dans ce manuscrit a été effectué dans le cadre du stage de Magister, sous la direction du Pr. KACEM MANSOURI, à qui je tiens à adresser mes plus vifs remerciements pour m'avoir encadré. Je lui exprime également ma sincère gratitude pour la confiance qu'il m'a témoignée tout au long de ce travail.

Je remercie aussi Dr. KAMAL MOHAMMEDI, Dr. Mohamed Boussaid et Dr. IDIR BELAIDI, Maîtres de Conférences à l'Université de M'Hamed Bougara de Boumerdès, pour leurs conseils avisés et leurs aides.

J'exprime ma reconnaissance également à messieurs Dr. M. BALISTROU, Dr. M. HACHEMI et Pr. Henda kahalerras, d'avoir bien voulu participer au jury et de juger ce travail.

Je n'oublie pas d'adresser mes vifs remerciements à Mr A. HADIOUCHE pour son aide et pour son encouragement durant la préparation de ce travail.

Enfin, à tous ceux et celles qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce travail, je dis merci.

Antar Tahiri

Résumé:

Nous traitons dans ce mémoire, le problème de Graetz étendue vers les fluides non-newtonien en régime laminaire, dans les conduits circulaires ou entre plaques parallèles. L'effet de la dissipation visqueuse est pris en compte. L'étude comprend quatre chapitres essentiels :

Dans le premier chapitre, une synthèse bibliographique concernant les travaux réalisés sur ce sujet est développée, ensuite, une présentation des différents types de fluides non-newtoniens, ainsi que les modèles mathématiques utilisés pour modéliser ces fluides.

Dans le deuxième chapitre, nous traitons le cas d'un écoulement entre deux plaques parallèles, par la méthode variationnelle de Ritz, en variant le type du fluide, nous déterminons les distributions de la température axiale et du mélange, ainsi que l'évolution du nombre de Nusselt. Deux conditions aux limites seront traitées.

Le troisième chapitre est consacré aux conduits circulaires, nous utilisons la même méthode variationnelle, pour traiter ce problème.

Dans le quatrième chapitre, une simulation numérique par la méthode des volumes finis du problème est présentée. En plus, une troisième condition aux limites est développée dans cette partie. Les nombres de Brinkman et de Biot sont les paramètres utilisés, cela pour étudier leurs influences sur l'évolution du nombre de Nusselt.

Les résultats obtenus sont comparés avec ceux des études préexistantes.

Mots clefs: fluide non Newtonien. Méthodes variationnelle. Ecoulement en conduits. Transferts thermo convectifs.

Abstract:

This work deal with the Graetz problem extended to the laminar flow of a non-Newtonian fluids in pipes or between parallel plates. The effect of viscous dissipation is taken into account. The study includes four essential chapters:

In the first chapter, we expose bibliographical synthesis concerning the works realized on this subject, then, a presentation of the various types of non-Newtonians fluids, as well as the mathematical models used to model these fluids.

In the second chapter, we treat the case of a flow between two parallel plates, by the Variationnelle method of Ritz, by varying the type of the fluid; we determine the distributions of the axial and bulk temperature, as well as the evolution of the number of Nusselt. Two boundary conditions are treated.

The third chapter is devoted to the circular conduits; we use the same Variationnelle method, to deal with this problem.

In the fourth chapter, a numerical simulation by the finites volumes method of the problem is presented. Moreover, a third boundary condition is treated in this part. The numbers of Brinkman and Biot are the parameters which are used in the study, so as to make out their influence on the evolution of the number of Nusselt.

The results obtained are compared with those existing in previous studies.

Key words: Non-Newtonian fluid. Variationnelle methods. Flow in ducts. convective thermo Transfers.

ملخص:

نعالج في هذه الأطروحة موضوع الحمل الحراري الحتمي لنظام دائم، داخل قناة (قنوات ذات مقاطع دائرية أو بين صفائح متوازية)، حيث نأخذ بعين الاعتبار الضياع في الطاقة بفعل لزوجة المائع، أخذين معامل سيرة المائع كوسيط متغير أثناء الدراسة.

الدراسة تحتوي على أربعة أجزاء أساسية:

يضم الجزء الأول التعريف بمختلف الأعمال السابقة في هذا المجال، ثم دراسة نظرية تخص المائع اللانيوتوني والنماذج الرياضية المستعملة لدراسة سلوك هذه الموائع.

الجزء الثاني خصص لإيجاد حل تحليلي للمسألة المطروحة داخل قناة مكونة من صفائح متوازية، مطبقين في ذلك منهجية تحليلية وتقريبية هي طريقة التغيرات ومن خلال النتائج المتحصل عليها لتوزيع الحرارة عبر القناة ولعدد نيوسل، ومن ثم مقارنتها مع النتائج التي توصل إليها من سبقوا من الباحثين والعلماء، لمعرفة مدى ملائمة الطريقة لحل هذا النوع من المسائل.

الجزء الثالث خصص لإيجاد حل تحليلي للمسألة المطروحة داخل قناة بمقطع دائري، مطبقين في ذلك نفس المنهجية السابقة.

الجزء الرابع خصص للتقليد (التشبيه) العددي، مستعملين في ذلك طريقة الأحجام المنتهية، ومقارنة النتائج المتحصل عليها بسابقتها الموجودة في البحوث وكذلك ما توصلنا إليه من نتائج باستعمال طريقة التغيرات في الجزء الثاني والثالث.

NOMENCLATURE

$[A]$	Matrice définie dans les expressions (2.15b).	
$[A^*]$	Matrice modifiée, définie dans l'expression (2.15c).	
a_{ij}^*	Élément de la matrice $[A^*]$.	
a_j	Coefficients définis dans l'équation (4.10).	
a_p^0	Coefficient définis dans l'équation (4.10).	
$[b]$	Vecteur défini dans l'expression (2.15c).	
Bi	Nombre de Biot modifié $h_{ext}R/k_f$ ou $h_{ext}l/k_f$.	
Br	Nombre de Brinkman	
Br_q	Nombre de Brinkman modifié.	
b_k	Élément du vecteur $[b]$.	
$[C]$	Vecteur défini dans le système d'équation (2.15d).	
$C_n(s)$	Coefficient de la solution approchée.	
$[D]$	Matrice définie dans l'expression (2.15b).	
D_h	Diamètre hydraulique. $4l$ et $2R$	$[m]$
d_{ij}	Éléments de la matrice $[D]$.	
h_{ext}	Coefficient de transfert convectif avec l'extérieur.	$[w.m^{-2}.k^{-1}]$
I	Forme variationnelle.	
k	Conductivité thermique.	$[w.m^{-1}.k^{-1}]$
L	Longueur du conduit	$[m]$
ℓ	Demi-espacement entre deux plaques parallèles	$[m]$
n	Exposant de la loi de puissance pour les fluides non Newtonien.	
Nu	Nombre de Nusselt.	
q_w	Flux imposé à la paroi.	
r	Coordonnée spatiale dans le cas d'un tube cylindrique.	$[m]$
r^+	Variable adimensionnelle r/R .	
R	Rayon de la conduite circulaire	$[m]$
S	Variable de Laplace.	
T	Température du fluide	$[K]$
T_w	Température à la paroi.	$[K]$
T_∞	Température ambiante.	$[K]$
u	Vitesse d'écoulement	$[m.s^{-1}]$

$\bar{u}$	Vitesse moyenne d'écoulement	$[m.s^{-1}]$
$u^+(x^+)$	Vitesse adimensionnelle.	
$x, y \text{ et } z$	Coordonnées spatiales dans le conduit.	$[m]$
$x^+, y^+ \text{ et } z^+$	Coordonnées spatiales adimensionnelles.	

Lettres grecques

α	Diffusivité thermique.	$[m^2.s^{-1}]$
β_i	Les éléments du vecteur $[B] = [b][D]^{-1}$.	
δ	Constant définie dans l'équation (2.36).	
η	Viscosité apparente du fluide non Newtonien.	
θ	Température adimensionnelle.	
λ_i	Valeurs propres définie dans l'équation (3.40)	
ν	Viscosité cinématique propre du fluide.	$[m^2.s^{-1}]$
σ	Racine de l'équation transcendante.	
μ_i	Valeurs propres de la matrice $[A^*][D]^{-1}$.	
Δr^+	Pas transversal.	
Δx^+	Pas axial.	
Δv	Volume de control adimensionnel.	
μ_i	Valeurs propres de la matrice $[A^*][D^{-1}]$	
τ	Contrainte tangentielle	$[N.mm^{-2}]$
Φ	Fonction définie dans l'équation (2.27a).	
ψ	Fonction définie dans l'équation (2.27a).	

Indices et symboles

-	Transformées de Laplace sur la direction axiale.	
m	Température moyenne.	
p	$p = 1$ Pour conduit circulaire, et $p = 0$, pour plaques parallèles.	
f	Propriété physiques du fluide.	
w	Paroi du conduit.	

INTRODUCTION GENERALE

Les transferts thermo convectifs d'un écoulement fluide Newtonien, dans les conduites, en régime laminaire et permanent sont traités dans de nombreux travaux. Les extensions du problème de Graetz, considèrent: le régime transitoire, la conduction axiale dans le fluide, l'effet de dissipation visqueuse, la plus importante extension est la considération des fluides non-Newtoniens. En outre, les écoulements fluides non-Newtoniens, dans les conduites circulaires ou entre plaques parallèles, ont une grande importance dans la pratique, éventuellement dans les processus industriels, tels que la stérilisation de la nourriture, produits cosmétiques, plastiques, peintures.....

Nous traitons dans ce mémoire, le transfert thermo convectif des fluides non-Newtonien en régime laminaire dans les conduits circulaires et entre plaques parallèles.

Dans le premier chapitre, Nous exposons les travaux réalisés sur ce sujet, puis une présentation brève des modèles mathématiques utilisés pour modéliser ces fluides, le choix du modèle utilisé ici est orienté vers le modèle dit "loi de puissance", car il trouve une large utilisation dans la littérature.

Notre but, est de tester la méthode variationnelle de Ritz pour résoudre le problème de Graetz étendu vers les fluides non-Newtonien, avec la considération de l'effet de dissipation visqueuse.

Dans le deuxième chapitre, on traite un écoulement fluide non-Newtonien entre deux plaques parallèles, deux conditions aux limites sont traitées :

- température constante imposé à la paroi.
- un coefficient d'échange convectif paroi - milieu extérieur.

Les fluides pseudos plastiques, Newtoniens et dilatants sont étudiés.

Dans le troisième chapitre nous considérons le cas des conduits circulaires, pour les trois types de fluide, en utilisant la même méthode variationnelle pour résoudre le problème. Les deux conditions aux limites précédentes sont prises en compte. La distribution de la température axiale, de mélange ainsi que l'évolution du nombre de Nusselt sont représentées graphiquement pour les deux cas avec et sans considération de l'effet de dissipation visqueuse.

Le quatrième chapitre est consacré à une simulation numérique par la méthode des volumes finis (MVF) pour les deux configurations géométriques plane et cylindrique.

Trois conditions aux limites sont considérées :

- température constante imposée à la paroi.
- flux constant imposé à la paroi.
- un coefficient d'échange convectif paroi - milieu extérieur.

La distribution de la température axiale et de mélange, ainsi que l'évolution du nombre de Nusselt pour les trois types de fluides considérés sont présentés dans des tableaux comparatifs.

CHAPITRE 1

Recherche bibliographique

CHAPITRE 1:

Recherche bibliographique.

1.1 Etat de l'art:

Historiquement, le problème classique de **Graetz**[1] remonte à l'année 1883. Le but recherché est la détermination de la distribution des températures d'un écoulement laminaire, permanent, dans un tube circulaire d'un fluide Newtonien à propriétés thermo physiques constantes. La formulation mathématique de ce problème est:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (1.1)$$

$$f_i(x, r) = 0 \quad (1.2)$$

Il existe une littérature volumineuse sur les extensions du problème de Graetz dont les plus importantes sont:

- Le régime transitoire.
- La considération de la conduction axiale dans le fluide.
- L'extension vers les fluides non-Newtoniens.
- La considération de l'effet de la dissipation visqueuse.

1.2. Revue bibliographique

Dans ce qui suit, nous avons classé les travaux relatifs aux problèmes de convection forcée dans les géométries considérées (conduits circulaires et plaques parallèles), en deux classes, à savoir la considération de la dissipation visqueuse respectivement pour les fluides Newtonien et non-Newtonien.

1.2.1. Ecoulement d'un fluide newtonien avec l'effet de la dissipation visqueuse

A. Barletta [2] traite l'effet de dissipation visqueuse dans un écoulement laminaire et permanent, d'un fluide Newtonien, dans un tube circulaire de longueur infinie, la vitesse est supposée uniforme et la paroi soumise à une distribution axial de flux. L'effet de dissipation visqueuse est donné sous forme d'une fonction de Dirac:

$$\mu \Phi = \phi_0 \delta(r - r_0) \quad (1.3)$$

Le constant ϕ_0 dépend des propriétés du fluide et du rayon de la conduite. Avec cette fonction, le problème est défini mathématiquement par :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{u_0}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\phi_0}{k} \delta(r - r_0) \quad (1.4a)$$

avec les conditions aux limites suivantes:

$$k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = q_w(x) , \quad (1.4b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0 \quad (1.4c)$$

L'auteur a choisi trois types des fonctions de distribution du flux, pour arriver à s'assurer qu'il existe une région asymptotique invariant pour le nombre du Nusselt. La présentation des résultats se trouve dans la référence.

A. Barletta et E. Zanchini [3] traitent le cas de la convection forcée d'un écoulement piston d'un fluide Newtonien dans un conduit circulaire, avec la considération de la dissipation visqueuse dans la région d'entrée thermique. La paroi du conduit est soumise aux trois types de flux de chaleur, le premier avec un flux constant, le deuxième cas avec un flux varie linéairement dans la direction axiale du conduit et pour le troisième cas avec un flux varie exponentiellement.

La formulation mathématique du problème est:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{u_0}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\phi_0}{k} \delta(r - r_0) \quad (1.5a)$$

$$T(r, 0) = T_0 \quad (1.5b)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = q_0 F(x) \quad (1.5c)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0 \quad (1.5d)$$

Analytiquement et par l'utilisation de la technique de la transformée de Laplace, les auteurs résolvent le système (1.5). La représentation graphique des résultats obtenus pour le nombre de Nusselt figure dans cette référence.

Les remarques tirées de cette étude sont : pour le cas du flux uniforme à la paroi, (la dissipation visqueuse a pour effet de réduire la valeur du nombre du Nusselt local). Dans le cas de la variation linéaire ou exponentielle du flux à la paroi, l'effet de dissipation visqueuse est remarqué uniquement à l'entrée de la conduite, puis son effet devient négligeable dans la région du régime établi.

O. Aydin [4] analyse le problème de la convection forcée laminaire dans une conduite circulaire d'un fluide Newtonien avec des propriétés physiques et thermiques constantes, en tenant compte de l'effet de dissipation visqueuse. Deux conditions aux limites sont considérées: le flux constant de la chaleur (CHF), et la température constante imposée à la paroi (CWT). La distribution radiale de la température et le nombre de Nusselt ont été obtenus pour différentes valeurs du nombre de Brinkman.

Le problème est formulé comme ci-dessous:

$$u \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{v}{Pr} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\mu}{\rho c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \quad (1.6a)$$

Les conditions aux limites sont:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (1.6b)$$

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = q_w \quad (1.6c)$$

Pour le cas du flux imposé à la paroi et du fait que :

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T_w}{\partial z} \quad (1.6d)$$

et par l'introduction des quantités adimensionnelles, l'équation à résoudre devient:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\theta}{dR} \right) = a(1 - R^2) - 4BrR^2 \quad (1.6e)$$

avec:

$$a = \frac{u_c r_0^2}{\alpha(T_w - T_c)} \frac{dT_w}{dz} \quad (1.6f)$$

La distribution radiale de la température est:

$$\theta(R) = \left(1 - \frac{4}{3}R^2 + \frac{1}{3}R^4 \right) + \frac{Br}{3}(R^2 - R^4) \quad (1.6g)$$

Pour le cas de la température imposée à la paroi, l'équation à résoudre est:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\theta}{dR} \right) = b\theta(1 - R^2) - 4BrR^2 \quad (1.6h)$$

avec:

$$b = \frac{u_c r_0^2}{\alpha(T_w - T_c)} \frac{dT_c}{dz} \quad (1.6i)$$

La distribution radiale de la température est représentée graphiquement en fonction du nombre du Brinkman, et pour les deux types des conditions aux limites considérées.

Les valeurs du nombre de Nusselt à l'infini en fonction du nombre de Brinkman sont également représentées sous forme tabulaire.

V. Javeri [5] développe une solution approximative de la distribution de température, d'un écoulement fluide Newtonien dans un conduit circulaire, avec les conditions aux limites de troisième type. Le problème étudié est formulé mathématiquement par :

$$L(\bar{T}) \equiv Pe \left[\bar{v}_x \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} \right) + \bar{v}_r \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) \right] - \left[\left(\frac{1}{\bar{r}} \right) \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{r}^2} \right] = 0 \quad (1.7a)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\bar{x} = 0: \bar{v}_x = 1, \bar{v}_r = 0, \bar{T} = 1 \quad (1.7b)$$

$$\bar{x} \rightarrow \infty: \bar{T} \rightarrow 0, \bar{v}_r \rightarrow 0, \bar{v}_x = \bar{v}_{xd} = 2(1 - \bar{r}^2) \quad (1.7c)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) = 0, \bar{r} = 0 \quad (1.7d)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) + Bi \bar{T} = 0, \bar{r} = 1 \quad (1.7e)$$

La résolution du système (1.7) a été réalisée par la méthode de Galarkin-Kantorovitch en se basant sur le calcul variationnel. L'influence du nombre de Biot sur la distribution du nombre de Nusselt qui est une fonction de la distance axiale, est donnée sur des tableaux. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux existants dans la littérature.

A. Barletta [6] traite la convection forcée laminaire d'un écoulement fluide Newtonien dans un conduit circulaire, avec la vitesse d'écoulement uniforme, l'auteur considère l'effet de dissipation visqueuse et néglige la conduction axiale dans le fluide. La paroi est soumise à un coefficient d'échange convectif d'un fluide externe. L'auteur étudie deux cas pour la température du fluide externe:

- ✓ La température de référence du fluide externe est constante à la paroi.
- ✓ La température du fluide externe varie linéairement dans la direction axiale.

Le problème est formulé mathématiquement par:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{u_0}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\phi_0}{k} \delta(r - r_0) \quad (1.8a)$$

les conditions aux limites sont:

$$T(r, 0) = T_0 \quad (1.8b)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = h_e \left(T_f(x) - T(r_0, x) \right) \quad (1.8c)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0 \quad (1.8d)$$

La résolution du système (1.8) a été faite par la technique de la transformée de Laplace par rapport à la variable x , puis en utilisant la propriété de convolution de la transformée de Laplace pour déterminer le champ de la température. La détermination du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Biot et Brinkman fait l'objet essentiel de cette étude. Les résultats obtenus sont représentés graphiquement, pour les deux cas de la température du fluide externe. Les conclusions de cette étude sont:

Dans le cas où la température du fluide externe est constante, pour n'importe quelles valeurs du nombre de Biot et Brinkman, le nombre de Nusselt local ne converge pas vers une valeur asymptotique sauf dans le cas $Br = 0$, lorsque x tend vers l'infini. Au contraire, si la température varie linéairement, une valeur asymptotique du nombre du Nusselt existe quelque soit les valeurs des nombres de Biot ou de Brinkman.

Dans le cas de la température imposée à la paroi, les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus par Javeri [5].

A. Barletta et E. Magyari [7] traitent la convection forcée d'un écoulement fluide Newtonien dans un conduit circulaire, le flux de chaleur à la paroi est constant où varie en fonction de la distance axiale. La conduction axiale dans le fluide est négligée. Le problème est formulé comme ci-dessous:

$$\frac{1}{2}(1 - \eta^2) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + 16\eta^2 \quad (1.9a)$$

$$\theta(\eta, 0) = -2(1 - \eta^2)^2 \quad (1.9b)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \xi > 0 \quad (1.9c)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = \phi_w(\xi), \quad \xi > 0 \quad (1.9d)$$

La solution recherchée du système (1.9) est de la forme :

$$\theta(\eta, \xi) = \theta(\eta, 0) + 32\xi + \Psi(\eta, \xi) \quad (1.10)$$

avec $\Psi(\eta, \xi)$ est la solution du problème de valeur initiale définie par:

$$\frac{1}{2}(1 - \eta^2) \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) \quad (1.11a)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0 \quad (1.11b)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = \phi_w(\xi) \quad (1.11c)$$

$$\Psi(\eta, 0) = 0 \quad (1.11d)$$

La résolution du problème (1.11) est réalisée analytiquement par l'utilisation de la technique de la transformée de Laplace.

L'effet de la dissipation visqueuse est pris en compte également dans la région d'amont de la section transversale en supposant une paroi adiabatique à l'entrée du conduit. Deux cas sont étudiés en détail:

- un flux de chaleur constant imposé à la paroi.
- un flux de chaleur varié linéairement dans la direction axiale.

Le nombre de Brinkman joue le rôle du paramètre que l'auteur fait varier, la distribution axiale du nombre de Nusselt pour différentes valeurs de Brinkman est représentée graphiquement pour un fluide Newtonien et un flux constant imposé à la paroi. Les résultats du nombre de Nusselt sont comparés avec ceux obtenues par Cotta et Ozisik [10].

W. Sun, S. Kakac *et al.* [8] traitent par une approche numérique en utilisant la méthode des volumes finis, le problème de la convection forcée laminaire dans des microtubes. Trois conditions à la paroi sont considérées: température constante, température variant linéairement dans la direction axiale du conduit et un flux constant imposé à la paroi. L'effet de la dissipation visqueuse est pris en compte. Le problème est formulé dans le cas de la température imposée à la paroi, par le système:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{u}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{v}{c_p} \left(\frac{du}{dr} \right)^2 \quad (1.12a)$$

$$T = T_0 \quad \text{à} \quad x = 0 \quad (1.12b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{à} \quad r = 0 \quad (1.12c)$$

Les conditions à la paroi sont:

$$\text{-température imposée constante: } T = T_s \quad \text{à} \quad r = R \quad (1.12d)$$

$$\text{-température varie linéairement: } T = T_s(x) + Ax \quad \text{à} \quad r = R \quad (1.12e)$$

$$\text{-flux constant imposé: } \frac{\partial T}{\partial r} = q_w \quad \text{à} \quad r = R \quad (1.12f)$$

Le profil de vitesse dans ce dernier cas est:

$$\frac{u}{u_m} = \frac{2[1-(r/R)^2]+8Kn}{1+8Kn} \quad (1.13)$$

La discrétisation de l'équation (1.27a) est faite en choisissant un schéma de différence finis en avant pour la direction axiale de la conduite, et un schéma de différence centré dans la direction radial.

Les résultats obtenus pour le nombre de Nusselt en fonction du nombre du Knudsen et le nombre de Prandtl, sont représentés graphiquement et dans des tableaux, une confrontation de ces résultats avec ceux de Tunc et Bayazitoglu [23] a été effectué, et montre la bonne précision de la méthode des volumes finis.

1.2.2. Ecoulement d'un fluide non-newtonien avec l'effet de dissipation visqueuse

R. M. Cotta et M. N. Ozisik [9] présentent une étude théorique de la convection forcée laminaire et permanent, d'un écoulement fluide non-Newtonien dans une conduite circulaire et entre plaques parallèles, avec la considération de la température constante imposée à la paroi. La conduction axiale dans le fluide ainsi que l'effet de la dissipation visqueuse sont négligés dans la résolution du problème. La formulation mathématique de ce problème est:

$$w(r) \frac{\partial T(r,z)}{\partial z} = \alpha r^p \frac{1}{r^p} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial T(r,z)}{\partial r} \right] + \frac{g(r)}{\rho c_p} \quad 0 < r < b, z > 0 \quad (1.14a)$$

avec $p = 0$ pour les plaques parallèles et $p = 1$ pour les conduits circulaires.

Les conditions aux limites sont:

$$\frac{\partial T(r,z)}{\partial r} = 0 \quad r = 0, z > 0, \quad (1.14b)$$

$$T(r,z) = T_w(z) \quad r = b, z > 0, \quad (1.14c)$$

$$T(r,z) = f(r) \quad z = 0, 0 \leq r \leq b, \quad (1.14d)$$

Les auteurs traitent ce problème par la technique des fonctions propres, pour déterminer l'évolution du nombre de Nusselt, et la distribution de la température de mélange dans les conduits, pour les fluides non-Newtonien, en particulier ($n = 3$, $n = 1$, et $n = 1/3$).

Les résultats obtenus concernant le nombre de Nusselt local dans le cas des plaques parallèles sont comparés avec ceux obtenus par Richardson [20] en utilisant l'approximation de Leveque. Dans le cas du conduit circulaire, les résultats sont comparés avec ceux du Bird et *al* [30].

Dans cette étude, nous trouvons des tableaux pour les deux cas, dans les quels sont portés les valeurs numériques du nombre de Nusselt et de la température de mélange, en fonction de l'indice (n).

R. M. Cotta et M. N. Ozisik [10] ont étudié le transfert de la chaleur dans le cas où la paroi est soumise à un flux constant, d'un fluide non-Newtonien modèle "loi de puissance", en considérant un écoulement laminaire, dans un conduit circulaire ou entre plaques parallèles. Le problème est formulé mathématiquement comme ci-dessous:

$$\left\{\frac{l_0}{l_N}\right\}^2 U(R) \frac{\partial \theta(R,Z)}{\partial Z} = \frac{1}{R^p} \frac{\partial}{\partial R} \left\{ R^p \frac{\partial \theta(R,Z)}{\partial R} \right\} + G(R) \quad 0 < R < R_w, Z > 0 \quad (1.15a)$$

avec les conditions aux limites suivantes:

$$\frac{\partial \theta(R,Z)}{\partial R} = 0, \quad R = 0, Z > 0 \quad (1.15b)$$

$$\frac{\partial \theta(R,Z)}{\partial R} = \frac{l_0}{l_N} \Phi(Z), \quad R = R_w, Z > 0 \quad (1.15c)$$

$$\theta(R,Z) = F(R), \quad Z = 0, 0 \leq R \leq R_w \quad (1.15d)$$

Dans cette étude, la détermination du nombre de Nusselt local est l'objet essentiel. Les résultats obtenus sont représentés sous forme des tableaux pour les deux géométries, et pour les fluides ($n=1$, $n=1/3$, et $n=3$). Une confrontation des résultats a été effectuée avec une solution asymptotique de Bird et *al* [31].

R. S. Parikh et R. Mahalingam [11] analytiquement, les auteurs étudient le transfert thermo convectif d'un écoulement fluide non-Newtonien en particulier un fluide pseudoplastique ($n=0.555$, $n=0.71$), dans un conduit circulaire, avec deux cas de conditions aux limites. Le premier avec un flux constant à la paroi, le deuxième avec un flux qui varie arbitrairement. Ce qui est formulé par:

$$\frac{2(3n+1)}{(n+1)} \left(1 - R^{\frac{n+1}{n}}\right) \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) \quad (1.16a)$$

avec les conditions aux limites:

$$R = 0, \quad \theta = \text{finie} \quad (1.16b)$$

$$R = 1, \quad -\frac{\partial \theta}{\partial r_w} = 1 \quad (1.16c)$$

$$X = 0, \quad \theta = 0 \quad (1.16d)$$

En ce basant sur le principe de Duhamel et de l'approche de Siegel, la détermination de la température à la paroi est l'objet essentiel de cette étude.

Les résultats obtenus sont ensuite comparés avec ceux obtenus expérimentalement, et la comparaison montre une bonne convergence entre les deux voies.

A. R. Mansour [12] traite le problème de Graetz par un modèle " loi de puissance", d'un écoulement fluide non-Newtonien laminaire et permanent, dans un conduit circulaire. La paroi est soumise à une température constante, la méthode de séparation de variables, combinée à la technique de la transformée de Laplace, est utilisée pour la résolution du système ci-dessous:

$$\left(1 - r^{+(n+1)/n}\right) \frac{\partial \theta}{\partial x^+} = \frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial \theta}{\partial r^+}\right) \quad (1.17a)$$

avec les conditions aux limites suivantes:

$$\theta = 1 \quad \text{à} \quad x^+ = 0 \quad (1.17b)$$

$$\theta = 0 \quad \text{à} \quad r^+ = 1 \quad (1.17c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r^+} = 0 \quad \text{à} \quad r^+ = 0 \quad (1.17d)$$

La solution générale est recherchée sous la forme suivante :

$$\theta(x^+, r^+) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i R_i(r^+) e^{-\zeta_i^2 x^+} \quad (1.18)$$

avec :

ζ_i : représente les valeurs propres correspondantes aux fonctions propres R_i

C_i : c'est un constant arbitraire défini par la relation suivante:

$$C_i = \frac{\int_0^1 \left(1 - r^{+(1+n/n)}\right) R_i r^+ dr^+}{\int_0^1 \left(1 - r^{+(1+n/n)}\right) R_i^2 r^+ dr^+} \quad (1.19)$$

L'intégrale définie dans la relation (1.17) a été évaluée numériquement.

Le nombre de Nusselt pour différents fluides, en particulier ($n=1$, $n=1/2$, $n=1/3$, $n=1/5$, $n=1/10$ et $n=0$), est déterminé et les résultats obtenus sont présentés graphiquement et comparés avec ceux de Lyche et Bird [26].

A. Barletta [13] étudie le comportement asymptotique du champ de température, pour la convection forcée laminaire, d'un fluide non-Newtonien modelé par "loi de puissance" qui s'écoule dans un conduit circulaire. L'objet principal de cette étude c'est l'effet de la dissipation visqueuse, qui est pris en considération, alors que la conduction axiale de la chaleur dans le fluide est considérée négligeable. Le problème considéré est formulé comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{3n+1}{n+1} \frac{\bar{u}r}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n+1/n} \right] \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\eta \bar{u}^{(n+1)}}{k r_0^n} \left(\frac{3n+1}{n} \right)^{n+1} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2n+1/n} \quad (1.20a)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (1.20b)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = q_w(x) \quad (1.20c)$$

$$T(r, 0) = T_0(r) \quad (1.20d)$$

Trois cas de distribution du flux à la paroi sont pris en considération:

- Le premier cas, le flux imposé à la paroi $q_w(x)$ tend vers zéro lorsque x tend vers l'infinie.
- Le deuxième cas, le flux ne tend pas vers zéro lorsque x tend vers l'infinie.
- Le troisième cas, le flux a une distribution axiale et qui tend vers l'infinie lorsque x tend vers l'infinie.

L'auteur conclure que, si la paroi est soumise à une température uniforme, l'effet de dissipation visqueuse, ne peut pas être négligé dans la région du régime établi. La même remarque est observée pour le cas de la condition aux limites convectif, en plus, la valeur asymptotique du nombre de Nusselt est indépendante du nombre de Biot, et d'autre paramètres (le nombre de Brinkman).

S.Olek [14] a étudié le problème de la convection forcé laminaire d'un fluide non-Newtonien, dans les deux configurations géométriques (conduit circulaire et entre plaques parallèles).

La résolution de l'équation d'énergie gouvernant le problème est effectué par la méthode de séparation des variables avec des fonctions propres spéciales. Dans cette étude, l'auteur prend en considération la conduction axiale dans le fluide.

Le problème est formulé comme ci-dessous:

$$u(r) \frac{\partial \theta}{\partial z^+} = \frac{1}{r^{+v}} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^{+v} \frac{\partial \theta}{\partial r^+} \right) + \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^{+2}} \quad (1.21a)$$

$v = 0$ pour les plaques parallèles et $v = 1$ pour un tube cylindrique.

Les conditions aux limites sont:

$$\theta = 1 \quad \text{à} \quad z^+ = 0 \quad (1.21b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r^+} = 0 \quad \text{à} \quad r^+ = 0 \quad (1.21c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r^+} + B\theta = 0 \quad \text{à} \quad r^+ = 1 \quad (1.21d)$$

Les paramètres sans dimension utilisés sont:

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_{in} - T_\infty}, \quad r^+ = \frac{r}{R}, \quad z^+ = \frac{z}{PeR}, \quad Pe = \frac{u_{max} R}{\alpha}$$

La solution recherchée est sous la forme générale:

$$\theta(r^+, z^+) = \sum_{i=1}^{\infty} R_i(r^+) Z_i(z) \quad (1.22)$$

$R_i(r^+)$: sont les fonctions propres.

$$Z_i(z) = \sum_{j=1}^N c_{ij} C_j \exp(-s_j z^+) \quad (1.23)$$

La solution générale recherchée est de la forme:

$$\theta(r^+, z^+) = \sum_{i=1}^N R_i(r^+) \sum_{j=1}^N c_{ij} C_j \exp(-s_j z^+) \quad (1.24)$$

Les constantes C_j sont déterminées par la condition:

$$\theta(r^+, 0) = 1 = \sum_{i=1}^N R_i(r^+) \sum_{j=1}^N c_{ij} C_j \quad (1.25)$$

La solution définie dans l'équation (1.22) ne prend pas en considération la conduction axiale de la chaleur.

Les résultats obtenus dans ce travail sont donnés sous forme des tableaux pour la distribution de la température, dans le cas du conduit circulaire, pour les deux cas avec ou sans conduction axiale, ainsi que le nombre de Nusselt pour les deux géométries (tube cylindrique et plaques parallèles).

Les résultats sont comparés avec ceux de Cotta et Ozisik [9].

O. Jambal et al [15] traitent numériquement le transfert thermique des fluides non-Newtonien, en particulier ($n=0.5$, $n=1$, $n=1.5$), par un schéma aux différences finies, d'un écoulement laminaire et permanent dans un conduit circulaire, et entre plaques parallèles. La paroi est soumise à une température constante, la conduction axiale de la chaleur dans le fluide est prise en considération, ainsi que l'effet de dissipation visqueuse.

Le problème à résoudre s'écrit alors:

$$u^+ \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{y^p} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^p \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{1}{pe^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + Br \left| \frac{du^+}{dy} \right|^{n-1} \left(\frac{du^+}{dy} \right)^2 \quad (1.26a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y^*} = 0, \quad y^* = 0, \quad z^* > 0 \quad (1.26b)$$

$$\theta = 0, \quad y^* = y_w^* \quad (1.26c)$$

$$\theta = 1, \quad z^* = 0 \quad (1.26d)$$

En fonction du nombre de Brinkman et de Peclet, la distribution de la température est représentée graphiquement.

La représentation graphique du nombre de Nusselt pour les deux configurations sont données pour différents fluides ($n=0.5$, $n=1$ et $n=1.5$). Les résultats obtenus sont comparés avec ceux existant dans la littérature, en particulier avec les travaux de Dung [25].

P. Valko [16] consacre une étude à l'effet de la dissipation visqueuse, d'un écoulement fluide non-Newtonien laminaire et permanent, toute fois en négligeant la conduction axiale dans le fluide. Les propriétés physiques du fluide sont considérées constantes. Le problème est formulé comme ci – dessous:

$$\frac{1}{2} u(r) \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) - Br \left(\frac{3v+1}{v} \right) r^{(v+1)/v} \quad (1.27a)$$

avec les conditions aux limites suivantes:

$$t(0, r) = 0 \quad (1.27b)$$

$$\frac{\partial t}{\partial r}(x, 0) = 0 \quad (1.27c)$$

$$c_1 t(x, 1) + c_2 \frac{\partial t}{\partial r} + c_3 = 0 \quad (1.27d)$$

c_1 , c_2 et c_3 : sont des paramètres variés par l'auteur pour obtenir des différentes conditions à la paroi.

La solution du problème (1.24) se fait par l'application de la technique de la transformée de Laplace combinée avec la méthode de Galarkin. L'auteur considère trois cas de conditions aux limites. Le premier avec une température constante imposée à la paroi, le deuxième cas avec un flux constant à la paroi et le troisième avec la paroi adiabatique.

Les résultats obtenus du nombre de Nusselt et de la température de mélange sont portées sur des tableaux. La comparaison des résultats obtenus avec ceux existant dans la littérature montre une bonne coïncidence.

T. Boaca et J. Boaca [17] traitent le problème de la convection forcée entre plaques parallèles, d'un fluide non-Newtonien avec la considération de l'effet de dissipation visqueuse, le problème est formulé par:

$$\rho c_p w \frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + K \left(-\frac{\partial w}{\partial y} \right)^{v+1} \quad (1.28a)$$

$$w = w_0 \left(1 - \left(\frac{y}{h} \right)^{v+1/v} \right) \quad (1.28b)$$

$$T = 0 \quad \text{à} \quad x = 0 \quad (1.28c)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{à} \quad y = 0 \quad x > 0 \quad (1.28d)$$

$$T = 0, \text{ ou } \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{à} \quad y = h \quad x > 0 \quad (1.28e)$$

Le but de ce travail est de donner une solution au système (1.25), par l'utilisation des séries de fonctions propres et de valeurs propres. Les conditions à la paroi considérées dans cette étude sont celles de Dirichlet et de Neumann. Les valeurs propres du système Sturm-Liouville résultant sont calculées par l'application de la méthode de Galarkin. Les valeurs propres déterminées sont comparées avec ceux existant dans la littérature.

R. F. Barron, X. Wang et *al.* [18] développent une technique efficace pour déterminer les valeurs propres du problème de la convection forcée d'un écoulement fluide glissant dans un conduit circulaire, sachant que le problème de Graetz classique dépend du nombre de valeurs propres λ_n utilisées dans la solution, ils donnent une expression exponentielle des valeurs propres en fonction du nombre du Knudsen, tel que:

$$\lambda_n = c_1 + c_2 Kn \exp(c_3 Kn) \quad (1.29)$$

avec: c_1, c_2 , et c_3 sont des constantes données dans la référence.

1.3. Etude du comportement des fluides non-Newtonien

1.3.1. Définition des fluides Newtoniens et non-Newtoniens

Si le modèle du fluide Newtonien décrit bien la très grande majorité des fluides composés de molécules simples, il existe un bon nombre de fluides, dont certains sont d'usage très courant, qui ont un comportement sous écoulement plus complexe.

La définition d'un fluide Newtonien est assez restrictive: les contraintes de cisaillement sont proportionnelles au gradient de la vitesse, ce qui implique:

- i. Dans un écoulement de cisaillement simple, les seules contraintes créées par l'écoulement sont des contraintes de cisaillement.
- ii. La viscosité est indépendante de la vitesse de cisaillement.
- iii. La viscosité est indépendante du temps, et les contraintes s'annulent immédiatement lorsque l'écoulement est arrêté.

Toute déviation de ces règles est le signe d'un comportement non-Newtonien.

On peut aussi les définir d'une manière plus précise: Un fluide qui ne peut pas être exprimé en utilisant les équations de Navier-Stokes est un fluide non-Newtonien.

La figure (1.1) et l'équation (1.30) représentent le cas le plus simple où le vecteur vitesse a une seule composante dans la direction axiale (x) qui varie seulement dans la direction y . Une telle configuration d'écoulement est connue comme écoulement simple de cisaillement.

$$\frac{F}{A} = \tau_{yx} = \eta \left(-\frac{du}{dy} \right) \quad (1.30)$$

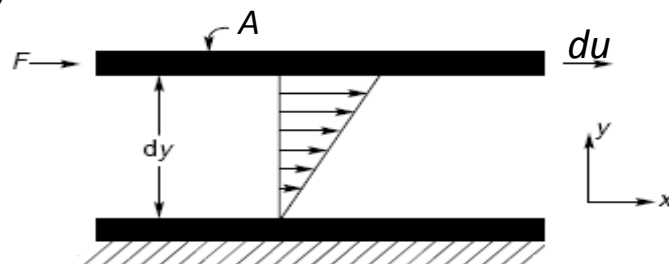


Fig.1. 1 : variation de vitesse.

La plupart des fluides que nous rencontrons en physique et les processus industriels, autre que l'air et l'eau sont des fluides non-Newtoniens. Il y a une croissante importance à la compréhension du comportement des fluides non-Newtoniens en particulier dans le domaine des polymères, du pétrole, et des industries agro-alimentaire.

On observe généralement le comportement non-Newtonien en suspensions à forte teneur en particule solide. Beaucoup de matériaux montrent un tel comportement incluant pâte, crème fouettée, beurre, sauce salade, blanc d'œuf. Le comportement non-Newtonien est une caractéristique des solutions de polymère. Il est observé par exemple dans l'industrie pendant la production de la fibre synthétique telle que le nylon.

1.3.2. Classification des Fluides non-Newtoniens

On peut classer les fluides non-newtoniens en trois catégories.

1. Fluides non-Newtoniens généralisés: Le taux de cisaillement du fluide dépend seulement de la valeur courante de l'effort de cisaillement. Ceux-ci s'appellent également fluides purement visqueux ou indépendants du temps.

2. Des fluides plus complexes pour lesquels la relation entre l'effort de cisaillement et le taux de cisaillement dépend, en plus de la durée du cisaillement, s'appellent 'les fluides dépendant du temps'.

3. Les matériaux qui présentent des propriétés des solides élastiques et des fluides visqueux, s'appellent Viscoélastique. Pour ces matériaux, il y a seulement un rétablissement partiel à l'état original quand une déformation ou un effort est appliqué.

Il y a également des matériaux qui ont des propriétés combinées des trois propriétés mentionnées ci-dessus.

1.3.2.1. Comportement des fluides indépendants du temps

Dans le cisaillement simple, le comportement de ce type des matériaux peut être décrit par une relation de la forme:

$$\frac{du}{dy} = f(\tau_{yx}) \quad (1.31)$$

ou inversement sous la forme:

$$\tau_{yx} = f_1\left(\frac{du}{dy}\right) \quad (1.32)$$

Cette équation implique que la valeur de $\frac{du}{dy}$ en un point "P" quelconque du fluide est déterminée seulement par la valeur courante de l'effort de cisaillement en ce point ou vice versa, et dépend de la forme de la fonction " f " dans l'équation (1.31) ou (1.32).

Ces fluides peuvent être encore subdivisés en trois types:

- (a) Fluides pseudo plastique ou shear-thinning (en anglais).
- (b) Fluides viscoplastiques.
- (c) Fluides dilatants ou (shear-thickening).

1.3.2.1.1. Fluides pseudo plastiques (shear thinning)

Pour les fluides pseudos plastiques, la viscosité diminue avec l'augmentation du taux du cisaillement (gradient de la vitesse). Parmi les fluides pseudoplastiques, on rencontre, par exemple : les solutions et les suspensions aqueuses concentrées (solutions d'alginate de sodium, de certains polymères, jus de fruits concentrés...), les pétroles, latex de caoutchouc, pâte à papier, colles, savon, certaines peintures, purées (de bananes, de pommes de terre), mayonnaise, sang humain, etc.

Il y a un certain nombre de modèles qui peuvent être employés pour modéliser ces fluides, tels que la loi de puissance (the power-law) et le modèle de Carreau, alors que d'autres modèles tel que le modèle d'Eyring sont basés sur une approche statistique.

1.3.2.1.1. 1.Modèles mathématiques du fluide pseudo plastique

Beaucoup d'expressions mathématiques de complexité et de forme variables ont été proposé dans la littérature pour modéliser le comportement des fluides pseudos plastiques. Certaines sont des ajustements de courbes, donnant des rapports empiriques pour le taux du cisaillement et l'effort du cisaillement, alors que d'autres ont une certaine base théorique dans la mécanique statistique comme une prolongation de l'application de la théorie cinétique à l'état liquide.

1.3.2.1.1.a) Modèle loi de puissance

Ce modèle est également connu comme modèle d'Ostwald-De Waele (1925), c'est un modèle qui peut être employé pour modéliser les fluides pseudo plastiques. Dans ce modèle l'effort de cisaillement est écrit comme une puissance du taux du cisaillement, le modèle emploie deux paramètres d'ajustement de courbe, l'un est appelé indice de la loi de

puissance (n) et l'autre est désigné généralement sous le nom du coefficient liquide d'uniformité (η).

Pour le présent modèle d'écoulement, l'expression suivante est utilisée:

$$\tau_{yx} = \eta \left(\frac{du}{dy} \right)^n \quad (1.33)$$

La viscosité apparente pour ce modèle (Ostwald de Waele) est donnée par:

$$\mu = \tau_{yx} / (du/dy) = \eta \left(\frac{du}{dy} \right)^{n-1} \quad (1.34)$$

avec:

Pour $n < 1$ le fluide est dite pseudoplastique.

Pour $n = 1$ le fluide est newtonien.

Pour $n > 1$ le fluide est dilatant.

Dans ces équations, η et n sont deux paramètres empiriques de la courbe d'ajustage de précision. Pour un fluide pseudo plastique, l'indice peut avoir n'importe quelle valeur entre 0 et 1 et pour un fluide dilatant, l'indice n sera plus grand que l'unité. Les équations (1.33) et (1.34) se réduisent à l'équation (1.30) qui décrivent le comportement du fluide Newtonien, bien que le modèle de loi puissance offre la représentation la plus simple et sa simplicité est la raison principale de sa large utilisation.

1.3.2.1.1. 1.b) Modèle du Carreau

Quand il y a des déviations significatives dans le modèle de la loi de puissance, il est nécessaire d'utiliser un modèle qui tient compte des valeurs limites de la viscosité à très haut et très bas taux de cisaillement.

Carreau [1972] a proposé le modèle de la viscosité qui incorpore les deux viscosités limites μ_0 et μ_∞ :

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = \left[1 + \left(\lambda \frac{du}{dy} \right)^2 \right]^{(n-1)/2} \quad (1.35)$$

où ($n < 1$) et λ sont deux paramètres d'ajustage et de précision, ce modèle prévoit le comportement du fluide newtonien quand $\mu = \mu_0$, $n = 1$ ou $\lambda = 0$.

1. 3.2.1.1. 1.c) Modèle d'Ellis

Quand les déviations du modèle de la loi de puissance sont significatives (au bas taux de cisaillement), il est peut être plus approprié d'employer le modèle d'Ellis. Les deux équations de viscosité présentées jusqu'ici sont des exemples de la forme d'équation (1.32).

Le modèle des trois constantes d'Ellis est une illustration de la forme inverse de l'équation (1.31). Dans le cisaillement simple, la viscosité apparente du fluide dans le modèle d'Ellis est donnée par:

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + (\tau_{yx}/\tau_{1/2})^{(\alpha-1)}} \quad (1.36)$$

Dans cette équation, μ_0 est la viscosité apparente correspondant à la contrainte de cisaillement nulle, et les deux constantes ($\alpha > 1$) et $\tau_{1/2}$ sont des paramètres ajustables. L'indice mesure le degré du comportement du fluide pseudo plastique, et $\tau_{1/2}$ représente la valeur de l'effort de cisaillement qui a laissé réduire de moitié la viscosité apparente μ_0 . L'équation (1.36) prévoit le comportement du fluide newtonien quand $\tau_{1/2}$ tend vers l'infini, cette équation permet le calcul facile des profils de vitesse d'une distribution d'effort connue.

1.3.2.1.2. Fluides viscoplastiques

Un fluide viscoplastique est un fluide qui possède à la fois des propriétés de viscosité et de plasticité, ainsi, après la suppression des contraintes, ce fluide peut récupérer une partie de sa déformation. Avec les fluides rhéoplastiques, l'écoulement ne se produit qu'à partir d'un seuil minimal de contrainte τ_{cr} , appelé *seuil de plasticité*, au-delà duquel on peut retrouver – suivant le fluide – les comportements Newtoniens, pseudo plastiques ou dilatants. Dans le cas de ces fluides, la courbe d'écoulement coupe l'ordonnée en un point définissant la *contrainte critique*, le phénomène est réversible. Il est possible d'expliquer qualitativement ce comportement en supposant que ce dernier présente au repos une structure tridimensionnelle rigide, qui rend les substances assimilables à un solide, susceptibles de résister à des contraintes inférieures à τ_{cr} . Dès qu'on dépasse cette contrainte, la structure se détruit complètement et le comportement du fluide devient newtonien (*fluide de Bingham*). Pour un écoulement laminaire en conduite cylindrique d'un fluide de Bingham, la vitesse est constante dans la zone centrale, pour laquelle τ est inférieure à τ_{cr} .

Dans cette catégorie de fluides, on peut citer, par exemple : les pâtes de fruits et de chocolat, les peintures à l'huile, les graisses, les pommades, le dentifrice, la pâte à papier, les boues de forage, le ciment frais, etc.

Les divers modèles comme le modèle de Bingham, modèle de Casson et le modèle de Herschel-Bulkley sont disponibles pour modéliser de tels écoulements viscoplastiques.

1.3.2.1.2. 1. Modèles mathématiques du fluide viscoplastique

1.3.2.1.2. 1.a) Modèle plastique de Bingham (1878- 1945)

Ces fluides présentent un seuil d'écoulement au de-là duquel ils s'écoulent comme un fluide newtonien, c'est bien le comportement plastique idéal.

On présente ici la plus simple équation qui gouverne le comportement de ce type de fluide:

$$\frac{du}{dy} = \frac{(\tau - \tau_0^B)}{\mu}, \quad \text{si } |\tau| > |\tau_0^B| \quad (1.37)$$

$$\frac{du}{dy} = 0, \quad \text{si } |\tau| < |\tau_0^B| \quad (1.38)$$

1.3.2.1.2. 1. b) Modèle de Herschel–Bulkley

Une généralisation simple du modèle plastique de Bingham pour embrasser la non-linéarité de la courbe d'écoulement (pour $|\tau_{yx}| > |\tau_0^B|$) est le modèle fluide de Herschel Bulkley.

Dans un mouvement de cisaillement régulier bidimensionnel, le modèle est écrit comme suit:

$$\tau_{yx} = \tau_0^H + \eta \left(\frac{du}{dy} \right)^n \quad \text{si } |\tau_{yx}| > |\tau_0^H| \quad (1.39)$$

$$\frac{du}{dy} = 0 \quad \text{si } |\tau_{yx}| < |\tau_0^H| \quad (1.40)$$

Les dimensions de η dépendent de la valeur du n , avec l'utilisation du troisième paramètre, ce modèle fournit un ajustement légèrement meilleur par rapport à certaines données expérimentales.

1.3.2.1.2. 1.c) Modèle de Casson

Beaucoup de produits alimentaires et matériaux biologiques, particulièrement le sang, sont bien décrits par ce modèle à deux constantes ci-dessous:

$$(|\tau_{yx}|)^{\frac{1}{2}} = (|\tau_0^c|)^{\frac{1}{2}} + \left(\mu_c \left| \frac{du}{dy} \right| \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{si } |\tau_{yx}| > |\tau_0^c| \quad (1.41)$$

$$\frac{du}{dy} = 0 \quad \text{si } |\tau_{yx}| < |\tau_0^c| \quad (1.42)$$

Ce modèle a été utilisé souvent pour décrire le comportement de la contrainte du cisaillement par rapport au gradient de la vitesse du sang, du yaourt, de la purée de tomate,

du chocolat fondu, etc. Le comportement d'écoulement de quelques suspensions particulières est également approché étroitement de ce type du comportement.

1.3.2.1.3. Fluides dilatants (shear thickening)

À l'inverse des fluides pseudoplastiques, les fluides dilatants ont une viscosité apparente qui croît quand la contrainte du cisaillement augmente. Ce comportement, moins fréquent que celui des fluides pseudoplastiques, se rencontre dans les suspensions fortement concentrées, dans lesquelles la phase liquide n'occupe pratiquement que les interstices entre les particules solides. Dans ce cas, quand le taux de glissement croît, les particules solides tendent à freiner le déplacement d'une couche par rapport à l'autre.

L'accroissement des frottements, dû à la disparition du liquide interstitiel lors de la mise en mouvement du milieu, fait apparaître des cavités et la viscosité dynamique apparente augmente. On observe ce type de comportement, par exemple, avec des solutions aqueuses d'amidon ou avec du sable et du quartz dans l'eau.

Le comportement d'écoulement peut être représenté par le modèle de la loi puissance, l'indice du comportement d'écoulement est plus grand que 1.

La viscosité apparente est définie par :

$$\mu = \eta \left(\frac{du}{dy} \right)^{n-1} \quad (1.43)$$

On peut aisément voir que pour $n > 1$, l'équation (1.43) prévoit l'augmentation de la viscosité avec l'augmentation du taux du cisaillement.

1.3.2.2. Comportement des fluides dépendant du temps

Certains fluides peuvent présenter des caractéristiques d'écoulement dépendant des traitements antérieurs qu'ils ont subis. Le comportement des fluides dépendant du temps peut être encore subdivisé en deux catégories: Thixotropies et rhéopexie (thixotropie négative).

1.3.2.2.1. Thixotropie

Les fluides thixotropes ont, pour un gradient de vitesse constant, une viscosité qui diminue avec la durée du cisaillement. Ils admettent un seuil de contrainte comme les fluides viscoplastiques, mais ce seuil augmente avec le temps quand le fluide est au repos et s'abaisse après agitation. Ce comportement s'observe quand les phénomènes d'alignement ou de la formation de cavités, décrits respectivement pour les fluides pseudoplastiques et

dilatants, se déroulent lentement, de telle sorte que, même dans un écoulement permanent, on constate une diminution ou une augmentation de la contrainte du cisaillement τ .

La thixotropie est un phénomène rhéologique de grande importance industrielle car il peut être soit néfaste dans le cas du démarrage d'installations de pompage, soit recherché lorsqu'on souhaite disposer d'un matériau qui se liquéfie quand on le met en œuvre et qui se raidit quand on le stocke. C'est le cas des encres d'imprimerie, des mélanges eau-alcool, des sels de penta-oxyde de vanadium, des gels, de la mayonnaise, du blanc d'œufs frais, etc. Ces fluides sont en règle générale pseudo plastiques.

1.3.2.2. La Rhèopexie

Extrêmement complexe, le phénomène de *rhèopexie* n'a été que très peu étudié. Il apparaît que, dans ce type de fluides, un faible cisaillement est susceptible de favoriser la restructuration du produit. On peut observer la rhèopexie dans les émulsions d'eau dans de l'huile ou la cristallisation du plâtre à faible cisaillement. Pour les fluides thixotropes et rhèopexie, les phénomènes observés sont réversibles. Ainsi l'agitation d'un gel peut le fluidifier, mais, au bout d'un certain temps, l'agitation ayant cessé, le gel se reforme.

1.3.2.3. Comportement des fluides viscoélastiques

Dans la théorie classique d'élasticité, l'effort dans un corps cisailé est directement proportionnel à la contrainte. Pour la tension, la loi de Hooke s'applique et le coefficient de la proportionnalité est connu en tant que module de Young G .

$$\tau_{yx} = -G \frac{dx}{dy} \quad (1.44)$$

Où dx est le déplacement du cisaillement de deux éléments séparés par une distance dy .

Quand un solide parfait est déformé élastiquement, il regagne sa forme originale lors de la suppression de l'effort, cependant, si l'effort appliqué excède l'effort de fléchissement, le rétablissement matériel complet ne se produira pas et le 'fluage' a lieu c'est-à-dire, le solide aura coulé. Dans l'autre extrémité, pour le fluide newtonien l'effort du cisaillement est proportionnel au taux du cisaillement, équation (1.30). Beaucoup de matériaux montrent les deux propriétés élastiques et les effets visqueux dans des circonstances appropriées. En l'absence du comportement dépendant du temps mentionné

dans la section précédente, le matériel est dit viscoélastique. La déformation est parfaitement visqueuse et élastiques.

1.4. Profil de vitesse dans le cas d'un fluide non-newtonien

1.4.1. Introduction

Nous avons vu dans les paragraphes précédents, les divers modèles mathématiques utilisés pour modéliser les fluides non-Newtoniens, dans notre étude, on utilise le modèle de la loi de puissance, car il est le modèle le plus répandue dans la pratique ainsi le plus utilisé dans la littérature. Pour cela, nous devons définir l'expression du profil de vitesse dans les deux configurations (conduit circulaire et deux plaques parallèles).

1.4.2. Profil de vitesse pour le Modèle loi de puissance

Considérant un fluide non-Newtonien de la loi de puissance, en écoulement dans un conduit circulaire (fig.1. 2), la contrainte du cisaillement est lié au gradient de la vitesse d'après Coulson et Richardson 1999 [38]:

$$\tau_{rx} = \eta \left(\frac{du}{dy} \right)^n \quad (1.45)$$

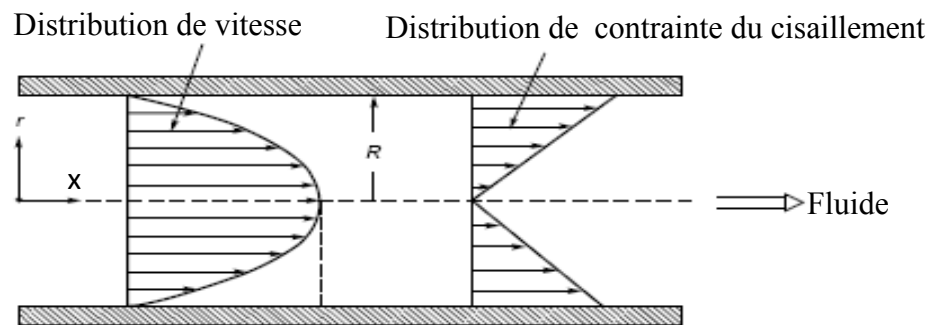


Fig. 1. 2: Distribution de vitesse et de contrainte de cisaillement.

D'autre part, et pour un écoulement laminaire dans un conduit, la contrainte du cisaillement et après un bilan de force sur un volume de contrôle est donnée par l'expression :

$$\tau_{rx} = \left(-\frac{\Delta P}{L} \frac{r}{2} \right) \quad (1.46)$$

1.4. 3. Cas d'un conduit circulaire

On utilisant les équations (1.45) et (1.46) et après intégration nous obtenons l'expression générale du profil de vitesse:

$$u(r) = \bar{u} \left(\frac{3n+1}{n+1} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (1.47)$$

Les profils de vitesse calculés à partir de l'équation (1.47) sont montrés sur la figure (1.3) pour différentes valeurs de (n) , comparées à la distribution parabolique pour un fluide Newtonien ($n = 1$). Le profil est plus plat pour un fluide pseudo plastique et plus pointu pour un fluide dilatant. La vitesse est maximale quand $r = 0$, c'est-à-dire sur l'axe de la conduite.

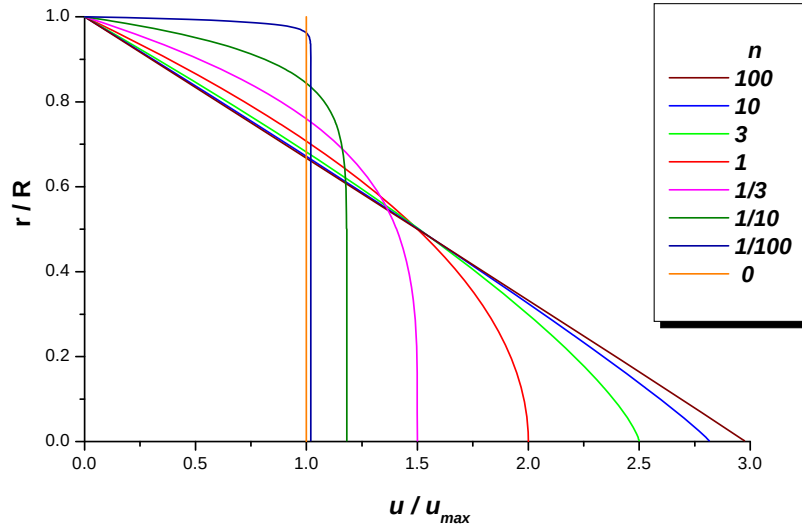


Fig. 1. 3: Profil de vitesse pour un fluide non newtonien cas de conduite circulaire.

1. 4.3.Cas de deux plaques parallèles

Dans le cas de deux plaques parallèles les mêmes démarches sont appliquées pour obtenir le profil de vitesse suivant:

$$u(z) = \bar{u} \frac{(2n+1)}{n+1} \left[1 - \left(\frac{z}{l} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (1.48)$$

Pour généraliser le profil de vitesse les deux équations (1.47) et (1.48) s'intègrent dans une seule équation:

$$u(r) = \bar{u} \frac{(1+(2+p)n)}{1+n} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (1.49)$$

$p=1$ pour les conduits circulaires, et $p=0$ pour les plaques parallèles.

L'équation (1.49) représente la formule qui doit être appliquée dans notre étude.

CHAPITRE 2

Ecoulement d'un fluide Non-Newtonien entre deux plaques parallèles

Chapitre 2: Ecoulement d'un fluide Non-Newtonien entre deux plaques parallèles

A. Cas de la paroi soumise à une température constante

2.1. Description du problème:

Nous allons dans ce chapitre résoudre le problème de Graetz dans le cas des plaques parallèles avec l'extension vers les fluides non-Newtoniens. L'évolution de la température axiale, de mélange et du nombre de Nusselt, seront déterminées en considérant l'effet de la dissipation visqueuse.

Nous considérons un conduit à deux plaques parallèles, séparées par une distance $2l$ (cf. Fig.2.1), parcourues par un écoulement fluide en régime laminaire et stationnaire, dont la température d'entrée du fluide est supposée constante T_e . Deux conditions aux limites sont considérées, en premier cas la paroi est soumise à une température constante T_w , en deuxième cas la paroi est soumise à un coefficient d'échange avec le milieu extérieur h_e .

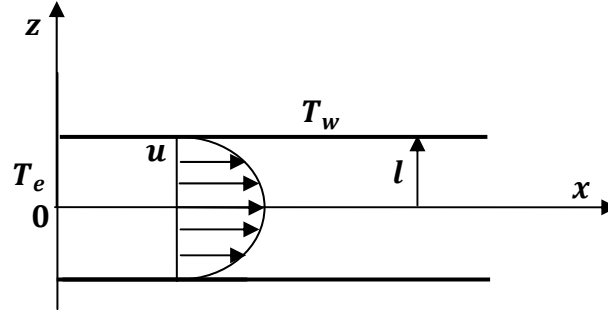


Fig.2.1: Géométrie d'étude

2.2. Formulation du problème:

La contrainte de cisaillement pour le modèle loi de puissance "power law" est donnée par :

$$\tau_{rx} = \eta \left| \frac{du}{dz} \right|^{n-1} \frac{du}{dz} \quad (2.1)$$

η : représente la viscosité cinématique du fluide.

La composante axiale de la vitesse pour un fluide non-Newtonien dans ce modèle est donnée par :

$$u(z) = \frac{1+2n}{n+1} \bar{u} \left[1 - \left(\frac{z}{l} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (2.2)$$

L'équation d'énergie est de la forme:

$$u(z) \frac{1}{\alpha_f} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{k} \tau_{zx} \frac{du}{dz} \quad (2.3a)$$

A l'entrée du canal:

$$T(z, 0) = T_e \quad (2.3b)$$

Condition de symétrie:

$$\left. \frac{\partial T(z, x)}{\partial r} \right|_{z=0} = 0 \quad (2.3c)$$

Condition à la paroi:

$$T(z, x)|_{z=l} = T_w \quad (2.3d)$$

En substituant l'équation (2.1) dans l'équation (2.3a) nous obtenons :

$$u(z) \frac{1}{\alpha_f} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\eta}{k} \left(\frac{\bar{u}}{l} \right)^{(n+1)} \left(\frac{1+2n}{n} \right)^{(n+1)} \left(\frac{z}{l} \right)^{((n+1)/n)} \quad (2.4)$$

En introduisant dans le problème ci-dessus les quantités adimensionnelles suivantes :

$$\theta = \frac{T - T_w}{T_e - T_w} ; \quad x^+ = \frac{x \alpha_f}{\bar{u} l^2} ; \quad z^+ = \frac{z}{l} ; \quad \Delta T = T_e - T_w ; \quad u^+(z) = \frac{u(z)}{\bar{u}} , D_h = 4l$$

$$Br = \frac{\eta (\bar{u}/l)^{(n+1)}}{k (\Delta T / l^2)}$$

l'équation (2.4) devient:

$$u^+ \frac{\partial \theta}{\partial x^+} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^{+2}} + Br \left(\frac{1+2n}{n} \right)^{(n+1)} (z^+)^{(n+1)/n} \quad (2.5a)$$

Les conditions aux limites deviennent:

A l'entrée du canal:

$$\theta(z^+, x^+)|_{x^+=0} = 1 \quad (2.5b)$$

Condition de symétrie:

$$\left. \frac{\partial \theta(z^+, x^+)}{\partial z^+} \right|_{z^+=0} = 0 \quad (2.5c)$$

Condition à la paroi:

$$\theta(z^+, x^+)|_{z^+=1} = 0 \quad (2.5d)$$

2.3. Résolution du problème:

En décomposant la fonction $\theta(x^+, z^+)$ en une somme de deux fonctions $\theta_1(x^+, z^+)$ et $\theta_\infty(z^+)$, tel que:

$$\theta(x^+, z^+) = \theta_1(x^+, z^+) + \theta_\infty(z^+) \quad (2.6)$$

avec :

$$\lim_{x^+ \rightarrow \infty} \theta(x^+, z^+) = \theta_\infty(z^+) \quad (2.6a)$$

$$\lim_{x^+ \rightarrow \infty} \theta_1(x^+, z^+) = 0 \quad (2.6b)$$

A la limite l'équation (2.5a) devient :

$$\frac{\partial^2 \theta_\infty}{\partial z^{+2}} = -Br \left(\frac{1+2n}{n} \right)^{(n+1)} (z^+)^{(n+1/n)} \quad (2.7a)$$

avec les conditions aux limites suivantes:

$$\left. \frac{\partial \theta_\infty(z^+)}{\partial z^+} \right|_{z^+=0} = 0, \quad \theta_\infty(z^+) \big|_{z^+=1} = 0 \quad (2.7b, c)$$

Le profil de température à l'infini peut être obtenu par l'intégration de l'équation (2.7), la solution en tenant compte des conditions aux limites (2.27a, b, c) s'écrit:

$$\theta_\infty(z^+) = Br \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{n}{3n+1} \right) \left[1 - (z^+)^{\left(\frac{3n+1}{n} \right)} \right] \quad (2.8)$$

Substituons l'équation (2.6) dans l'équation (2.5) nous obtenons le système ci-dessous:

$$u^+ \frac{\partial \theta_1}{\partial x^+} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^{+2}} \quad (2.9a)$$

$$\theta_1(z^+, 0) = 1 \quad (2.9b)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_1(z^+, x^+)}{\partial z^+} \right|_{z^+=0} = 0 \quad (2.9c)$$

$$\theta_1(z^+, x^+) \big|_{z^+=1} = 0 \quad (2.9d)$$

Dans ce qui suit nous allons résoudre le système (2.9) en utilisant la méthode variationnelle de Ritz.

Par l'introduction de la transformée de Laplace sur la variable x^+ :

$$\bar{\theta}_1(z^+, s) = \int_0^\infty e^{-sx^+} \theta_1(z^+, x^+) dx^+ \quad (2.10)$$

Le système (2.8), s'écrit:

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}_1}{\partial z^{+2}} = su^+(z^+) \bar{\theta}_1 - u^+(z^+) \quad (2.11a)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\theta}_1(z^+, s)}{\partial z^+} \right|_{z^+=0} = 0 \quad (2.11b)$$

$$\bar{\theta}_1(1, s) = 0 \quad (2.11c)$$

L'équation (2.11.a) représente l'équation d'Euler qui a pour forme variationnelle l'équation:

$$I = \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial z^+} \right)^2 + su^+(z^+) \bar{\theta}_1^2 - 2u^+(z^+) \bar{\theta}_1 \right] dz^+ \quad (2.12)$$

$\bar{\theta}_1$ est la solution approchée du problème (2.9), elle est construite à partir d'une série des fonctions trigonométriques tels que:

$$\bar{\theta}_1(z^+, s) = \sum_{i=1}^N C_i(s) \varphi_i(z^+) \quad (2.13a)$$

avec:

$$\varphi_i(z^+) = \cos(\sigma_i z^+) \quad (2.13b)$$

La fonction φ_i doit satisfaire les conditions aux limites (2.11b) et (2.11c).

σ_i sont les racines de l'équation transcendante: $\cos(\sigma_i) = 0$, déduite de la condition à la limite (2.11c).

$$\sigma_i = \frac{(2k-1)\pi}{2} \quad \text{où } i = 1, 2, \dots, N \quad (2.13c)$$

Les constantes $C_i(s)$ sont déterminées par la minimisation de l'équation (2.12), par le calcul des dérivées suivantes:

$$\frac{\partial I(C_i(s))}{\partial C_i(s)} \quad (2.14)$$

Ce qui conduit au système algébrique suivant:

[illegible]

Le système (2.15a) s'écrit sous forme matricielle :

$$[A][C] = [b]. \quad (2.15b)$$

On peut écrire la matrice $[A]$ sous la forme:

$$[A] = [A^*] + s[D] \quad (2.15c)$$

En introduisant l'équation (2.15c) dans le système (2.15b), nous obtenons les coefficients $c_k(s)$ de telle sorte que:

$$c_k = \frac{\beta_k}{s + \mu_k} \quad \text{où } k=1, 2, \dots, N \quad (2.15d)$$

β_k sont les éléments du vecteur: $[B] = [b][D]^{-1}$.

μ_k sont les valeurs propres de la matrice: $[A^*][D]^{-1}$.

Les éléments des matrices $[A^*]$, $[D]$ et du vecteur $[b]$ sont données par les formules suivantes:

$$a^*_{ij} = \int_0^1 \sigma_j \sigma_i \sin(\sigma_j z^+) \sin(\sigma_i z^+) dz^+ \quad (2.16)$$

$$d_{ij} = \int_0^1 u^+(z^+) \cos(\sigma_i z^+) \cos(\sigma_j z^+) dz^+ \quad (2.17)$$

$$b_i = \int_0^1 u^+(z^+) \cos(\sigma_i z^+) dz^+ \quad (2.18)$$

La fonction transformée de la température s'écrit:

$$\bar{\theta}_1(z^+, s) = \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{s + \mu_i} \cos(\sigma_i z^+) . \quad (2.19)$$

Par utilisation des tableaux inverse de la transformée de Laplace, la distribution de la température dans le fluide est donnée par :

$$\theta_1(z^+, x^+) = \sum_{i=1}^N \beta_i \cos(\sigma_i z^+) \exp(-\mu_i x^+) \quad (2.20)$$

d' où la solution générale du système (2.5) :

$$\theta(z^+, x^+) = \sum_{i=1}^N \beta_i \cos(\sigma_i z^+) \exp(-\mu_i x^+) + Br \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{n}{3n+1} \right) \left[1 - (z^+)^{\left(\frac{3n+1}{n} \right)} \right] \quad (2.21)$$

2.3.1. Calcul de la température de mélange

La température de mélange d'après sa définition s'écrit:

$$\theta_m(x^+) = \frac{\int_0^1 \theta(x^+, z^+) u^+(z^+) dz^+}{\int_0^1 u^+(z^+) dz^+} \quad (2.22a)$$

Ou bien sous la forme:

$$\theta_m(x^+) = \int_0^1 (\theta_1(x^+, z^+) + \theta_\infty(x^+)) u^+(z^+) dz^+ \quad (2.22b)$$

$$\theta_m(x^+) = \sum_{i=1}^N \beta_i * \exp(-\mu_i x^+) * \int_0^1 \cos(\sigma_i z^+) u^+(z^+) dz^+ + \theta_{m_\infty} \quad (2.22c)$$

avec:

$$\theta_{m_\infty} = Br \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{n(18n^2+12n+2)}{(3n+1)(4n+1)(5n+2)} \quad (2.22d)$$

La température de mélange est en fonction du nombre de Brinkman et de l'indice "n".

2.3. 2. Calcul du Nombre de Nusselt local

Le flux de chaleur de la paroi au fluide par convection est donnée par :

$$q_w = h_x (T_w - T_m) \quad (2.23a)$$

Le flux à la paroi peut être exprimé par la loi de Fourier tel que:

$$q_w = k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=l} \quad (2.23b)$$

Le coefficient de transfert h_x , d'après sa définition est donné par :

$$h_x = \frac{k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=l}}{(T_w - T_m)} \quad (2.23c)$$

Le nombre de Nusselt local peut être exprimé par :

$$Nu(z) = 4 \frac{\left. \frac{\partial \theta}{\partial z^+} \right|_{z^+=1}}{\theta_w - \theta_m} \quad (2.23c)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z^+} \right|_{z^+=1} = - \sum_{i=1}^N \beta_i * \sigma_i \sin(\sigma_i) * \exp(-\mu_i x^+) + Br \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \quad (2.23d)$$

La température pariétale est donnée par:

$$\theta_w(x^+) = \sum_{i=1}^N \beta_i * \cos(\sigma_i) * \exp(-\mu_i x^+) \quad (2.23e)$$

2. 4. Résultats et discussions

Dans un but de comparaison et de validation, le tableau (2.1) porte les valeurs numériques des racines de l'équation transcendante (σ_i) et les valeurs propres (μ_i), obtenus par le présent modèle et ceux obtenues par T. Boaca et L. Boaca [17], pour le cas $n=1$. La comparaison révèle une très grande satisfaction sur le plan de précision, dont l'erreur relatif maximal est (0.019%).

Tableau.2. 1: Valeurs des racines (σ_i) et valeurs propres (μ_i), pour différentes valeurs de n .

i	σ_i	$n=1/3$	$n=1$		$n=3$
		μ_i	μ_i Présente étude	T. Boaca [17]	μ_i
1	1.570796	2.056900	2.827	2.827	1.794385
2	4.712389	20.92048	32.147	32.147	21.80321
3	7.853981	60.53482	93.474	93.474	63.64430
4	10.99557	120.8244	186.804	186.805	127.3093
5	14.13717	201.7881	312.136	312.127	212.7997
6	17.27876	303.4266	469.469	469.467	320.1521
7	20.42035	425.7394	658.802	658.815	450.2470
8	23.56194	568.7922	880.142	880.148	621.4019
9	26.70354	740.1375	1134.133	-	948.0999
10	29.84513	1378.585	1454.548	-	2266.248

Nous présentons dans le tableau (2.2), la comparaison des résultats obtenus de la température de mélange pour différents fluides de la présente étude, avec ceux de Cotta et Özisik [9]. Nous constatons qu'à l'entrée du canal, l'erreur relative maximale pour le fluide pseudo plastique est 3.89%, et loin de l'entrée pour $x^+ = 0.2$, l'erreur est 0.05%.

Pour le fluide Newtonien et dilatant à $x^+ = 0.2$, l'erreur relatif est 7.62% et 8.95% respectivement.

Le tableau (2.3) représente la comparaison du nombre de Nusselt local avec la même référence [9]. Nous remarquons qu'à l'entrée du canal il ya une large différence entre les résultats obtenus avec ceux la référence, puis les résultats convergent vers des valeurs asymptotique plus proche. Les erreurs relatives entre les valeurs asymptotiques du nombre de Nusselt pour les fluides pseudo plastique, newtonien, et dilatant sont respectivement: 3.99%, 7.10%, et 9.01%.

Tableau. 2.2 : Comparaison de la température de mélange. ($Br = 0$)

$\left(\frac{l}{D_h}\right)^2 x^+$	$n=1/3$		$n=1$		$n=3$	
	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [9]</i>	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [9]</i>	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [9]</i>
0.0001	0.99088	0.98160	0.99456	0.98423	0.99601	0.98540
0.0002	0.98495	0.97099	0.99098	0.97504	0.99342	0.97685
0.0004	0.97383	0.95437	0.98399	0.96052	0.98828	0.96330
0.0006	0.96342	0.94059	0.97719	0.94840	0.98317	0.95196
0.0008	0.95357	0.92840	0.97053	0.93761	0.97810	0.94184
0.001	0.94415	0.91728	0.96399	0.92774	0.97304	0.93256
0.002	0.90184	0.87081	0.93274	0.88604	0.94797	0.89320
0.004	0.83164	0.79924	0.87532	0.82065	0.89850	0.83100
0.006	0.77247	0.74094	0.82272	0.76648	0.85022	0.77907
0.008	0.72013	0.69007	0.77388	0.71860	0.80372	0.73290
0.01	0.67266	0.64425	0.72824	0.67503	0.75934	0.69067
0.02	0.48271	0.46205	0.53834	0.49804	0.57022	0.51723
0.04	0.24990	0.23920	0.29448	0.27241	0.32112	0.29126
0.06	0.12939	0.12385	0.16108	0.14902	0.18084	0.16402
0.08	0.06699	0.06413	0.08811	0.08152	0.10184	0.09237
0.1	0.03468	0.03321	0.04820	0.04459	0.05735	0.05202
0.2	0.00129	0.00124	0.00236	0.00218	0.00324	0.00295

Tableau. 2.3 : Comparaison du nombre de Nusselt local avec la référence [9] pour ($Br = 0$)

$\left(\frac{l}{D_h}\right)^2 x^+$	$n=1/3$		$n=1$		$n=3$	
	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [9]</i>	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [9]</i>	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [9]</i>
0.0001	45.072	30.827	43.767	26.560	43.037	24.642
0.0002	36.264	24.468	35.767	21.188	34.750	19.699
0.0004	27.617	19.484	26.889	16.977	26.474	15.823
0.0006	23.280	17.098	22.617	14.960	22.252	13.967
0.0008	20.609	15.611	19.974	13.704	19.631	12.811
0.001	18.766	14.566	18.146	12.822	17.815	11.999
0.002	14.193	11.867	13.602	10.545	13.295	9.9052
0.004	11.106	9.9173	10.541	8.9100	10.248	8.4065
0.006	9.8905	9.1151	9.3512	8.2456	9.0726	7.8019
0.008	9.2836	8.7085	8.7688	7.9146	8.5044	7.5041
0.01	8.9595	8.4902	8.4647	7.7405	8.2121	7.3495
0.02	8.5893	8.2404	8.1326	7.5494	7.8890	7.1846
0.04	8.5703	8.2275	8.1174	7.5407	7.8890	7.1776
0.06	8.5703	8.2275	8.1174	7.5407	7.8890	7.1776
0.08	8.5703	8.2275	8.1174	7.5407	7.8890	7.1776
0.1	8.5703	8.2275	8.1174	7.5407	7.8890	7.1776
0.2	8.5703	8.2275	8.1174	7.5407	7.8890	7.1776

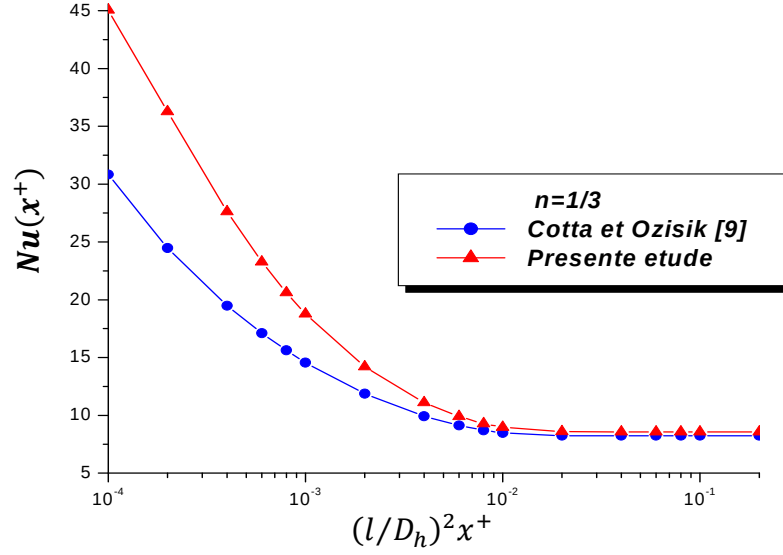


Fig. 2. 2: Comparaison du nombre de Nusselt local.

Dans ce qui suit, nous allons présenter la distribution de la température axiale et de mélange pour différents fluides considérés.

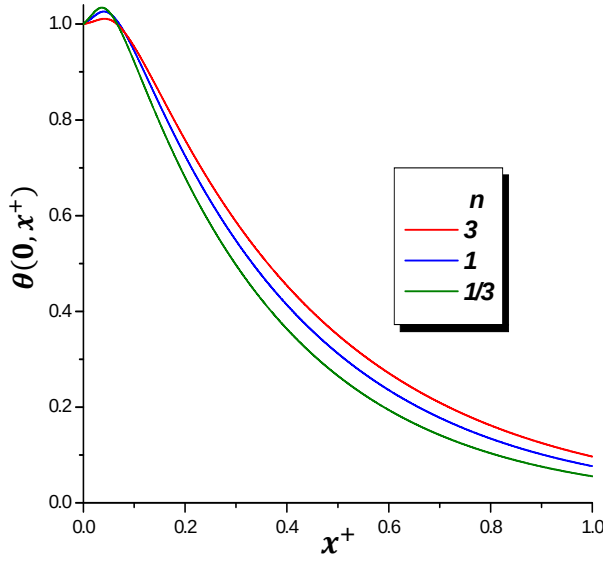


Fig. 2. 3: Evolution de la température axiale pour différents fluides.

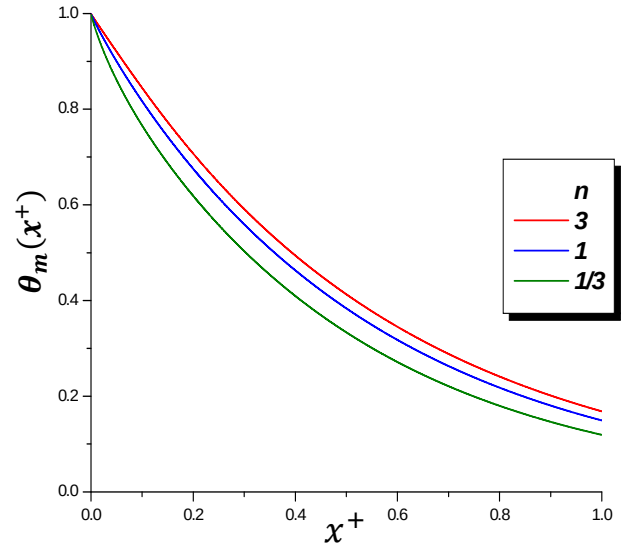


Fig. 2. 4: Evolution de la température de mélange pour différents fluides.

Les figures (2.3) et (2.4) montrent que la température axiale et de mélange pour le fluide pseudo plastique diminuent plus rapidement que pour le fluide Newtonien et le fluide dilatant.

Les figures (2.5), (2.6) et (2.7) représentent une comparaison entre la température axiale et de mélange, pour chaque type de fluides. Nous constatons l'existence d'un écart entre la

température axiale et de mélange, ce qui explique un gradient de température dans la section transversale de la conduite.

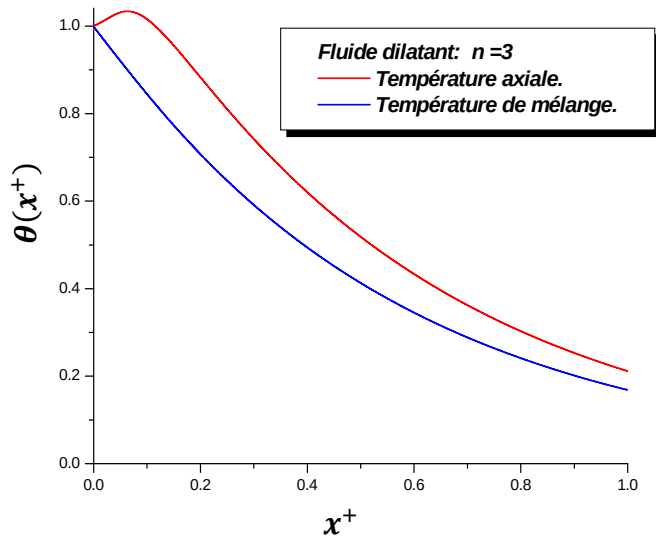


Fig. 2. 5: Evolution de la température axiale et de mélange.

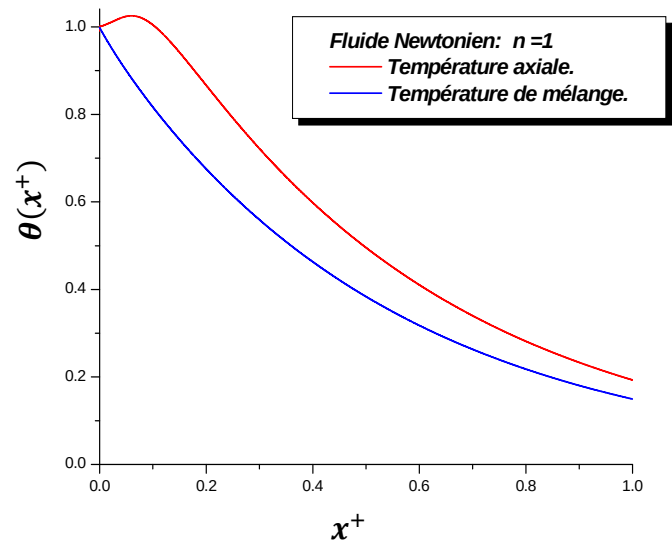


Fig. 2. 6: Evolution de la température axiale et de mélange.

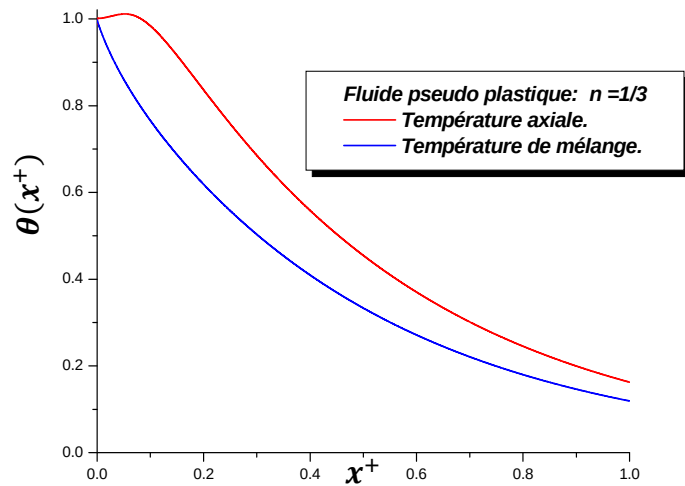


Fig. 2. 7: Evolution de la température axiale et de mélange.

La figure (2.8) montre l'évolution du nombre de Nusselt en fonction de la coordonnée axiale x^+ et de l'indice du comportement du fluide (n). Nous remarquons que le nombre de Nusselt pour le fluide pseudo plastique a une valeur plus grande que celle du fluide Newtonien, et dilatant, ce qui indique que le fluide pseudo plastique a un coefficient d'échange thermique plus élevé que le fluide newtonien et dilatant.

Le nombre de Nusselt a une valeur asymptotique de 8.5703 dans le cas du fluide pseudo plastique, et 7.8890 pour le fluide dilatant.

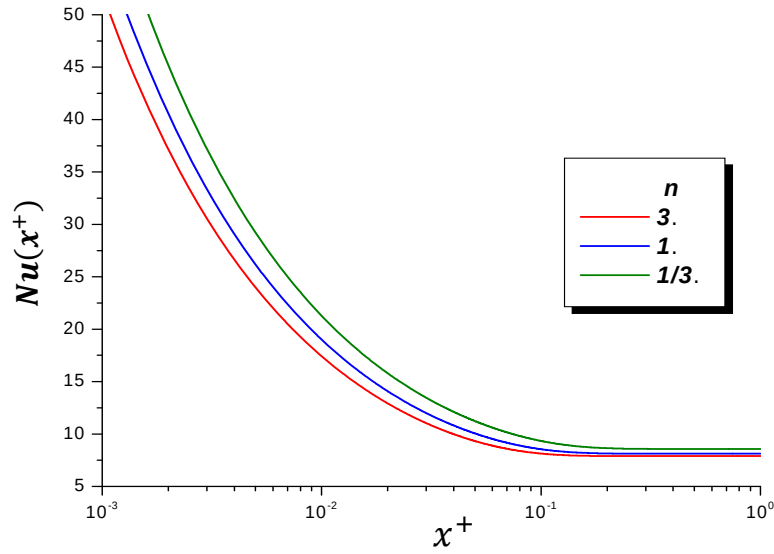


Fig. 2. 8: Evolution du nombre de Nusselt pour différents fluides.

Les figures (2.9), (2.10) et (2.11) représentent l'évolution du nombre de Nusselt local pour différents fluides, en prenant en considération l'effet de la dissipation visqueuse, trois types de fluide sont considérés, et pour valider les résultats obtenus, nous choisissons les fluides suivants: pseudo plastique ($n = 0.5$), newtonien ($n = 1$) et dilatant ($n = 1.5$), qui sont les fluides étudiés dans la référence [15].

Dans les figures précédentes, le transfert de la chaleur résultant est illustré par le terme conventionnel du nombre de Nusselt, en fonction de la distance axiale x^+ . Le nombre de Brinkman joue le rôle du paramètre que l'on fait varier, les figures montrent que si on prend en considération l'effet de dissipation visqueuse ($Br \neq 0$), le comportement asymptotique du nombre de Nusselt est indépendant du nombre de Brinkman pour les trois types des fluides considérés. Ce comportement a été trouvé dans la référence [15].

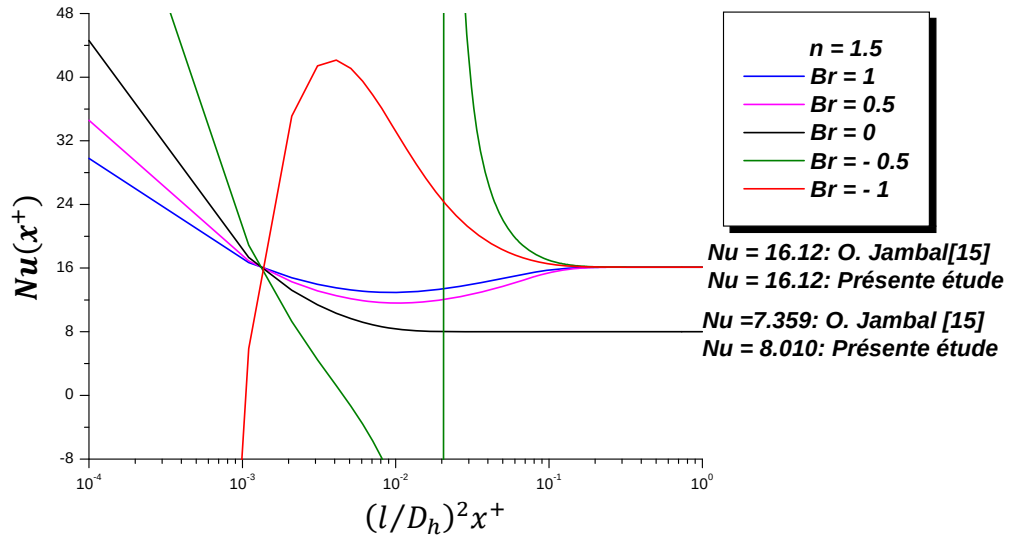


Fig. 2. 9: L'effet du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt (Fluide dilatant $n=1.5$).

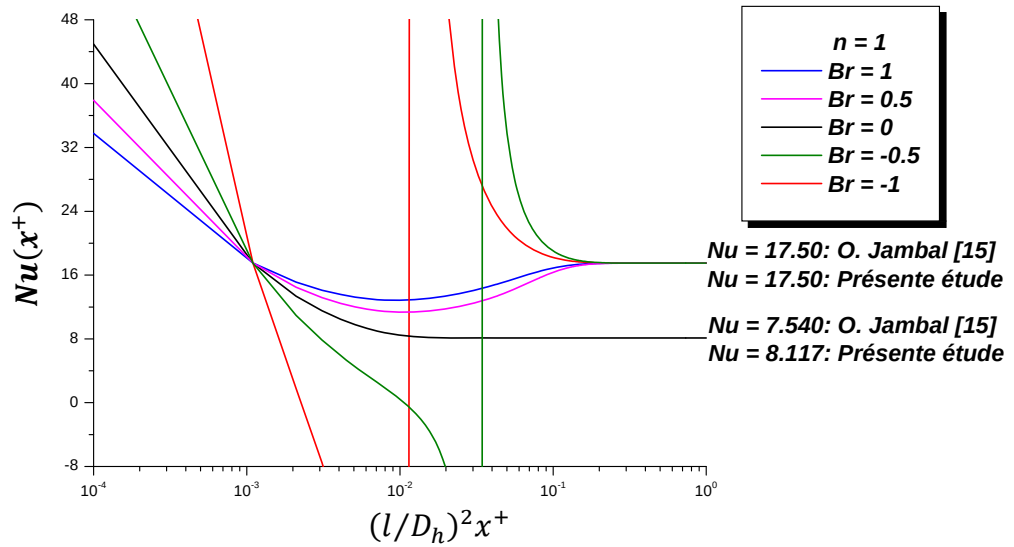


Fig. 2. 10: L'effet du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt (Fluide newtonien $n=1$).

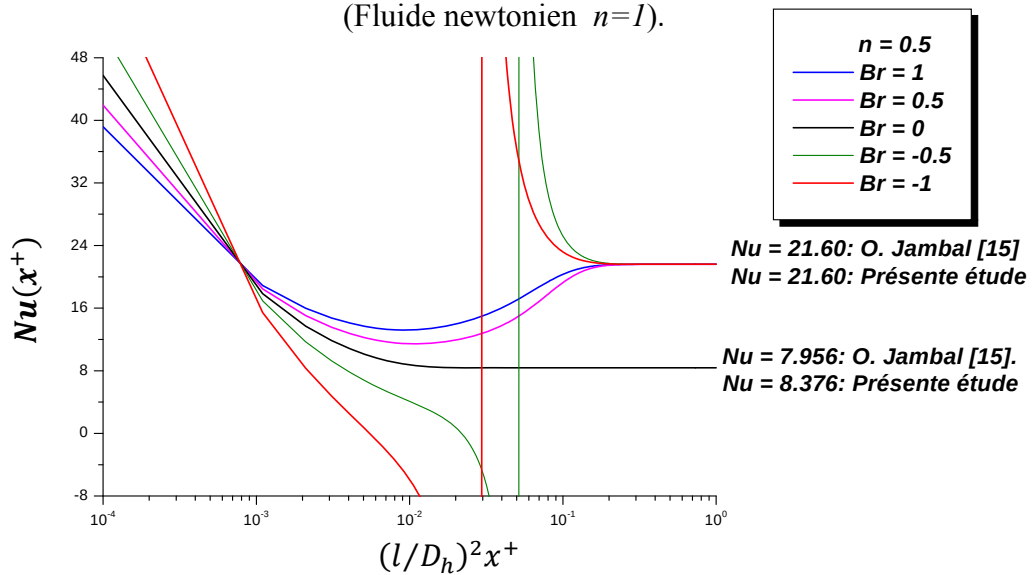


Fig. 2. 11: L'effet du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt (Fluide pseudo plastique $n=0.5$).

Dans le cas de $Br = 0$, l'erreur relative des résultats obtenus du nombre de Nusselt local à l'infinie (valeur asymptotique) est de 8.12% pour le fluide dilatant, et de 5.01% pour le fluide pseudo plastique.

On peut remarquer, que pour $Br > 0$, c'est-à-dire le cas de refroidissement du fluide, le nombre de Nusselt a une valeur minimale pour une certaine valeur x^+ .

Dans le cas de $Br < 0$ c'est-à-dire le cas d'échauffement du fluide, le nombre de Nusselt a des valeurs qui varient de plus l'infinie à moins l'infinie. Les résultats obtenus du nombre de Nusselt sont comparés avec ceux obtenus par [15] et la comparaison montre une bonne coïncidence dans l'allure générale des courbes. Les valeurs asymptotique du nombre de Nusselt obtenus sont comparées avec ceux obtenues par la référence [15], et avec Dang [26] pour $Br \neq 0$ d'après la formule suivante:

$$Nu_{\infty} = 2(4n + 1)(5n + 2)/[n(3n + 1)] \quad (2.24)$$

Nous remarquons l'existence d'un point fixe ne dépendant pas du nombre de Brinkman dans la représentation graphique du nombre de Nusselt, qui est la conséquence de la considération d'échauffement du fluide sous l'effet de dissipation visqueuse.

La valeur asymptotique du nombre de Nusselt est indépendante du nombre de Brinkman, par contre cette valeur est différente si on néglige l'effet de la dissipation visqueuse.

B. Cas de la paroi soumise à un échange convectif avec le milieu extérieur

2. 5. Introduction :

On étudie dans ce cas, la convection forcée laminaire d'un écoulement fluide non newtonien entre deux plaques parallèles, le fluide aborde l'entrée du canal avec une température constante T_e avec une paroi soumise à un coefficient d'échange convectif h_e avec le milieu extérieur.

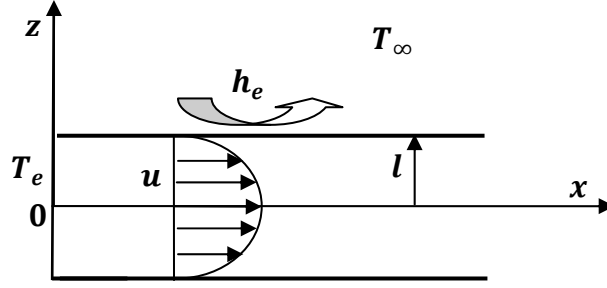


Fig.2.12: Géométrie d'étude

2. 6. Formulation du problème:

En se basant sur les hypothèses précédentes, la formulation mathématique est:

Equation de l'énergie:

$$u(z) \frac{1}{\alpha_f} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\eta}{k} \left(\frac{\bar{u}}{l} \right)^{(n+1)} \left(\frac{1+2n}{n} \right)^{(n+1)} \left(\frac{z}{l} \right)^{((n+1)/n)} \quad (2.25a)$$

Condition à l'entrée du canal:

$$T(z, x)|_{x=0} = T_e \quad (2.25b)$$

Condition de symétrie :

$$\left. \frac{\partial T(z, x)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (2.25c)$$

Condition à la paroi:

$$\frac{\partial T}{\partial z} + h_e (T_w - T_\infty) = 0, \quad z = l \quad (2.25d)$$

En introduisant les nombres sans dimensions suivants :

$$x^+ = \frac{x \alpha_f}{l^2 \bar{u}}, \quad z^+ = \frac{z}{l}, \quad u^+ = \frac{u}{\bar{u}}, \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_e - T_\infty}, \quad Br = \frac{\eta (\bar{u}/l)^{(n+1)} \left(\frac{1+2n}{n} \right)^{(n+1)}}{k (\Delta T / l^2)}$$

$$\Delta T = T_e - T_\infty.$$

L'équation (2.25a) devient :

$$\frac{\partial^2 \theta(x^+, z^+)}{\partial z^{+2}} = u^+(z^+) \frac{\partial \theta(x^+, z^+)}{\partial x^+} + Br (z^+)^{n+1/n}, \quad 0 \leq z^+ \leq 1, \quad x^+ \geq 0 \quad (2.26a)$$

$$\theta(x^+, z^+) = 1. \quad \text{à} \quad x^+ = 0, z^+ \geq 0 \quad (2.26b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z^+} = 0. \quad \text{à} \quad z^+ = 0 \quad (2.26c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z^+} + Bi * \theta = 0. \quad \text{à} \quad z^+ = 1, x^+ \geq 0 \quad (2.26d)$$

2. 7. Résolution du problème:

On décompose la fonction $\theta(x^+, z^+)$ en une somme de deux fonctions:

$$\theta(x^+, z^+) = \psi(x^+, z^+) + \Phi(z^+) \quad (2.27a)$$

tel que:

$$\lim_{x^+ \rightarrow \infty} \psi(x^+, z^+) = 0 \quad (2.27b)$$

$$\lim_{x^+ \rightarrow \infty} \theta(x^+, z^+) = \Phi(z^+) \quad (2.27c)$$

à la limite l'équation (2.26a) devient :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^{+2}} = -Br (z^+)^{(n+1/n)} \quad (2.28a)$$

La fonction Φ doit satisfaire les conditions aux limites suivantes:

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^{+2}} \right|_{z^+=0} = 0 \quad (2.28b)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z^+} \right|_{z^+=1} + Bi \Phi(z^+) |_{z^+=1} = 0 \quad (2.28c)$$

Le profil de la température à l'infini peut être obtenu par l'intégration de l'équation (2.28a).

d'où:

$$\Phi(z^+) = \frac{Br n^2}{(2n+1)(3n+1)} \left(1 - z^{+(3n+1/n)} \right) + \frac{Br}{Bi} \frac{n}{(2n+1)} \quad (2.29)$$

En introduisant l'équation (2.25a), dans l'équation (2.24a) on obtient:

$$u^+(z^+) \frac{\partial \psi(x^+, z^+)}{\partial x^+} = \frac{\partial^2 \psi(x^+, z^+)}{\partial z^{+2}} \quad (2.30a)$$

La fonction ψ doit satisfaire les conditions aux limites suivantes:

$$\psi(x^+, z^+)|_{x^+=0} = 1 \quad (2.30b)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z^+} \Big|_{z^+=0} = 0 \quad (2.30c)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z^+} \Big|_{z^+=1} + Bi \psi|_{z^+=1} = 0 \quad (2.30d)$$

Dans ce qui suit nous allons résoudre le système (2.30), en introduisant la transformée de Laplace sur la variable x^+ .

tel que :

$$\bar{\psi}(x^+, z^+) = \int_0^\infty \psi(x^+, z^+) e^{-sx^+} dx^+ \quad (2.31)$$

Le système d'équations (2.30) devient :

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}(p, z^+)}{\partial z^{+2}} - u^+(z^+)(s\bar{\psi}(p, z^+) - 1) = 0 \quad (2.32a)$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}(p, z^+)}{\partial z^+} + Bi \bar{\psi}(s, z^+) = 0 \quad \text{à} \quad z^+ = 1 \quad (2.32b)$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}(p, z^+)}{\partial z^+} = 0 \quad \text{à} \quad z^+ = 0 \quad (2.32c)$$

La forme variationnelle du système (2.32) est:

$$I = \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \bar{\psi}(s, z^+)}{\partial z^+} \right)^2 + su^+ \bar{\psi}^2 - 2u^+ \bar{\psi} \right] dz^+ + Bi \bar{\psi}^2 \Big|_{z^+=1} \quad (2.33)$$

Nous choisissons les fonctions de base de forme trigonométrique tel que :

$$\bar{\psi}(s, z^+) = \sum_{i=1}^N C_i(s) \cos(\sqrt{\delta} \sigma_i z^+) \quad (2.34)$$

La fonction: $\varphi_i(z^+) = \cos(\sqrt{\delta} \sigma_i z^+)$ doit satisfaire les conditions aux limites (2.32b, c)

σ_i : sont Les racines de l'équation transcendante :

$$\sigma_i \tan \sqrt{\delta} \sigma_i = Bi / \sqrt{\delta} \quad (2.35)$$

avec : δ est une constante qui dépend de l'indice "n": $\delta = (1 + 2 * n) / (1 + n)$ (2.36)

Introduisant l'équation (2.34) dans l'expression variationnelle (2.31), et optimisons I afin d'obtenir les coefficients $C_i(s)$, tels que:

$$\frac{\partial I(C_i(s))}{\partial C_i(s)} = 0 \quad i = 1, 2 \dots N \quad (2.37)$$

La résolution du système algébrique :

$$[A][C] = [b], \text{ avec } [A] = [A^*] + s[D] \quad (2.38)$$

permet de calculer les coefficients C_i , tel que:

$$C_i(s) = \frac{\beta_i}{s + \lambda_i} \quad (2.39)$$

avec:

β_i : sont les éléments du vecteur: $[b] [D]^{-1}$

λ_i : sont les valeurs propres de la matrice: $[A^*][D]^{-1}$

Les éléments des matrices $[A^*]$, $[D]$ et $[b]$, sont données par les formules suivantes:

$$a^*_{ij} = \int_0^1 \sigma_j \sigma_i \sin(\sqrt{\delta} \sigma_j z^+) \sin(\sqrt{\delta} \sigma_i z^+) dz^+ + 2B \cos(\sqrt{\delta} \sigma_i) \cos(\sqrt{\delta} \sigma_j) \quad (2.40a)$$

$$d_{ij} = \int_0^1 u^+(z^+) \cos(\sqrt{\delta} \sigma_i z^+) \cos(\sqrt{\delta} \sigma_j z^+) dz^+ \quad (2.40b)$$

$$b_i = \int_0^1 u^+(z^+) \cos(\sqrt{\delta} \sigma_i z^+) dz^+ \quad (2.40c)$$

La solution recherchée devient :

$$\bar{\psi}(s, z^+) = \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{s + \lambda_i} \cos(\sqrt{\delta} \sigma_i z^+) \quad (2.41)$$

A l'aide des tables d'inversion, la distribution de la température dans le repère original est de la forme:

$$\psi(x^+, z^+) = \sum_{i=1}^N \beta_i \cos(\sqrt{\delta} \sigma_i z^+) \exp(-\lambda_i x^+) \quad (2.42)$$

D'où la solution générale du système (2.24):

$$\theta(x^+, z^+) = \sum_{i=1}^N \beta_i \cos(\sqrt{\delta} \sigma_i z^+) \exp(-\lambda_i x^+) + \frac{Br}{Bi} \frac{n}{(2n+1)} + \frac{n^2 Br}{(2n+1)(3n+1)} \left(1 - z^{+(3n+1/n)} \right) \quad (2.43)$$

2. 7. 1. Calcul de la température de mélange

La température de mélange est calculée en utilisant l'équation:

$$\theta_m(x^+) = \theta_{m1}(x^+) + \theta_{m\infty}(x^+) \quad (2.44)$$

tel que:

$$\theta_{m1}(x^+) = \frac{\int_0^1 \psi(x^+, z^+) u^+(z^+) dz^+}{\int_0^1 u^+(z^+) dz^+} \quad (2.45)$$

$$\theta_{m\infty} = \frac{Br n^2}{(2n+1)(3n+1)} \left(\frac{3n+2}{4n+1} - \frac{n}{2n+1} + \frac{n}{5n+2} \right) + \frac{Br}{Bi} \frac{n}{(2n+1)} \quad (2.46)$$

2. 7. 2. Calcul du nombre de Nusselt local

A partir de sa définition, le nombre de Nusselt est donné par:

$$Nu(z) = 4 \frac{\left. \frac{\partial \theta}{\partial z^+} \right|_{z^+=1}}{\theta_w - \theta_m} \quad (2.47a)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z^+} \right|_{z^+=1} = - \sum_{i=1}^N \beta_i \sqrt{\delta} \sigma_i \sin(\sqrt{\delta} \sigma_i) \exp(-\lambda_i x^+) - \frac{nBr}{(2n+1)} \quad (2.47b)$$

La température à la paroi est donnée par l'équation suivante:

$$\theta(x^+, 1) = \sum_{i=1}^N \beta_i \cos(\sqrt{\delta} \sigma_i) \exp(-\lambda_i x^+) + \frac{Br}{Bi} \frac{n}{(2n+1)} \quad (2.47c)$$

2. 8. Racines de l'équation transcendante et valeurs propres

Le tableau (2. 3) donne les racines de l'équation transcendante (2.35) en fonction du nombre de Biot et du l'indice "n".

Tableau. 2. 4: Les cinq premières racines de l'équation transcendante et valeurs propres

<i>Biot</i>	<i>i</i>	<i>n=1/3</i>		<i>n=1</i>		<i>n=3</i>	
		σ_i	λ_i	σ_i	λ_i	σ_i	λ_i
10	1	1.278020	1.732612	1.166667	1.605283	1.080124	1.537330
	2	3.851226	18.66838	3.515672	19.42387	3.254880	19.88938
	3	6.465018	55.41051	5.901727	57.69174	5.463938	59.20836
	4	9.123392	112.2231	8.328479	116.7026	7.710674	119.7673
	5	11.81913	189.2779	10.78934	196.6100	9.988986	201.7726
1	1	0.7695057	0.6888277	0.7024594	0.6666935	0.6503511	0.6541542
	2	3.063966	13.58755	2.797005	14.45323	2.589524	14.92667
	3	5.757694	46.72156	5.256032	48.87191	4.866140	50.26077
	4	8.523296	100.4051	7.780669	104.4306	7.203500	107.1874
	5	11.31029	174.7013	10.32483	181.2286	9.558939	186.7558
0.1	1	0.2782141	0.102816	0.253973	0.102188	0.2351339	0.1034360
	2	2.838104	185.6269	2.590822	196.3312	2.398636	201.8770
	3	5.634050	706.9230	5.143160	735.8248	4.761642	754.6732
	4	8.439257	1559.660	7.703952	1616.925	7.132474	1656.727
	5	11.24682	2743.472	10.26689	2839.495	9.505295	2920.885

2. 9. Résultats et discussion

2. 9. 1. Distribution de la température axiale et de mélange:

Les figures (2.13), (2.14) et (2.15) montrent l'évolution de la température axiale en fonction de la distance axiale x^+ , pour chaque type de fluides, l'effet de la dissipation visqueuse est négligé. Par contre, les figures (2.15), (2.16) et (2.17) montrent la distribution de la température de mélange pour les mêmes fluides.

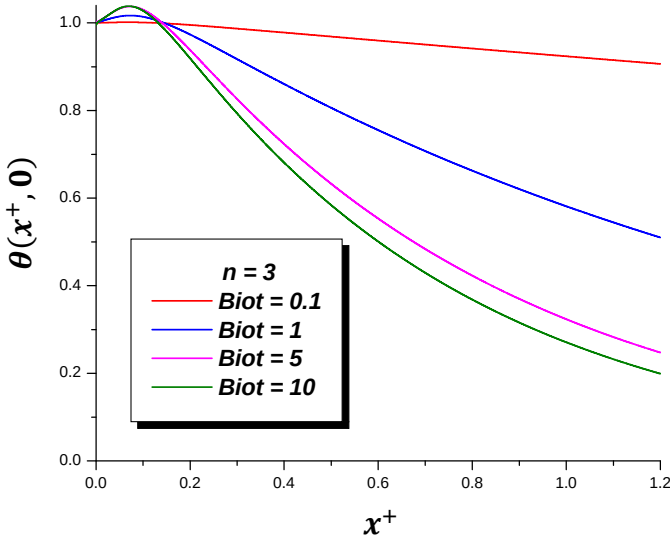


Fig. 2. 12: Distribution de la température axiale pour un fluide dilatant avec $Br = 0$.

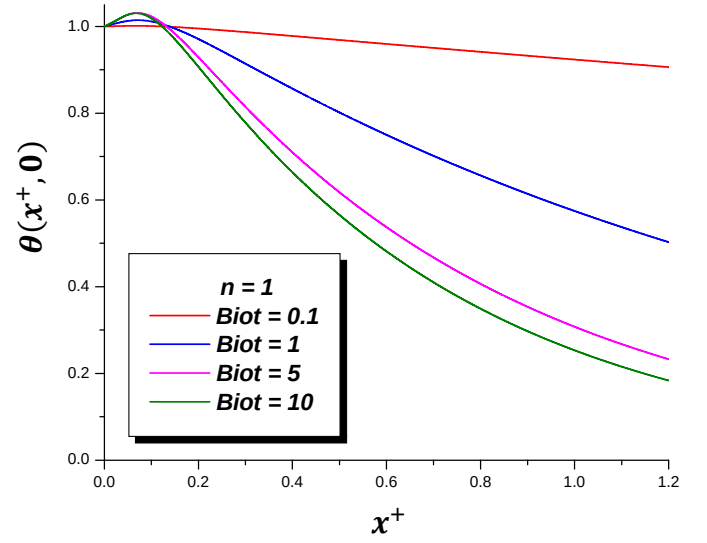


Fig. 2. 13: Distribution de la température axiale pour un fluide newtonien avec $Br = 0$.

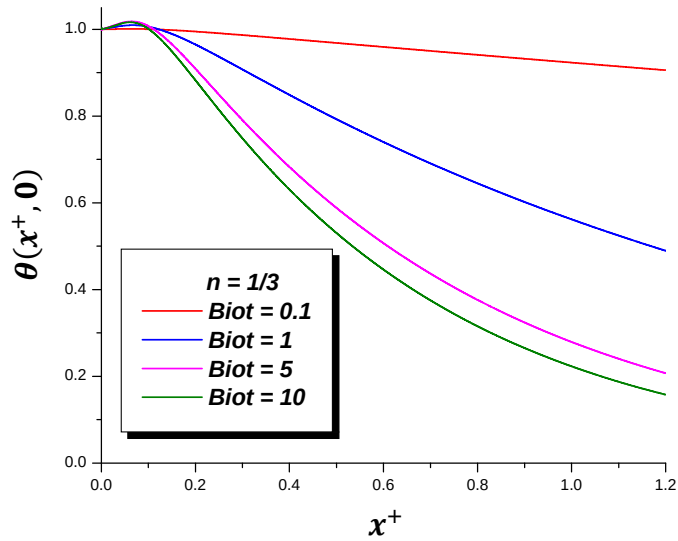


Fig. 2. 14: Distribution de la température axiale pour un fluide pseudo plastique avec $Br = 0$.

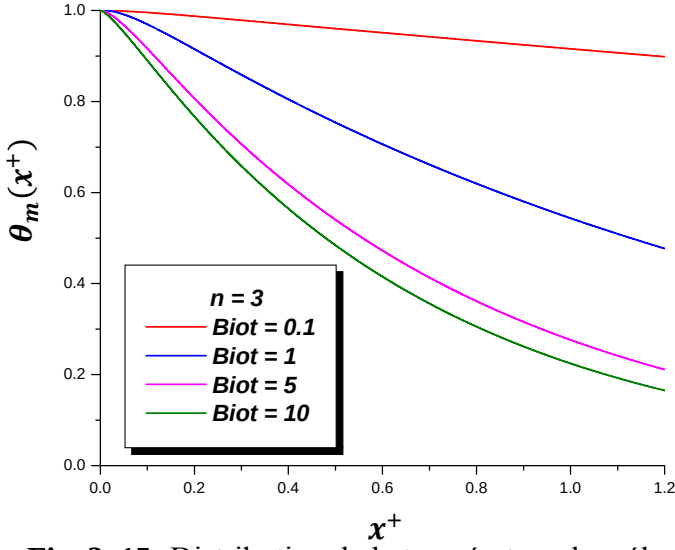


Fig. 2. 15: Distribution de la température de mélange pour un fluide dilatant avec $Br = 0$.

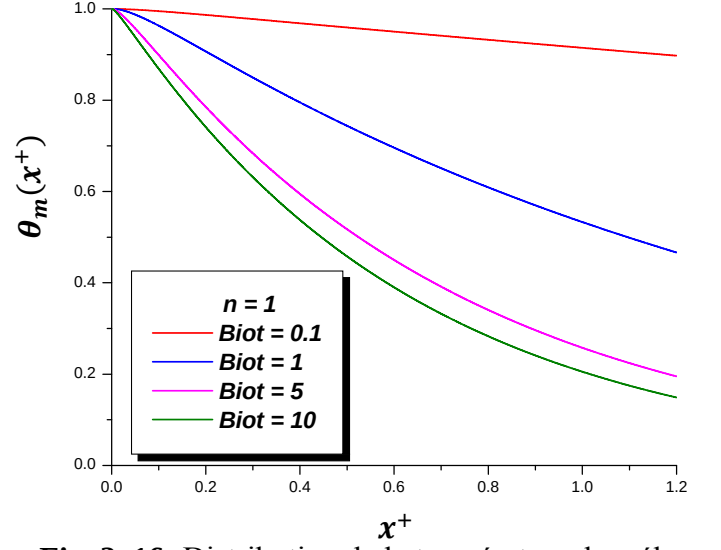


Fig. 2. 16: Distribution de la température de mélange pour un fluide Newtonien avec $Br = 0$.

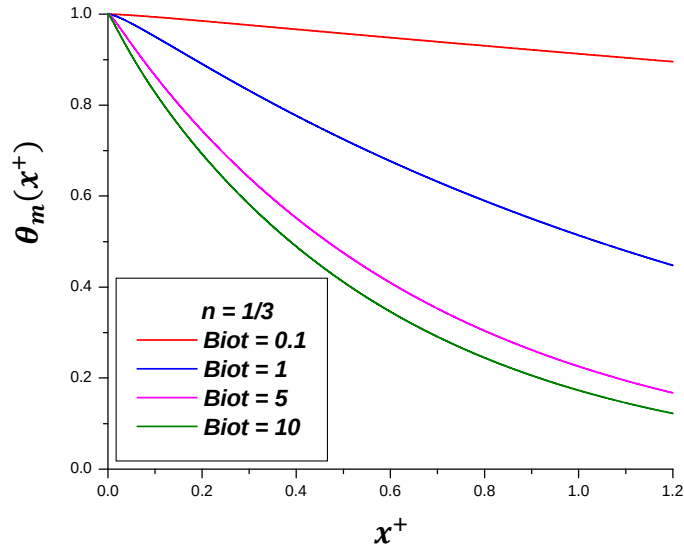


Fig. 2. 17: Distribution de la température de mélange d'un fluide pseudoplastique avec $Br = 0$.

Nous remarquons d'après les figures ci-dessus, que la température axiale et de mélange le long de l'écoulement dépend du nombre de Biot, pour chaque type de fluides considérés, elles diminuent plus rapidement d'autant que la valeur du Biot est élevée.

Pour la valeur élevée du nombre de Biot ($Biot = 10$), la température axiale et de mélange diminuent rapidement, ce qui indique un échange important avec le milieu extérieur, en particulier le fluide pseudoplastique.

Pour la valeur faible de Biot ($Biot = 0.1$), la température axiale et de mélange pour chaque fluide diminuent lentement le long de la conduite, ce qui traduit par une faible échange avec le milieu extérieur.

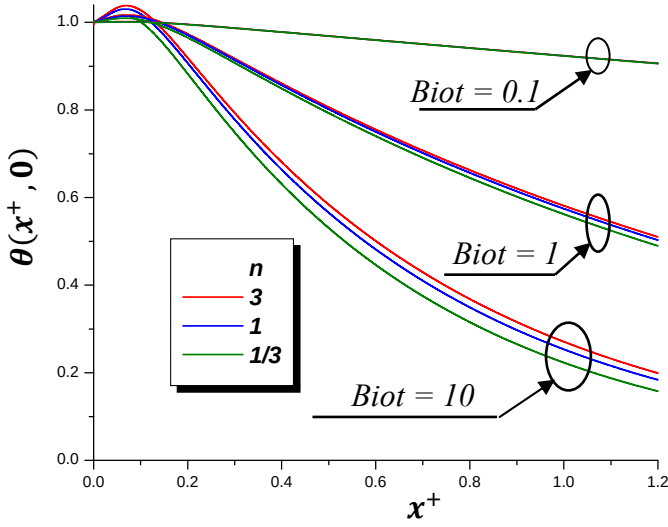


Fig. 2. 18: Evolution de la température axiale pour différents fluides et valeurs du nombre de Biot.

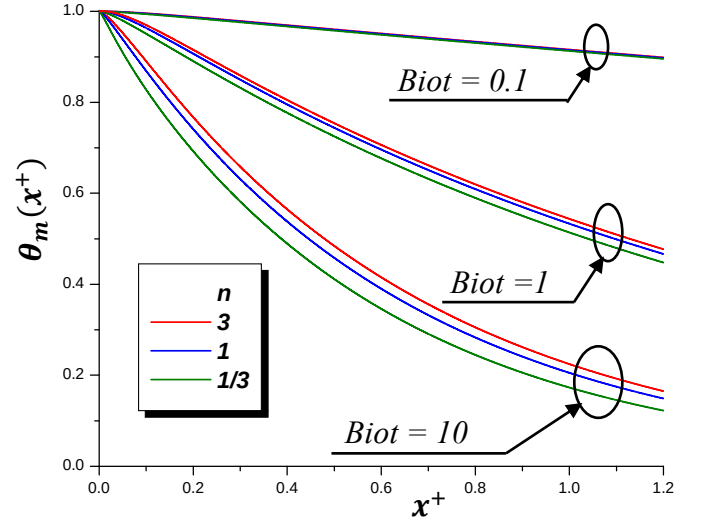


Fig. 2. 19: Evolution de la température de mélange pour différents fluides et valeurs du nombre de Biot.

Les figures (2.18) et (2.19) montrent une comparaison entre la distribution de la température axiale et de mélange pour les différents fluides considérés en fonction des trois valeurs du nombre de Biot. Nous remarquons que, pour la valeur élevée du nombre de Biot les températures diminuent rapidement, et pour la valeur $Biot = 0.1$, les trois fluides se comportent de la même manière et leurs courbes représentatifs se confondent.

2. 9. 2. Evolution du nombre de Nusselt:

Les figures (2.20), (2.21) montrent l'évolution du nombre de Nusselt pour différents fluides, deux valeurs extrêmes du nombre de Biot sont considérés ($Biot = 10$ et $Biot = 0.1$). Nous constatons qu'à l'entrée du canal le fluide pseudoplastique et Newtonien ont des valeurs plus grandes que celle du fluide dilatant. Loin de l'entrée les courbes se rapprochent pour atteindre les valeurs asymptotiques.

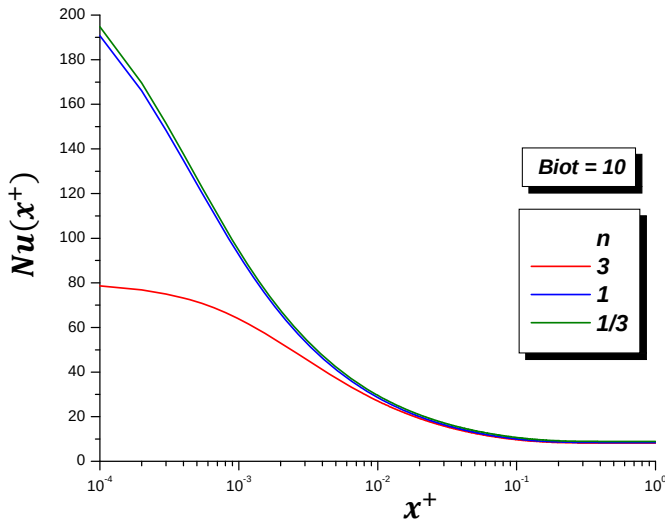


Fig. 2. 20: Evolution du nombre de Nusselt pour différents fluides avec $Biot = 10$

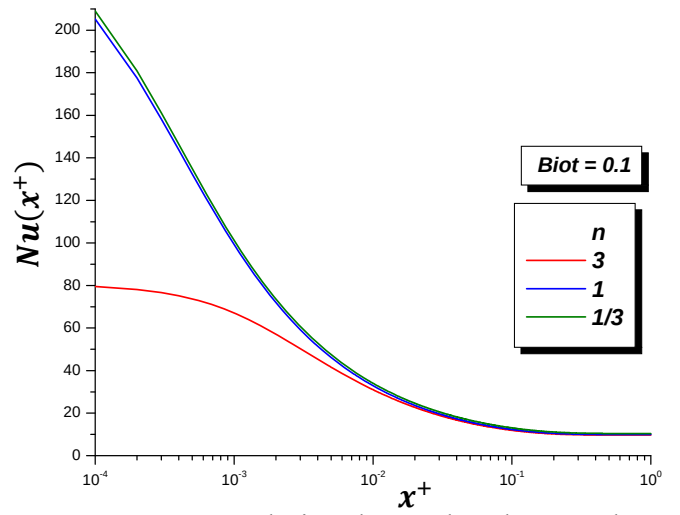


Fig. 2. 21: Evolution du nombre de Nusselt pour différents fluides avec $Biot = 0.1$

Nous avons présenté dans les figures (2.20) et (2.21), l'évolution du nombre de Nusselt pour deux types de fluides (dilatant et pseudoplastique), proche de la zone de leurs valeurs asymptotiques. L'influence du nombre de Biot sur la valeur asymptotique est claire. Nous remarquons que la valeur asymptotique est importante d'autant que le nombre de Biot est faible.

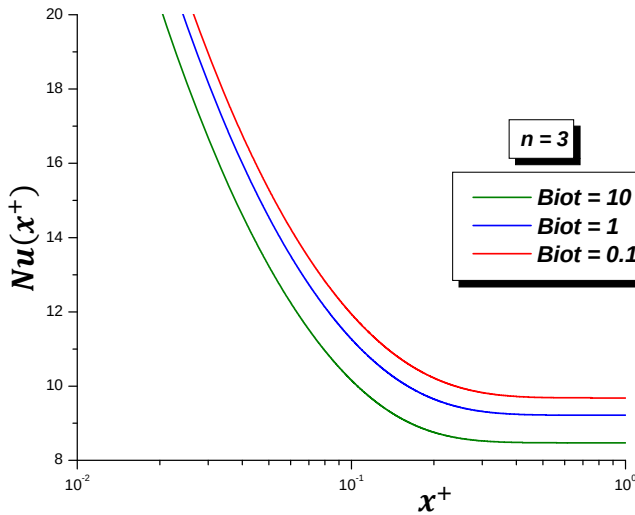


Fig. 2. 22: Evolution du nombre de Nusselt d'un fluide dilatant, pour différents valeurs du nombre de Biot.

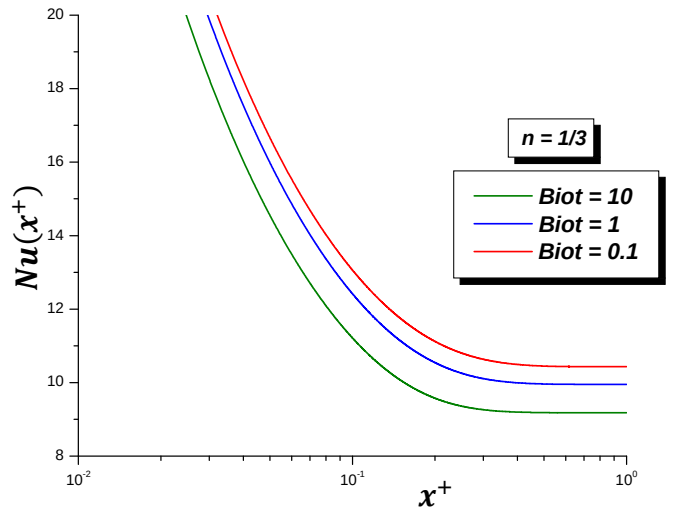


Fig. 2. 23: Evolution du nombre de Nusselt d'un fluide pseudo plastique, pour différents valeurs du nombre de Biot.

Nous allons présenter dans les figures suivantes l'évolution du nombre de Nusselt avec la considération de l'effet de la dissipation visqueuse, pour les trois types des fluides

considérés. En variant le nombre de Biot, et pour chaque valeur, on fait varier cinq fois la valeur du nombre de Brinkman.

Les figures (2.24), (2.25) et (2.26) montrent une similitude dans l'allure générale des courbes avec le cas de la température constante imposée à la paroi, et cela est justifié par la valeur élevée du nombre de Biot ($Bi = 100$). On distingue deux cas principaux :

La première correspond aux valeurs positives du nombre de Brinkman ($Br > 0$), pour ses valeurs le nombre de Nusselt est positif et présente des valeurs minimales pour une certaine valeur axiale, puis converge vers les valeurs asymptotiques qui sont montrées sur les figures.

Le deuxième cas correspond aux valeurs négatives du nombre de Brinkman, on constate que pour le fluide newtonien et pseudo plastique le nombre de Nusselt varie de moins l'infini jusqu'à plus l'infini, puis converge vers la valeur asymptotique pour chaque fluide. Par contre, le fluide dilatant a un nombre de Nusselt qui varie de moins l'infini jusqu'à une valeur maximale positive, puis converge vers sa valeur asymptotique.

On remarque aussi l'existence d'un point fixe ne dépend pas du nombre de Brinkman dans la représentation graphique du nombre de Nusselt.

Les figures (2.27), (2.28) et (2.29) montrent l'évolution du nombre de Nusselt pour la valeur du nombre de Biot modérée ($Bi=10$), on constate presque les mêmes comportements précédentes pour les trois types de fluide quelque soit la valeur du nombre de Brinkman.

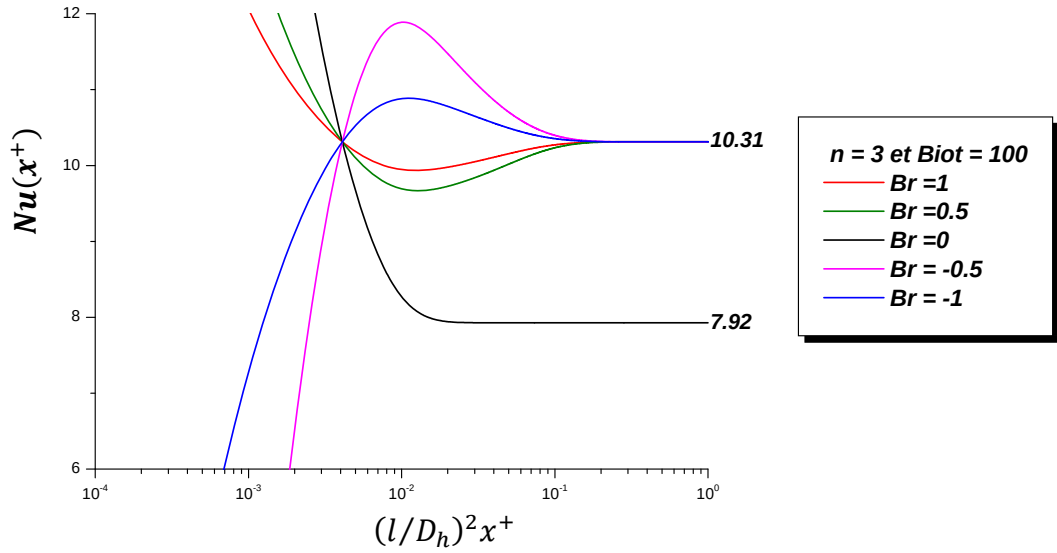


Fig. 2. 24: Influence du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt.

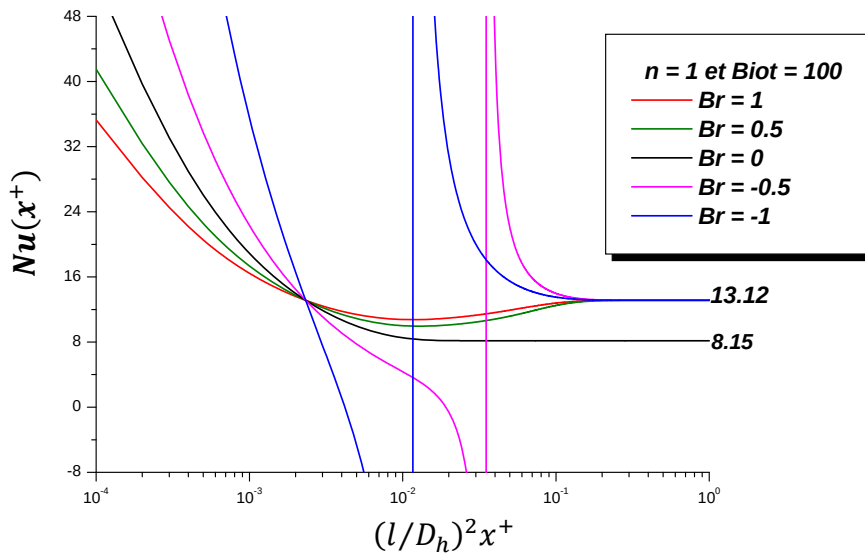


Fig. 2. 25: Influence du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt.

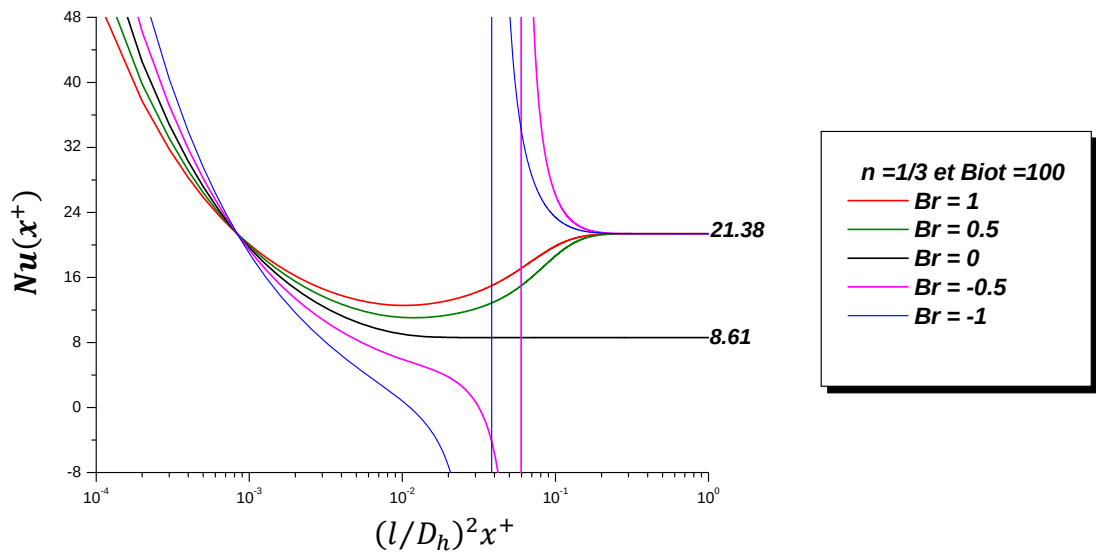


Fig. 2. 26: Influence du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt.

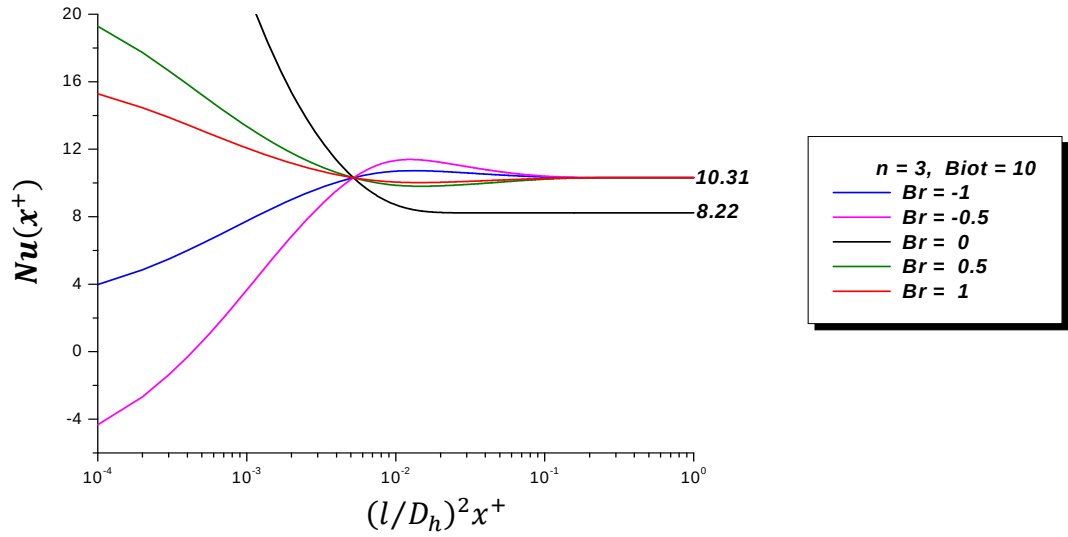


Fig. 2. 27: Influence du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt.

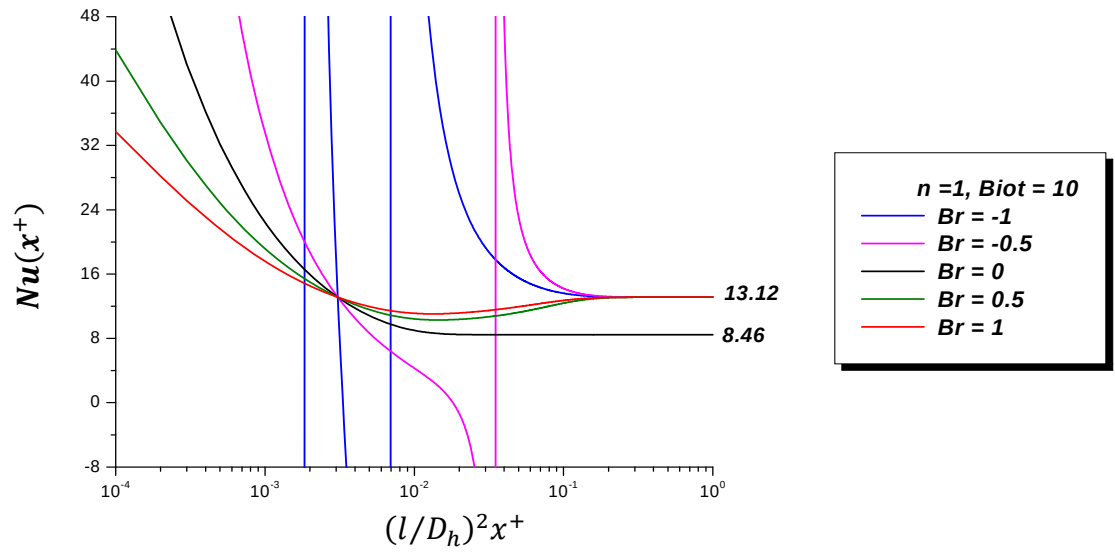


Fig. 2. 28: Influence du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt.

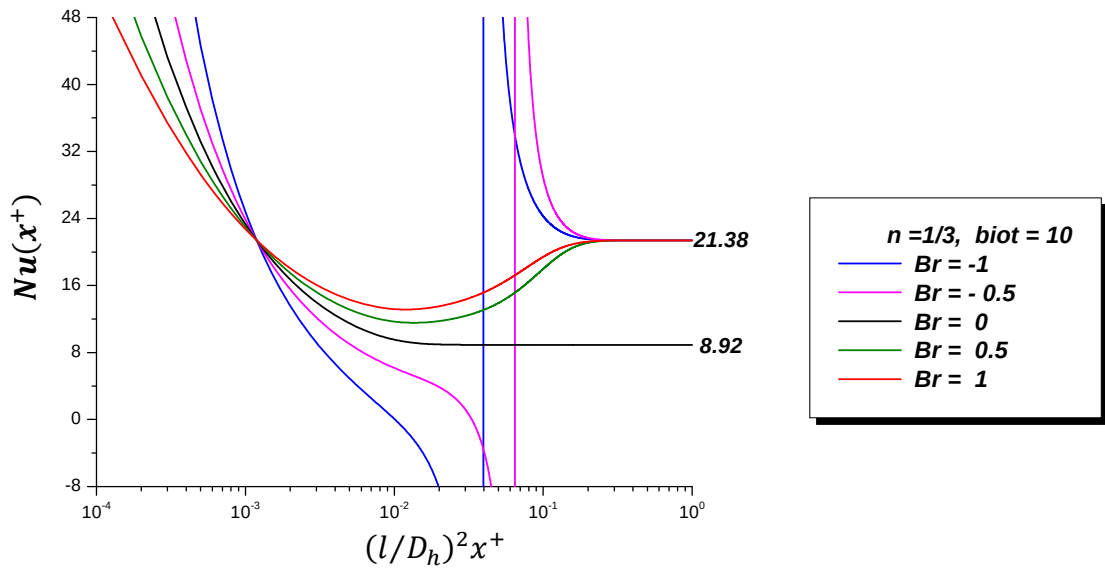


Fig. 2. 29: Influence du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt.

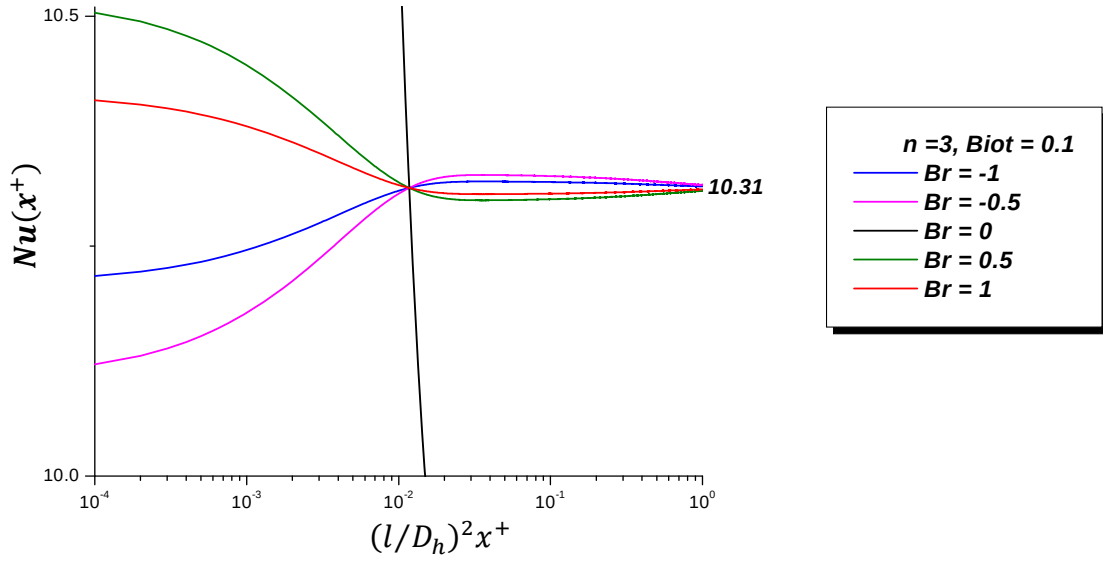


Fig. 2. 30: Influence du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt.

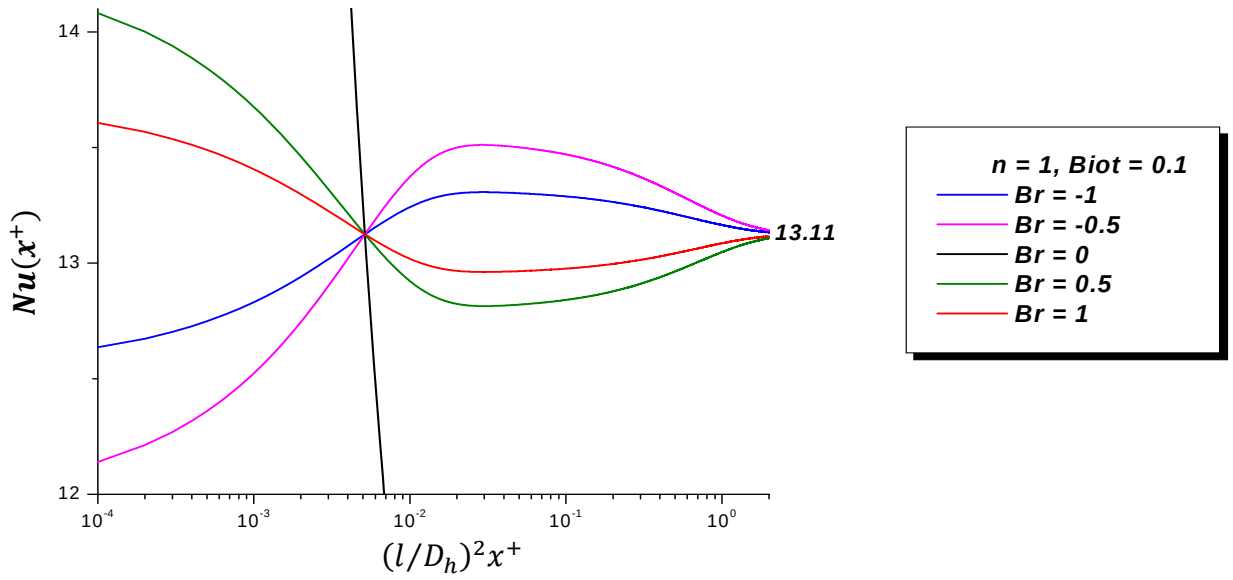


Fig. 2. 31: Influence du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt.

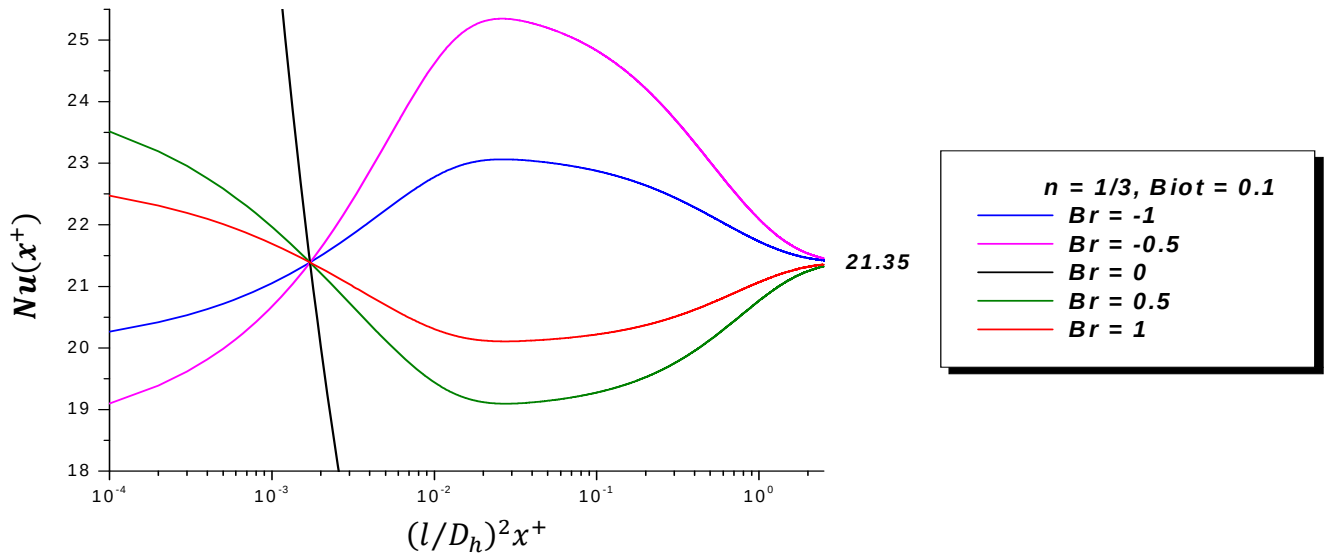


Fig. 2. 32: Influence du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt.

Les figures (2.30), (2.31) et (2.32) montrent une nouvelle forme des courbes qui ressemblent à des fourchettes dans le cas de la faible valeur du nombre de Biot ($Biot = 0.10$). Pour le fluide pseudoplastique la fourchette est large à l'entrée du canal par rapport à celles du fluide newtonien ou dilatant, le point fixe remarqué est devenu un point de symétrie pour les courbes, on constate aussi que le nombre de Nusselt ne présente aucune valeur négative. Les valeurs asymptotiques du nombre de Nusselt dans le cas de $Br \neq 0$, pour chaque fluide sont égales pour les trois valeurs du nombre de Biot choisis, ce qui montre que le nombre de Biot n'a aucune influence sur la valeur asymptotique du nombre de Nusselt si l'effet de la dissipation visqueuse est pris en compte. Cette remarque a été constatée dans les travaux de A. Barletta [13], dans le cas des conduites circulaires d'un écoulement newtonien.

2.10. Conclusion:

Dans ce chapitre, nous avons traité un écoulement fluide non Newtonien entre deux plaques parallèles avec la considération de l'effet de la dissipation visqueuse. L'influence des nombres de Biot et de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt est étudiée. Nous notons les conclusions suivantes:

Dans le cas de la paroi soumise à une température constante, l'effet de la dissipation visqueuse ne peut pas être négligé. Par exemple la valeur asymptotique du nombre de Nusselt d'un fluide dilatant ($n = 1.5$), pour $Br = 0$ vaut $N_{\infty} = 7.359$, par contre cette valeur vaut $N_{\infty} = 16.12$ pour $Br \neq 0$.

La valeur asymptotique du nombre de Nusselt pour le fluide pseudoplastique, est plus élevée par rapport aux autres fluides, quelque soit la valeur du nombre de Brinkman.

Le nombre de Biot joue un rôle important dans le transfert thermo convectif des fluides non Newtonien, nous avons marqué son influence dans les remarques suivantes:

Pour le cas limite $B_i \rightarrow \infty$, les deux situations: température imposée à la paroi et paroi échangeant avec le milieu extérieur sont identiques.

Si on néglige l'effet de la dissipation visqueuse, le nombre de Biot a une influence remarquable sur la valeur asymptotique du nombre de Nusselt. La valeur asymptotique est d'autant plus élevée que le nombre de Biot est faible.

Si le nombre de Brinkman n'est pas nul, la valeur asymptotique du nombre de Nusselt est indépendante du nombre de Biot et du nombre de Brinkman. L'existence d'un point fixe dans les courbes représentatives du nombre de Nusselt, est indépendante du nombre de Brinkman.

CHAPITRE 3

Écoulement d'un fluide Non-Newtonien dans les conduites circulaires

A. Cas de température constante imposée à la paroi

3. 1. Introduction:

L'écoulement des fluides dans les conduits circulaires a une importance majeure dans divers domaines de l'industrie notamment en présence du transfert convectif de la chaleur. L'étude du transfert thermo convectif des fluides non-Newtonien dans les conduits circulaires est l'objet de cette partie du mémoire.

Dans le premier lieu on va prendre le cas où la paroi est soumise à une température constante, avec la considération des suppositions simplificatrices suivantes:

- Le fluide utilisé est incompressible et l'écoulement est monophasique.
- L'écoulement est stationnaire.
- Le régime est hydro dynamiquement et thermiquement établi.
- Les propriétés thermo physiques du fluide sont supposées constantes.
- On néglige la conduction axiale du fluide.
- On néglige la conduction dans la paroi.
- On prend en considération l'effet de dissipation visqueuse.

3. 2. Description et Formulation du problème:

En tenant compte des hypothèses simplificatrices précédentes, le problème à étudier est ce lui de la convection forcée d'un écoulement laminaire d'un fluide non Newtonien abordant la section d'entrée d'un conduit de forme cylindrique, avec une température constante T_e , la paroi est soumise à une température constante T_w .

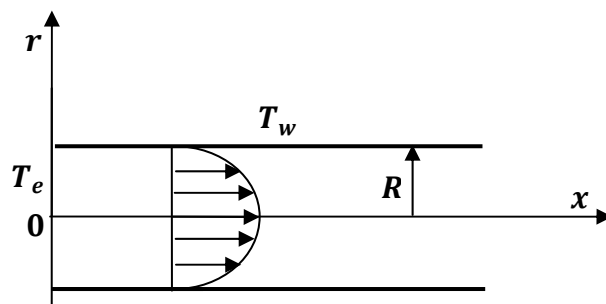


Fig. 3. 1: La géométrie d'étude

Le problème peut être formulé comme suit:

L'équation d'énergie:

$$\frac{u(r)}{\alpha_f} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{k} \tau_{rx} \frac{du}{dr} \quad (3.1a)$$

les conditions aux limites sont:

A l'entrée du conduit:

$$T(r, x)|_{x=0} = T_e \quad (3.1b)$$

La condition de symétrie:

$$\left. \frac{\partial T(r, x)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (3.1c)$$

La condition à la paroi:

$$T(r, x)|_{r=R} = T_w \quad (3.1d)$$

La vitesse axiale est donné par:

$$u(r) = \frac{1+3n}{n+1} \bar{u} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (3.2)$$

La contrainte de cisaillement est donné par:

$$\tau_{rx} = \eta \left| \frac{du}{dr} \right|^{n-1} * \frac{du}{dr} \quad (3.3)$$

L'équation d'énergie devient:

$$\frac{u(r)}{\alpha_f} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \left(\frac{3n+1}{n} \right)^{(n+1)} \frac{\eta}{k} \frac{\bar{u}^{(n+1)}}{R^{(n+1)}} \left(\frac{r}{R} \right)^{(n+1/n)} \quad (3.4)$$

En introduisant dans le problème ci-dessus les quantités adimensionnelles suivantes :

$$\theta = \frac{T - T_w}{T_e - T_w}; \quad x^+ = \frac{x \alpha_f}{\bar{u} R^2}; \quad r^+ = \frac{r}{R}; \quad u^+(r) = \frac{u(r)}{\bar{u}}; \quad \Delta T = T_e - T_w$$

$$Br = \frac{\eta (\bar{u}/R)^{(n+1)}}{k(\Delta T/R^2)}$$

L'équation (3.4) devient:

$$u^+(r^+) \frac{\partial \theta}{\partial x^+} = \frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial \theta}{\partial r^+} \right) + Br \left(\frac{3n+1}{n} \right)^{(n+1)} (r^+)^{\left(\frac{1+n}{n} \right)} \quad (3.5a)$$

$$\theta(r^+, x^+) = 1; \quad x^+ = 0 \quad (3.5b)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(r^+, x^+)}{\partial r^+} \right|_{r^+=0} = 0 \quad x^+ \geq 0 \quad (3.5c)$$

$$\theta(1, x^+) = 0 \quad x^+ \geq 0 \quad (3.5d)$$

3.3. Résolution du problème:

Décomposons $\theta(x^+, r^+)$ en une somme de deux fonctions $\theta_1(x^+, r^+)$ et $\theta_\infty(r^+)$ tel que:

$$\theta(x^+, r^+) = \theta_1(x^+, r^+) + \theta_\infty(r^+) \quad (3.6a)$$

avec :

$$\lim_{x^+ \rightarrow \infty} \theta(x^+, r^+) = \theta_\infty(r^+) \quad (3.6b)$$

$$\lim_{x^+ \rightarrow \infty} \theta_1(x^+, r^+) = 0 \quad (3.6c)$$

Le système (3.5) devient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r \frac{\partial \theta_\infty(r^+)}{\partial r^+} \right) = -Br \left(\frac{3n+1}{n} \right)^{(n+1)} (r^+)^{\left(\frac{1+n}{n} \right)} \quad (3.7a)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_\infty(r^+)}{\partial r^+} \right|_{r^+=0} = 0 \quad (3.7b)$$

$$\theta_\infty(r^+)|_{r^+=1} = 0 \quad (3.7c)$$

Par intégration de l'équation (3.7a), le profile de la température à l'infini est:

$$\theta_\infty(r^+) = Br \left(\frac{n}{3n+1} \right)^{(1-n)} \left[1 - (r^+)^{\left(\frac{3n+1}{n} \right)} \right] \quad (3.8)$$

Substituons l'équation (3.6a) dans (3.5a) nous obtenons:

$$u^+(r^+) \frac{\partial \theta_1(x^+, r^+)}{\partial x^+} = \frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial \theta_1(x^+, r^+)}{\partial r^+} \right) \quad (3.9a)$$

avec les conditions:

$$\theta_1(r^+, x^+) = 0; \quad x^+ = 0 \quad (3.9b)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_1(x^+, r^+)}{\partial r^+} \right|_{r^+=0} = 0 \quad (3.9c)$$

$$\theta_1(1, x^+) = 0 \quad (3.9d)$$

Dans ce qui suit nous allons résoudre le système (3.9), en utilisons la méthode variationnelle de Ritz. Introduisant la transformé de Laplace sur la variable x^+ .

$$\bar{\theta}_1(r^+, s) = \int_0^1 \theta_1 e^{-sx^+} (x^+, r^+) dx \quad (3.10)$$

On' obtient le système d'équations suivant :

$$\left(r^+ \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial r^+} \right) - u^+(s \bar{\theta}_1 - 1) = 0 \quad 0 < r^+ < 1 \quad (3.11a)$$

$$\bar{\theta}_1(s, r^+) = 0 \quad r^+ = 1 \quad (3.11b)$$

$$\frac{\partial \overline{\theta}_1(s, r^+)}{\partial r^+} = 0 \quad r^+ = 0 \quad (3.11c)$$

La forme variationnelle correspondante au problème (3.11) est donnée par l'expression suivante :

$$I = \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial r^+} \right)^2 + su^+ \bar{\theta}_1^{-2} - 2u^+ \bar{\theta}_1 \right] r^+ dr^+ \quad (3.12)$$

La solution du problème est approchée par:

$$\overline{\theta}_1(r^+, s) = \sum_0^N c_i(s) \varphi_i(r^+) \quad (3.13)$$

avec $\varphi_i(r^+)$ sont les fonctions de base qui doivent satisfaire les conditions aux limites (3.11b) et (3.11c), les fonctions de base choisies sont les fonctions de Bessel de la première espèce d'ordre zéro, tel que:

$$\varphi_i(r^+) = J_0(\sigma_i r^+) \quad (3.14)$$

avec : $c_i(s)$ sont des coefficients à déterminer.

et σ_i : Représentent les racines de l'équation transcendante (3.15), déduite de la condition au limite (3.11b) :

$$J_0(\sigma_i) = 0 \quad (3.15)$$

Introduisant l'expression (3.13) dans (3.12) nous obtenons :

$$I = I(c_1, c_2, \dots, c_N) \quad (3.16)$$

Il nous reste maintenant que la détermination des coefficients C_i , tel que:

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial c_1} \delta c_1 + \frac{\partial I}{\partial c_2} \delta c_2 + \frac{\partial I}{\partial c_3} \delta c_3 + \dots \frac{\partial I}{\partial c_N} \delta c_N = 0 \quad (3.17a)$$

Puisque les coefficients C_i sont linéairement indépendants alors :

$$\frac{\partial I(c_i)}{\partial c_i} = 0 ; \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.17b)$$

Ce qui conduit au système algébrique suivant :

[illegible]

Que l'on peut l'écrire sous la forme :

$$[A][c] = [b] \quad (3.19a)$$

La matrice $[A]$ peut être écrite sous la forme :

$$[A] = [A^*] + s[D]. \quad (3.19b)$$

Introduisant (3.19b) dans le système (3.19a) nous obtenons les coefficients $c_i(s)$ de telle sorte que:

$$c_k = \frac{\beta_k}{s + \mu_k} \quad (3.20a)$$

$$\beta_k: \text{les éléments du vecteur: } [b][D]^{-1} \quad (3.20b)$$

$$\mu_k: \text{les valeurs propres de la matrice: } [A^*][D^{-1}] \quad (3.20c)$$

les éléments des matrices $[A^*]$ et $[D]$ sont donnés par les relations suivantes:

$$a^*_{ij} = \int_0^1 \sigma_j \sigma_i J_1(\sigma_j r^+) J_1(\sigma_i r^+) r^+ dr^+ \quad (3.21a)$$

$$d_{ij} = \int_0^1 u^+(r^+) J_0(\sigma_i r^+) J_0(\sigma_j r^+) r^+ dr^+ \quad (3.21b)$$

les éléments du vecteur $[b]$ sont donnés par :

$$b_i = \int_0^1 u^+(r^+) J_0(\sigma_i r^+) r^+ dr^+ \quad (3.21c)$$

D'où la température $\bar{\theta}(r^+, s)$ est donnée par l'équation :

$$\bar{\theta}_1(r^+, s) = \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{s + \mu_i} J_0(\sigma_i r^+) \quad (3.22a)$$

Par le retour au système original on obtient :

$$\theta_1(x^+, r^+) = \sum_{i=1}^N \beta_i J_0(\sigma_i r^+) \exp(-\mu_i x^+) \quad (3.22b)$$

D'où la solution générale est :

$$\theta(r^+, x^+) = \sum_{i=1}^N \beta_i J_0(\sigma_i r^+) \exp(-\mu_i x^+) + Br \left(\frac{n}{3n+1} \right)^{(1-n)} \left[1 - (r^+)^{\left(\frac{3n+1}{n} \right)} \right] \quad (3.23)$$

La température axiale est définie par:

$$\theta_c(x^+) = \theta(x^+, 0) = \sum_{i=1}^N \beta_i \exp(-\mu_i x^+) + Br \left(\frac{n}{3n+1} \right)^{(1-n)} \quad (3.24)$$

3. 3. 1. Calcul de la température de mélange:

D'après sa définition, la température de mélange est donnée par:

$$\theta_m(x^+) = \frac{\int_0^1 u^+(r^+) \theta(x^+, r^+) r^+ dr^+}{\int_0^1 u^+(r^+) r^+ dr^+} \quad (3.25a)$$

$$\theta_m(x^+) = 2 \sum_{i=1}^N \beta_i b(i) \exp(-\mu_i x^+) \quad (3.25b)$$

3. 3. 1. Calcul du nombre de Nusselt local

D'après sa définition, Le nombre de Nusselt local est exprimé par:

$$Nu(x^+) = 2 \frac{\left. \frac{\partial \theta}{\partial r^+} \right|_{r^+=1}}{\theta_w - \theta_m} \quad (3.26a)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r^+} \right|_{r^+=1} = - \sum_{i=1}^N \beta_i \sigma_i J_1(\sigma_i) \exp(-\mu_i x^+) \quad (3.26b)$$

La température à la paroi est donnée par l'équation suivante :

$$\theta_w(x^+) = \sum_{i=1}^N \beta_i J_0(\sigma_i) \exp(-\mu_i x^+) \quad (3.26c)$$

3. 3. 3. Racines de l'équation transcendante σ_i et valeurs propres μ_i

Sur le tableau (3.1) nous avons montré les cinq premières racines de l'équation transcendante (3.14), et valeurs propres de la matrice définies dans l'équation (3.19c), pour différents fluides.

Tableau. 3. 1: racines de l'équation transcendante et valeurs propres.

i	σ_i	$n=1/3$	$n=1$	$n=3$
		μ_i	μ_i	μ_i
1	2.404825	3.879372	3.201680	2.879485
2	5.520070	27.32364	27.79599	27.66553
3	8.653728	71.95319	73.89725	74.65392
4	11.79153	137.3362	141.3804	143.5843
5	14.93093	223.4200	230.2188	234.3938

3. 4. Validation des résultats et discussion

Le tableau (3.2) ci-dessous représente les valeurs de la température pour différentes positions axiales et radiales obtenus par la présente étude, et ceux de la référence [14], d'un fluide Newtonien ($n = 1$).

3. 4. 1. La température axiale: Les chiffres en gras représentent les résultats obtenus par S.Olek (Réf. [14]), les autres représentent les résultats obtenus par la présente étude, pour un écoulement fluide Newtonien, l'effet de la dissipation visqueuse est négligé.

Tableau. 3. 2: Comparaison de $\theta(x^+, r^+)$, avec celle du référence [14]. ($Br = 0$).

$r^+ \quad x^+$	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	2.0
0.0	0.941 0.994	0.701 0.752	0.342 0.367	0.165 0.176	0.079 0.085	0.038 0.040	0.001 0.001
0.2	0.899 0.961	0.654 0.711	0.318 0.346	0.153 0.166	0.074 0.080	0.035 0.038	0.001 0.001
0.4	0.765 0.848	0.525 0.595	0.252 0.287	0.121 0.138	0.058 0.066	0.028 0.032	0.001 0.001
0.6	0.533 0.635	0.347 0.419	0.165 0.199	0.080 0.096	0.038 0.046	0.018 0.022	0.000 0.000
0.8	0.255 0.332	0.162 0.210	0.077 0.098	0.037 0.047	0.018 0.022	0.009 0.010	0.000 0.000

Nous constatons qu'à l'entrée de la conduite, l'existence d'un écart entre les résultats obtenus et ceux donnés dans la référence [14]. L'erreur relative pour les distances: $x^+ = 0.1$ et $r^+ = 0$ est de 5.3%. L'erreur relative diminue successivement 5%, pour $x^+ = 1$ sur l'axe du conduit.

3. 4. 2. La température de mélange:

Le tableau (3.3) montre la comparaison entre les résultats obtenus pour la température de mélange de la présente étude, avec ceux obtenus par Cotta et Ozisik [9]. L'effet de la dissipation visqueuse est négligé.

3. 4. 3. Nombre de Nusselt:

Le tableau (3.4) montre la comparaison entre les résultats obtenus du nombre de Nusselt local de la présente étude, avec ceux de la même référence [9]. L'effet de dissipation visqueuse est négligé.

La figure (3.2) montre cette comparaison graphiquement, pour un fluide pseudoplastique.

Tableau. 3. 3: Comparaison de la température de mélange

$\left(\frac{R}{D_h}\right)^2 x^+$	$n=1/3$		$n=1$		$n=3$	
	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [9]</i>	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [9]</i>	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [9]</i>
0.0001	0.99191	0.98471	0.99680	0.98657	0.99607	0.98733
0.0002	0.98824	0.97600	0.99479	0.97888	0.99453	0.98007
0.0004	0.98184	0.96245	0.99086	0.96688	0.98848	0.96873
0.0006	0.97572	0.95130	0.98701	0.95698	0.98551	0.95937
0.0008	0.96984	0.94149	0.98323	0.94826	0.98257	0.95111
0.001	0.96414	0.93258	0.97950	0.94032	0.98257	0.94358
0.002	0.93789	0.89575	0.96160	0.90736	0.96822	0.91232
0.004	0.89471	0.84014	0.92827	0.85723	0.94217	0.86463
0.006	0.85221	0.79578	0.89732	0.81693	0.91473	0.82620
0.008	0.81566	0.75773	0.86819	0.78215	0.88964	0.79296
0.01	0.78216	0.72394	0.84056	0.75111	0.86542	0.76323
0.02	0.64510	0.59166	0.71824	0.62803	0.75479	0.64481
0.04	0.45530	0.41487	0.53351	0.45901	0.57549	0.48046
0.06	0.32494	0.29582	0.39762	0.34100	0.43814	0.36391
0.08	0.23250	0.21164	0.29237	0.25424	0.33356	0.27671
0.1	0.16645	0.15152	0.22141	0.18971	0.25394	0.21059
0.2	0.03132	0.02852	0.05127	0.04394	0.06494	0.05385

Tableau. 3. 4: Comparaison du nombre de Nusselt local, ($Br = 0$).

$\left(\frac{R}{D_h}\right)^2 x^+$	$n=1/3$		$n=1$		$n=3$	
	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [9]</i>	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [9]</i>	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [9]</i>
0.0001	44.781	25.321	43.707	22.279	43.062	21.012
0.0002	33.788	19.929	34.613	17.559	34.132	16.568
0.0004	26.332	15.684	25.745	13.842	28.891	13.066
0.0006	21.835	13.640	21.311	12.050	21.038	11.377
0.0008	19.076	12.358	18.582	10.926	18.336	10.317
0.001	17.173	11.452	16.696	10.130	16.468	9.5670
0.002	12.4250	9.0692	11.981	8.0362	11.791	7.5909
0.004	9.1140	7.2458	8.6815	6.4296	8.511	6.0725
0.006	7.6950	6.3992	7.2658	5.6812	7.100	5.3638
0.008	6.8785	5.8870	6.4526	5.2269	6.288	4.9328
0.01	6.3415	5.5375	5.9196	4.9161	5.7559	4.6372
0.02	5.1510	4.7100	4.7539	4.1724	4.5914	3.9255
0.04	4.6145	4.2801	4.2593	3.7689	4.1015	3.5287
0.06	4.5341	4.1964	4.1916	3.6820	4.0358	3.4379
0.08	4.5217	4.1796	4.1821	3.6625	4.0267	3.4160
0.1	4.5198	4.1762	4.1808	3.6581	4.0255	3.4107
0.2	4.5195	4.1753	4.1806	3.6568	4.0253	3.4090

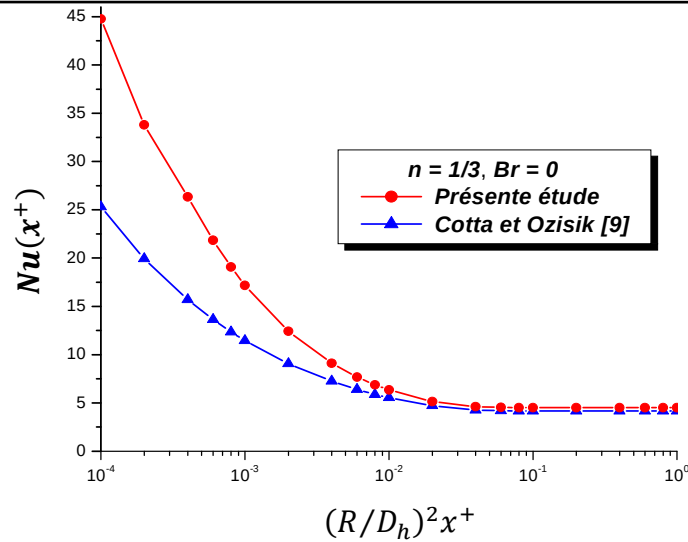


Fig. 3. 2: Comparaison du nombre de Nusselt local, ($Br = 0$).

La comparaison des résultats obtenus de la température de mélange, montre l'existence d'un écart entre les résultats obtenus par cette étude et ceux de la référence [9]. L'erreur relative maximale est de 8.93%, 14.29% et 17.07%, pour les fluides pseudoplastique, Newtonien et dilatant respectivement.

La comparaison des résultats obtenus pour le nombre de Nusselt, montre une grande différence à l'entrée de la conduite, puis les résultats convergent lentement vers ceux de la référence [9]. Pour les valeurs asymptotiques du nombre de Nusselt, l'erreur relative est de 7.61%, 12.52%, et 15.31% pour les fluides pseudoplastique, Newtonien et dilatant, La figure ci-dessus montre graphiquement la comparaison.

Le tableau (3.5) montre la comparaison entre les valeurs du nombre de Nusselt local à l'infinie obtenus par la présente étude, et ceux de O. Jambal [15], dans le cas où le nombre de Brinkman n'est pas nul, la comparaison montre une bonne coïncidence sur le plan de précision. L'erreur relative maximale est de 0.11 %

Tableau. 3. 5: Comparaison du nombre de Nusselt local à l'infinie, ($Br \neq 0$).

		$n=1.5$		$n=1$		$n=0.5$	
		<i>Présente étude</i>	<i>Référence [15]</i>	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [15]</i>	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [15]</i>
Nu_{∞}	$Br=1$	8.904	8.905	9.59	9.60	11.66	11.67
	$Br=0.5$	8.904	8.905	9.59	9.60	11.66	11.67
	$Br=-0.5$	8.904	8.905	9.59	9.60	11.66	11.67
	$Br=-1$	8.904	8.905	9.59	9.60	11.66	11.67

Nous allons présenter sur la figure (3.6) et (3.7), la distribution de la température axiale et de mélange pour les différents fluides considérés, en fonction de la distance axiale x^+ et de l'indice de comportement du fluide (n), l'effet de la dissipation visqueuse est négligé.

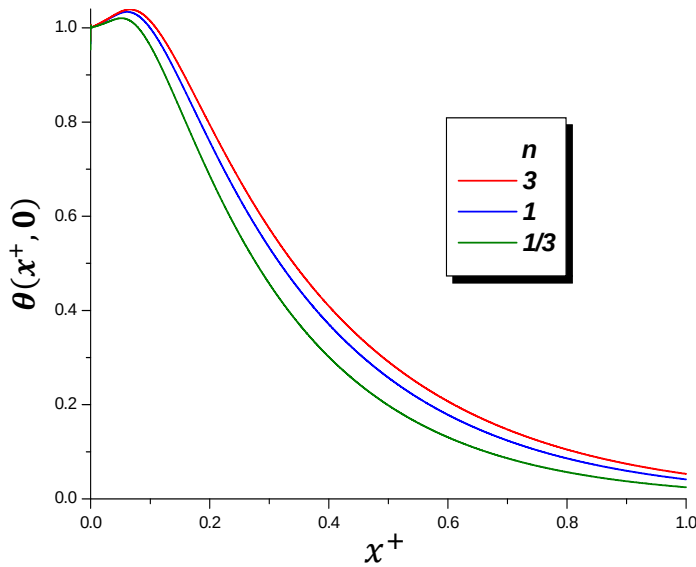


Fig. 3.3: Evolution de la température axiale.

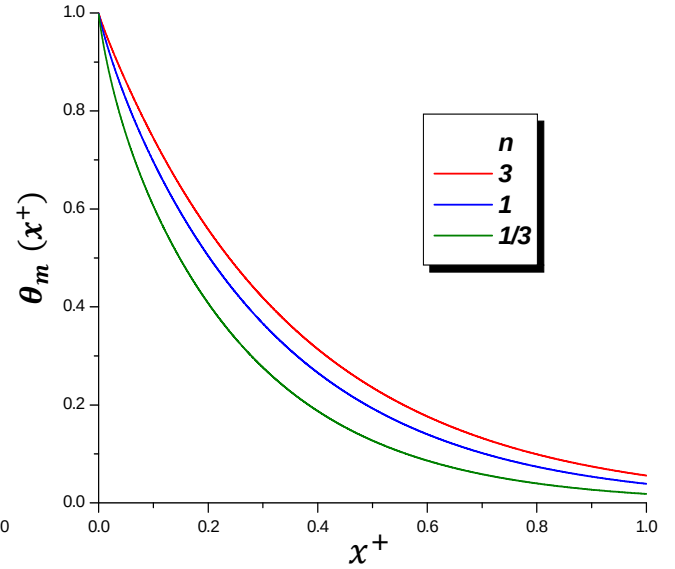


Fig. 3.4: Evolution de la température de mélange.

Nous constatons d'après les figures ci-dessus, que la température axiale et de mélange du fluide pseudoplastique diminuent rapidement, par rapport au celles du fluide newtonien où dilatant.

Les figures (3.8), (3.9) et (3.10) représentent une comparaison entre la température axiale et de mélange, pour les trois types de fluides. Nous constatons l'existence d'un écart entre la température axiale et de mélange, ce qui explique un gradient de température dans la section transversale du canal formé par deux plaques parallèles.

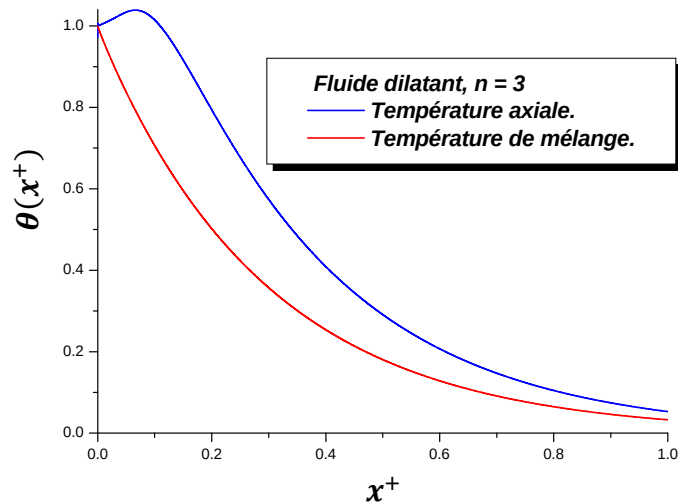


Fig. 3.5: Evolution de la température axiale et de mélange.

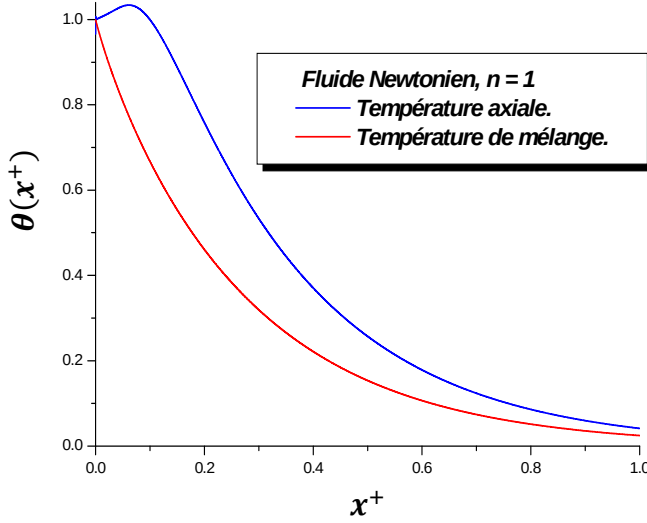


Fig. 3. 6: Evolution de la température axiale et de mélange.

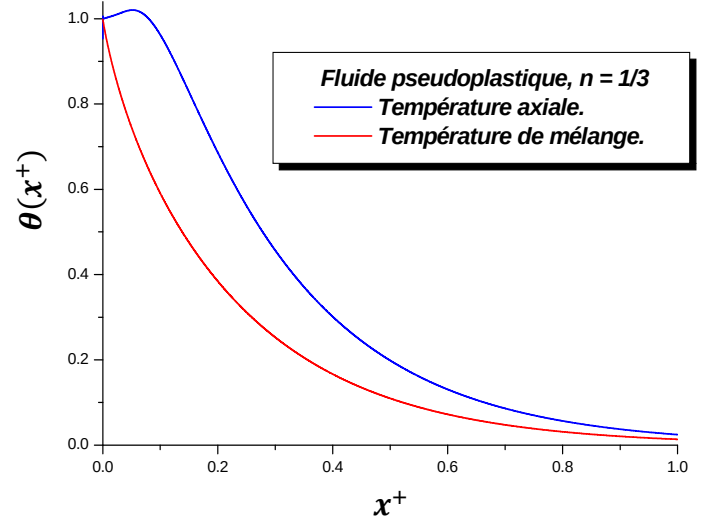


Fig. 3. 7: Evolution de la température axiale et de mélange.

La figure (3.8) ci-dessous représente l'évolution du nombre de Nusselt local, en fonction de la distance axiale x^+ , pour les trois types de fluides.

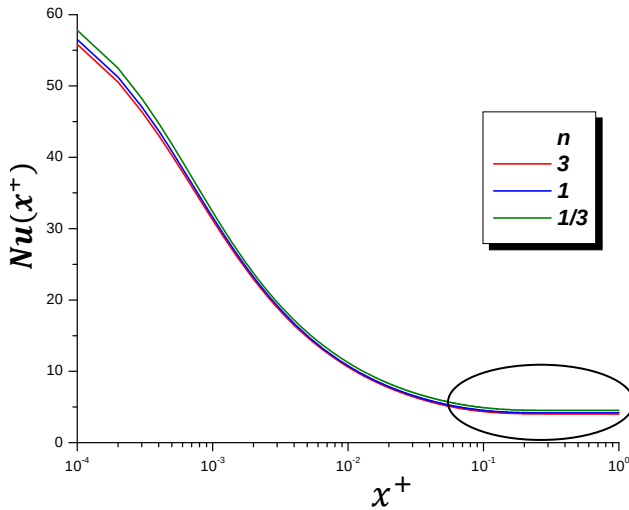


Fig. 3. 8a: Evolution du nombre de Nusselt

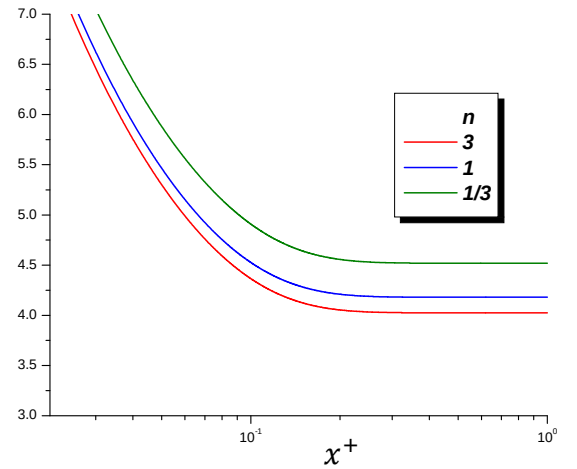


Fig. 3. 8b: Agrandissement de la zone encadrée de la figure (3.8a).

Nous remarquons, que la valeur du nombre de Nusselt pour le fluide pseudoplastique à l'entrée et le long de la conduite est plus élevée par rapport au fluide newtonien ou dilatant, sa valeur asymptotique du nombre de Nusselt local est $Nu_\infty = 4.51$, avec un écart relatif de 07.61% par rapport à la valeur 4.17 de référence [9], on trouve la valeur asymptotique du nombre de Nusselt pour le fluide newtonien $Nu_\infty = 4.18$, avec un écart relatif de 12.52% par rapport à la valeur 3.656 de la même référence.

Dans les figures (3.9), (3.10) et (3.11) le transfert de la chaleur résultant est illustré par le terme conventionnel du nombre de Nusselt (Nu), en fonction de la distance axiale $(R/D_h)^2 x^+$, pour différents types de fluides (Newtonien, pseudo plastique et dilatant), Le nombre de Brinkman joue le rôle du paramètre que l'on fait varier, pour étudier son influence sur l'évolution du nombre de Nusselt. Les figures montrent que, c'est on prend en considération l'effet de la dissipation visqueuse ($Br \neq 0$), le comportement asymptotique du nombre de Nusselt devient indépendant du nombre de Brinkman, pour chaque fluide, ce comportement a été discuté par les recherches faites par [15].

Pour un fluide Newtonien ($n=1$) et pour un conduit circulaire on a $Nu_\infty = 9.6$ qui a été trouvé par O. Jambal *et al* [15] et la présente étude le confirme. On peut remarquer aussi que pour ($Br > 0$), c'est-à-dire le cas de refroidissement du fluide, le nombre de Nusselt à une valeur minimale pour certain distance axial.

Dans le cas du ($Br < 0$) c'est-à-dire le cas d'échauffement du fluide, le nombre de Nusselt a des valeurs qui varient de plus l'infinie à moins l'infinie dans la région du régime établie.

Les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenues par [15] et la coïncidence étant excellente pour les valeurs asymptotiques du nombre de Nusselt.

Les valeurs du nombre de Nusselt à l'infinie sont aussi comparées avec ceux obtenues par Dang[26] pour $Br \neq 0$ d'après la formule suivante:

Pour les conduits circulaires :

$$Nu_\infty = 2(4n + 1)(5n + 1)/[n(3n + 1)] \quad (3.27)$$

La présente étude montre aussi qu'il y a un point fixe qui ne dépend pas du nombre de Brinkman dans la représentation graphique du nombre de Nusselt, qui est la conséquence de la considération d'échauffement du fluide sous l'effet de dissipation visqueuse.

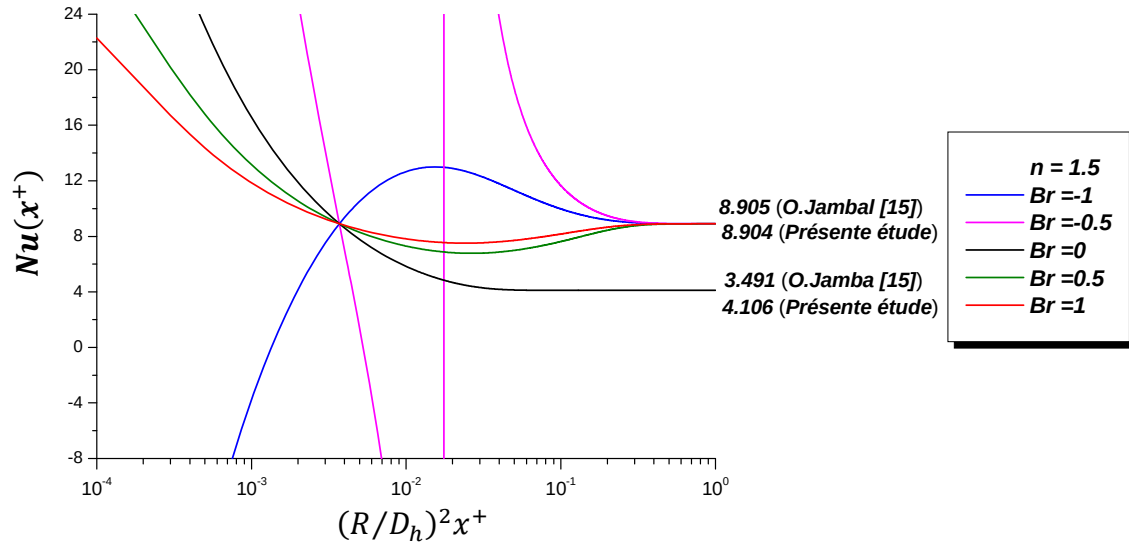


Fig. 3. 9 : L'effet du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt. ($n = 1.5$)

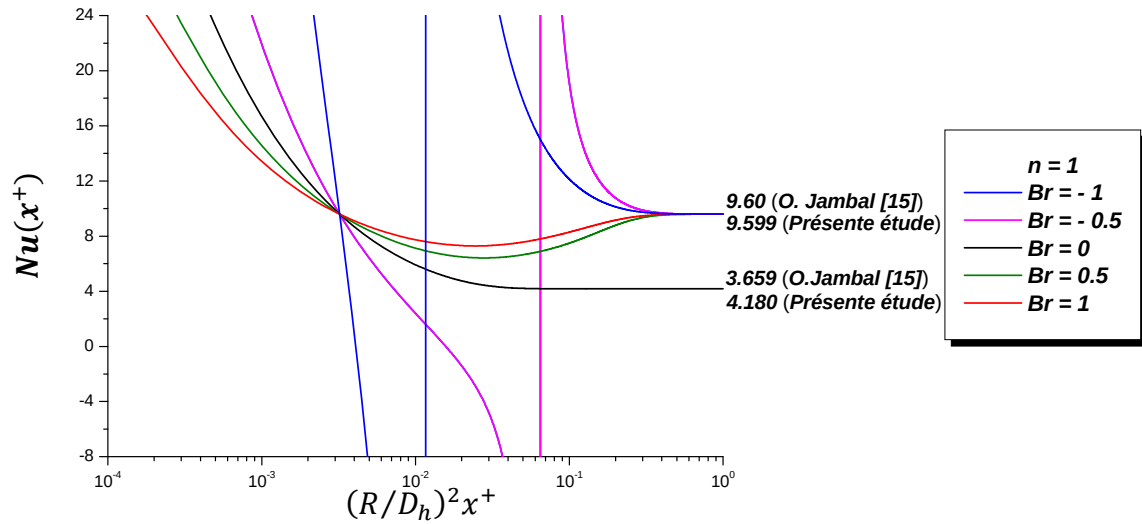


Fig. 3. 10: L'effet du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt. ($n = 1$)

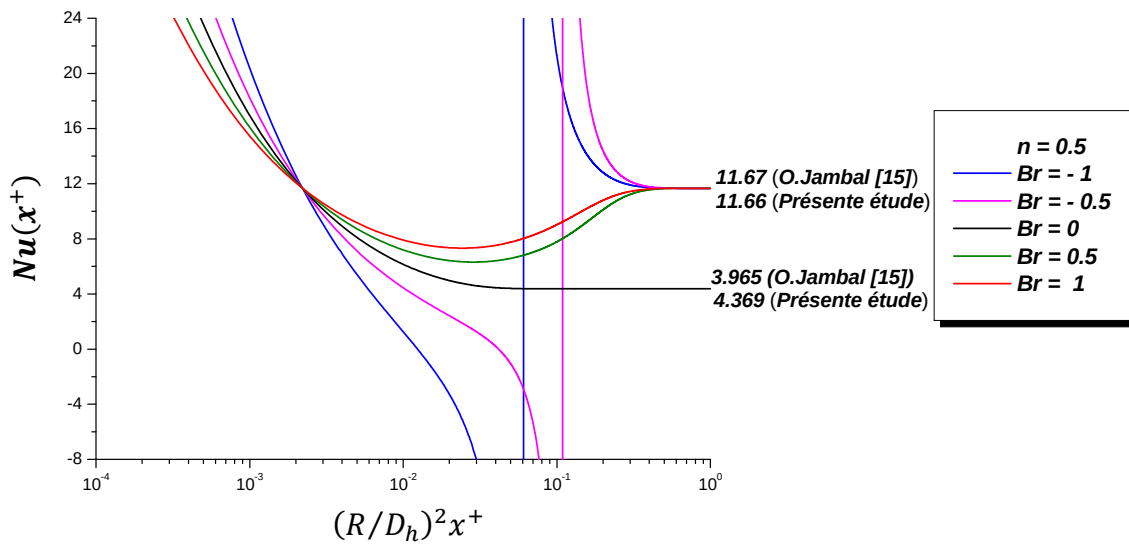


Fig. 3. 11: L'effet du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt. ($n = 0.5$)

B. la paroi est soumise à un coefficient d'échange convectif

3. 5. Introduction

En se basant sur les mêmes hypothèses du première partie avec la condition à la paroi différente, dans ce cas on va prendre un coefficient d'échange (h_e) avec le milieu extérieur, le nombre de Biot est le paramètre qu'on va étudier son influence sur l'évolution du nombre de Nusselt.

3.6. Description et Formulation du problème:

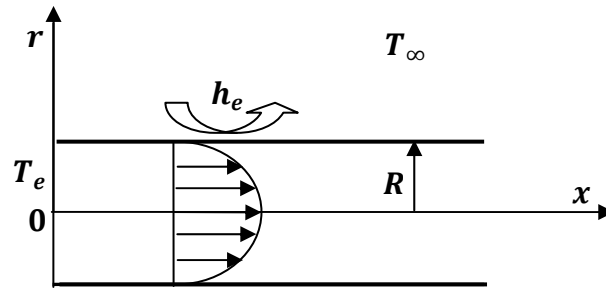


Fig. 3. 12: La géométrie d'étude

Le problème peut être formulé comme suite:

L'équation d'énergie :

$$\frac{u(r)}{\alpha_f} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{k} \tau_{rx} \frac{du}{dr} \quad (3.28a)$$

Les conditions aux limites sont :

A l'entrée du conduit:

$$T(r, x)|_{x=0} = T_e \quad (3.28b)$$

Au centre du conduit:

$$\left. \frac{\partial T(r, x)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (3.28c)$$

A la paroi:

$$k \frac{\partial T}{\partial r} + h_e (T(x, R) - T_\infty) = 0 \quad (3.28d)$$

Introduisant les nombres adimensionnels suivants :

$$x^+ = \frac{x\alpha_f}{\bar{u}R^2}; Bi = \frac{h_e R}{k_s}; r^+ = \frac{r}{R}; u^+ = \frac{u}{\bar{u}}; \theta = \frac{T-T_\infty}{T_e-T_\infty}; Br = \frac{m(\bar{u}/R)^{(n+1)}}{k(\Delta T/R^2)}$$

L'équation (4.1a) devient :

$$u^+ \frac{\partial \theta}{\partial x^+} = \frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial \theta}{\partial r^+} \right) + Br \left(\frac{3n+1}{n} \right)^{(n+1)} (r^+)^{\left(\frac{1+n}{n} \right)} \quad (3.29a)$$

Les conditions aux limites sont :

A l'entrée:

$$\theta(0, r^+) = 1 \quad (3.29b)$$

Condition de symétrie :

$$\frac{\partial \theta}{\partial r^+} = 0 \quad (3.29c)$$

A la paroi :

$$\frac{\partial \theta}{\partial r^+} + Bi\theta = 0 \quad (3.29d)$$

3. 7. Résolution du problème

En décompose la fonction $\theta(x^+, r^+)$ en une somme de deux fonctions $\theta_1(x^+, r^+)$ et $\theta_\infty(r^+)$:

$$\theta(x^+, r^+) = \theta_1(x^+, r^+) + \theta_\infty(r^+) \quad (3.30)$$

avec :

$$\lim_{x^+ \rightarrow \infty} \theta(x^+, r^+) = \theta_\infty(r^+) \quad (3.30a)$$

$$\lim_{x^+ \rightarrow \infty} \theta_1(x^+, r^+) = 0 \quad (3.30b)$$

A la limite l'équation (3.29a) devient :

$$\frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial \theta}{\partial r^+} \right) = -Br \left(\frac{3n+1}{n} \right)^{(n+1)} (r^+)^{(n+1/n)} \quad (3.31a)$$

avec les conditions aux limites suivantes:

$$\left. \frac{\partial \theta_\infty(r^+)}{\partial r^+} \right|_{r^+=0} = 0 \quad (3.31b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r^+} + Bi\theta = 0, \quad r^+ = 1 \quad (3.31c)$$

La résolution du système (3.31) est:

$$\theta_{\infty}(r^+) = Br \left(\frac{3n+1}{n} \right)^{n-1} \left[1 - r^{+(3n+1)/n} \right] + \frac{Br}{Bi} \left(\frac{3n+1}{n} \right)^n \quad (3.32)$$

En introduisant l'équation (3.30) dans l'équation (3.29a) on obtient:

$$u^+ \frac{\partial \theta_1}{\partial x^+} = \frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial \theta_1}{\partial r^+} \right) \quad (3.33a)$$

avec les conditions aux limites suivantes:

A l'entrée:

$$\theta_1(0, r^+) = 1 \quad (3.33b)$$

Condition de symétrie :

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial r^+} = 0 \quad (3.33c)$$

A la paroi :

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial r^+} + Bi\theta_1 = 0 \quad (3.33d)$$

Introduisant dans le système (3.33) la transformée de Laplace par rapport au variable x^+ :

$$\bar{\theta}_1(r^+, s) = \int_0^1 e^{-sx^+} \bar{\theta}_1(x^+, r^+) dx \quad (3.34)$$

Le problème (3.33) s'écrit :

$$\frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial r^+} \right) - u^+(s\bar{\theta}_1 - 1) = 0 \quad (3.35a)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial r^+} \Big|_{r^+=0} = 0 \quad (3.35b)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial r^+} \Big|_{r^+=1} + Bi\bar{\theta}_1 \Big|_{r^+=1} = 0 \quad (3.35c)$$

La forme variationnelle de l'équation (3.35a) est:

$$I = \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial r^+} \right)^2 + su^+ \bar{\theta}_1^2 - 2u^+ \bar{\theta}_1 \right] r^+ dr^+ + Bi \bar{\theta}_1^2 \quad (3.36)$$

θ_1 : est la solution approchée du problème (3.35), elle est construite d'une série des fonctions de Bessel, de la première espèce et d'ordre zéro.

$$\bar{\theta}_1(r^+, s) = \sum_{i=1}^N c_i(p) J_0(\sigma_i r^+) \quad (3.37)$$

σ_i : racines de l'équation transcendante: $BiJ_0(\sigma) - \sigma J_1(\sigma) = 0$, déduite de la condition aux limites (3.35c).

Introduisant l'équation (3.37) dans la forme variationnelle (3.36) puis optimisons (I) pour déterminer les coefficients $C_i(s)$, on a:

$$\frac{\partial I(c_1, c_2, \dots, c_N)}{\partial c_i} = 0 \quad (3.38)$$

Nous obtenons un système algébrique de " N " équations:

$$[A][C] = [b] \quad (3.39a)$$

La matrice $[A]$ peut être écrite sous la forme:

$$[A] = [A^*] + s[D] \quad (3.39b)$$

Les coefficients $C_i(s)$ sont donnés par:

$$c_i(s) = \frac{B_i}{s + \lambda_i} \quad (3.40)$$

avec :

β_i : sont les éléments du vecteur $[B] = [b][D]^{-1}$

λ_i : sont les valeurs propres de la matrice $[A^*][D]^{-1}$.

Les éléments des matrices A , D et de vecteur b , sont données par les relations suivantes:

$$a_{ij} = \int_0^1 [\sigma_i \sigma_j J_1(\sigma_i r^+) J_1(\sigma_j r^+)] r^+ dr^+ + Bi J_0(\sigma_i r^+) J_0(\sigma_j r^+) \quad (3.41a)$$

$$d_{ij} = \int_0^1 \left[\left(\frac{(1+3n)}{(1+n)} \right) \left(1 - r^{+(n+1/n)} \right) J_0(\sigma_i r^+) J_0(\sigma_j r^+) \right] r^+ dr^+ \quad (3.41b)$$

$$b_i = \int_0^1 \left(\frac{(1+3n)}{(1+n)} \right) \left(1 - r^{+(n+1/n)} \right) J_0(\sigma_i r^+) r^+ dr^+ \quad (3.41c)$$

Les intégrales ci-dessus sont évaluées numériquement.

D'où la solution au domaine de Laplace est:

$$\bar{\theta}_1(r^+, s) = \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{s + \lambda_i} J_0(\sigma_i r^+) \quad (3.42a)$$

Par le retour vers le repère original, la distribution de la température dans le fluide est donnée par:

$$\theta_1(x^+, r^+) = \sum_{i=1}^N \beta_i J_0(\sigma_i r^+) \exp(-\lambda_i x^+) \quad (3.42b)$$

La solution générale du problème (3.29) est:

$$\begin{aligned} \theta(x^+, r^+) = \sum_{i=1}^N \beta_i J_0(\sigma_i r^+) \exp(-\lambda_i x^+) + Br \left(\frac{3n+1}{n} \right)^{n-1} [1 - r^{+(3n+1)/n}] \\ + \frac{Br}{Bi} \left(\frac{3n+1}{n} \right)^n \end{aligned} \quad (3.43)$$

Après l'obtention de la distribution de température, on peut déterminer la température axiale et de mélange, ainsi que le nombre de Nusselt.

La température axiale est donné par:

$$\theta_c(x^+, 0) = \sum_{i=1}^N \beta_i \exp(-\lambda_i x^+) + Br \left(\frac{3n+1}{n} \right)^{n-1} + \frac{Br}{Bi} \left(\frac{3n+1}{n} \right)^n \quad (3.44)$$

D'après sa définition, la température de mélange est donné par:

$$\theta_m(x^+) = \theta_{m\infty}(x^+) + \theta_{m1}(x^+) \quad (3.45a)$$

avec:

$$\theta_{m1}(x^+) = \frac{\int_0^1 u^+(r^+) \theta(x^+, r^+) r^+ dr^+}{\int_0^1 u^+(r^+) r^+ dr^+} \quad (3.45b)$$

$$\theta_{m1}(x^+) = 2 \sum_{i=1}^N \beta_i \cdot b(i) \cdot \exp(-\lambda_i x^+) \quad (3.45c)$$

$$\theta_{m\infty} = \frac{Br}{Bi} \left(\frac{3n+1}{n} \right)^n + 2Br \left(\frac{3n+1}{n} \right)^n \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{3n+1} - \frac{n}{5n+1} + \frac{n}{6n+2} \right) \quad (3.45d)$$

Le nombre de Nusselt local est calculé d'après la formule suivante:

$$Nu(x^+) = 2 \frac{\left. \frac{\partial \theta}{\partial r^+} \right|_{r^+=1}}{\theta_w - \theta_m} \quad (3.46a)$$

avec:

$$\theta_w(x^+) = \theta_{w1}(x^+) + \theta_{\infty}(1) \quad (3.46b)$$

$$\theta_w(x^+) = \sum_{i=1}^N B_i J_0(\sigma_i) \exp(-\lambda_i x^+) + \frac{Br}{Bi} \left(\frac{3n+1}{n} \right)^n \quad (3.46c)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r^+} \right|_{r^+=1} = - \sum_{i=1}^N \beta_i \cdot \sigma_i \cdot J_1(\sigma_i) \exp(-\lambda_i x^+) - Br \left(\frac{3n+1}{n} \right)^n \quad (3.46d)$$

3. 8. Racines de l'équation transcendante et valeurs propres:

En variant le type de fluide, les tableaux suivants montrent les racines de l'équation transcendante, et les valeurs propres pour différents valeur du nombre de Biot.

Tableau 3. 6: racines de l'équation transcendante et valeurs propres. ($Bi = 100$)

Indice de loi de puissance			$n= 1/3$	$n= 1$	$n= 3$
Biot = 100	i	σ_i	μ_i	μ_i	μ_i
	1	2.380902	6.159101	7.201983	8.404565
	2	5.465207	35.90767	44.12958	52.42833
	3	8.567831	91.35056	112.8867	134.5108
	4	11.67474	172.4963	213.4961	254.6401
	5	14.78342	279.3571	345.9732	412.8218

Tableau 3. 7: racines de l'équation transcendante et valeurs propres. ($Bi = 10$)

Indice de loi de puissance			$n= 1/3$	$n= 1$	$n= 3$
Biot = 10	i	σ_i	μ_i	μ_i	μ_i
	1	2.179497	5.331284	6.334040	7.446078
	2	5.033212	32.55103	40.50803	48.38149
	3	7.956883	84.57836	105.4869	126.1947
	4	10.93633	161.7602	201.6454	241.2626
	5	13.95803	264.2856	329.1906	393.8067

Tableau 3. 8: racines de l'équation transcendante et valeurs propres. ($Bi = 0.1$)

Indice de loi de puissance			$n= 1/3$	$n= 1$	$n= 3$
Biot = 0.1	i	σ_i	μ_i	μ_i	μ_i
	1	0.441681	0.288116	0.382194	0.476051
	2	3.857706	21.10663	26.18242	31.16398
	3	7.029825	68.07968	84.43658	100.6837
	4	10.18330	140.9996	174.7970	208.5388
	5	13.33119	239.8125	297.2120	354.6582

3. 9. Validation du nombre de Nusselt pour différents valeurs du nombre de Biot

Ce problème a été discuté dans les recherches faites par V. Javeri [5] pour un écoulement fluide newtonien avec les mêmes conditions à la paroi et dans une conduite circulaire. Le tableau suivant montre une comparaison entre les résultats obtenus par la présente étude et ceux de la référence précédente.

Nous remarquons que, à l'entrée de la conduite il y a une large différence entre les résultats, puis avec l'augmentation de la distance axiale, les résultats convergent vers ceux de la référence.

Tableau 3.10. Comparaison du nombre de Nusselt local pour différents valeurs du nombre

$\left(\frac{R}{D_h}\right)^2 x^+$	Biot=2		Biot=5		Biot=10		Biot=100		Biot $\rightarrow \infty$	
	<i>Présente étude</i>	<i>Réf[5]</i>	<i>Présente étude</i>	<i>Réf[5]</i>	<i>Présente étude</i>	<i>Réf[5]</i>	<i>Présente étude</i>	<i>Réf[5]</i>	<i>Présente étude</i>	<i>Réf[5]</i>
0.001	27.64	20.55	26.94	18.68	25.69	18.12	19.82	15.87	18.30	16.25
0.002	20.03	15.82	19.38	14.75	18.30	14.31	14.26	12.98	13.41	12.81
0.005	12.93	11.43	12.34	10.77	11.64	10.40	9.215	9.621	8.840	9.395
0.01	9.398	8.938	8.863	8.468	8.226	8.154	6.777	7.558	6.576	7.470
0.02	7.105	7.112	6.595	6.705	6.119	6.469	5.237	6.061	5.128	6.002
0.05	5.558	5.389	5.089	5.110	4.767	4.924	4.324	4.672	4.277	4.641
0.1	5.259	4.574	4.818	4.329	4.549	4.193	4.223	4.026	4.183	4.005
0.2	5.246	4.120	4.801	3.935	4.538	3.838	4.221	3.722	4.181	3.710
0.5	5.246	4.001	4.801	3.845	4.538	3.763	4.221	3.669	4.181	3.657
1	5.246	4.000	4.801	3.844	4.538	3.763	4.221	3.666	4.181	3.657

La figure ci-dessus montre l'évolution du nombre de Nusselt d'un écoulement fluide newtonien dans un conduit circulaire, la figure présente les résultats de la présente étude.

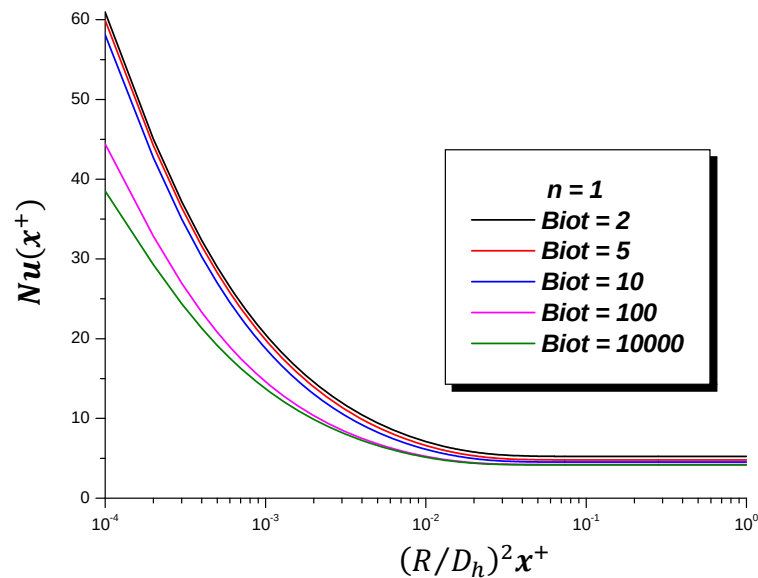


Fig. 3.13: Evolution du nombre de Nusselt pour différents valeurs du nombre de Biot

3. 10. Distribution de la température axiale et de mélange:

Nous allons présenter dans les figures suivantes la distribution de la température axiale et de mélange, en variant le nombre de Biot, pour les différents fluides considérés, en fonction de la distance axiale x^+ . L'effet de la dissipation visqueuse est négligé.

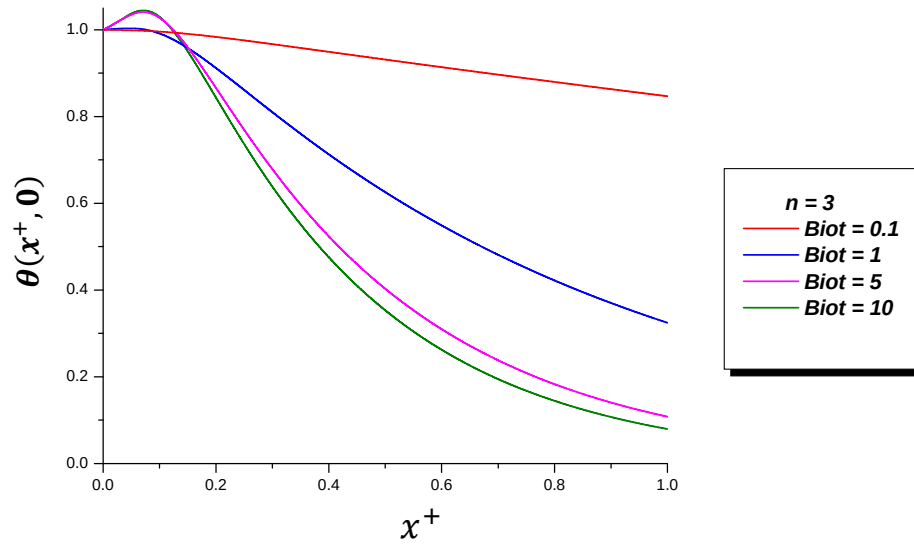


Fig. 3. 14: Distribution de la température axiale d'un fluide dilatant. ($Br = 0$)

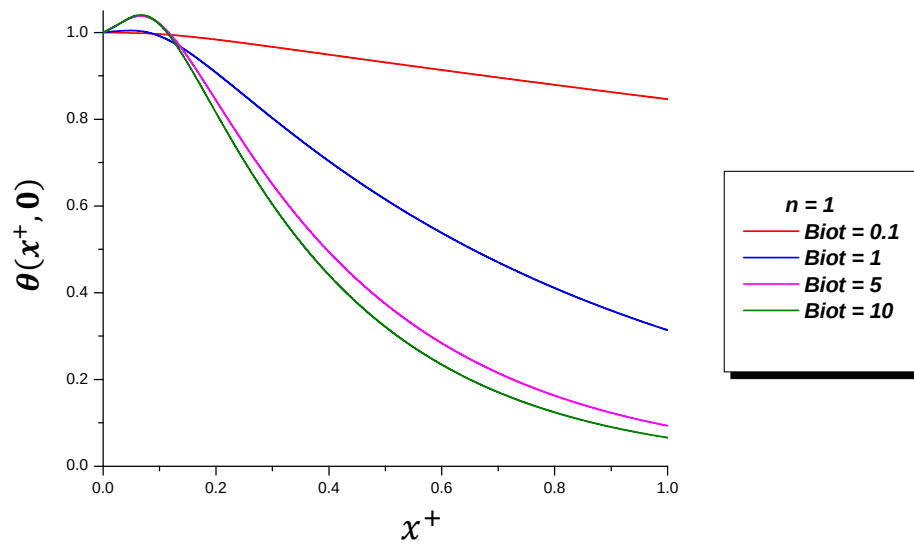


Fig. 3. 15: Distribution de la température axiale, d'un fluide Newtonien. ($Br = 0$)

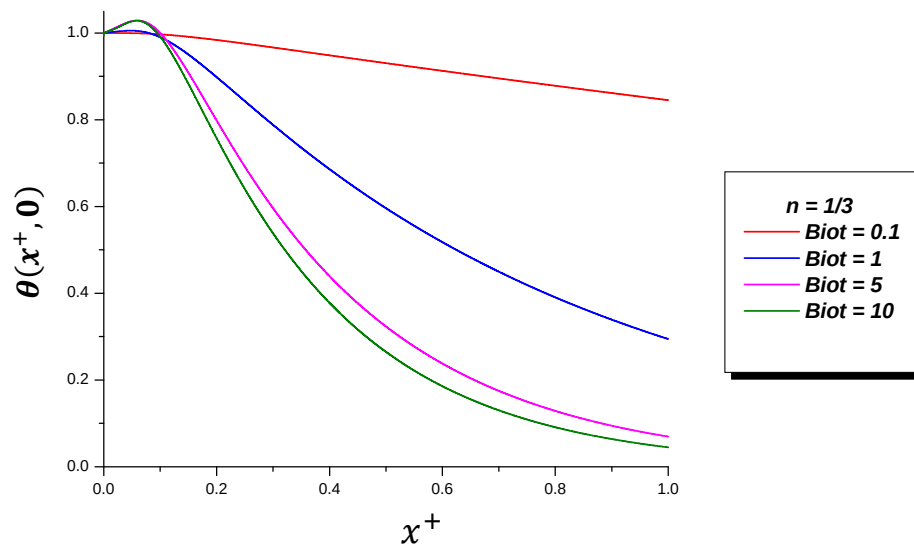


Fig. 3. 16: Distribution de la température axiale, d'un fluide pseudoplastique. ($Br = 0$)

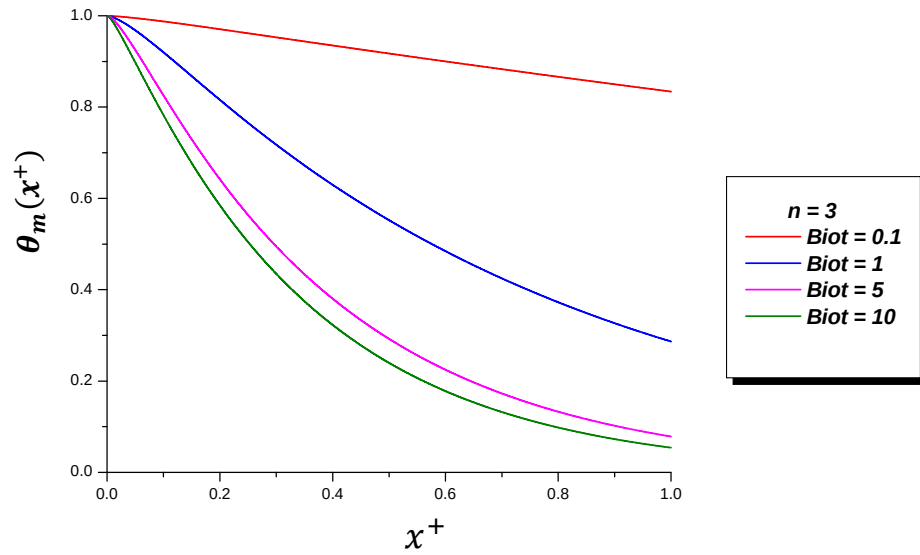


Fig. 3. 17: Distribution de la température de mélange, d'un fluide dilatant.

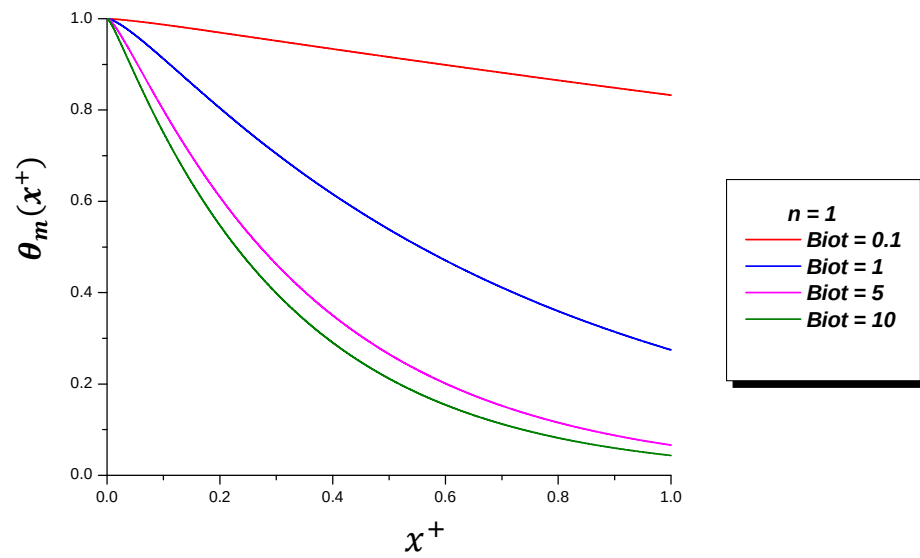


Fig. 3. 18: Distribution de la température de mélange, d'un fluide Newtonien.

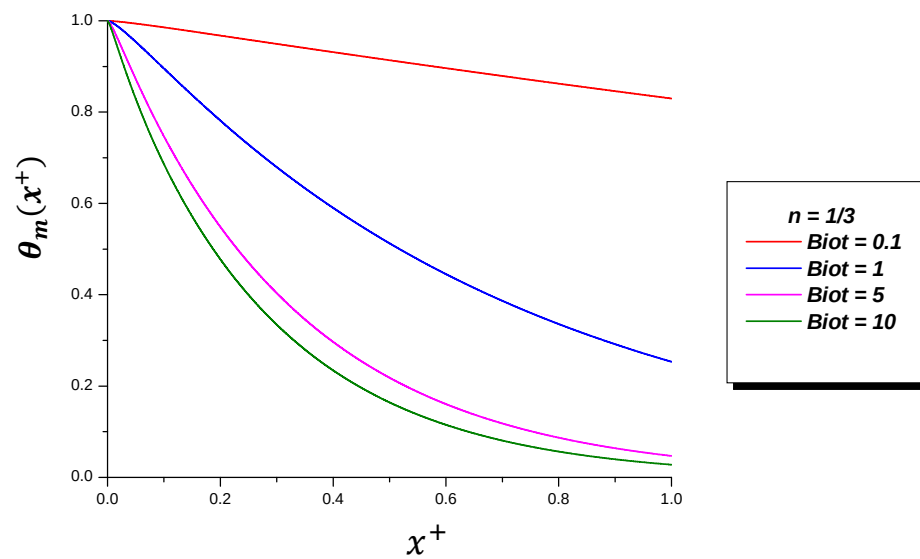


Fig. 3. 19: Distribution de la température de mélange, d'un fluide pseudoplastique.

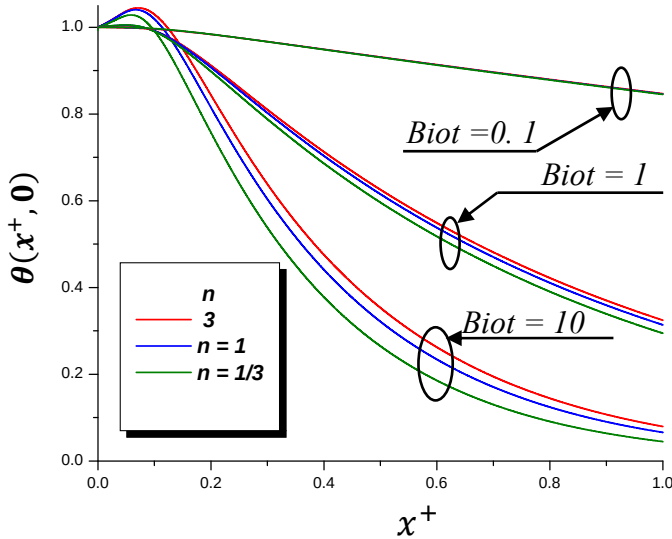


Fig. 3. 20: Distribution de la température axiale, pour différents fluides et valeurs du nombre de Biot.

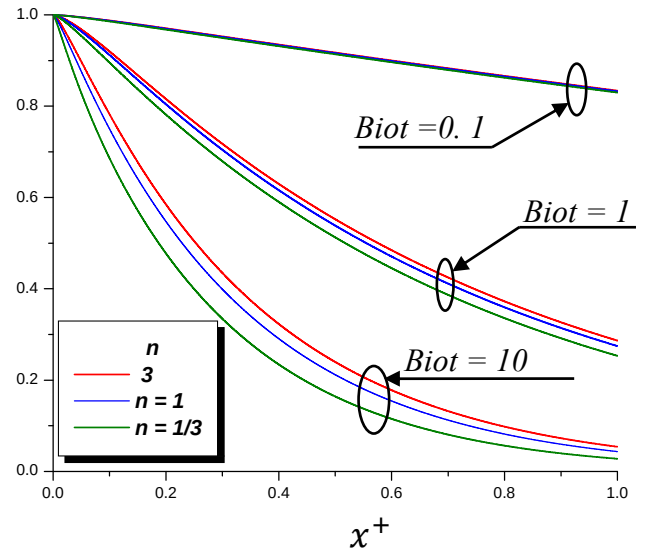


Fig. 3. 21: Distribution de la température de mélange, pour différents fluides et valeurs du nombre de Biot.

En variant le nombre de Biot, les figures (3.14), (3.15) et (3.16) représentent la distribution de la température axiale en fonction de la distance axiale x^+ , pour chaque type de fluide.

Pour la valeur la plus élevée du nombre de Biot ($Biot = 10$), la température axiale des trois fluides: newtonien, dilatant et pseudo plastique diminue rapidement, ce qui indique un échange important avec le milieu extérieur, en particulier le fluide pseudo plastique.

Pour la valeur moyenne du nombre de Biot ($Biot = 1$), le même comportement est remarqué mais la température diminue lentement.

Pour la très faible valeur du nombre de Biot ($Biot = 0.1$), les trois fluides se comportent de la même façon et leurs courbes représentatifs sont confondues. La température baisse très lentement, ce qui indique un très faible échange fluide - le milieu extérieur.

Dans les figures (3.17), (3.18) et (3.19) la distribution de la température de mélange en fonction de la distance axiale pour chaque fluide considéré, est représentée pour les mêmes valeurs précédentes du nombre de Biot. Nous remarquons que, pour la valeur de Biot élevée ($Biot=10$) la température du mélange baisse plus rapide. Pour la valeur faible du nombre de Biot ($Biot = 0.1$), la température du mélange diminue très lentement le long de la conduite.

Les figures (3.20) et (3.21) montrent une comparaison entre la température axiale et de mélange pour les trois type de fluides considérés, en variant le nombre de Biot, nous constatons que la température axiale et de mélange du fluide pseudo plastique diminuent rapidement par rapport au fluide Newtonien où dilatant.

3. 11. Evolution du nombre de Nusselt:

Nous allons dans ce qui suit, présenté l'évolution du nombre de Nusselt local en fonction de la distance axiale. Les figures (3.22) et (3.23) montrent l'évolution du nombre de Nusselt pour les fluides considérés. Nous remarquons que, pour la grande valeur du nombre de Biot ($Biot=10$), le fluide pseudo plastique a une valeur asymptotique du nombre de Nusselt vaut 4.89, plus grande que celles des fluides newtonien 4.53, et dilatant 4.37.

Pour la valeur modérée du nombre de Biot ($Biot=1$), Nous remarquons que la valeur asymptotique du fluide pseudo plastique est plus grande que celle correspond au nombre de Biot = 10, elle est égale à 5.93, les mêmes remarque sont constatées pour les autres fluides.

Le même comportement est constaté pour la faible valeur du nombre de Biot ($Biot=0.1$), la valeur asymptotique pour le fluide pseudo plastique est égale à 6.34, elle est plus élevée par rapport aux valeurs précédentes, ce qui indique que la valeur asymptotique du nombre de Nusselt est inversement proportionnelle à la valeur du nombre de Biot. Si le nombre de Biot tend vers l'infinie, la valeur asymptotique du nombre de Nusselt de chaque fluide, est égale à celle de la condition de température constante imposée à la paroi.

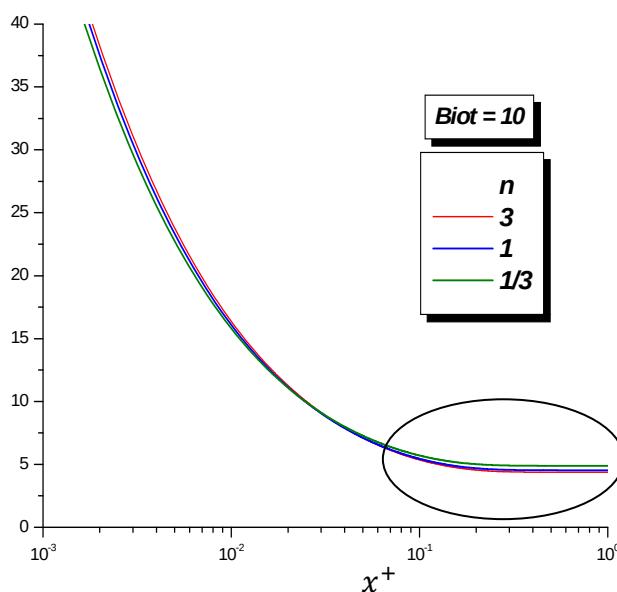


Fig. 3. 22a: Evolution du nombre de Nusselt local, pour différents fluides et $Biot = 10$.

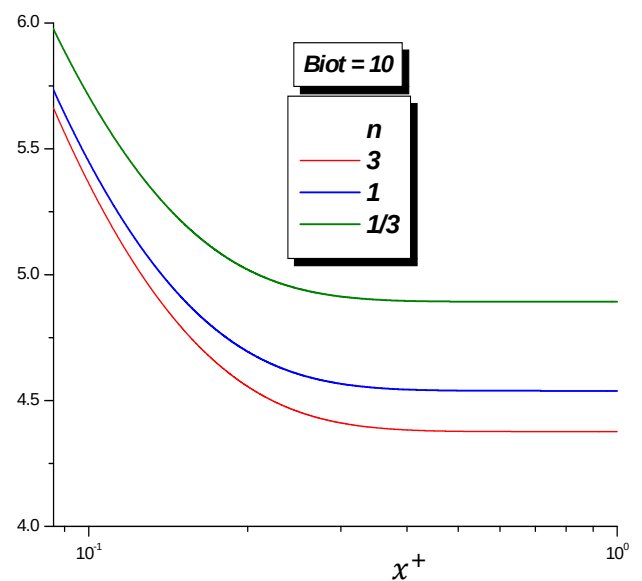


Fig. 3. 22b: Agrandissement de la zone Encerclée de la figure (3.22a).

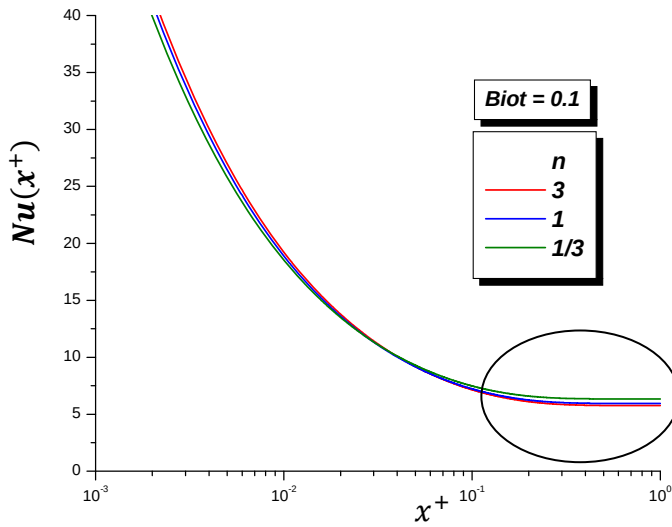


Fig. 3. 23a: Evolution du nombre de Nusselt local, pour différents fluides et Biot = 10.

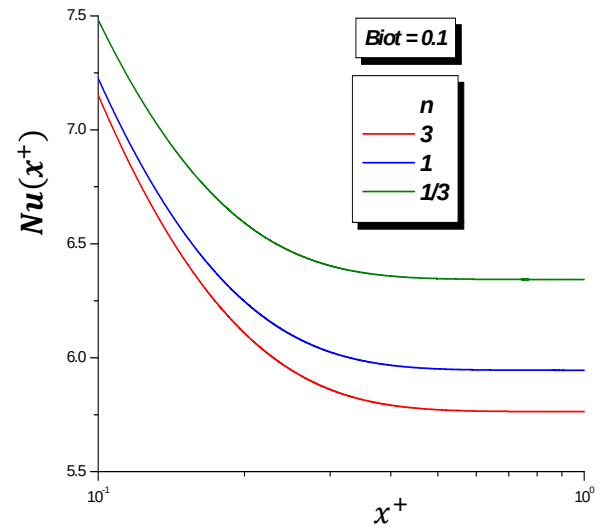


Fig. 3. 23b: Agrandissement de la zone Encerclée de la figure (3.23a).

En variant le nombre de Brinkman, nous allons présenter l'évolution du nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale $(R/D_h)^2 x^+$, avec la considération de l'effet de la dissipation visqueuse, pour les trois types de fluide considérés. Et pour chaque valeur on fait varier cinq fois la valeur du nombre de Brinkman. Les figures (3.24), (3.25) et (3.26) montrent une similitude dans l'allure générale des courbes avec le cas de la température constante imposée à la paroi, et cela est justifié par la valeur élevée du nombre de Biot ($Bi = 100$). On distingue deux cas principaux :

La première correspond aux valeurs positives du nombre de Brinkman ($Br > 0$), pour ses valeurs le nombre de Nusselt est positif et présente des valeurs minimales pour une certaine valeur axiale, puis converge vers les valeurs asymptotiques qui sont montrées sur les figures.

Le deuxième cas correspond aux valeurs négatives du nombre de Brinkman, Nous constatons que pour le fluide newtonien et pseudo plastique le nombre de Nusselt varie de moins l'infini jusqu'à plus l'infini, puis converge vers les valeurs asymptotiques pour chaque fluide. Par contre, le fluide dilatant a un nombre de Nusselt qui varie de moins l'infini jusqu'à une valeur maximale positive, puis converge vers sa valeur asymptotique.

Nous remarquons aussi l'existence d'un point fixe ne dépend pas du nombre de Brinkman dans la représentation graphique du nombre de Nusselt.

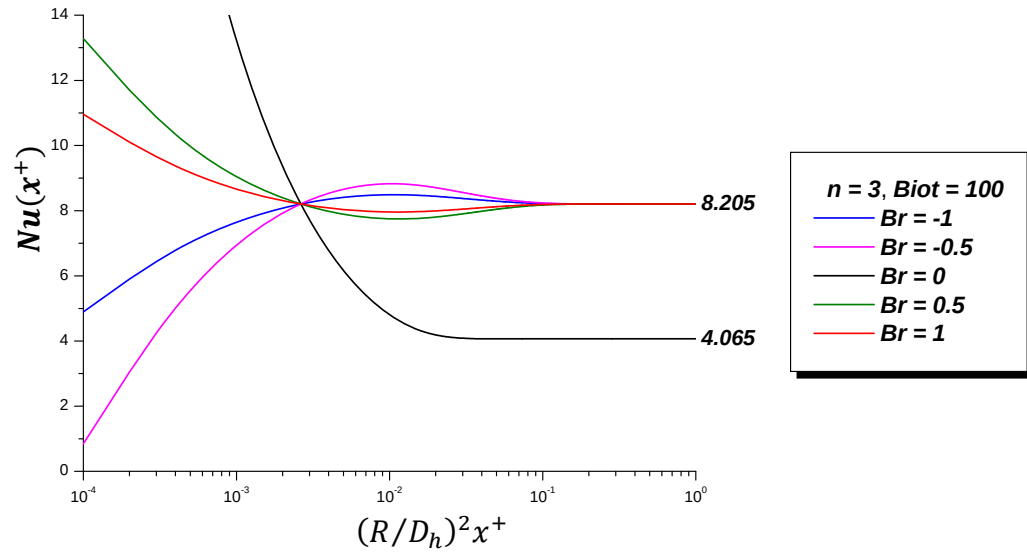


Fig. 3. 24: Influence du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt.

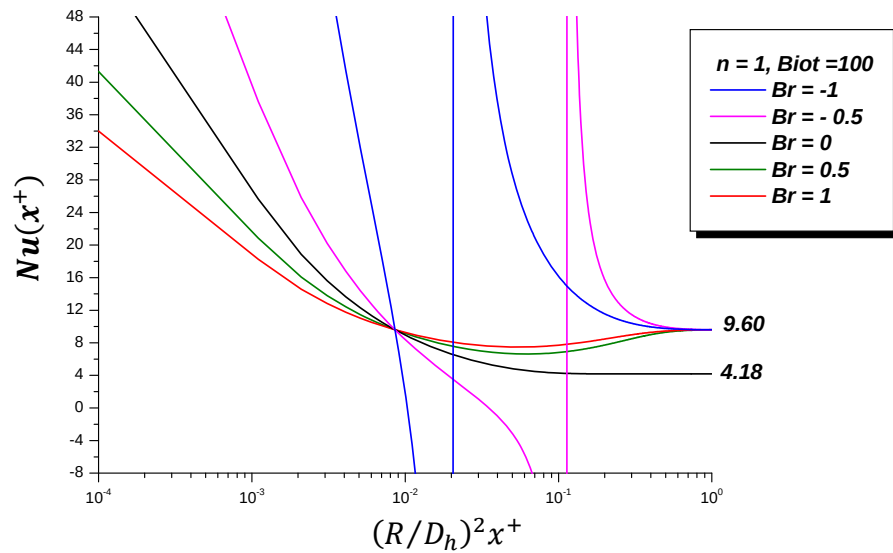


Fig. 3. 25: Influence du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt.

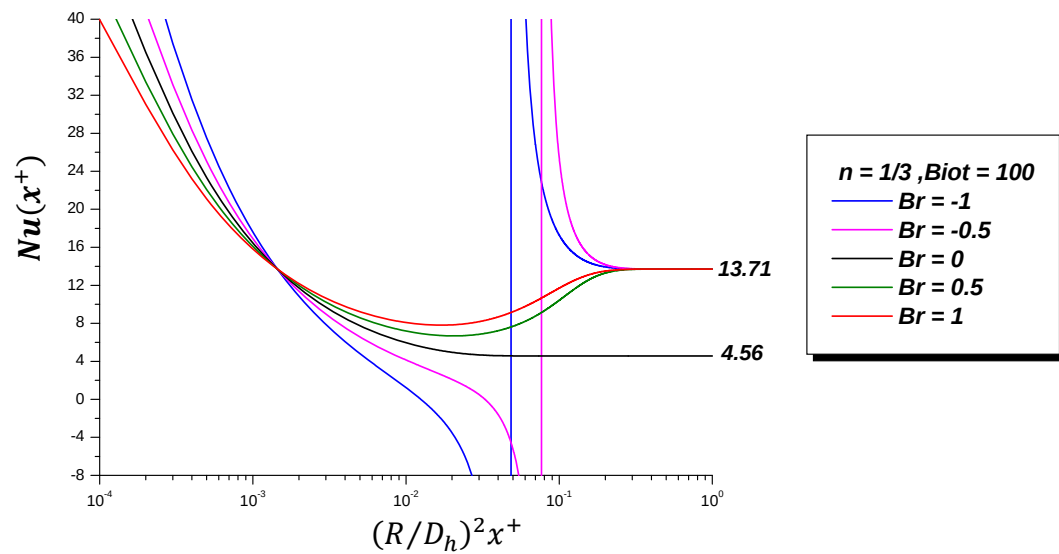


Fig. 3. 26: Influence du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt.

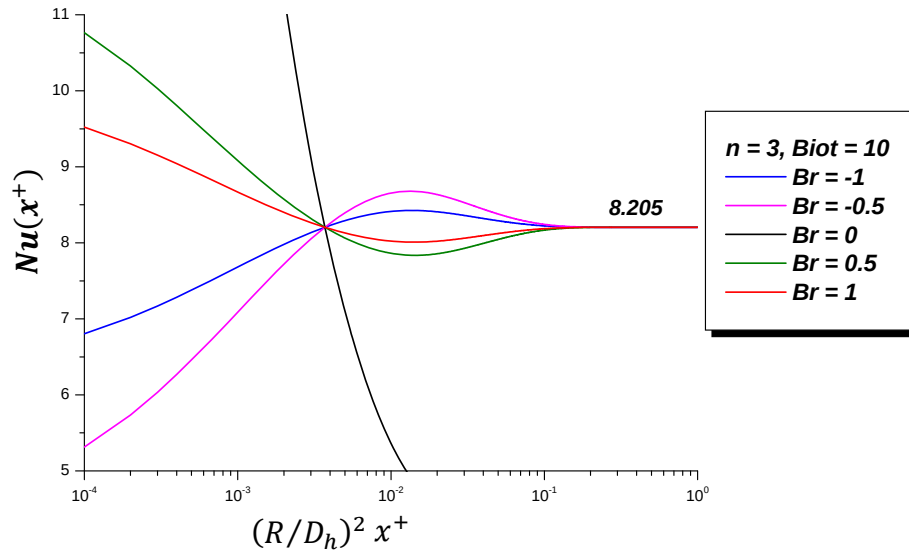


Fig. 3. 27: Influence du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt.

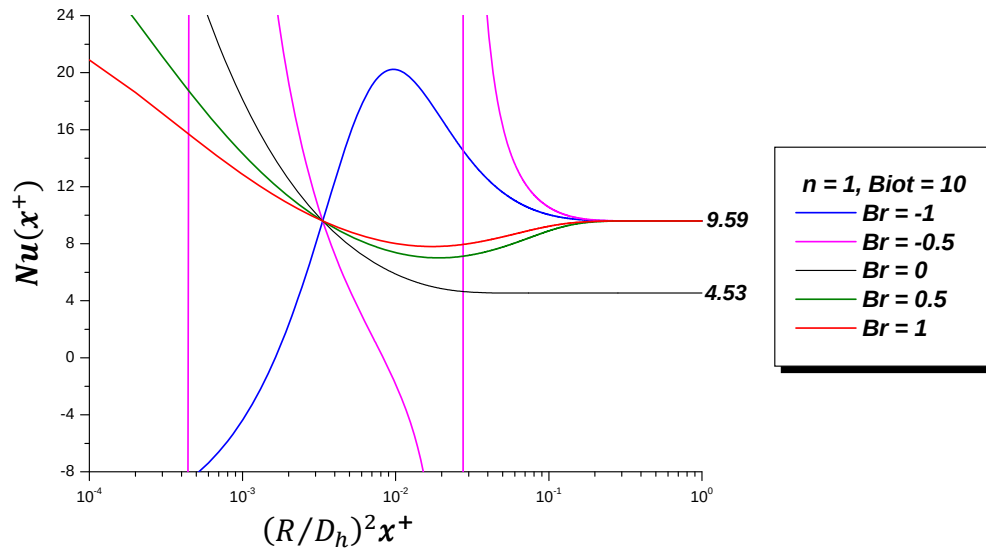


Fig. 3. 28: Influence du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt.

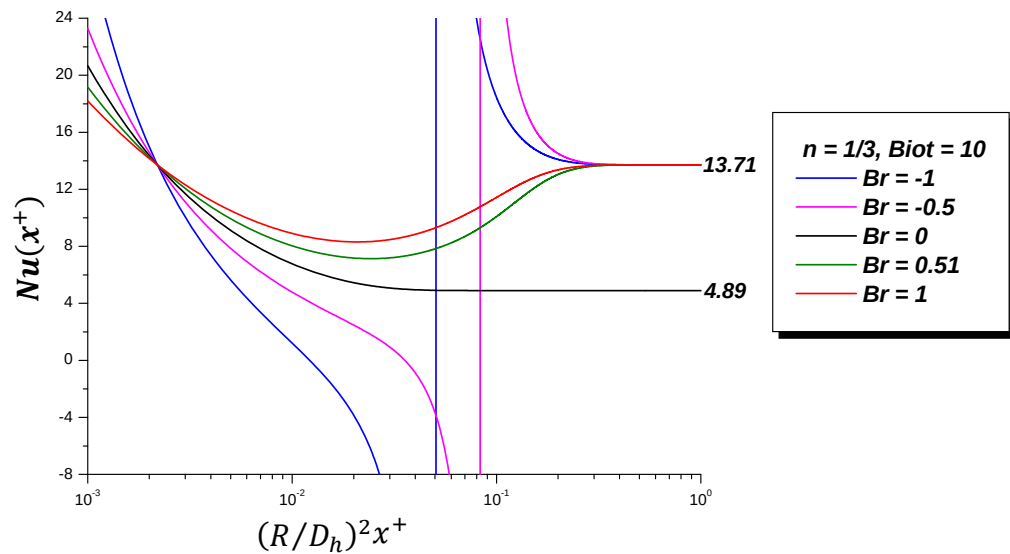


Fig. 3. 29: Influence du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt.

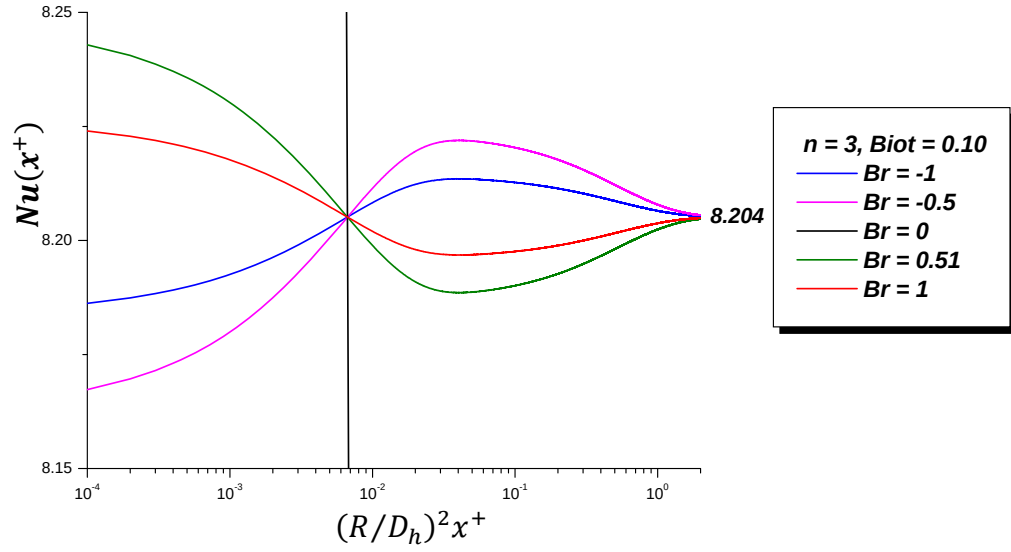


Fig. 3. 30: Influence du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt.

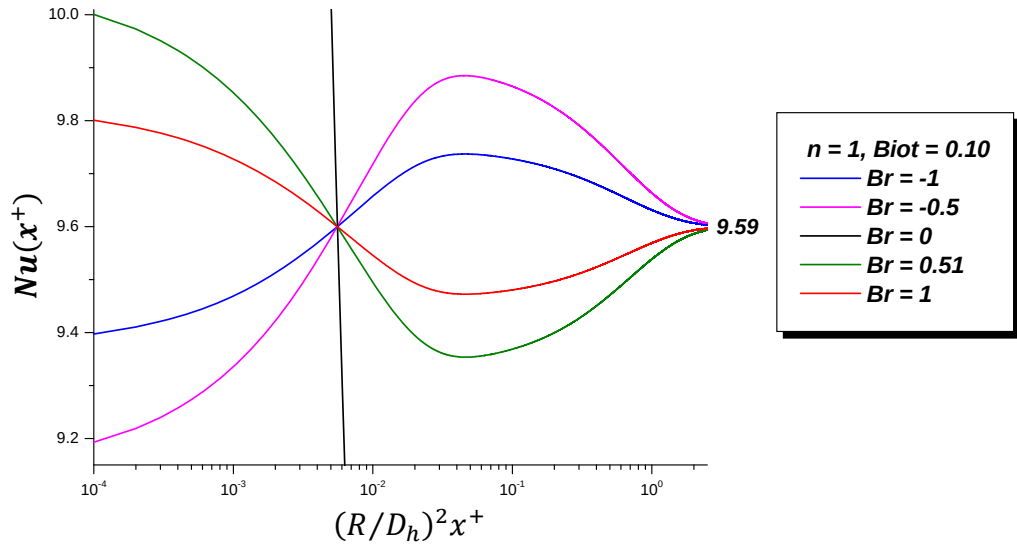


Fig. 3. 31: Influence du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt.

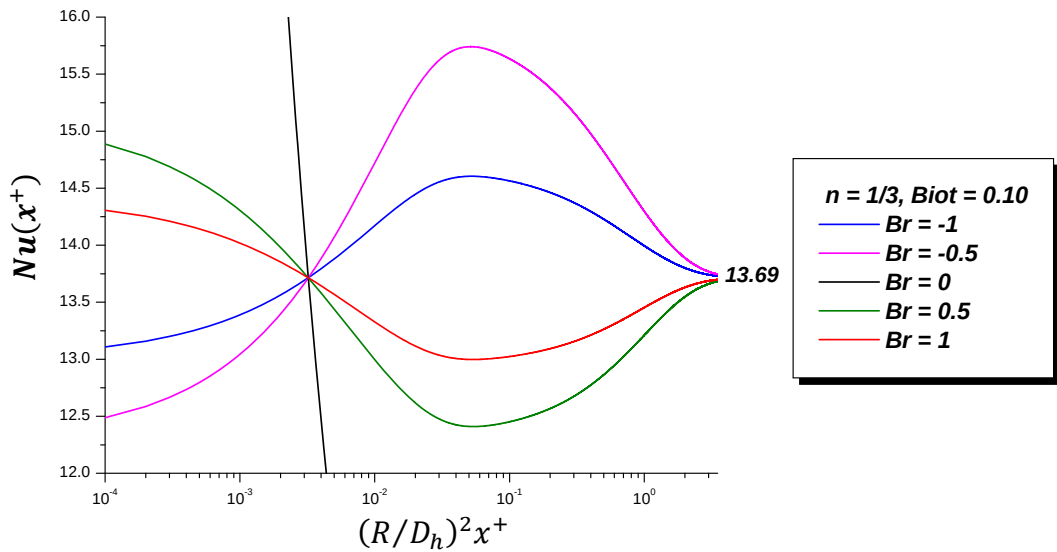


Fig. 3. 32: Influence du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt.

Les figures (3.27), (3.28) et (3.29) montrent l'évolution du nombre de Nusselt pour la valeur du nombre de Biot intermédiaire ($Biot=10$), on constate presque les mêmes comportements précédentes pour les trois types de fluide quelque soit la valeur du nombre de Brinkman.

Les figures (3.30), (3.31) et (3.32) montrent une nouvelle forme des courbes qui ressemblent à des fourchettes dans le cas de la faible valeur du nombre de Biot ($Biot=0.10$). Pour le fluide pseudo plastique la fourchette est large à l'entrée du canal par rapport à celles du fluide newtonien ou dilatant, le point fixe remarqué est devient un point de symétrie pour les courbes, on constate aussi que le nombre de Nusselt ne présente aucune valeur négative. Les valeurs asymptotiques du nombre de Nusselt dans le cas de $Br \neq 0$, pour chaque fluide sont égales pour les trois valeurs du nombre de Biot choisis, ce qui montre que le nombre de Biot n'a aucune influence sur la valeur asymptotique du nombre de Nusselt si l'effet de la dissipation visqueuse est pris en compte. Cette remarque a été constatée dans les travaux de A. Barletta [13], dans le cas des conduites circulaires d'un écoulement newtonien.

3.12. Conclusion:

Dans le cas de la paroi soumise à une température constante, l'effet de la dissipation visqueuse ne peut pas être négligé, dans la région du régime établi. Par exemple la valeur asymptotique du nombre de Nusselt d'un fluide Newtonien ($n = 1$), pour $Br = 0$ est de $N_{\infty} = 4.1806$, par contre cette valeur vaut $N_{\infty} = 9.599$ pour $Br \neq 0$.

La valeur asymptotique du nombre de Nusselt pour le fluide pseudoplastique, est plus élevée par rapport aux autres fluides, quelque soit la valeur du nombre de Brinkman.

Si l'effet de la dissipation visqueuse n'est pas négligé, la valeur asymptotique du nombre de Nusselt ne dépend pas du nombre de Brinkman

Pour le cas limite $B_i \rightarrow \infty$, les deux situations: température imposée à la paroi et paroi échangeant avec le milieu extérieur sont identiques.

Si on néglige l'effet de la dissipation visqueuse, le nombre de Biot a une influence remarquable sur la valeur asymptotique du nombre de Nusselt. La valeur asymptotique est d'autant élevée que le nombre de Biot est faible.

Si le nombre de Brinkman n'est pas nul, la valeur asymptotique du nombre de Nusselt est indépendante du nombre de Biot et du nombre de Brinkman.

CHAPITRE 4

Simulation Numérique

Par la méthode

des volumes finis

Chapitre 4

Simulation Numérique par la méthode des volumes finis

4.1. Introduction:

Les études numériques de la convection forcée laminaire dans un conduit d'un fluide non Newtonien, utilisent souvent la méthode des différences finis [15]. Dans ce chapitre nous allons présenter une étude numérique par la méthode des volumes finis, qui n'a pas été utilisée pour ce genre de problème.

On considère les mêmes hypothèses simplificatrices que précédemment.

Nous traitons les trois cas de conditions aux limites suivantes:

- soit la température est imposée (condition de Dirichlet)
- soit le flux imposé (condition de Neumann)
- soit une combinaison linéaire du flux et de la température sont imposés (condition mixte de Robin).

4.2. Mise en équation

4.2.1. Cas de la température constante imposée à la paroi:

L'équation d'énergie est:

$$\frac{u(r)}{\alpha_f} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r^p} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^p \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{k} \tau_{rx} \frac{du}{dr} ; \quad 0 \leq r \leq R \quad x > 0 \quad (4.1a)$$

les conditions aux limites sont:

La condition d'entrée:

$$T = T_e = \text{constant.} \quad 0 \leq r \leq R, \quad x = 0 \quad (4.1b)$$

La condition à la paroi:

$$T = T_w \quad r = R, \quad x > 0 \quad (4.1c)$$

La condition de symétrie:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = 0, \quad x > 0 \quad (4.1d)$$

La contrainte de cisaillement tangentielle est:

$$\tau_{xr} = \eta \left| \frac{du}{dr} \right|^{n-1} \left(\frac{du}{dr} \right) \quad (4.2)$$

Le profil de vitesse $u(r)$ est donné par la relation suivante:

$$u(r) = \bar{u} \frac{(1+(2+p)n)}{1+n} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{(1+n/n)} \right) \quad (4.3)$$

avec $p = 0$ pour les plaques parallèles et $p = 1$ pour les conduits circulaires.

On substitue l'équation (4.2) et (4.3) dans l'équation (4.1a), nous obtenons:

$$\frac{u(r)}{\alpha_f} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r^p} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^p \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \left(\frac{1+(2+p)n}{n} \right)^{(n+1)} \frac{\eta}{k} \frac{\bar{u}^{(n+1)}}{R^{(n+1)}} \left(\frac{r}{R} \right)^{\left(\frac{n+1}{n} \right)} \quad (4.4)$$

4.2.1.1. Adimensionnement des équations:

En introduisant les variables adimensionnelles suivantes:

$$x^+ = \frac{x \alpha_f}{\bar{u} R^2}; \quad \theta = \frac{T - T_w}{T_e - T_w}; \quad u(r^+) = \frac{u}{\bar{u}}; \quad r^+ = \frac{r}{R}; \quad \Delta T = T_e - T_w, \quad Br = \frac{\eta(\bar{u}/R)^{(n+1)}}{k(\Delta T/R^2)}$$

Le système (4.4) devient:

$$u^+(r^+) \frac{\partial \theta}{\partial x^+} = \frac{1}{r^{+p}} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^{+p} \frac{\partial \theta}{\partial r^+} \right) + Br \left(\frac{(1+(2+p)n)}{n} \right)^{(n+1)} (r^+)^{((n+1)/n)} \quad (4.5a)$$

$$\theta(x^+, r^+) = 1; \quad x^+ = 0 \quad (4.5b)$$

$$\theta(x^+, 1) = 0; \quad x^+ > 0 \quad (4.5c)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r^+} \right|_{r^+=0} = 0; \quad x^+ > 0 \quad (4.5d)$$

4.2.2. Cas du flux constant imposé à la paroi

Les conditions aux limites s'écrivent:

$$T = T_e = \text{constant.} \quad 0 \leq r \leq R, \quad x = 0 \quad (4.6a)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial r} = q_w \quad r = R, \quad x > 0 \quad (4.6b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = 0, \quad x > 0 \quad (4.6c)$$

4.2.2.1. Adimensionnement des équations:

En introduisant les variables adimensionnelles suivantes:

$$x^+ = \frac{x \alpha_f}{\bar{u} R^2}; \quad \theta = \frac{T - T_e}{R q_w / k}; \quad u(r^+) = \frac{u}{\bar{u}}; \quad r^+ = \frac{r}{R}; \quad Br_q = \frac{\eta(\bar{u}/R)^{(n+1)}}{(q_w/R)}$$

l'équation d'énergie devient:

$$u^+(r^+) \frac{\partial \theta}{\partial x^+} = \frac{1}{r^{+p}} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^{+p} \frac{\partial \theta}{\partial r^+} \right) + Br \left(\frac{(1+(2+p)n)}{n+1} \right)^{(n+1)} (r^+)^{((n+1)/n)} \quad (4.7a)$$

$$\theta(x^+, r^+) = 0, \quad x^+ = 0 \quad (4.7b)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r^+} \right|_{r^+=1} = 1, \quad x^+ > 0 \quad (4.7c)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r^+} \right|_{r^+=0} = 0, \quad x^+ > 0 \quad (4.7d)$$

4.2.3. Cas d'un échange convectif avec le milieu extérieur

Les conditions aux limites s'écrivent:

$$T = T_e = \text{constant.} \quad 0 \leq r \leq R, \quad x = 0 \quad (4.8a)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial r} + h_e(T(x, R) - T_\infty) = 0 \quad r = R, \quad x > 0 \quad (4.8b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = 0, \quad x > 0 \quad (4.8c)$$

4.2.3.1. Adimensionnement des équations:

En introduisant les variables adimensionnelles suivantes:

$$x^+ = \frac{x\alpha_f}{\bar{u}R^2}; Bi = \frac{h_e R}{k_s}; r^+ = \frac{r}{R}; u^+ = \frac{u}{\bar{u}}; \theta = \frac{T - T_\infty}{T_e - T_\infty}; Br = \frac{m(\bar{u}/R)^{(n+1)}}{k(\Delta T/R^2)}$$

$$u^+(r^+) \frac{\partial \theta}{\partial x^+} = \frac{1}{r^{+p}} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^{+p} \frac{\partial \theta}{\partial r^+} \right) + Br \left(\frac{(1+(2+p)n)}{n+1} \right)^{(n+1)} (r^+)^{((n+1)/n)} \quad (4.9a)$$

$$\theta(0, r^+) = 1 \quad (4.9b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r^+} = 0 \quad r^+ = 0 \quad (4.9c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r^+} + Bi\theta = 0 \quad r^+ = 1 \quad (4.9d)$$

4.3. Résolution du problème

La méthode des volumes finis a été développée par S. V. Patankar [30], Nous utilisons cette méthode pour la résolution du système d'équations aux dérivées partielles précédentes. La discrétisation par cette méthode permet une interprétation physique directe du problème étudié.

4. 3.1. Description et principe de la méthode:

En ce basant sur le concept du volume de contrôle, la formulation du problème est simple et constitué de deux étapes importantes:

✓ 1ere étape le maillage

Dans cette étape on divise le domaine de calcul en un nombre fini des volumes de contrôle, entourant chacun un nœud du maillage.

La variable x^+ présente l'évolution par rapport à l'entrée du conduit. Si on envisage un balayage suivant la direction axiale, le maillage du domaine de calcul porte seulement sur la variable r^+ .

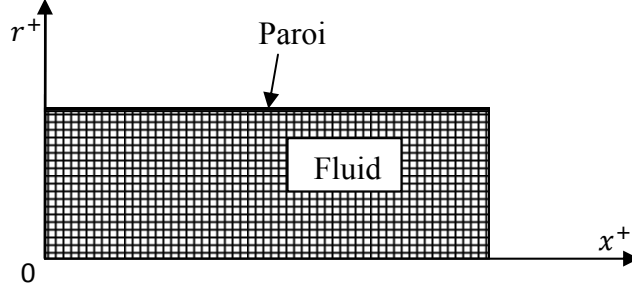


Fig. 4.1 : Maillage du domaine de calcul.

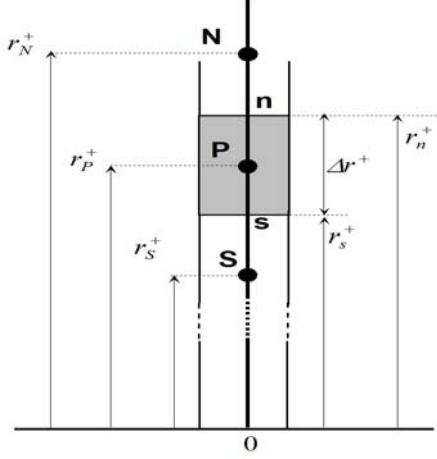


Fig. 4.2: Volume de contrôle (plaques parallèles)

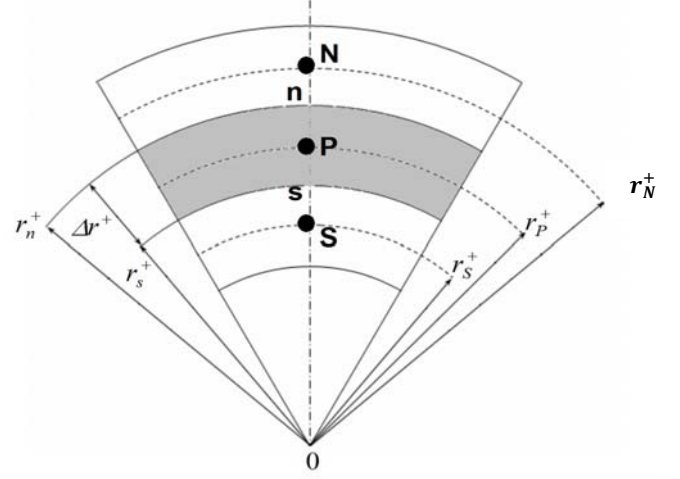


Fig. 4.3: Volume de contrôle (tube circulaire).

Le volume de contrôle est donné par :

$$\Delta V = \int_s^n r^{+p} dr^+ = \frac{r_n^{+1+p} - r_s^{+1+p}}{1+p} \quad (4.8)$$

✓ 2ème étape l'intégration

L'intégration de l'équation d'énergie dans le volume de contrôle, c'est l'étape la plus importante dans l'application de cette méthode.

4.3.2. Discrétisation du problème

4.3.2.1. Cas de la température constante imposée à la paroi

Nous avons défini dans le paragraphe précédent le maillage utilisé, on fixe notre attention sur le point «P», qui a pour voisin les points «N» et «S».

Intégrons l'équation d'énergie (4.5a) par rapport au volume de contrôle, et l'entrée du conduit, tel que:

$$\int_{x^+}^{x^+ + \Delta x^+} \int_s^n u^+(r^+) \frac{\partial \theta}{\partial x^+} r^{+p} dx^+ dr^+ = \int_{x^+}^{x^+ + \Delta x^+} \int_s^n \frac{1}{r^{+p}} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(\frac{\partial \theta}{\partial r^+} \right) r^{+p} dx^+ dr^+ + \int_{x^+}^{x^+ + \Delta x^+} Br \left(\frac{(1+(2+p)n)}{n} \right)^{(n+1)} dx^+ \int_s^n (r^+)^{((n+1)/n)} r^{+p} dr^+ \quad (4.9)$$

Pour l'intégration de (θ) sur l'intervalle x^+ à $x^+ + \Delta x^+$ on a:

$$\int_{x^+}^{x^+ + \Delta x^+} \theta_p dx^+ = (\varepsilon \theta_p^1 - (1 - \varepsilon) \theta_p^0) \Delta x^+ \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1 \quad (4.10)$$

avec:

$$\begin{cases} \varepsilon = 0 : \text{Schéma explicite.} \\ \varepsilon = 1 : \text{Schéma implicite.} \\ \varepsilon = \frac{1}{2} : \text{Schéma Crank Nicholson.} \end{cases}$$

Pour s'assurer la convergence et la stabilité de la méthode, on choisi un schéma implicite.

Pour la direction transversale r^+ on choisi un schéma de différence finies centrale.

En poursuivant les démarches nécessaires nous obtenons l'équation discrétisée suivante :

$$a_p \theta_p^1 = a_N \theta_N^1 + a_S \theta_S^1 + a_p^0 \theta_p^0 + b \quad (4.11)$$

Les coefficients a_k sont donnés par le tableau (4.1).

Tableau. 4. 1 : Coefficients a_k pour les nœuds internes.

a_p^0	$\frac{1}{\Delta x^+} \left(\frac{(1 + (2 + p)n)}{n + 1} \right) \left[\frac{r_n^{+p+1} - r_s^{+p+1}}{(1 + p)} - \frac{n \left(r_n^{+(n.p+2n+1)/n} - r_s^{+(n.p+2n+1)/n} \right)}{(1 + (p + 2)n)} \right]$
a_N	$\frac{r_n^{+p}}{\Delta r^+}$
a_S	$\frac{r_s^{+p}}{\Delta r^+}$
a_p	$a_p^0 + a_N + a_S$
b	$Br \left(\frac{(1 + (2 + p)n)}{n + 1} \right)^{n+1} \left[\frac{n \left(r_n^{+(1+(p+2)n)/n} - r_s^{+(1+(p+2)n)/n} \right)}{(1 + (p + 2)n)} \right]$

Remarque:

Le maillage utilisé est régulière ce qui conduit à écrire :

$$\Delta r^+ = r_N^+ - r_S^+ = r_P^+ - r_S^+ = r_n^+ - r_s^+; \text{ Avec } r_s^+ = (j - 1)\Delta r^+ \text{ et } r_n^+ = j\Delta r^+$$

4.3.2.1.1. Implémentation des conditions aux limites:

Les équations des nœuds extrêmes (1), (N) sont traitées séparément.

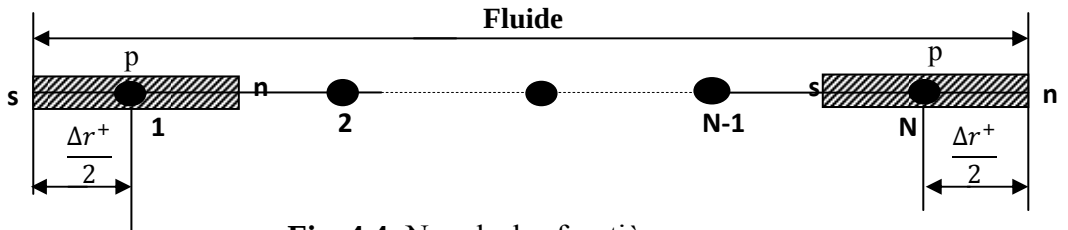


Fig. 4.4: Nœuds des frontières

Equation du nœud (1):

Le nœud (1), centre du conduit, peut être traité comme les nœuds interne et l'équation discrétisée est:

$$\frac{\theta_p^1 - \theta_p^0}{\Delta x^+} \int_s^n u^+(r^+) r^{+p} dr^+ = \left(r^{+p} \frac{\partial \theta}{\partial r^+} \right)_n^1 - \left(r^{+p} \frac{\partial \theta}{\partial r^+} \right)_s^1 + Br \left(\frac{(1+(2+p)n)}{n} \right)^{(n+1)} \int_s^n (r^+)^{((n+1)/n)} r^{+p} dr^+ \quad (4.12)$$

L'implémentation de la condition aux limites (4.5d) on obtient:

$$\left(r^{+m} \frac{\partial \theta}{\partial r^+} \right)_s^1 = 0 \quad (4.13)$$

On porte (4.12) dans (4.11) nous obtiendrons :

$$a_p \theta_p^1 = a_N \theta_N^1 + a_S \theta_S^1 + a_p^0 \theta_p^0 + b \quad (4.14)$$

avec: $a_S = 0$.

Les coefficients a_k sont donnés par le tableau (4.2) suivant:

Tableau. 4. 2 : Coefficients a_k pour le nœud 1 centre du conduit.

a_p^0	$\frac{1}{\Delta x^+} \left(\frac{(1 + (2 + p)n)}{n + 1} \right) \left[\frac{r_n^{+p+1} - r_s^{+p+1}}{(1 + p)} - \frac{n \left(r_n^{+(n.p+2n+1)/n} - r_s^{+(n.p+2n+1)/n} \right)}{(n.p + 2n + 1)} \right]$
a_N	$\frac{r_n^{+p}}{\Delta r^+}$
a_S	0
a_p	$a_p^0 + a_N + a_S$
b	$Br \left(\frac{(1 + (2 + p)n)}{n + 1} \right)^{n+1} \left[\frac{n \left(r_n^{+(n.p+2n+1)/n} - r_s^{+(n.p+2n+1)/n} \right)}{(n.p + 2n + 1)} \right]$

Equation du nœud N

Par l'utilisation des mêmes démarches que le nœud (1), on part de l'équation (4.12).

Dans ce cas, on fait recoure à la condition au limite (4.5c) : $\theta(x^+, 1) = 0$

Ce qui nous donne dans la discrétisation:

$$\theta_n = 0 \quad (4.15)$$

Nous obtiendrons après réarrangement des termes de cette équation:

$$a_p \theta_p^1 = a_N \theta_N^1 + a_S \theta_S^1 + a_p^0 \theta_p^0 + b, \quad a_N = 0 \quad (4.16)$$

Les coefficients a_k sont donnés par le tableau (4.3).

Tableau. 4. 3: Coefficients a_k pour le nœud N.

a_p^0	$\frac{1}{\Delta x^+} \left(\frac{(1 + (2 + p)n)}{n + 1} \right) \left[\frac{r_n^{+p+1} - r_s^{+p+1}}{(1 + p)} - \frac{n \left(r_n^{+(1+(p+2)n)/n} - r_s^{+(1+(p+2)n)/n} \right)}{(n.p + 2n + 1)} \right]$
a_N	0
a_S	$\frac{r_s^{+p}}{\Delta r^+}$
a_p	$a_p^0 + a_N + a_S + \frac{2r_n^{+p}}{\Delta r^+}$
b	$Br \left(\frac{(1 + (2 + p)n)}{n + 1} \right)^{n+1} \left[\frac{n \left(r_n^{+(1+(p+2)n)/n} - r_s^{+(1+(p+2)n)/n} \right)}{(1 + (p + 2)n)} \right]$

4.3.2.2. Cas d'un flux constant imposé à la paroi:

Après la discrétisation de l'équation (4.5a), et l'utilisation des mêmes démarches pour le cas de la température imposée à la paroi, nous allons présenter ici les tableaux qui donnent les coefficients a_k pour tous les nœuds internes où les nœuds de la frontière.

Après réarrangement des termes de l'équation discrétisée on a:

$$a_p \theta_p^1 = a_N \theta_N^1 + a_S \theta_S^1 + a_p^0 \theta_p^0 + b$$

Les tableaux (4.4), (4.5) et (4.6) donnent les coefficients a_k pour le cas du flux imposé à la paroi.

4. 3.2.3. Cas d'un échange convectif avec le milieu extérieur

En utilisant les mêmes procédures, les tableaux (4.7), (4.8) et (4.9) montrent les coefficients a_k pour tous les nœuds internes où les nœuds de la frontière.

Tableau. 4. 4 : Coefficients a_k pour les nœuds internes.

a_p^0	$\frac{1}{\Delta x^+} \left(\frac{(1 + (2 + p)n)}{n + 1} \right) \left[\frac{r_n^{+p+1} - r_s^{+p+1}}{(1 + p)} - \frac{n \left(r_n^{+(n.p+2n+1)/n} - r_s^{+(n.p+2n+1)/n} \right)}{(1 + (m + 2)n)} \right]$
a_N	$\frac{r_n^{+p}}{\Delta r^+}$
a_S	$\frac{r_s^{+p}}{\Delta r^+}$
a_p	$a_p^0 + a_N + a_S$
b	$Br \left(\frac{(1 + (2 + p)n)}{n + 1} \right)^{n+1} \left[\frac{n \left(r_n^{+(1+(p+2)n)/n} - r_s^{+(1+(p+2)n)/n} \right)}{(1 + (p + 2)n)} \right]$

Tableau. 4. 5 : Coefficients a_k pour le nœud 1

a_p^0	$\frac{1}{\Delta x^+} \left(\frac{(1 + (2 + p)n)}{n + 1} \right) \left[\frac{r_n^{+p+1} - r_s^{+p+1}}{(1 + p)} - \frac{n \left(r_n^{+(n.p+2n+1)/n} - r_s^{+(n.p+2n+1)/n} \right)}{(n.p + 2n + 1)} \right]$
a_N	$\frac{r_n^{+p}}{\Delta r^+}$
a_S	0
a_p	$a_p^0 + a_N + a_S$
b	$Br \left(\frac{(1 + (2 + p)n)}{n + 1} \right)^{n+1} \left[\frac{n \left(r_n^{+(n.p+2n+1)/n} - r_s^{+(n.p+2n+1)/n} \right)}{(n.p + 2n + 1)} \right]$

Tableau. 4. 6 : Coefficients a_k pour le nœud N.

a_p^0	$\frac{1}{\Delta x^+} \left(\frac{(1 + (2 + p)n)}{n + 1} \right) \left[\frac{r_n^{+p+1} - r_s^{+p+1}}{(1 + p)} - \frac{n \left(r_n^{+(1+(p+2)n)/n} - r_s^{+(1+(p+2)n)/n} \right)}{(n.p + 2n + 1)} \right]$
a_N	0
a_S	$\frac{r_s^{+p}}{\Delta r^+} - r_n^{+p} Bi$
a_p	$a_p^0 + a_N + a_S + \left(\frac{5}{2} \right) Bi r_n^{+p}$
b	$Br \left(\frac{(1+(2+p)n)}{n+1} \right)^{n+1} \left[\frac{n \left(r_n^{+(1+(p+2)n)/n} - r_s^{+(1+(p+2)n)/n} \right)}{(1+(p+2)n)} \right]$

Tableau. 4. 7 : Coefficients a_k pour les nœuds internes. Paroi à coefficient d'échange convectif.

a_p^0	$\frac{1}{\Delta x^+} \left(\frac{(1 + (2 + p)n)}{n + 1} \right) \left[\frac{r_n^{+p+1} - r_s^{+p+1}}{(1 + p)} - \frac{n \left(r_n^{+(n.p+2n+1)/n} - r_s^{+(n.p+2n+1)/n} \right)}{(1 + (m + 2)n)} \right]$
a_N	$\frac{r_n^{+p}}{\Delta r^+}$
a_S	$\frac{r_s^{+p}}{\Delta r^+}$
a_p	$a_p^0 + a_N + a_S$
b	$Br \left(\frac{(1 + (2 + p)n)}{n + 1} \right)^{n+1} \left[\frac{n \left(r_n^{+(1+(p+2)n)/n} - r_s^{+(1+(p+2)n)/n} \right)}{(1 + (p + 2)n)} \right]$

Tableau. 4. 8 : Coefficients a_k pour le nœud 1. Paroi à coefficient d'échange convectif.

a_p^0	$\frac{1}{\Delta x^+} \left(\frac{(1 + (2 + p)n)}{n + 1} \right) \left[\frac{r_n^{+p+1} - r_s^{+p+1}}{(1 + p)} - \frac{n \left(r_n^{+(n.p+2n+1)/n} - r_s^{+(n.p+2n+1)/n} \right)}{(n.p + 2n + 1)} \right]$
a_N	$\frac{r_n^{+p}}{\Delta r^+}$
a_S	0
a_p	$a_p^0 + a_N + a_S$
b	$Br \left(\frac{(1 + (2 + p)n)}{n + 1} \right)^{n+1} \left[\frac{n \left(r_n^{+(n.p+2n+1)/n} - r_s^{+(n.p+2n+1)/n} \right)}{(n.p + 2n + 1)} \right]$

Tableau. 4. 9 : Coefficients a_k pour le nœud N. Paroi à coefficient d'échange convectif.

a_p^0	$\frac{1}{\Delta x^+} \left(\frac{(1 + (2 + p)n)}{n + 1} \right) \left[\frac{r_n^{+p+1} - r_s^{+p+1}}{(1 + p)} - \frac{n \left(r_n^{+(1+(p+2)n)/n} - r_s^{+(1+(p+2)n)/n} \right)}{(n.p + 2n + 1)} \right]$
a_N	0
a_S	$\frac{r_s^{+p}}{\Delta r^+} - Bi r_n^{+p}$
a_p	$a_p^0 + a_N + a_S - (5/2) Bi r_n^{+p}$
b	$Br \left(\frac{(1+(2+p)n)}{n+1} \right)^{n+1} \left[\frac{n \left(r_n^{+(1+(p+2)n)/n} - r_s^{+(1+(p+2)n)/n} \right)}{(1+(p+2)n)} \right]$

4.3.3. Résolution du système d'équations:

La discrétisation de l'équation d'énergie donne pour chaque nœud une équation, ce qui résulte un système d'équations algébrique, de la forme:

$$[A][\theta] = [B] \quad (4.16)$$

La résolution de ce système pour la température, se fait par l'utilisation des méthodes itératives TDMA. En effet, ces méthodes itératives sont choisies pour leurs convergences. Le système (4.16) peut être écrit sous la forme:

$$A_i \theta_i^{k+1} + B_i \theta_{i+1}^{k+1} + C_i \theta_{i-1}^{k+1} = V_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (4.17)$$

avec:

$$\begin{aligned} \theta_i &\rightarrow \theta_p & \theta_{i+1} &\rightarrow \theta_N & \theta_{i-1} &\rightarrow \theta_S & V_i &\rightarrow a_p^0 \theta_i^k + b \\ A_i &\rightarrow a_p & B_i &\rightarrow -a_N & C_i &\rightarrow -a_S \end{aligned}$$

L'itération $k+1$ représente la situation actuelle dès l'entrée du conduit.

4.4. Validation des résultats:

4.4.1. La température axiale:

Dans le but de la validation des résultats obtenus par la simulation numérique, nous avons choisi la validation du présent modèle avec celui de S. Olek [14], pour un fluide Newtonien avec une température imposée à la paroi du conduit circulaire.

Nous présentons dans les tableaux (4.10) et (4.11), les températures axiales et les écarts relatifs pour différents pas Δx^+ et Δr^+ . Et pour estimer la précision de la méthode on étudie l'influence du pas axial Δx^+ sur la précision des résultats, en fixant le pas Δr^+ à la valeur: 10^{-3} .

Tableau. 4. 10: Température axiale et écart relatifs pour différents pas Δx^+ et ($n = 1$).

x^+	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1
FVM						
a	0.8930205	0.7251457	0.4175750	0.2270875	0.1221069	6.5521590E-02
b	0.9104731	0.7053855	0.3504944	0.1709392	8.3311930E-02	4.0603362E-02
c	0.9384822	0.7017964	0.3428208	0.1652778	7.9656050E-02	3.8390152E-02
d	0.9393060	0.7014637	0.3421728	0.1648189	7.9366505E-02	3.8217634E-02
a'	52.607	33.297	180.985	254.125	353.025	420.038
b'	32.750	6.541	24.235	34.744	51.756	64.069
c'	1.617	1.134	2.394	1.680	8.236	10.162
d'	0.738	0.661	0.505	1.098	4.176	5.694
S.Olek [14]	0.940	0.701	0.342	0.165	0.079	0.038

a, a' Température et écart relatif (%) pour $\Delta x^+ = 0.1$

b, b' Température et écart relatif (%) pour $\Delta x^+ = 0.01$

c, c' Température et écart relatif (%) pour $\Delta x^+ = 0.001$

d, d' Température et écart relatif (%) pour $\Delta x^+ = 0.0001$

La figure (4.5) représente la distribution de la température axiale, en fonction des différents pas Δx^+ , en remarque que pour le pas $\Delta x^+ = 0.1$ les écarts sont importants par rapport à la solution donnée par notre référence considérer. Par contre lors ce que le pas axiale devient successivement petit les courbes tendent à se confondent.

La figure (4.6) montre les écarts relatifs, dessinés à partir des valeurs données dans le tableau (4.10). On peut aisément remarquer que pour $\Delta x^+ = 0.0001$ les résultats sont parfaitement affinis.

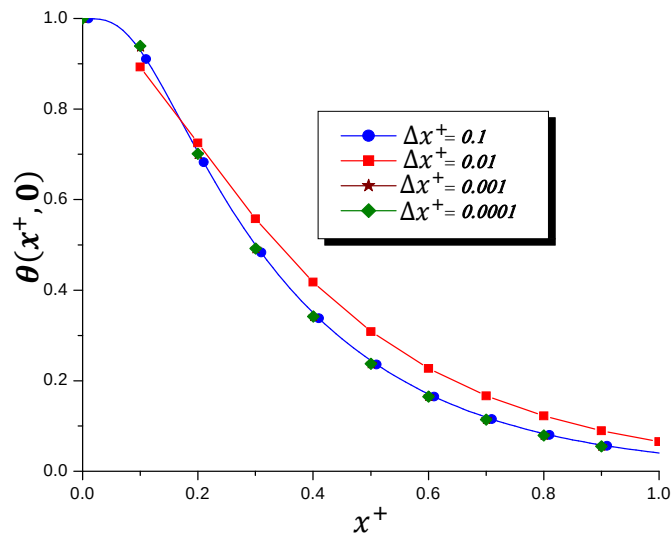


Fig. 4.5: Température axiale en fonction des différents pas Δx^+ . Cas de conduit circulaire et fluide newtonien.

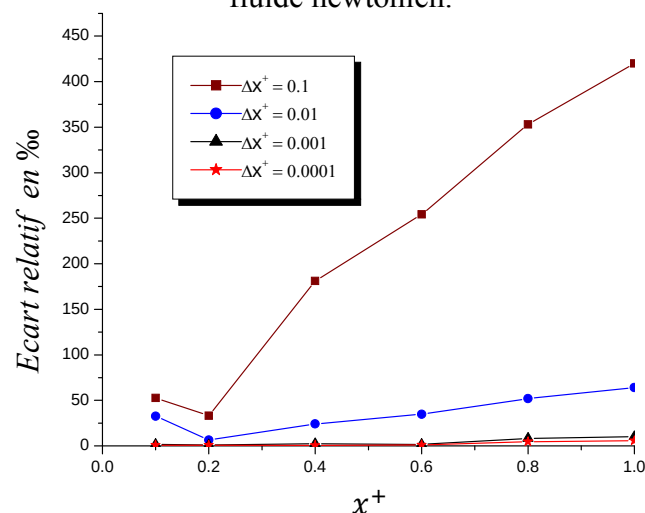


Fig. 4.6: Ecarts relatifs de la température axiale pour différents pas Δx^+ . Cas de conduit circulaire et fluide newtonien.

Nous examinons ici l'influence du pas radiale Δr^+ sur la précision des résultats, en fixant $\Delta x^+ = 10^{-4}$. Le tableau (4.11) représente les écarts relatifs pour des pas Δr^+ différents.

La figure (4.7) représente les écarts relatifs en fonction du pas Δr^+ , en fixant le pas axiale à $\Delta x^+ = 10^{-3}$. On remarque que ces derniers sont autant plus importants que le pas Δr^+ est très grand. Dans le cas de $\Delta r^+ = 0.1$, l'écart relatif en $x^+ = 1$ est de l'ordre de 20‰. Contrairement dans le cas des petits pas Δr^+ , les résultats sont bien affinés.

Tableau. 4. 11: Température axiale et écart relatifs pour différents pas Δr^+ et ($n = 1$).

x^+	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1	
FVM	a	0.9411222	0.7072815	0.3460195	0.1668284	8.0402695E-02	3.8749587E-02
	b	0.9392895	0.7013664	0.3419885	0.1646603	7.9256356E-02	3.8148407E-02
	c	0.9393060	0.7014637	0.3421728	0.1648189	7.9366505E-02	3.8217634E-02
	a'	1.112	8.881	11.61	10.959	17.445	19.344
	b'	0.710	0.522	0.033	2.063	3.234	3.890
	c'	0.694	0.661	0.505	1.098	4.617	5.694
S.Olek [14]	0.940	0.701	0.342	0.165	0.079	0.038	

a, a' Température et écart relatif (‰) pour $\Delta r^+ = 0.1$

b, b' Température et écart relatif (‰) pour $\Delta r^+ = 0.01$

c, c' Température et écart relatif (‰) pour $\Delta r^+ = 0.001$

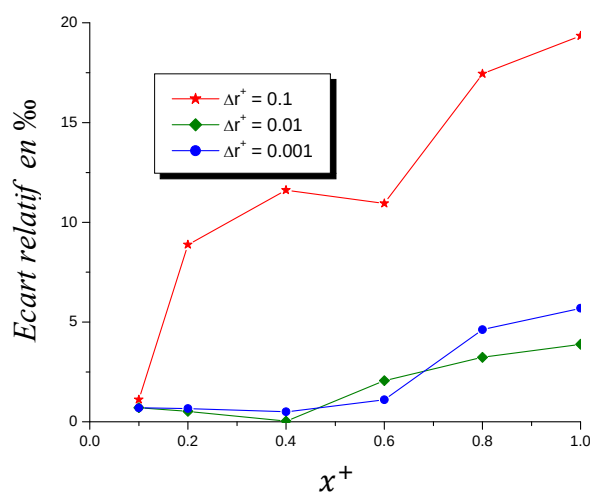


Fig. 4.7: Ecarts relatifs de la température axiale pour différents pas Δr^+ . Cas de conduit circulaire et fluide newtonien.

La comparaison entre les résultats obtenus par le présent modèle numérique (MVF), avec ceux de S. Olek [14] concernant la température axiale dans les conduits circulaire d'un fluide newtonien, montre une très grande satisfaction sur le plan de précision. L'erreur relative maximale est de 2.1 ‰.

4.4.2. La température de mélange:

Les tableaux (4.12) et (4.13) représentent la comparaison entre les résultats de la température de mélange, dans les deux configurations considérées, du présent modèle (MVF), avec ceux de Cotta et Ozisik [9], pour la première condition aux limites (température imposée). La comparaison montre une très grande satisfaction sur le plan de précision. L'erreur relative pour le fluide pseudoplastique ($n = 1/3$) est de 2.47% pour les plaques parallèles, et de 2.10 % pour les conduits circulaire. Pour le fluide Newtonien l'erreur relative est de 9%, pour les plaques parallèles et de 0.90 %, dans les conduits circulaires. Pour le fluide dilatant ($n = 3$), l'erreur relative est de 11%, pour les plaques parallèles et de 2.7 %, pour les conduits circulaire.

4.4.3. Nombre de Nusselt local:

Les tableaux (4.14) et (4.15) illustrent la comparaison des résultats obtenus du nombre de Nusselt local, dans les deux configurations précédentes, de la présente étude et ceux obtenus par Cotta et Ozisik [9], dans le cas de la température constante imposée à la paroi. L'erreur relative des valeurs asymptotiques du nombre de Nusselt pour les plaques parallèles est de 0.87 % pour $n = 1/3$, 1.22‰ pour $n = 1$ et de 1.33‰ pour $n = 3$. Pour les conduits circulaires l'erreur vaut 0.19‰ pour $n = 1/3$, 0.10‰ pour $n = 1$, 0.08‰ pour un fluide dilatant $n = 3$.

Les tableaux (4.16) et (4.17) représentent, les résultats obtenus du nombre de Nusselt local de la présente étude, et ceux de Cotta et Ozisik [10], pour le cas du flux constant imposé à la paroi, la comparaison révèle une très grande satisfaction sur le plan de précision. L'erreur relative des valeurs asymptotiques du nombre de Nusselt, pour les plaques parallèles est de 8.96‰, 11.15‰, et 13.12‰ pour les fluides $n = 1/3$, $n = 1$ et $n = 3$ respectivement. Dans le cas des conduits circulaires l'erreur vaut 0.77‰, 1.25‰ et 0.66‰ pour les mêmes fluides.

Les figures (4.8), (4.9), (4.10), et (4.11) représentent une comparaison graphique des résultats obtenus avec ceux de la référence [9], pour la température constante imposée à la paroi, et pour les deux types de fluides (pseudo plastique et dilatant).

Par contre, les figures (4.12), (4.13), (4.14) et (4.15) représentent une comparaison graphique des résultats obtenus avec ceux de la référence [10], pour le flux constant imposé à la paroi, et pour les deux types de fluides (pseudo plastique et dilatant).

Tableau 4.12: Comparaison de la température de mélange, cas de température imposé.
Plaques parallèles. ($Br = 0$)

$\left(\frac{l}{D_h}\right)^2 x^+$	n=1/3		n=1		n=3	
	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [9]</i>	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [9]</i>	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [9]</i>
0.0001	0.98336	0.98160	0.98570	0.98423	0.98548	0.98540
0.0002	0.97242	0.97099	0.97621	0.97504	0.97683	0.97658
0.0004	0.95538	0.95437	0.96132	0.96052	0.96313	0.96330
0.0006	0.94134	0.94059	0.94895	0.94840	0.95165	0.95196
0.0008	0.92894	0.92840	0.93796	0.93761	0.94141	0.94184
0.001	0.91764	0.91728	0.92791	0.92774	0.93201	0.93256
0.002	0.87048	0.87081	0.88552	0.88604	0.89213	0.89320
0.004	0.79790	0.79924	0.81909	0.82065	0.82905	0.83100
0.006	0.73882	0.74094	0.76668	0.76648	0.77664	0.77907
0.008	0.68733	0.69007	0.71556	0.71860	0.72961	0.73290
0.01	0.64321	0.64425	0.67355	0.67503	0.68664	0.69067
0.02	0.45740	0.46205	0.49432	0.49804	0.51196	0.51723
0.04	0.23372	0.23920	0.26683	0.27241	0.28464	0.29126
0.06	0.12025	0.12385	0.14449	0.14902	0.15920	0.16402
0.08	0.06166	0.06413	0.07824	0.08152	0.08878	0.09237
0.1	0.03151	0.03321	0.04224	0.04459	0.04951	0.05202
0.2	0.00121	0.00124	0.00200	0.00218	0.00265	0.00295

Tableau 4.13: Comparaison de la température de mélange, cas de température imposé.
Conduits circulaires. ($Br = 0$)

$\left(\frac{R}{D_h}\right)^2 x^+$	n=1/3		n=1		n=3	
	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [9]</i>	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [9]</i>	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [9]</i>
0.0001	0.98626	0.98471	0.98003	0.98657	0.98860	0.98733
0.0002	0.97732	0.97600	0.97354	0.97888	0.98116	0.98007
0.0004	0.96353	0.96245	0.96263	0.96688	0.96963	0.96873
0.0006	0.95225	0.95130	0.95329	0.95698	0.96016	0.95937
0.0008	0.94236	0.94149	0.94493	0.94826	0.95183	0.95111
0.001	0.93340	0.93258	0.93726	0.94032	0.94426	0.94358
0.002	0.89641	0.89575	0.90502	0.90736	0.91288	0.91232
0.004	0.84067	0.84014	0.85546	0.85723	0.86511	0.86463
0.006	0.79624	0.79578	0.81730	0.81693	0.82664	0.82620
0.008	0.75815	0.75773	0.78084	0.78215	0.79183	0.79296
0.01	0.72433	0.72394	0.74992	0.75111	0.76365	0.76323
0.02	0.59197	0.59166	0.62823	0.62803	0.64525	0.64481
0.04	0.41440	0.41487	0.45846	0.45901	0.48092	0.48046
0.06	0.29554	0.29582	0.34061	0.34100	0.36389	0.36391
0.08	0.21148	0.21164	0.25398	0.25424	0.27680	0.27671
0.1	0.15143	0.15152	0.18954	0.18971	0.21075	0.21059
0.2	0.02858	0.02852	0.04398	0.04394	0.05400	0.05385

Tableau 4.14: Comparaison du nombre de Nusselt local, cas de température imposé.Plaques parallèles. ($Br = 0$)

$\left(\frac{l}{D_h}\right)^2 x^+$	$n=1/3$		$n=1$		$n=3$	
	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [9]</i>	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [9]</i>	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [9]</i>
0.0001	27.955	30.827	24.122	26.560	22.392	24.642
0.0002	23.294	24.468	20.188	21.188	18.774	19.699
0.0004	19.034	19.484	16.590	16.977	15.464	15.823
0.0006	16.848	17.098	14.744	14.960	13.766	13.967
0.0008	15.449	15.611	13.563	13.704	12.679	12.811
0.001	14.451	14.566	12.721	12.822	11.904	11.999
0.002	11.831	11.867	10.511	10.545	9.8732	9.9052
0.004	9.9099	9.9173	8.9003	8.9100	8.3966	8.4065
0.006	9.1420	9.1151	8.2642	8.2456	7.8177	7.8019
0.008	8.7089	8.7085	7.9115	7.9146	7.5000	7.5041
0.01	8.4819	8.4902	7.7367	7.7405	7.3447	7.3495
0.02	8.2347	8.2404	7.5413	7.5494	7.1758	7.1846
0.04	8.2204	8.2275	7.5315	7.5407	7.1680	7.1776
0.06	8.2203	8.2275	7.5315	7.5407	7.1680	7.1776
0.08	8.2203	8.2275	7.5315	7.5407	7.1680	7.1776
0.1	8.2203	8.2275	7.5315	7.5407	7.1680	7.1776
0.2	8.2203	8.2275	7.5315	7.5407	7.1680	7.1776

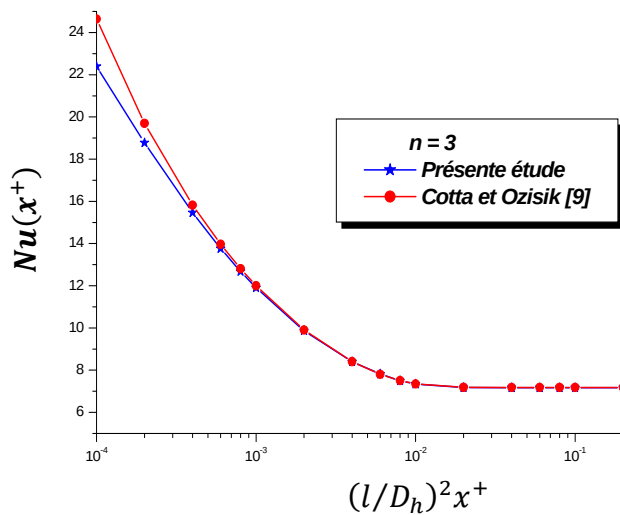
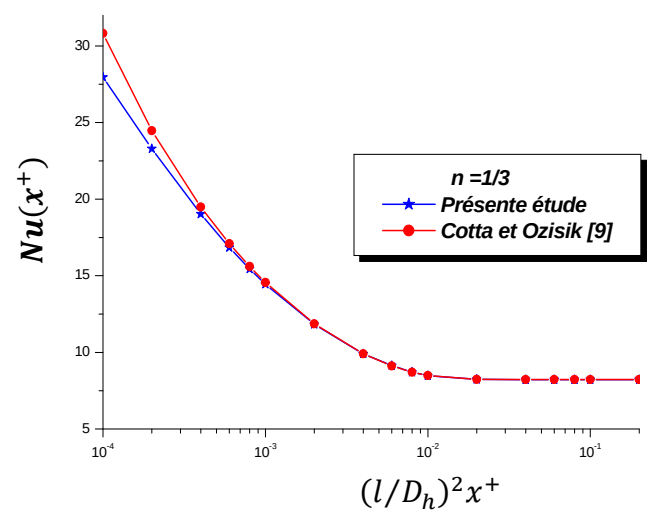
**Fig. 4. 8:** Comparaison du nombre de Nusselt local pour un fluide dilatant.
(Cas de plaques parallèles)**Fig. 4. 9:** Comparaison du nombre de Nusselt local pour un fluide pseudo plastique.
(Cas de plaques parallèles)

Tableau 4.15: Comparaison du nombre de Nusselt local, cas de température imposé.Conduite circulaire. ($Br = 0$)

$\left(\frac{R}{D_h}\right)^2 x^+$	$n=1/3$		$n=1$		$n=3$	
	Présente étude	Référence [9]	Présente étude	Référence [9]	Présente étude	Référence [9]
0.0001	22.866	25.321	20.120	22.279	18.977	21.012
0.0002	18.916	19.929	16.665	17.559	15.724	16.568
0.0004	15.289	15.684	13.491	13.842	12.734	13.066
0.0006	13.417	13.640	11.851	12.050	11.188	11.377
0.0008	12.212	12.358	10.794	10.926	10.192	10.317
0.001	11.347	11.452	10.035	10.130	9.4766	9.5670
0.002	9.0344	9.0692	8.0034	8.0362	7.5593	7.5909
0.004	7.2365	7.2458	6.4196	6.4296	6.0627	6.0725
0.006	6.4281	6.3992	5.7052	5.6812	5.3863	5.3638
0.008	5.8864	5.8870	5.2250	5.2269	4.9308	4.9328
0.01	5.5382	5.5375	4.9153	4.9161	4.6364	4.6372
0.02	4.7169	4.7100	4.1774	4.1724	3.9305	3.9255
0.04	4.2820	4.2801	3.7694	3.7689	3.5298	3.5287
0.06	4.1976	4.1964	3.6820	3.6820	3.4386	3.4379
0.08	4.1805	4.1796	3.6622	3.6625	3.4164	3.4160
0.1	4.1770	4.1762	3.6577	3.6581	3.4110	3.4107
0.2	4.1761	4.1753	3.6564	3.6568	3.4093	3.4090

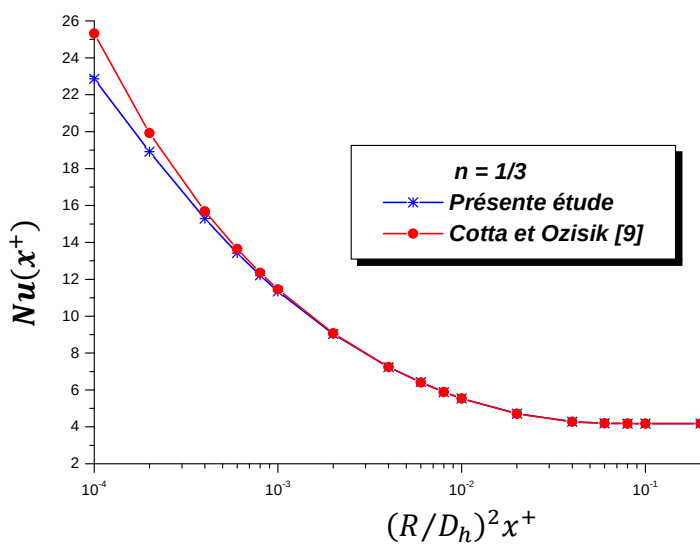
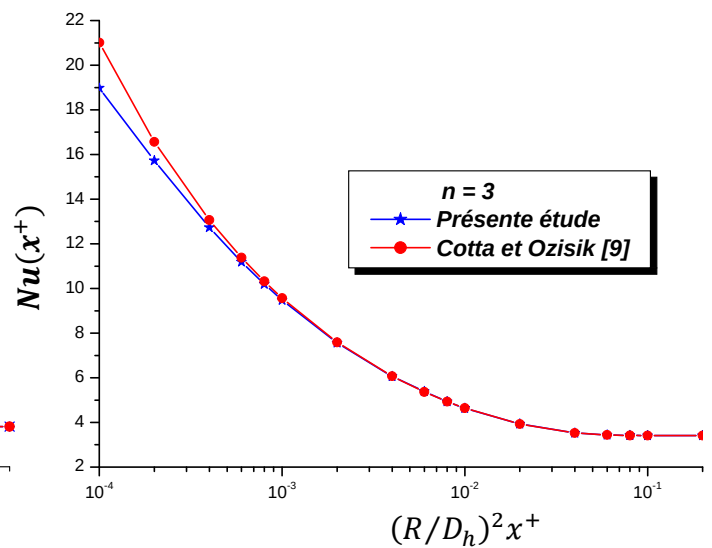
**Fig. 4.10:** Comparaison du nombre de Nusselt Local pour un fluide pseudo plastique. (Cas de conduit circulaire)**Fig. 4.11:** Comparaison du nombre de Nusselt Local pour un fluide dilatant. (Cas de conduit circulaire)

Tableau. 4.16: Comparaison du nombre de Nusselt local. Cas d'un flux constant imposé à la paroi. Plaques parallèles. ($Br = 0$)

$\left(\frac{l}{D_h}\right)^2 x^+$	n=1/3		n=1		n=3	
	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [10]</i>	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [10]</i>	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [10]</i>
0.0001	42.110	37.551	36.062	32.156	33.375	29.758
0.0002	31.613	29.833	27.165	25.636	25.175	23.758
0.0004	24.481	23.771	21.124	20.512	19.611	19.042
0.0006	20.208	20.859	18.415	18.050	17.116	16.775
0.0008	19.335	19.040	16.768	16.511	15.030	15.359
0.001	17.445	17.757	15.624	15.427	14.545	14.360
0.002	14.319	14.418	12.699	12.604	11.852	11.762
0.004	11.930	11.940	10.573	10.516	9.8970	9.8410
0.006	10.911	10.857	9.6586	9.6085	9.0586	9.0097
0.008	10.280	10.252	9.1552	9.1073	8.5998	8.5528
0.01	9.9168	9.8803	8.8506	8.8031	8.3134	8.2774
0.02	9.3105	9.2557	8.3602	8.3107	7.8914	7.8402
0.04	9.2243	9.1511	8.3069	8.2368	7.8477	7.7782
0.06	9.2420	9.1486	8.3251	8.2356	7.8661	7.7771
0.08	9.2313	9.1485	8.3282	8.2353	7.8855	7.7771
0.1	9.2313	9.1485	8.3282	8.2353	7.8805	7.7771
0.2	9.2313	9.1485	8.3282	8.2353	7.8805	7.7771

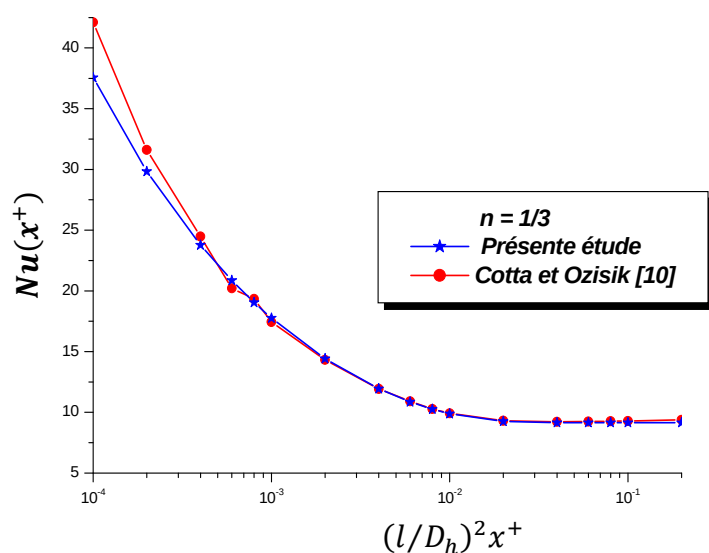


Fig.4.12: Comparaison du nombre de Nusselt Local pour un fluide pseudo plastique. (Cas de plaques parallèles)

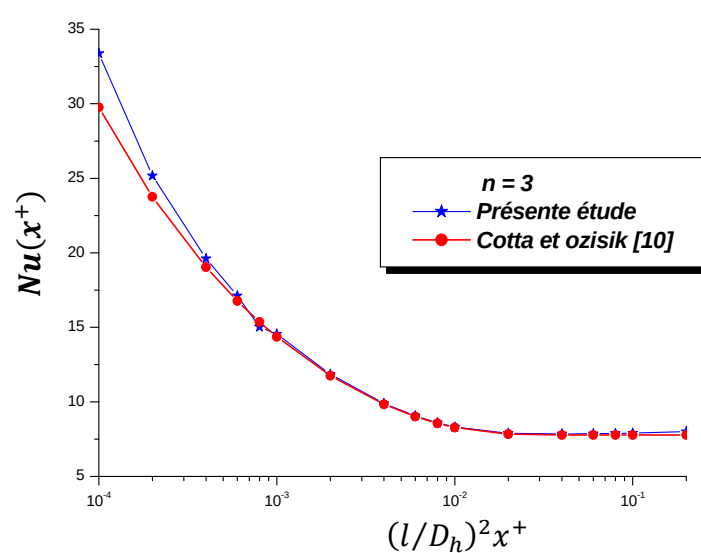


Fig.4.13: Comparaison du nombre de Nusselt Local pour un fluide dilatant. (Cas de plaques parallèles)

Tableau. 4.17: Comparaison du nombre de Nusselt local pour les conduits circulaire.
Cas d'un flux imposé constant. ($Br = 0$)

$\left(\frac{R}{D_h}\right)^2 x^+$	n=1/3		n=1		n=3	
	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [10]</i>	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [10]</i>	<i>Présente étude</i>	<i>Référence [10]</i>
0.0001	34.804	31.069	30.555	27.276	28.798	25.707
0.0002	25.975	24.534	22.823	21.558	21.516	20.323
0.0004	19.946	19.384	17.543	17.049	16.541	16.075
0.0006	16.312	16.901	14.356	14.872	14.295	14.025
0.0008	15.565	15.342	13.701	13.506	12.921	12.737
0.001	14.405	14.239	12.684	12.538	11.961	11.824
0.002	11.401	11.335	9.8858	9.9863	9.4723	9.4168
0.004	9.1303	9.1025	8.0449	8.0200	7.5821	7.5590
0.006	8.0769	8.0601	7.1140	7.0986	6.7010	6.6869
0.008	7.4372	7.4254	6.5471	6.5359	6.1634	6.1534
0.01	6.9983	6.9893	6.1569	6.1481	5.7929	5.7850
0.02	5.9341	5.9303	5.2032	5.1984	4.8822	4.8783
0.04	5.3051	5.3055	4.6246	4.6213	4.3196	4.3174
0.06	5.1331	5.1334	4.4552	4.4522	4.1485	4.1468
0.08	5.0778	5.0790	4.3978	4.3949	4.0879	4.0863
0.1	5.0596	5.0613	4.3781	4.3748	4.0656	4.0640
0.2	5.0488	5.0527	4.3692	4.3637	4.0534	4.0507

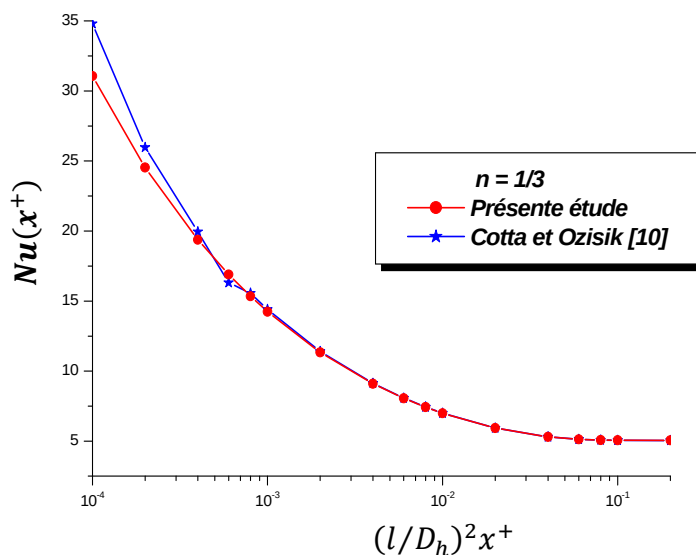


Fig. 4.14: Comparaison du nombre de Nusselt Local pour un fluide pseudo plastique.
(Cas de conduit circulaire).

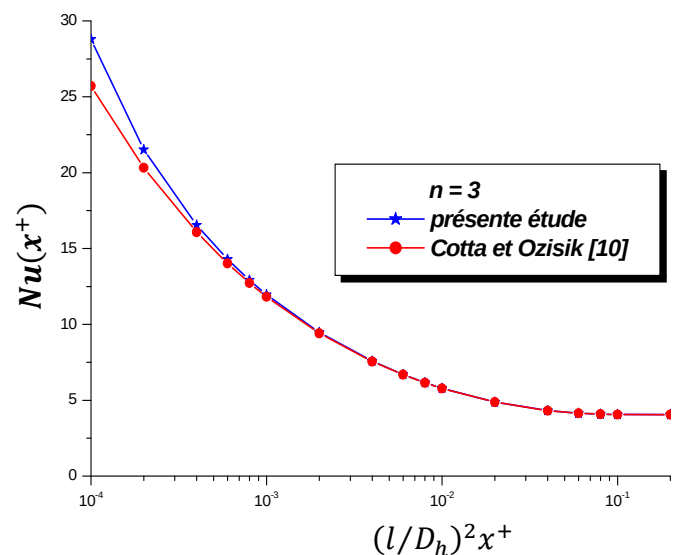


Fig. 4.15: Comparaison du nombre de Nusselt Local pour un fluide dilatant.
(Cas ce conduit circulaire)

Les tableaux (4.18) et (4.19) représentent la comparaison des résultats obtenus du nombre de Nusselt local à l'infinie avec la considération de l'effet de la dissipation visqueuse, et la condition aux limites de la température imposée à la paroi, du présent modèle (MVF) avec ceux obtenus par O. Jambal *et al* [15]. Les fluides considérés sont: newtonien, pseudo plastique ($n = 0.5$) et dilatant ($n = 1.5$). La comparaison révèle une très bonne satisfaction sur le plan de précision, pour les deux configurations considérées. Les tableaux montrent que, la valeur asymptotique du nombre de Nusselt dans le cas de $Br \neq 0$, est indépendante du nombre de Brinkman, ce qui est constaté dans les chapitre deux et trois. Dans le cas de la paroi soumise à un flux constant, et le nombre de Brinkman n'est pas nul, le tableau (4.20), montre la validation des résultats obtenus d'un écoulement fluide newtonien dans un conduit circulaire, avec ceux obtenus par O. Aydin [4]. Les résultats sont très acceptables. Nous remarquons que la valeur asymptotique du nombre de Nusselt n'est pas constante, mais dépend du nombre de Brinkman, contrairement au cas de la température imposée à la paroi.

Tableau. 4.18: Comparaison du nombre de Nusselt local pour les conduits circulaire à température imposée ($Br \neq 0$) .

		$n=1.5$		$n=1$		$n=0.5$	
		<i>Présente étude</i>	Réf. [15]	<i>Présente étude</i>	Réf. [15]	<i>Présente étude</i>	Réf. [15]
Nu_{∞}	$Br=1$	8.906	8.905	9.59	9.60	11.66	11.67
	$Br=0.5$	8.906	8.905	9.59	9.60	11.66	11.67
	$Br=0$	3.538	3.491	3.65	3.65	3.950	3.965
	$Br=-0.5$	8.909	8.905	9.59	9.60	11.66	11.67
	$Br=-1$	8.909	8.905	9.59	9.60	11.66	11.67

Tableau. 4.19 : Comparaison du nombre de Nusselt local pour les plaques parallèles à température imposée ($Br \neq 0$)

		$n=1.5$		$n=1$		$n=0.5$	
		<i>Présente étude</i>	Réf. [15]	<i>Présente étude</i>	Réf. [15]	<i>Présente étude</i>	Réf. [15]
Nu_{∞}	$Br=1$	16.25	16.12	17.65	17.50	21.82	21.60
	$Br=0.5$	16.25	16.12	17.65	17.50	21.82	21.60
	$Br=0$	7.362	7.359	7.531	7.540	7.935	7.956
	$Br=-0.5$	16.26	16.12	17.66	17.50	21.82	21.60
	$Br=-1$	16.26	16.12	17.66	17.50	21.82	21.60

Tableau. 4.20: Comparaison du nombre de Nusselt local, d'un fluide newtonien ($n = 1$).
Conduit circulaire à flux constant imposée.

		<i>Présente étude</i>	O. Aydin [4]
Nu_{∞}	$Br=-1$	9.60	9.60
	$Br=-0.1$	4.612	4.615
	$Br=-0.01$	4.384	4.387
	$Br=0$	4.360	4.364
	$Br=0.01$	4.337	4.361
	$Br=0.1$	4.135	4.138
	$Br=1$	2.821	2.824

La validation des résultats obtenus pour la troisième condition aux limites, en premier lieu on compare avec les résultats de V. Javeri [5] pour un écoulement fluide newtonien dans un conduit circulaire, qui sont portés sur le tableau (4.21). La comparaison montre une très grande satisfaction sur le plan de précision, et cela pour les différentes valeurs du nombre de Biot.

Pour les autres fluides (dilatant et pseudo plastique) dans le conduit circulaire et dans les plaques parallèles (les trois types de fluides), on utilise le modèle des volumes finis (MVF) comme référence pour valider les résultats obtenus dans le deuxième et troisième chapitres. La comparaison montre une approche suffisante surtout pour le nombre de Biot grand et loin de l'entrée de la conduite, pour cela les tableaux (4.22), (4.23), (4.24), (4.25) et (4.26) portent les résultats obtenus par la méthode variationnelle de Ritz et le modèle volumes finis.

Nous avons remarqué dans le deuxième et troisième chapitre, que la valeur asymptotique du nombre de Nusselt est d'autant plus élevée que le nombre de Biot est faible, les tableaux suivants montrent et confirment cette remarque.

Tableau. 4.21: Comparaison du nombre de Nusselt local pour les conduits circulaire.
Cas d'un coefficient d'échange convectif (h_e), avec le milieu extérieur. ($n=1$)

$\left(\frac{R}{D_h}\right)^2 x^+$	Biot=2		Biot=5		Biot =10		Biot= 100		Biot $\rightarrow \infty$	
	Présente étude	Réf[5]	Présente étude	Réf[5]	Présente étude	Réf[5]	Présente étude	Réf[5]	Présente étude	Réf[5]
0.001	19.33	20.55	18.58	18.68	17.94	18.12	16.23	15.87	16.63	16.25
0.002	15.02	15.82	14.35	14.75	13.85	14.31	12.85	12.98	12.96	12.81
0.005	10.82	11.43	10.29	10.77	9.956	10.40	9.498	9.621	9.372	9.395
0.01	8.473	8.938	8.076	8.468	7.803	8.154	7.500	7.558	7.461	7.470
0.02	6.741	7.112	6.419	6.705	6.233	6.469	6.033	6.061	6.007	6.002
0.05	5.111	5.389	4.880	5.110	4.772	4.924	4.657	4.672	4.643	4.641
0.1	4.334	4.574	4.163	4.329	4.090	4.193	4.015	4.026	4.006	4.005
0.2	3.941	4.120	3.818	3.935	3.768	3.838	3.718	3.722	3.712	3.710
0.5	3.848	4.001	3.747	3.845	3.705	3.763	3.664	3.669	3.659	3.657
1	3.847	4.000	3.746	3.844	3.705	3.763	3.664	3.666	3.659	3.657

Tableau. 4.22: Comparaison du nombre de Nusselt local pour les conduits circulaires.
Cas d'un coefficient d'échange convectif (h_e), avec le milieu extérieur. ($n=1/3$)

$\left(\frac{R}{D_h}\right)^2 x^+$	Biot=2		Biot=5		Biot =10		Biot= 100		Biot $\rightarrow \infty$	
	MVR	MVF	MVR	MVF	MVR	MVF	MVR	MVF	MVR	MVF
0.001	22.07	21.32	21.42	20.50	21.22	19.77	17.33	18.44	16.13	18.21
0.002	16.50	17.15	15.51	16.40	15.30	15.80	12.03	14.83	11.41	14.67
0.005	10.78	12.35	10.14	11.74	9.625	11.24	7.841	10.74	7.579	10.58
0.01	8.107	9.695	7.577	9.161	7.076	8.856	5.979	8.467	5.820	8.415
0.02	6.495	7.683	6.005	7.281	5.618	7.061	4.966	6.801	4.885	6.768
0.05	5.687	5.823	5.220	5.536	4.931	5.400	4.573	5.249	4.529	5.231
0.1	5.626	4.951	5.166	4.735	4.892	4.639	4.561	4.540	4.519	4.528
0.2	5.625	4.526	5.165	4.365	4.892	4.298	4.561	4.231	4.519	4.223
0.5	5.625	4.435	5.165	4.298	4.892	4.241	4.561	4.183	4.519	4.177
1	5.625	4.434	5.165	4.298	4.892	4.241	4.561	4.183	4.519	4.177

Tableau. 4.23: Comparaison du nombre de Nusselt local pour les conduits circulaire.
Cas d'un coefficient d'échange convectif (h_e), avec le milieu extérieur. ($n=3$)

$\left(\frac{R}{D_h}\right)^2 x^+$	Biot=2		Biot=5		Biot =10		Biot= 100		Biot $\rightarrow \infty$	
	MVR	MVF	MVR	MVF	MVR	MVF	MVR	MVF	MVR	MVF
0.001	17.82	17.57	17.17	16.85	16.15	16.28	12.651	15.86	11.95	15.16
0.002	12.91	13.88	12.31	13.26	11.48	13.03	9.177	12.34	8.797	12.23
0.005	8.503	10.18	7.974	9.690	7.383	9.378	6.138	8.967	5.971	8.912
0.01	6.485	7.969	5.992	7.576	5.555	7.352	4.806	7.082	4.716	7.048
0.02	5.420	6.337	4.953	6.031	4.629	5.874	4.189	5.695	4.138	5.673
0.05	5.081	4.797	4.640	4.585	4.379	4.490	4.065	4.388	4.025	4.376
0.1	5.073	4.056	4.635	3.903	4.376	3.837	4.065	3.771	4.025	3.763
0.2	5.073	3.671	4.635	3.562	4.376	3.517	4.065	3.474	4.025	3.469
0.5	5.073	3.573	4.635	3.485	4.376	3.450	4.065	3.414	4.025	3.410
1	5.073	3.573	4.635	3.485	4.376	3.450	4.065	3.414	4.025	3.410

Tableau. 4.24: Comparaison du nombre de Nusselt local pour les plaques parallèles.
Cas d'un coefficient d'échange convectif (h_e), avec le milieu extérieur. ($n=3$)

$\left(\frac{l}{D_h}\right)^2 x^+$	Biot = 0.10		Biot = 10		Biot = 100		Biot $\rightarrow \infty$	
	MVR	MVF	MVR	MVF	MVR	MVF	MVR	MVF
0.001	24.05	13.71	20.50	12.60	17.81	11.93	17.21	11.89
0.002	18.43	11.44	15.37	10.22	13.69	10.02	13.34	9.867
0.005	12.83	9.007	10.45	8.183	9.710	8.050	9.557	8.068
0.01	10.59	7.926	8.692	7.405	8.275	7.349	8.203	7.343
0.02	9.792	7.516	8.252	7.214	7.943	7.179	7.901	7.174
0.05	9.681	7.456	8.227	7.204	7.928	7.171	7.889	7.167
0.1	9.681	7.456	8.227	7.204	7.928	7.171	7.889	7.167
0.2	9.681	7.456	8.227	7.204	7.928	7.171	7.889	7.167

Tableau. 4.25: Comparaison du nombre de Nusselt local pour les plaques parallèles.
Cas d'un coefficient d'échange convectif (h_e), avec le milieu extérieur. ($n=1$)

$\left(\frac{l}{D_h}\right)^2 x^+$	Biot = 0.10		Biot = 10		Biot = 100		Biot $\rightarrow \infty$	
	MVR	MVF	MVR	MVF	MVR	MVF	MVR	MVF
0.001	25.21	15.19	24.06	13.10	18.21	12.75	17.64	12.71
0.002	19.18	12.28	17.25	10.91	14.04	10.67	13.69	10.64
0.005	13.30	9.626	11.68	8.714	10.00	8.554	9.851	8.539
0.01	10.94	8.445	9.373	7.811	8.532	7.742	8.457	7.734
0.02	10.06	7.976	8.553	7.588	8.175	7.545	8.132	7.540
0.05	9.931	7.903	8.461	7.575	8.157	7.535	8.117	7.530
0.1	9.930	7.892	8.460	7.575	8.157	7.535	8.117	7.530
0.2	9.930	7.901	8.460	7.575	8.157	7.535	8.117	7.530

Tableau. 4.26: Comparaison du nombre de Nusselt local pour les plaques parallèles.
d'un coefficient d'échange convectif (h_e), avec le milieu extérieur. ($n=1/3$)

$\left(\frac{l}{D_h}\right)^2 x^+$	Biot = 0.10		Biot = 10		Biot = 100		Biot $\rightarrow \infty$	
	MVR	MVF	MVR	MVF	MVR	MVF	MVR	MVF
0.001	26.21	17.51	23.85	14.98	18.98	14.50	18.25	14.43
0.002	20.09	14.07	18.09	12.36	14.71	12.03	14.27	11.99
0.005	14.07	10.93	12.43	9.674	10.59	9.496	10.40	9.475
0.01	11.58	9.486	9.995	8.599	9.039	8.499	8.951	8.487
0.02	10.59	8.893	9.049	8.303	8.634	8.240	8.589	8.233
0.05	10.42	8.792	8.923	8.284	8.611	8.225	8.570	8.218
0.1	10.42	8.792	8.923	8.284	8.611	8.225	8.570	8.218
0.2	10.42	8.792	8.923	8.284	8.611	8.225	8.570	8.218

4.5. Distribution de la température:

Dans ce qui suit nous allons représenter la distribution de la température axiale (cf. Fig. 4.16 et 4.17), dans les deux configurations (conduits circulaires et plaques parallèles), en fonction de l'indice de comportement du fluide (n), et de la distance axiale x^+ , avec les deux conditions aux limites: température constante imposée et flux constant imposé à la paroi.

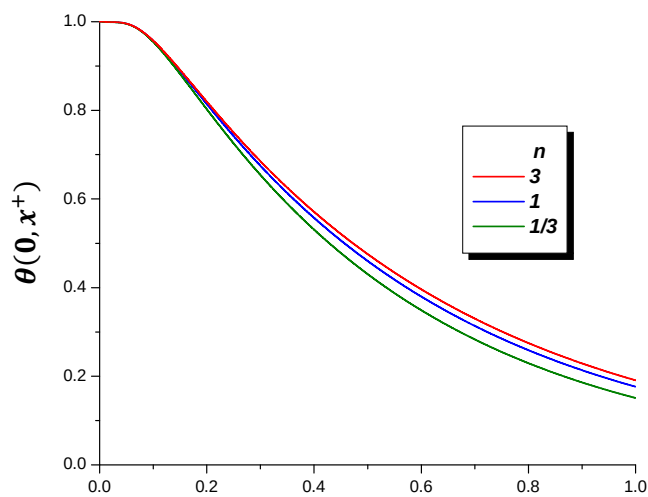


Fig.4 .16 Distribution de la température axiale. Cas de deux plaques parallèles, à température imposée ($Br = 0$) .

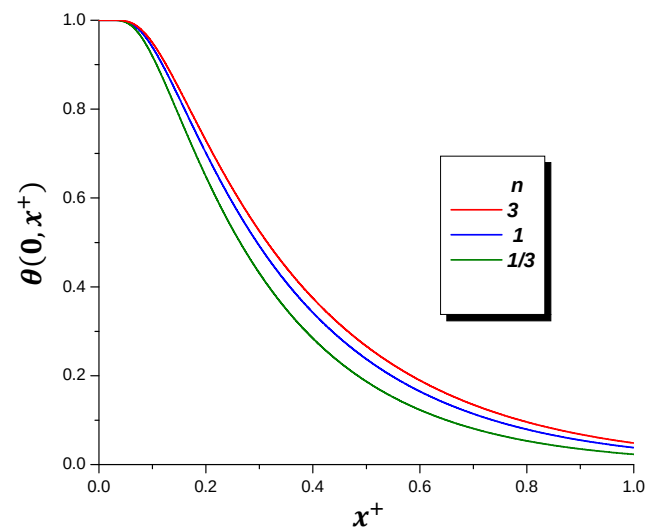


Fig.4. 17: Distribution de la température axiale. Cas de la conduite circulaire, à température imposée ($Br = 0$) .

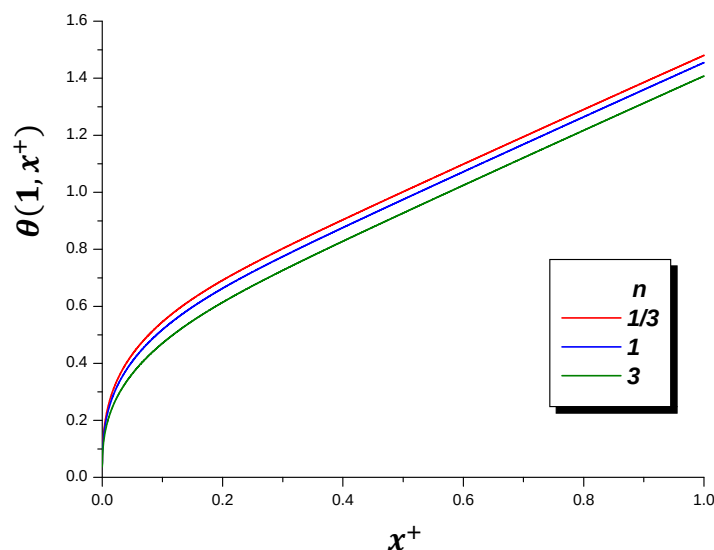


Fig. 4. 18: Température à la paroi. Cas de deux plaques parallèles à flux constant imposé.

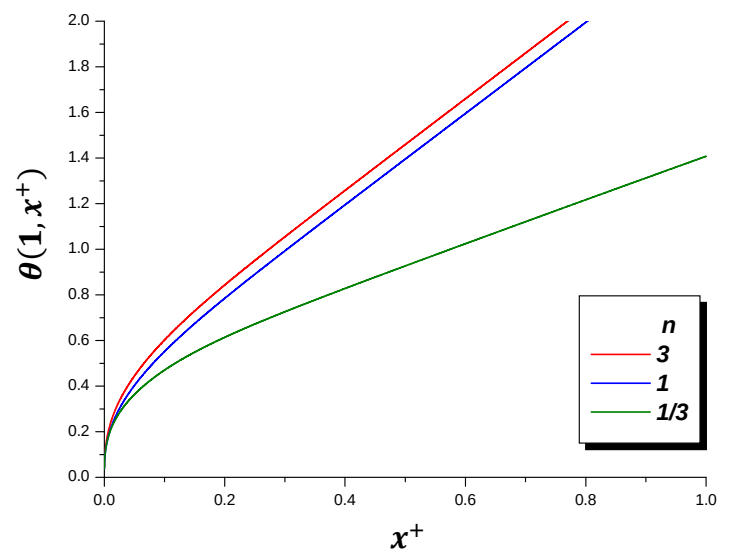


Fig. 4. 19: Température à la paroi. Cas de conduit circulaire à Flux constant imposé.

4.6. Distribution de la température de mélange:

Les figures (4.20) et (4.21) montrent l'évolution de la température de mélange pour les différents fluides étudiés, en fonction de la distance axiale, avec les conditions aux limites de la température imposée. Par contre les figures (4.22) et (4.23) représentent l'évolution de la température de mélange pour la condition du flux imposée à la paroi.

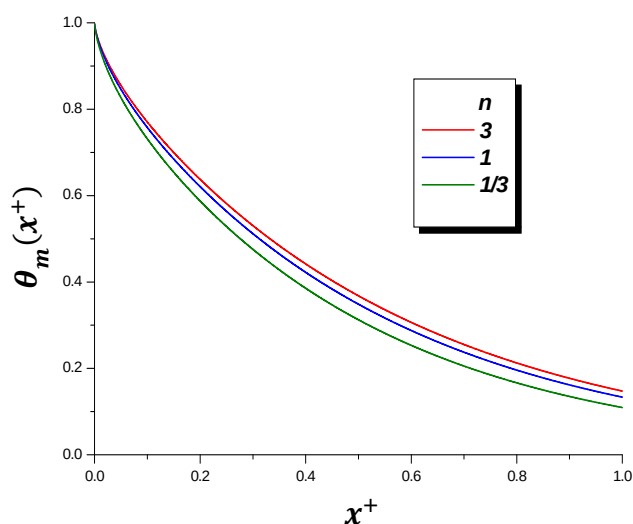


Fig. 4. 20: Distribution de la température de mélange pour deux plaques parallèles, à température imposée.

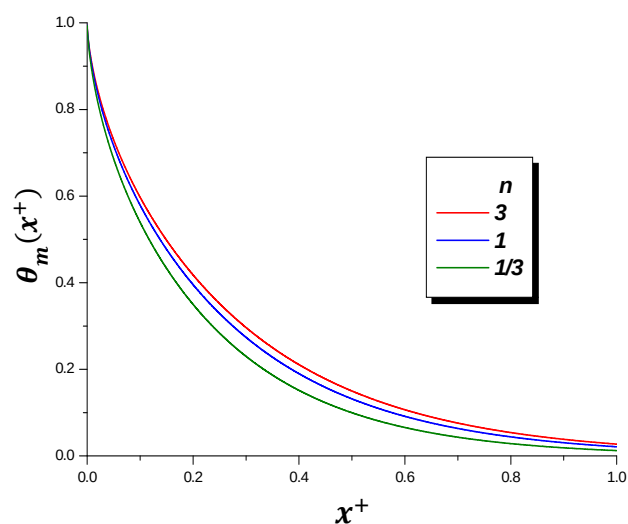


Fig. 4. 21: Distribution de la température de mélange d'un conduit circulaire, à température imposée.

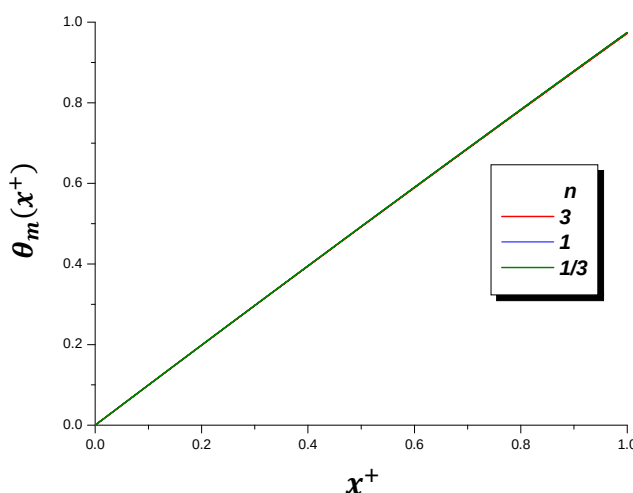


Fig. 4. 22: Température de mélange pour deux plaques parallèles à flux imposé.

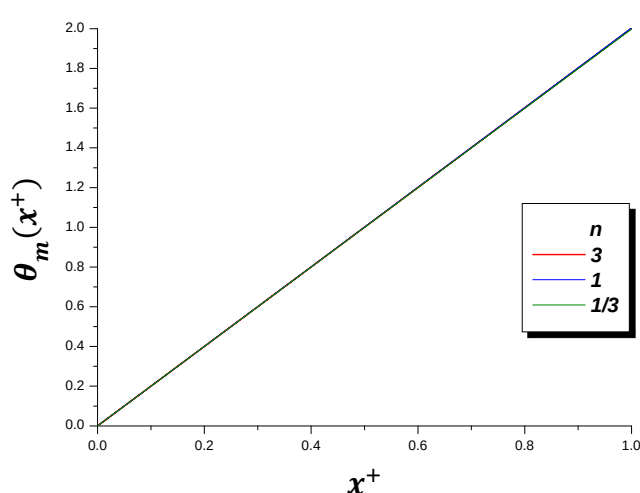


Fig. 4. 23: Température de mélange d'un conduit circulaire à flux imposé.

Dans le cas de la température constante imposée à la paroi, la température axiale et de mélange pour le fluide pseudo plastique diminuent plus rapidement que celle du fluide Newtonien où dilatant.

Dans le cas d'un flux constant imposé à la paroi, la température axiale du fluide pseudo plastique augmente moins rapidement que celle du fluide Newtonien où dilatant. Les températures de mélange pour ces fluides sont égales, et leurs courbes représentatives se confondent.

4.7. Evolution du nombre de Nusselt

La figure (4.24) montre l'évolution du nombre de Nusselt avec un flux constant imposé à la paroi, dans les plaques parallèles, nous remarquons que le fluide pseudo plastique a une valeur asymptotique plus élevée que celle de fluide newtonien où dilatant.

La figure (4.25) montre l'évolution du nombre de Nusselt dans le cas de la température imposée à la paroi, dans ce cas, la même remarque est constatée.

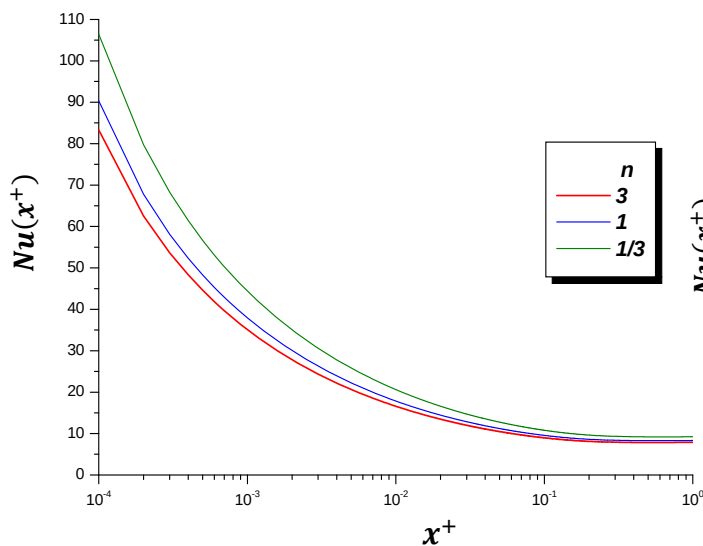


Fig. 4. 24: Evolution du nombre de Nusselt. Plaques parallèles à flux constant imposée.

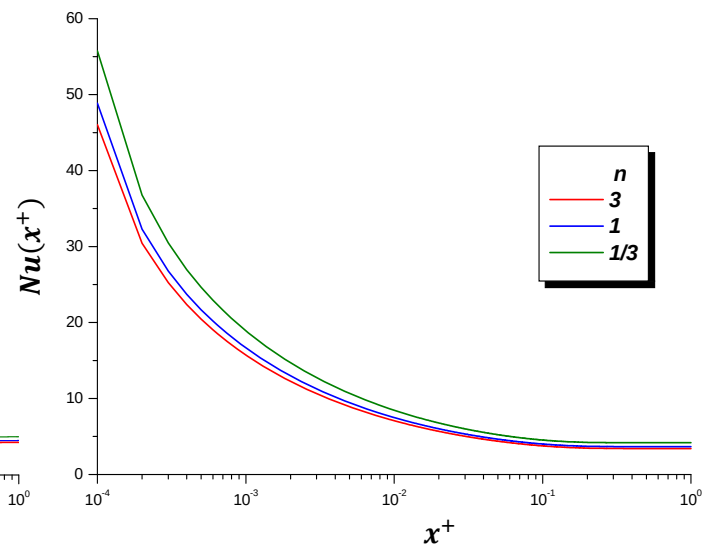


Fig. 4. 25: Evolution du nombre de Nusselt. Conduit circulaire à température imposée.

4.8. Conclusion:

Dans ce chapitre, nous avons traité numériquement par la méthode des volumes finis, le transfert thermo convectif d'un écoulement fluide non Newtonien, dans les conduits circulaires et entre deux plaques parallèles, avec trois conditions aux limites. En plus des remarques qu'on a tirées du chapitre deux et trois, nous pouvons tirer les remarques suivantes:

- La précision des résultats obtenus est très satisfaisante, ce qui indique le bon choix de la méthode, et qu'elle est très efficace pour ce genre de problème.
- Dans le cas de la température constante imposée à la paroi, on ne peut pas négliger l'effet de la dissipation visqueuse, dans le calcul de la valeur asymptotique du nombre de Nusselt. Par contre cette valeur est indépendante du nombre de Brinkman s'il n'est pas nul.
- Dans le cas de la paroi soumise à un coefficient d'échange avec le milieu extérieur, la valeur asymptotique du nombre de Nusselt est d'autant plus élevée que le nombre de Biot est faible.
- Dans le cas d'un flux constant imposé à la paroi, et si on considère l'effet de la dissipation visqueuse, la valeur asymptotique du nombre de Nusselt dépend du nombre de Brinkman.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Dans le premier chapitre, nous avons présenté dans la partie bibliographique l'ensemble des travaux effectués sur le thème de la convection forcée d'un écoulement fluide incompressible dans un conduit. Ces travaux sont représentés respectivement selon que le fluide soit Newtonien ou non-Newtonien. Une étude théorique sur les fluides non-newtoniens ainsi que les modèles mathématiques utilisés dans la description du comportement de ces fluides, nous conduit au choix du modèle dit "loi de puissance" pour modéliser le fluide non-Newtonien développé dans cette étude.

Dans le deuxième chapitre, nous avons traité le problème de la convection forcée laminaire, d'un fluide non-Newtonien entre deux plaques parallèles. Deux types de conditions aux limites sont traités:

- température constante à la paroi.
- échange convectifs paroi- milieu extérieur.

Les équations régissant le problème sont résolues analytiquement, par la méthode variationnelle de Ritz. Les résultats issus de cette analyse sont confrontés à ceux de la référence [9].

La méthode de Ritz est encore utilisée dans le troisième chapitre, pour le cas d'un tube cylindrique. Les résultats obtenus sont comparés avec la même référence.

Dans le quatrième chapitre, une approche numérique par la méthode des volumes finis est développée. Le système d'équations est résolu par un schéma implicite selon la direction axiale (x^+) et un schéma de discrétisation par différences centrées suivant la section transversale du conduit. La distribution des températures est calculée par progression suivant la direction axiale, partant d'un profile transversal connu dans la section d'entrée du conduit. Le modèle numérique est validé avec la littérature.

La méthode mathématique de Ritz n'a jamais été utilisée pour ce type de problème (d'après l'étude bibliographique), elle testée ici avec succès pour les deux géométries (plane et cylindrique) et pour différentes conditions aux limites.

Les résultats obtenus sont confrontés avec plusieurs référence sérieuses. Les écarts enregistrés sont très réduits sauf dans la zone d'entrée dans certains cas.

Les conclusions tirées à partir des résultats présentés dans les chapitres précités peuvent être résumées par les points suivants:

- La température axiale et de mélange du fluide pseudo plastique diminuent plus rapidement comparativement aux fluides Newtonien et dilatant.
- Dans le cas de la température constante imposée à la paroi, et si on considère l'effet de la dissipation visqueuse, la valeur asymptotique du nombre de Nusselt est différente de celle où l'effet est négligé. Cette valeur est aussi indépendante du nombre de Brinkman.
- Pour le cas de condition aux limites du troisième type, on a étudié l'influence du nombre de Biot sur l'évolution de la température et le nombre de Nusselt, pour les grandes valeurs du Biot l'échange avec le milieu extérieur est important, par contre, pour les faibles valeurs de Biot, l'échange est très faibles et les trois type de fluide se comportent de la même manière.
- Pour une valeur donnée du nombre de Biot, la valeur asymptotique du nombre de Nusselt pour différents valeurs du nombre de Brinkman est constante, pour chaque type de fluide, ce qui implique qu'elle est indépendante du nombre de Biot et de Brinkman.
- La valeur asymptotique du nombre de Nusselt est élevée lorsque la valeur du nombre de Biot est faible.
- Dans le cas du flux constant imposé à la paroi, la valeur asymptotique du nombre de Nusselt du fluide pseudo plastique est plus élevée par rapport autres fluides.
- Dans le cas du flux constant imposé à la paroi, et si l'effet de la dissipation visqueuse est pris en compte, la valeur asymptotique du nombre de Nusselt dépend du nombre de Brinkman.

En perspective il est intéressant:

- D'étendre le problème par la considération de la conduction axiale dans le fluide.
- D'inclure d'autre modèle comme le modèle de Bingham, et d'autres.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **L. GRAETZ:** Über Die Warmemleitungsfähigkeit Von Flüssigkeiten, Part1. Annalen Der Physic Und Chemie. Vol. 18, pp. 79-94, (1883)
- [2] **A. BARLITTA:** On Forced Convection in a Circular Duct with Slug Flow And Viscous Dissipation, Int. Comm. Heat and Mass Transfer. Vol. 23, N^o. 1, pp. 69-78, (1996)
- [3] **A. BARLITTA et ENZO ZANCHINI:** Forced Convection In The Thermal Entrance Region Of A Circular Duct With Slug Flow And Viscous Dissipation, Int. J. Heat and Mass Transfer. Vol. 40, N^o. 5, pp. 1181-1190, (1997)
- [4] **O. AYDIN:** Effects of Viscous Dissipation on the Heat Transfer In Forced Pipe Flow. Part 1: Both Hydrodynamically And Thermally Fully Developed Flow, Energy Conversion and Management. Vol. 46, pp. 757-769, (2005)
- [5] **V. JAVERI:** Simultaneous Development Of The Laminar Velocity And Temperature Fields In A Circular Duct For The Temperature Boundary Condition Of The Third Kind, Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 19, pp. 943-949, (1976)
- [6] **A. BARLITTA:** Slug flow heat transfer in circular ducts with viscous dissipation and convective boundary conditions, Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 40, N^o. 17, pp. 4219-4228, (1997)
- [7] **A. BARLITTA et E. MAGYARI:** Forced Convection with Viscous Dissipation In The Thermal Entrance Region of A Circular Duct With Prescribed Wall Heat Flux, Int. J. Heat and Mass Transfer. Vol. 50, pp. 26-35, (2007)
- [8] **W. SUN, S. KAKAS et A. G. YAZICIOGLU:** A Numerical Study of Single- Phase Convective Heat Transfer in Micro tubes For Slip Flow. International Journal of Thermal Sciences Vol. 46, pp. 1084- 1094, (2007)
- [9] **R. M. Cotta et M. N. Ozisik:** Laminar Forced Convection Of Power- Law Non-Newtonian Fluids Inside Ducts, Wärme–Und StoffüBertragung.Vol. 20, pp. 211-218, (1986)
- [10] **R. M. COTTA et M. N. OZISIK:** Laminar Forced Convection To Non-Newtonian Fluids In Ducts With Prescribed Wall Heat Flux, Int. Comm. Heat Mass Transfer. Vol. 13, pp. 325-334, (1986)
- [11] **R. S. PARIKH et MAHALINGAM:** Laminar Tube Flow Heat Transfer In Non-Newtonian Fluids Under Arbitrary Wall Heat Flux, Int. Comm. Heat Mass Transfer. Vol. 15, pp. 1-16, (1988)

- [12] **A. R. MANSOUR:** An Analytical Solution Of Laminar Heat Transfer To Power-Law Non-Newtonian Fluids In Circular Ducts. Graetz-Nusselt Problem, Int. J. Heat Transfer. Vol.16, pp. 199-204, (1989)
- [13] **A. BARLITTA:** Fully Developed Laminar Forced Convection In Circular Ducts For Power – Law Fluids With Viscous Dissipation, Int. J. Heat and Mass Transfer. Vol. 40, No. 1, pp. 15-26, (1997)
- [14] **S. OLEK:** Heat Transfer in Duct Flow of Non-Newtonian Fluids with Axial Conduction, Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 25, No. 7, Pp. 929-938. (1998)
- [15] **O. JAMBAL, T. SHIGECHI, G. DAVAA et S. MOMOKI:** Effect of Viscous Dissipation and Axial Heat Conduction on Heat Transfer for non Newtonian Fluids in Ducts with Uniform Wall Temperature. Part I Parallel Plates And Circular Ducts, Int. Comm. Heat Mass Transfer. Vol. 32, pp. 1165-1173,(2005)
- [16] **P. VALKO:** Solution Of Graetz-Brinkman Problem With Laplace Transform Galarkin Method, Int. J. Heat and Mass Transfer. Vol. 48, pp.1874-1882, (2005)
- [17] **T. BOACA et J. BOACA:** An Unified Numerical Approach Of Steady Convection Between Two Parallel Plates, Applied mathematics and computation. Vol. 215,pp. 2673-2685, (2009)
- [18] **R. F. BARRON, X. WANG et T. AMEEL:** Evaluation of the Eigen values For the Graetz Problem in Slip Flow, Int. Comm. Heat Mass Transfer. Vol. 23, N°. 4, pp. 563-574, (1996)
- [19] **S. D. SAVKAR:** On A Variatinnal Formulation Of Class Of Thermal Entrance Problems, Int. J. Heat And Mass Transfer. Vol. 13, pp. 1187-1197, (1970)
- [20] **S. M. RICHARDSON, .:** Extended Leveque Solution For Flows Of Power Law Fluids In Pipes And Channels, Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 22, pp. 1417- 1423, (1979).
- [21] **J. PEIXINHO, C. DESAUBRY et M. LEBOUCHE:** Heat Transfer Of Non-Newtonian Fluid (Carbopol Aqueous Solution) In Transitional Pipe Flow, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 51, pp. 198-209, (2008)
- [22] **F. TAMISLI:** Laminar Flow Of Non Newtonian Fluid In Channels With Wall Suction Or Injection, Int. J. of Heat and Engineering Science. Vol.44, pp. 650-661, (2006)
- [23] **G. Tunc et Y. Bayazitoglu:** Heat transfer in micro tubes with viscous dissipation. International Journal Heat Mass Transfer. Vol. 44, N°. 13, pp. 2395-2403, (2001).

- [24] **M. BARKHORDARI et S. G. ETEMAD:** Numerical Study of Slip Flow Heat Transfer of non Newtonian Fluids in Circular Micro channels, International Journal of Heat and Fluid Flow. Vol. 28, pp. 1027 -1033, (2007)
- [25] **V. D. Dang:** Trans. ASME, J. Heat (3) (1983) 542.
- [26] **B. C. LYCHE et R. B. BIRD:** The Graetz – Nusselt Problem For A Power –Law Non Newtonian Fluid, Chem. Eng. Sci. Vol. 7, Pp. 853-862, (1964).
- [27] **F. P. INCROPERA et D. P. DEWITT:** Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 5th Ed., Wiley, New York, 2002
- [28] **M. N. OZISIK:** Heat Conduction, John Wiley and Sons, Inc 1980.
- [29] **JOHN. H. LIENHARD IV AND JOHN. H. LIEHARD V:** A Heat Transfer. Textbook-3rd Ed. Cambridge, Ma. Phlogiston Press, 2001.
- [30] **R. B. BIRD, R. C. ARMSTRONG et O. HASSAGER:** Dynamics Of Polymeric Liquids. Vol. I, J. Wiley & Sons. New York.(1977)
- [31] **R. P. CHHABRA et J. F. RICHARDSON:** Non-Newtonian Flow In The Process Industries, Linacre House, Jordan Hill.
- [32] **R. S. SCHECHTER:** The Variatinnal Methods Engineering, Mcgraw-Hill, New York 1964.
- [33] **J. N. REDDY:** Energy Principles and Variatinnal Methods in Applied Mechanics. J. Wiley & Sons. Inc, New York 1978.
- [34] **S. V. PATANKAR:** Numerical Heat Transfer And Fluid Flow. Hemisphere Publishing Corporation.
- [35] **ANDRE FORTIN:** Analyse numérique pour ingénieurs, éditions de l'école polytechnique de Montréal, 1995.
- [36] **J. T. KATSIKADELIS:** A Generalized Ritz Method for Partial Differential Equations in Domains of Arbitrary Geometry Using Global Shape Functions, Engineering Analysis with Boundary Elements. Vol. 32, pp. 353-367, (2008)

ANNEXE

FONCTIONNELLE ET FORMULATION VARIATIONNELLE.

1. Fonctionnelle:

La fonctionnelle I est un opérateur de l'espace vectorielle Y vers l'ensemble des nombres réelle R .

Par exemple:

$$I(y) = \int_0^l (ay(x) + by'(x) + cy''(x)) dx \quad (A. 1)$$

Où:

$$I(y) = \int_0^l F(x, y, y', y'') dx, \quad y = y(x) ; y' = \frac{dy}{dx} ; y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (A. 2)$$

qualifié un fonctionnel. Pour toute fonction y dérivable autant que nécessite l'équation (A. 1).

La valeur du fonctionnelle I dépend du choix de la fonction y .

1.1. Première variation d'une fonctionnelle:

$I(y)$ représente l'intégrale défini sur l'intervalle $[a, b]$ par:

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (A. 3)$$

Dans le cas ou a et b ne dépendent pas de y on a :

$$\delta I(y) = \delta \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (A. 4)$$

δ c'est un opérateur variationnelle (dont les propriétés sont semblable à celles de l'opérateur différentiel : d).

On obtient :

$$\delta I(y) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx \quad (A. 5)$$

1.2. Extremum d'un fonctionnelle:

Dans la résolution des problèmes par les principes de calcul variationnelle, on cherche l'extremum de la forme intégrale du fonctionnelle F (fonction d'une fonction), par la recherche d'une fonction $y = y(x)$; qui rend $I(y)$ minimum.

C'est-à-dire :

$$\delta I(y) = 0 \quad (A. 6)$$

Cette équation représente la condition de stationnarité de l'intégrale $I(y)$.

Pour ce là la fonctionnelle F doit être vérifiée l'équation D'Euler (A. 7), associée à l'intégrale $I(y)$.

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (\text{A. 7})$$

1.3. Recherche de la fonctionnelle F:

Si le problème est donné par sa formulation différentielle, on détermine la fonctionnelle F par identification de l'équation d'Euler avec l'équation différentielle.

Exemple 1: On cherche la fonctionnelle du système:

$$y'' - y = x ; y(0) = y(1) = 0 \quad (\text{A. 8})$$

Recherche de la fonctionnelle: La fonctionnelle F est déterminée par le système suivant:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_x} \right) = -y_{xx} \quad (\text{A. 9a})$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = y + x \quad (\text{A. 9b})$$

De (A.1.9.a) on trouve :

$$F_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{A. 9c})$$

De (A.1.9.b) on trouve :

$$F_2 = \frac{1}{2} y^2 + xy \quad (\text{A. 9d})$$

La fonctionnelle est donc:

$$F = F_1 + F_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} y^2 + xy \quad (\text{A. 10})$$

La forme variationnelle de l'équation (A. 8), est donc :

$$I = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} y^2 + xy \right] dx \quad (\text{A.11})$$

Exemple 2 : l'équation d'énergie pour le cas de deux plaques parallèles.

Après la transformation de Laplace, on trouve :

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^{+2}} = u^+ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x^+} \quad (\text{A. 12a})$$

On peut la mettre sous la forme :

$$su^+ \bar{\theta} - \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^{+2}} = 0 \quad (\text{A. 12b})$$

par identification avec l'équation d'Euler (A. 7), on trouve:

$$-\frac{\partial}{\partial z^+} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \bar{\theta}_{z^+}} \right) = -\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^{+2}} \quad (\text{A. 13a})$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \bar{\theta}} = su^+ \bar{\theta} \quad (\text{A. 13b})$$

de (A. 13a) on trouve :

$$F_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z^+} \right)^2 \quad (\text{A. 14a})$$

de (A. 13b) on trouve :

$$F_2 = \frac{1}{2} su^+ \bar{\theta}^2 - u^+ \bar{\theta} \quad (\text{A. 14b})$$

La fonctionnelle dans ce cas là est :

$$F = F_1 + F_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z^+} \right)^2 + \frac{1}{2} su^+ \bar{\theta}^2 - u^+ \bar{\theta} \quad (\text{A. 15})$$

La formulation variationnelle est:

$$I = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z^+} \right)^2 + \frac{1}{2} su^+ \bar{\theta}^2 - u^+ \bar{\theta} \right] dz^+ \quad (\text{A. 16})$$

Si le problème physique est modélisé par la forme générale:

$$\nabla^2 T(r) + A(r)T(r) + \frac{1}{k}g(r) = 0 \quad (\text{A. 17a})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta_i} + H_i T = f_i(r_s), i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (\text{A. 17b})$$

Dans ce cas là forme variationnelle est donnée par l'expression suivante:

$$I = \int_R \left[(\nabla T)^2 - A(r)T^2 - \frac{2}{K}g(r)T \right] dv + \sum_{i=1}^N \int_{N_i} (H_i T^2 - 2f_i T) dS. \quad (\text{A. 18})$$

2. Résolution par la méthode de Ritz:

Nous présentons dans cette section, la méthode variationnelle de Ritz, après l'obtention de la formulation variationnelle intégrale :

$$I(y) = \int_a^b F(r, T, T') dr \quad (\text{A. 19})$$

La méthode passe par les étapes suivantes:

1^{ère}. Etape Choix de l'approximation:

L'approximation est donnée sous la forme:

$$\tilde{T}(r) = \psi_0(r) + \sum_{i=1}^N C_i \varphi_i(r) \quad (\text{A. 20})$$

$\psi_0(r)$ est introduite dans le cas des conditions aux limites non homogène.

Les fonctions de base $\varphi_i(r)$ sont construites de telle sorte qu'elles satisfient les conditions aux limites homogène. Elles sont des fonctions polynomiales, trigonométriques, exponentielle, ou des fonctions spéciales comme les fonctions de Bessel.

2^{ème}. Etape : Discrétisation de l'équation intégrale.

L'approximation $\tilde{T}$ étant choisie, sa substitution dans l'équation la forme intégrale permet de discrétiser l'équation intégrale, et on obtient :

$$I(C_1, C_2, \dots, C_N) = \int F(r, C_1, C_2, \dots, C_N) dr \quad (\text{A. 21})$$

$C_1, C_2, \dots, C_N$ sont les paramètres d'approximation.

3^{ème}. Etape: Optimisation des paramètres de l'approximation.

La condition pour que la fonctionnelle soit minimum est:

$$\frac{\partial I(C_1, C_2, \dots, C_N)}{\partial C_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{A. 22})$$

L'équation (A. 22) aboutit à un système de N équations à N inconnues C_i .

La résolution du système d'équations linéaires permet de trouver le vecteur $\{C\}$.

L'approximation recherché est obtenue alors par:

$$\tilde{T}(r) = [\varphi]\{C\} \quad (\text{A. 23})$$