

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieure et de**  
**la Recherche Scientifique**

**Université de Boumerdès M'hamed Bouguerra**  
**Faculté des sciences de l'ingénieur**  
**Département de Mécanique**

MEMOIRE DE MAGISTER

*Intitulé :*

**ETUDE DE LA CONVECTION NATURELLE  
TURBULENTE DANS DES CAVITES  
TRAPEZOÏDALES CHAUFFEES PAR DESSOUS**

*Présenté par :*

**NAÏT BOUDA Faïçal**  
Ingénieur d'état en Génie Mécanique

Le : 13/06/2001

*Devant le jury composé de :*

MASRI Mohand Ameziane	Maître de conférence	I.A.P.	Président
HEDIBEL Mohamed	Maître de conférence	U.Boumerdès	Examineur
ZIOUCHI Abdenacer	Chargé de cours	I.A.P.	Examineur
BOUHADEF Mustapha	Professeur	U.S.T.H.B.	Directeur
BOUSSAID Mohamed	Chargé de cours	I.A.P.	Co-directeur

## *DEDICACE*

*Je dédie se travail :*

- *à mes très chers parents*
- *à la mémoire de mon grand père*
- *à ma grand mère*
- *à mes frères et sœurs*
- *à toute la famille Naït Bouda et Tizzerarine*
- *à mon frère et ami intime Zoubir et à mes frères et amis, que je ne peut oublier, Messaoud, Mohamed, Mourad et Ali.*
- *à la mémoire de nos glorieux Martyres et de tous les Martyrs des causes justes.*

## REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes plus vifs remerciements à Monsieur le Professeur **M. BOUHADEF** et Monsieur **M. BOUSSAID** pour m'avoir proposé cette étude et pour tout ce qu'ils m'ont prodigué comme aide, soutien et suivi.

Je remercie également Monsieur **M. A. MASRI** qui a bien voulu présider le jury de soutenance. Mes remerciements vont aussi à Messieurs **M. HEDIBEL** et **A. ZIOUCHI** pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin pour la réalisation de ce travail, en particulier mes compagnons du laboratoire de thermique : **MOHAND SAID**, **HASSENE**, **AHMED** et **TAREK** sans oublier mes amis et frères : **ZOUBIR**, **SAMIR**, **MOUBAREK**, **LARBI** et **MOHAMED** pour leur soutien moral et matériel.

Enfin, je ne peux oublier de remercier mon oncle **EL MEHDI** et sa femme pour tout ce qu'il ont fait envers moi durant mes études de post-graduation à Boumerdès.

## Résumé

L'objet de notre étude présentée dans ce mémoire est la modélisation des écoulements de convection naturelle turbulente dans des cavités chauffées par dessous et refroidies par la paroi supérieure. Deux configurations ressortent de ce type de problème selon que la cavité soit rectangulaire, dans ce cas on est en présence d'une configuration dite de Rayleigh-Bénard, ou ayant la paroi supérieure froide inclinée (cavité trapézoïdale). Ces deux configurations sont très répandues dans diverses applications en milieu industriel, notamment dans les domaines de la distillation solaire et la sécurité des réacteurs nucléaires, ainsi que dans le domaine de l'habitat. Il se trouve que dans la plupart de ces applications les écoulements convectifs sont souvent turbulents, d'où l'intérêt et l'importance de ce présent travail d'autant plus que les études numériques sur ce type de problème sont plutôt rares dans la littérature.

La modélisation du problème est effectuée par le moyen du modèle  $k-\varepsilon$  standard avec l'utilisation des « lois de paroi ». La résolution numérique est faite avec le code de calcul TEAM, basé sur la méthode des volumes finis et l'algorithme PISO. Le code de calcul, ayant fait l'objet d'une adaptation aux problèmes de convection naturelle, et les choix numériques adoptés sont testés avec le cas classique d'une cavité carrée « différentiellement chauffée » pour des nombres de Rayleigh élevés.

L'étude de la configuration Rayleigh-Bénard nous a permis de décrire la structure de l'écoulement et le phénomène convectif turbulent, et de voir l'influence de l'allongement et du nombre de Rayleigh sur le transfert de chaleur et les grandeurs turbulentes. Une corrélation pour l'estimation du flux thermique échangé est proposée. L'étude de la cavité trapézoïdale est menée pour le cas d'une cavité avec des angles d'inclinaison modérées. Les résultats obtenus pour le cas particulier étudié rejoignent globalement les constatations et les résultats expérimentaux antérieurs. Les limites constatées dans l'étude du cas trapézoïdal sont dues vraisemblablement à l'effet qu'aurait l'augmentation de l'angle d'inclinaison et de l'allongement sur le bien fondé de l'hypothèse de bidimensionalité et sur l'accroissement de l'effet de la diffusion numérique, et par conséquent sur la réalité physique des solutions obtenues. Ainsi, ce travail nous a permis de contribuer à la compréhension phénoménologique de la convection naturelle turbulente dans les milieux confinés et de mettre en exergue les difficultés que renferme ce type de problème.

Mots clés : Convection naturelle , Rayleigh-Bénard, Cavité trapézoïdale , Turbulence ,  
Modèle  $k-\varepsilon$  , Méthode des volumes finis.

## ملخص

دراستنا هذه هي دراسة عددية للحمل الطبيعي المضطرب داخل حاوية ذات شكل شبه منحرف مسخنة من الأسفل و مبردة من جانبها العلوي.

موضوع هذه الدراسة يجد أهمية في كون استعملاته متعددة و متنوعة بالخصوص في التجهيزات المستعملة في التطبيقات الشمسية و المعمارية و كذا في عمليات تبريد أجهزة المحطات النووية و الأجهزة الإلكترونية و تطبيقات أخرى. تكمن أهمية هذه الدراسة أيضا في كونها تمكننا من امتلاك نتائج تكون قاعدة لتجريب طرق عددية و مقارنة النتائج التطبيقية بالنتائج العددية.

استعملنا في دراستنا العددية ذو بعدين برنامج حسابي قائم على أساس طريقة الحجوم المنتهية و ألغورثم PISO

بداية قمنا بالمصادقة على الوسيلة العددية المنتهجة بواسطة حاوية مسخنة و مبردة أفقيا. النتائج المحصل عليها مرضية و تسمح لنا باستعمال ذلك النهج العددي في دراستنا.

في حالة الحاوية المسخنة من الأسفل الدراسة خصت حاويات ذات استطالة تساوي 1، 2 و 3 و عدد رايلي (RA) متغير من  $10^6$  إلى  $10^9$ . بالنسبة للحاويات المستطيلة النتائج كانت مقبولة و تمكننا من اقتراح عبارة تعطينا التدفق الحراري بدلالة عدد رايلي.

الحاويات ذات الشكل الشبه المنحرف اقتصرت دراستنا على حالة حاوية ذات استطالة تساوي 1 و زوايا الميل ليست بكبيرة.

هذا الشكل قد يكون راجع إلى كون الحاويات ذات زوايا و استطالة كبيرة يغلب عليها طابع البعد الثلاثي مما لا يسمح لنا بالحصول على نتائج واقعية باستعمال طريقة ذات بعدين.

## ABSTRACT

The object of our study presented in this memory is the modelisation of turbulent natural convection flow in cavities heated from below and cooling by the top wall. Two configurations emerge from this type of problem according to whether the cavity is rectangular, in this case we are in presence of the Rayleigh-Bénard convection, or having the top cold wall inclined (trapezoidal cavity) which differs from the first because of the presence of horizontal thermal gradients. These two configurations are met in several applications in industry, such as in solar stills and nuclear reactor, as well as in the habitation. It is found that in most of these applications the convective flows are often turbulent, which gives a great importance to this present work especially if we know that numerical studies on this type of problem are rather rare in the literature.

The modelisation of the problem is undertaken by the means of the standard  $k-\epsilon$  model, with and without the use of the " wall functions ". The numerical resolution has been made with the TEAM code, based on the finite volumes method and on the algorithm PISO. A validation of the code adapted to natural convection problems and of the numerical choices has been made with the classic case of a « differentially heated » square cavity.

The study of the Rayleigh-Bénard configuration and the case of a trapezoidal cavity has allowed us to describe the structure of the flow and the convective phenomenon, and to see the influence of the aspect ratio and the Rayleigh number, particularly on the heat transfer and on turbulent quantities. This has led us to propose a correlation in order to estimate heat flux exchanged. We have met some difficulties to study the trapezoidal case. Probably it is due to the fact that the increase of the wall incline and aspect ratio would have a significant effect on the well based of the two-dimensional hypothesis as well as on the increase of « false diffusion », and consequently on the physical reality of the obtained solutions. The results of this particular case are in good agreement with observations results of anterior experimental studies. Thus, this study has allowed us to contribute to the comprehension of the turbulent natural convection phenomenon in confined middle.

Keys words : Natural convection, Rayleigh-Bénard, Trapezoidal cavities, Turbulence,  $k-\epsilon$  model, Finite volumes Method.

## TABLE DES MATIERES

<b>Introduction</b> .....	<b>4</b>
<b>Chapitre 1 : Synthèse bibliographique</b> .....	<b>6</b>
1. Cavité carrée différentiellement chauffées .....	6
2. Configuration Rayleigh–Bénard .....	11
3. Cavité trapézoïdale chauffée par le bas .....	11
<b>Chapitre2 : Modélisation de la turbulence</b> .....	<b>14</b>
1. Caractéristiques d'un écoulement turbulent .....	14
2. Moyénisation de l'écoulement turbulent .....	14
3. Concept de viscosité tourbillonnaire.....	16
4. Les modèles de turbulence.....	17
4.1 Modèles à zéro équation.....	17
4.2 Modèles à une équation.....	17
4.3 Modèles à deux équations.....	18
<b>Chapitre 3 : Formulation mathématique et procédure numérique</b> .....	<b>19</b>
1. Mise en équations d'un écoulement de convection naturelle .....	19
1.1 Hypothèses de travail .....	19
1.2 Equations de base .....	19
1.3 Mise en œuvre du modèle k- $\epsilon$ .....	20
1.4 Mise sous forme adimensionnelle .....	22
1.5 Conditions aux limites.....	24
2. Procédure numérique.....	25
2.1 Présentation et Structure du code de calcul TEAM.....	25
2.2 Adaptation du code aux problèmes de convection naturelles .....	26
2.3 Méthodes et schémas numériques adoptés .....	26
<b>Chapitre 4 : Validation de la procédure numérique</b> .....	<b>29</b>
1. Convection naturelle laminaire à grand nombre de Rayleigh.....	29
1.1 Cavité carrée différentiellement chauffée .....	29
1.2 Configuration Rayleigh-Bénard.....	31
2. Convection naturelle turbulente en cavité différentiellement chauffée.....	33
<b>Chapitre 5 : Convection naturelle turbulente dans des cavités</b> .....	<b>38</b>
chauffées par dessous	
1. Position du problème.....	38
2. Cavité rectangulaire chauffée par le bas.....	40
2.1 Effet de l'utilisation de la procédure « Lois de paroi ».....	40
2.2 Etude d'indépendance du maillage par rapport aux solutions.....	41
2.3 Analyse de l'écoulement convectif turbulent en cavité carrée.....	43
2.4 Influence de AL et Ra sur le régime d'écoulement et le transfert de chaleur....	48

2.4.1 Influence de l'allongement .....	48
2.4.2 Influence du nombre de Rayleigh.....	51
2.4.3 Corrélation pour l'estimation du transfert de chaleur... ..	58
3. Cavité trapézoïdale.....	60
3.1 L'effet de l'emploi des « lois de paroi » sur la paroi chaude .....	60
3.2 Analyse de l'écoulement convectif turbulent dans la cavité trapézoïdale .....	61
3.3 Influence de l'angle d'inclinaison sur l'écoulement convectif turbulent .....	67
3.4 Illustration de l'ordre de grandeur réel de l'écoulement moyen .....	71
4. Synthèse des difficultés rencontrés dans la résolution numérique.....	72
4.1 Etape de validation.....	73
4.2 Etape de résolution de la cavité chauffée par dessous.....	73
<b>Conclusion général.....</b>	<b>74</b>
Annexe A.....	76
Annexe B.....	80
Annexe C.....	83
Annexe D.....	87
<b>Références bibliographiques.....</b>	<b>89</b>



## Liste des Figures et Tableaux

### A/ Liste des Figures :

Numéro de Figure	Page	Numéro de Figure	Page	Numéro de Figure	Page
Figure 4.1	30	Figure 5.13	47	Figure 5.35	60
Figure 4.2	30	Figure 5.14	48	Figure 5.36	60
Figure 4.3	31	Figure 5.15	48	Figure 5.37	61
Figure 4.4	32	Figure 5.16	49	Figure 5.38	62
Figure 4.5	34	Figure 5.17	49	Figure 5.39	62
Figure 4.6	34	Figure 5.18	50	Figure 5.40	63
Figure 4.7	35	Figure 5.19	51	Figure 5.41	64
Figure 4.8	36	Figure 5.20	52	Figure 5.42	64
Figure 4.9	36	Figure 5.21	53	Figure 5.43	65
Figure 4.10	36	Figure 5.22	53	Figure 5.44	65
Figure 5.1	39	Figure 5.23	53	Figure 5.45	66
Figure 5.2	41	Figure 5.24	54	Figure 5.46	66
Figure 5.3	42	Figure 5.25	54	Figure 5.47	67
Figure 5.4	43	Figure 5.26	54	Figure 5.48	68
Figure 5.5	43	Figure 5.27	55	Figure 5.49	69
Figure 5.6	44	Figure 5.28	55	Figure 5.50	69
Figure 5.7	45	Figure 5.29	56	Figure 5.51	70
Figure 5.8	45	Figure 5.30	56	Figure B.1	80
Figure 5.9	45	Figure 5.31	57	Figure C.1	83
Figure 5.10	45	Figure 5.32	58	Figure C.2	86
Figure 5.11	46	Figure 5.33	59		
Figure 5.12	46	Figure 5.34	59		

### B/ Liste des Tableaux :

Numéro de Tableau	Page	Numéro de Tableau	Page	Numéro de Tableau	Page
Tableau 3.1	24	Tableau 5.1	40	Tableau 5.6	60
Tableau 4.1	29	Tableau 5.2	42	Tableau 5.7	62
Tableau 4.2	32	Tableau 5.3	48	Tableau 5.8	65
Tableau 4.3	34	Tableau 5.4	52	Tableau 5.9	69
Tableau 4.4	35	Tableau 5.5	57		

## *NOMENCLATURE*

- a : Coefficient des variables dépendantes dans les équations discrétisées
- b : Terme constant dans l'équation discrétisée
- AL : Rapport de forme ou Allongement de la cavité
- g : Accélération de pesanteur
- H : Hauteur de la cavité rectangulaire et hauteur maximale de la cavité trapézoïdale
- H<sub>0</sub> : Hauteur minimale de la cavité trapézoïdale
- k : Energie cinétique de la turbulence
- k<sub>w</sub> : Energie cinétique de la turbulence au voisinage de la paroi
- $\bar{k}$  : Energie cinétique du mouvement moyen turbulent
- K : Energie cinétique adimensionnée de la turbulence
- L : Largeur de la cavité
- NI : Nombre de points du maillage suivant l'axe des x
- NJ : Nombre de points du maillage suivant l'axe des y
- Nu : Nombre de Nusselt
- p : Pression
- P : Pression moyenne adimensionnée
- Pr : Nombre de Prandtl
- Ra : Nombre de Rayleigh,  $\frac{g\beta\Delta TH^3}{\nu^2} Pr$
- S : Terme source et valeur adimensionnée de la stratification au cœur de la cavité
- S<sub>p</sub> : Coefficient de la variable dépendante  $\Phi_p$  dans le terme source
- S<sub>c</sub> : Partie constante du terme source linéarisé
- t : Temps
- T : Température
- T<sub>m</sub> : Moyenne arithmétique des températures des parois actives de la cavité
- $\Delta T$  : Ecart de température entre les deux parois actives de la cavité, (T<sub>c</sub>-T<sub>f</sub>)
- u, v : Composantes de la vitesse suivant respectivement x et y
- u<sub>w</sub> : Vitesse tangente à la paroi
- U, V : Composantes adimensionnées de la vitesse moyenne
- x, y : Coordonnées spatiales
- y<sub>w</sub> : Distance normale à la paroi de la vitesse u<sub>w</sub>

X, Y : Coordonnées spatiales adimensionnées  
XU : Distance adimensionnelles donnant la position suivant X de la vitesse U  
YV : Distance adimensionnelles donnant la position suivant Y de la vitesse V

### **Symboles grecques**

$\alpha$  : Angle d'inclinaison de la paroi supérieur de la cavité trapézoïdale  
 $\beta$  : Coefficient d'expansion thermique  
 $\varepsilon$  : Taux de diffusion de l'énergie cinétique de turbulence  
 $\varepsilon$  : Taux de diffusion de l'énergie cinétique de turbulence adimensionné  
 $\Phi$  : Variable dépendante  
 $\mu$  : Viscosité dynamique  
 $\nu$  : Viscosité cinématique  
 $\theta$  : Température adimensionnée  
 $\rho$  : Masse volumique  
 $\tau$  : Contrainte tangentielle  
 $\tau_w$  : Contrainte tangentielle au voisinage de la paroi  
 $\Gamma$  : Coefficient de diffusion

### **Indices inférieurs**

c : Relatif à la paroi chaude  
f : Relatif à la paroi froide  
P : Relatif au nœud centrale d'un volume de contrôle considéré  
E, W, N, S : Relatifs aux nœuds voisins du nœud principale P  
e, w, n, s : Relatifs aux interfaces entre les nœuds du volume de contrôle  
moy : Valeur moyenne  
max : Valeur maximale  
t : Relatif à une grandeur turbulente

### **Indices supérieurs**

\* : Relatif à un estimé  
' : Relatif a une valeur fluctuante ou à une correction d'une variable dépendante  
— : Relatif à une moyenne temporelle de la variable dépendante

## INTRODUCTION

Dans de beaucoup d'applications industrielles, de la chaleur est transportée par convection naturelle. Les écoulements sont dans ce cas générés par les effets de poussée d'Archimède liés à l'action des champs hétérogènes de masse volumique eux mêmes provoqués par des différences de températures [1]. Contrairement au phénomène de convection forcée, ou le plus souvent les écoulements sont découplés du transfert de chaleur, pour la convection naturelle ce sont les gradients thermiques qui donnent naissance au mouvement. Les équations représentatives sont donc couplées, ce qui augmente la le degré de difficulté des problèmes de ce type.

On trouve la convection naturelle en milieu confiné dans diverses applications industrielles telles que l'exploitation de l'énergie solaire (collection, distillation,..), la climatisation des locaux, la sécurité des édifices et appareils industriels (réacteurs thermonucléaires, composants électroniques,..), les fours, les procédés de fabrication, l'industrie agro-alimentaire, etc...

Dans la plupart de ces applications, les écoulements rencontrés sont turbulents [2]. Les cavités prismatiques représentent les géométries les plus souvent rencontrées. Il est donc normal qu'un intérêt important soit porté sur l'étude de la convection naturelle dans ce type de cavités. Beaucoup d'études ont été réalisées concernant la convection naturelle dans des cavités tant expérimentales que numériques. Il y'a quelques temps encore, il n'était pas envisageable de résoudre des problème de convection turbulent sur un PC. Les récents développement dans le domaine du PC et des modèles numériques, permettent d'appréhender ce genre de problèmes [3].

Les écoulements de convection naturelle dans les cavités rectangulaires relèvent généralement de deux grandes catégories de problèmes :

- Cas de la cavité rectangulaire différentiellement chauffée : Dans ce cas le gradient de température est perpendiculaire au champ de pesanteur. La configuration « différentiellement chauffée » est caractérisée par des structures stables à dominance bidimensionnelles même pour des régimes turbulent.
- Cas de la cavité rectangulaire chauffée par en dessous : Le champ de pesanteur est ici parallèle au gradient thermique. C'est la configuration dite de « Rayleigh-Bénard » . Cette configuration présente un caractère tridimensionnel dès que l'équilibre mécanique est rompu avant même que l'écoulement ne devienne turbulent.

Un type de configuration géométrique est rencontré dans certaines applications telles que l'habitat et la distillation solaire. C'est le cas des cavités de formes trapézoïdales dont la paroi horizontale basse est plus chaude que la paroi supérieure inclinée. Il est vrai que cette configuration semble proche de la convection Rayleigh-Bénard, mais la présence d'une frontière inclinée provoque un mouvement convectif dès qu'il existe une distribution non-uniforme de température ce qui signifie l'inexistence d'état de repos, ce type de configuration échappe donc à toute classification immédiate[4].

L'aspect tridimensionnel et les instabilités caractérisant les deux dernières configurations cités et fait que l'étude de celles-ci, notamment en turbulent, ne peut être appréhendée rigoureusement que par le moyen d'une modélisation tridimensionnelle. Cependant, la résolution numérique d'un écoulement turbulent tridimensionnel demeure assez complexe et très coûteuse en terme de temps de calcul et qui ne peut être réalisée dans un cadre aussi restreint qu'une étude de Magister. On s'oriente alors vers une modélisation bidimensionnel sachant que cette hypothèse simplificatrice peut altérer sensiblement la fiabilité des résultats obtenus.

Dans ce mémoire, nous présentons au premier chapitre une synthèse des travaux concernant l'étude de la convection naturelle turbulente dans les cavités . Le deuxième chapitre est consacré à des généralités sur la turbulence et ses modèles, puis on procède au chapitre suivant, à la mise en équation de l'écoulement de convection naturelle turbulente et à la présentation de la procédure numérique adoptée. Le quatrième chapitre est consacré à la validation du code de calcul que nous adaptons aux problèmes de convection naturelle et de la procédure numérique pour des nombres de Rayleigh élevés pour différentes configurations. Le dernier chapitre propose des solutions numériques de la convection naturelle turbulente dans des cavités rectangulaires et trapézoïdales chauffées par le bas et refroidie par la paroi supérieure. Notre travail se termine par une conclusion qui fait ressortir les points essentiels à retenir dans cette étude et les recommandations pour d'éventuels travaux sur ce thème.

# Chapitre 1

## *SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE*

La cavité rectangulaire « différentiellement chauffée » a fait l'objet d'un nombre importants durant les trois dernières décennies, et des solutions de référence dites « Benchmark » ont été proposées par De Vahl Davis [5], P. Le Quéré [6] pour les régimes laminaire. Les régimes transitoires sont aussi largement traités [7] à [11]. Beaucoup d'études existent aussi concernant les régimes turbulents. Une tentative de regroupement des résultats pour proposer une « Benchmark solution » est même réalisée voir référence [12]. Les études ont surtout portées sur le cas de la cavité carrée avec une sollicitation de  $Ra=5 \times 10^{10}$ .

Par contre, les études concernant la configuration Rayleigh-Bénard [13] à [18] et celles concernant les cavités non-rectangulaires chauffées par dessous [19] à [23] sont limitées généralement aux régimes laminaires et transitoires, notamment en ce qui concerne les travaux de modélisation numériques. Pour les régimes turbulents, très peu de travaux existent, en particulier lorsque le fluide confiné est de l'air. Néanmoins, on retrouve quelques études expérimentales en régime faiblement turbulent pour des cas proches de ceux qu'on aura à traiter, notamment la configuration Rayleigh-Bénard [24] à [25] et la cavité trapézoïdale [4] à [26], ainsi que celui de la cavité triangulaire [20]. Ces quelques références sont d'ailleurs utilisées dans ce mémoire pour comparer et valider les résultats que nous obtenons.

Nous présentons dans ce qui suit une revue bibliographique de quelques travaux effectués durant les vingt dernières années dans le domaine de la convection naturelle turbulente en cavité dans les trois configurations : « différentiellement chauffée », « Rayleigh-Bénard » et « cavité trapézoïdale chauffée par le bas ».

## 1. Cavité différentiellement chauffée

N. C. MARCATOS et K. A. PERICLEOUS ( 1984) [27]

Cette étude concerne une cavité confinant de l'air et les sollicitations imposées occasionnent des nombres de Rayleigh (Ra) variant entre  $10^3$  et  $10^{16}$ . L'écoulement est considéré comme turbulent pour des  $Ra > 10^6$ . Le modèle de turbulence utilisé est le modèle k-à « standard ». La géométrie est discr tiss e grâce à la méthode des volumes finis avec un schéma upwind pour les termes convectifs et un terme source linéarisé. Cette procédure assurerait plus de stabilité numérique. Une indépendance de grille est obtenue à partir de  $60 \times 120$  pour le cas turbulent. Des corrélations sont proposées pour de larges plages de Ra et sont comparées avec des corrélations expérimentales. Les auteurs attirent l'attention sur le fait que l'effet du rapport de forme diminue lorsque le Ra augmente. La corrélation proposée est la suivante :

$$Nu_{moy} = 0.06 Ra^{1/3} \quad \text{pour : } Ra > 10^{12}$$

H. OZOE *et al.* ( 1985) [28]

Le cas étudié ici est celui de la cavité carrée contenant de l'eau ( $Pr = 6.7$ ), le nombre de Rayleigh imposé varie entre  $10^{10}$  et  $10^{11}$ . Le modèle k-à standard est employé. Un schéma aux différences finies hybrides sur un maillage de  $24 \times 60$  est adopté.

Les résultats montrent, pour cette plage de Ra, qu'un mouvement oscillatoire existe dans le cœur de la cavité seulement. Les auteurs estiment que le régime turbulent n'est pas encore atteint.

S. PAOLUCCI (1990) [29]

Une simulation numérique directe de l'écoulement convectif turbulent dans une cavité carrée est présentée ici. Les différences finies sont utilisées comme méthode de discrétisation. Un maillage décalé est utilisé et une sollicitation correspondant à un nombre de Rayleigh égal à  $10^{10}$  est imposée.

L'auteur fait remarquer que l'écoulement ne devient complètement turbulent qu'à partir d'un nombre de Rayleigh égal à  $10^9$ . De même, le nombre de Nusselt moyen sur la paroi chauffée obéit à la relation  $Nu_{moy} = C Ra^{1/3}$ . La constante C est trouvée égale à 0.046, ce qui est selon l'auteur en très bon accord avec les résultats expérimentaux antérieurs.

R. A. W. M. HENKES *et al.* (1991) [30]

Les auteurs utilisent l'eau et l'air comme fluides confinés dans des cavités carrées. Les sollicitations pour l'air, sont  $Ra > 10^{14}$  et pour l'eau,  $Ra > 10^{15}$ . Trois modèles de turbulences sont comparés : le modèle k- $\epsilon$  standard avec des lois de parois logarithmiques, et les deux modèles « low-Re » de JONES et LAUNDER [31], et de CHIEN [32].

La discrétisation est faite par la méthode des volumes finis avec un schéma hybride pour les termes convectifs ce qui donne une plus grande stabilité au processus itératif. Un maillage décalé de 80x80 est employé.

Les auteurs constatent que  $Ra_{Cr}$  dépend du modèle de turbulence utilisé. Quand l'écoulement devient turbulent, la stratification thermique au cœur de la cavité diminue jusqu'à disparaître complètement pour  $Ra_{*}$ . Les disparités entre les modèles utilisés sont plus marquées dans le cas de l'eau que dans le cas de l'air.

K. HANJALIC et S. VASIC (1993) [34]

Cette étude concerne la convection turbulente de l'air dans une cavité rectangulaire de différents rapports de forme ( $AL=H/L$ ) et pour des sollicitations correspondants à des  $Ra$  compris entre  $10^9$  et  $10^{12}$ .

Deux procédures numériques implicites sont testées, la méthode de balayage L.B.L (line by line) associée à l'algorithme de Thomas (TDMA), et la procédure purement implicite de Stone (SIP). La méthode SIP s'avère plus efficace. L'utilisation du modèle « high-Re » avec les lois de paroi et un maillage décalé non-uniforme de 40x40 s'avère suffisant pour l'obtention des résultats. Cependant, la difficulté de spécifier des lois de paroi propres à ce problème conduit les auteurs à opter pour les modèles de turbulence « low-Re » qui nécessitent un maillage raffiné près des parois. Dans ce cas un minimum de 60 volumes de contrôle sur une ligne est nécessaire. Les maillages 60x60 et 80x100 présentent de faibles différences. Le modèle de flux algébrique (AFM) est utilisé. La résolution est faite grâce à un code de volumes finis basé sur l'algorithme TEACH.

Pour  $AL=1$ , le passage laminaire-turbulent se fait à partir de  $Ra \approx 10^{10}$ . Le régime turbulent s'installe complètement pour  $Ra > 10^{12}$ . Une concentration de la turbulence dans les parties supérieures gauches et inférieures droites des parois verticales et une forte stratification stable dans la région centrale de la cavité sont notées.



Les auteurs proposent la corrélation suivante :

$$\text{Nu}_{\text{moy}} = C \text{ Ra}^{1/3} \text{ avec } C = 0.046 \pm 0.001$$

$$\text{pour } 10^9 < \text{Ra} < 10^{12} \text{ et } 1 < \text{AL} < 5$$

Les auteurs font remarquer qu'un rapport de forme  $\text{AL} < 1$  retarde l'apparition de la turbulence.

R. A. KUYPER et al. (1993) [35]

C'est le cas de la cavité carrée inclinée par rapport à l'horizontale ( $\varphi$  variant de  $0^\circ$  à  $180^\circ$ ) qui est traité dans cet article, la sollicitation thermique varie entre  $\text{Ra} = 10^4$  et  $10^{11}$ .

Pour  $\varphi = 0^\circ$  la configuration est du type « Rayleigh-Bénard » et pour  $\varphi = 180^\circ$  la cavité est du type « différentiellement chauffée ». Le modèle  $k-\varepsilon$  standard et un schéma hybride pour la discrétisation des équations représentatives sont utilisés. Des maillages de  $60 \times 60$  et de  $90 \times 90$  sont employés respectivement pour  $10^4 < \text{Ra} < 10^9$  et pour  $10^9 < \text{Ra} < 10^{11}$ .

Les résultats montrent pour  $\text{Ra} = 10^6$  et  $\varphi = 90^\circ$  que l'écoulement est en couches limites laminares verticales le long des parois chaudes et froides. Pour  $\varphi < 20^\circ$  la structure de l'écoulement devient instable (début de la transition) et pour  $\varphi = 0^\circ$  l'écoulement est tridimensionnel. Il semble que pour le même  $\text{Ra}$  la diminution de  $\varphi$  favorise la turbulence.

Les auteurs proposent les deux corrélations suivantes pour  $10^8 \leq \text{Ra} \leq 10^{11}$  :

$$\text{Nu}_{\text{moy}} = 0.069 \text{ Ra}^{0.332} \text{ pour } \varphi = 45^\circ$$

$$\text{Nu}_{\text{moy}} = 0.050 \text{ Ra}^{0.341} \text{ pour } \varphi = 90^\circ$$

A. A. MOHAMAD et R. VISKANTA (1993) [36]

L'étude concerne la cavité rectangulaire de rapport de forme  $\text{AL} = H/L$  remplie d'un fluide de faible  $\text{Pr}$  (métal liquide). Les deux configurations « différentiellement chauffée » et « Rayleigh-Bénard » sont traitées pour  $\text{Ra}$  compris entre  $10^4$  et  $10^9$ . Le modèle  $k-\varepsilon$  « low-Re » et une simulation directe sont tour à tour utilisés. La méthode des volumes finis et l'algorithme SIMPLER sont employés pour la discrétisation et la résolution des équations en variables primitives. La méthode L.B.L couplée avec une procédure de correction additive pour accélérer la convergence est adoptée.

Pour la cavité chauffée par le bas, les résultats montrent que l'écoulement est périodique pour  $\text{Ra} = 2.2 \times 10^5$  et  $\text{Pr} = 0.022$  et devient apériodique (turbulent) pour  $\text{Ra} > 10^6$ . Pour le cas

de la cavité différentiellement chauffée, l'écoulement devient turbulent pour  $(Ra \times Pr) > 10^7$

Pour ce cas là, une corrélation est proposée:

$$Nu_{\text{moy}} = 0.386 Bo^{0.286} AL^{0.213} \quad \text{pour : } 5 \times 10^3 < Ra < 2.2 \times 10^7$$

$$\text{avec : } Bo = Ra \times Pr \quad 0.005 < Pr < 0.022$$

$$1/6 < AL < 1$$

R.A.W. M. HENKES et C. J. HOOGENDOORN (1992) [37]

Une étude comparative sur dix études en turbulent [12] est présentée dans le but de proposer une solution Benchmark pour le cas de la cavité carrée différentiellement chauffée avec  $Ra=5 \times 10^{10}$ . Le modèle k- $\epsilon$  standard est utilisé comme modèle de turbulence. Le choix du modèle k- $\epsilon$  est justifié par l'absence de relaminarisation de l'écoulement constatée par d'autres modèles.

Dans toutes ces études, une grille décalée est utilisée car elle présente une bonne stabilité. Les équations sont discrétisées par la méthode des volumes finis avec différents schémas de discrétisation : Upwind, Hybride, Loi de puissance et QUICK. Il est à noter que QUICK n'est utilisé que pour les équations de u, v, et T, son utilisation pour les équations de k et  $\epsilon$  ne conduit pas à la convergence. Dans la plupart de ces études le découplage de la pression est fait par l'un des algorithmes : SIMPLE, SIMPLER, et PISO. Une variété de méthodes itératives est utilisée pour résoudre les équations de transport et l'équation de correction de pression : la méthode LBL ( ligne par ligne ) associée à l'algorithme TDMA, la méthode SIP («Strongly Implicit Procedure») ou encore la procédure ALZR (« Alternative Line Zebra Relaxation»). Un maillage raffiné aux parois de taille 60x60 à 90x90 est largement suffisant.

L'utilisation des lois de paroi dans les conditions aux limites semble nécessaire pour prendre en compte les effets de viscosité près des parois. Ces études montrent une bonne concordance avec les résultats expérimentaux pour l'estimation de  $v_{t,\text{max}}$ , toutefois une surestimation du transfert de chaleur de près de 30% est constatée.

## 2. Configuration Rayleigh-Bénard

B. CASTING *et al.* (1989) [24]

Une étude théorique et expérimentale de la convection Rayleigh-Bénard dans une enceinte de section carrée remplie de l'hélium gaz est proposée. Les nombres de Ra imposés varient de  $4 \times 10^7$  à  $6 \times 10^{12}$  et correspondent à un état de «hard turbulence», d'après la classification faite par Heslot *et al.*[14].

L'analyse théorique permet de distinguer trois régions dans l'écoulement : la région centrale occupant la majeure partie de l'enceinte, une zone de mélange de petite largeur et une couche limite très fine près des parois. Les auteurs estiment que les résultats expérimentaux dans la région centrale sont les plus universels.

Les résultats expérimentaux montrent que  $Nu_{\text{moy}}$  varie en fonction de Ra avec un exposant proche de  $2/7$  et non pas  $1/3$  comme le suggèrent certains auteurs. La corrélation proposée est la suivante :

$$Nu_{\text{moy}} = (0,23 \pm 0,03) Ra^{(0,282 \pm 0,006)} \quad \text{pour } 4 \times 10^7 < Ra < 10^{12}$$

A.TILGNER *et al.* (1994) [38]

Une synthèse des études antérieures sur la convection naturelle turbulente type Rayleigh-Bénard et une description phénoménologique de l'écoulement convectif sont présentées. La valeur de l'exposant du nombre de Ra donnant  $Nu_{\text{moy}}$ , semble indépendante du rapport de forme de la cavité. Les auteurs confirment l'exposant  $2/7$  trouvé par Casting *et al.* [24], notamment pour  $Ra > 10^8$ . L'analyse de l'évolution de l'épaisseur de la couche limite conduit à suggérer l'existence de trois régimes différents pour les trois plages de Rayleigh suivantes :

$$Ra < 10^7, \quad 10^7 < Ra < 10^9 \quad \text{et} \quad Ra > 10^9.$$

## 3. Cavité trapézoïdale chauffée par le bas

D. POULIKAKAS et A. BEJAN (1983) [20]

Les auteurs proposent une étude expérimentale du transfert de chaleur convectif dans une cavité triangulaire d'un rapport de forme  $AL = L/H = 4,831$ . La cavité est chauffée par le bas et refroidie par la paroi inclinée.

Le plus élevé nombre de Rayleigh qu'ils ont pu atteindre est  $Ra = 4,7 \times 10^8$ , le régime d'écoulement pour ce cas précis est turbulent. La principale caractéristique du champ de

température est la présence d'une zone centrale isotherme qui couvre la majeure partie de la hauteur locale. Le gradient de température est important au voisinage immédiat des parois, ce qui indique la présence d'un écoulement en couches limites. Les fluctuations de température sont plus importantes près des parois qu'au cœur de la cavité, montrant que l'intensité de la turbulence décroît au fur et à mesure qu'on s'éloigne des parois.

La corrélation proposée pour de l'air ( $Pr=0,71$ ) est la suivante :

$$Nu_{\text{moy}} = 0,345 Ra^{0.3} \quad \text{pour : } 10^6 < Ra < 10^7$$

Les auteurs remarquent une faible influence du rapport de forme de la cavité sur le nombre de  $Nu_{\text{moy}}$ . Notons que Flack [17], pour des  $Ra$  plus faibles, avait constaté que l'augmentation de  $AL$  conduit à une augmentation de  $Nu_{\text{moy}}$  pour un  $Ra$  donné.

#### D. KALACHE (1987) [4]

Cette thèse traite de la cavité trapézoïdale chauffée par le bas. Une étude numérique est faite pour la partie laminaire et un travail expérimental concernant les domaines laminaires et turbulents est proposé. Le nombre de Rayleigh basé sur la hauteur moyenne va jusqu'à  $10^9$ . L'auteur s'intéresse à des configurations géométriques différentes en faisant varier l'angle d'inclinaison,  $\alpha$ , de la paroi supérieure et le rapport de forme de la cavité. La géométrie trapézoïdale est approchée théoriquement par utilisation des coordonnées cylindriques, ce qui limite le nombre de cas que l'on peut étudier.

Les résultats présentés pour des  $Ra$  allant de  $10^6$  à  $10^9$  montrent que le profil de la température moyenne a un comportement de type couche limite de paroi avec un noyau approximativement isotherme dans la zone centrale qui occupe la quasi totalité de l'enceinte.

L'analyse des fluctuations de température près des parois actives permet de mettre en évidence le phénomène de brassage ce qui a pour conséquence une partie centrale isotherme. Par ailleurs, l'étude détaillée du champ thermique conduit l'auteur à préconiser l'existence de trois zones dans l'écoulement considéré : une couche limite de paroi, une zone de mélange et une zone isotherme. L'existence de ces trois zones a été confirmée plus tard par d'autres travaux [24], et [38]( cf. § 1.2).

L'étude du champ dynamique met en exergue les caractéristiques des vitesses dans de tels écoulements. En effet, à l'exception des zones très proches des parois, l'écoulement est caractérisé par des vitesses moyennes de faibles amplitudes et de grande fluctuations.

Seules les régions adjacentes aux parois renferment des vitesses moyennes élevées et de faibles fluctuations. Pour toutes les configurations étudiées les vitesses moyenne maximales ne dépassent pas 20 cm/s.

L'étude concernant le flux thermique sur la paroi chaude pour 14 configurations géométriques permet à l'auteur de proposer une corrélation du type :

$$\text{Nu}_{\text{moy}} = 0.139 \text{ Ra}^{0.3} \quad \text{pour } 10^5 < \text{Ra} < 10^9$$

L'auteur fait remarquer que l'influence de  $\alpha$  et AL n'est pas importante sur l'évaluation de  $\text{Nu}_{\text{moy}}$ , ce qui peut qu'il explique par la gamme élevée des Ra.

S.W. LAM *et al.* (1989) [26]

C'est une étude numérique et expérimentale du transfert de chaleur convectif dans une cavité trapézoïdale chauffée par le bas et refroidie par la paroi supérieure qui est proposée dans cet article. L'allongement (AL) et le nombre de Ra, basés sur la hauteur moyenne, prennent respectivement les valeurs 4 et  $10^3 < \text{Ra} < 10^7$ . L'angle d'inclinaison  $\alpha$  de la paroi supérieure varie de  $0^\circ$  à  $25^\circ$ .

Lorsque l'angle augmente le nombre de Nusselt moyen (Nu) diminue, ce qui permet de proposer une corrélation expérimentale de Nu en fonction de Ra et de l'angle  $\alpha$ :

$$\text{Nu} = 0.168 \left[ \text{Ra} \frac{(1 + \cos \alpha)}{2} \right]^{0.278} \left[ \frac{(1 - \cos \alpha_{\text{max}})}{(\cos \alpha - \cos \alpha_{\text{max}})} \right]^{-0.199} \quad \text{pour : } 10^3 < \text{Ra} < 10^7$$

Les résultats numériques obtenus, après une résolution bidimensionnelle des équations de transport de vorticité et de l'énergie, sont proches de ceux obtenus par l'expérimental. Les auteurs constatent que le modèle bidimensionel prédit le transfert de chaleur avec une précision de 3 à 5% .

## Chapitre 2

### **MODELISATION DE LA TURBULENCE**

#### **1. Caractéristiques d'un écoulement turbulent**

La turbulence est un régime d'écoulement caractérisé par différents aspects, dont voici les principaux [39], [40] et [41] :

- l'aspect aléatoire, que se soit en temps ou en espace.
- l'aspect tridimensionnel et rotationnel: les écoulements turbulents sont strictement rotationnels et tridimensionnels.
- les ingrédients d'un écoulement turbulent sont contenus dans les tourbillons qui sont de quelques millimètres de grandeur dans un domaine d'écoulement de plusieurs mètres [41].
- la capacité de mélange: en écoulement laminaire, le transport de quantité de mouvement et de chaleur se fait par convection et par diffusion. En turbulent, l'agitation importante des vitesses d'écoulement dans les trois directions assure un mélange bien plus efficace.
- l'aspect dissipatif: l'énergie des écoulements moyens est dissipée par les contraintes visqueuses. Pour se maintenir, les écoulements turbulents ont donc besoin d'être fournis en énergie, sinon ils finissent par se relaminariser.
- les nombres adimensionnels caractérisants le régime de l'écoulement (nombre de Reynolds et nombre de Rayleigh) sont plus élevés que ceux d'un régime laminaire.

#### **2. Ecoulements turbulents moyens**

En pratique, le calcul des écoulements turbulents par résolution directe des équations de Navier-Stokes est très délicat et souvent inaccessible à cause des résolutions spatiales très élevés nécessaires dans ce type d'approche. Toutes les approches pratiques de calcul font appel à la notion de grandeur moyenne et au lieu de chercher à déterminer l'évolution spatiale et temporelle des grandeurs instantanées, on s'intéresse essentiellement au comportement de leurs moyennes temporelles.

L'importance de cette procédure réside, d'une part dans le fait que l'hypothèse de bidimensionnalité dans un écoulement turbulent a plus de signification quand on s'intéresse à l'écoulement moyenné, et d'autre part c'est les écoulements moyens représentant les caractéristiques globales des écoulements instationnaires qui intéressent en

premier l'ingénieur [2]. C'est la raison pour laquelle les études sur la turbulence se sont orientés vers la modélisation numérique utilisant les modèles statistiques voir par exemple [42].

La décomposition dite de « Reynolds » permet de transformer les équations de transport de quantité de mouvement, de chaleur et de masse en équations moyennées, en exprimant que chaque variable instantanée  $X(x_i, t)$  est la somme d'une valeur moyenne temporelle  $\bar{X}(x_i)$  et d'une fluctuation  $X'(x_i, t)$ . On écrit alors:

$$X = \bar{X} + X' \text{ avec : } \begin{cases} \bar{X} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} X \, dt \\ \Delta t \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.1)$$

$X$  peut représenter l'une des grandeurs suivantes:

- une composante du vecteur vitesse ( $u, v$  ou  $w$ )
- la pression ( $p$ )
- la température ( $T$ )
- une grandeur relative à la turbulence ( $k, \epsilon, \dots$ ).

Lorsqu'on applique la décomposition de Reynolds aux équations de transport de mouvement et d'énergie instantanées ou « équations de Boussinesq », on obtient un système d'équations moyennées qui peuvent s'écrire sous la forme générale suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{u}_i \bar{\Phi}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Gamma \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_i} - \rho \overline{u'_i \Phi'} \right) + \bar{S} \quad (2.2)$$

Le terme  $-\rho \overline{u'_i \Phi'}$  est un flux de diffusion turbulent qu'on appelle « contraintes de Reynolds » dans le cas des équations de Navier-Stokes et s'écrit:  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$

### 3. Concept de viscosité tourbillonnaire

En 1877, Boussinesq a exprimé les contraintes de Reynolds d'une manière analogue aux contraintes visqueuses en considérant les contraintes turbulentes proportionnelles au gradient de la vitesse moyenne. Le coefficient de proportionnalité est appelé alors

« viscosité turbulente » ou « viscosité tourbillonnaire » par analogie avec la viscosité moléculaire  $\mu$ . L'approximation de Boussinesq s'écrit alors :

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (2.3)$$

où :  $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$  est l'énergie cinétique de turbulence.

De la même manière, les flux de diffusion turbulents sont définis par l'expression :

$$-\rho \overline{u'_i \Phi'} = -\Gamma_t \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_i} \quad (2.4)$$

Avec :  $\Gamma_t = \frac{\mu_t}{\sigma_t}$  est le coefficient de diffusion turbulent ou diffusivité tourbillonnaire par

analogie aux coefficients de diffusion thermique  $\Gamma = \frac{\mu}{Pr}$ , la constante  $\sigma_t$  est appelé alors nombre de Prandtl turbulent.

La viscosité turbulente n'est pas une propriété du fluide mais une propriété de l'écoulement. Elle est supposée due aux collisions entre les tourbillons, tout comme la viscosité moléculaire  $\mu$  résulte de l'échange de quantité de mouvement après collisions des molécules [41].

Après analyse des échelles des grandeurs liées la viscosité turbulente, une approximation raisonnable de celle-ci s'écrit comme suit:

$$\mu_t = (\text{const.}) \rho V L \quad (2.5)$$

où :  $V$  est une échelle de vitesse

et  $L$  est une échelle de longueur

Beaucoup de modèles de turbulences se basent sur le concept de viscosité turbulente. La finesse dans la définition des échelles de vitesse et de longueur permet de différencier ces modèles entre eux. Le nombre d'équations dits de fermetures renseigne sur le raffinement du modèle.

#### 4. Les modèles de turbulence

Vu le nombre important de modèles de turbulence existant, nous nous limitons à ceux qui sont basés sur le concept de viscosité turbulente. Ces modèles sont classés selon le nombre d'équations de fermeture utilisées [43], [44].



#### 4.1 Modèles à zéro équation (modèles algébriques)

Ces modèles ne prennent en compte aucune équation de transport de la turbulence. Parmi les modèles algébriques les plus connus on retrouve celui proposé par Prandtl (1925) appelé « modèle de longueur de mélange ». Il est surtout destiné aux écoulements où il n'y a qu'un seul gradient de vitesse significatif qui est normal à la direction de l'écoulement. Prandtl suggère que l'échelle de vitesse  $V$ , du mouvement turbulent est égale au produit du gradient de vitesse prépondérant et de l'échelle de longueur  $L_m$  ( la longueur de mélange ). Il résulte l'expression suivante :

$$\mu_t = (\text{const.}) L_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (2.6)$$

La longueur de mélange est déterminée par des relations empiriques allant d'une simple relation linéaire à des expressions plus complexes selon le type d'écoulement étudié. L'inconvénient pour ce type de modèle est qu'il est limité aux écoulements simples et ne peut être utilisé pour les écoulements avec recirculation par exemple. L'autre inconvénient est que la distribution de  $L_m$  n'est pas universelle même pour des écoulements simples.

#### 4.2 Modèles à une équation

Afin de mieux prendre en compte l'effet de transport et l'historique de l'écoulement turbulent, on préfère se pencher sur les modèles qui consistent à résoudre les équations de transport des paramètres de la turbulence.

C'est l'énergie cinétique de la turbulence  $k$  qui est la première introduite dans les modèles à une équation de fermeture. L'échelle de vitesse est alors obtenue en prenant la racine carrée de  $k$ , étant donné qu'elle représente la mesure de l'intensité des fluctuations dans les directions des trois composantes de la vitesse.

La viscosité turbulente est définie dans ce cas par :

$$\mu_t = (\text{const.}) \rho k^{1/2} L_m \quad (2.7)$$

De la même manière que pour le modèle de Prandtl,  $L_m$  est déterminée par des expressions algébriques [43]. Pour fermer le système d'équation, on construit l'équation de transport de  $k$  à partir des équations de Navier-Stokes.

La difficulté des modèles à une équation et du modèle de la longueur de mélange réside dans la description de  $L_m$ .

### 4.3 Modèles à deux équations

La difficulté de trouver des expressions algébriques universelles pour l'échelle de longueur et le fait que celle-ci est sujette aux processus de transport et à l'historique de l'écoulement, amène à introduire une équation supplémentaire de transport de  $L$  ou une grandeur liée à celle-ci.

La grandeur turbulente liée à  $L$  la plus largement adoptée et pour laquelle une équation de transport peut être construite, est le taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence

$\varepsilon$ . L'échelle de longueur dans ce cas est définie par :  $L = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$

La viscosité turbulente s'écrit alors ainsi :

$$\mu_t = (\text{const.})\rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.8)$$

Le modèle à deux équations de transport de turbulence, conçu en premier par B. E. Launder et D. B. Spalding [45], est devenu le plus populaire des modèles de turbulence a cause de sa simplicité et la possibilité de l'utiliser pour différents types d'écoulement. C'est le modèle « k- $\varepsilon$  » (c.f. annexe A).

## Chapitre 3

### FORMULATION MATHÉMATIQUE ET PROCÉDURE NUMÉRIQUE

#### 1. Mise en équations d'un écoulement de convection naturelle

##### 1.1 Hypothèses

- Le fluide est visqueux, newtonien et incompressible.
- L'écoulement turbulent est bidimensionnel et permanent en moyenne.
- L'hypothèse de Boussinesq considérant la masse volumique constante sauf dans le terme dû à la poussée d'Archimède est retenue.

##### 1.2 Equations de base de l'écoulement réel

En prenant en compte les hypothèses ci-dessus, on peut écrire les équations de base d'un écoulement turbulent de convection naturelle non moyenné comme suit:

- Equation de continuité:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

- Equations de quantité de mouvement (équations de Navier-Stokes):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + g\beta(T - T_f) \quad (3.3)$$

- Equation de l'énergie:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (3.4)$$

### 1.3 Mise en œuvre du modèle k-ε

En moyennant les équations de mouvement et celle de l'énergie par le biais de la décomposition dite « de Reynolds » (c.f. chapitre 2), on obtient les équations régissant l'écoulement moyen de convection naturelle turbulente:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (3.5)$$

$$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right) + \delta_{i2} \beta (\bar{T} - \bar{T}_f) g \quad (3.6)$$

$$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \overline{T' u'_j} \right) \quad (3.7)$$

On remarque dans ces équations moyennées l'apparition de deux nouveaux termes :

-  $\overline{u'_i u'_j}$  et  $-\overline{T' u'_i}$  appelés, respectivement, « contraintes de Reynolds » et « flux thermiques turbulent ». On se trouve confronté à un problème de fermeture puisque le nombre d'inconnues devient supérieur à celui des équations.

Les études faites sur la turbulence aboutissent à l'évaluation de ces termes par des relations d'approximation. On retient celle faisant intervenir le concept de viscosité turbulente permettant de modéliser les tensions de Reynolds et les flux thermiques turbulents comme suit:

$$\begin{cases} -\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \\ -\overline{T' u'_i} = \frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \end{cases} \quad (3.8)$$

Plusieurs modèles de turbulence se basant sur le concept de viscosité turbulente sont proposés (voir chapitre 2). On retient le modèle qui est le plus largement utilisé, et qui a fait ses preuves dans le domaine de la convection naturelle. C'est le modèle à deux équations de fermetures k-ε. Dans ce modèle, la viscosité cinématique turbulente est définie par:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.9)$$

L'introduction de ces approximations permet d'écrire, tout calculs faits (voir annexe A), le système fermé suivant [12]:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (3.10)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (v + v_t) \left( 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (v + v_t) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] \quad (3.11)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (v + v_t) \left( 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (v + v_t) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] + g\beta(\bar{T} - \bar{T}_f) \quad (3.12)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{v}{Pr} + \frac{v_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{v}{Pr} + \frac{v_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] \quad (3.13)$$

$$\bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + P_k + G_k - \varepsilon \quad (3.14)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + (C_{\varepsilon 1} (P_k + C_{\varepsilon 3} G_k) - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \frac{\varepsilon}{k} \quad (3.15)$$

avec :

$$P_k = v_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (3.16)$$

et

$$G_k = -\frac{v_t}{\sigma_t} g\beta \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \quad (3.17)$$

Les constantes empiriques prennent des valeurs qui diffèrent selon la version du modèle choisie. Pour la version standard du modèle k-ε, ces constantes prennent les valeurs suivantes [12]:  $C_{\varepsilon 1} = 1.44$ ,  $C_{\varepsilon 2} = 1.92$ ,  $C_\mu = 0.09$ ,  $\sigma_t = 0.9$ ,  $\sigma_k = 1$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1.3$ . La constante

$C_{\varepsilon 3}$  est généralement donnée par l'expression :  $C_{\varepsilon 3} = \tanh \left| \frac{\bar{v}}{\bar{u}} \right|$ , de tel sorte qu'elle prend la

valeur 0 pour un écoulement horizontal et 1 pour un écoulement vertical . Par contre si on utilise les « lois de paroi » celle-ci prend la valeur 0.7 [12].

#### 1.4 Mise sous forme adimensionnelle

Les équations (3.10 à 3.15) sont adimensionnées grâce aux grandeurs de références recommandées pour le cas de la convection naturelle à grands Rayleigh [7]. Les grandeurs de références sont pour la longueur, les vitesses, les quantités turbulentes et la température définies comme suit:

$$L_r = H; V_r = \frac{\nu}{H} \frac{Ra^{1/2}}{Pr}; K_r = V_r^2; \epsilon_r = \frac{\nu}{H^2} V_r^2 \text{ et } \Delta T = (T_c - T_f)$$

On aboutit alors à l'écriture finale des équations sous forme adimensionnelle: ( les grandeurs adimensionnelles sont écrites en majuscules en omettant le signe ' ' ):

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (3.18)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{Pr}{Ra^{1/2}} \left[ \frac{\partial}{\partial X} (1 + \nu_t) \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} (1 + \nu_t) \frac{\partial U}{\partial Y} \right] + \frac{Pr}{Ra^{1/2}} \left[ \frac{\partial}{\partial X} (1 + \nu_t) \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} (1 + \nu_t) \frac{\partial V}{\partial X} \right] - \frac{\partial P}{\partial X} \quad (3.19)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{Pr}{Ra^{1/2}} \left[ \frac{\partial}{\partial X} (1 + \nu_t) \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} (1 + \nu_t) \frac{\partial V}{\partial Y} \right] + \frac{Pr}{Ra^{1/2}} \left[ \frac{\partial}{\partial X} (1 + \nu_t) \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial Y} (1 + \nu_t) \frac{\partial V}{\partial Y} \right] - \frac{\partial P}{\partial Y} + Pr \theta \quad (3.20)$$

$$U \frac{\partial K}{\partial X} + V \frac{\partial K}{\partial Y} = \frac{Pr}{Ra^{1/2}} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( 1 + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \left( 1 + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial Y} \right] + \frac{Pr}{Ra^{1/2}} (P_k + G_k - \epsilon) \quad (3.21)$$

$$U \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} = \frac{\text{Pr}}{\text{Ra}^{1/2}} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( 1 + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \left( 1 + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} \right] + \frac{\text{Pr}}{\text{Ra}^{1/2}} \left[ \left( C_{\varepsilon 1} \left( \mathbf{P}_k + C_{\varepsilon 3} \mathbf{G}_k \right) - C_{\varepsilon 2} \varepsilon \right) \frac{\varepsilon}{K} \right] \quad (3.22)$$

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Ra}^{1/2}} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( 1 + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\nu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \left( 1 + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\nu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right] \quad (3.23)$$

avec :

$$\nu_t = C_\mu \frac{\text{Ra} K^2}{\text{Pr}^2 \varepsilon} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{G}_k = -\text{Pr} \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{P}_k = \nu_t \left[ 2 \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right] \quad (3.26)$$

Les équations sans dimensions, (3.18) à (3.23), sont des équations de transport qu'on préfère présenter sous la forme générale suivante [46]:

$$U \frac{\partial \Phi}{\partial X} + V \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right) + S \quad (3.27)$$

Dans le code de calcul T.E.A.M ( Turbulent elliptic algorithm Manchester ) que nous utilisons pour réaliser notre travail, le terme source  $S$  est linéarisé par l'expression proposée par S. V. Patankar [46] :

$$S_\Phi = S_c + S_p \Phi \quad (3.28)$$

Les termes de production dans les équations de  $k$  et  $\varepsilon$  sont introduits dans le terme  $S_c$  (donnant un  $S_c$  positif) et les termes de dissipation dans le terme  $S_p$  (donnant un  $S_p$  négatif) pour être en conformité avec les règles édictées par S.V. Patankar [46] et évitant ainsi toute possibilité d'instabilité numérique [47].

Le tableau ci-dessous donne les expressions de  $\Gamma$  et S pour chaque variable  $\Phi$ :

Tableau 3.1

	$\Phi$	$\Gamma$	S
<b>Eq. de continuité</b>	1 (P)	1	0
<b>Eq. de quantité de mvt. en U</b>	U	$\frac{Pr}{Ra^{0.5}}(1 + v_t)$	$\frac{Pr}{Ra^{0.5}} \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ (1 + v_t) \frac{\partial U_j}{\partial X} \right] - \frac{\partial P}{\partial X}$
<b>Eq. de quantité de mvt. en V</b>	V	$\frac{Pr}{Ra^{0.5}}(1 + v_t)$	$\frac{Pr}{Ra^{0.5}} \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ (1 + v_t) \frac{\partial U_j}{\partial Y} \right] - \frac{\partial P}{\partial Y} + Pr\theta$
<b>Eq. de l'énergie</b>	$\theta$	$\frac{1}{Ra^{0.5}} \left( 1 + \frac{v_t}{\sigma_t Pr} \right)$	0
<b>Eq. de l'énergie cinét. turb.</b>	K	$\frac{Pr}{Ra^{0.5}} \left( 1 + \frac{v_t}{\sigma_k} \right)$	$\frac{Pr}{Ra^{0.5}} (P_k + G_k - \epsilon)$
<b>Eq. du taux de dissip. de l'éne. cinét. turb.</b>	$\epsilon$	$\frac{Pr}{Ra^{0.5}} \left( 1 + \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \right)$	$\frac{Pr}{Ra^{0.5}} (C_{\epsilon 1} (P_k + C_{\epsilon 3} G_k) - C_{\epsilon 2} \epsilon) \frac{\epsilon}{K}$

### 1.5 Conditions aux limites

Les conditions aux limites thermiques sont définies simplement par:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 & \text{parois adiabatiques} \\ \theta = 1 \text{ et } \theta = 0 & \text{respectivement, paroi chaude et paroi froide} \end{cases}$$

Avec le modèle k- $\epsilon$  standard les grandeurs U, V et K aux niveaux des parois solides vérifient les conditions de Dirichlet : U=V=K=0.

Le code TEAM emploie la notion de lois de parois qui font intervenir l'effet de viscosité. Afin d'éviter l'alourdissement du texte les conditions aux limites correspondantes sont définies dans l'annexe B.

La définition des conditions aux parois introduit la difficulté du choix des conditions aux limites pour le taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence  $\epsilon$ . Ceci peut s'expliquer par la complexité de l'équation de transport de  $\epsilon$  dans laquelle on trouve des



termes comme:  $\frac{\varepsilon^2}{k}$  et  $\frac{k^2}{\varepsilon}$  qui sont couplés entre eux. Une faible perturbation risque ainsi de déstabiliser le processus itératif.

Dans ce cas  $\varepsilon$  à la paroi est exprimé pour le modèle k- $\varepsilon$  standard de différentes manières parmi lesquelles on a:

$$\varepsilon_p = \infty \text{ et } \varepsilon_p = 2\nu \left( \frac{\partial k^{1/2}}{\partial n} \right)^2, \text{ où } n \text{ désigne la direction normale à la paroi.}$$

La seconde expression est de plus en plus utilisée [2], elle s'écrit en adimensionnel ainsi :

$$\varepsilon_p = 2 \left( \frac{\partial K^{1/2}}{\partial n} \right)^2 \quad (3.29)$$

## 2. Procédure numérique

### 2.1 Présentation et structure du code de calcul TEAM

Le code T.E.A.M dans sa version initiale, est un code de calcul conçu pour la simulation des écoulements turbulents bidimensionnels et permanents [48]. Il est basé sur la méthode des volumes finis comme méthode de discrétisation des équations et utilise le modèle k- $\varepsilon$  standard pour la modélisation de la turbulence.

Le code peut être divisé en trois parties:

- Le programme principal contient les séquences suivantes:
  - Déclaration des variables et des paramètres globaux apparaissant dans le code
  - Appel des sous-programmes SET, GRID, INIT, INLET dans la subroutine USER.
  - Actualisation du coefficient de diffusion
  - Appel des sous-routines de calcul de chaque variable  $\Phi$  du problème
  - Test de convergence
  - Appel du sous-programme OUTF dans le USER
- Subroutine USER, partie susceptible de subir des modifications propres à chaque problème et qui est répartie en plusieurs sous-programmes contenant:
  - Définition des paramètres du problème ( SET)
  - Définition des positions des faces de chaque volume de contrôle du maillage (GRID)
  - Initialisation des variables du problème (INIT)

- Définition ou Lecture des champs initiales (INLET)
- Définition des conditions aux limites pour chaque variable du problème (MODU, MODV, MODP, MODTE, MODED et MODT)
- Sauvegarde des résultats (OUTP)
- Partie invariable, contenant les sous-routines suivantes:
  - Subroutine GEOM permettant de définir les différents paramètres géométriques
  - Sous-routines de calcul des variables  $u$ ,  $v$ ,  $p$ ,  $k$ ,  $\epsilon$  et  $T$
  - Subroutine LISOLV résolvant le système d'équations par la méthode LBL-TDMA.

Notre choix s'est porté sur le code TEAM en raison des deux points suivants :

- Emploi du modèle  $k$ - $\epsilon$  standard avec utilisation des lois de paroi (wall functions) qui reste largement adopté dans la modélisation de la turbulence.
- Possède des options permettant à l'utilisateur de choisir entre deux algorithmes SIMPLE et PISO ( voir annexe C ), et entre deux schémas de discrétisation « Loi de puissance » [46] et QUICK [49].

## 2.2 Adaptation du code aux problèmes de convection naturelle turbulente

Les équations régissant la convection naturelle turbulente diffèrent de celles d'un écoulement forcé principalement par l'existence du terme de poussée « buoyancy term » dans l'équation de la composante verticale de la vitesse, et par conséquent dans celles de  $k$  et de  $\epsilon$ . Il fallait alors introduire les termes de poussée nécessaires dans les sous-routines de calcul des variables dépendantes afin de pouvoir traiter le problème de la convection naturelle turbulente.

Ainsi, on ajoute les deux termes:  $\rho g \beta (\bar{T} - T_f)$  et  $G_k = -\rho g \beta \frac{v_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$  à la partie  $S_c$  du terme

source correspondant respectivement à l'équation de  $v$  et aux deux équations de  $k$  et  $\epsilon$ .

## 2.3 Méthodes et schémas numériques adoptés

Comme on l'a déjà souligné, les équations représentatives sont discrétisées dans le code TEAM par la méthode des volumes finis.

Quant aux schémas de discrétisation, la possibilité de choisir entre « Loi de puissance » et QUICK pour chaque équation nous permet de passer de l'un à l'autre selon la situation à traiter et les difficultés numériques éventuelles. Pour fixer notre choix, il est nécessaire de voir ce qui ressort de la littérature sur l'utilisation des schémas de discrétisation. On résume ceci dans ce qui suit :

- Le schéma QUICK est moins stable et converge lentement par rapport aux schémas d'ordres inférieurs dont le schéma « Loi de puissance », mais conduit à des résultats plus précis et minimise la diffusion numérique ou « false diffusion » [48,3] qui se produit quand les lignes de courant ne sont pas alignées avec les lignes de la grille de maillage [46].
- Dans l'étude consacrée à la configuration « différentiellement chauffée » [12], il est recommandé d'utiliser le schéma QUICK seulement pour les équations de  $u$ ,  $v$  et  $T$ . L'utilisation de QUICK pour les équations des quantités turbulentes  $k$  et  $\epsilon$  conduit à une divergence du système itératif. Le schéma « loi de puissance » (PLDS) est ainsi adopté pour ces dernières.
- Il s'avère que dans le cas « différentiellement chauffé » la diffusion numérique a un effet très minime, puisque l'écoulement est dominé par les couches limites verticales dans lesquelles la direction de l'écoulement est alignée avec les lignes de grille verticales [50].
- Dans une cavité chauffée par dessous l'existence d'une diffusion numérique non négligeable est possible, plus particulièrement dans le cas des cavités trapézoïdales.

Tous ces points nous amènent à adopter les choix suivants :

- Pour le cas « différentiellement chauffée », qu'on aura à traiter dans le chapitre suivant, on utilise le schéma « Loi de puissance » pour toutes les variables du problème.
- Pour le cas « chauffée par dessous », qui est l'objet de notre étude, on utilise le schéma QUICK pour  $u$ ,  $v$  et  $T$  et « Loi de puissance » pour  $k$  et  $\epsilon$ .

La résolution du système d'équations algébriques est faite par la méthode itérative Line-by-line (LBL) associée à l'algorithme TDMA.

Durant notre étude on aura à employer deux types de maillages décalés: un maillage uniforme et un maillage non-uniforme serré près des parois. Ce dernier est défini par les expressions (3.30) et (3.31) donnant les positions des faces de chaque volumes de contrôle, qui sont aussi celles des vitesses :

$$\frac{XU_i}{L} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\tanh \left[ \alpha_1 \left( \frac{i-1}{NI-2} - 0.5 \right) \right]}{\tanh \left( \frac{\alpha_1}{2} \right)} \right] \quad i = 1, 2, \dots, (NI-1) \quad (3.30)$$

$$\frac{YV_j}{H} = \frac{j-1}{NJ-2} - \frac{1}{2\pi} \sin \left( 2\pi \frac{j-1}{NJ-2} \right) \quad j = 1, 2, \dots, (NJ-1) \quad (3.31)$$

Dans notre étude, on prend la même valeur de  $\alpha_1$  que celle prise dans [12] qui est de 6.811.

Les positions des nœuds ( le centre de chaque volume de contrôle) sont ensuite déterminée et aux niveaux desquels sont définies les grandeurs scalaires  $p$ ,  $T$ ,  $k$  et  $\epsilon$ .

Cette façon de distribuer les nœuds de la grille est recommandée dans le *workshop* [12] pour le cas de la convection naturelle turbulente dans une cavité « différentiellement chauffée ». Ceci permet d'obtenir une forte concentration des points de la grille dans les couches limites des parois actives et permet aussi une résolution suffisante dans la direction de la sollicitations (utilisation de *tanh* ).

Pour le cas d'une configuration Rayleigh-Bénard on a pensé donc à inverser entre les deux expressions vu que la sollicitation thermique pour ce cas là est dans la direction de l'axe des  $y$ .

L'utilisation de la méthode des volumes finis avec un maillage rectangulaire pour l'étude du cas de la cavité trapézoïdale nécessitera un traitement particulier. En effet, on doit rendre inactifs ou en d'autre termes bloquer les volumes de contrôle n'appartenant pas au domaine de calcul. Nous adoptons celle qui consiste à poser une valeur très élevée ( $10^{20}$ ) du coefficient de diffusion  $\Gamma$  pour tous les nœuds appartenant à la zone bloquée[46].

Le test de convergence se fait sur un critère global définie comme suit : on considère la convergence atteinte quand le résidu de l'équation de continuité ( l'équilibre de masse dans tous les volumes de contrôle) et ceux des équations de quantité de mouvement sont inférieurs à  $10^{-6}$ , et celui de l'équation d'énergie inférieur à  $10^{-5}$ .

## Chapitre 4

### VALIDATION DE LA PROCEDURE NUMERIQUE

La procédure numérique que nous adoptons est validée de la manière suivante:

- On teste le cas laminaire à forts nombres de Rayleigh avec les deux configurations: cavité différentiellement chauffée et configuration Rayleigh-Bénard.
- Le code est validé ensuite en turbulent avec le cas de la cavité carrée différentiellement chauffée, pour laquelle existe une solution benchmark. Le modèle k- $\epsilon$  standard avec et sans la procédure des « lois de parois » sont traités.

La validation est faite par comparaison avec les résultats existants et éprouvés sur ces cas.

#### 1. Convection naturelle laminaire à grand nombre de Rayleigh

##### 1.1 Cavité carrée différentiellement chauffée

Pour  $Ra = 10^8$  l'écoulement est toujours laminaire et permanent[7], ce que nous vérifions par notre première procédure de validation. Nous présentons dans ce qui suit, les résultats obtenus grâce à un maillage uniforme 150x150. On compare avec les résultats obtenus par S. Xin [2] qui utilise une méthode multigrille et un maillage 256x256 ainsi que ceux de P. Le Quéré [6] qui utilise la méthode spectrale.

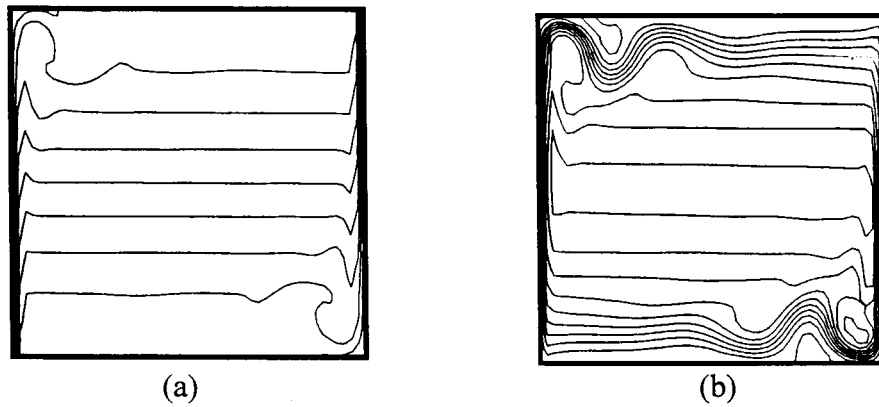
Sur le plan quantitatif, les résultats sont présentés sous forme de tableau (Tableau 4.1):

Tableau 4.1

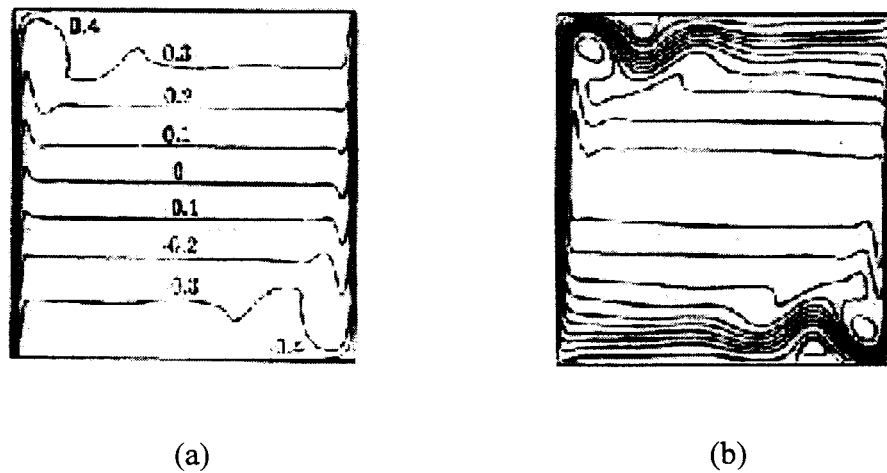
	Présente étude	S. Xin [2]	P. Le Quéré [6]
$Nu_{moy}$	31.96	29.78	30.225
$U_{max} \times 10^2$	3.295	3.954	3.219
XU	0.5	0.5	0.5
YV	0.922	0.936	0.928
$V_{max} \times 10$	2.266	2.229	2.222
XU	0.0105	0.0137	0.012
YV	0.5	0.5	0.5

La différence entre nos résultats et ceux de Xin et Le Quéré sont de l'ordre de 5% pour  $Nu_{moy}$ .

Sur le plan qualitatif des isothermes et des lignes de courant obtenues sont représentées en figure 4.1 et comparées avec les résultats de S. Xin (fig. 4.2).



**Fig. 4.1 :** (a) Isothermes, (b) Lignes de courant.  
( Présente étude)



**Fig. 4.2 :** (a) Isothermes, (b) Lignes de courant  
( résultats de S. Xin [2] )

On remarque une très bonne concordance entre les deux résultats qualitatifs.

## 1.2 Configuration Rayleigh-Bénard

Il ressort des études sur le sujet [13-18,24,51], ayant traité ce type de configurations, que le régime d'écoulement reste laminaire et stationnaire jusqu'à un nombre de Rayleigh de l'ordre de  $10^5$  et que la transition au régime turbulent se produit précocement dans une cavité rectangulaire par rapport à une cavité carrée. Le traitement des deux cas, cavité carrée et cavités rectangulaires, est fait moyennant un maillage uniforme, respectivement de  $120 \times 120$  et  $100 \times 200$ .

### • Cavité carrée (AL=1)

Dans une cavité carrée l'écoulement est unicellulaire et se fait dans le sens opposé au sens des aiguilles d'une montre (fig. 4.3). Pour un nombre de Rayleigh  $Ra=10^5$ , une température moyenne, entre celles des parois chaude et froide, tend à régner dans la majeure partie de la cavité, notamment au cœur de celle-ci (fig. 4.3.b). Ces constatations qualitatives sont aussi mises en évidence dans des études antérieures [23,35,51,52].

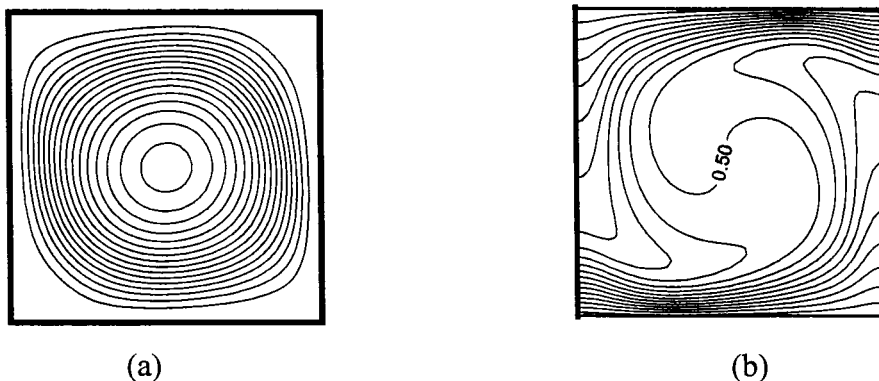


Fig. 4.3 : (a) Lignes de courant, (b) Isothermes :  $Ra = 10^5$ ,  $AL=1$

Sur le plan quantitatif, on trouve :

$$Nu_{\text{moy}} = 3.884 \quad , \quad U_{\text{max}} = 0.290 \quad \text{et} \quad V_{\text{max}} = 0.318$$

La valeur de Nusselt moyen trouvé est acceptable si on la compare avec les résultats trouvés dans des études précédentes, notamment expérimentales. En effet, Arnold et al. [53] trouve  $Nu_{\text{moy}} \approx 4$  soit une différence de l'ordre de 3%.

### • Cavités rectangulaires

On donne dans le tableau ci-dessous, les valeurs de Nusselt moyen, calculé pour un  $Ra=10^5$  et on les compare aux résultats des travaux de Fitzjarrald [54] et Lam [26].

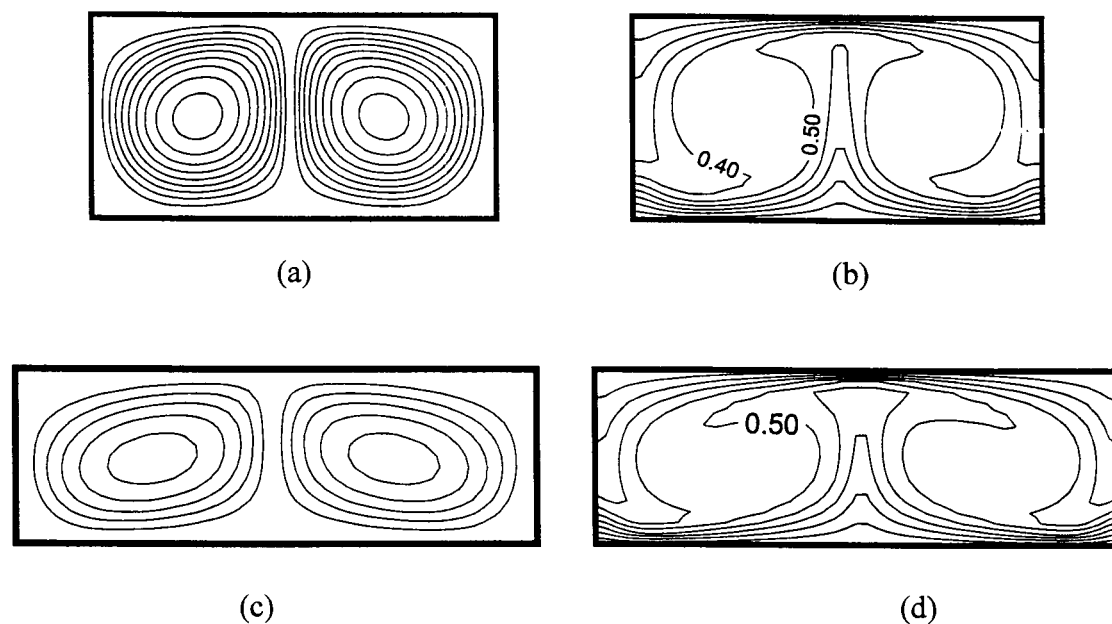
Tableau 4.2

	AL=2 Présent travail	AL=2 [54]	AL=3 Présent travail	AL=3 [26]
$Nu_{moy}$	4.002	4.110	4.113	4.124
$U_{max}$	0.387	-	0.422	-

On constate que l'augmentation de l'allongement s'accompagne d'une augmentation du transfert de chaleur et de l'amplitude de la vitesse maximale horizontale.

Les valeurs de  $Nu_{moy}$  obtenues concordent avec ceux de Fitzjarrald [54] et Lam [26].

Les figures qui suivent représentent les lignes de courant et les isothermes pour les deux allongements  $AL=2$  et  $AL=3$  et pour un nombre de Rayleigh de  $Ra=10^5$  (fig.4.4) :



**Fig. 4.4 :** (a,c) Lignes de courant, (b,d) Isothermes :  $Ra=10^5$  ( $AL=2$  (a,b),  $AL=3$  (c,d))



Pour un allongement  $AL=2$ , la structure de l'écoulement présentée correspond à un résultat classique que l'on retrouve à travers les références bibliographiques traitant sur le sujet.

Avec le cas  $AL=3$ , on remarque que l'écoulement est à deux cellules. D. Mukutmoni et K.T. Yang [18] trouvent une structure de l'écoulement similaire à la notre avec une cavité d'allongement  $AL=3.3$ .

Il est intéressant de noter ici qu'au cours de nos calculs sur l'allongement 3, on a remarqué que le nombre de cellules pour  $Ra=10^4$  est de 3, ce nombre passe à 2 cellules pour  $Ra=10^5$ . Plusieurs auteurs [13], [14], [16], [17] et [18] ont mis en évidence ce phénomène (appelé « loss of rolls ») considérant que l'écoulement perd en nombre de cellules quand le nombre de Rayleigh augmente. Par exemple, Kessler et al. [13] présentent une étude concernant une cavité d'allongement 4 remplie d'air, et constatent que l'écoulement à 4 cellules devient un écoulement à 3 cellules à  $Ra=2.4 \times 10^4$  et passe de 3 à 2 cellules seulement à  $Ra = 10^5$ . Pour des régimes turbulent de fortes intensités la structure de l'écoulement tend vers une seule circulation suivant le périmètre de la cavité [38].

## 2. Convection naturelle turbulente en cavité différentiellement chauffée

Pour une cavité carrée différentiellement chauffée l'écoulement devient turbulent à partir de  $Ra=2 \times 10^8$  [7]. La solution laminaire pour  $Ra=10^8$  est utilisée comme solution initiale au calcul en turbulent. La quantité turbulente  $k$  est considérée être l'énergie cinétique de la solution stationnaire. La quantité  $\varepsilon$  est prise égale à 1% de  $k$  voir référence [2].

En premier lieu, les calculs sont faits pour un cas test ( $Ra=10^9$ ), puis pour un nombre de Rayleigh un peu plus élevé:  $Ra = 5 \times 10^{10}$ .

### • Résultats pour le cas $Ra = 10^9$

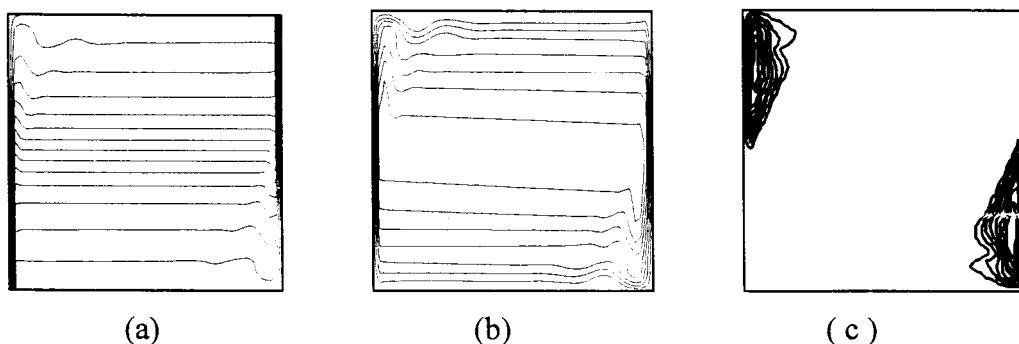
On présente les résultats obtenus en utilisant le modèle  $k-\varepsilon$  standard, avec et sans « lois de parois » (WF), et en employant un maillage uniforme de  $150 \times 150$ . On compare ces résultats avec ceux de P. Le Breton [55] et de S. Xin [2].

Tableau 4.3

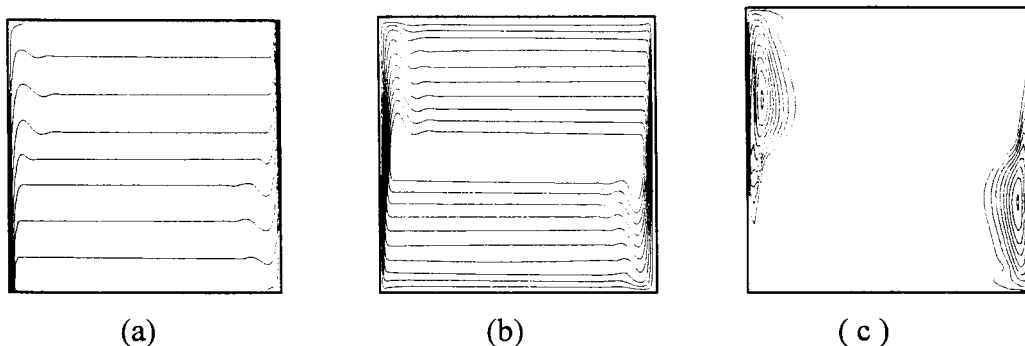
	Présente étude		Précédentes études	
	Sans WF	Avec WF	Le Breton [55]	Xin [2]
$Nu_{moy}$	69.17	54.40	54.7	56.5
$S$	1.664	1.179	1.09	1
$v_{t,max}$	5.015	6.621	6	7.03

Il est à noter que P. Le Breton a utilisé la même méthode que la notre ( méthode des volumes finis), par contre S. Xin a employé une procédure numérique aux différences finis multigrilles avec une résolution spatiale 256x256.

• Nos résultats



**Fig. 4.5 :** (a) Isothermes, (b) Lignes de courant, (c) Viscosité turbulente  
( Modèle k-ε sans « lois de paroi » )



**Fig. 4.6 :** (a) Isothermes, (b) Lignes de courant et (c) Viscosité turbulente  
( Modèle k-ε avec « lois de paroi » )

- Résultats de P. Le Breton [55] :

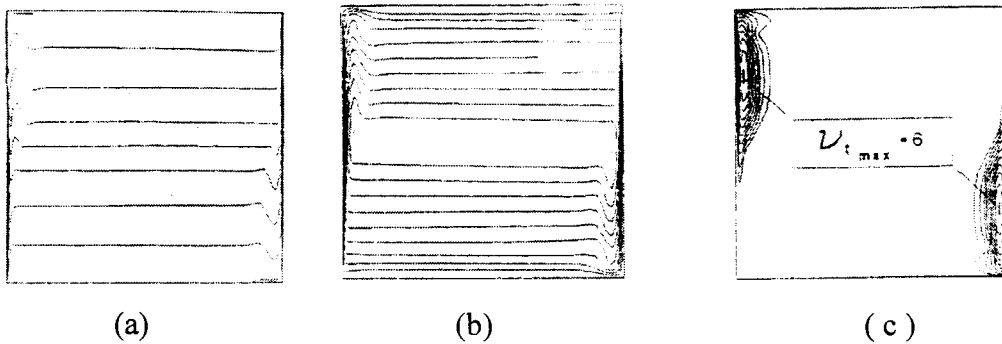


Fig. 4.7 : (a) Isothermes, (b) Lignes de courant et (c) Viscosité turbulente

En comparant nos résultats avec ceux de P. Le Breton et S. Xin, on remarque que le modèle standard sans « lois de paroi » surestime le transfert de chaleur ( $Nu_{moy}$ ) et la stratification au cœur de la cavité (S) et sous-estime la viscosité turbulente maximale ce qui n'est pas le cas pour le modèle avec « lois de parois » (Tableau 4.3). Sur le plan qualitatif, on constate que le modèle  $k-\epsilon$  avec « lois de paroi » prédit mieux les champs thermique et dynamique .

- Résultats pour le cas  $Ra = 5 \times 10^{10}$

En plus du bon comportement du modèle  $k-\epsilon$  standard avec « lois de paroi », celui-ci nous offre la possibilité d'employer une grille pas très grande pour des  $Ra$  élevés, notamment avec un maillage non-uniforme [34].

Ainsi, avec un maillage non-uniforme  $120 \times 120$ , on étudie le cas :  $Ra = 5 \times 10^{10}$  correspondant à celui traité dans le *workshop* et considéré comme solution benchmark. Les résultats obtenus sont présentés et comparés à la solution de référence [12]:

Tableau 4.4

	Présente étude	Solution benchmark [12]	Erreur
$Nu_{moy}$	270	256	5.5%
$\nu_{t,max}$	60.6	51.7	16%

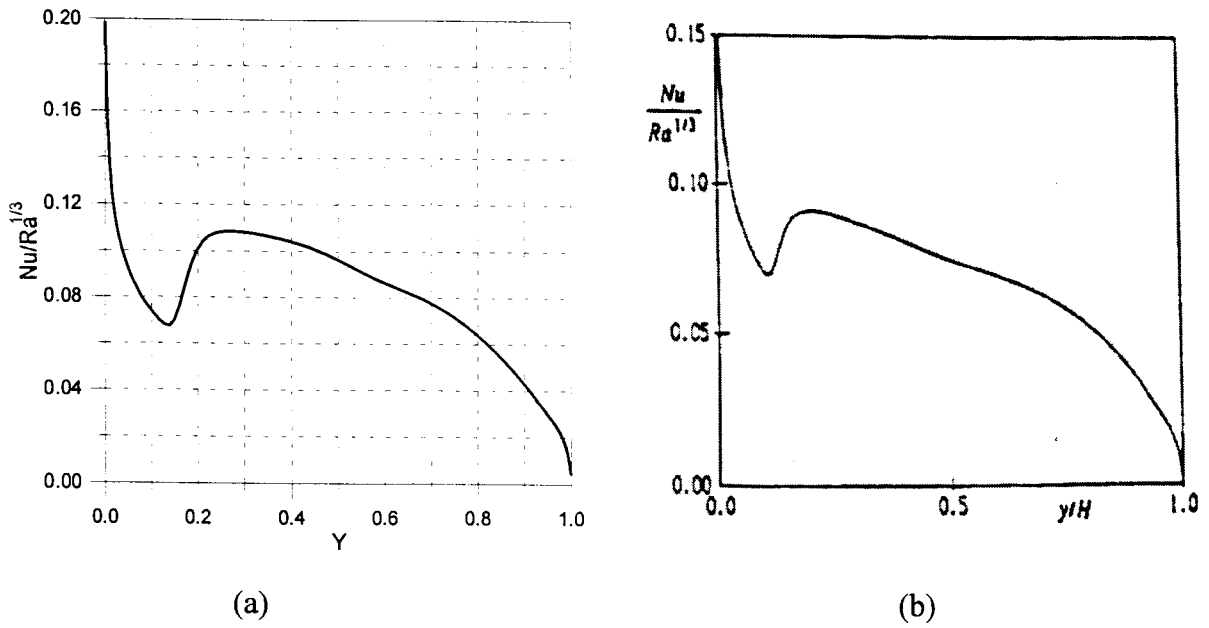


Fig. 4.8: Nusselt local à la paroi chaude : (a) Présente étude, (b) Ref. [12]

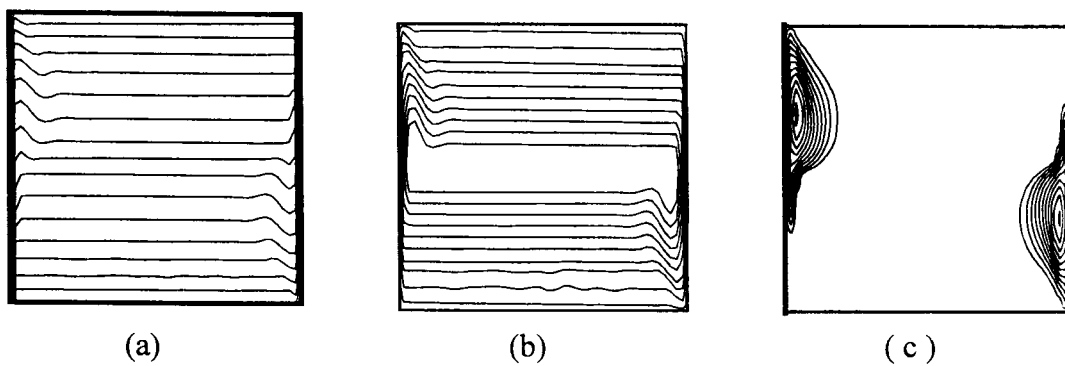


Fig. 4.9 : (a) Isothermes, (b) Lignes de courant, (c) Viscosité turbulente  
(Présente étude maillage non-uniforme  $N_I \times N_J = 120 \times 120$ )

• Solution Benchmark [12] :

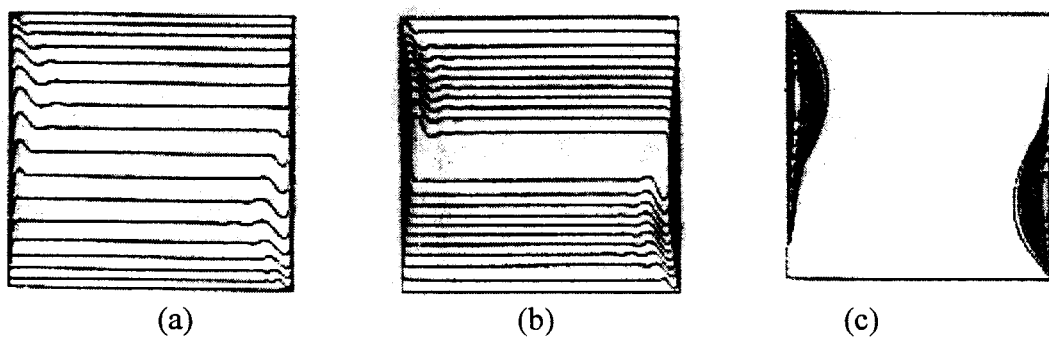


Fig. 4.10 : (a) Isothermes, (b) Lignes de courant, (c) Viscosité turbulente

En comparant les résultats obtenus avec un maillage serré au parois avec ceux de la solution de référence on constate une bonne concordance entre les valeurs de Nusselt moyen et local (voir tableau 4.4 et figure 4.8). La viscosité turbulente est légèrement surestimée par notre modèle de 16% qui est tolérable si l'on sait que la surestimation de cette grandeur est l'une des caractéristiques du modèle  $k-\varepsilon$ . Les résultats qualitatifs (figures 4.9 et 4.10) comparés à la solution de référence montrent aussi une bonne concordance.

Ainsi, la procédure numérique adoptée et le modèle de turbulence employé étant validés, il est important de signaler l'apport de l'utilisation des lois de parois au modèle  $k-\varepsilon$  et la nécessité d'employer un maillage non-uniforme serré aux parois afin d'éviter l'utilisation de maillages uniformes de tailles importantes nécessitant des temps de calcul élevés.

Le bon comportement du code en turbulent et du modèle  $k-\varepsilon$  standard avec « lois de paroi » pour le cas « différentiellement chauffée », nous permet d'aborder sereinement, dans le chapitre suivant, la convection naturelle turbulente en configuration Rayleigh-Bénard et la cavité trapézoïdale chauffée par le bas.

## Chapitre 5

### CONVECTION NATURELLE TURBULENTE

#### DANS DES CAVITES CHAUFFEES PAR LE BAS

##### 1. Position du problème

On présente dans ce qui suit l'étude de l'écoulement bidimensionnel de convection naturelle turbulente de l'air ( $Pr=0.71$ ) dans une cavité chauffée par le bas et refroidie par la paroi supérieure. Les parois verticales sont adiabatiques.

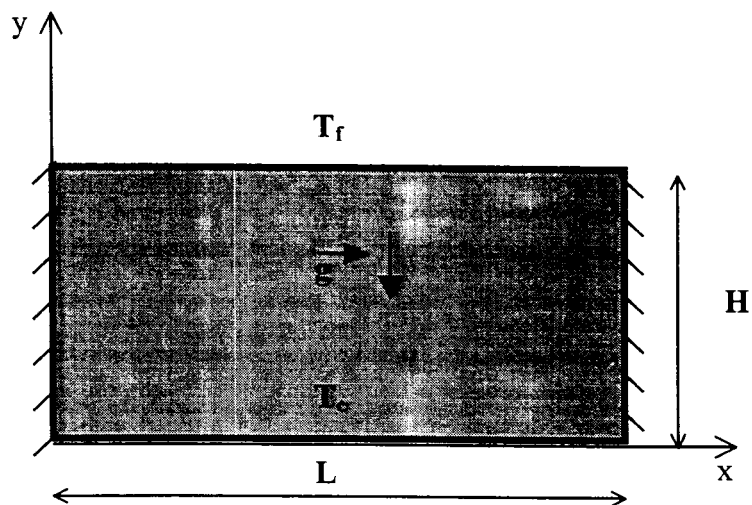
On s'intéresse à deux cas selon que la paroi supérieure de la cavité est inclinée ou non. Pour un angle d'inclinaison  $\alpha=0^\circ$  la cavité est de forme rectangulaire, la convection dans ce cas est de type Rayleigh-Bénard (fig. 5.1.a). Pour  $\alpha > 0^\circ$  la cavité est de forme trapézoïdale (fig. 5.1.b) et la convection n'est plus de type Rayleigh-Bénard [4], mais elle reste tout de même proche de celle-ci notamment pour de faibles angles d'inclinaison.

Dans le cas d'une cavité trapézoïdale, on définit l'allongement de la cavité comme étant le rapport de la largeur sur la plus grande hauteur  $H$ , la petite hauteur étant  $H_0$ .

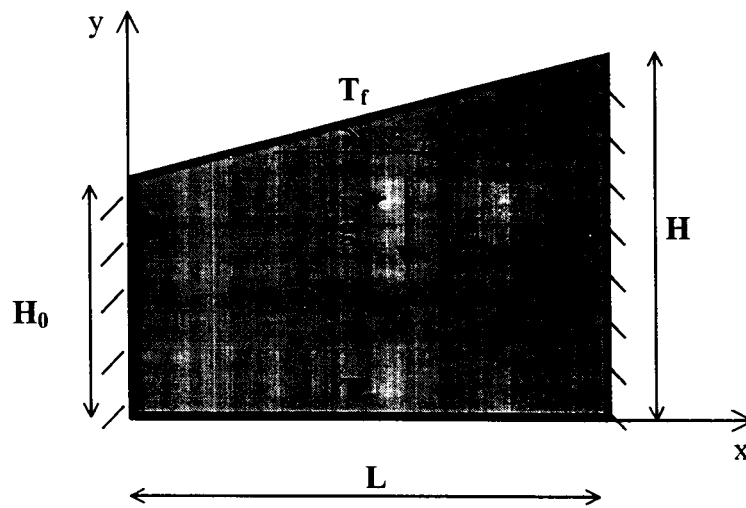
Soit  $\Delta T$  l'écart de température ( $T_c - T_f$ ) entre la paroi inférieure chaude et la paroi supérieure froide, les propriétés du fluide étant évaluées à la température  $T_m = \frac{T_c + T_f}{2}$

Pour le cas Rayleigh-Bénard on fait varier l'allongement ( $AL=L/H$ ) de 1 à 3. Pour la cavité trapézoïdale, le cas d'un allongement égal à 1 est traité pour différents angles d'inclinaison.

La résolution de la convection naturelle turbulente pour les deux configurations présentées en figure 5.1 est faite grâce à l'adaptation du code TEAM. Nous employons pour cela le modèle  $k-\varepsilon$  standard.



(a)



(b)

**Fig. 5.1:** (a) Configuration Rayleigh-Bénard , (b) Cavité trapézoïdale

## 2. Cavité rectangulaire chauffée par le bas

Les calculs menés pour différents AL et différentes sollicitations, donnent des résultats en régime turbulent qui sont en bon accord avec ceux obtenus par d'autres auteurs [7], [10], [35], [36] et [51]. Dans cette configuration, le régime turbulent s'installe à partir des nombres de Ra moins élevés que pour les géométries différentiellement chauffées. A titre d'exemple, pour une cavité carrée chauffée par le bas, le régime transitoire est atteint à partir d'un nombre de Rayleigh de l'ordre de  $Ra \approx 5 \times 10^5$ . On peut donc considérer la convection comme turbulente pour un nombre de  $Ra = 10^6$ . La transition laminaire-turbulent pour la géométrie carrée différentiellement chauffée n'est par contre observée qu'à partir de  $Ra \approx 2 \times 10^8$ .

Le calcul avec  $Ra=10^6$  pour la cavité chauffée par le bas, n'est possible qu'en utilisant comme solution initiale la dernière solution en régime laminaire obtenue. L'estimation initiale de  $k$  et  $\varepsilon$  utilisée dans le cas «différentiellement chauffée» est reprise ici. Elle consiste à prendre l'énergie cinétique de la solution laminaire comme estimation de  $k$ , et 1% de celle-ci pour  $\varepsilon$ .

### 2.1 Effet de l'utilisation de la procédure « Lois de paroi » (WF)

Nous testons dans ce qui suit les deux procédures concernant les conditions aux limites pour le cas de la cavité chauffée par dessous.

L'emploi des modèle  $k-\varepsilon$  avec et sans « lois de paroi » pour le cas d'une cavité carrée, avec un maillage non-uniforme de  $80 \times 80$  et pour deux valeurs de Rayleigh ( $10^6$  et  $10^7$ ), nous permet d'aboutir aux résultats suivants:

Tableau 5.1

	Présente étude				Résultats expérimentaux	
	Modèle $k-\varepsilon$ avec WF		Modèle $k-\varepsilon$ sans WF		Arnold et <i>al.</i> [53]	Fitzjarrald [54]
<b>Ra</b>	$10^6$	$10^7$	$10^6$	$10^7$	$10^6$	$10^7$
<b>Nu<sub>moy</sub></b>	7.422	15.41	8.768	18.06	7.50	16.40
<b>U<sub>max</sub> x10</b>	3.241	3.603	2.888	2.970	—	—
<b>V<sub>max</sub> x10</b>	3.494	3.802	3.226	3.309	—	—
<b>v<sub>t, max</sub></b>	2.115	5.889	3.299	8.858	—	—



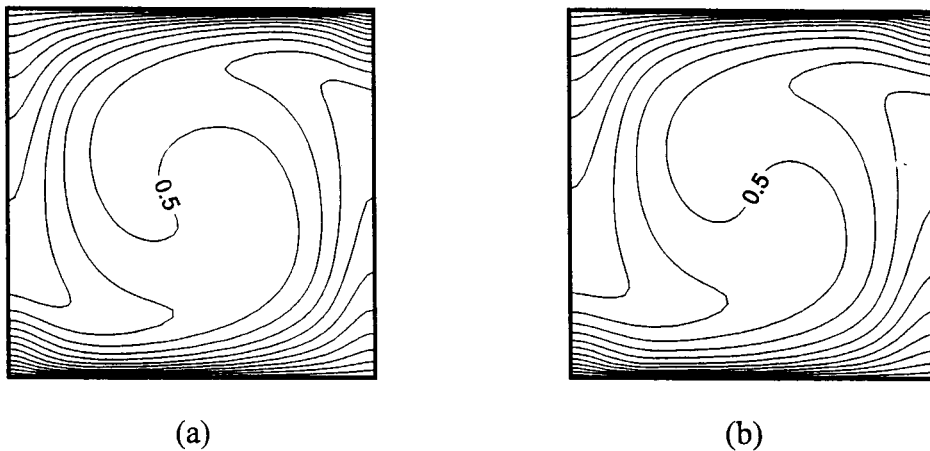
Nous remarquons selon ce tableau, que les valeurs de  $Nu_{\text{moy}}$  obtenues par le modèle avec lois de parois sont plus proches des résultats expérimentaux.

Le modèle sans lois de parois surestime les taux de transfert de chaleur d'environ 18% par rapport à celui utilisant les lois de parois. Cette constatation rejoint celle faite dans le cas de la cavité « différentiellement chauffée ».

De même, l'intensité de la turbulence représentée par  $v_{t, \text{max}}$  est surévaluée de 50% par le modèle sans lois de parois.

Quant aux vitesses maximales, le modèle sans lois de parois les sous-estime comparativement à l'approche avec lois de parois de près de 8% pour  $Ra=10^6$  et de 15%

Les isothermes correspondant au cas résolu avec lois de parois sont plus prononcées que celles obtenues sans utilisation des lois de parois, la figure 5.2 a et b montre bien cette différence.



**Fig. 5.2 :** Isothermes  $AL=1$ ,  $Ra=10^6$  : (a) Avec WF, (b) Sans WF

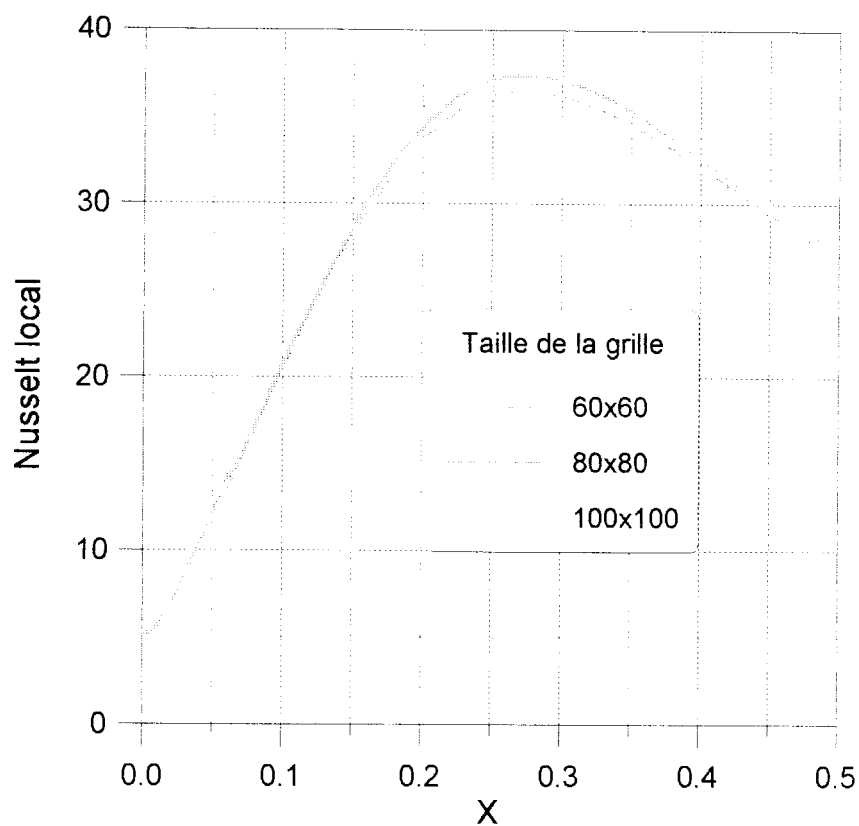
Ces remarques nous encouragent à opter pour l'utilisation de la procédure avec lois de parois.

## 2.2 Etude de l'indépendance du maillage par rapport aux solutions

L'utilisation d'un maillage raffiné aux parois semble nécessaire pour obtenir des résultats avec une précision acceptable et un temps de calcul raisonnable. Le choix de la taille de la grille obéit au critère d'indépendance des solutions. On présente sur le tableau 5.2 les

Tableau 5.2

<b>NI x NJ</b>	60x60	80x80	Différence relative	80x80	100x100	Différence relative
<b>Nu<sub>moy</sub></b>	14.97	15.41	3%	15.41	15.82	2.7%
<b>Nu<sub>max</sub></b>	36.40	37.42	2.8%	37.42	38.01	1.5%
<b>U<sub>max</sub> x10</b>	3.489	3.603	1%	3.603	3.614	0.8%
<b>v<sub>t,max</sub></b>	5.786	5.889	1.8%	5.889	5.892	0.05%



**Fig. 5.3 :** Evolution de Nusselt local sur la paroi chaude en fonction de la taille de la grille

En passant d'une grille 60x60 à 80x80 puis à 100x100, le tableau 5.2 indique une différence relative entre les valeurs de  $Nu_{moy}$  de l'ordre de 3%. Une très faible différence entre les valeurs de  $v_{t,max}$  est aussi observée. La figure 5.3 fait aussi ressortir une faible différence entre les valeurs locales de Nu obtenues par les trois maillages et la différence maximale est inférieure à 5%.

80\*80 et de 100\*100, les différences relatives sont encore plus. La figure 5.3 reprend l'évolution du nombre de Nusselt local pour les trois maillages testés. Nous constatons que pour ces dimensions les différences sont faibles. Le maillage 80\*80 constitue un bon compromis entre une bonne précision et un temps de calcul raisonnable. Toutefois dans ce qui suit on utilise aussi le maillage de 100\*100.

### 2.3 Analyse de l'écoulement convectif turbulent en cavité carrée

Nous présentons dans ce qui suit, les aspects thermique et dynamiques liés à la convection naturelle turbulente dans des cavités carrées ( $AL=1$ ) pour un nombre de Rayleigh de  $10^7$ .

Notons que les résultats numériques dans ce type de configuration sont très rares, notamment en ce qui concerne les quantités turbulentes. Nous utilisons pour ces calculs un maillage de 100\*100.

- Analyse qualitative

Champ dynamique

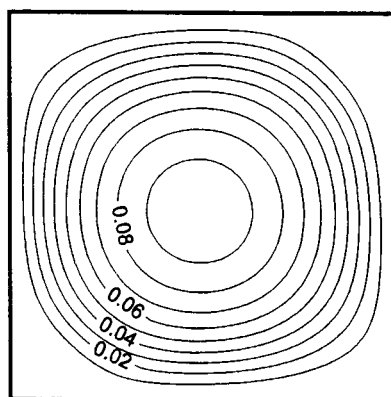


Fig. 5.4 : Lignes de courant

Champ thermique

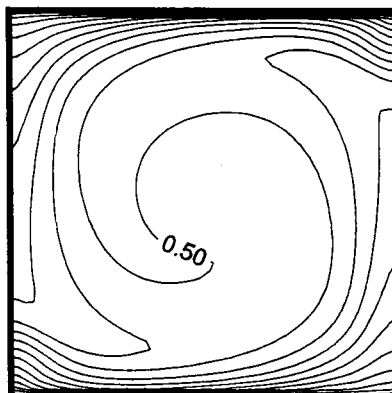
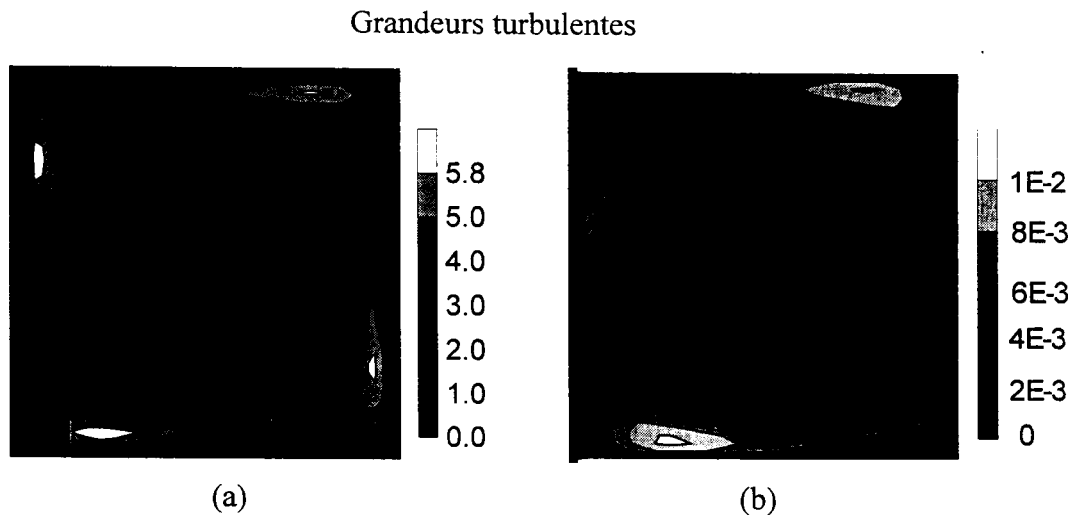


Fig. 5.5 : Isothermes

Les deux figures 5.4 et 5.5 montrent que l'écoulement est unicellulaire et se fait dans le sens contraire des aiguilles d'une montre comme l'indique l'allure des isothermes. La structure de l'écoulement est comparable à celle obtenue dans le cas laminaire. Le cœur de la cavité est à une température moyenne comprise entre celle de la paroi froide et celle de la paroi chaude. Sur ces parois actives se développe une couche limite thermique de faible épaisseur (fig. 5.5).



**Fig. 5.6 :** (a) Viscosité turbulente, (b) Energie cinétique de turbulence

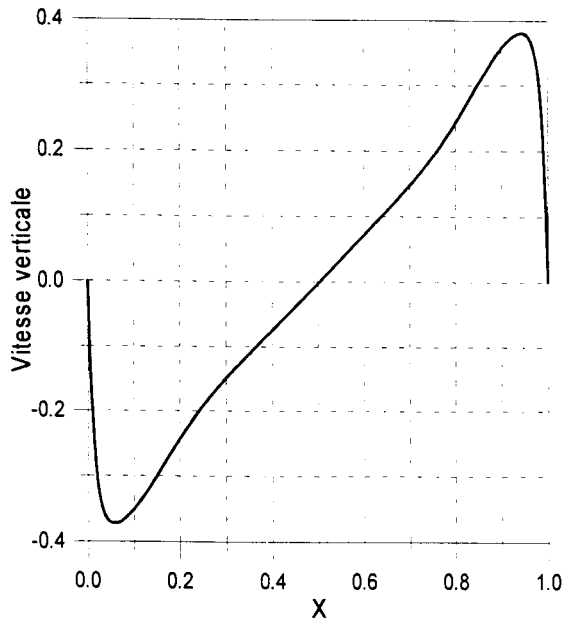
La figure 5.6 montre que la turbulence est très importante à l'entrée et à la sortie des couches limites horizontales correspondant aux parois actives. Très près des parois et au centre de la cavité, l'intensité de la turbulence est très faible (voir les échelles sur fig. 5.6).

- Analyse quantitative

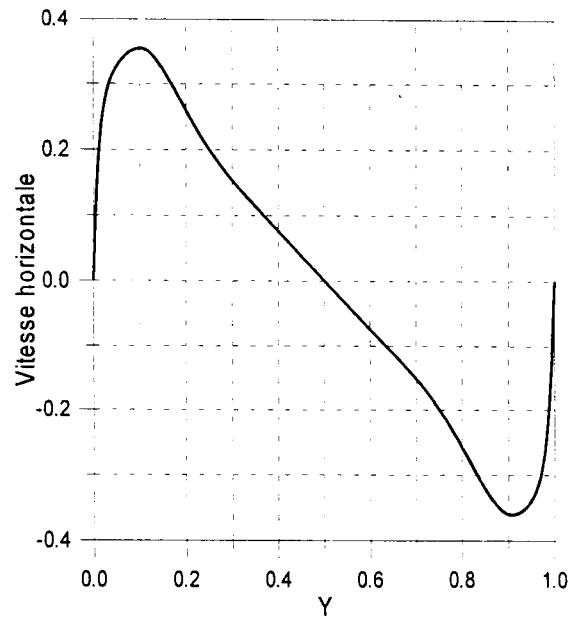
La valeur du nombre de Nusselt moyen obtenue pour ce cas est de 15.82. Ce résultat est en bon accord avec les valeurs de Nusselt moyen obtenues pour  $Ra=10^7$  et tirées à partir des corrélations ou des graphes de précédentes études, notamment expérimentales [54], [56] et [57]. Par exemple, D. E. Fitzjarrald [54] trouve 16.40, soit une différence de l'ordre de 4%. L'évolution des amplitudes des vitesses horizontales et des vitesses verticales, respectivement à mi-largeur (figures 5.7) et à mi-hauteur (figure 5.8), montre qu'au centre de la cavité la vitesse moyenne est quasiment nulle.

Les valeurs des deux composantes de la vitesse moyenne augmentent au fur et à mesure qu'on s'éloigne du centre vers les parois jusqu'à une valeur maximale au voisinage de

celles-ci. Puis elles diminuent de nouveau à l'approche de ces parois solides à cause de l'effet de viscosité de plus en plus important.

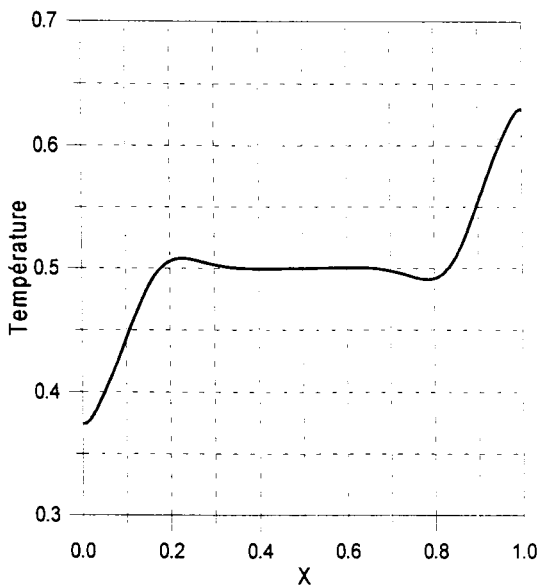


**Fig. 5.7 :** Evolution de la vitesse verticale moyenne en  $Y=0.5$

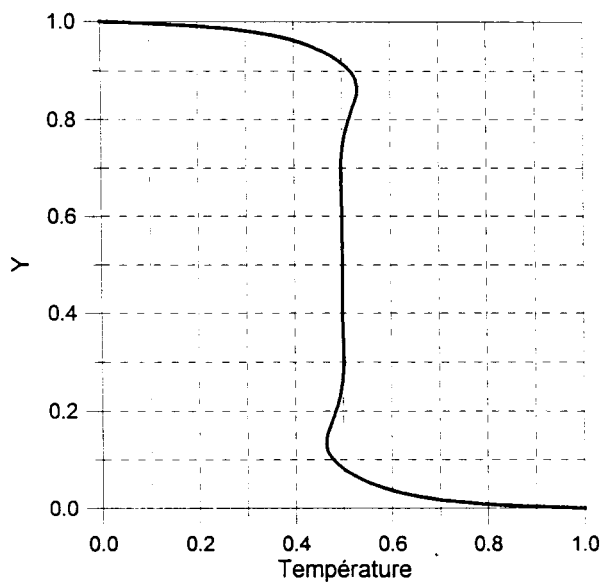


**Fig. 5.8 :** Evolution de la vitesse horizontale moyenne en  $X=0.5$

Les figures 5.9 et 5.10 confirment le fait que le cœur de la cavité est isotherme et il y règne une température moyenne comprise entre celles imposées aux parois actives (voir fig. 5.5).



**Fig. 5.9 :** Evolution de la température en  $Y=0.5$



**Fig. 5.10 :** Evolution de la température en  $X=0.5$

La figure 5.11 fait apparaître un maximum pour le nombre de Nusselt local sur la paroi chaude à une distance  $X \approx 0.3$ , correspondant à une arrivée de fluide froid sur la paroi chaude.

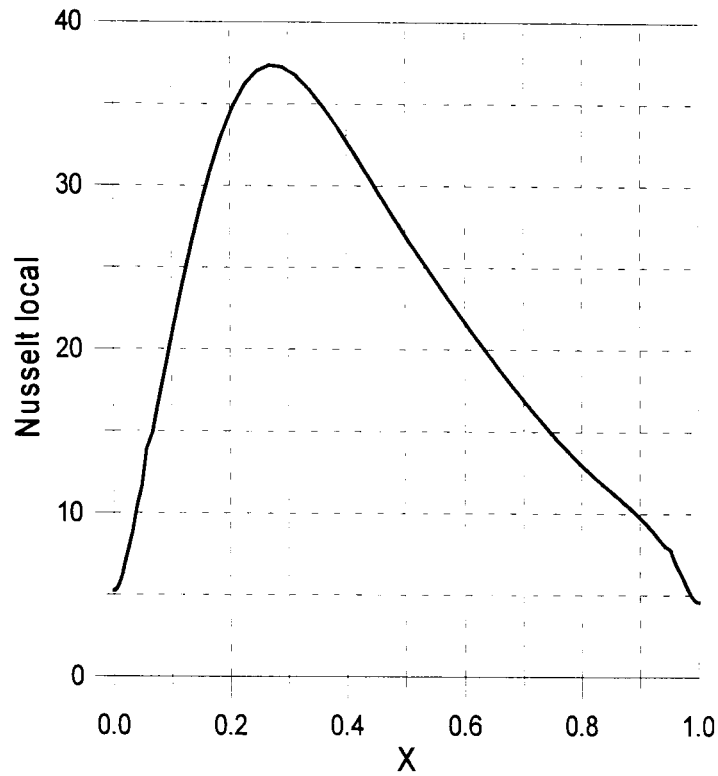


Fig. 5.11 : Evolution de Nusselt local sur la paroi chaude

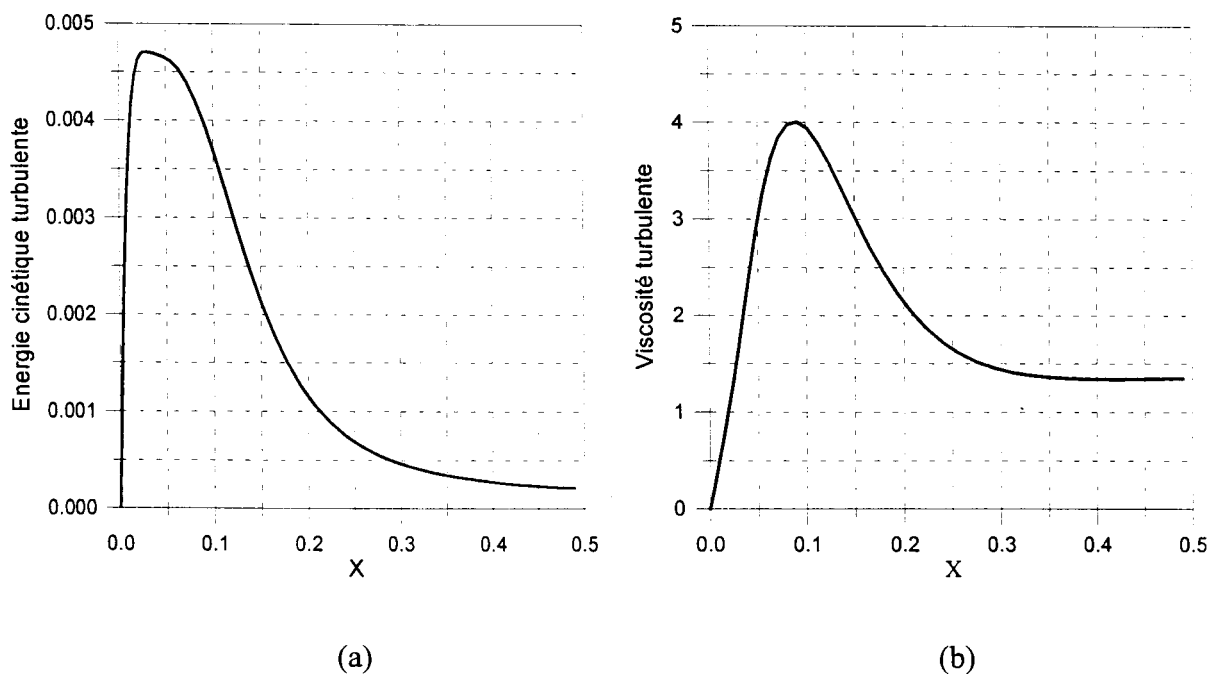
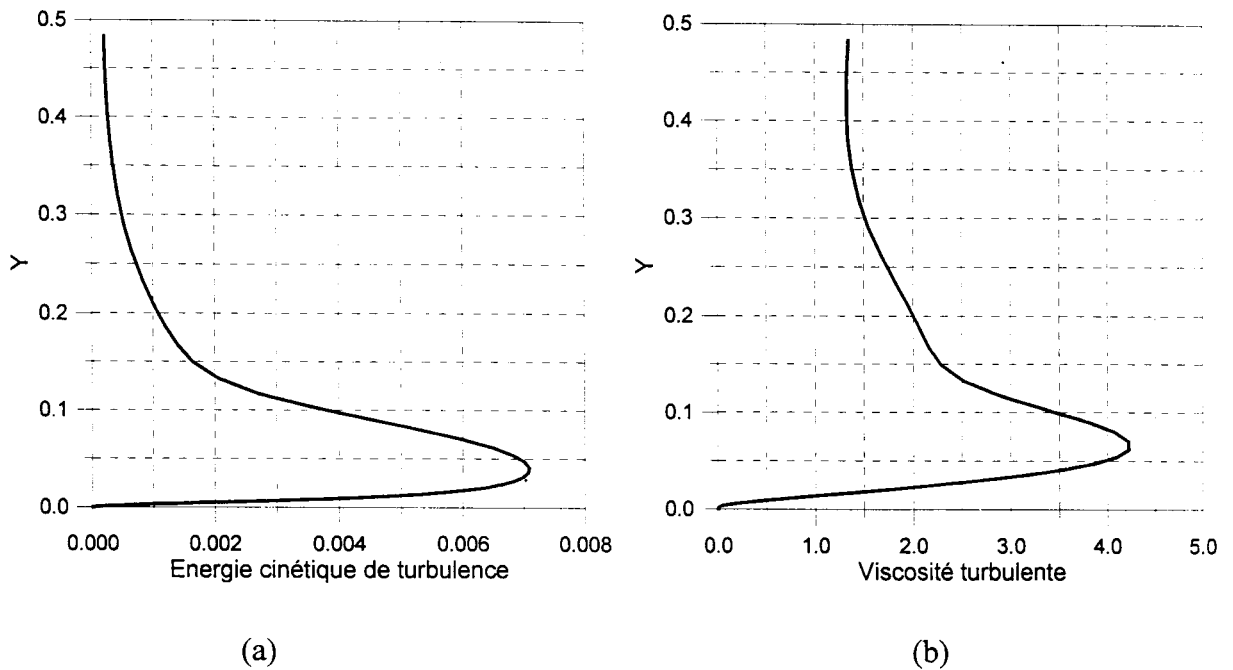


Fig. 5.12 : Evolution en  $Y=0.5$  ( $AL=1, Ra=10^7$ ) de :  
 (a) l'énergie cinétique de turbulence, (b) la viscosité turbulente

Les figures 5.12 et 5.13 représentent, respectivement, l'évolution des grandeurs turbulentes à la mi-hauteur et la mi-largeur de la cavité. Ces figures rejoignent la constatation faisant état d'une concentration de la turbulence dans une zone avoisinant les parois, notamment près des parois actives (voir figure 5.6). Cette zone est d'épaisseur de l'ordre du quart de la largeur de la cellule ( voir figures 5.12 et 5.13).



**Fig. 5.13 :** Evolution en  $X=0.5$  ( $AL=1$ ,  $Ra=10^7$ ) de :  
(a) l'énergie cinétique de turbulence, (b) la viscosité turbulente

## 2.4 Influence de AL et Ra sur le régime d'écoulement et le transfert de chaleur

### 2.4.1 Influence de l'allongement

Le tableau 5.3 regroupe les résultats numériques obtenus pour un nombre de Rayleigh égal à  $10^7$  en faisant varier l'allongement de la cavité de 1 à 3. Les maillages utilisés sont  $80 \times 80$ , pour  $AL=1$ , et  $80 \times 160$  pour  $AL=2$  et 3.

Tableau 5.3

AL	1	2	3
$Nu_{\text{moy}}$	15.41	26.26	28.19
$V_{t, \text{max}}$	5.889	24.75	45.00
$K_{\text{max}} \times 10^2$	1.102	2.661	2.808

Nous constatons que la viscosité turbulente augmente sensiblement avec l'allongement de la cavité. Par contre, l'énergie cinétique de turbulence et le transfert de chaleur augmentent d'une façon très significative quand on passe d'une cavité carrée à une cavité d'allongement 2, puis cette augmentation s'atténue en passant d'un allongement 2 à 3.

Les figures 5.14 et 5.15 montrent que pour les deux allongements de la cavité rectangulaire l'écoulement conserve la même structure, à savoir deux cellules contrarotatives. Ceci explique d'un côté la légère différence entre les valeurs de Nusselt moyens pour  $AL=2$  et  $AL=3$  signalée auparavant.

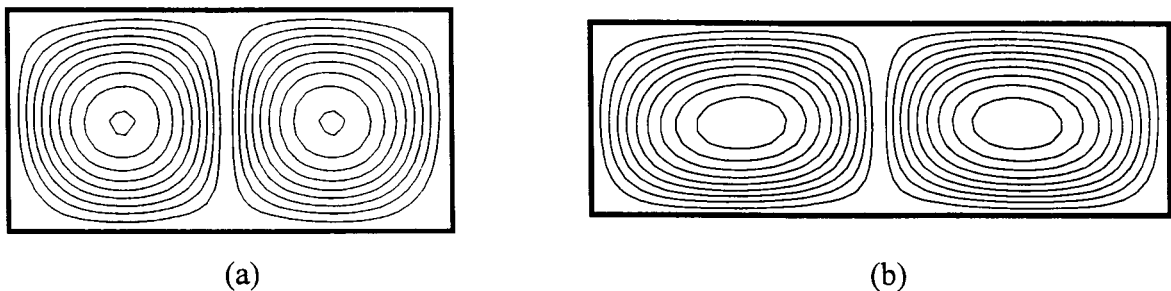


Fig. 5.14 : Lignes de courants ( $Ra=10^7$ ) : (a)  $AL=2$  (b)  $AL=3$

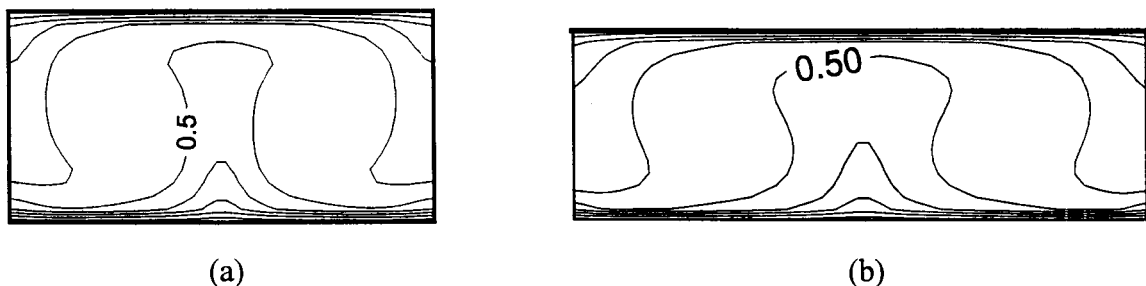
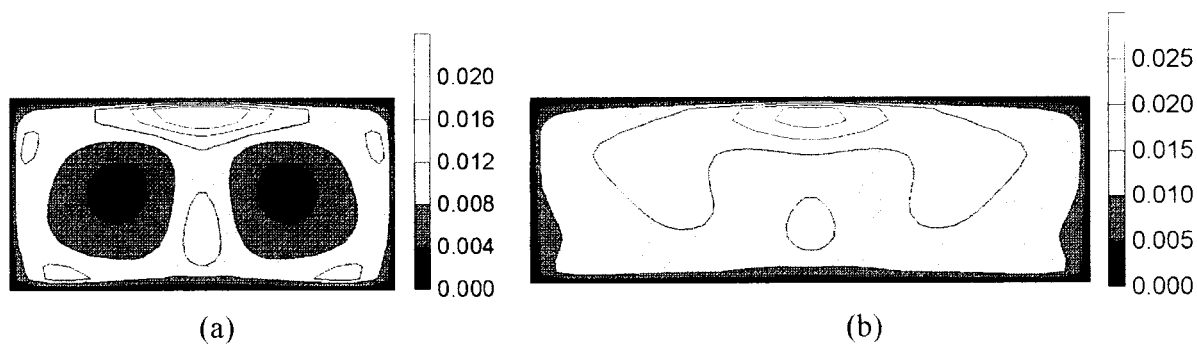


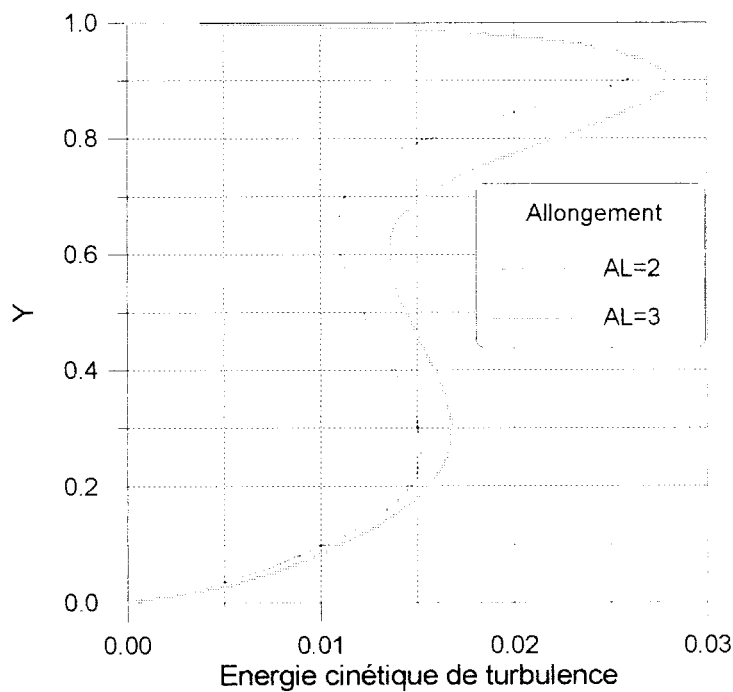
Fig. 5.15 : Isothermes ( $Ra=10^7$ ) : (a)  $AL=2$ , (b)  $AL=3$



L'accroissement de l'intensité de la turbulence avec l'allongement est visible à partir de la figure 5.16, mais les valeurs maximales des grandeurs turbulentes sont situées cette fois-ci à mi-largeur près de la paroi supérieure froide de la cavité rectangulaire comme l'indique aussi la figure 5.17.

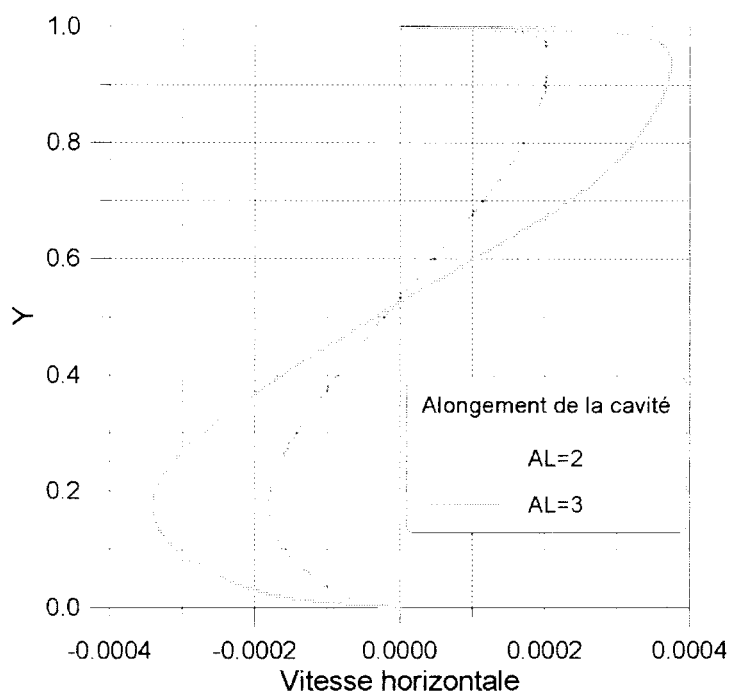


**Fig. 5.16 :** Energie cinétique de turbulence ( $Ra=10^7$ ) : (a)  $AL=2$ , (b)  $AL=3$



**Fig. 5.17:** Evolution de l'énergie cinétique de turbulence dans une cavité rectangulaire en  $X=0.5$

La figure 5.18 indique une augmentation de l'amplitude de la vitesse horizontale à mi-largeur en passant d'un allongement 2 à 3, cette augmentation est de plus en plus importante en s'approchant des parois actives.

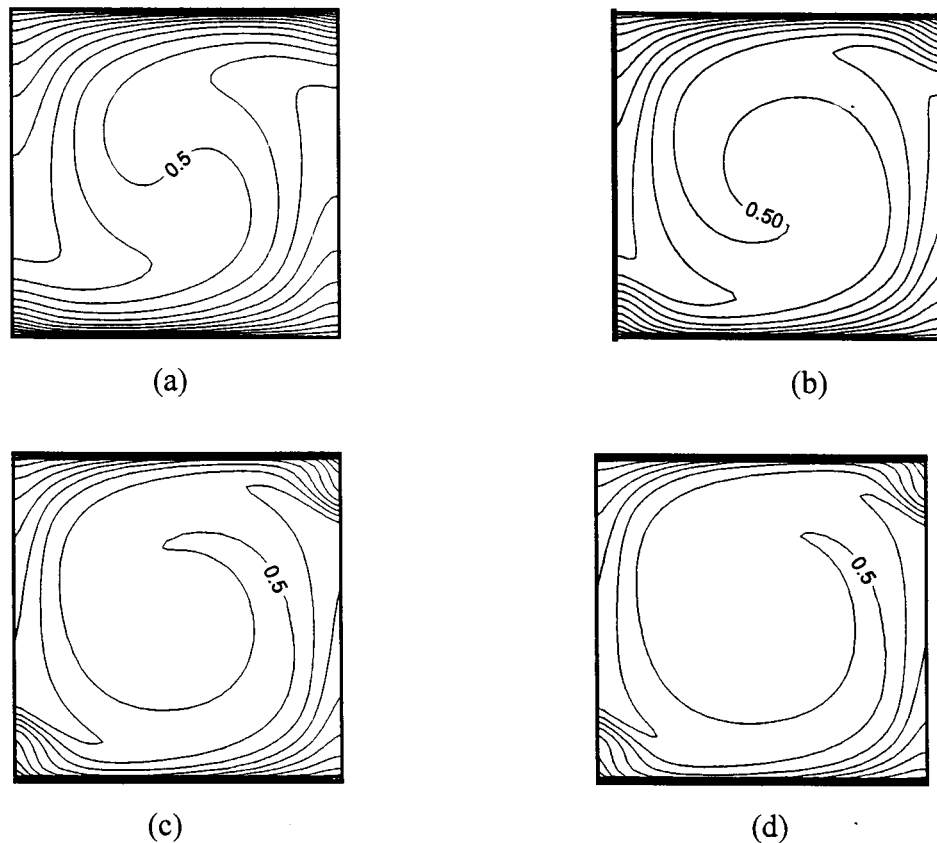


**Fig. 5. 18:** Evolution de la vitesse horizontale en  $X=0.5$  dans une cavité rectangulaire

### 2.4.2 Influence du nombre de Rayleigh

Dans ce paragraphe nous montrons l'influence du nombre de Rayleigh sur l'écoulement et le transfert de chaleur. En faisant varier le nombre de Rayleigh de  $10^6$  à  $10^9$  pour une cavité carrée ( $AL=1$ ), on obtient les résultats suivants :

- Résultats qualitatifs



**Fig. 5.19** : Isothermes : (a)  $Ra= 10^6$ , (b)  $Ra= 10^7$ , (c)  $Ra= 10^8$ , (d)  $Ra= 10^9$

Nous constatons sur les figures 5.19, que plus  $Ra$  augmente, plus la partie centrale de la cavité se rapproche de la température moyenne. Au voisinage des parois actives, l'épaisseur des couches limites thermiques rétrécit avec l'augmentation de  $Ra$ . Des remarques similaires aux nôtres sont faites par A.A Mohamad et R. Viskanta [36].

De la figure 5.20, on constate que la zone où se concentre la turbulence rétrécit mais augmente en intensité lorsque  $Ra$  augmente.

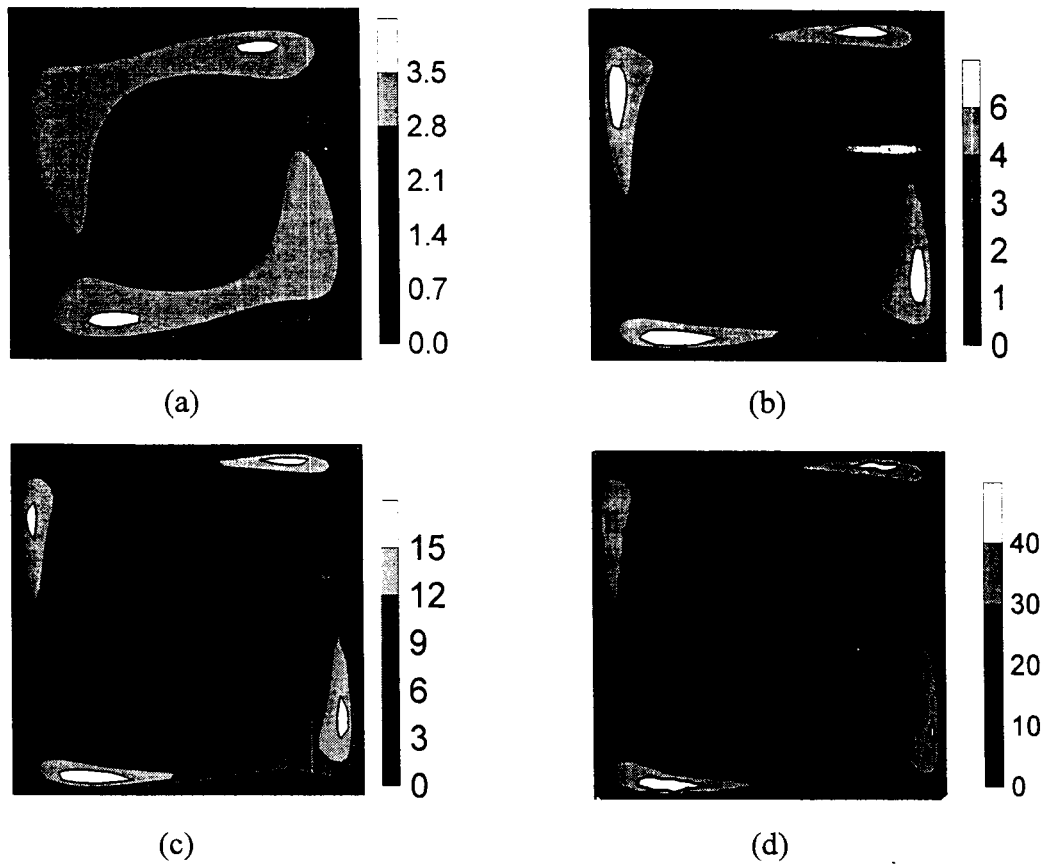


Fig. 5.20 : Viscosité turbulente : (a)  $Ra= 10^6$ , (b)  $Ra= 10^7$ , (c)  $Ra= 10^8$ , (d)  $Ra= 10^9$

• Résultats quantitatifs

Le tableau ci-dessous montre que l'augmentation du nombre de Rayleigh entraîne l'accroissement des taux de transfert de chaleur, des vitesses et des quantités turbulentes.

Tableau 5.4

<b>Ra</b>	<b><math>10^6</math></b>	<b><math>10^7</math></b>	<b><math>10^8</math></b>	<b><math>10^9</math></b>
<b><math>Nu_{moy}</math></b>	8.51	15.82	38.86	94.22
<b><math>U_{max} \times 10</math></b>	2.824	3.614	3.783	3.847
<b><math>V_{max} \times 10</math></b>	3.102	3.810	3.943	3.988
<b><math>V_{t,max}</math></b>	3.624	5.892	17.35	46.83

Les figures 5.21 et 5.22 confirment le rétrécissement de la couche limite thermique et la tendance de la zone centrale de la cavité à être de plus en plus isotherme et à occuper la majeure partie de la cavité lorsque Ra augmente.

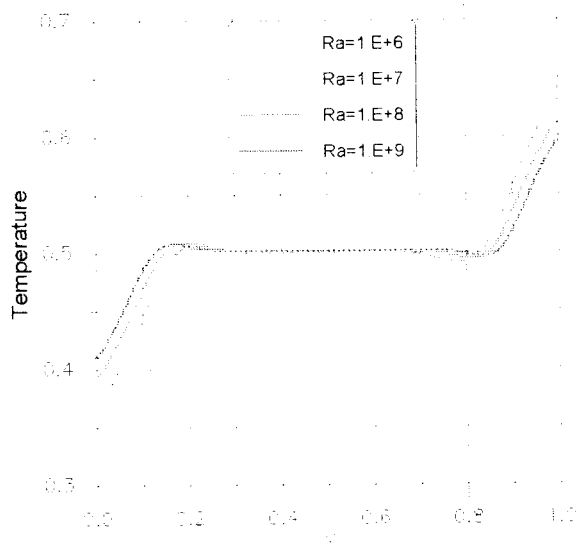


Fig. 5.21 : Profils de température en  $Y=0.5$  pour différents  $Ra$

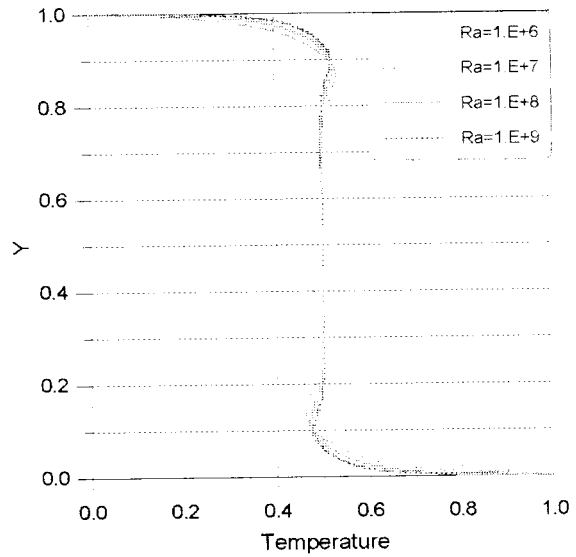


Fig. 5.22 : Profils de température en  $X=0.5$  pour différents  $Ra$

La figure 5.23 ci-dessous, montre l'évolution du  $Nu$  local calculé sur la paroi du bas. Il apparaît que le taux de transfert augmente avec  $Ra$ . Le maximum de chaleur est évacué dans une zone à forte turbulence (voir figure 5.20). Ce maximum reste toujours situé à une distance du bord gauche de l'ordre d'environ 20% de la largeur de la cavité.

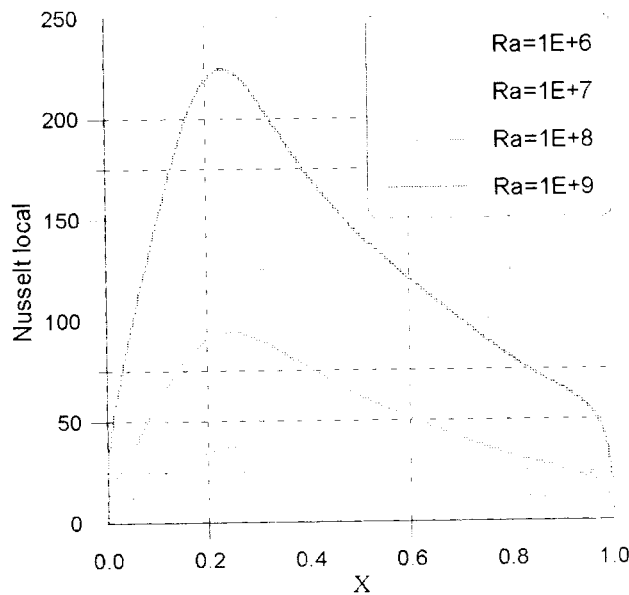
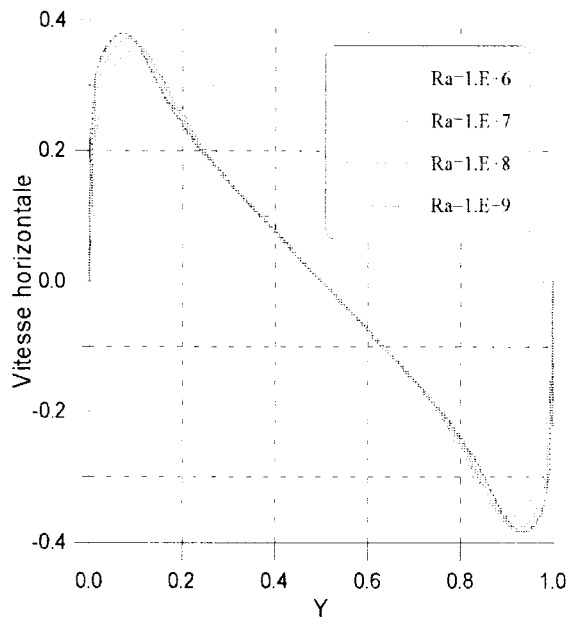


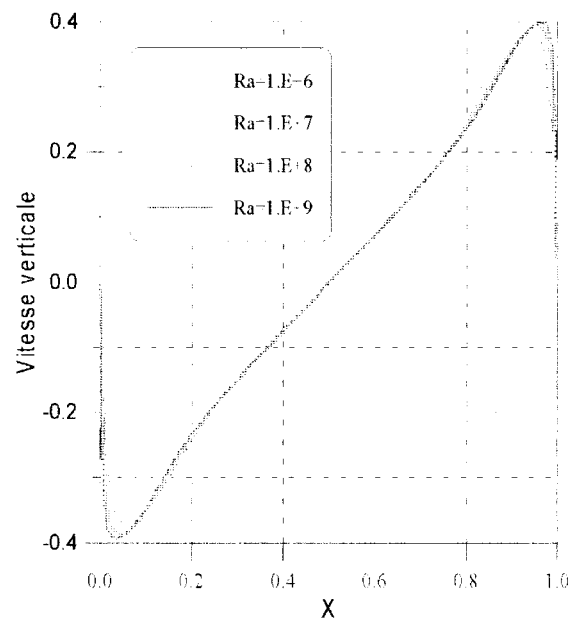
Fig. 5.23 : Profils de Nusselt local sur la paroi chaude pour différents  $Ra$

L'évolution des vitesses verticales et horizontales est tracée sur les figures 5.24 et 5.25. On constate qu'elles sont du même ordre de grandeurs dans toutes les directions et confirment la symétrie géométrique par rapport au centre. Le maximum de l'écoulement se situe de

plus en plus près du bord des parois. Ce profil montre le sens de l'écoulement à l'intérieur de la cavité ( ici contraire au sens des aiguilles d'une montre ).

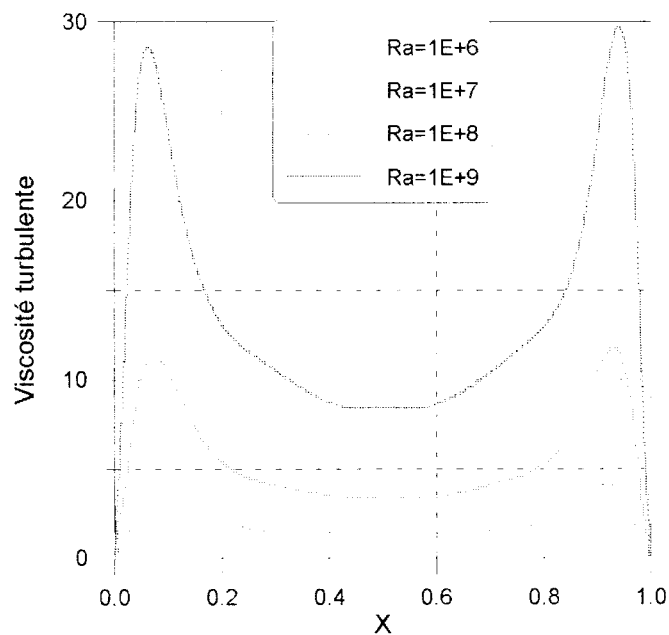


**Fig. 5.24** : Profils de la vitesse moyenne horizontale en  $X=0.5$



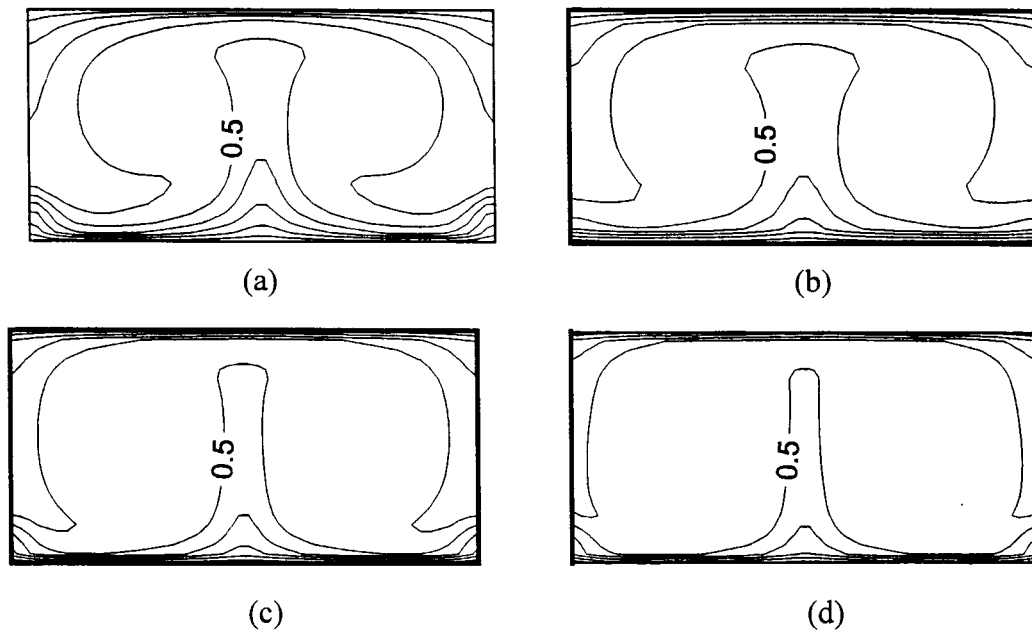
**Fig. 5.25** : Profils de la vitesse moyenne verticale en  $Y=0.5$

La figure 5.26 confirme les constatations faites sur la figure 5.20 indiquant une zone de forte intensité de la turbulence au voisinage des parois verticales qui tend à se rétrécir lorsque Ra augmente.

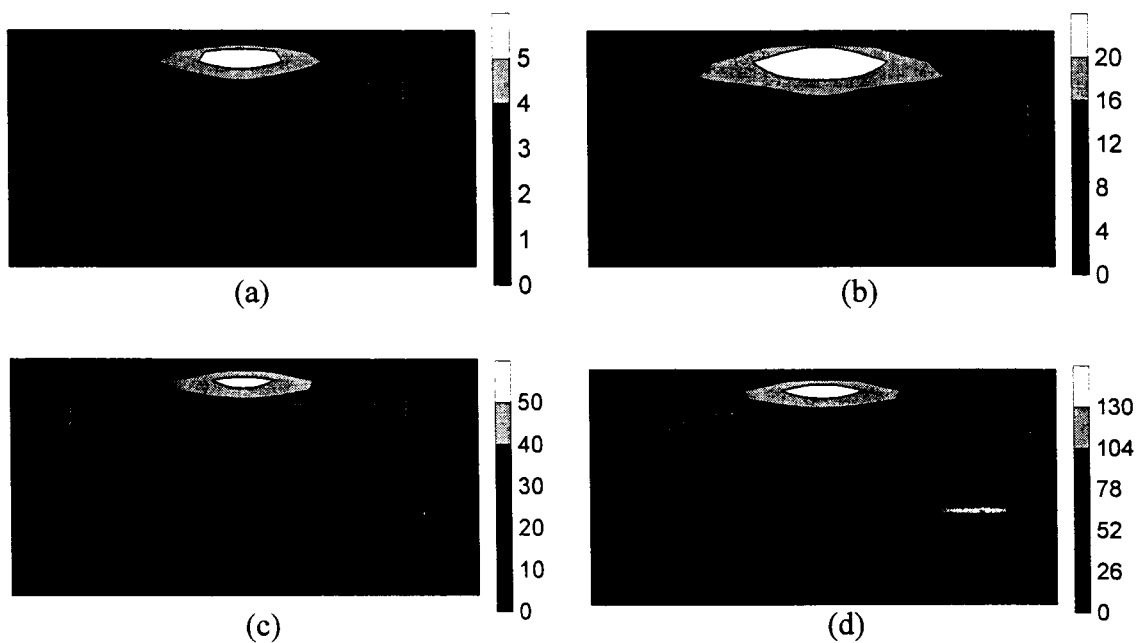


**Fig. 5.26** : Profils de la viscosité turbulente en  $Y=0.5$  pour différents Ra

**AL=2**



**Fig. 5.27 :** Isothermes ( AL=2 ): (a)  $Ra= 10^6$ , (b)  $Ra= 10^7$ , (c)  $Ra= 10^8$ , (d)  $Ra= 10^9$



**Fig. 5.28 :** Viscosité turbulente (AL=2): (a)  $Ra= 10^6$ , (b)  $Ra= 10^7$ , (c)  $Ra= 10^8$ , (d)  $Ra= 10^9$

Deux remarques principales se dégagent des figures 5.27 et 5.28:

- le rétrécissement des couches limites thermiques sur les parois actives et la tendance à l'isothermie de la partie centrale de la cavité lorsque le nombre de Rayleigh augmente.
- Les valeurs maximales de la viscosité turbulente se situent à mi-largeur au voisinage de la paroi froide, correspondant à l'arrivée d'un courant de fluide chaud.

L'évolution de Nusselt local sur la paroi chaude pour différents nombres de Rayleigh est tracée (fig.5.29). On remarque un minimum et deux maximums pour chaque Ra. La valeur minimale est à mi-largeur, se qui s'explique par le départ d'un courant de fluide quittant la paroi chaude à ce niveau. Les valeurs maximales sont proches des parois verticales, correspondant à une arrivée d'un courant de fluide froid sur la paroi chaude.

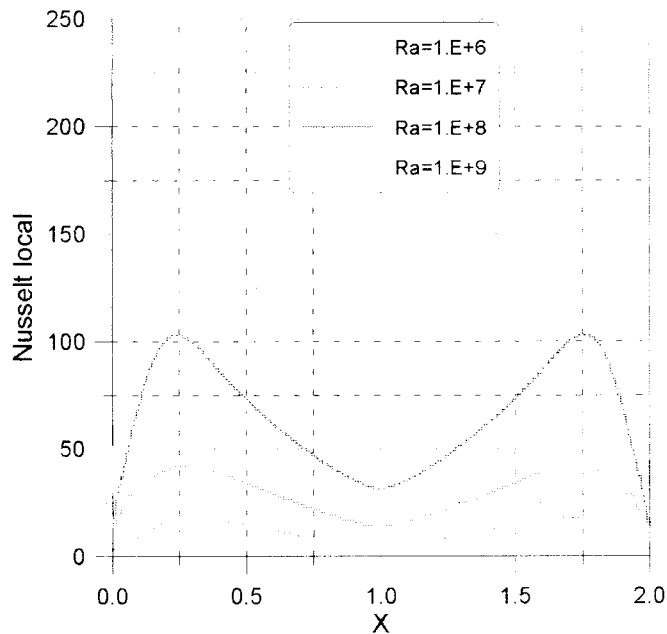


Fig. 5.29 : Profils de Nusselt local à la paroi chaude pour différents Ra

L'évolution de la viscosité turbulente à mi-hauteur qu'on présente sur la figure 5.30, montre des maximums au centre de la cavité et au voisinage des parois verticales, indiquant l'existence de fluctuations importantes dans ces endroits

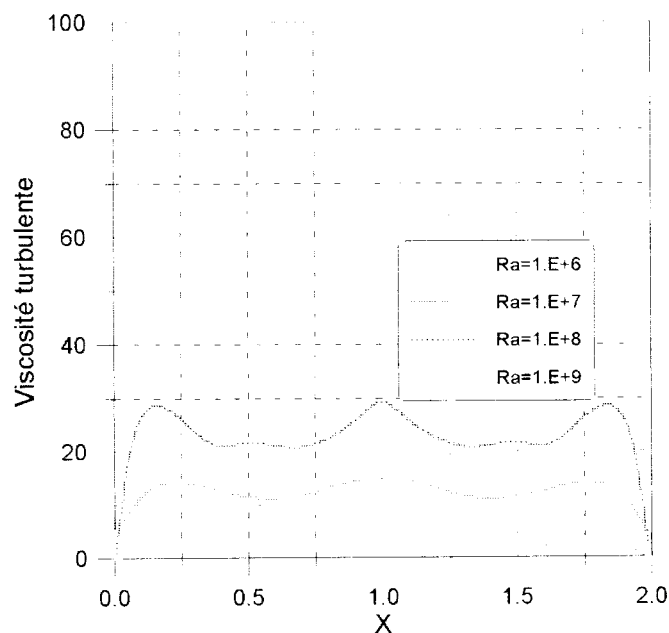
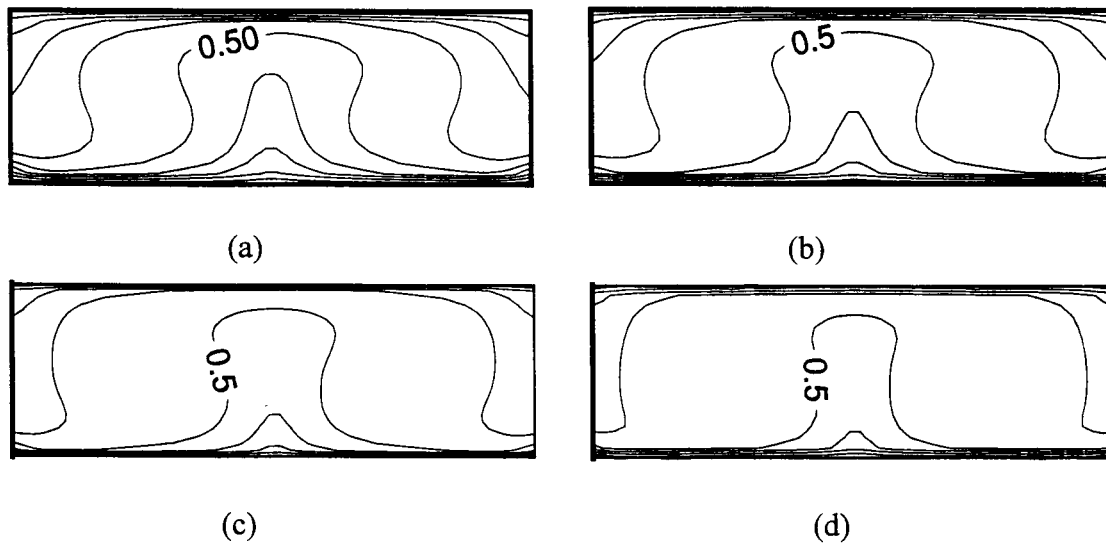


Fig. 5.30 : Profils de la viscosité turbulente en Y=0.5 pour différents



**AL=3**

Pour  $Al=3$ , la structure de l'écoulement présente aussi deux cellules, nous nous contentons dans ce qui suit de présenter uniquement les isothermes pour les nombres de Rayleigh déjà cités. Les remarques faites pour un allongement de 2 valent pour l'allongement de 3.



**Fig. 5.31** : Isothermes (  $AL=3$  ) : (a)  $Ra= 10^6$ , (b)  $Ra= 10^7$ , (c)  $Ra= 10^8$ , (d)  $Ra= 10^9$

Nous consignons sur le tableau 5.5 les taux de transferts de chaleur moyens et les viscosités turbulentes maximales correspondant aux deux allongements  $AL=2$  et 3.

Tableau 5.5

Ra	$10^6$		$10^7$		$10^8$		$10^9$	
	2	3	2	3	2	3	2	3
$Nu_{moy}$	8.943	11.26	26.26	28.19	54.64	62.30	127.3	141.7
$\nu_{t,max}$	5.765	14.80	24.75	45.00	53.91	131.1	146.1	380.1

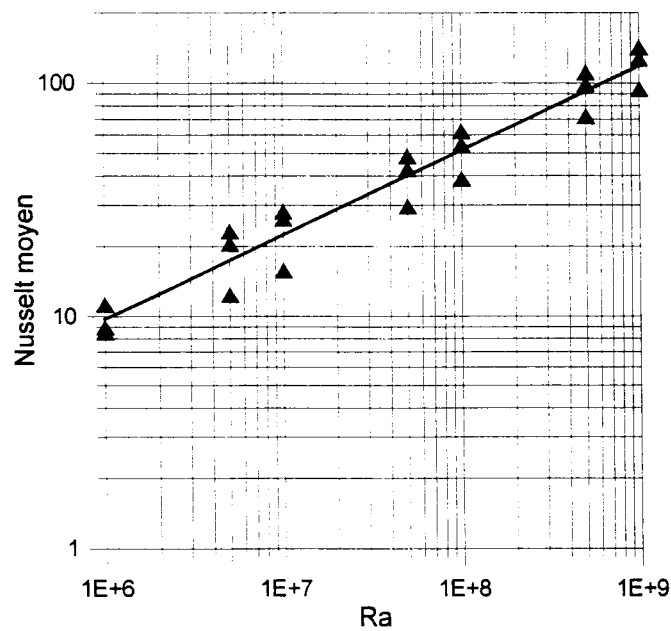
Les résultats résumés sur le tableau 5.5, confirment l'augmentation du transfert de chaleur et des grandeurs turbulentes avec le nombre de Rayleigh.

### 2.5 Corrélation pour l'estimation du transfert de chaleur

En regroupant les valeurs de Nusselt moyen calculées pour la configuration Rayleigh-Bénard avec des cavités d'allongements  $AL=1, 2, 3$  en faisant varier  $Ra$  de  $10^6$  à  $10^9$ .

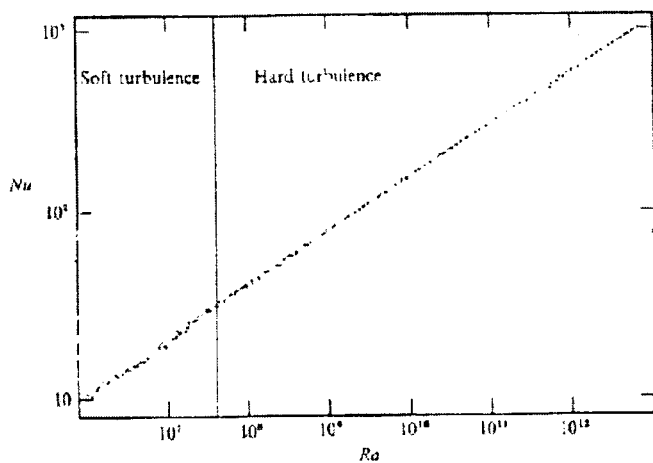
Le graphe de la figure 5.32 montre que le nombre de Nusselt varie linéairement avec le nombre de Rayleigh. Nous proposons la corrélation suivante permettant d'estimer, dans le domaine des  $Ra$  et des  $AL$  cités, le taux de transfert de chaleur :

$$Nu_{\text{moy}} = 0.065 Ra^{0.362} \quad 10^6 \leq Ra \leq 10^9 \quad \text{et} \quad 1 \leq AL \leq 3$$



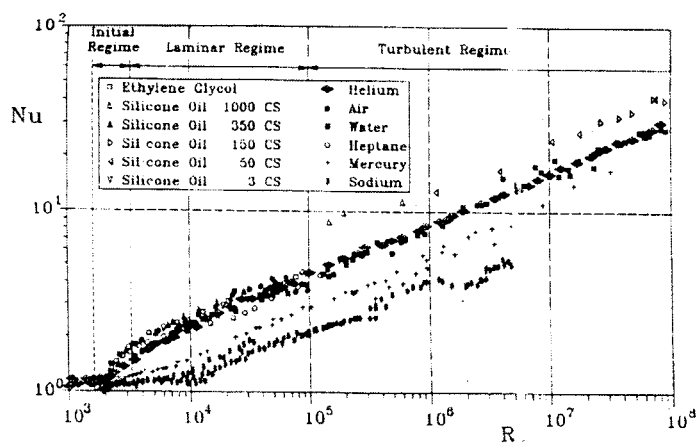
**Fig. 5.32:** Nusselt moyen en fonction de  $Ra$  pour une configuration Rayleigh-Bénard (échelle Log-Log)

Nous présentons dans ce qui suit (figure 5.33 ) les résultats des taux de transferts obtenus par Casting et al. [24], pour le cas d'une couche cylindrique verticale d'Hélium d'allongement égal à 1, et montrant une allure comparable à la notre.



**Fig. 5.33 :** Evolution de Nusselt moyen en fonction de Ra ( graphe présenté dans la référence[24] )

Une étude expérimentale récente exécuté par Horanyi et al. [25] ( enceinte cylindrique verticale avec plusieurs allongements et pour une variété de fluides) montre également une évolution (fig. 5.34) analogue à celle que nous proposons. L'étude regroupe une large palette de fluides confinés et pour des allongement allant de 4.5 à 20.



**Fig. 5.34 :** Evolution de Nusselt moyen en fonction de Ra pour différents fluide ( graphe présenté dans la référence[25] )

### 3. Cavité trapézoïdale

On examine en premier lieu l'effet de l'utilisation des « lois de paroi » comme ça était fait pour le cas de la cavité rectangulaire.

#### 3.1 L'effet de l'emploi des « lois de paroi »

Pour voir l'influence de l'utilisation de la procédure « lois de paroi » (WF), on compare les résultats obtenus avec ce cas là et ceux obtenus avec un modèle sans « lois de paroi ». Les résultats présentés ci-dessous concernent une cavité avec un angle d'inclinaison de  $5^\circ$  et pour  $Ra=10^7$ .

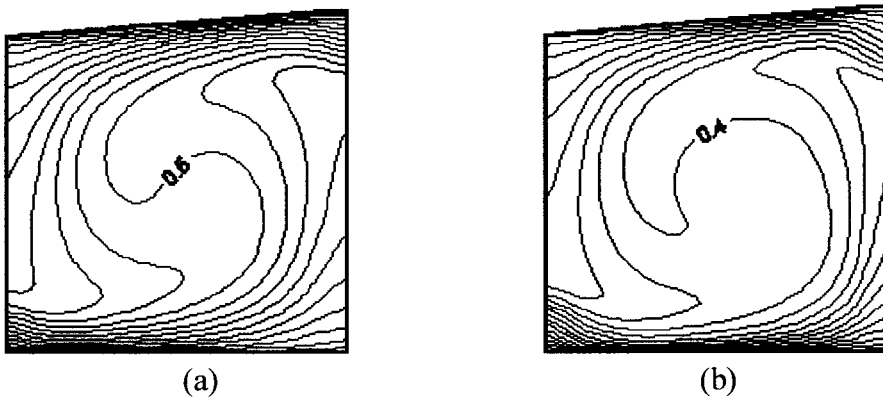


Fig. 5.35 : Isothermes ( $\alpha=5^\circ$  et  $Ra=10^7$ ) : (a) Sans WF, (b) Avec WF

Tableau 5.6

	Sans WF	Avec WF
$Nu_{moy}$	27.93	20.28
$U_{max} \times 10$	3.836	3.785
$K_{max} \times 10^2$	2.378	1.794
$V_{t,max}$	14.43	9.27

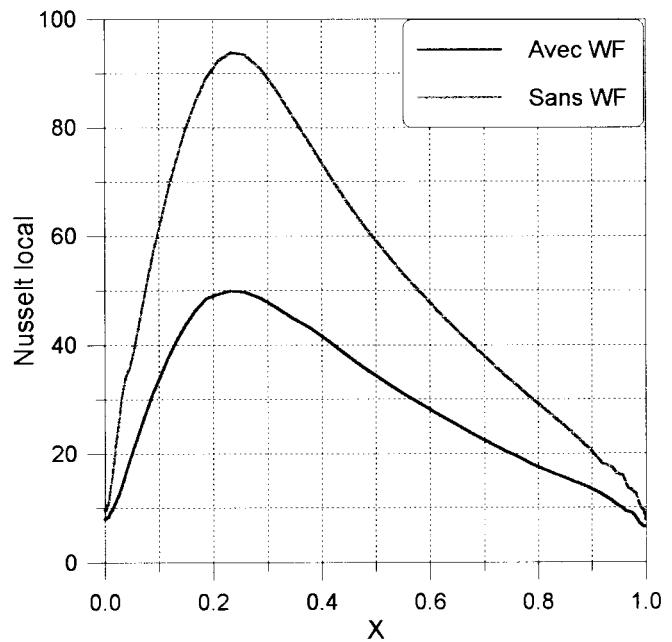


Fig. 5.36 : Profils de Nusselt local avec et sans WF ( $\alpha=5^\circ$  et  $Ra=10^7$ )

Etant donné l'indisponibilité de résultats pour le cas étudié et vu que ce cas est proche du cas de la cavité carrée étudié auparavant, on considère celui-ci comme une référence.

Deux principales remarques ressortent des figures 5.35 et 5.36 et du tableau 5.6 :

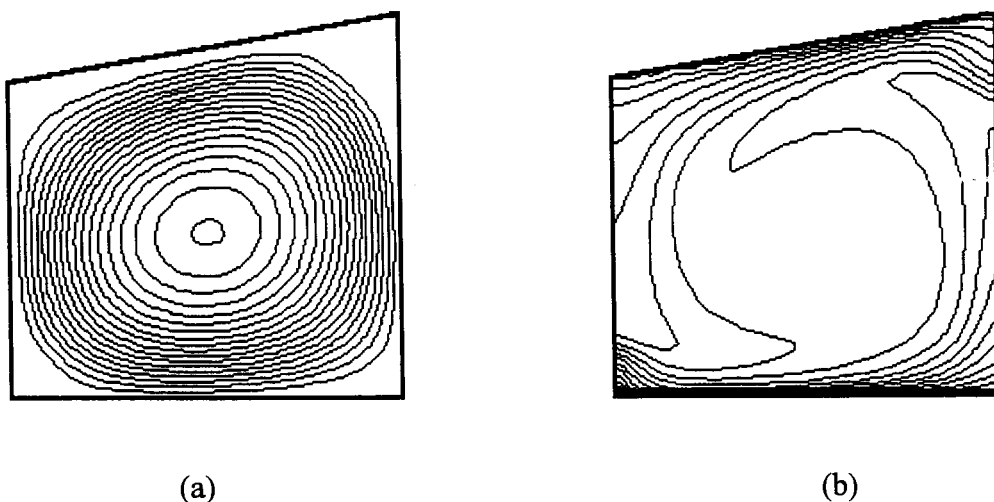
- Sur le plan qualitatif, le modèle avec WF présente des tracés d'isothermes bien courbés, comparables à ceux obtenus en cavité carrée et différent de ce qu'on obtient dans le cas d'un modèle sans WF.
- Sur le plan quantitatif, on remarque que le modèle avec WF prédit un niveau de température dans le cœur de la cavité inférieur à celui constaté en cavité carrée. Ceci correspond au résultat de certains auteurs ([4],[20],[23]) faisant état d'une baisse de température au sein de la cavité quant on incline la paroi supérieure froide. Ce résultat n'est pas observé dans le cas d'un modèle sans WF en plus du fait que celui-ci surestime le transfert de chaleur et la viscosité turbulente.

Le modèle k- $\epsilon$  avec WF paraît donc plus approprié pour la modélisation de la convection naturelle turbulente dans une cavité trapézoïdale.

### 3.2 Analyse de l'écoulement convectif turbulent dans la cavité trapézoïdale

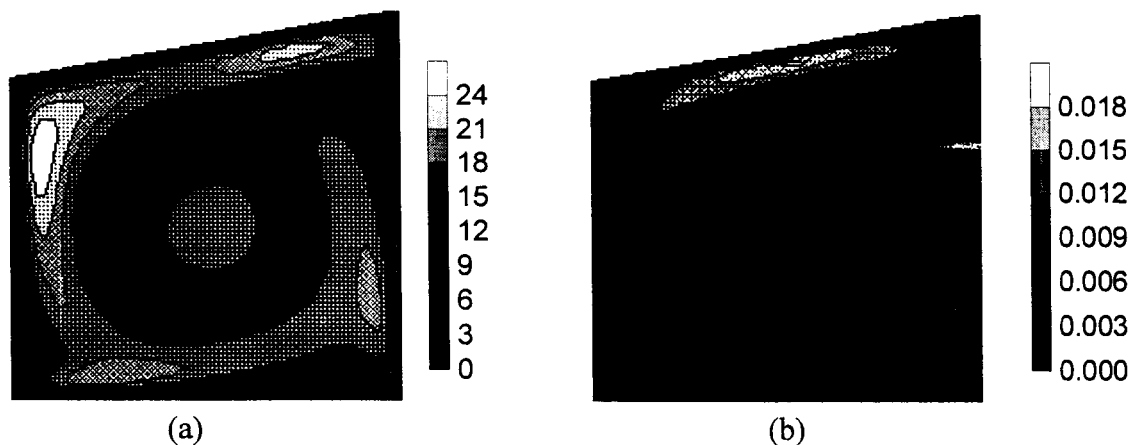
Afin de mieux illustrer le phénomène de convection naturelle turbulente dans une cavité trapézoïdale, on se propose d'étudier sur le plan qualitatif et quantitatif les deux cas suivants :

**1<sup>er</sup> cas** : ( $AL=1$ ,  $\alpha=10^\circ$ ,  $Ra=10^8$ )



**Fig. 5.37** : Lignes de courant (a), Isothermes (b) :  $AL=1$ ,  $\alpha=10^\circ$ ,  $Ra=10^8$

On constate, comparativement au cas d'une cavité carrée, que l'écoulement conserve sa structure unicellulaire (fig.5.37a). On remarque aussi la présence de couches limites thermiques minces aux parois actives (fig.5.37b).



**Fig. 5.38** : Viscosité turbulente (a), Energie cinétique de turbulence (b)  
(  $AL=1, \alpha=10^\circ, Ra=10^8$  )

La figure 5.38 montre que la partie étroite de la cavité renferme une zone de turbulence de forte intensité.

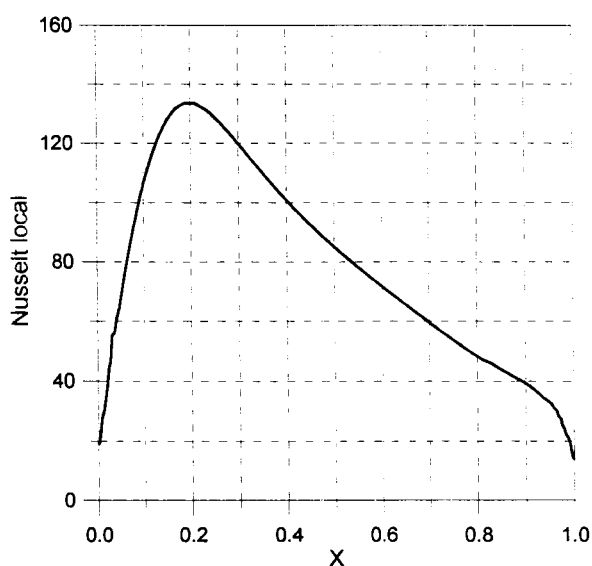


Tableau 5.7

$Nu_{moy}$	48.72
$U_{max} \times 10$	3.717
$XU ; YV$	0.5 ; 0.06737
$V_{max} \times 10$	3.891
$XU ; YV$	0.9617 ; 0.4796
$v_{t,max}$	26.36
$K_{max}$	0.0213

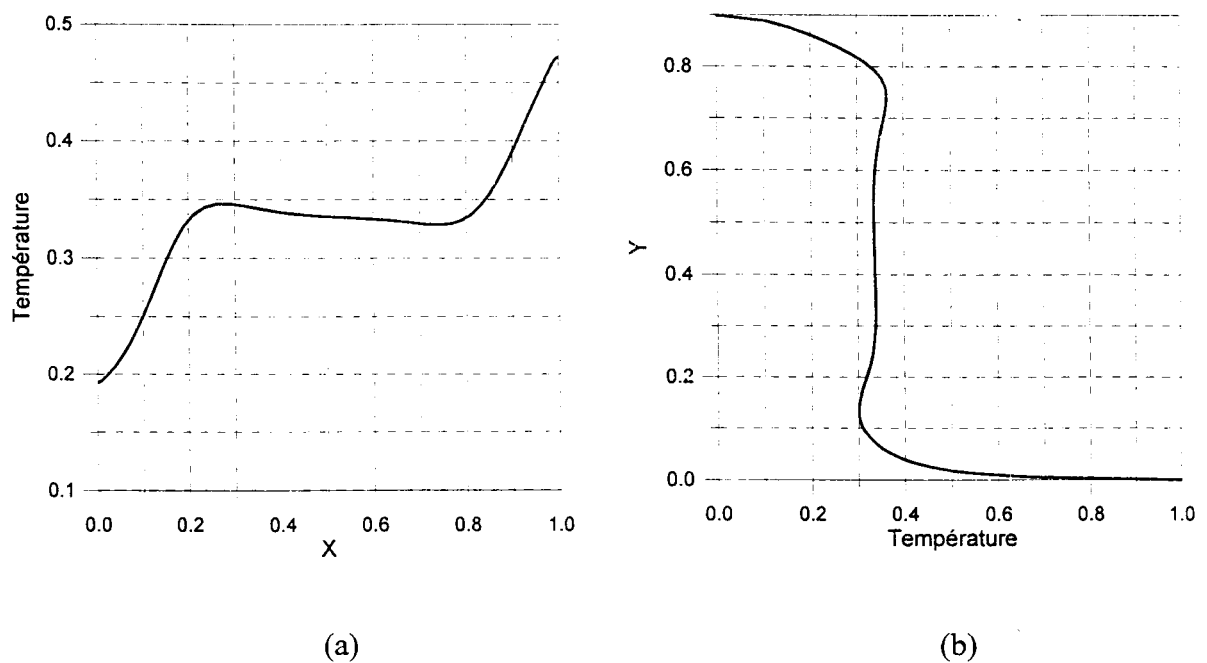
**Fig. 5.39** : Evolution de Nusselt local en  $Y=0$   
(  $AL=1, \alpha=10^\circ, Ra=10^8$  )

La première remarque concerne le nombre de Nusselt moyen qui est supérieure à celui calculé dans le cas d'une cavité carrée avec le même  $Ra$ . Ceci indique que le transfert de chaleur dans une cavité trapézoïdale est plus important que dans une cavité carrée pour un  $Ra$  donné.

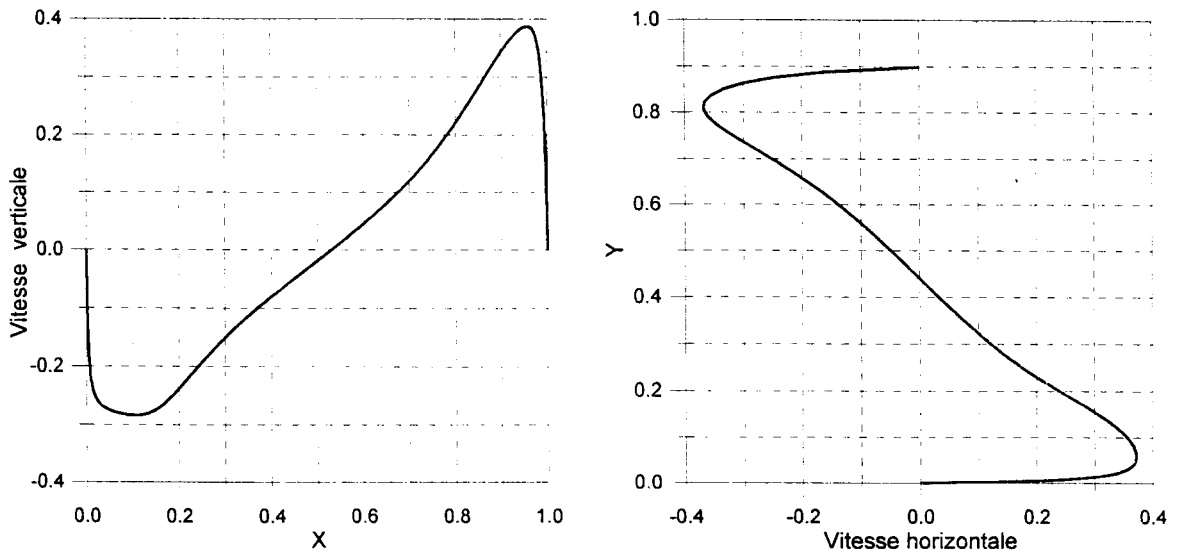
On remarque aussi que les valeurs maximales des deux composantes  $U$  et  $V$  de la vitesse moyenne sont, respectivement, à la mi-largeur au voisinage de la paroi chaude et à la mi-hauteur au voisinage de la paroi verticale droite (voir tableau 5.7).

La figure 5.39 montre un maximum pour le profil de Nusselt local sur la paroi chaude comme c'était le cas pour la configuration Rayleigh-Bénard d'allongement 1, ceci correspond à un gradient normal de température important signifiant une arrivée de fluide froid sur la paroi chaude à ce niveau. Toutefois on constate que la position de  $Nu_{max}$  est plus proche du bord comparativement au cas de la cavité carrée.

La figure 5.40 indique un profil de température vertical de type couche limite de paroi avec un noyau isotherme moins chaud que ce qu'il était dans le cas d'une cavité carrée. Ces remarques rejoignent parfaitement les constatations expérimentales de D. Kalache [4] et de D. Poulikakas et A. BÉjan [20](voir chapitre 1).

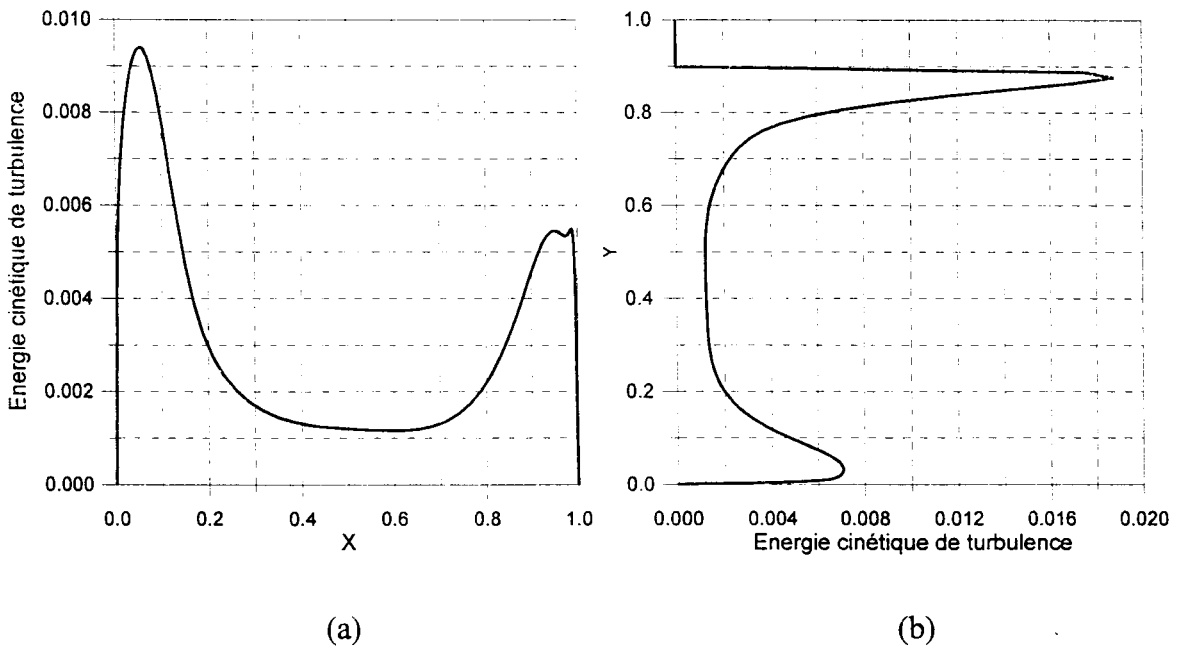


**Fig. 5.40** : Profil de température à : (a) mi-hauteur , (b) mi-largeur  
( $AL=1$ ,  $\alpha=10^\circ$ ,  $Ra=10^8$ )



**Fig. 5.41 :** (a) Vitesse verticale en  $Y=0.5$ , (b) Vitesse horizontale en  $X=0.5$   
 ( $AL=1, \alpha=10^\circ, Ra=10^8$ )

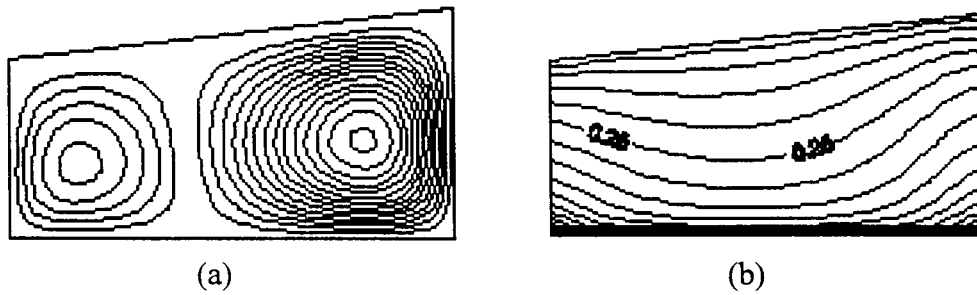
En ce qui concerne les grandeurs turbulentes, la figure 5.42 confirme le résultat qualitatif indiquant des valeurs élevées au voisinages des parois avec des amplitudes plus importantes dans la zone étroite de la cavité et au voisinage de la paroi inclinée.



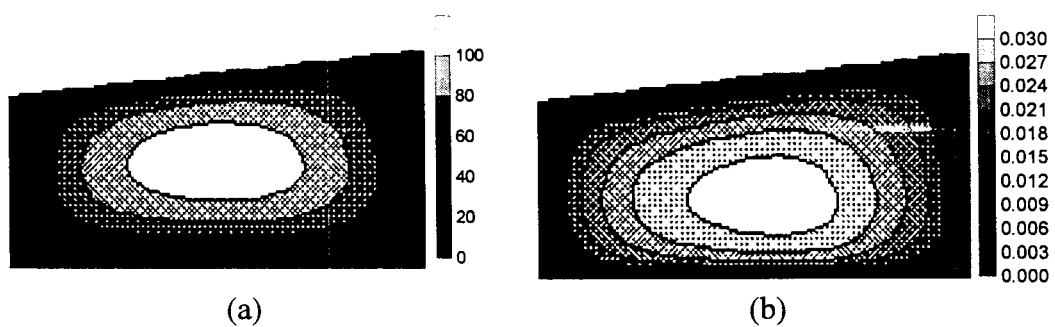
**Fig. 5.42 :** Evolution de l'énergie cinétique de turbulence en : (a)  $Y=0.5$ , (b)  $X=0.5$   
 ( $AL=1, \alpha=10^\circ, Ra=10^8$ )



**2<sup>ème</sup> cas :** (AL=2,  $\alpha=6^\circ$ , Ra=10<sup>7</sup>)



**Fig. 5.43 :** Lignes de courant (a), Isothermes (b) : AL=2,  $\alpha=6^\circ$ , Ra=10<sup>7</sup>



**Fig. 5.44 :** Viscosité turbulente (a), Energie cinétique de turbulence (b)  
( AL=2,  $\alpha=6^\circ$ , Ra=10<sup>7</sup> )

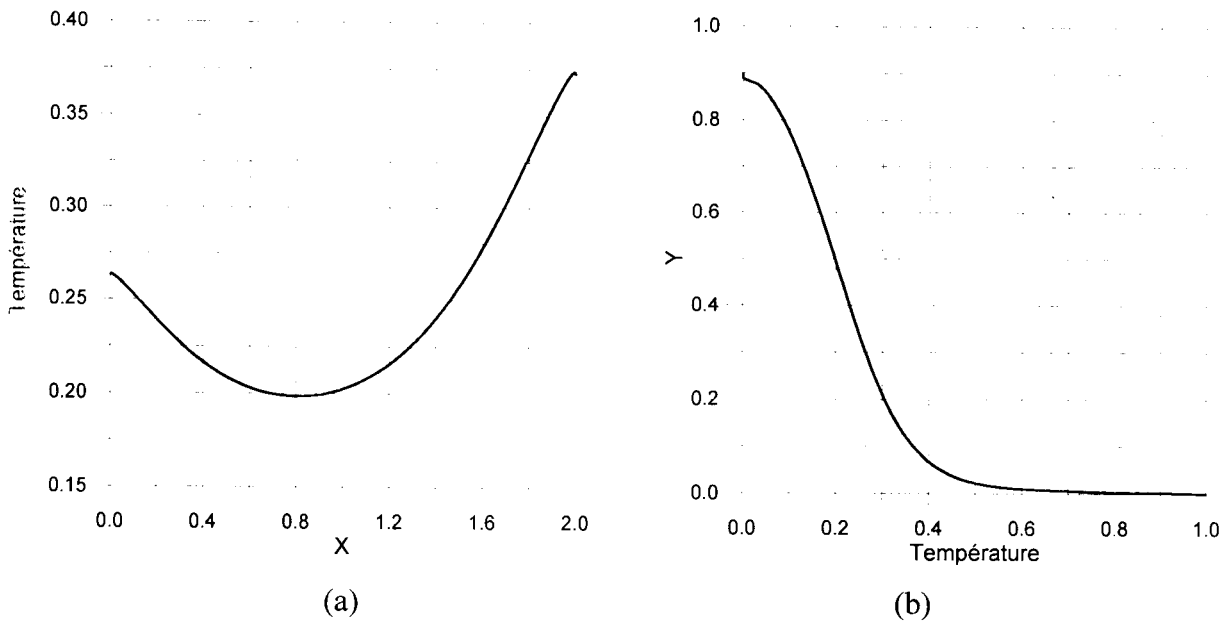
Les figures 5.43 et 5.44 indiquent des allures totalement différentes de ceux obtenues dans le cas d'une cavité rectangulaire d'allongement AL=2. En effet, le cœur isotherme n'apparaît plus et une chute importante du niveau de température de la cavité est observée. De même que la zone de forte turbulence se déplace vers le centre. Ceci paraît étrange puisque le cas étudié ici est proche du cas de la cavité rectangulaire.

Tableau 5.8

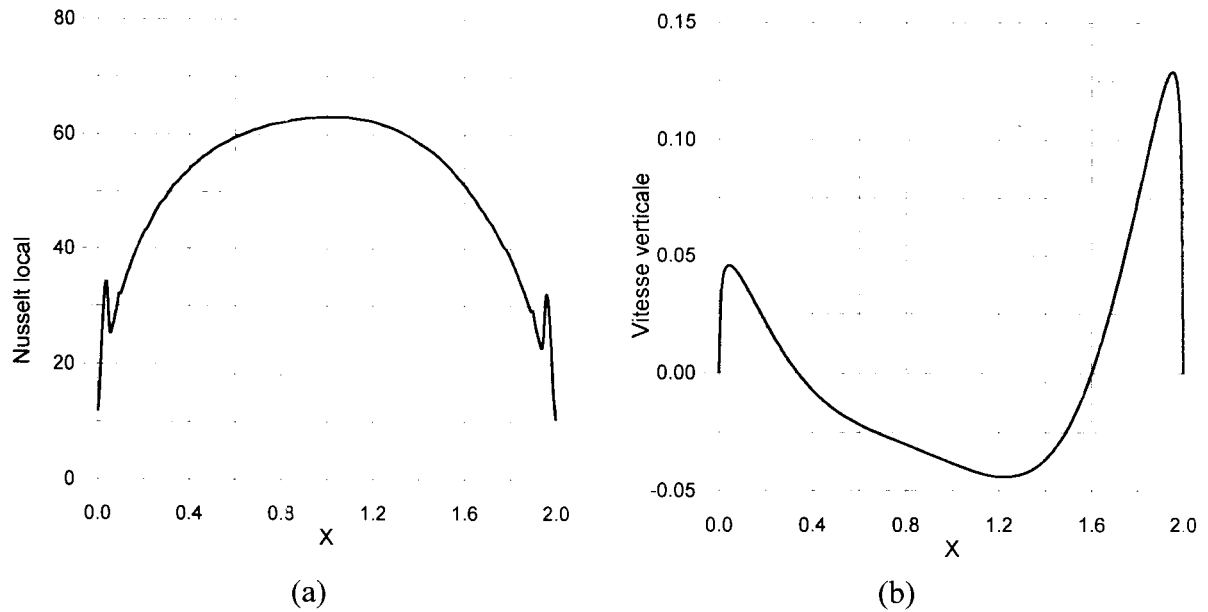
AL=2, $\alpha=6^\circ$ , Ra=10 <sup>7</sup>				
Nu <sub>moy</sub>	U <sub>max</sub> x10	V <sub>max</sub> x10	$\nu_{t,max}$	K <sub>max</sub> x10 <sup>2</sup>
32.32	1.149	1.328	112.9	3.171

En analysant les valeurs présentées sur le tableau 5.8, on constate que le Nusselt moyen a légèrement augmenté par rapport au cas rectangulaire ce qui est tout à fait normal. Par contre, la viscosité turbulente maximale paraît surestimée. Les valeurs des vitesses maximales sont faibles comparativement à ceux obtenues dans le cas rectangulaire.

Les figures ci-dessous confirment les remarques faites auparavant et faisant état d'une structure de l'écoulement totalement différente du cas rectangulaire.



**Fig. 5.45 :** Profil de température à : (a) mi-hauteur , (b) mi-largeur  
 ( $AL=2$ ,  $\alpha=6^\circ$ ,  $Ra=10^7$ )



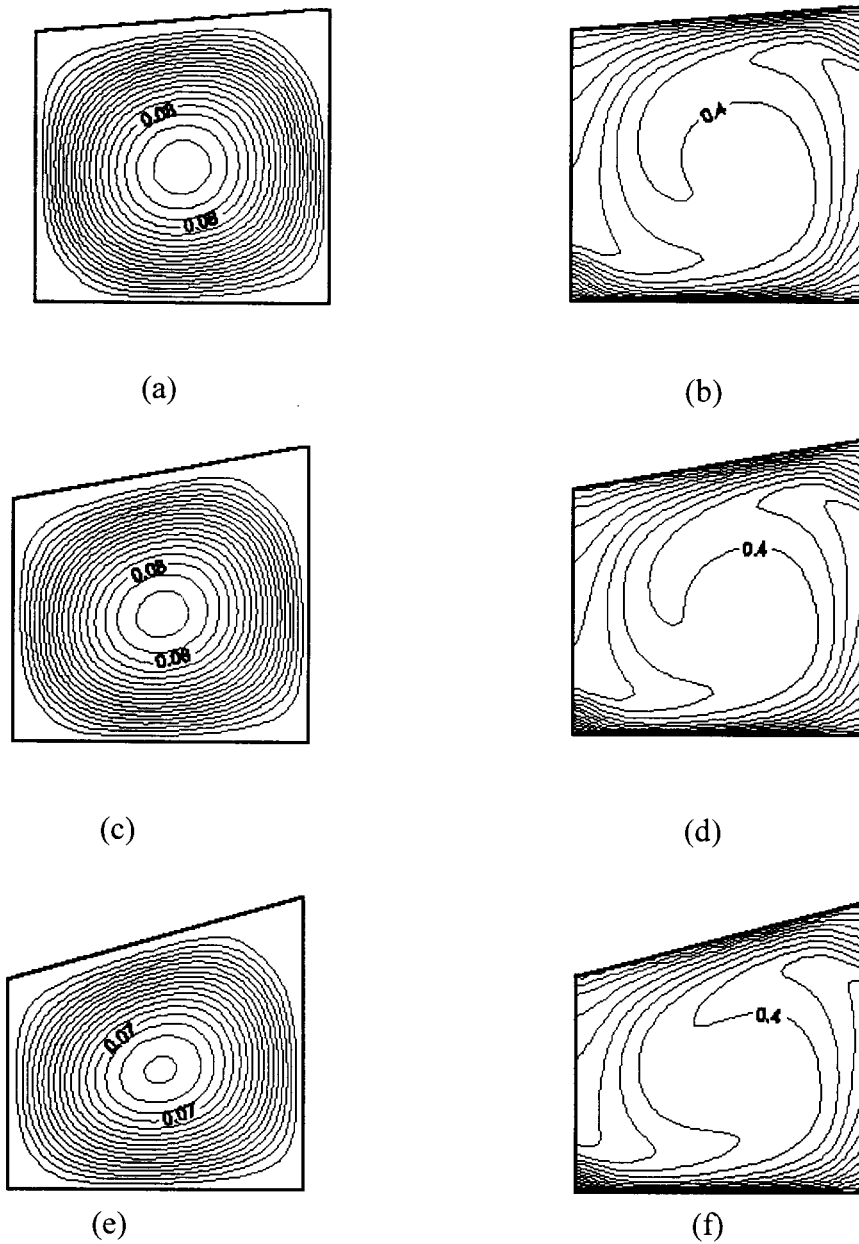
**Fig. 5.46 :** Evolution de : (a) Nusselt local sur la paroi chaude  
 (b) La vitesse verticale en  $Y=0.5$

### 3.3 Influence de l'angle d'inclinaison sur l'écoulement convectif turbulent

Dans le but de mettre en valeur l'influence de l'inclinaison de la paroi supérieure froide sur l'écoulement et le transfert de chaleur dans la cavité trapézoïdale, on présente les résultats obtenus avec trois différents angles d'inclinaison :  $5^\circ$ ,  $10^\circ$  et  $15^\circ$  avec  $Ra = 10^7$ .

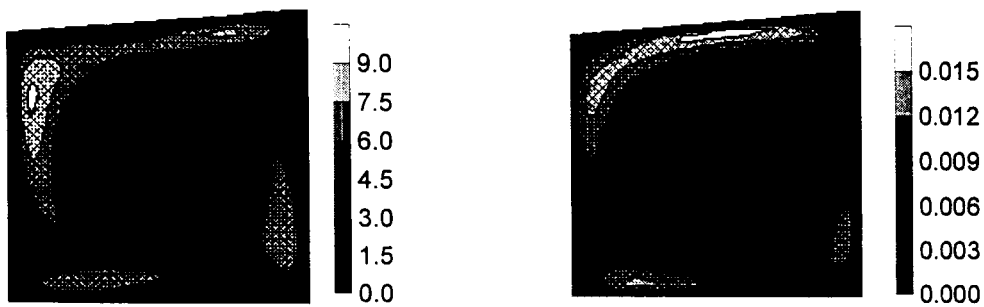
- Résultats qualitatifs

Champs dynamique et thermique moyens



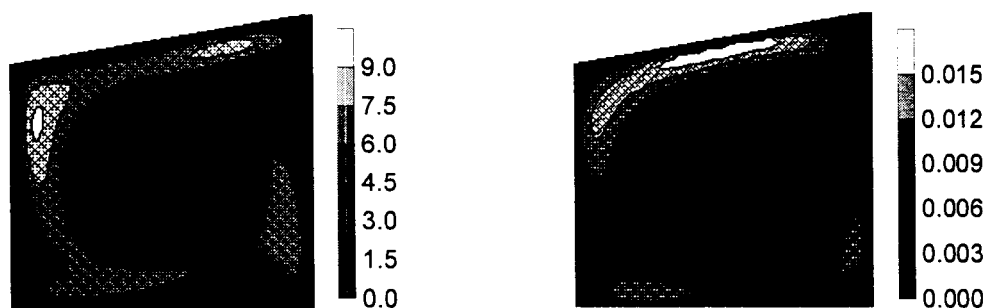
**Fig. 5.47** : Lignes de courant (a,c,e) et isothermes (b,d,f)  
( $Ra=10^7$  et  $\alpha=5^\circ$ (a,b),  $10^\circ$ (c,d),  $15^\circ$ (e,f))

Grandeurs turbulentes



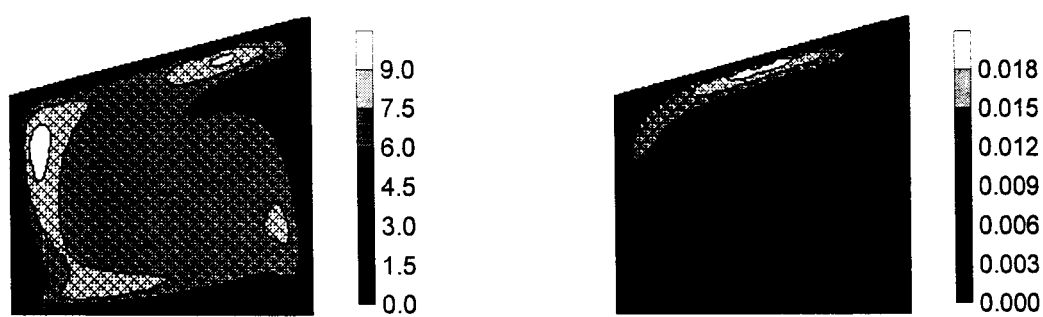
(a)

(b)



(c)

(d)



(e)

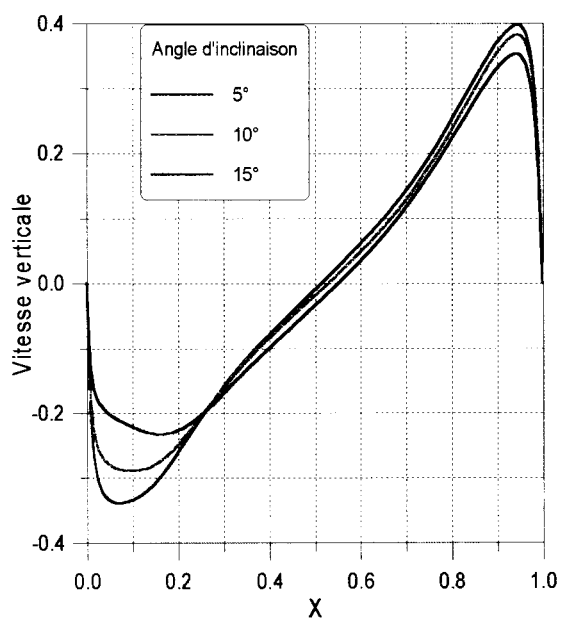
(f)

**Fig. 5.48 :** Viscosité turbulente (a,c,e) et Energie cinétique de turbulence (b,d,f):  
 ( $Ra=10^7$ ,  $\alpha=5^\circ$  (a,b),  $10^\circ$  (c,d),  $15^\circ$  (e,f))

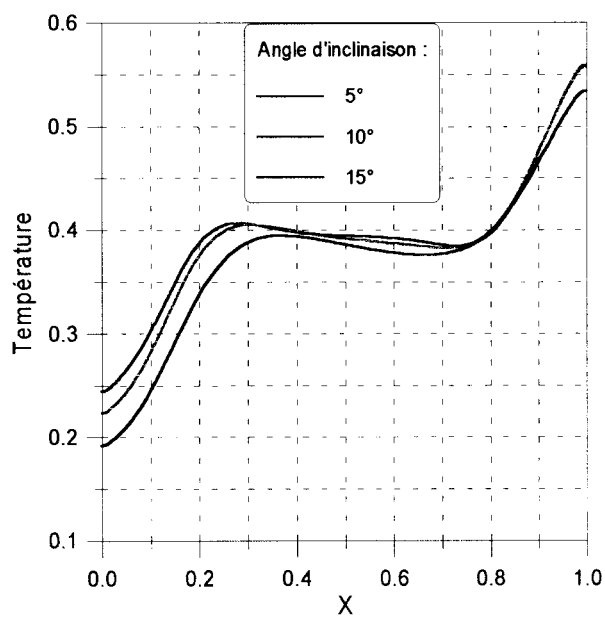
- Résultats quantitatifs

Tableau 5.9

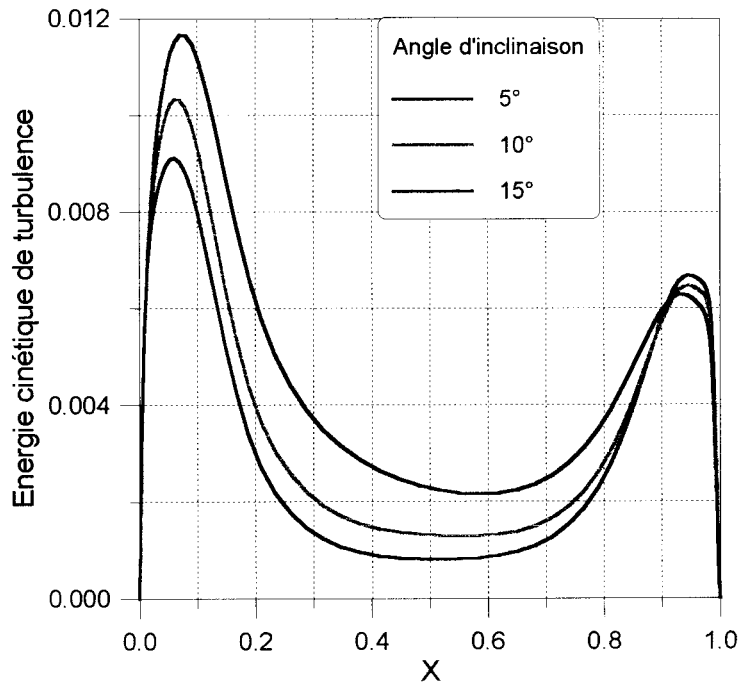
L'angle $\alpha$	5°	10°	15°
$Nu_{moy}$	20.28	21.33	22.56
$U_{max} \times 10$	3.785	3.697	3.570
$XU$	0.5	0.5	0.5
$YV$	0.8567	0.07627	0.09603
$V_{max} \times 10$	3.984	3.846	3.594
$XU$	0.9498	0.9498	0.9498
$YV$	0.5	0.4796	0.4796
$V_{t,max}$	9.270	9.287	9.642
$K_{max}$	0.01794	0.02086	0.02133



**Fig. 5. 49:** Profils de la vitesse verticale en  $Y=0.5$  pour différents angles  $\alpha$



**Fig. 5. 50:** Profils de température en  $Y=0.5$  pour différents angles  $\alpha$



**Fig. 5. 51:** Profils de l'énergie cinétique de turbulence en  $Y=0.5$  pour différents angles  $\alpha$

On résume les remarques observées sur le tableau 5.9 et sur les figures 5.47 à 5.51 dans les principaux points suivant :

- le cœur de la cavité se refroidit quand l'angle de l'inclinaison augmente.
- le transfert de chaleur augmente avec l'inclinaison de la paroi supérieure. Ceci peut s'expliquer par le rapprochement des parois actives qui fait augmenter les gradients thermiques verticaux dans la zone étroite de la cavité. Néanmoins, l'effet de l'angle d'inclinaison sur le taux de transfert de chaleur moyen n'est pas important.
- les valeurs maximales des grandeurs turbulentes augmentent avec l'inclinaison de la paroi supérieure. Ceci est apparemment dû au fait que les fluctuations (qui n'apparaissent pas dans notre étude) deviennent importantes quand les parois actives se rapprochent [4], ce qui fait augmenter l'amplitude des grandeurs turbulentes qui sont principalement proportionnelles à l'amplitude des fluctuations[2]. Il semble donc que les fluctuations importantes tendent de plus en plus à régner dans la majeure partie de la cavité au fur et à mesure que la paroi supérieure froide s'approche de la paroi chaude.
- les valeurs maximales des deux composantes de la vitesse moyenne diminuent quand l'angle d'inclinaison augmente, indiquant une baisse de l'intensité de l'écoulement moyen. On peut expliquer ceci par le refroidissement du cœur de la cavité à cause de l'augmentation de la part de la surface froide dû à l'inclinaison de la paroi supérieure.

### 3.4 Illustration de l'ordre de grandeur réel de l'écoulement moyen

Afin d'avoir une idée sur l'ordre de grandeur de l'amplitude des vitesses calculées correspondant à un écoulement de convection naturelle dans une cavité trapézoïdale, on présente la valeur maximale dimensionnelle de chacune des deux composantes de la vitesse moyenne pour le cas d'une cavité trapézoïdale d'allongement  $AL=1$  avec un angle d'inclinaison  $\alpha=20^\circ$ . Le choix de cette géométrie est motivé par le fait que celle-ci est la plus proche de l'une des configurations géométriques étudiées expérimentalement par D. Kalache [4] ( $Rf=L/H_m=1$ ,  $\alpha=20^\circ$ ), ce qui nous permet de faire une comparaison des résultats. Pour s'approcher un peu plus du cas traité par [4], on présente les résultats obtenus pour un nombre de Rayleigh égal à  $10^8$  :

$$U_{\max} = 0.338 \quad \text{et} \quad V_{\max} = 0.342$$

En prenant la hauteur de la cavité  $H$  égale à 70cm (dans l'étude expérimentale citée en haut  $L=60$ cm), et comme l'adimensionnement pour les vitesses est fait avec une grandeur de référence  $V_{\text{ref}}$  donnée par l'expression :

$$V_{\text{ref}} = \left( \frac{Ra^{1/2}}{Pr} \right) \frac{\nu}{H}$$

on trouve que les vitesses maximales ont une amplitude de l'ordre de 10 cm/s.

Kalache [4] trouve pour le cas des configurations ayant de faibles allongements, des vitesses maximales variant entre 10 et 17cm/s.

On termine cette partie concernant l'étude de la convection naturelle turbulente dans la cavité trapézoïdale en signalant que des tentatives pour obtenir des résultats pour des angles d'inclinaison plus importants ont été essayés. On constate qu'au delà de  $20^\circ$ , des difficultés de convergence sont signalées. Lorsque des solutions sont obtenues, elles paraissent loin de la réalité. En effet, les isothermes présentent une allure proche de celle d'un régime laminaire légèrement convectif. Cette remarque est vraie aussi pour une cavité trapézoïdale d'allongement supérieur à l'unité comme on l'a signalé auparavant (c.f. § 3.2). Les difficultés mentionnées ci-dessus trouvent leur origines dans les principaux points suivants :

- Comme mentionné auparavant, un maillage serré aux parois est nécessaire, notamment près des parois actives. Or, pour des angles d'inclinaison élevés le raffinement du maillage dans la partie supérieure de la cavité est sans effet, puisque celle-ci est une zone ne rentrant pas dans le domaine d'étude. Ainsi, le nombre de point de la grille au

voisinage de la paroi froide inclinée ne sera pas suffisant pour effectuer une bonne résolution de la couche limite.

- L'application de la procédure « lois de paroi » comme conditions aux limites sur la paroi inclinée est apparemment loin d'être une chose aisée. En effet, cette procédure est conçue principalement pour les cas où une des composantes de la vitesse au voisinage de la paroi solide et parallèle à celle-ci est connue. Ce qui permet de déterminer la contrainte tangentielle et la distance normale (annexe B). Ce n'est pas le cas de la paroi inclinée.
- L'écoulement au voisinage de la paroi inclinée est tangent à celle-ci, se qui va provoquer inévitablement une diffusion numérique (« false diffusion ») proportionnelle à l'angle d'inclinaison et susceptible d'altérer la fiabilité des résultats obtenus. En plus, l'utilisation du schéma QUICK, sensé diminuer l'effet de la diffusion numérique, n'est pas recommandée pour la résolution des équations correspondant à  $k$  et  $\epsilon$  [12]. Ajoutons aussi que le modèle  $k$ - $\epsilon$  standard surestime la diffusion turbulente (voir Annexe D).
- Vu le caractère principalement tridimensionnel de ce type d'écoulement et vu les remarques qui ont été faites dans l'introduction de ce mémoire et dans l'étude bidimensionnelle, on peut déduire que l'hypothèse de bidimensionnalité aura un effet significatif sur la fiabilité des solutions obtenues. En plus, ce caractère est d'autant plus accentué que l'angle d'inclinaison de la paroi supérieure est élevé. L'augmentation de l'allongement fait aussi accroître l'amplitude de la composante tridimensionnelle de la vitesse et des fluctuations tridimensionnelle [4,23].

#### 4. Synthèse des difficultés rencontrées dans la résolution numérique

Il nous est apparu nécessaire de mettre l'accent sur les multiples difficultés rencontrées au cours des essais numériques, que ce soit dans la partie validation ou celle concernant l'objet d'étude. Cet aspect de notre travail non apparent est d'une grande importance, puisqu'il s'agit d'une part de modéliser la turbulence, et dans ce cas plusieurs facteurs influent sensiblement sur le processus de calcul, et d'autre part la présence de frontières solides nécessite un traitement particulier.

Nous résumons dans ce qui suit ces difficultés afin de donner une vue global sur le degré de difficulté de l'étude et servir aussi de repères pour des études numériques sur ce type de problème.



#### 4.1 Etape de validation

Au cours de notre tentative de validation du cas « différentiellement chauffée », nous nous sommes heurté aux problèmes suivants :

- Le choix de l'estimation initiale de  $k$  et de  $\varepsilon$ . La convergence du processus itératif n'a commencé à se manifester qu'après avoir adopté les estimations proposées par S. Xin [2] qui consiste à prendre l'énergie cinétique de la solution laminaire comme estimé de  $k$  et 1% de celle-ci pour  $\varepsilon$ .
- Avant d'obtenir la convergence du processus de calcul, nous avons imposé des valeurs positives pour l'énergie cinétique de turbulence, comme suggéré par S. Xin [2]. Les valeurs négatives qui n'ont aucune signification réelle ont une influence sur la résolution numérique du système d'équations étudié.
- La façon avec laquelle les conditions aux limites pour  $\varepsilon$  sont posées paraît avoir une grande importance et influe sensiblement sur les résultats obtenus. Ainsi, après plusieurs tests sur les expressions de  $\varepsilon$  à la paroi proposées dans la littérature, on a constaté que celle proposée par W. P. Jones et B. E. Launder [31], et reprise par d'autres auteurs [2], [58] et [59], est la mieux appropriée pour ce type de problèmes.

#### 4.2 Etape de résolution de la cavité chauffée par dessous

- Le premier point à signaler est que l'utilisation du schéma de discrétisation QUICK retarde la convergence par rapport au schéma « Loi de puissance ». Cependant, l'utilisation de QUICK est nécessaire pour ce type problème, particulièrement pour le cas de la cavité trapézoïdale, afin de minimiser au maximum l'effet de la diffusion numérique.
- Un autre point rencontré est la difficulté d'obtention de faibles résidus quand on emploie la procédure « lois de paroi ». En effet, pour le cas de la convection Rayleigh-Bénard le résidu de l'équation de l'énergie ne passe au-dessous de  $10^{-5}$  qu'après un temps de calcul très important, alors que celui correspondant à  $\varepsilon$  reste au-dessus de  $10^{-3}$ .
- Concernant le temps de calcul, il y a lieu de signaler qu'il est important. Par exemple pour obtenir une solution avec une précision convenable pour le cas d'une cavité carrée maillée à  $100 \times 100$ , le calcul nécessite pas moins de 50000 itérations. Ce qui équivaut à 10 heures de calcul sur un PC PII 350MHz. Ce temps de calcul est beaucoup plus important quand il s'agit d'une cavité trapézoïdale et quand on fait augmenter l'angle d'inclinaison  $\alpha$ .

## CONCLUSION GENERALE

L'étude entreprise a permis de décrire la structure et la morphologie de l'écoulement de convection naturelle turbulente dans les cavités, en particulier celles chauffées par dessous. Des résultats concernant les taux de transfert de chaleur et la nature des écoulements ont été produits.

Les principaux résultats obtenus et les remarques essentielles qui ressortent de cette étude sont énumérés ci-dessous :

- Avant que le régime turbulent ne s'installe, le phénomène appelé « loss of rolls » est observé. En effet, on constate que le nombre de cellules caractérisants l'écoulement dans une cavité rectangulaire d'allongement  $AL=3$  passe de trois à deux cellules quand  $Ra$  augmente de  $10^4$  à  $10^5$ .
- En régime turbulent, une surestimation du transfert de chaleur par le modèle  $k-\epsilon$  standard est constatée. L'emploi de la procédure « lois de paroi » donne des résultats meilleurs.
- Le transfert de chaleur, représenté par le nombre de Nusselt moyen, dans une cavité rectangulaire chauffée par le bas est estimé par le moyen de la corrélation suivante :

$$Nu_{\text{moy}} = 0.065 Ra^{0.362} \quad 10^6 \leq Ra \leq 10^9 \quad \text{et} \quad 1 \leq AL \leq 3$$

- La structure de l'écoulement turbulent en configuration Rayleigh-Bénard est décrite comme suit :
  - En cavité carrée ( $AL=1$ ), l'écoulement est unicellulaire. La surface isotherme du cœur de la cavité devient de plus en plus importante lorsque le nombre de Rayleigh augmente. Les coordonnées des grandeurs turbulentes les plus élevées correspondent aux zones de rencontre des courants de fluide chaud et froid. Soit aux zones où les gradients thermiques sont les plus importants.
  - En cavité rectangulaire ( $AL=2, 3$ ), l'écoulement est caractérisé par deux cellules contrarotatives. La zone de forte turbulence se situe à la mi-largeur près de la paroi froide correspondant à une arrivée d'un courant de fluide chaud.
- L'étude du cas de la cavité trapézoïdale, nous a permis de constater la différence perceptible existant entre cette configuration et celle dite de Rayleigh-Bénard. En effet le transfert de chaleur est plus important et la zone de forte intensité turbulente se concentre dans la partie étroite de la cavité trapézoïdale. L'inclinaison de la paroi

supérieure froide fait baisser l'intensité de l'écoulement moyen mais accroît les valeurs fluctuantes caractérisées par les quantités turbulentes  $k$  et  $v_t$ .

- L'estimation de l'ordre de grandeur réel de l'écoulement de convection naturelle turbulente dans la cavité indiquant une vitesse moyenne de l'ordre de 10 cm/s, confirme le caractère faible des vitesses dans ce type d'écoulement.
- Enfin, il est important de signaler que l'étude du cas trapézoïdal avec des angles d'inclinaison élevés ainsi qu'avec un allongement  $AL=2$ , même pour de faibles angles, nous conduit à une structure d'écoulement non conforme à celle d'un écoulement convectif turbulent. Par contre, les valeurs des taux de transfert de chaleur obtenus semblent acceptables.

Les difficultés enregistrées dans l'étude du cas trapézoïdal nous pousse à suggérer de suivre d'autres voies sur le plan de la procédure numérique et de la modélisation afin d'espérer traiter numériquement le problème de la convection naturelle turbulente. Parmi ces approches on cite la transformation géométrique du trapèze en rectangle, et l'utilisation des modèles à faible nombre de Reynolds ou communément appelés « low-Re  $k$ - $\epsilon$  model ». Enfin, nous signalons que le code TEAM que nous avons utilisé pour obtenir nos résultats a nécessité d'être adapté aux problèmes de convection naturelle turbulente., sachant qu'il était conçu initialement pour les problèmes d'écoulements forcés, du moins la version qui était en notre possession.

*ANNEXES*

## ANNEXE A

## Conception du modèle k-ε

La conception du modèle k-ε revient incontestablement à B.E. Launder et D.B. Spalding aux débuts des années soixante-dix [45]. L'avènement d'un modèle moins complexe et plus accessible au numérotien, comme l'est le modèle k-ε, paraissait indispensable afin d'espérer réaliser quelques avancées notables dans le domaine aussi complexe qu'est la turbulence.

La construction du modèle est basée en premier lieu sur la décomposition dite « de Reynolds », comme c'est le cas d'ailleurs de presque tous les autres modèles de turbulence. Lorsque l'on applique cette décomposition aux équations de mouvement, on obtient un système d'équations moyennées où apparaissent de nouvelles inconnues en raison des non linéarités. Les équations du mouvement moyen obtenues s'écrivent comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{u}_j \bar{u}_i) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u'_i u'_j} \right] \quad (\text{A.1})$$

Les termes:  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ , appelés contraintes de Reynolds, font que le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations. Au lieu de construire des équations de transport pour chaque contraintes de Reynolds, ce qui conduirait à résoudre un nombre considérables d'équations (modèle des contraintes de Reynolds), on a pensé à modéliser ces termes de façon à résoudre un système d'équations moins complexe.

Ainsi, la deuxième étape dans la conception du modèle k-ε est le recours au concept de viscosité tourbillonnaire permettant de modéliser les contraintes de Reynolds par l'expression, dite « Approximation de Boussinesq », :

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (\text{A.2})$$

dans laquelle apparaissent deux nouvelles grandeurs :  $\mu_t$  et  $k$  qui sont, respectivement, la viscosité turbulente et l'énergie cinétique de turbulence.

Cette dernière est définie par l'expression :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (\text{A.3})$$

La viscosité turbulente  $\mu_t$  s'exprime, dans le cas particulier du modèle k-ε, par le produit d'une échelle de vitesse  $\sqrt{k}$  et d'une échelle de longueur  $\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$  appelé relation de Kolmogorov-Prandtl :

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{A.4})$$

où :  $C_\mu$  est une constante empirique.

La grandeur  $\varepsilon$ , appelée taux de dissipation de l'énergie cinétique, est définie par l'expression:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \nu \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2} \quad (\text{A.5})$$

Les quantités k et ε sont les deux inconnues supplémentaires du problème après avoir modéliser les contraintes de Reynolds. Pour fermer le système d'équations, formé de six inconnues et de quatre équations, il est procédé à la construction des équations de transport correspondantes de k et de ε .

### Construction de l'équation de transport de k :

En multipliant l'équation du mouvement moyen (A.1) par la composante  $\bar{u}_i$  de la vitesse moyenne et en posant  $\bar{k} = \frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i$  comme étant l'énergie cinétique du mouvement moyen turbulent, à ne pas confondre avec l'énergie cinétique de turbulence k définie auparavant, on obtient l'équation ci-dessous :

$$\frac{\partial(\rho \bar{k})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{u}_j \bar{k}) = -\bar{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u'_i u'_j} \right] \quad (\text{A.6})$$

D'autre part en multipliant les équations de Navier-Stokes par la composante instantanée  $u_i$  et en moyennant les équations résultantes on aboutit à l'équation ci-dessous :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\bar{k} + k)] + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho \bar{u}_j (\bar{k} + k)] = & -\bar{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial (\bar{k} + k)}{\partial x_j} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \overline{u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} \right) - \rho \overline{u'_j \left( \frac{1}{2} u'_i u'_i \right)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

( on note que :  $\overline{u_i u_j} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u'_i u'_j}$  )

En soustrayant (A.6) de (A.7) on obtient l'équation de transport suivante :

$$\frac{\partial (\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \bar{u}_j k)}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \overline{\rho u'_j \left( \frac{1}{2} u'_i u'_i \right) + u'_j p'} \right] - \rho \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \mu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j \partial x_i} \quad (\text{A.8})$$

Le premier terme du second membre de l'équation (A.8) est modélisé, d'une manière analogue à l'approximation de Boussinesq, par l'expression [43]:

$$- \left[ \overline{\rho u'_j \left( \frac{1}{2} u'_i u'_i \right) + u'_j p'} \right] = \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (\text{A.9})$$

où :  $\sigma_k$  est une constante empirique.

Les deux autres termes sont respectivement le terme de production :

$$P_k = - \rho \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (\text{A.10})$$

et le terme de dissipation :

$$\rho \varepsilon = \mu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j \partial x_i} \quad (\text{A.11})$$

d'où l'équation de transport de k sous sa forme finale :

$$\frac{\partial (\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \bar{u}_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + P_k - \rho \varepsilon \quad (\text{A.12})$$

### Construction de l'équation de transport de ε :

Une équation de transport exacte pour ε peut être déduite des équations de Navier-Stokes. Cependant, une telle équation contiendrait un nombre considérable de termes à modéliser et dont les caractéristiques sont inconnues [43]. Ainsi, l'équation de transport pour le taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence, ε, est obtenue après avoir approché les termes de production et de dissipation sur des bases essentiellement empiriques. L'équation de transport standard correspondante s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{u}_j\varepsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + \frac{\varepsilon}{k} (C_{1\varepsilon} P_k - C_{2\varepsilon} \rho \varepsilon) \quad (\text{A.13})$$

où :  $C_{1\varepsilon}$  ,  $C_{2\varepsilon}$  et  $\sigma_\varepsilon$  sont des constantes empiriques.

Il est à noter que ce modèle k-ε a été conçu initialement pour des écoulements purement dynamiques de convection forcée, puis étendu aux problèmes de convection naturelle turbulente [2] . Dans un problème de convection naturelle turbulente, en plus des contraintes des Reynolds, les flux thermiques turbulents sont modélisés ainsi :

$$-\rho \overline{u_i' T'} = \frac{\mu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \quad (\text{A.14})$$

où :  $\sigma_t$  est le nombre de Prandtl turbulent.

Les équations (A.12) et (A.13) seront alors légèrement modifiées du fait de l'introduction d'un terme production supplémentaire dû à l'effet de poussée (« buoyancy effect ») dans le terme source et défini par l'expression :

$$G_k = -g\beta \frac{\mu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \quad (\text{A.15})$$



## ANNEXE B

## Les lois de paroi associées au modèle k-ε

L'application du modèle k-ε à l'étude des écoulements turbulents est basée sur l'hypothèse que ces écoulements sont totalement turbulents, on ne peut donc appliquer le modèle qu'aux régions où cette hypothèse est vérifiée. Or, près d'une paroi solide, la partie amont de la couche limite est essentiellement laminaire à cause de l'effet prépondérant des contraintes visqueuses. Les grandeurs turbulentes, k et ε notamment, sont théoriquement nuls et numériquement très faibles dans ces régions et par conséquent le modèle k-ε n'est plus valable et ne peut être appliqué dans ces endroits.

Afin de remédier à cette lacune du modèle k-ε standard on a pensé à une autre approche qui consiste à imposer des conditions aux limites aux premiers nœuds du maillage et non plus aux niveaux des parois. Ceci s'explique par le fait que l'attention est portée, avec cette approche, sur la contrainte tangentielle à la paroi et non plus à la vitesse elle-même (laquelle est nulle à la paroi). Les lois de paroi ou « wall-functions » sont utilisées alors pour fournir les conditions aux limites pour les contraintes aux niveaux des parois, nécessaires à la résolution de l'équation de quantité de mouvement ; la diffusion de la quantité de mouvement est représentée d'ailleurs par la contrainte à la paroi.

Ces lois sont déterminées expérimentalement après analyse de la couche limite dans un écoulement turbulent [42]. En effet, la couche limite en écoulement turbulent peut être caractérisée en utilisant deux grandeurs adimensionnelles, une vitesse  $u^+$  et une distance normale à la paroi  $y^+$ , définies par :

$$u^+ = \frac{u_w}{u^*} \quad (\text{B.1})$$

$$y^+ = \frac{\rho y_w u^*}{\mu} \quad (\text{B.2})$$

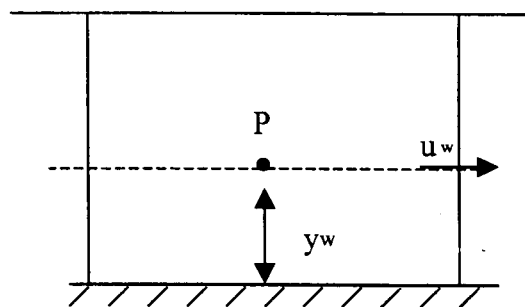


fig. B.1 : Volume de contrôle près de la paroi

où :  $u_w$  est la composante horizontale de la vitesse moyenne au voisinage de la paroi  
et  $y_w$  est la distance normale à la paroi de cette composante de vitesse ( voir fig. B.1)

La grandeur  $u^*$  est la vitesse de frottement définie en fonction de la contrainte tangentielle à la paroi,  $\tau_w$ , par l'expression [42] :

$$u^* = \sqrt{\tau_w / \rho} \quad (\text{B. 3})$$

La relation entre  $u^+$  et  $y^+$  est déterminée expérimentalement comme étant une loi logarithmique définie comme suit :

$$u^+ = \frac{1}{\chi} \ln(Ey^+) \quad (\text{B. 4})$$

où :  $\chi$  est la constante de Van Karman, et E une constante empirique égale à 9,7.

En considérant que dans une couche de fluide très mince près de la paroi un équilibre local de l'énergie de turbulence prévaut et en appliquant la loi logarithmique universelle ci-dessus (B.1), la contrainte à la paroi peut s'exprimer par la relation :

$$\tau_w = - \frac{\rho C_\mu^{1/4} k_w^{1/2} u_w}{u^+} \quad (\text{B. 5})$$

$$\text{avec : } y^+ = \rho C_\mu^{1/4} k_w^{1/2} y_w / \mu \quad (\text{B. 6})$$

Ainsi, la contrainte tangentielle à la paroi joue le rôle de condition aux limites pour les équations de mouvement. Il faut noter qu'au moment où le modèle  $k-\varepsilon$  n'est valable que dans les régions où règne la turbulence, on doit faire en sorte que la première ligne de grille adjacente à la paroi demeure à une distance  $y^+ > 11.63$ . Si durant la résolution la valeur de  $y^+$  est inférieure à 11.63, la relation laminaire  $u^+ = y^+$  est alors employée [48].

Les conditions aux limites pour les équations de l'énergie cinétique et le taux de dissipation sont obtenues en considérant que la turbulence est en équilibre local près de la paroi. Cette hypothèse d'équilibre local implique que le transport de la turbulence est négligeable et par conséquent le taux local de génération de l'énergie cinétique turbulente est équilibré par le taux local de dissipation :

$$\rho \varepsilon = -\rho \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (\text{B. 7})$$

L'énergie cinétique près de la paroi,  $k_w$ , est obtenue par la résolution directe de son équation correspondante après avoir introduit les modifications suivantes [48]:

- La diffusion de l'énergie cinétique  $k$  à travers la paroi est considéré nulle.
- Les termes de production,  $P$ , et de dissipation,  $\varepsilon$ , dans un volume de contrôle 'Vol' sont modifiés, en prenant en compte la contrainte à la paroi, comme suit :

$$P = \iint_{\text{Vol}} \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 dv = \tau_t \frac{u_w}{y_w} \text{Vol} \quad (\text{B. 8})$$

$$- \iint_{\text{Vol}} \rho \varepsilon dv = - \iint_{\text{Vol}} \rho \frac{k_w^2}{\tau_w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \frac{\rho C_\mu^{3/4} k_w^{3/2} u^+}{y_w} \text{Vol} \quad (\text{B. 9})$$

Pour l'équation de transport correspondant à  $\varepsilon$ , les conditions aux limites aux niveaux des parois sont déduites de l'observation que l'échelle de longueur  $\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$  varie linéairement avec  $y$  près de la paroi ce qui donne :

$$\varepsilon_w = \frac{C_\mu^{3/4} k_w^{3/2}}{\chi y_w} \quad (\text{B. 10})$$

## ANNEXE C

## Présentation des deux algorithmes

## SIMPLE et PISO

L'absence d'une équation de transport propre à la pression confère une difficulté supplémentaire à la résolution des systèmes d'équations des écoulements incompressibles. Néanmoins, l'équation de continuité permet de contourner cette difficulté, puisque elle impose une condition de compatibilité sur le champ de vitesse que celui-ci doit toujours vérifier.

La méthode indirecte pour l'obtention du champ de pression consiste à estimer au départ des valeurs initiales pour celui-ci et vérifier ensuite la compatibilité du champ de vitesse correspondant par l'équation de continuité et enfin corriger les valeurs du champ de pression initial. Numériquement parlant, cette procédure a donné naissance à plusieurs algorithmes afin d'assurer le couplage vitesse-pression. Dans le code TEAM, on retrouve deux algorithmes, au choix pour l'utilisateur : l'algorithme SIMPLE ( " Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations" ) et l'algorithme PISO ( " Pressure Implicit Solution by Splite Operator Method" ).

Dans ce qui suit, on présentera la procédure sur laquelle sont basés ces deux algorithmes de structures très voisines. Les équations étant discrétisées par la méthode des volumes finis [46], on donne ci-dessous l'équation discrétisée résultante pour la composante de vitesse  $U$ , en considérant un volume de contrôle décalé pour la vitesse ( fig. C.1 ).

$$a_e U_e = \sum_i a_i U_i + (P_P - P_E) \Delta y \dots \dots (C.1)$$

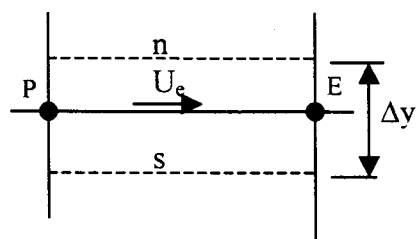


Fig. C.1 : Volume de contrôle pour  $U_e$

Les deux algorithmes SIMPLE et PISO démarre avec un champ de pression initial que l'on suppose. Le champ de vitesse correspondant (noté par \*), obtenu de l'équation :

$$a_e U_e^* = \sum_i a_i U_i^* + (P_P^* - P_E^*) \Delta y \dots \dots (C.2), \text{ peut ne pas satisfaire l'équation de continuité.}$$

En supposant que les champs de vitesse et de pression correctes peuvent être obtenus en ajoutant des corrections (notés par ' ), on peut alors écrire :

$$U = U^* + U'$$

$$V = V^* + V' \dots\dots\dots (C.3)$$

$$P = P^* + P'$$

En soustrayant (C.2) de (C.1) on obtient l'équation :

$$a_e U'_e = \sum_i a_i U'_i + (P'_P - P'_E) \Delta y \dots\dots (C.4)$$

ou encore :

$$U'_e = \frac{\sum a_i U'_i}{a_e} + (P'_P - P'_E) \frac{\Delta y}{a_e} \dots\dots (C.5)$$

Si on pose :  $P' = P'_{,1} + P'_{,2}$  et  $D_u = \Delta y / a_e$ , l'équation (C.5) peut s'écrire comme suit :

$$U'_e = U'_{e,1} + U'_{e,2} \dots\dots (C.6)$$

$$\text{avec : } U'_{e,1} = (P'_{P,1} - P'_{E,1}) D_u \dots\dots\dots (C.7)$$

$$\text{et } U'_{e,2} = \frac{\sum a_i U'_i}{a_e} + (P'_{e,2} - P'_{E,2}) D_u \dots\dots (C.8)$$

Ainsi, les champs de vitesse et de pression correctes peuvent être réécrits comme suit :

$$U_e = U^*_e + U'_{e,1} + U'_{e,2} = U_e^{**} + U'_{e,2} \dots\dots\dots (C.9)$$

$$\text{et } P = P^* + P'_{,1} + P'_{,2} \dots\dots\dots (C.10)$$

En posant, comme première approximation,  $U'_{e,2} = 0$ , la vitesse :

$$U^{**}_e = U^*_e + (P'_{P,1} - P'_{E,1}) D_u \dots\dots\dots (C.11)$$

(et les expressions correspondantes pour  $U^{**}_w, V^{**}_n, V^{**}_s$  )

vérifie l'équation de continuité discrétisée suivante:

$$[(\rho U)_w - (\rho U)_e] \Delta y + [(\rho V)_s - (\rho V)_n] \Delta x = 0 \dots\dots (C.12)$$

Celle-ci deviendra une équation en  $P'_{,1}$  qu'on peut écrire sous la forme :

$$a_p^P P'_{p,1} = \sum_i a_i^P P'_{i,1} + b_1 \dots\dots\dots (C.13)$$

$$\text{où : } b_1 = [(\rho U^*)_w - (\rho U^*)_e] \Delta y + [(\rho V^*)_s - (\rho V^*)_n] \Delta x = 0 \dots\dots (C.14)$$

Dans les deux algorithmes, l'équation (C.13) est utilisée pour le calcul du champ  $P'_{,1}$  et ensuite, le champ de vitesse  $U^{**}$  est calculé à partir de l'équation (C.11).

La principale différence entre SIMPLE et PISO réside dans la correction du champ de pression. Dans SIMPLE, seulement  $P'_{,1}$  est utilisé pour corriger le champ de pression initial alors qu'une deuxième correction  $P'_{,2}$  est aussi utilisée dans PISO. Le champ  $P'_{,2}$  est obtenu

en considérant  $U'_{e,2} \neq 0$  et définie par l'équation (C.8), de même que pour  $U'_{w,2}$ ,  $U'_{s,2}$  et  $U'_{n,2}$ , et le tous vérifie l'équation (C.12), on abouti alors à l'équation de  $P'_2$  :

$$a_p^P P'_{p,2} = \sum_i a_i^P P'_{i,2} + b_2 \dots \dots \dots (C.15)$$

où :

$$b_2 = \rho_w \left[ \frac{\sum_i a_i^u U'_{1,i}}{a_p^u} \right]_w \Delta y - \rho_e \left[ \frac{\sum_i a_i^u U'_{1,i}}{a_p^u} \right]_e \Delta y + \rho_s \left[ \frac{\sum_i a_i^v V'_{1,i}}{a_p^v} \right]_w \Delta x - \rho_n \left[ \frac{\sum_i a_i^v V'_{1,i}}{a_p^v} \right]_w \Delta x \dots \dots \dots (C.16)$$

Il est à noter que les coefficients  $a_i$  dans l'équation de  $P'_2$  sont les mêmes que ceux dans l'équation de  $P'_1$ . Ainsi pour passer de  $P'_1$  à  $P'_2$  il suffit seulement de remplacer le terme source  $b_1$  par  $b_2$ .

Il est claire que SIMPLE nécessite moins de temps de calcul et d'espace mémoire que PISO, mais celui ci, qui est le plus récent, est plus stable que l'algorithme original SIMPLE.

Cependant, on retrouve dans le code TEAM les deux algorithmes et c'est à l'utilisateur de choisir entre les deux selon la nature du problème à résoudre. On présentera ci-dessous les séquences des opérations par l'organigramme suivant :

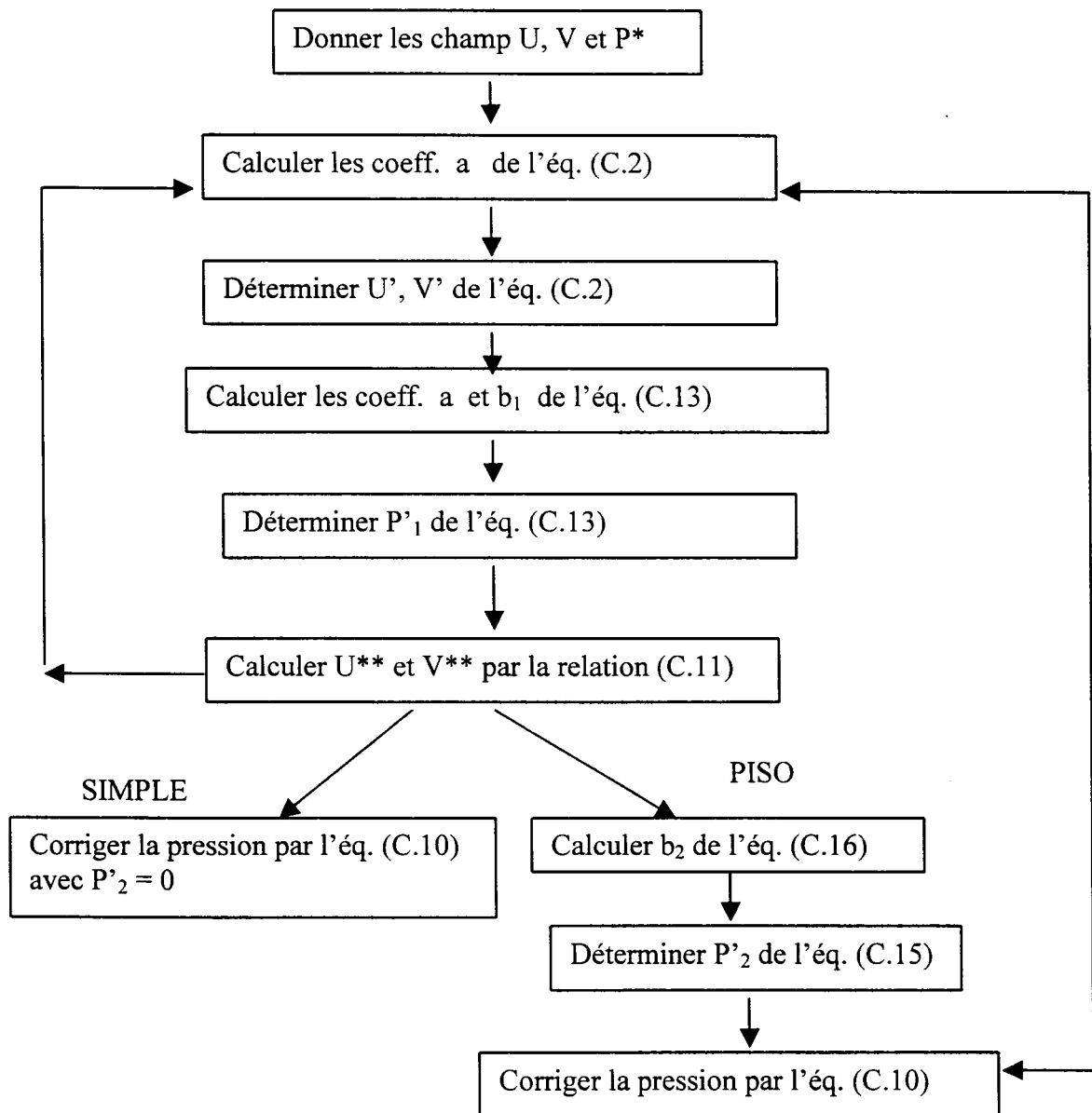


Fig. C.2 : Séquences d'opérations de SIMPLE et PISO

## ANNEXE D

### Les limites du modèle k- $\epsilon$ standard appliqué à la convection naturelle turbulente en cavité [2]

Le modèle k- $\epsilon$  appliqué à la convection naturelle turbulente en cavité différentiellement chauffée n'arrive pas à traduire correctement les phénomènes suivants, prouvés par la simulation directe, :

- une zone centrale bien stratifiée.
- des zones de recirculation en aval des couches limites .
- les transferts thermiques aux parois actives (surévaluation d'environ 25 à 30%)
- la diffusion turbulente (surestimation, se qui conduit à un caractère trop diffusif de l'écoulement

Ces limitations sont certainement dues aux hypothèses et approximations utilisée pour construire ce modèle ( cf. Annexe A).

#### Les hypothèses et leurs conséquences :

##### a- Approche isotrope :

Le modèle k- $\epsilon$  est basé sur la viscosité turbulente,  $\nu_t$ , qui est obtenue à partir d'une longueur  $k/\epsilon$  et d'une vitesse  $\sqrt{k}$ . C'est ce qui a donné au modèle k- $\epsilon$  sa nature à savoir une approximation de la turbulence de nature isotrope (k est la trace du tenseur de Reynolds). Une approche de type isotrope telle que le modèle k- $\epsilon$  standard ne peut pas fonctionner correctement en cavité différentiellement chauffée car les écoulements dans ces cavités sont très anisotropes. Une approche anisotrope telle que le modèle des contraintes de Reynolds semble être plus compétitive que le modèle k- $\epsilon$  car il modélise directement toute les corrélations du second ordre, cependant ce modèle conduit à un nombre d'équations double de celles du modèle k- $\epsilon$ .

##### b- Approximation de Boussinesq :

Les corrélations du second ordre sont modélisées par le moyen de l'approximation de Boussinesq. Ceci implique que les flux turbulents correspondent aux gradients des champs moyens ce qui exclut des phénomènes à contre gradient du champs moyen. Cette



approximation donne une correspondance non seulement quantitative mais aussi de signe entre les corrélations et leurs parties traductrices. Or il a été remarqué des résultats de simulation directe qu'en aucun cas la cohérence des signes est totale, la diffusion à contre gradient est donc évidente. Il est donc inévitable que le modèle k- $\epsilon$  prédise de mauvais résultats en cavité différentiellement chauffée.

### **c- Fonctions de paroi :**

Dans la plupart des cas, on utilise des lois de paroi dans le modèle k- $\epsilon$  standard. Les fonctions de paroi les plus utilisées sont les lois logarithmiques qui ont été empruntées aux écoulements forcés. Pour le cas de la convection naturelle elles doivent être modifiées pour prendre en compte la particularité de ce type d'écoulement.

Afin de remédier à ces limitations du modèle k- $\epsilon$  standard, l'auteur [2] propose les modifications suivantes sur le modèle :

- L'utilisation du modèle k- $\epsilon$  modifié par L. Davidson [60], pour tenir compte des effets d'anisotropie et éviter l'emploi du modèle de contraintes de Reynolds.
- Pour prendre en compte l'existence de zones quasi-laminaire et contourner le problème de la non disponibilité de fonctions de paroi propres à la convection naturelle, il est intéressant de suivre la démarche de modèle k- $\epsilon$  à bas nombre de Reynolds.

## **REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

- [1]- F. ALLARD, A. DRAOUI et C. BEGHEIN, « Quelques phénomènes convectifs naturelles en milieu industriel : du refroidissement des circuits électroniques au tunnel sous la Manche. » ; Revue Générale Thermique , N° 356-357, pp. 499-507, 1991.
- [2]- S. Xin , « Simulations numériques de convection naturelle turbulente », Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 1993.
- [3]- S.V. PATANKAR, « Recent development in computational heat transfer »; J. Heat Transfer, Vol. 110, pp. 1037-1045, 1988.
- [4]- D. KALACHE, « Contribution à l'étude de la convection naturelle en cavités trapézoïdales chauffées par dessous. »; Thèse de Doctorat ès sciences physiques, Université de Poitiers, France, 1987.
- [5]- G. DE VAHL DAVIS, « Natural convection of air in square cavity: a benchmark numerical solution. »; Int. J. Num. Méth. Fluids, Vol. 3, 1983.
- [6]- P. LE QUERE, « Accurate solutions to the square thermally driven cavity at high Rayleigh number. »; Comput. Fluids, Vol. 20, pp. 29-41, 1991.
- [7]- P. LE QUERE, « Etude de la transition à l'instationnarité des écoulements de convection naturelle en cavité verticale différenciellement chauffée par méthodes spectrales Chebyshev. »; Thèse d'Etat, Université de Poitiers, France, 1987.
- [8]- S. PAOULUCCI and D. R. CHENOWTH, « Transition to chaos in a differentially heated vertical cavity. »; J. Fluid. Mech., Vol. 201, pp. 379-410, 1989.
- [9]- R. J. A. JANSSEN, R. A. W. M. HENKES and C. J. HOOGENDOORN, « Transition to time-periodicity of a natural convection flow in a 3D differentially heated cavity. »; Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 36, No. 11, pp. 2927-2940, 1993.
- [10]- R. J. A. JANSSEN and R. A. W. M. HENKES, « Influence of Prandtl number on instability mechanisms and transition in a differentially heated square cavity. »; J. Fluid Mech, Vol. 290, pp. 319-344, 1995.
- [11]- R. A. W. M. HENKES and P. LE QUERE, « Three-dimensional transition of natural convection flows »; J. Fluid. Mech, Vol. 319, pp. 281-303, 1996.

- [12]- PROCEEDINGS of the EUROTHERM SEMINAR N° 22 , 1992 : « Turbulent natural convection in enclosures : a computational and experimental benchmark study », editors : R.A.W.M. HENKES and C.J. HOOGENDOORN, Delft , The Netherlands.
- [13]- R. KESSLER, « Nonlinear transition in three-dimensional convection » ; J. Fluid Mech., Vol. 174, pp. 357-379, 1987.
- [14]- R. M. CLEVER and F. H. BUSSE, « Nonlinear oscillatory convection »; J. Fluid Mech., Vol. 176, pp. 403-417, 1987.
- [15]- F. HESLOT, B. CASTING and A. LIBCHABER, « Transition to turbulence in helium liquid gas »; Phys. Rev. A , Vol. 36, pp. 5870-5873, 1987.
- [16]- K. R. KIRCHARTZ and H. OERTEL JR, « Three-dimensional thermal cellular convection in rectangular boxes »; J. Fluid Mech. , Vol. 192, pp. 249-286, 1988.
- [17]- K. T. YANG, « Transitions and bifurcations in laminar buoyant flows in confined enclosures »; J. Heat. Transfer., Vol. 110, pp. 1191-1203, 1988.
- [18]- D. MUKUTMONI and K. T. YANG, « Wavenumber selection for Rayleigh-Bénard convection in a small aspect ratio box »; Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 35, No. 9, pp. 2145-2159, 1992.
- [19]- R. D. FLACK, « The experimental measurement of natural convection heat transfer in triangular enclosures heated or cooled from below »; J. Heat Transfer, Vol. 102, pp. 770-772, 1980.
- [20]- D. POULIKAKOS and A. BEJAN, « Natural convection experiments in a triangular enclosure »; J. Heat Transfer, Vol. 105 : Technical Notes, pp. 652-655, 1983.
- [21]- D. KALACHE, F. PENOT and P. LE QUERE, « Numerical investigation of the validity of the 2-D assumption in the computation of natural convection within a trapezoidal cavity. »; Num. Meth. in Laminar and Turbulent Flow, 4<sup>th</sup> Int. Conf., SWANSEA, U. K., pp. 829-840, 1985.
- [22]- H. SALMUN, « Convection patterns in a triangular domain. »; Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 38 No. 2, pp. 351-362, 1995.
- [23]- M. S. LOUNICI, « Transferts convectifs tridimensionnels dans une cavité trapèzoïdale »; Mémoire de Magister, I.N.G.M. Boumerdès, Algérie, 1997.
- [24]- B. CASTING, G. GUNARATNE, F. HESLOT, L. KADANOFF, A. LIBCHABER, S. THOMAE, X. Z. WU, S. ZALESKI and G. ZANETTI, « Scaling of hard thermal turbulence in Rayleigh-Bénard convection »; J. Fluid Mech., Vol.204, pp. 1-30 , 1989.

- [25]- S. HORANYI, L. KREBS and U. MÜLLER, « Turbulent Rayleigh-Bénard convection in low Prandtl-number fluids »; *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 3983-4003, 1999.
- [26]- S. W. LAM, R. GANI and J. G. SYMONS, « Experimental and numerical studies of natural convection in trapezoidal cavities. »; *J. Heat Transfer*, Vol. 111, pp. 372-377, 1989.
- [27]- N. C. MARKATOS and K. A. PERICLEOUS, « Laminar and turbulent natural convection in an enclosed cavity »; *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 27, No. 5, pp. 755-772, 1984.
- [28]- H. OZOE, A. MOURI and M. OHMURO, « Numerical calculations of laminar and turbulent natural convection in water in rectangular channels heated and cooled isothermally on the opposing vertical walls »; *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 28, No. 1, pp. 125-138, 1985.
- [29]- S. PAOLUCCI, « Direct numerical simulation of two-dimensional turbulent natural convection in an enclosed cavity »; *J. F. M.*, Vol. 215, pp. 229-262, 1990.
- [30]- R. A. W. M. HENKES, C. J. HOOGENDOORN and F. F. VAN DER VLUGT, « Natural convection flow in a square cavity calculated with low-Re turbulence models », *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 34, No. 2, pp. 377-388, 1991.
- [31]- W. P. JONES and B. E. LAUNDER, « The predictions of laminarization with a two-equation model of turbulence. »; *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 301-314, 1972.
- [32]- K. Y. CHIEN, « Predictions of channel and boundary layer flow with a low-Reynolds-number two-equation model of turbulence. »; AIAA-80-0134, 1980.
- [33]- R. CHEESEWRIGHT, K. J. KING and S. ZIAI, « Experimental data for the validation of computer codes for the prediction of two-dimensional buoyant flows. »; *HTD*, Vol. 60, pp. 75-81, 1986.
- [34]- K. HANJALIC & S. VASIC, « Computation of turbulent natural convection in rectangular enclosures with an algebraic flux model », *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 36, No. 14, pp. 3603-3624, 1993.
- [35]- R. A. KUYPER, TH. H. VAN DER MEER, C. J. HOOGENDOORN and R. A. W. M. HENKES, « Numerical study of laminar and turbulent natural convection in an inclined square cavity »; *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 36, No. 11, pp. 2899-2911, 1993.

- [36]- A. A. MOHAMAD and R. VISKANTA, « Modling of turbulent buoyant flow and heat transfer in liquid metals »; *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 36, No. 11, pp. 2815-2826, 1993.
- [37]- R. A. W. M. HENKES and C. J. HOOGENDOORN, « Comparison of the standard case for turbulent natural convection in a square enclosure. » ; in : *Proceedings of the Eurotherm Seminar 22*, pp. 185-213, 1992.
- [38]- A. TILGNER, A. BELMONTE and A. LIBCHABER, « Rayleigh-Bénard turbulent convection »; in : *Turbulence : a tentative dictionary* , edited by P. Tabeling and O. Cardoso, New York, 1995.
- [39]- H. TENNEKES and J.L. LUMLEY, « A First Course in Turbulence » ; The MIT Press, 1972.
- [40]-J. COUSTEIX, «Aérodynamique: Turbulence et couche limite »; CEPADUES-Editions, 1989.
- [41]- S. CHIKH, « Modélisation : modèles de turbulence »; Cours de Post-Graduation, IGM USTHB, Algérie,1993.
- [42]- S. RAMADHANI, « Tow-Equation and Second-Moment turbulent models for convective heat transfer » ; in : *Advances in numerical heat transfer* ( edited by W. J. Minkowycz and E. M. Sparrow ), Vol. 1, pp. 171-199, 1997.
- [43]- P. RUBINI, « Numerical methods for turbulent flows »; Cranfield University, England, 1996.
- [44]- R. SCHIESTEL, « Modélisation et simulation des écoulements turbulents »; Editions Hermès, Paris, 1993.
- [45]- B. E. LAUNDER et D. B. SPALDING, « The numerical computation of turbulent flows »; *Comp. Methods Applied Mech. Eng.*, Vol. 3, pp. 269-289, 1974.
- [46]- S. V. PATANKAR, « Numerical heat transfer and fluid flow »; Hemisphere publishing corporation, McGraw Hill, 1980.
- [47]- C.D. PEREZ-SEGARRA, A. OLIVA and M. COSTA, « Benchmark of turbulent natural convection in square cavity : Comparaison between different k- $\epsilon$  turbulence models » ; in : *Proceedings Eurotherm Seminar 22* ( R.A.W.M. Henkes and C.J. Hoogendoorn, editors ), pp. 109-120, 1992.
- [48]- P. G. HUANG, B. E. LAUNDER and M. A. LESCHZINER , *Guide du code TEAM*; UMIST, Manchester , UK, 1984.

- [49]- B. P. LEONARD, « A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation »; *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 19, 1979.
- [50]- L. DAVIDSON, « Computation of natural convection flow in a square cavity » ; in : *Proceedings Eurotherm Seminar 22* ( R.A.W.M. Henkes and C.J. Hoogendoorn, editors ), pp. 43-53, 1992.
- [51]- F. J. HAMADY, J. R. LLOYD, H. Q. YANG and K. T. YANG, « Study of local natural convection heat transfer in an inclined enclosure » ; *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 32 No. 9, pp. 1697-1708, 1989.
- [52]- H. OZOE, K. YAMAMOTO, S. W. CHURCHILL and H. SAYAMA, « Three-dimensional, numerical analysis of laminar natural convection in a confined fluid heated from below »; *J. Heat Transfer*, pp. 202-207, May 1976.
- [53]- J. N. ARNOLD, I. CATTON and D. K. EDWARDS , « Experimental investigation of natural convection in inclined rectangular regions of differing aspect ratios » ; *J. Heat Transfer*, Vol. 98, pp. 67-71, 1976.
- [54]- D. E. FITZJARRALD, « An experimental study of turbulent convection in air » ; *J. Fluid Mech.*, Vol. 73, part 4, pp. 693-719, 1976.
- [55]- P. LE BRETON, « Etude numérique et expérimentale de la convection naturelle laminaire et turbulente en cavité partiellement occupée d'un milieu poreux. »; Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux, France, 1991.
- [56]- R. R. LONG, « Relation between Nusselt number and Rayleigh number in turbulent thermal convection. » ; *J. Fluid Mech.*, Vol. 73, part 3, pp. 445-451, 1976.
- [57]- D. C. THRELFALL, « Free convection in low-temperature gaseous helium » ; *J. Fluid Mech.*, Vol. 67, pp. 17-28, 1975.
- [58]- C. K. G. LAM and K. BREMHORST, « A modified form of the k- $\epsilon$  modèle for predicting wall turbulence » ; *J. Fluids Eng.*, Vol. 103, pp. 457-460, 1981.
- [59]- W. M. TO and J. A. C. HUMPHREY, « Numerical simulation of buoyant turbulent flow » ; *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 29, pp. 573-610, 1986.
- [60]- L. DAVIDSON, « Second-order corrections of the k- $\epsilon$  modèle to account for non-isotropy effects due to buoyancy », *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 33, pp. 2599-2608, 1990.