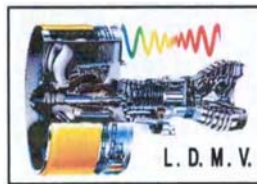


République algérienne démocratique et populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université M'hamed BOUGARA Boumerdès



Faculté des Sciences de l'Ingénieur  
Département : Maintenance Industrielle  
Laboratoire : Dynamique des Moteurs et Vibroacoustique



**Mémoire de Magister**  
**Filière : Génie Mécanique**  
*Option: Dynamique des Moteurs et Vibroacoustique*

**Thème**

**Identification et modélisation par éléments finis  
des charges dynamiques du rotor principal  
d'hélicoptère**

Présenté par : **CHELLIL Ahmed**

Soutenu le : 23-06- 2008  
Devant le jury composé de :

<b>MM. S. RECHAK</b>	Professeur	ENP Alger	Président
<b>A. NOUR</b>	Professeur	UMB Boumerdès	Encadreur
<b>A. KHALFI</b>	Professeur	UDL Sidi Bel Abbès	Examineur
<b>B. NECIB</b>	Professeur	UMM Constantine	Examineur
<b>M.O. SI-CHAIB</b>	Maître de Conférences	UMB Boumerdès	Examineur

Année universitaire 2007 /2008

# Remerciements

*Ce travail a été accompli au laboratoire Dynamique des moteurs et vibro-acoustique de l'Université M'hamed Bougara de Boumerdès, Faculté des Sciences de l'Ingénieur (F.S.I.).*

*Je tiens tout d'abord à remercier en premier lieu Allah, le tout puissant, de m'avoir donné autant de courage, de patience et de volonté pour atteindre ce but.*

*Mes premiers remerciements vont naturellement à mon directeur de mémoire, le Professeur NOUR Abdelkader pour ses conseils et le partage de ses compétences scientifiques. Ce fut un plaisir de travailler avec lui. J'ai également apprécié la grande liberté qu'il m'a accordée dans la gestion de mon mémoire ainsi que sa passion pour la recherche et sa bonne humeur toujours présente. Bref, merci de m'avoir supporté ces deux années et d'en avoir fait une période plus qu'agréable pour moi. Merci également au président du jury Le Professeur RECHAK Saïd d'avoir accepté d'examiner ce travail et d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.*

*Je remercie vivement Le Professeur KHALFI Ali de l'université Djillali Liabbes de sidi Bel Abbes et le Professeur NECIB Brahim de l'université de Mohamed Mentouri de Constantine, d'avoir accepté de faire parti du jury d'évaluation de ce mémoire, et pour leur déplacement et le temps qu'ils ont consacré à l'étude de ce document.*

*Je remercie notre cher enseignant le Docteur M.O. SI-CHAIB pour sa participation au jury et pour ces critiques pertinentes.*

*Je tiens à témoigner ma reconnaissance à Mr. Saadouni yacine de l'EMP pour l'aide et l'encouragement qu'il m'a donné.*

*Il convient également de saluer Mr. Chikh Noureddine, enseignant à l'Université de Boumerdès pour ses conseils scientifiques appréciables.*

*Je tiens aussi à remercier tous les enseignants qui ont assuré notre formation au cours de l'année théorique, et particulièrement Mme. YAHLAOUI Aïcha pour les encouragements et pour les discussions que nous avons eues.*

*Un remerciement spécial au cher frère Samir LECHEB, qui par sa disponibilité permanente a permis à ce travail d'aboutir, tout en gardent une fidèle amitié durant plus de cinq ans.*

*Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du laboratoire, qui durant ces deux années mon permis de travailler dans un cadre agréable. Merci à tous mes collègues étudiants, les anciens et ceux encore en activité.*

*J'adresse un grand merci à mes collègues en post-graduation : toufik, mohand, ahmed, Mourad, malik, hamid et nadia.*

*Je tiens à remercier particulièrement, Ihes et Abdou, pour beaucoup de choses,*

*Que tous mes ami(e) s sans exception, ils sont nombreux, je ne peux tous les citer mais je ne peux les oublier.*

*Je remercie tous les gens de mon passage, que j'ai connus ou rencontrés dans ma vie, sociale et universitaire, et à tous ceux que je n'ai pas cités avec toutes mes excuses.*

*Mes reconnaissances vont également à toutes les personnes des l'Université, M'hamed Bougara de Boumerdès, surtout les personnes des bibliothèques, Ex-INGM et centrale, merci pour leur disponibilité.*

*Enfin, que toutes les personnes ayant contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail, soient chaleureusement remerciées.*

# *Dédicace*

*Avant tout propos, je tiens à rendre grâce à Allah qui m'a guidé sur la bonne voie.*

*Je tiens à rendre hommage à mon père, et à celle qui a su et avoir pu faire de moi l'homme que je suis, « à maman » pour son indéfectible assistance et son soutien tout le long de ma formation ; les mots ne peuvent exprimer mon entière gratitude et ma reconnaissance pour tout leurs sacrifices, à mes frères et mes soeurs.*

*Encore une fois, un grand merci à toute ma famille à qui je dédie ce présent travail.*

*à tous mes ami(e) s sans exception.*

*Je pris Allah de leurs accorder longue vie et bonne santé*

*Ahmed*

## ملخص

هذه الدراسة تهتم بالسلوك الديناميكي للدوارات العمودية، الهدف الأساسي من هذه الدراسات البحثية هو وضع نموذج يسمح بمحاكاة السلوك الديناميكي لدوار عمودي. لقد قمنا بدراسة الحركة الهوائية لطائرة مروحية من أجل تحديد جميع قوى الحركة الهوائية المطبقة على الدوار الرئيسي لطائرة مروحية، الشيء الذي يسمح بإنشاء نموذج عناصر منتهية لشفرة المروحة واستنتاج تواتراتها وأشكالها المميزة. حللنا ردود الفعل التي تؤثر في المحمل وقمنا بحساب جميع الطاقات و الأعمال لمختلف عناصر الدوار، كما قمنا بتطوير نموذج بسيط لدراسة الظواهر الاهتزازية. من أجل دراسة تركيبات حقيقية أنشأنا نموذج عناصر منتهية، هذا النموذج يسمح باستخلاص التواترات الخاصة و التشوهات المميزة للدوار، وكذلك حساب الإجهادات التي تؤثر في البنية لعدة أشكال مميزة. إن دراسة الدوارات في النظام العابر وقتياً، يسمح بتحديد الإستجابات الاهتزازية التي ترجع إلى اختلال التوازن والتنبهات.

**\*الكلمات المفتاحية:** دوار، ديناميكي، عناصر منتهية، رقمي، طائرة مروحية، حركة هوائية.

## Résumé

Cette étude concerne le comportement dynamique des rotors verticaux. L'objet principal de ces travaux de recherche est de mettre en œuvre un modèle permettant de simuler le comportement dynamique d'un rotor vertical. Une étude de l'aérodynamique des hélicoptères a été faite pour la détermination des charges aérodynamiques appliquées sur le rotor principal de l'hélicoptère. Ce qui a permis de développer un modèle d'éléments finis de la pale et d'en déduire leurs fréquences et modes propres.

L'analyse des réactions agissant sur les paliers a été faite. Les calculs des différentes énergies et des travaux virtuels des différents éléments du rotor ont été développés. Un modèle simple a été défini afin d'étudier les phénomènes vibratoires. Pour traiter des systèmes réels, un modèle d'éléments finis a été développé. Ce modèle permet d'extraire les fréquences propres et les déformés modales du rotor, et de calculer les contraintes agissant sur la structure pour les différents modes propres. L'étude des rotors en régime transitoire permet de déterminer les réponses vibratoires dues aux balourds et aux différentes excitations.

**Mots clés :** Rotor, dynamique, éléments finis, numérique, hélicoptère, aérodynamique.

## Abstract

This study concerned the dynamic behavior of the vertical rotors. The main objective of these research tasks is to implement a model to make it possible to simulate the dynamic behaviour of a vertical rotor. A study of the aerodynamics of the helicopters was made through the determination of the aerodynamic loads applied to the main rotor of helicopter which allows to develop a finite element model of the blade and to extract their frequencies and eigen modes.

The analysis of the reactions which operates the bearing is done. Calculations of different energies and virtual work from the various elements of the rotor are developed. A simple model was defined in order to study the vibratory phenomena. To treat real systems a model of finite element was developed. This model makes it possible to extract the eigen frequencies and modal deformed of the rotor, and to calculate the stresses which act on the structure for the various eigen modes. The study of the rotor in transient system allowed to determine the vibratory responses due to the unbalances and various excitations.

**Key words:** Rotor, dynamics, finite element, numerical, helicopter, aerodynamics.

## NOMENCLATURE

$a_G$	Accélération linéaire
A,B	réactions aux paliers
$c$	Amortissement
<b>C</b>	centre de masse
$[C]$	Matrice d'amortissement
$C_X$	Le coefficient de traînée
$C_{zm}$	Le coefficient moyen de portance
$d$	Distance de balourd du centre géométrique de l'arbre
$D_H$	La traînée
$E$	Module d'élasticité
$e$	Excentrement
$f_i$	Fréquence propre
$f(y)$	Fonction de forme
$F$	Force unitaire
$\vec{F}_N$	La poussée
$I$	Moment d'inertie
$I_P$	Moment d'inertie polaire
$I_a$	Moment d'inertie transverse de l'arbre
$i, j$	Nombres complexes
$J_a$	Moment d'inertie polaire de l'arbre
$[J_P]$	Tenseur d'inertie
$K_0$	Moment cinétique
$[K]$	Matrice de rigidité
$[K_P]$	Matrice de rigidité de palier
$k$	Rigidité
$L$	Longueur
$L_H$	La portance
$M$	Masse
$\vec{M}$	Moment des forces
$M_Z$	Moment
$M_s$	Moment statique de la pale
$m_a$	Masse de l'arbre
$m_d$	Masse de disque
$m_b$	Masse de balourd
$N_i(y)$	Fonction de forme
$N$	Vitesse de rotation
$P_r$	La puissance
$Q$	Quantité de mouvement
$\bar{Q}$	Débit massique
$\{q_i\}$	Cordonnées généralisés

$\ddot{q}, \dot{q}$ et $q$	Vecteur accélération, vitesse et déplacements
$R(x, y, z)$	Repère tournant
$R_0(X, Y, Z)$	Repère fixe
$R_H$	La force résultante
$S$	Surface
$S_a$	Section de l'arbre
$T$	Énergie cinétique
$T_d$	Énergie cinétique de disque
$T_b$	Énergie cinétique de balourd
$t$	Temps
$U$	Énergie potentielle
$u$ et $w$ fixe	Coordonnées du centre géométrique de disque O dans le repère fixe
$u^*$ et $w^*$	Coordonnées du centre géométrique O dans le repère mobile
$V_i$	La vitesse induite
$V$	la vitesse de translation de l'appareil
$\vec{V}_0$	La vitesse à l'infini amont
$\vec{V}_1$	La vitesse dans le plan du disque rotor.
$\vec{V}_2$	La vitesse à l'infini aval.
$w_x, w_y$ et $w_z$	Vecteurs de rotation instantanées suivantes $x, y$ et $z$
$\delta W_p$	Travail virtuel
$x_c, y_c, z_c$	Coordonnées de centre de masse

### **Symboles grecques**

$\omega$	Vitesse de rotation
$\Omega$	Pulsation propre
$\Omega_c$	Pulsation critique
$\varepsilon$	Accélération angulaire
$\mathcal{E}$	Déformation
$\eta_b$	Facteur d'amortissement
$\sigma$	Contrainte de flexion
$\tau$	Volume
$\delta$	Vecteur des déplacements nodaux
$\rho$	Masse volumique
$\theta, \psi$	Déplacement angulaire
$\beta$	Le battement
$\delta_T$	La traînée
$\theta_p$	Le pas

## Listes des figures

**Figure I.1** Diagramme de Campbell

**Figure I.2** Influence des dissymétries sur le diagramme de Campbell

**Figure II.1** Effort de traction la poussée  $\vec{F}_N$

**Figure II.2** Mobilités de la pale

**Figure II.3** Points du profil NACA 23012

**Figure II.4** Géométrie de la section de la pale

**Figure II.5** Conditions aux limites

**Figure II.6** Pale modèle éléments finis

**Figure II.7** Présentation des efforts aérodynamiques

**Figure II.8** Présentation de la force centrifuge

**Figure II.9** Mode de 1<sup>ere</sup> déformés: 1<sup>ere</sup> mode 1de battement

**Figure II.10** Mode de 2<sup>eme</sup> déformés: 2<sup>eme</sup> mode de battement

**Figure II.11** Mode de 3<sup>eme</sup> déformés: 1<sup>ere</sup> mode de Traîné

**Figure II.12** Mode de 4<sup>eme</sup> déformés: 3<sup>eme</sup> mode de battement

**Figure II.13** Mode de 5<sup>eme</sup> déformés: 1<sup>ere</sup> mode de torsion

**Figure II.14** Evolution de Profil de déplacement suivant la pale

**Figure III.1** Configuration de référence

**Figure III.2** Configuration déformée

**Figure III.3** Schéma d'un solide en rotation par rapport à un axe vertical

**Figure III.4** Schéma d'un solide en rotation autour d'un axe vertical

**Figure III.5** Rotor en rotation à deux paliers

**Figure III.6** Les forces tournantes agissent sur les paliers

**Figure IV.1** Exemple de rotor

**Figure IV.2** Repère de référence d'un disque monté sur un arbre flexible

**Figure IV.3** Coordonnées du centre géométrique C et d'un point arbitraire B de la section du rotor

**Figure IV.4** Amortissement et raideur des paliers

**Figure IV.5** Répartition du balourd sur le rotor

**Figure IV.6** Modélisation de la répartition du balourd sur le rotor

**Figure IV.7** Masse de balourd

**Figure IV.8** Représentation des coordonnées

**Figure IV.9** Schématisation de modèle simple du rotor

**Figure IV.10** Diagramme de Campbell pour modèle simple

**Figure IV.11** Réponse à un balourd

**Figure IV.12** Réponse à une force asynchrone

**Figure V.1** Maillage du rotor

**Figure V.2** Rotor modèle éléments finis

**Figure V.3** Conditions aux limites

**Figure V.4** Premier mode calculé

**Figure V.5** Cinquième mode calculé

**Figure V.6** Septième mode calculé

**Figure V.7** Dixième mode calculé

**Figure V.8** Première contrainte principale

**Figure V.9** Deuxième contrainte principale

**Figure V.10** Troisième contrainte principale  
**Figure V.11** Intensité de contrainte  
**Figure V.12** Contrainte équivalente de Von Misés  
**Figure IV.13** Distribution des contraintes suivant une ligne longitudinale  
**Figure V.14** Distribution de la contrainte équivalente de Von Misés pour le premier mode  
**Figure V.15** Distribution de la contrainte équivalente de Von Misés pour le troisième mode  
**Figure V.16** Distribution de la contrainte équivalente de Von Misés pour le cinquième mode  
**Figure V.17** Distribution de la contrainte équivalente de Von Misés pour le sixième mode  
**Figure V.18** Distribution de la contrainte équivalente de Von Misés pour le neuvième mode  
**Figure V.19** Comparaison qualitative des distributions de la contrainte équivalente de Von Misés pour les différents modes  
**Figure V.20** Diagramme de Campbell pour le modèle éléments finis  
**Figure V.21** Réponse en fréquence suivant y  
**Figure V.22** Réponse en fréquence suivant z  
**Figure V.23** Signal temporel de la réponse en déplacement suivant y  
**Figure V.24** Signal temporel de la réponse en déplacement suivant z  
**Figure V.25** Signal temporel de la réponse en vitesse suivant y  
**Figure V.26** Signal temporel de la réponse en vitesse suivant z  
**Figure V.27** Signal temporel de la réponse en accélération suivant y  
**Figure V.28** Signal temporel de la réponse en accélération suivant z  
**Figure V.29** Signal temporel de la réponse en déplacement suivant y  
**Figure V.30** Signal temporel de la réponse en déplacements suivant z  
**Figure V.31** Signal temporel de la réponse en vitesse suivant y  
**Figure V.32** Signal temporel de la réponse en vitesse suivant z  
**Figure V.33** Signal temporel de la réponse en accélération suivant y  
**Figure V.34** Signal temporel de la réponse en accélération suivant y  
**Figure V.35** Spectre du signal en amplitude de déplacement

### **Listes des tableaux**

**Tableau II.1** Les fréquences naturelles de la pale  
**Tableau V.1** Maillage du rotor  
**Tableau V.2** Les fréquences propres du rotor



## Sommaire

<b>Introduction générale</b> .....	1
<b>Chapitre I - Bibliographie</b>	
<b>Introduction</b> .....	3
<b>I.1- la dynamique des rotors</b> .....	9
I.1-1 Les divers types d'excitations.....	9
I.1-2 Notions de vitesse critique .....	10
I.1-3 L'influence des dissymétries.....	11
I.1-4 L'effet de l'amortissement.....	13
<b>Conclusion</b> .....	13
<b>Chapitre II -Aérodynamique de l'hélicoptère</b>	
<b>II.1. Généralités</b> .....	14
II.1.1 La pale et le rotor.....	14
II.1.2. Les modes de vol d'un hélicoptère.....	14
II.1.3. Effort de traction sur l'hélicoptère.....	14
<b>II.2. Efforts Transmis</b> .....	15
II.2. 1 Calcul de la Matrice d'Inertie.....	15
II.2.1.a Conditions aux limites.....	16
II.2. 2 Détermination des efforts.....	17
II.2. 2 a) Position du problème.....	17
II.2. 2 b) Présentation des efforts aérodynamiques.....	17
II.2. 3 Calcul des efforts aérodynamiques (Traînée et Portance) .....	18
II.2.3.1 Performances en vol stationnaire.....	18
II.2.4. Détermination de la force centrifuge.....	19
<b>II.3. Modélisation de la pale par le code de calcul ANSYS</b> .....	19
II. 3.1 les fréquences naturelles de la pale.....	19
II. 3.2 Les déformées modales .....	20
<b>Conclusion</b> .....	22
<b>Chapitre III Analyse dynamique des solides élastiques</b>	
<b>III.1 Cinématique d'une particule du solide</b> .....	23
<b>III.2 Dynamique d'un corps déformable</b> .....	25
<b>III.3 Efforts exercés sur l'axe d'un solide en rotation</b> .....	27
III.3.1 Effort dynamique.....	27
III.3.2 Variation de la quantité de mouvement et de moment cinétique .....	28
III.3.3 Réaction statiques et dynamiques.....	31
III.3.3.1 Equilibrages statique et dynamique.....	31
III.3.3.2 Analyses des résultats.....	31
III.3.4 Solide parfaitement équilibré.....	32
<b>III.4 Rotation d'un solide autour d'un axe fixe</b> .....	33
III.4.1 Equilibrages statique et dynamique.....	33
<b>III.5 Rotation d'un rotor autour d'un axe fixe</b> .....	34
III.5.1 Détermination des forces aux paliers.....	34
III.5.2 Détermination des moments d'inertie.....	35

<b>Conclusion</b> .....	37
-------------------------	----

## **Chapitre - IV Modélisation des systèmes des rotors**

<b>Introduction</b> .....	38
<b>IV.1 Modélisation du rotor</b> .....	38
IV.1.1. le disque.....	39
IV.1.2 L'arbre.....	40
IV.1.2.1 L'énergie cinétique.....	40
IV.1.2.2 Energie de déformation.....	41
IV.1.3 Paliers.....	43
IV.1.4 Le balourd.....	44
<b>IV.2 Modèle simple</b> .....	46
IV.2.I. Description du modèle.....	46
IV.2.2 Elément de disque.....	47
IV.2.3 Elément de l'arbre.....	48
IV.2.4. Paliers à roulement.....	48
IV.2.5. Balourd.....	48
IV.2.6. Equations du mouvement.....	48
IV.2.7 Validation du modèle.....	49
IV.2.7.1 Modèle symétrique.....	50
IV.2.7.2 Fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation.....	50
IV.2.7.3 Réponse aux forces d'excitation.....	54
IV.2.7.3.a. Balourd.....	54
IV.2.7.3.b Force asynchrone.....	55
<b>IV.3 Modélisation des rotors par éléments finis</b> .....	57
IV.3.1 Éléments finis de rotor.....	57
IV.3.1.1 Disque.....	57
IV.3.1.2 Arbre.....	58
IV.3.1.3 Paliers.....	60
IV.3.1.4 Balourds.....	60
IV.3.2 Système d'équations.....	61
IV.3.3 Résolution des équations.....	61
<b>Conclusion</b> .....	62

## **Chapitre V- Résultats numériques**

<b>Introduction</b> .....	63
<b>V.1 Description du modèle</b> .....	64
V.1.1 Données fournies.....	64
V.1.2 Caractéristiques.....	64
V.1.3 Conditions aux limites.....	66
<b>V.2 Analyse modale</b> .....	66
V.2.1 Les déformées modales.....	67
V.2.2 Evolution des contraintes.....	69
V.2.3 L'évolution des contraintes selon une ligne longitudinale de rotor.....	72
V.2.4 Diagramme de Campbell.....	76
<b>V.3 Analyse de la réponse aux forces aérodynamiques du rotor</b> .....	77
<b>V.4 Simulation numérique en régime transitoire à la résonance</b> .....	79

<b>V.5 Réponse transitoire du rotor à vitesse constante</b> .....	82
<b>Conclusion</b> .....	86
<b><i>Conclusions et perspectives</i></b> .....	87
<b><i>Références bibliographiques</i></b> .....	89
<b><i>Annexes</i></b> .....	94

## Introduction générale

La dynamique des structures occupe une place importante dans les travaux de recherche actuels.

L'étude du comportement dynamique des machines tournantes et des différentes structures mécaniques à rotors verticaux tel que les centrifugeuses, les pompes, les compresseurs, les turbines, les éoliennes et les hélicoptères permettant de résoudre divers problèmes liés à leurs fonctionnements.

Les rotors sont définis comme tout élément tournant autour d'un axe fixe.

Le champ des rotors est vaste, par exemple les satellites géostationnaires animés d'une rotation libre étant conformément à la définition des rotors, de tels rotors sont appelés rotors libres, par opposition aux rotors fixes qui sont supportés par des paliers.

Les rotors fixes sont présents dans de nombreux domaines : l'aéronautique, l'automobile, le nucléaire ou encore l'industrie pétrolière.

Dans notre étude, on se focalisera sur les rotors fixes, plus précisément sur ceux à axe vertical.

Pour étudier la dynamique d'un système comportant un ou plusieurs rotors, il est possible d'écrire les équations du mouvement soit dans un repère fixe soit dans un repère tournant à la même vitesse de rotation que le rotor. On utilise un repère tournant principalement pour l'étude des roues ou des disques. Dans le contexte qui nous intéresse qui est la dynamique de l'ensemble, le repère fixe est le plus approprié.

Lors de la mise en équation, on utilise les angles d'Euler pour décrire le mouvement d'un élément de rotor comme le mouvement général d'un solide. Les équations du mouvement comportent ainsi de nombreuses non-linéarités. Pour l'étude dynamique des rotors, l'hypothèse de petits déplacements est classiquement avancée, on suppose que la vitesse de rotation est constante où il s'agit d'une fonction connue du temps, cela permet d'obtenir les équations du mouvement linéaire.

Les vibrations axiales et de torsion se trouvent plus découplées des vibrations de flexion auxquelles on s'intéresse plus particulièrement en dynamique d'ensemble.

Les études essentielles de la dynamique des rotors concernant le tracé du diagramme de Campbell qui représente l'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation et le calcul des réponses à balourd principalement lors du passage des vitesses critiques.

Pour réaliser de telles études, on dispose aujourd'hui de nombreux outils de modélisation comme la méthode de matrice de transfert, la méthode des éléments finis et la méthode d'expansion polynomiale généralisée ou encore des fonctions de transfert distribuées. Toutes ces méthodes permettent de prendre en compte les particularités que présente la dynamique des rotors vis-à-vis de la dynamique des structures fixes. On peut citer par exemple l'existence des moments gyroscopiques responsables de la variation de la fréquence propre en fonction de la vitesse de rotation ou celle de forces circulatoires qui rendent le mouvement instable à partir d'une certaine vitesse dans le cadre purement linéaire.

La thématique de recherche abordée dans le cadre de ce mémoire de magister concerne l'étude du comportement dynamique de rotors verticaux, et plus précisément sa stabilité en rotation à travers du passage par les vitesses critiques.

Motivés par ces considérations, on s'est intéressé à caractériser et à analyser numériquement le comportement dynamique des rotors soumis à des balourds ou à des forces harmoniques.

Ce travail est composé de cinq chapitres.

A partir d'une recherche bibliographique, le premier chapitre présente dans sa première partie une vision globale de l'état de l'art dans le domaine de la dynamique des rotors, un résumé de l'état d'avancement des recherches scientifiques, les connaissances acquises soit à partir des modèles analytiques ou éléments finis sont récapitulées. La seconde partie porte sur la description des phénomènes important en dynamique des rotors, les principaux points propres sont donc précisés.

Le chapitre deux est consacré à l'aérodynamique des hélicoptères à travers la détermination des charges dynamiques a savoir la traînée et la poussée appliquées sur le rotor principal et la modélisation de l'élément de pale d'hélicoptère suivi par le calcul des fréquences propres et déformées modales de la pale.

Dans le troisième chapitre nous introduirons les notions de base et les spécificités propres à l'analyse dynamique des systèmes élastiques et tournants. On s'intéresse plus particulièrement à décrire la phénoménologie de l'analyse des charges au niveau des paliers.

Afin de mieux appréhender les phénomènes qui régissent le comportement dynamique des structures tournantes, le quatrième chapitre est composé de trois parties. En premier lieu une modélisation analytique qui concerne la mise en équation générale d'un rotor, les différentes hypothèses de modélisation sont exposées, les caractéristiques des différents éléments qui composent un rotor sont présentées (énergie cinétique et énergie de déformation d'un arbre, énergie cinétique d'un disque, travail des forces extérieures dues aux paliers, énergie cinétique d'un balourd).

Pour la deuxième partie, un modèle simple est développé, de type unidimensionnel fondé sur des EF du type poutre à partir de la méthode de Rayleigh Ritz afin d'étudier des phénomènes de base.

Pour la troisième partie, un modèle éléments finis est développé afin de traiter des systèmes réels.

Le chapitre cinq présente une simulation numérique du rotor par le code de calcul éléments finis ANSYS pour déterminer les fréquences propres, les modes propres, les contraintes et les réponses vibratoires dues aux balourds ou divers excitations extérieurs. Le diagramme de Campbell illustre les phénomènes d'instabilité au passage des vitesses critiques numériquement à partir du modèle éléments finis.

On termine enfin par une synthèse des différents résultats et apports de ce mémoire, en dégageant les perspectives qui peuvent en découler.

## Chapitre I

### Bibliographie

#### Introduction

Les rotors sont souvent utilisés pour transformer l'énergie. Leurs domaines d'application sont aussi variés que l'aéronautique (hélicoptères), l'industrie mécanique (turbine, compresseur), l'industrie électronique et pharmaceutique (pompes à vide) ...etc.

Dans un souci d'augmentation de la productivité et de diminution des coûts, la masse de l'arbre tournant (rotor) tend à diminuer tandis que sa vitesse de rotation augmente. Les phénomènes vibratoires auxquels est soumis le rotor sont de plus en plus importants et peuvent amener à l'instabilité du système, c'est pourquoi les technologies sont développées pour augmenter la puissance massique tout en contenant le niveau vibratoire en dessous d'un seuil acceptable.

De nos jours, les machines tournantes sont de plus en plus performantes notamment en terme de rapport masse/puissance. Cela implique qu'elles deviennent de plus en plus souples et qu'elles peuvent fonctionner au delà d'une ou plusieurs vitesses critiques.

Une liste chronologique des contributions importantes qui ont menées au développement et à l'arrangement de la vibration dans le domaine des rotors se présente comme suite :

Rankine, W.J.M.[1] a examiné l'équilibre d'un rotor sans friction et uniformément perturbé autour de sa position initiale. Les résultats de l'article sont reconnus comme le premier sujet de la dynamique du rotor. Il a proposé que le mouvement soit stable au-dessous de la vitesse critique et neutre ou indifférent à la vitesse critique et instable au-dessus de la vitesse critique, il a également développé des formules numériques pour des vitesses critiques pour les cas d'un rotor se reposant librement sur un roulement à chaque extrémité et pour un rotor instable fixé à une extrémité.

Greenhill A.G.[2] a étudié l'effet de la poussée et du couple sur la stabilité d'un long rotor et a conclu qu'ils étaient tous deux importants. Il a également obtenu des formules pour les cas d'un rotor non chargé se reposant sur des roulements et fixé dans sa direction à chaque extrémité à chaque extrémité.

Dunkerley S. [3] a développé les formules des vitesses critiques pour des rotors chargés en fonction du diamètre du rotor et poids du disque de façon que le rotor est supporté .La vérification a été réalisée expérimentalement. Il a conclu que les amplitudes sont très élevées pour n'importe quel degré de balourd qui excite le rotor à la vitesse critique. La dépendance de la vitesse critique au moment de l'inertie de disque tournante a été identifiée.

Rayleigh J.W.S. [4] a développé une méthode approximative pour calculer la fréquence normale d'une poutre continue flexible avec la masse distribuée par l'utilisation de la méthode énergétique.

Timoshenko T. [5] a découvert les effets de déformation transversale due au cisaillement sur les fréquences normales d'une poutre continue et s'applique principalement au cas de l'arbre en rotation.

Jeffcott H.H. [6] a examiné l'effet du balourd sur les amplitudes du mouvement rotatif et les forces transmises aux roulements. Il a étudié le cas d'un rotor uniforme soutenu sur des roulements à ses extrémités et porte un disque mince. Il a supposé que le moment de l'inertie du disque peut être négligeable. Ce modèle a été utilisé plus tard sous le nom du modèle de Jeffcott. Une théorie complète a été développée pour expliquer le comportement du rotor au passage par la vitesse critique. Il a également identifié qu'avec une marge de séparation de 10% de chaque côté d'une vitesse critique, l'amplitude de la vibration ne serait pas excessive.

Holzer [7] a développé une méthode numérique pour calculer les vitesses critiques des modes de torsion pour un rotor multi disques.

Newkirk B.L. [8] a observé que les vibrations sont élevées lorsque le rotor tourne à une vitesse au-dessus de la première vitesse critique.

Si la vitesse est augmentée, l'amplitude de mouvement rotatif continuera à augmenter, c'était la première fois qu'il a prouvé que le mouvement instable peut exister dans un rotor qui tourne à grande vitesse ces résultats ont été réalisés expérimentalement.

Kimball A.T. [9] a suggéré que le frottement interne ou l'action visqueuse due à la flexion puisse faire tourner un rotor à n'importe quelle vitesse au-dessus de la première vitesse critique. Il a postulé que la rotation asynchrone observée par Newkirk était due à ce phénomène.

Newkirk B.L. [10] basé sur la théorie de M. Kimball, a conclu que les forces de friction semblables sont produites au niveau d'accouplement sur le disque et l'axe du rotor. Cependant, il ne pouvait pas expliquer certains de ses résultats expérimentaux, en particulier, les effets de la flexibilité de roulement ou de fondation, l'amortissement et le désalignement.

Stodola A. [11] a élaboré un procédé itératif pour calculer les fréquences fondamentales d'un système vibrant basé sur une forme évidente des modes propres, par la suite il a fourni des formules pour l'effet gyroscopique sur la vitesse critique d'un rotor, Il a également présenté la notion de la précession inverse synchrone et asynchrone d'un rotor dans des conditions spécifiques.

Smith D.M. [12] a étudié le cas d'un rotor asymétrique sur des appuis et a obtenu quatre valeurs différentes de vitesse critique par rapport à la valeur simple pour un système symétrique. Il a également discuté de la présence des vitesses critiques additionnelles dues aux effets gyroscopiques des grands disques. Myklestad N. [13] a proposé la méthode de matrice de transfert pour calculer les fréquences normales pour les ailes d'avion.

Prohl M. [14] a développé les paramètres de la méthode matrice transfert pour calculer les vitesses critiques des rotors flexibles. Poritsky H. [15] a utilisé la théorie des petits déplacements. Il a dérivé un coefficient radial de rigidité pour les coussinets et a analysé le comportement du rotor. Il a conclu que l'augmentation de la flexibilité des paliers du rotor est proportionnelle à la diminution du seuil de la vitesse critique pour l'instabilité. Il a également proposé un critère de stabilité pour un rotor sur des supports rigide.

Miller D.E. [16] a présenté pour un rotor une solution de régime permanent de problème des vibrations forcés, il a inclue l'amortissement et la flexibilité des paliers. Les réponses dues aux balourds et les fréquences de résonance sont calculées à travers cette étude.

Pinkus O. [17] a étudié le mouvement de rotation de film d'huile dans divers types de coussinet et a fait les conclusions principales suivantes : Le balourd du rotor a effet minimal sur la stabilité. Le seuil de l'instabilité se produit approximativement deux fois à la première vitesse critique du rotor. Dans la région instable, la fréquence de rotation est restée constante à la première vitesse critique indépendamment de la vitesse tournante du rotor aux vitesses presque égales à trois fois la première vitesse critique. Les Charges élevées, les grandes viscosités, les supports flexibles et les paliers asymétriques favorisent l'instabilité. Lomakin A. [18] a étudié l'influence des caractéristiques dynamiques des joints sur les vitesses critiques. Il a présenté la stabilité des rotors de pompe. Gunter [19] a combiné les différentes théories développées par les dynamistes des rotors et les spécialistes en roulement. Il a expliqué une partie de l'évidence expérimentale. Il a souligné l'importance de considérer les effets combinés des paramètres de rotor et les caractéristiques de roulement sur la stabilité de rotor.

Ruhl R. [20] a présenté des modèles basés sur les éléments finis des rotors flexibles pour calculer les vitesses critiques et les modes propres du rotor. Ces modèles n'ont pas tenues compte des effets gyroscopiques et des charges axiales. Nelson H. et McVaugh J. [21] ont prolongé le modèle d'éléments finis d'un rotor en tenant compte de l'inertie rotatoire, l'effet gyroscopique et les charges axiales.

Dans les années 70-80, les travaux de recherche appliqués aux machines tournantes ont pour objectif principal de comprendre les phénomènes vibratoires qui peuvent conduire à l'instabilité du système, il n'y a alors pour solution que de diminuer au mieux les défauts d'axisymétrie (à l'origine des balourds lors de la fabrication), ou alors d'adjoindre des dispositifs visant à limiter les vibrations (Willem [22]; Adams [23]). Les vitesses de rotation qui font intervenir les modes flexibles de l'arbre tournant sont alors évitées.

Les améliorations de l'évolution des nouvelles technologies de conception et de fabrication des machines tournantes engendrent des problèmes vibratoires et/ou d'instabilité qui sont susceptibles de se manifester lors du fonctionnement de ces machines. Un rotor est une structure souple qui peut être soumise à plusieurs types de perturbations : l'effet des balourds lors d'une montée et descente en vitesse, les sollicitations extérieures,...

La maîtrise du comportement dynamique des rotors permet de franchir les vitesses de rotation correspondant aux modes flexibles du rotor (Allaire [24]; Stanway et Burrows [25]; Firoozian et Stanway [26]). Parallèlement, des travaux qui visent à améliorer la modélisation des phénomènes régissant les mouvements du rotor sont menés (Imam et al. [27]; Berthier et al. [28]).

Un des modèles souvent employé est le modèle de Jeffcott. Dans Ishida [29], ce modèle est utilisé pour étudier les oscillations non stationnaires d'un rotor lorsque celui-ci accélère en passant une vitesse critique.

Ecker [30] développe une méthode pour supprimer les vibrations d'un rotor sans balourd, simplement excité par son amortissement interne et les forces agissant entre le rotor et le stator.

La limitation du modèle de Jeffcott réside dans le fait que celui-ci ne prend pas en compte les effets gyroscopiques, par conséquent les fréquences de résonance de ce modèle de rotor sont indépendantes de sa vitesse de rotation. La méthode de Rayleigh-Ritz est aussi souvent utilisée, car elle permet d'obtenir un modèle simple de rotor à deux degrés de liberté (Lalanne [31]), mais elle est peu précise dès qu'il s'agit d'étudier des systèmes réels.



Zorzi et Nelson [32] ont développé un modèle d'éléments finis pour la détermination du comportement dynamique d'un rotor. Ils ont employés un modèle d'éléments finis de poutre de Rayleigh comprenant les effets de l'inertie de translation et de rotation, les moments gyroscopiques, en incluent l'amortissement interne et la charge axiale.

Nelson [33] a utilisé la théorie de poutre de Timoshenko pour établir la fonction de forme. Il a dérivé les matrices du système comprenant les effets de l'inertie dues à la rotation, les moments gyroscopiques, la charge axiale et déformation de cisaillement.

Iwatsubo et al. [34] ont étudié le problème de dynamique de rotor en incluant une rigidité constante, la méthode de matrice de transfert a été utilisée pour trouver la solution dans les deux cas d'analyses de vibration libre et forcé. Etaient fait la résolution de système linéaire et obtenir et les fréquences normales du système.

Özgüven et Özkan [35] ont prolongé le modèle de dynamique de rotor de Zorzi et de Nelson [33] pour inclure les effets combinés de la déformation de cisaillement et l'amortissement interne. Dans leur modèle, ils ont considéré les effets de l'inertie de rotation, moments gyroscopiques, charge axiale, amortissement interne visqueuse et déformations transversales dues ou cisaillement.

Durant ces dernières années, le modèle le plus utilisé est développé à partir de la méthode des éléments finis (Nelson [33], Tran [36]). Grâce à cette méthode, il est possible de déterminer avec précision les fréquences propres et les facteurs d'amortissement ainsi que la réponse à diverses excitations. De plus, cette méthode est modulaire, car chaque élément du rotor est défini séparément. Des éléments peuvent donc être ajoutés ou retirés selon les phénomènes qui veulent être mis en évidence. La méthode des éléments finis a ainsi été utilisée pour étudier les phénomènes d'amortissement en dynamique des rotors embarquées (Duchemin [37]) et pour l'étude de l'influence d'un couple axial sur le comportement des rotors (Dufour [38]).

Cette méthode a également été appliquée à l'étude des rotors dont l'arbre tourne à vitesse variable (Al Majid [39]). Des nombreux résultats concernant la dynamique des rotors dont le support est fixe pour les modèles de Rayleigh-Ritz et éléments finis qui sont présentés par Lalanne [31].

Plusieurs méthodes théoriques, des complexités variables, ont permis de comprendre et de prédire le comportement dynamique des rotors.

Les formules algébriques sont établies pour déterminer les modes de translation des systèmes rotor-palier simples, les effets gyroscopiques sont pris en compte dans la formulation [40].

Les simulations basées sur la méthode des matrices de transfert sont développées et très utilisées. Une description intéressante et complète est fournie par les ouvrages de R. BIGRET [41]. Cependant, à cause des problèmes de stabilité numérique, des améliorations récentes y ont été apportées [42],[43],[44].

S.S. STECCO et AL. [45] ont assuré le couplage du rotor avec son stator par les éléments de liaison. Mais cette méthode n'est applicable que pour des milieux unidimensionnels. Les études basées sur la méthode des éléments finis sont aujourd'hui largement utilisées. Beaucoup des codes de calcul sont ainsi développés et commercialisés ( NASTRAN, ANSYS, SAMCEF, CASTOR...]. Mais certains d'entre eux ne prennent pas en compte les propriétés liées à la

dynamique des rotors. Ainsi des modules leur ont été adjoints et des codes spécifiques ont été développés [46].

Les sujets se rapportant à la dynamique des rotors sont variés :

Outre les prédictions des zones d'instabilité (vitesses critiques, réponse au balourd ... [47], [48]), l'influence de nombreux paramètres nécessite d'être évaluée.

L'étude des paliers connaît également un développement important, ainsi les paliers du type "squeeze-film" sont très employés dans l'industrie des rotors rapides car ils réduisent non seulement les amplitudes de vibration du rotor au passage des vitesses critiques, mais aussi ils restreignent aussi les réponses non-synchrones du système rotor-palier [49].

Malgré un comportement non linéaire d'un squeeze-film, la linéarisation de la force du film d'huile auteur d'une position d'équilibre pour une vibration harmonique principale conduit à la somme d'une force de raideur et d'amortissement linéarisés [50].

Des recherches expérimentales et théoriques sur les coefficients de raideurs et d'amortissements ont été réalisées et démontrent l'influence de ces coefficients sur le comportement des rotors [51].

Les vibrations relatives et absolues d'un rotor relèvent des hypothèses communément faites sur la rigidité quasi-infinie des supports de paliers et ne constituent qu'une approximation. Des méthodes plus ou moins sophistiquées prennent en compte le couplage dynamique fondation- stator et rotor.

S.S STECCO et AL.[45], L.L.EARLES [52] réalisent le couplage par l'intermédiaire des paliers, les premiers utilisent la méthode de matrice de transfert, car le stator possède une géométrie simple de poutre, les seconds utilisent la méthode des éléments finis pour prendre en effet la souplesse de fondation. S. H.CRANDALL et AL.[53], A. BERLIOZ et AL. [54], ZHEN-ZHAO-CHANG et AL. [55] utilisent une technique de sous structuration pour la prise en compte de l'environnement du rotor, la méthode est celle des modes contraints (une sous structure est décrite par ces modes contraints et par ces modes normaux.

Une direction de recherche privilégiée est le comportement des rotors dont le support est soumis à un séisme. Différents modèles de rotor sont utilisés lors de l'étude d'une réponse à un séisme. Ils sont plus ou moins précis selon que le rotor et/ou les paliers sont rigides ou non, et selon la prise en compte des rotations du support. Samali [56] étudie les vibrations aléatoires d'un rotor soumis à un séisme, son modèle prend en compte les 6 composants de mouvement possibles pour le support (3 translations et 3 rotations), mais considère le rotor comme un arbre rigide posé sur des paliers flexibles. Suarez [57] et Singh [58] prennent en compte la flexibilité de l'arbre pour développer les équations du mouvement à l'aide de la méthode des éléments finis pour un rotor dont le support est soumis à 6 composants de mouvement. Néanmoins, ils ne prennent pas en compte certains termes paramétriques et autres pouvant causer des complications analytiques afin de pouvoir réaliser une analyse modale et une réponse par une méthode spectrale. Dans Subbiah [59], les équations sont résolues à partir d'une densité spectrale de puissance.

Une méthode spectrale est également utilisée par Beley [60] sur un système rotor-paliers-fondation prenant en compte la flexibilité du support. Dans les équations développées certains termes sont manquants et les modèles développés ne prennent pas en compte les possibles asymétries de l'arbre et du disque.

Les analyses transitoires sont effectuées dans le domaine linéaire par la méthode de superposition modale ou bien par la technique de RUNGE-KUTTA en présence de non linéarité sur les réponses dynamiques des rotors [61], [62]. Des approches numériques axisymétriques et traditionnelles complètent les simulations numériques [63]. L'influence de la souplesse des disques y est évaluée ; seuls les modes possédant un diamètre nodal ont une influence prépondérante sur les modes du rotor [64].

Les études expérimentales touchant de près la dynamique des rotors sont concentrées sur des points inaccessibles par voie théorique, ce sont par exemple les caractéristiques des paliers, les amortissements et les raideurs réels les coefficients des labyrinthes d'étanchéité, la souplesse des fondations.... Trop peu de publications font état des écarts entre les calculs et les expériences sur les vitesses critiques.

J. M. Vance et al. [65] comparent les résultats numériques et expérimentaux des modes "libre-libre" et évaluent la précision du modèle en fonction du couplage du rotor et des disques. L'influence de la souplesse des disques est surtout importante pour les analyses "libre-libre".

Les études expérimentales sur la dynamique des rotors se sont surtout concentrées sur la détermination des raideurs et amortissements des paliers hydrodynamiques.

R. Nordman et al. [66] ont extrait des mesures de réponses à une excitation par impact des coefficients de raideurs et d'amortissements des paliers hydrodynamiques.

Q. Zhang et al. [67] reprennent cette idée mais utilisent une excitation synchrone due à la présence de balourds connus et distribués sur le rotor.

## I.1- la dynamique des rotors

On aborde maintenant quelques aspects importants concernant la dynamique des rotors. On verra plus particulièrement les notions de vitesses critiques, d'instabilités liées à l'amortissement tournant et le rôle que peuvent jouer les dissymétries sur la dynamique des rotors.

### I.1-1 Les divers types d'excitations

Les rotors sont soumis à diverses sollicitations extérieures, outre le poids propre, on trouve les efforts de balourd, qui sont propres aux machines tournantes. Ceux-ci correspondent aux forces d'inertie générées par le mouvement rotatif des masses excentrées et non équilibrées du rotor. Lorsqu'une pièce d'un rotor possède des axes principaux d'inertie transversale non orthogonaux à l'axe de rotation, un couple est aussi produit. On le qualifie de balourd dynamique, par opposition à balourd statique usuellement employé pour désigner la force. Pour une vitesse de rotation constante, l'expression de ces efforts dans un repère fixe est de la forme

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ M_x \\ M_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m.e.\Omega^2.\cos(\Omega t - \alpha) \\ m.e.\Omega^2.\sin(\Omega t - \alpha) \\ (I_d - I_p).\tau.\Omega^2.\cos(\Omega t - \beta) \\ (I_d - I_p).\tau.\Omega^2.\sin(\Omega t - \beta) \end{pmatrix}$$

ou  $m$ ,  $I_d$ , et  $I_p$  sont respectivement la masse, l'inertie diamétrale et l'inertie polaire,  $e$  l'excentricité du centre de gravité,  $\tau$  l'angle d'inclinaison de l'axe d'inertie (supposé faible),  $\alpha$  et  $\beta$  leur phase. Si la vitesse de rotation n'est pas constante, des termes de couplage en  $\dot{\Omega}$  Viennent s'ajouter.

L'origine des efforts de balourd est variée. Il peut être soit des problèmes d'usinage, de montage, voir les gradients thermiques qui peuvent induire un fléchissement de l'arbre. Puisqu'ils constituent la source majeure d'excitation, il faut tenter de les minimiser.

Pour cela, l'usinage des pièces tournantes des organes est toujours suivi d'une rectification pour respecter des tolérances sévères. Ensuite, durant la phase de montage, un très grand soin est apporté; on effectue de plus un équilibrage. Cette opération consiste à apporter des ajouts de masses ponctuels pour compenser les balourds résiduels, et permet de se retrouver avec un balourd final admissible.

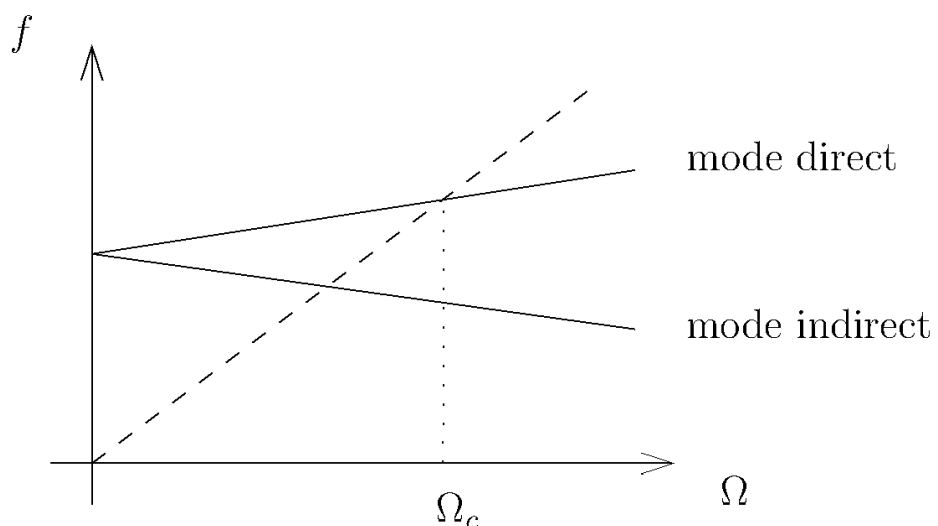
Les réponses dynamiques pour ces balourds exceptionnels se distinguent de celles observées en condition normale de fonctionnement (induit par un faible balourd). En effet, les mécanismes qui rentrent en compte sont nombreux et très complexes : mouvement de grandes amplitudes et déformations importantes, problèmes de contacts et frottement avec le stator plastification des certaines pièces et propagation des fissures, desserremments de boulons et ouvertures de brides, décélération rapide des rotors,...[68]

### I.1-2 Notions de vitesse critique

Parmi les phénomènes classiquement observés en dynamique des rotors, on a la notion de vitesse critique. Selon Nelson [69], l'une des premières citations concernant la notion de vitesse critique remonte à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle lors d'essais expérimentaux réalisés par Dunkerley. Il définit alors la vitesse critique comme la vitesse à la résonance d'une structure élastique non tournante où les vibrations de la machine atteignent des niveaux élevés. Aujourd'hui le concept de vitesse critique a évolué et se rattache d'un point de vue théorique à la notion de valeurs propres du système tournant, la vitesse critique correspond à la vitesse où l'excitation par balourd coïncide avec une des fréquences propres du système.

Il est connu que les modes propres d'un système conservatif en rotation sont des modes complexes deux à deux conjugués à pulsations propres purement imaginaires. Cela est dû aux effets gyroscopiques induits par la rotation, qui couplent les déplacements horizontaux et verticaux [70]. Ils peuvent cependant être associés pour obtenir des modes réels qualifiés soit de direct, soit de rétrograde, suivant que le mouvement de précession qui leur est associé est dans un sens identique ou contraire au mouvement de rotation.

Le point essentiel est la dépendance de leur fréquence propre en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$ . Le graphique représentant l'évolution de celles-ci en fonction de  $\Omega$  s'appelle le diagramme de Campbell [31]. On peut démontrer que la partie de l'énergie cinétique relative aux termes gyroscopiques est positive (négative) pour les modes directs (rétrogrades), si bien que les effets gyroscopiques tendent à rigidifier (assouplir) la structure [71]. Ainsi, les courbes croissantes (décroissantes) du diagramme de Campbell (Figure 1.1) sont relatives au mode direct (rétrogrades).



**Figure I.1** Diagramme de Campbell

L'excitation majeure dans un système en rotation étant les forces synchrones de balourd, il est possible de détecter les phénomènes de résonance en reportant la droite d'équation  $f = \Omega$ , appelée droite d'excitation synchrone, sur le diagramme de Campbell, les points d'intersection avec les courbes des fréquences propres directes fournissent les vitesses auxquelles les résonances ont lieu, ces vitesses portent le nom de vitesses critiques. Les points d'intersection avec les fréquences propres rétrogrades n'ont pas d'intérêt à première vue puisqu'elles ne peuvent être excitées par un balourd (au même titre qu'une poutre sollicitée uniquement horizontalement ne peut vibrer verticalement), à moins qu'il n'existe des couplages ou des interactions.

Il faut préciser que dans le cas d'un système bi-rotor (ou plus, certains organes possédant un rotor moyenne pression), il convient de reporter sur le diagramme les droites synchrones correspondant aux deux rotors,  $f = \Omega_{BP}$  et  $f = \Omega_{HP}$ , car le balourd présent sur un rotor peut exciter aussi l'autre rotor. Le nombre de vitesses critiques se trouve ainsi doublé (on distingue les vitesses critiques produites par le rotor basse pression et celles produites par le rotor haute pression). De plus, on reporte parfois aussi les droites d'équation  $f = n.\Omega$  ou  $f = \Omega/n$  pour repérer les vitesses auxquelles des pics super ou sous-harmoniques causées par des non-linéarités peuvent éventuellement survenir. La détermination des vitesses critiques demande donc le tracé du diagramme de Campbell c'est-à-dire un calcul des modes propres à chaque vitesse de rotation (méthode de balayage en fréquence), le temps de calcul est donc important. Pour traiter efficacement les systèmes de taille importante, G. GENTA a proposé une technique itérative basée sur la décomposition en parties proportionnelle et non proportionnelle des matrices d'amortissement et gyroscopique pour le calcul de valeurs propres [72].

Dans le cas particulier de systèmes non amortis et sans couplage directionnel, il est possible de calculer directement les vitesses critiques (c'est-à-dire sans passer par l'extraction des fréquences propres pour diverses valeurs de la vitesse de rotation). Il suffit d'injecter la relation  $\omega = \pm\lambda.\Omega$ .

Dans l'équation homogène du mouvement, le signe étant positif (négatif) pour les vitesses critiques directes (rétrogrades). La résolution du problème aux valeurs propres alors obtenu fournit d'emblée les vitesses critiques. Le coefficient  $\lambda$  est introduit pour la conversion des unités ainsi que pour gérer les excitations induites par les balourds d'autres rotors ou rechercher les éventuels pics de réponses juste ou sous-harmoniques.

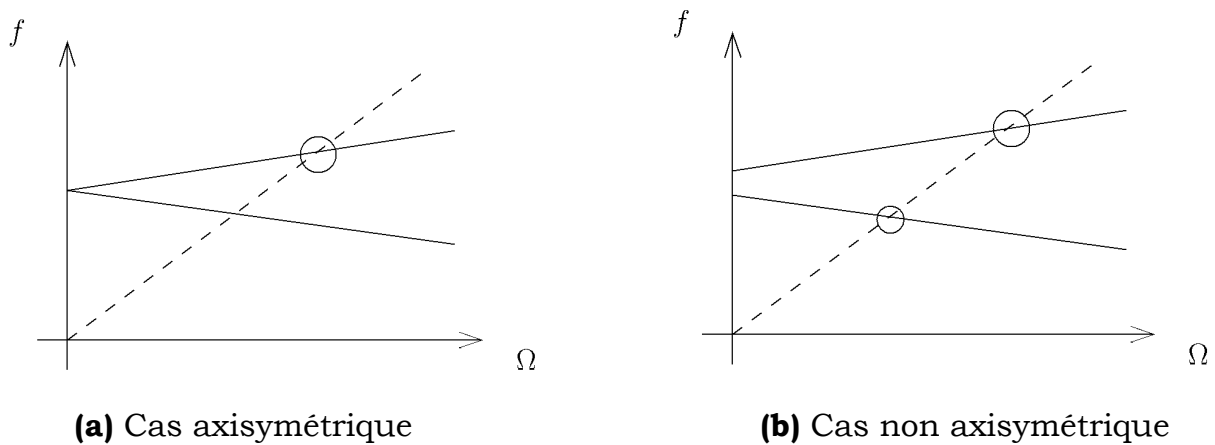
### I.1-3 L'influence des dissymétries

Si les rotors sont souvent axisymétriques, axisymétrie en comportement (rotors en matériaux composites par exemple), il n'en est pas de même pour les stators : la présence d'éléments juxtaposés aux carters, la fixation avec l'aile, . . . créent des dissymétries à la fois de masse et surtout de raideur.

L'influence des dissymétries en raideur des paliers sur la dynamique du rotor est importante. Tout d'abord, on note que si les raideurs transversales dans deux directions principales sont différentes, la réponse synchrone du rotor à un balourd est un mouvement de précession elliptique au lieu de circulaire. De plus, à l'arrêt, les modes propres dans les plans vertical et horizontal ont

naturellement des fréquences propres distinctes. Les modes classiquement associés par paires dans le contexte axisymétrique (car identiques à vitesse de rotation nulle), avec un mode direct et un mode rétrograde, sont dès lors différents l'un de l'autre. On montre d'ailleurs que pour chacun des deux, une vitesse critique existe [31].

Lors d'une réponse à balourd, on observe donc non pas un pic de résonance mais deux (on parle de phénomène de dédoublement de résonance, Split résonances dans la littérature anglo-saxonne) : le mode rétrograde est excité (Figure 1.2).



**Figure I.2** Influence des dissymétries sur le diagramme de Campbell

Ce phénomène est classique et peut être inhibé lorsque l'amortissement est suffisant. De nombreuses études numériques et expérimentales ont permis de mettre en évidence un point moins connu mais pourtant bien réel qui est l'existence simultanée de la précession directe et de la précession rétrograde.

C. Rao et al. ainsi que A. Muszynska ont mené avec succès des expériences durant lesquelles ce cas de figure s'est manifesté [73,74].

C. Rao et al. ont étudié un rotor de type Jeffcott supporté par des paliers hydrodynamiques soumis à l'influence de la gravité, avec différentes valeurs de jeu radial pour les paliers. Ils ont constaté, pour un jeu dans un certain intervalle, un dédoublement du pic de résonance, avec le rotor qui orbite dans un sens au niveau du disque et dans l'autre partout ailleurs sur l'arbre. Il s'avère que le mouvement de précession rétrograde est effectivement initié au niveau du disque, et qu'avec l'augmentation de la vitesse de rotation, il s'étend progressivement le long de l'arbre puis diminue de nouveau avant de disparaître totalement.

De son côté, A. Muszynska s'est intéressé à l'étude d'un rotor vertical monté sur roulement à billes et possédant un battement total. L'anisotropie des paliers est assurée par des ressorts de raideurs différentes pour le maintien des bagues extérieures de roulement.

Le rotor possède un disque en extrémité qui génère des effets gyroscopiques. Les essais ont révélé l'existence de vitesses de rotation pour lesquelles l'extrémité de l'arbre accouplée avec le moteur d'entraînement orbite dans le sens direct et le disque à l'autre extrémité orbite dans le sens rétrograde.

La dérivation d'un modèle simplifié lui permet d'analyser les contraintes dans l'arbre, révélant ainsi la décomposition de celles-ci en une composante constante et une composante harmonique d'ordre 2 (*i.e.* dont la dépendance en temps est en  $2t$ , étant la vitesse de rotation de l'arbre). Une analyse paramétrique à partir de ce modèle recalé confirme les rôles du balourd et de l'amortissement dans l'apparition de ce phénomène.

Comme c'est précisé au départ, la dissymétrie des rotors est beaucoup plus rare, mais elle peut exister. Il s'agit principalement de dissymétries d'inertie (anisotropie des inerties diamétrales) ou de dissymétries de raideur (pour les rotors en matériaux composites par exemple). En raison de la rotation propre, les équations décrivant la dynamique du système comportent alors des termes en fonction du temps, qui peuvent dans certaines circonstances générer des instabilités. Le mouvement d'un tel rotor même parfaitement équilibré, peut donc diverger, il a été démontré que les zones d'instabilité se trouvent entre les vitesses critiques dédoublées [75] et qu'elles peuvent disparaître en présence de non-linéarités [76].

Il faut préciser que les dissymétries dans les rotors peuvent apparaître au cours du temps avec la fatigue. La présence de fissures transversales dans l'arbre entraîne une modification locale de raideur qui rend les caractéristiques élastiques anisotropes.

#### **I.1-4 L'effet de l'amortissement**

Si l'amortissement a toujours un rôle bénéfique sur la dynamique des systèmes non tournants, il n'en est pas de même pour les systèmes tournants. C'est pour ça que Les ingénieurs ont depuis longtemps été conscients des effets déstabilisants induits par l'amortissement interne sur les rotors : il s'avère en effet que pour des systèmes axisymétriques le mouvement peut devenir instable à partir d'un certain seuil de vitesse de rotation, ce seuil dépend du ratio entre l'amortissement qualifié d'externe (c'est-à-dire celui introduit par les paliers, le couplage avec le fluide environnant, et l'amortissement interne, mais il est toujours supérieur à la première vitesse critique).

L'instabilité est liée à la rotation propre du rotor et n'est en rien attribuable à d'éventuelles non-linéarités. Lorsque l'on exprime les forces d'amortissement internes des parties tournantes dans un repère fixe, on remarque que celles-ci se décomposent en deux termes : un terme proportionnel à la vitesse, ce sont les forces d'amortissement au sens classique, et un terme proportionnel au déplacement les forces dites circulatoires.

Ces dernières sont à l'origine des phénomènes d'instabilité, car elles s'opposent aux forces d'amortissement externe [77].

### **Conclusion**

Ce chapitre est constitué des rappels et de définitions de notions liées aux rotors, dans le but de donner une vision assez large sur les travaux effectués dans le cadre des rotors et les différents phénomènes qui influent sur la dynamique des rotors et leurs caractéristiques. On a montré comment de nombreuses instabilités peuvent survenir à cause de la rotation.



## Chapitre II

### Aérodynamique de l'hélicoptère

#### II.1. Généralités

Ce chapitre traite des notions de base en aérodynamique de l'hélicoptère, ce qui permet la modélisation des hélicoptères, pratiquement. Le vol des hélicoptères peut se produire avec des modes différents de vol, dans une, deux ou trois directions et avec des conditions très différentes dans chaque mode. Pourtant, dans la littérature concernant l'aérodynamique des hélicoptères [85] [86], les cas analysés les plus importants sont ceux du vol vertical, du vol stationnaire et du vol en palier.

On remarque que dans la plupart des travaux analysés [87], les auteurs considèrent leurs études dans des conditions de vol stationnaire où près de ces conditions particulières. D'autre part, la dynamique des pales est souvent négligée.

Dans ce chapitre on tient de compte de la dynamique des pales.

L'élément essentiel d'un hélicoptère est le rotor, lui-même constitué d'un ensemble de deux pales autour d'un axe sensiblement vertical, dans un plan perpendiculaire à cet axe.

##### II.1.1. La pale et le rotor

L'élément essentiel d'un hélicoptère est le rotor, car il assure à la fois la sustentation et la translation de l'hélicoptère. Le rotor est lui-même constitué d'un ensemble de deux ou de plusieurs pales.

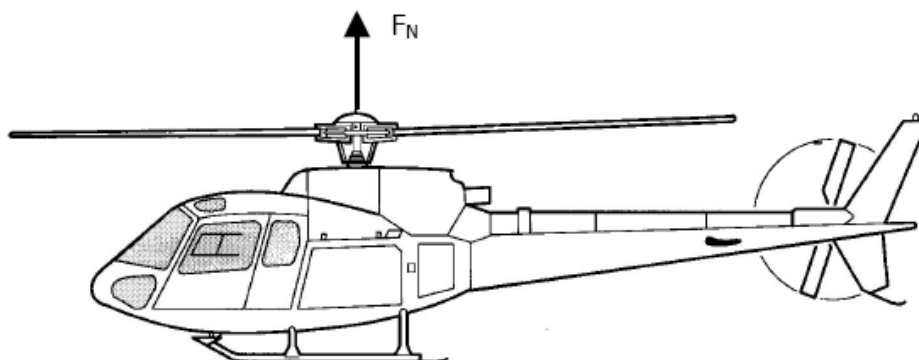
##### II.1.2. Les modes de vol d'un hélicoptère

L'hélicoptère est un aéronef qui peut, en principe, exécuter trois sortes de vols:

- un vol vertical (ascendant ou descendant),
- un vol stationnaire,
- un vol de translation.

##### II.1.3. Effort de traction sur l'hélicoptère

Pour pouvoir piloter l'appareil, il est nécessaire que la poussée  $\vec{F}_N$  (figure II.1) délivrée par le rotor soit variable en module et en direction



**Figure II.1** Effort de traction la poussée  $\vec{F}_N$

Les trois mobilités de la pale sont (figure II.2) :

Le battement  $\beta$ , levé de la pale perpendiculairement au plan rotor ;

La traînée  $\delta_T$ , mouvement de pale dans le plan rotor ;

Le pas  $\theta_p$ , rotation de la pale suivant son envergure.

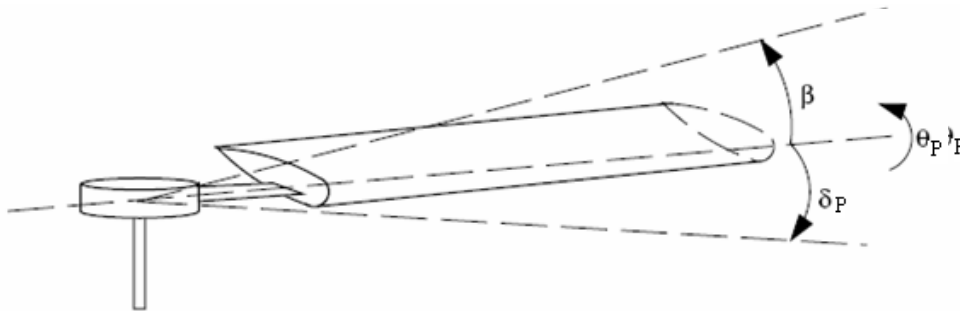


Figure II.2 Mobilités de la pale

## II.2. Efforts Transmis

Considérons d'abord l'ensemble des efforts qui agissent sur une pale et leur transmission.

### II.2.1 Calcul de la Matrice d'Inertie

L'étude des efforts s'appliquant sur le rotor nécessite une parfaite connaissance de l'inertie des pales. Cependant le profilé des différents profils NACA est très complexe et le calcul manuel de l'inertie est difficilement réalisable.

L'idée première fut de déterminer l'inertie de la pale par une modélisation par ANSYS.

Cette modélisation a été effectuée à partir de données fournies par le profil NACA 23012, un profil de la série à 5 chiffres, il est muni de 26 points : numérotées de 1 à 12 coté extrados et de 13 à 26 coté intrados.

L'aile a pour envergure  $b=6\text{m}$ , et pour corde  $c=0.4\text{m}$ .

A partir d'un nombre de points (26 points), nous avons pu définir le contour de la pale à partir de la fonction *spline* du logiciel ANSYS.

### Caractéristiques du matériau

Le matériau utilisé pour la pale est un composite verre époxy qui a pour caractéristiques :

$$E=73 \text{ GPa}$$

$$\rho=2540 \text{ kg/m}^3$$

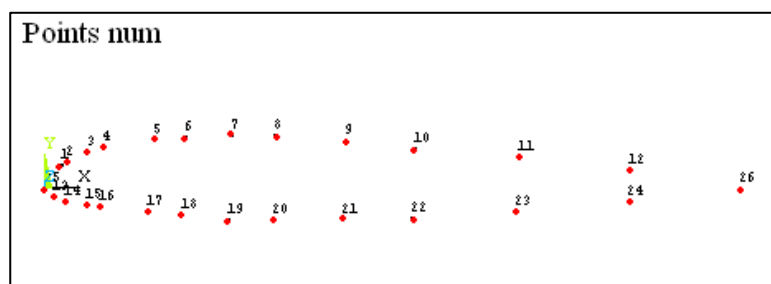
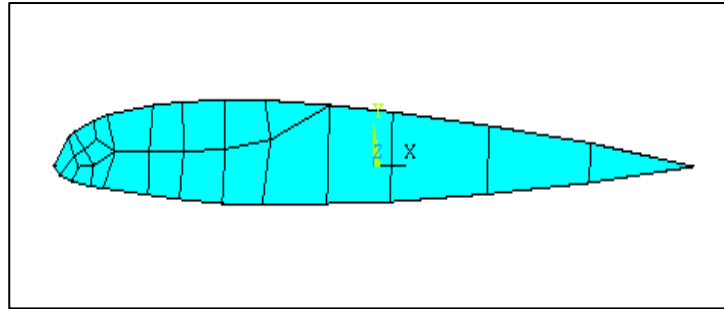


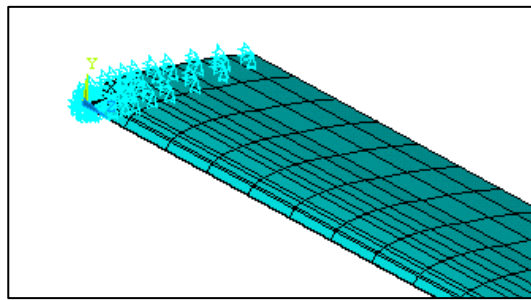
Figure II.3 Points du profil NACA 23012



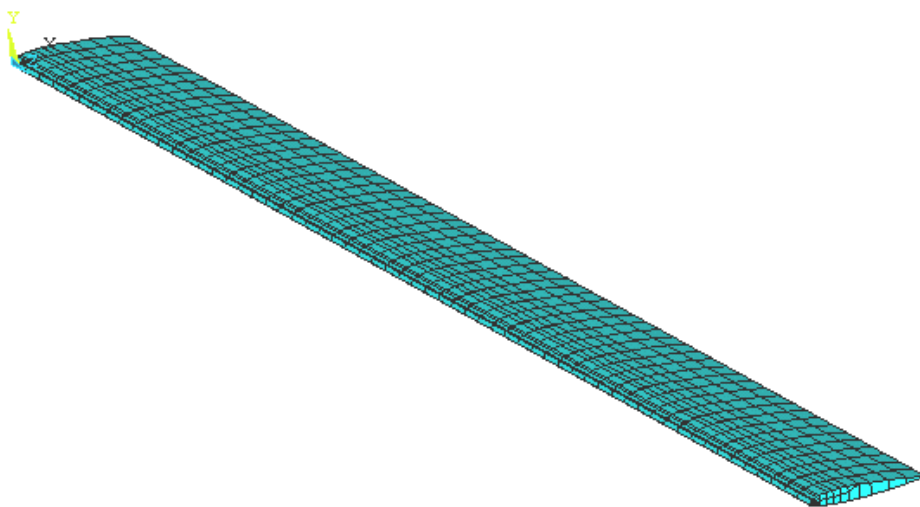
**Figure II.4** Géométrie de la section de la pale

### II.2.1.a Conditions aux limites :

La pale est encastrée dans l'extrémité gauche : donc pour cette extrémité on annule tous les degrés de liberté.



**Figure II.5** Conditions aux limites



**Figure II.6** Pale modèle éléments finis : 2196 noeuds, 1403 éléments.

Le logiciel nous donne le centre de gravité et les moments d'inertie principales et par rapport à l'origine du repère de cette pale.

$$\text{Volume total} = 0.078115 \text{ m}^3$$

$$\text{Masse total} = 198.41 \text{ kg}$$

Centre de masse:

$$\begin{cases} X_C = 0.016905 \text{ m} \\ Y_C = 0.0050147 \text{ m} \\ Z_C = 3 \text{ m} \end{cases} \quad (2.1)$$

Moments d'inertie :

Moments d'inerties principales :

$$I_{XX} = 595.26 \text{ kg.m}^2$$

$$I_{YY} = 596.97 \text{ kg.m}^2$$

$$I_{ZZ} = 1.7631 \text{ kg.m}^2$$

Par rapport à l'origine:

$$I_{XX} = 2381.0 \text{ kg.m}^2$$

$$I_{YY} = 2388.4 \text{ kg.m}^2$$

$$I_{ZZ} = 7.4383 \text{ kg.m}^2$$

$$I_{XY} = -0.13617 \text{ kg.m}^2$$

$$I_{YZ} = -2.9849 \text{ kg.m}^2$$

$$I_{ZX} = -100.62 \text{ kg.m}^2$$

## II.2. 2 Détermination des efforts

### II.2. 2 a) Position du problème

Le bilan des forces extérieures est le suivant, en supposant un chargement uniforme de la pale :

- Poids de l'hélicoptère
- Portance
- Forces d'inertie dues au calage variable de la pale.
- $F_c$ , force centrifuge.
- Traînée

### II.2. 2 b) Présentation des efforts aérodynamiques

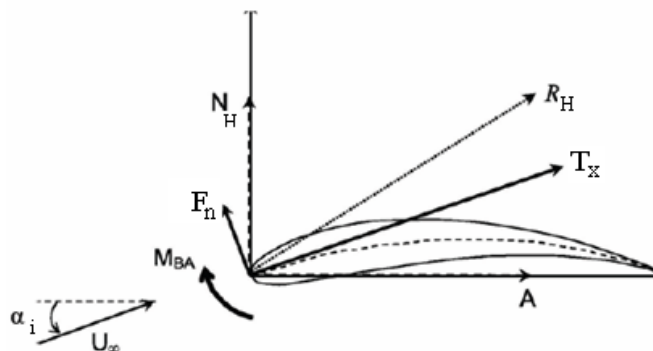


Figure II.7 Présentation des efforts aérodynamiques.

### II.2. 3 Calcul des efforts aérodynamiques (Traînée et Portance)

$$\vec{F}_N = 2\rho S \vec{V}_i \left| \vec{V}_0 + \vec{V}_i \right| \quad (2.2)$$

$$\text{A.N : } m=198.41 \text{ kg, } g=9,81\text{m.s}^{-2}, \rho=1.226 \text{ kg.m}^3, S=132.6 \text{ m}^2$$

$$V = 3.89 \text{ m/s}$$

$$V_i = 2.79 \text{ m/s}$$

$$F_N = 2\rho S V_i (V + V_i) \quad (2.3)$$

Et d'après la formule (2.3), on a :

$$F_N = 6059.6 \text{ N}$$

#### II.2.3.1 Performances en vol stationnaire

Le coefficient moyen de portance  $C_{zm}$  le long d'une pale est donné par le calcul suivant :

$$\frac{F_n}{b} = \frac{1}{2} C_{zm} \rho \int_0^R \omega^2 \times r^2 \times l \cdot dr = \frac{1}{2} C_{zm} \rho \times l \times \omega^2 \times R^2 \int_0^1 \varphi^2 d\varphi \quad (2.4)$$

Avec :

$F_n$  : Poussée du rotor

b : nombre de pales

l : corde de la pale l=0.4m

$U = \omega R$  : Vitesse périphérique de la pale

$\omega = 26.16 \text{ rd/s, N}=250 \text{ tr/min}$

R=6.5m

U=170m/s

En intégrant, on trouve pour  $C_{zm}$  la valeur  $\frac{6F_n}{\rho \times l \times R \times U^2 \times b}$ .

En pratique, compte tenu des pertes en extrémité de pale, il est plus exact de majorer cette dernière valeur et d'adopter :

$$C_{zm} = \frac{6,8F_n}{\rho \times l \times R \times U^2 \times b} \quad (2.5)$$

$$\text{A.N : } C_{zm} = 0.429$$

On peut évaluer le coefficient de traînée d'une pale avec la formule :

$$C_x = 0,036 + 0,0666 \cdot C_{zm}^2 \quad (2.6)$$

A.N :

$$C_x = 0.04826$$

Ainsi, la traînée d'une pale suivant l'axe Ox fournit, au cours de la variation d'azimut entre 0 et  $2\pi$ , une résultante  $T_x$  qui s'oppose au mouvement de translation, soit :

$$T_x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R dT$$

$$T_x = \frac{1}{4\pi} \cdot \rho \cdot C_x \cdot l \cdot R \cdot U^2 \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\cos \psi}{3} + \mu^2 \cdot \cos^3 \psi + \mu \cdot \cos^2 \psi \right] d\psi$$

$$\text{Soit : } T_x = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot C_x \cdot l \cdot R \cdot U^2 \mu \quad (2.7)$$

Avec :

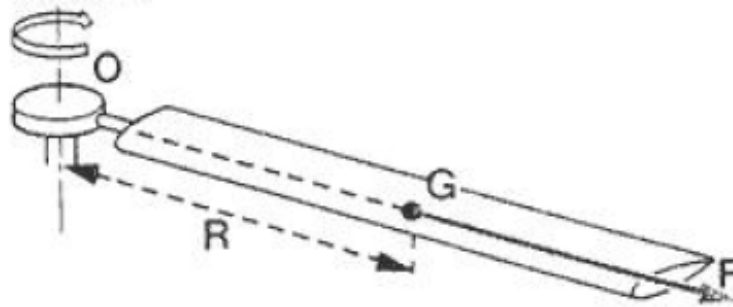
$$\mu = \frac{V}{U} = \frac{\text{vitesse de translation}}{\text{vitesse de rotation de l'extrémité de pale}}$$

$$\text{A.N : } T_x = 28,26 \text{ N}$$

## II.2.4 Détermination de la force centrifuge

La modélisation exacte se fait par intégration de la force centrifuge infinitésimale sur la longueur de la pale. La force centrifuge infinitésimale  $dF_c$  est  $dF_c = dm \times \omega^2 \times r$ . (2.8)

$$: \int_{\text{pale}} dm \times r = r_G \cdot m = 694.43 \text{ kg} \cdot m$$



**Figure II.8** Présentation de la force centrifuge

Avec  $\omega = 26.16 \text{ rd/s}$  on a alors :  $F_c = 475.23 \text{ kN}$

## II. 3. Modélisation de la pale par le code de calcul ANSYS

L'objectif de cette étude est de déterminer les fréquences propres et les modes propres, de la pale.

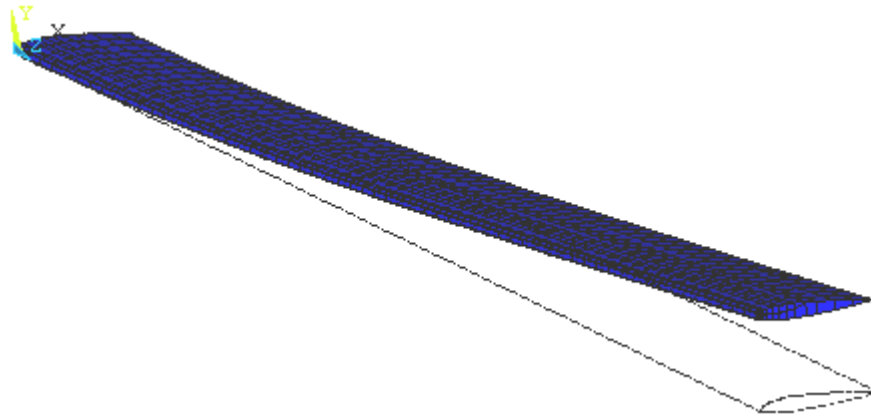
### II. 3.1 les fréquences naturelles de la pale

Les fréquences de la pale sont présentées dans le tableau ci-dessous:

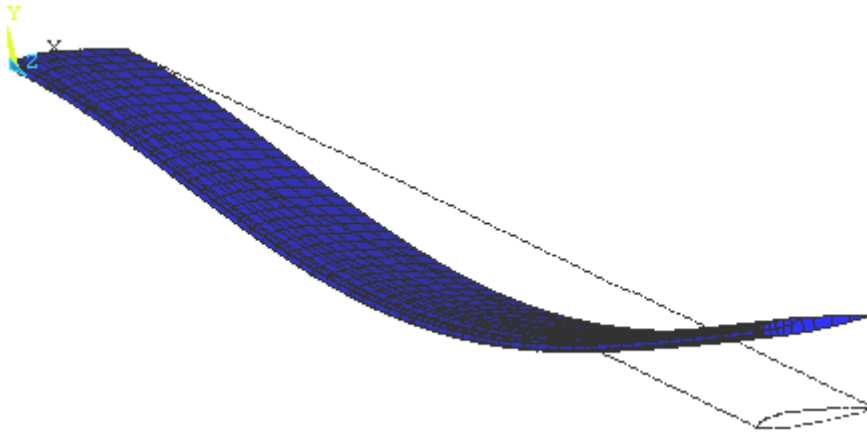
**Tableau II.1** les fréquences naturelles de la pale.

Numéro de mode	type de mode	Fréquence [Hz]
1	1 <sup>er</sup> Battement	1.00
2	2 <sup>eme</sup> Battement	6.28
3	1 <sup>er</sup> Traîné	7.81
4	3 <sup>eme</sup> Battement	17.58
5	1 <sup>er</sup> Torsion	34.17

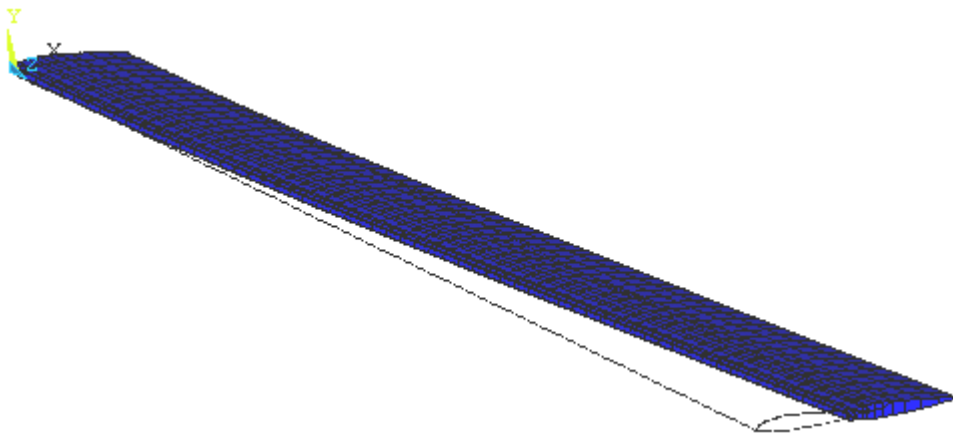
### II. 3.2 Les déformées modales



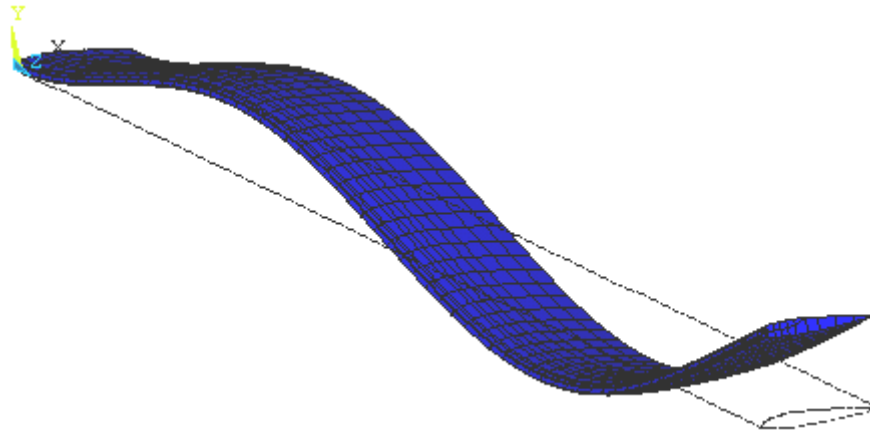
**Figure II.9** Mode de 1<sup>ère</sup> déformée: 1<sup>ère</sup> mode de battement  
 $f=1.00$  Hz,  $D_{max}=0.1421$ m



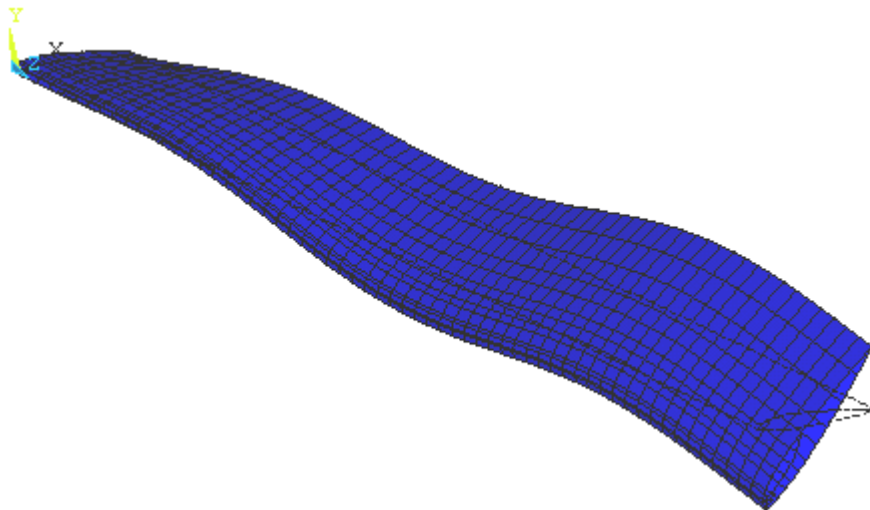
**Figure II. 10** Mode de 2<sup>ème</sup> déformée: 2<sup>ème</sup> mode de battement  
 $f=6.28$  Hz,  $D_{max}=0.1423$ m



**Figure II.11** Mode de 3<sup>ème</sup> déformée: 1<sup>ère</sup> mode de Traîné  
 $f=7.81$  Hz,  $D_{max}=0.1420$  m



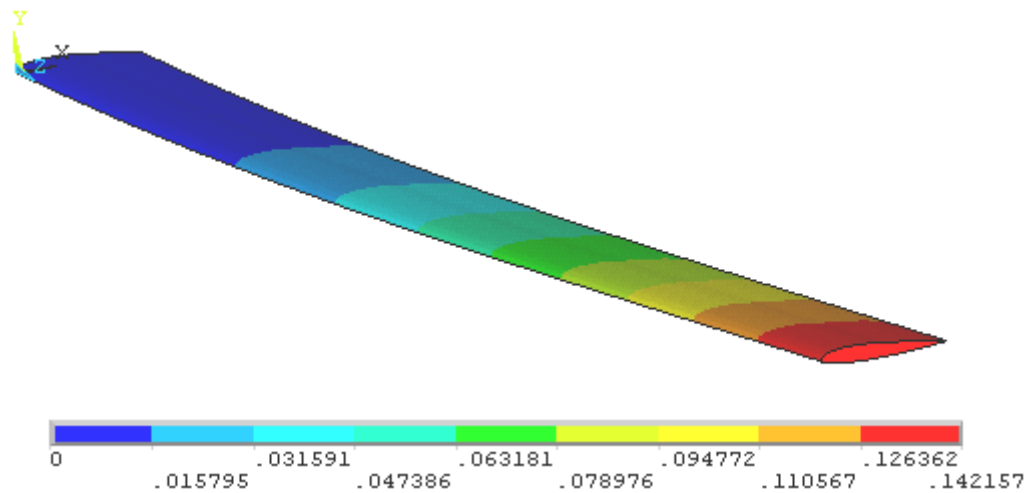
**Figure II.12** Mode de 4<sup>ème</sup> déformée: 3<sup>ème</sup> mode de battement  
 $f= 17.58$  Hz,  $D_{max}=0.143$  m



**Figure II.13** Mode de 5<sup>ème</sup> déformée: 1<sup>ère</sup> mode de torsion  
 $f=34.17$  Hz,  $D_{max}=0.253$  m

Les figures ci-dessus illustrent les cinq premiers modes de vibration de la pale. La visualisation de ces modes montre que l'extrémité de la pale est la zone la plus sollicitée par les déformation quelque soit la traînée, le battement ou le torsion.





**Figure II. 14** Evolution de Profil de déplacement suivant la pale  
 $D_{max}=0.14215$  mm

La figure II. 14 illustre le profil de l'amplitude de vibration en déplacement tout le long de la pale pour le 1<sup>ère</sup> mode de battement, on constate que la grandeur de déplacement est plus importante à l'extrémité de la pale, car cette zone est la plus soumise aux différentes sollicitations.

## Conclusion

Dans ce chapitre on a introduit la dynamique des hélicoptères où les forces aérodynamiques générées par le rotor ont été caractérisées.

A partir d'un profil NACA, la géométrie de la pale a été développée, ce qui permet de déterminer les inerties et le centre de gravité de la pale.

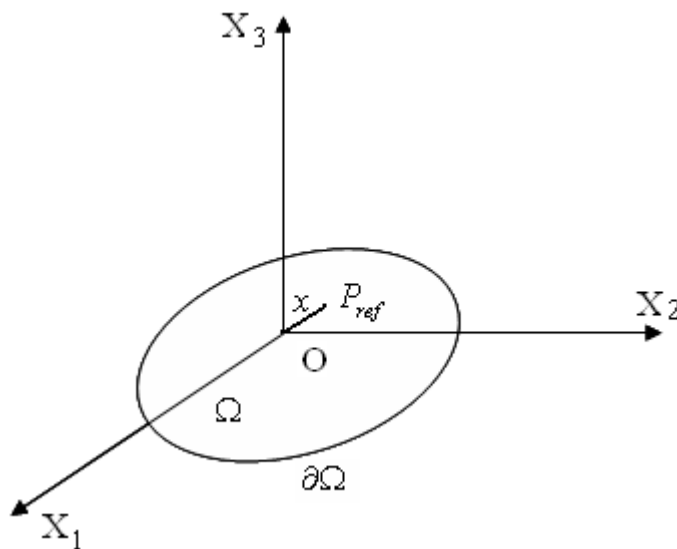
L'injection des charges aérodynamiques dans le modèle éléments finis de la pale permet de déterminer les fréquences propres et les modes de vibration de la pale en battement, traînée et torsion. Les résultats montrent que les différentes sollicitations et les déplacements maximaux sont localisés à l'extrémité de la pale.

## Chapitre III

### Analyse dynamique des solides élastiques

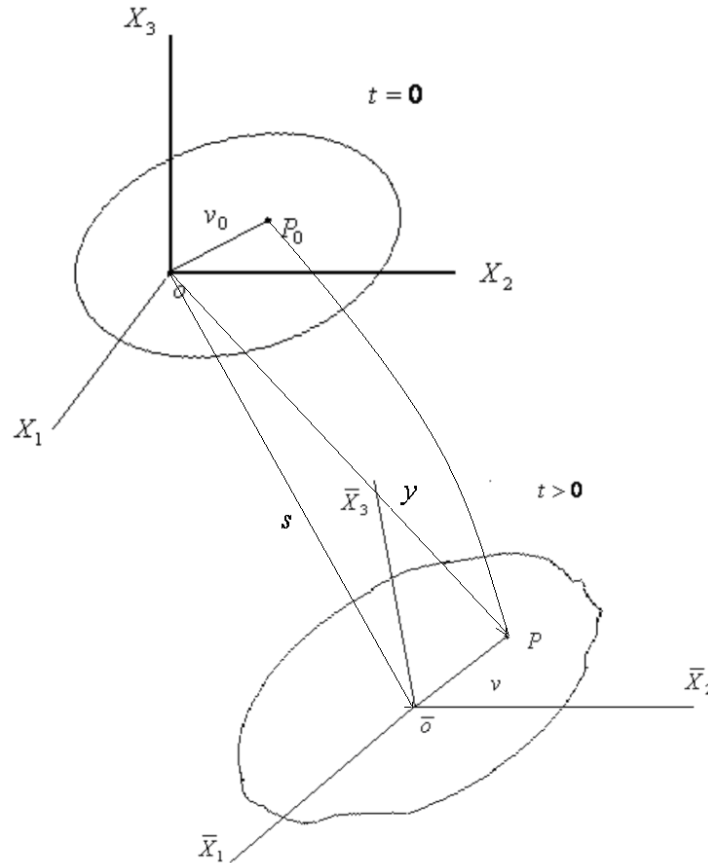
#### III.1 Cinématique d'une particule du solide

Considérons un corps flexible  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ . Dans sa configuration de référence, illustrée en figure III.1, chaque particule est décrite par un vecteur  $x = [x_1, x_2, x_3]^t$  dont les coordonnées sont mesurées dans le repère inertiel orthonormé  $O(x_1, x_2, x_3)$  (Gmur [78]).



**Figure III.1** Configuration de référence

A l'instant initial ( $t = 0$ ), le corps est soumis à un champ de déplacement initial  $u_0(x)$ . La particule repérée dans la configuration de référence par le vecteur  $x$  occupe la position  $v_0(x)$  :



**Figure III.2** Configuration déformée

$$v_0(x,t) = x + u_0(x,t) \tag{3 - 1}$$

Considérons maintenant un mouvement du corps, comme illustré en figure (III.2) à l'instant  $t > 0$ , le corps est déformé, dans une position quelconque. Soit  $O(X_1, X_2, X_3)$  le repère rotationnel. Sa position par rapport au repère inertiel est donnée par le vecteur translation  $s(t)$  et la vitesse angulaire autour d'un axe quelconque est  $w(t) = [w_1, w_2, w_3]^t$ . Cet axe sera spécifié ultérieurement pour définir l'axe de rotation de notre système tournant.

Dans la configuration déformée, la particule est maintenant au point P et sa position par rapport au repère inertiel est donnée par le vecteur  $y(x,t)$  tandis que dans le repère rotationnel nous avons :

$$v(x,t) = x + u(x,t) \tag{3 -2}$$

Où  $u(x,t)$  est le vecteur déplacement résultant de la déformation dynamique du corps.

Dans le repère inertiel, le vecteur  $y(x,t)$  est donné par :

$$y(x,t) = s(t) + R(t) v(x,t) = s(t) + R(t)(x + u(x,t)) \tag{3 -3}$$

Où  $R(t)$  est une matrice de changement de repère .elle est orthogonale

$$(R^t R = I \text{ et } R^t = R^{-1}) \quad .$$

La dérivée temporelle de  $y(x,t)$  est :

$$\dot{y} = \dot{s} + \dot{R}(x+u) + R\dot{u} \quad (3-4)$$

Où  $\dot{R} = R\Omega$  est la dérivée temporelle de R, avec  $\Omega$  donnée par une matrice antisymétrique définie par les composantes de  $\omega$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

## III.2 Dynamique d'un corps déformable

Les équations du mouvement du système peuvent être établies de deux façons :

La première consiste à écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à un volume infinitésimal du corps auquel on ajoute la loi de comportement du matériau et les conditions aux limites. L'accélération est obtenue à partir de l'équation (3-4). Le système ainsi obtenu correspond à la formulation forte de l'équation du mouvement. La forme faible est obtenue en intégrant l'équation aux dérivées partielles sur le volume du corps, pondérée par des fonctions tests.

La deuxième approche est la méthode énergétique. Après avoir écrit les énergies cinétiques et potentielles du corps, la fonction de dissipation de Rayleigh et le travail virtuel des forces volumiques et surfaciques, les équations de Lagrange donnent l'équation du mouvement sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = 0, \quad L=T-U \quad (3-6)$$

L'énergie cinétique est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{y}^t \dot{y} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{u}^t \dot{u} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \dot{u}^t \Omega u d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho u^t \Omega^2 u d\Omega - \int_{\Omega} \rho u^t \Omega (R^t \dot{s} + \Omega x) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho u^t (R^t \dot{s} + \Omega x) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{s}^t \dot{s} + 2 \dot{s}^t R \Omega x - x^t \Omega^2 x) d\Omega \quad (3-7)$$

L'énergie de déformation et le travail virtuel des forces volumiques et surfaciques sont groupés dans l'énergie potentielle sous la forme :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^t C \varepsilon d\Omega - \left( \int_{\Omega} u^t f d\Omega + \int_{\partial\Omega} u^t t d(\partial\Omega) \right) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla u)^t C (\nabla u) d\Omega - \left( \int_{\Omega} u^t f d\Omega + \int_{\partial\Omega} u^t t d(\partial\Omega) \right) \quad (3-8)$$

Où C est la matrice d'élasticité et  $\varepsilon = \nabla u$  est le vecteur de déformation (considérées petites), ou  $\nabla$  est l'opérateur différentiel qui a pour expression :

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

La fonction de dissipation, en supposant une loi de comportement viscoélastique  $\sigma = C(\varepsilon + \eta_b \dot{\varepsilon})$ , est exprimée par :

$$F_d = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \eta_b (\nabla \dot{u})^t C (\nabla \dot{u}) d\Omega \quad (3-10)$$

Si les déplacements  $u$  sont exprimés par une approximation de Rayleigh-Ritz en produits de fonctions de forme et coordonnées généralisées  $u = H(x)q(t)$ , nous pouvons réécrire les équations (3-7) (3-8) (3-10) sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^t M \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^t G q - \frac{1}{2} q^t N q - q^t \int_{\Omega} \rho H^t \Omega (R^t \dot{s} + \Omega x) d\Omega + \dot{q}^t \int_{\Omega} \rho H^t (R^t \dot{s} + \Omega x) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{s}^t \dot{s} + 2\dot{s}^t R \Omega x - x^t \Omega x) d\Omega \quad (3-11)$$

$$U = \frac{1}{2} q^t K q - \left( q^t \int_{\Omega} H^t f d\Omega + q^t \int_{\partial\Omega} H^t t d(\partial\Omega) \right) \quad (3-12)$$

$$F_d = \frac{1}{2} \dot{q}^t D \dot{q} \quad (3-13)$$

Finalement, en utilisant les équations de Lagrange, nous trouvons l'équation du mouvement du système dans le repère mobile sous forme matricielle :

$$M \ddot{q} + (D + G) \dot{q} + (K + P + N) q = r + F \quad (3-14)$$

où  $M$  est la matrice de masse,  $D$  la matrice d'amortissement,  $G$  la matrice gyroscopique,  $K$  la matrice de raideur,  $P$  la matrice d'accélération angulaire,  $N$  la matrice d'accélération centrifuge (ou assouplissement centrifuge),  $r$  le vecteur des excitations indirectes dues à l'entraînement du système de coordonnées et  $F$  le vecteur des excitations par les forces volumiques et surfaciques. Nous avons:

$$M = \int_{\Omega} \rho H^t H d\Omega \quad \text{matrice de masse}$$

$$D = \int_{\Omega} \eta_b (\nabla H)^t C (\nabla H) d\Omega \quad \text{matrice d'amortissement}$$

$$G = 2 \int_{\Omega} \rho H^t \Omega H d\Omega \quad \text{matrice gyroscopique}$$

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{\Omega} \rho H^t \dot{\Omega} H d\Omega && \text{matrice de rigidité d'accélération angulaire} \\
 N &= \int_{\Omega} \rho H^t \Omega^2 H d\Omega && \text{matrice de rigidité centrifuge} \\
 K &= \int_{\Omega} (\nabla H)^t C (\nabla H) d\Omega && \text{matrice de raideur} \\
 r &= - \int_{\Omega} \rho H^t (R^t \ddot{s} + \dot{\Omega} x + \Omega^2 x) d\Omega && \text{vecteur forces d'inerties} \\
 F &= \int_{\Omega} H^t f d\Omega + \int_{\partial\Omega} H^t t d(\partial\Omega) && \text{vecteur forces données}
 \end{aligned}$$

### III.3 Efforts exercés sur l'axe d'un solide en rotation

#### III.3.1 Efforts dynamiques

La figure III.3 représente un solide en rotation, avec :

C:centre de masse,

R':(O x' y' z') repère mobile lié au solide,

M : masse du solide,

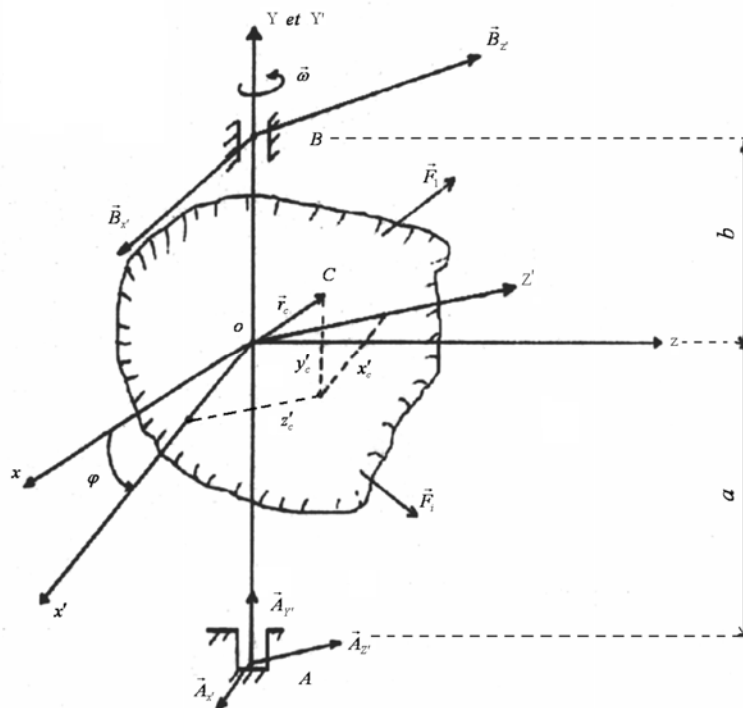
$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k}$  : Vitesse angulaire de rotation,

$\vec{F}$  : Résultante des forces extérieures,

A : palier double (à butées),

B : palier simple (appui cylindrique).

Les réactions  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  sont quelconques et leur projections dans le repère R':(O x' y' z') sont respectivement  $A_{x'}, A_{y'}, A_{z'}$  et  $B_{x'}, B_{y'}, B_{z'}$ .



**Figure III.3** Schéma d'un solide en rotation par rapport à un axe vertical

Pour la détermination des composantes des réactions  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  dans le repère mobile, on utilise les six équations obtenues à partir des lois de la dynamique :

$$\begin{cases} -M(z'_c \ddot{\theta} + x'_c \dot{\theta}^2) = F_{x'} + A_{x'} + B_{x'} \\ M(x'_c \ddot{\theta} + z'_c \dot{\theta}^2) = F_{z'} + A_{z'} + B_{z'} \\ 0 = F_{y'} + A_{y'} + B_{y'} \\ -I_{x'z'} \ddot{\theta} - I_{x'y'} \dot{\theta}^2 = M_{x'}(\vec{F}) + aA_{z'} + bB_{z'} \\ -I_{z'y'} \ddot{\theta} - I_{x'z'} \dot{\theta}^2 = M_{x'}(\vec{F}) + aA_{x'} + bB_{x'} \\ I_{y'} \ddot{\theta} = M_{y'}(\vec{F}) \end{cases} \quad (3-15)$$

On note les composantes des réactions  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  donnent les réactions totales appliquées en A et B. ces lois supposent la connaissance de :

- le centre de masse du système,
- l'application du théorème du centre de masse,
- le tenseur d'inertie en un point donné,
- le moment cinétique du système,
- L'application du théorème de la variation du moment cinétique,
- le moment des forces extérieures et son analogie avec la variation du moment cinétique.

### III.3.2 Variation de la quantité de mouvement et de moment cinétique

On sait que les variations de la quantité de mouvement  $\vec{Q}$  du solide et du moment cinétique  $\vec{K}$  ont respectivement pour expressions :

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F} + \vec{A} + \vec{B} \quad (3-16)$$

Et

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = M_0(\vec{F}) + M_0(\vec{A}) + M_0(\vec{B}) \quad (3-17)$$

Dans le repère  $R'$ : (O x' y' z') les expressions de  $\vec{Q}$  et  $\vec{K}$  sont :

$$\vec{Q} = Q_{x'} \vec{i}' + Q_{y'} \vec{j}' + Q_{z'} \vec{k}' \quad (3-18)$$

$$\vec{K} = K_{x'} \vec{i}' + K_{y'} \vec{j}' + K_{z'} \vec{k}' \quad (3-19)$$

$\frac{d\vec{Q}}{dt}$  et  $\frac{d\vec{K}}{dt}$  ont pour expressions les relations suivantes :

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \left[ \frac{dQ_{x'}}{dt} \vec{i}' + \frac{dQ_{y'}}{dt} \vec{j}' + \frac{dQ_{z'}}{dt} \vec{k}' \right] + \vec{\omega} \wedge \vec{Q} \quad (3-20)$$

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \left[ \frac{dK_{x'}}{dt} \vec{i}' + \frac{dK_{y'}}{dt} \vec{j}' + \frac{dK_{z'}}{dt} \vec{k}' \right] + \vec{\omega} \wedge \vec{K}_0 \quad (3-21)$$

On acceptera les notions suivantes :

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \left[ \frac{dQ_{x'}}{dt} \vec{i}' + \frac{dQ_{y'}}{dt} \vec{j}' + \frac{dQ_{z'}}{dt} \vec{k}' \right]$$

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \left[ \frac{dK_{x'}}{dt} \vec{i}' + \frac{dK_{y'}}{dt} \vec{j}' + \frac{dK_{z'}}{dt} \vec{k}' \right]$$

En obtient :

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{Q} = \vec{F} + \vec{A} + \vec{B} \quad (3-22)$$

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{K}_0 = M_0(\vec{F}) + M_0(\vec{A}) + M_0(\vec{B}) \quad (3-23)$$

Les coordonnées des points A et B sont respectivement :

(0, 0, -a) et (0, 0, b).

$\vec{r}_A = -a\vec{j}'$  et  $\vec{r}_B = b\vec{j}'$  .

Les moments des réactions A et B sont :

$$\vec{M}_0(\vec{A}) = \vec{r}_A \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & -a & 0 \\ A_{x'} & A_{y'} & A_{z'} \end{vmatrix} ,$$

$$\vec{M}_0(\vec{B}) = \vec{r}_B \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & b & 0 \\ B_{x'} & B_{y'} & B_{z'} \end{vmatrix} .$$

En développant  $M_0(\vec{A})$  et  $M_0(\vec{B})$ . On obtient :

$$\begin{cases} M_{x'}(\vec{A}) = -a A_{z'} & ; M_{y'}(\vec{A}) = 0 & ; M_{z'}(\vec{A}) = a A_{x'} \\ M_{x'}(\vec{B}) = b B_{z'} & ; M_{y'}(\vec{B}) = 0 & ; M_{z'}(\vec{B}) = b B_{x'} \end{cases} \quad (3-24)$$

Tenant compte de  $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{j}'$  et des projections dans R' des relations (3.8) et (3.9), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{x'}}{dt} \vec{i}' + \frac{dQ_{y'}}{dt} \vec{j}' + \frac{dQ_{z'}}{dt} \vec{k}' + \dot{\theta} \vec{j}' \wedge (Q_{x'} \vec{i}' + Q_{y'} \vec{j}' + Q_{z'} \vec{k}') = F_{x'} \vec{i}' + F_{y'} \vec{j}' + F_{z'} \vec{k}' + A_{x'} \vec{i}' + A_{y'} \vec{j}' + A_{z'} \vec{k}' + \\ + B_{x'} \vec{i}' + B_{y'} \vec{j}' + B_{z'} \vec{k}' , \end{aligned} \quad (3-25)$$

$$\begin{aligned} \frac{dK_{x'}}{dt} \vec{i}' + \frac{dK_{y'}}{dt} \vec{j}' + \frac{dK_{z'}}{dt} \vec{k}' + \dot{\theta} \vec{j}' \wedge (K_{x'} \vec{i}' + K_{y'} \vec{j}' + K_{z'} \vec{k}') = M_{x'}(F) \vec{i}' + M_{y'}(F) \vec{j}' + M_{z'}(F) \vec{k}' + a A_{y'} \vec{i}' - a A_{y'} \vec{j}' + \\ - b B_{y'} \vec{i}' + b B_{y'} \vec{j}' \end{aligned} \quad (3-26)$$

A partir des égalités (3.11) et (3.12), et après identification on aboutit aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dQ_{x'}}{dt} - \dot{\theta} Q_{z'} = F_{x'} + A_{x'} + B_{x'} , \\ \frac{dQ_{z'}}{dt} - \dot{\theta} Q_{x'} = F_{z'} + A_{z'} + B_{z'} , \\ \frac{dQ_{y'}}{dt} = F_{y'} + A_{y'} + B_{y'} , \\ \frac{dK_{x'}}{dt} - \dot{\theta} K_{z'} = M_{x'}(\vec{F}) + a A_{z'} - b B_{z'} , \\ \frac{dK_{z'}}{dt} - \dot{\theta} K_{x'} = M_{z'}(\vec{F}) - a A_{x'} + b B_{x'} , \\ \frac{dK_{y'}}{dt} = M_{y'}(\vec{F}) . \end{cases} \quad (3-27)$$



Pour la quantité de mouvement d'un solide on a :

$$\vec{Q} = M\vec{V}_C = M\vec{\omega} \wedge \vec{r}_C, \quad (3-28)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= M\vec{V}_C = M\dot{\theta}\vec{j}' \wedge (x'_C\vec{i}' + y'_C\vec{j}' + z'_C\vec{k}') \\ &= -M\dot{\theta}z'_C\vec{i}' + M\dot{\theta}x'_C\vec{j}' \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases} Q_{x'} = -M\dot{\theta}z'_C, \\ Q_{z'} = -M\dot{\theta}x'_C, \\ Q_{y'} = 0. \end{cases} \quad (3-29)$$

Et

$$\begin{cases} \frac{dQ_{x'}}{dt} = -M\ddot{\theta}z'_C \\ \frac{dQ_{z'}}{dt} = -M\ddot{\theta}x'_C. \end{cases} \quad (3-30)$$

Sachant que pour un solide en rotation autour d'un axe fixe le moment cinétique à pour expression :

$$\vec{K}_0 = T_0 \vec{\omega}$$

Dans notre cas on a :

$$\vec{K}_0 = \begin{bmatrix} I_{x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'z'} \\ -I_{y'x'} & I_{y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\vec{K}_0 = -I_{x'y'}\dot{\theta}\vec{i}' + I_{y'}\dot{\theta}\vec{j}' - I_{z'y'}\dot{\theta}\vec{k}' \quad (3-31)$$

Les projections de  $K_0$  dans  $R'$  sont :

$$\begin{cases} K_{x'} = -I_{x'y'}\dot{\theta}, \\ K_{y'} = I_{y'}\dot{\theta}, \\ K_{z'} = -I_{z'y'}\dot{\theta}. \end{cases} \quad (3-32)$$

En remplaçant les expressions (3-29) et (3-30) dans (3-27) et en tenant compte de (3-31) et (3-32), on obtient les six équations données par (3-15). ces derniers permettent l'obtention des réactions dans les paliers.

### III.3.3 Réaction statiques et dynamiques

#### III.3.3.1 Equilibrages statique et dynamique

Les composantes des réactions arbitraires  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  peuvent être déterminées en résolvant le système d'équation (3-15).

Les composantes  $A_{x'}$ ,  $A_{y'}$ ,  $B_{x'}$  et  $B_{y'}$ , dépendant des forces extérieures du caractère du mouvement. La réaction  $A_{y'}$  peut être aisément déterminée à partir de la troisième équation du système (3-15).

En réalité, les composantes des réactions  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  sont des réactions totales exercées sur l'axe du solide en rotation. Ces réactions comprennent simultanément, les efforts statiques et les efforts dynamiques. De ce fait, on peut écrire :

$$\begin{aligned} A_{x'} &= A_{x_s'} + A_{x_d'} \quad , \quad B_{x'} = B_{x_s'} + B_{x_d'} \\ A_{z'} &= A_{z_s'} + A_{z_d'} \quad , \quad B_{z'} = B_{z_s'} + B_{z_d'} \end{aligned} \quad (3-33)$$

Les indices s et d sont utilisés respectivement pour la statique et la dynamique. Les réactions statiques sont obtenues à partir des conditions d'équilibre statique d'un solide soumis aux forces extérieures  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{A}_s, \vec{B}_s$  et  $P$ .

Dans notre cas, on obtient :

$$\begin{cases} F_{x'} + A_{x_s'} + B_{x_s'} = 0 \\ F_{y'} + A_{y_s'} + B_{y_s'} = 0 \\ F_{z'} + A_{z_s'} + B_{z_s'} = 0 \\ M_{x'}(\vec{F}) + a A_{z_s'} - b B_{z_s'} = 0 \\ M_{z'}(\vec{F}) + b B_{x_s'} - a A_{x_s'} = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

On détermine les réactions dynamiques à partir de (3-15) et en tenant compte de (3-16) et (3-17), ce qui donne :

$$\begin{cases} -M(z'_c \ddot{\theta} + x'_c \dot{\theta}^2) = A_{x'd} + B_{x'd} \\ M(x'_c \ddot{\theta} - z'_c \dot{\theta}^2) = A_{z'd} + B_{z'd} \\ I_{x'y'} \ddot{\theta} - I_{z'y'} \dot{\theta}^2 = a A_{z'd} - b B_{z'd} \\ -I_{z'y'} \ddot{\theta} - I_{x'y'} \dot{\theta}^2 = -a A_{x'd} + b B_{x'd} \end{cases} \quad (3-35)$$

Les modules des réactions dynamiques sont :

$$A_d = \sqrt{A_{x'd}^2 + A_{z'd}^2}$$

et

$$B_d = \sqrt{B_{x'd}^2 + B_{z'd}^2}$$

#### III.3.3.2 Analyses des résultats

Les réactions dynamiques  $A_d$  et  $B_d$  exprimées dans le repère  $R'$ : (O x' y' z') sont déterminées à partir de (3.21). Le repère étant lié au solide, on peut dire que les réactions dynamiques changent de sens et de direction pendant la rotation du solide.

$\vec{A}_d$  et  $\vec{B}_d$  Sont appelées « forces pulsatives » de période  $2\pi/\omega$  [79]. Leurs influences sur les machines sont nuisibles et indésirables. il y a apparition de bruit de vibration, de fatigue du matériaux, usure,....

Etant donné que  $\vec{A}_d$  et  $\vec{B}_d$  dépendent de  $\omega^2$ , leurs influence sont d'autant plus néfastes pour les grandes vitesses de rotation et que plusieurs machines fonctionnent à de telles vitesses. Dans le domaine de l'élaboration, de la conception et de la construction des divers types des rotors, on établit les conditions pour les quelles les réactions dynamiques soient nulles.

### III.3.4 Solide parfaitement équilibré

#### Conditions pour les quelles les réactions dynamiques sont nulles

Lors de la construction des diverses machines et mécanismes, il est nécessaire de donner les conditions pour les quelles le système mécanique est parfaitement équilibré. Pour un cas idéal on a :

$$A_{x'd} = A_{z'd} = B_{x'd} = B_{z'd} = 0 \quad (3-36)$$

En remplaçant l'expression (3.22) dans (3.21), on obtient :

$$\begin{cases} x'_c \ddot{\theta} - z'_c \dot{\theta}^2 = 0 & , \\ x'_c \dot{\theta}^2 + z'_c \ddot{\theta} = 0 & , \\ I_{x'y'} \ddot{\theta} - I_{z'y'} \dot{\theta}^2 = 0 & , \\ I_{x'y'} \dot{\theta}^2 + I_{z'y'} \ddot{\theta} = 0 & . \end{cases} \quad (3-37)$$

Les deux systèmes d'équations homogènes linéaires (3-37), servent à la détermination de l'abscisse  $x'_c$  et de l'ordonnée  $z'_c$  du centre de masse du solide ainsi que des produits d'inertie  $I_{z'y'}$  et  $I_{x'y'}$ .

Le système d'équations (3-37) a un même et unique déterminant qui est différent de zéro.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \ddot{\theta} & -\dot{\theta}^2 \\ -\dot{\theta}^2 & \ddot{\theta} \end{vmatrix} = \ddot{\theta}^2 + \dot{\theta}^4$$

La vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  et l'accélération angulaire  $\ddot{\theta}$  ne sont pas nulles en même temps [79]. Les solutions de l'équation (3-37) sont :

$$\begin{cases} x'_c = z'_c = 0 \\ I_{x'y'} = I_{z'y'} = 0 \end{cases} \quad (3-38)$$

Si les conditions (3-38) sont satisfaites, les réactions dynamiques  $\vec{A}_d$  et  $\vec{B}_d$  sont nulles. Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes. En réalité ceci est obtenu pour un cas idéal de rotor.

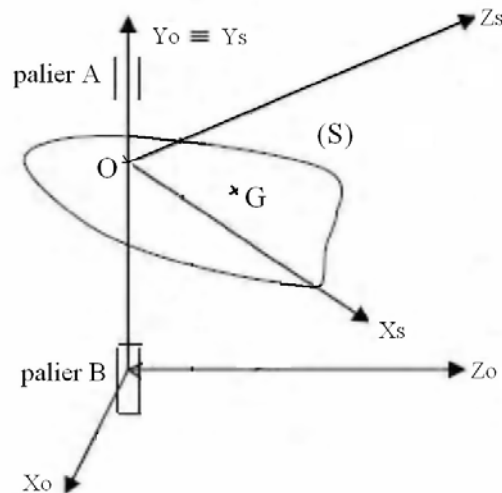
Pour que les efforts dynamiques exercés sur l'axe de rotation soient nuls, il faut et il suffit que l'axe de rotation soit un axe principal d'inertie (3-38). Lorsque les conditions (3-38) sont remplies, on dit que le solide est parfaitement équilibré. L'axe de rotation est appelé axe libre de rotation.

### III.4 Rotation d'un solide autour d'un axe fixe

Le fonctionnement de toutes les machines est basé sur un mouvement de rotation autour d'un axe : rotors, machines tournantes, vilebrequins, roues etc... Ce mouvement de rotation génère des vibrations mécaniques au niveau des paliers de fixation si l'axe de rotation n'est pas équilibré. Les paliers sont des liaisons rotoïdes (articulations cylindriques) entre le solide et le bâti fixe. Ces vibrations sont à l'origine de l'usure des paliers, provoquée par les contraintes mécaniques dues à la liaison entre l'axe de rotation et le palier. Pour éviter ces inconvénients, il est nécessaire d'étudier et de trouver les conditions d'équilibrage du système afin que les contraintes soient minimales.

#### III.4.1 Equilibrages statique et dynamique [80]

Soit un repère fixe  $R_0(X_0, Y_0, Z_0)$  dont l'axe  $Y_0$  est l'axe de rotation du solide et soit un deuxième repère  $R_s(X_s, Y_s, Z_s)$  lié au solide dont les axes  $X_s, Y_s, Z_s$  sont les axes principaux centraux d'inertie. Le centre de masse  $G$  se trouve dans le plan  $(X_s, Z_s)$ .



**Figure III.4** Schéma d'un solide en rotation autour d'un axe vertical

La loi fondamentale de la dynamique donne les équations du mouvement

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G = m \cdot [\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_{OG} - \omega^2 \vec{r}_{OG}] \quad (3-39)$$

$$\text{Et} \quad \vec{M}_G = [J_G] \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \wedge \vec{k}_G = \dot{\vec{k}} \quad (3-40)$$

Avec,  $m$  : masse du solide et  $\varepsilon$  accélération angulaire.

Pour que le solide soit équilibré statiquement, il faut que la résultante ou  $\sum \vec{F}$  des forces extérieures soit nulle, donc :

$$\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_{OG} - \omega^2 \vec{r}_{OG} = 0$$

Etant donné que les deux vecteurs accélérations  $\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_{OG}$  et  $\omega^2 \vec{r}_{OG}$  sont perpendiculaires, il faut que  $r_{OG} = e$ .

La condition nécessaire de l'équilibre statique consiste en ce que le centre de masse du solide doit être sur l'axe de rotation, c'est-à-dire  $e = 0$ .

Pour avoir un équilibre dynamique (équilibrage total) il faut que  $\sum \vec{F}$  et le moment  $\vec{M}_G$  soient nuls donc :

$$\dot{\vec{K}} = \vec{M}_G = \vec{0} \quad \text{D'où}$$

$$\vec{K}_G = [J_G] \vec{\omega} = \text{Cst.}$$

Le vecteur moment cinétique ne peut être constant que s'il est parallèle à l'axe de rotation, donc

$$\dot{\vec{K}}_G = [J_G] \varepsilon = \vec{0}. \quad (3-41)$$

D'où  $\vec{\varepsilon} = \vec{0}$ .

La condition signifie que l'axe de rotation est parallèle à l'un des axes principaux centraux d'inertie.

En conclusion les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibrage dynamique d'un rotor sont que l'un des axes principaux centraux d'inertie coïncide avec l'axe de rotation et que la rotation soit uniforme :

$$\vec{a}_G = \vec{0};$$

$$\vec{\varepsilon} = \vec{0}; \quad (3-42)$$

$$\vec{\omega} // \vec{K}_G.$$

### III.5 Rotation d'un rotor autour d'un axe fixe

Lorsque le centre de masse ne se trouve pas sur l'axe de rotation [80], on a un déséquilibre dans notre système. Ce phénomène crée des forces tournantes au niveau du rotor et ces dernières provoquent des forces agressives dans les paliers. Ces dernières forces varient continuellement avec la vitesse de rotation. La détermination des réactions au niveau des paliers est nécessaire.

#### III.5.1 Détermination des forces aux paliers

On considère le modèle de la figure III.5 pour de terminer les sollicitations au niveau des deux paliers A et B avec :

$R_0(x_0, y_0, z_0)$  : repère fixe (galiléen) où les lois de la dynamique sont valables.

$R_1(X_1, Y_1, Z_1)$  : repère lié au solide dont les axes  $X_1, Y_1, Z_1$  sont des axes principaux centraux d'inertie du disque.

$R_2(x, y, z)$  : repère lié au solide dont l'origine est le centre de masse. L'axe y est vertical.

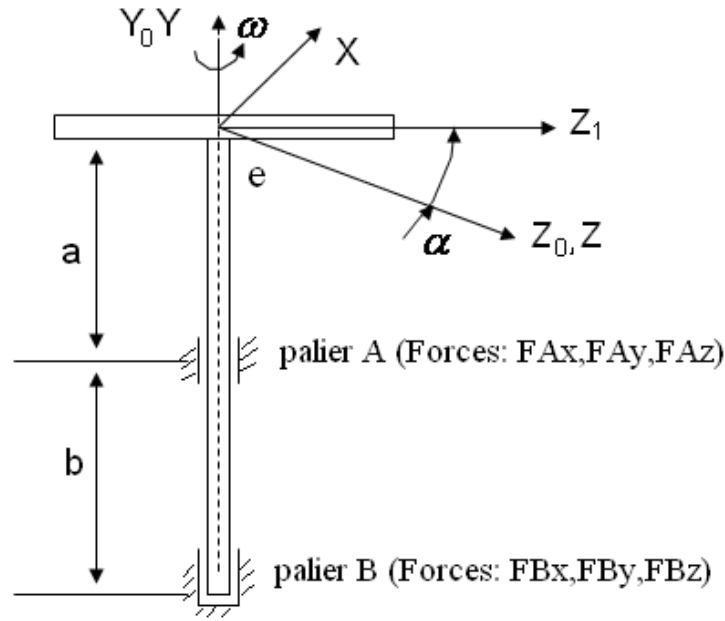


Figure III.5 Rotor en rotation à deux paliers

### III.5.2 Détermination des moments d'inertie

Les éléments du tenseur d'inertie sont donnés par :

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \int (y^2 + z^2) dm = M_d (h^2/3 + R_d^2/4) + M_a (L^2/3 + R_a^2/4) \\ J_{yy} &= \int r^2 dm = 1/2 M_d R_d^2 + 1/2 M_a R_a^2 \\ J_{zz} &= \int (x^2 + y^2) dm = M_d (h^2/3 + R^2/4) + M_a (L^2/3 + R_a^2/4) \end{aligned} \quad (3-43)$$

Le tenseur d'inertie dans le repère  $R_2$  est donner par :

$$[J_G]_{R_2} = \begin{bmatrix} J_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{yx} & J_y & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{zy} & J_z \end{bmatrix}_{R_2} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & -D_{yz} \\ 0 & -D_{zy} & J_z \end{bmatrix} \quad (3-44)$$

$$\vec{K}_G = [J_G]_{R_2} \vec{\omega}$$

En utilisant les équations (3-39) et (3-40) on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{K}} &= \dot{\vec{K}}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{k}_G = \vec{r}_{OG} \wedge \vec{A} + \vec{r}_{GB} \wedge \vec{B} \\ \vec{F}_A + \vec{F}_B + M\vec{g} &= M\vec{a}_G \end{aligned} \quad (3-45)$$

Le vecteur de rotation dans le repère  $R_2$  s'écrit :  $\vec{\omega} = [0, 0, \omega]_{R_2}^T$  et l'accélération

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}_{OG} \quad (3-46)$$

Lorsque le centre de masse ne se trouve pas sur l'axe de rotation, on a un déséquilibre. Ce phénomène crée des forces tournantes au niveau du rotor et provoquent des forces agressives dans les paliers. Elles varient en fonction de la vitesse de rotation. Les inconnues  $F_A$  et  $F_B$  avec :

$$\begin{aligned} \vec{F}_A &= (\vec{F}_{Ax}, \vec{F}_{Ay}, \vec{F}_{Az})^T \\ \vec{F}_B &= (\vec{F}_{Bx}, \vec{F}_{By}, \vec{F}_{Bz})^T \end{aligned} \quad (3-47)$$

$$\vec{\omega} = [0, 0, \omega]^T$$

$$\vec{GA} = \vec{GO} + \vec{OA} = (0, -e, -a)^T$$

$$\vec{GB} = \vec{GO} + \vec{OB} = (0, -e, -(a+b))^T$$

$$\vec{OG} = (0, -e, 0)^T$$

Et finalement on trouve :

$$\begin{cases} F_{Ax} = 72 \omega^2 e / L \\ F_{Ay} = 0 \\ F_{Az} = 2 M \omega^2 e + 2 e \frac{M g}{L} \end{cases} \quad (3-48)$$

Et

$$\begin{cases} F_{Bx} = -72 \omega^2 e / L \\ F_{By} = M g \\ F_{Bz} = -M \omega^2 e - 2 e \frac{M g}{L} \end{cases} \quad (3-49)$$

Les résultantes des forces sont données par :

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2 + F_{Az}^2} \quad (3-50)$$

Et

$$F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2 + F_{Bz}^2} \quad (3-51)$$

Les équations sont établies. On détermine l'influence des forces tournantes dans les paliers en fonction de la vitesse de rotation. La figure suivante illustre l'évolution des forces au niveau des paliers en fonction de la vitesse de rotation.

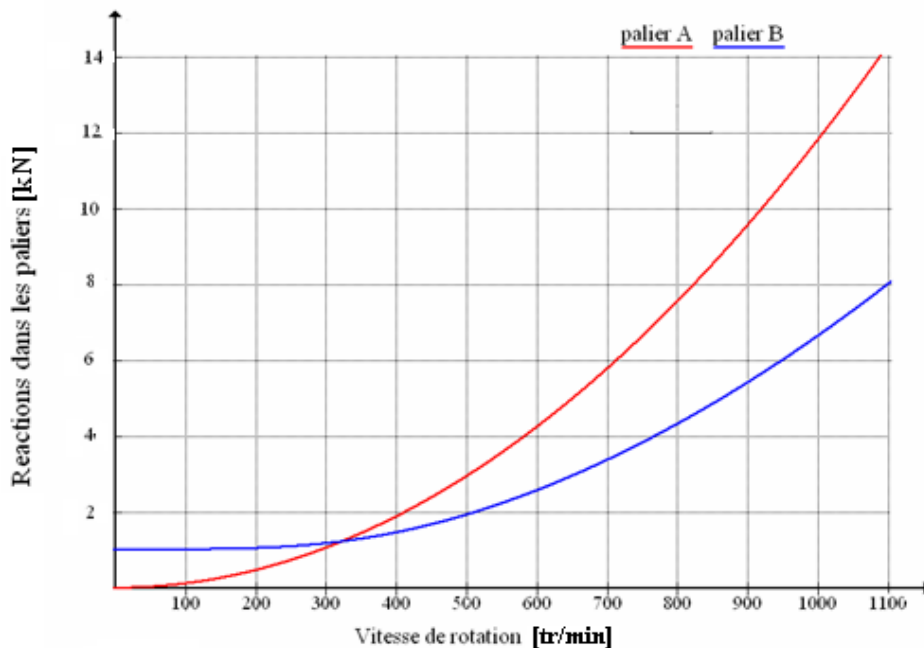


Figure III.6 Les forces tournantes agissent sur les paliers

On remarque que le palier B subit plus d'effort que le palier A pour la plage de vitesse de rotation 0-300 tr/min, les efforts sont égales pour la vitesse 320 tr/min. A partir de cette vitesse de rotation les efforts au niveau de palier A deviennent plus importants que le palier B ce qui interpréter par l'effet gyroscopique de disque sur l'arbre. D'autre part les efforts au niveau des paliers dépendent de la vitesse de rotation, leurs influences sont d'autant plus néfastes pour les grandes vitesses de rotation. Le but de détermination des forces tonnantes au niveau des paliers est de déterminer les coefficients des raideurs et d'amortissement des paliers, les coefficients peuvent être donnés comme suit :

$$\begin{aligned} f_x &= -k_{xx}x - C_{xx}\dot{x} - k_{xz}z - C_{xz}\dot{z} \\ f_z &= -k_{zx}x - C_{zx}\dot{x} - k_{zz}z - C_{zz}\dot{z} \end{aligned} \quad (3-52)$$

### Conclusion

Dans ce chapitre nous avons introduit les notions de base et les spécificités propres à l'analyse dynamique des systèmes élastique et tournants. Nous nous intéresserons plus particulièrement à décrire la phénoménologie de l'analyse des charges au niveau des paliers.



## Chapitre IV

### Modélisation des systèmes des rotors

#### Introduction

Cette partie a pour but de développer les équations du mouvement afin de prévoir le comportement dynamique d'un rotor dont le support est soumis à un mouvement quelconque connu. Les caractéristiques de chaque élément composant un rotor sont d'abord développés. Un modèle éléments finis est développé dans le souci de traiter des systèmes réels. Les équations du mouvement du rotor sont obtenues par application des équations de Lagrange. La méthode de Rayleigh-Ritz est utilisée pour mettre en place un modèle permettant de traiter des cas simples et de mettre en évidence des phénomènes de base.

#### IV.1 Modélisation du rotor

Ce chapitre expose les éléments théoriques utilisés pour obtenir les équations du mouvement d'un système en rotation. Il permet de définir aussi bien un modèle analytique d'analyse qu'un modèle Éléments Finis à usage plus général.

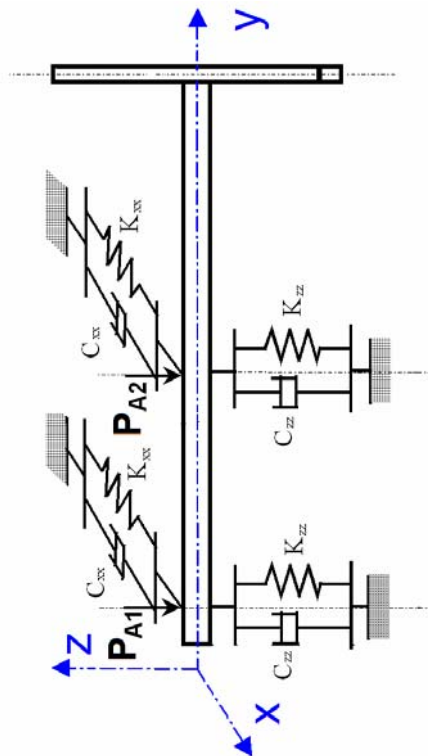


Figure IV.1 Exemple de rotor

Les éléments de base des rotors sont l'arbre, les disques et les paliers. Les expressions des énergies cinétiques sont nécessaires pour caractériser l'arbre, le disque et le balourd (figure IV.1).

L'énergie potentielle est nécessaire pour caractériser l'arbre, le travail virtuel est calculé pour les forces dues aux paliers. Les équations générales du rotor sont obtenues à partir des étapes suivantes :

- l'énergie cinétique  $T$ , l'énergie de déformation  $U$ , et le travail virtuel  $\delta W$  sont calculés pour tous les éléments de système.
- Une méthode de discrétisation est choisie : la méthode de Rayleigh-Ritz est bien adaptée aux systèmes simples et résulte en un faible nombre de degrés de liberté, la méthode des éléments finis est adaptée aux applications réelles.
- Les équations de Lagrange sont utilisées pour l'obtention des équations du mouvement

Soit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Fq_i \quad (4.1)$$

$N$  ( $1 \leq i \leq N$ ) Représente le nombre de degrés de liberté.

$q_i$  : sont les coordonnées généralisées indépendantes.

$Fq_i$  : est le vecteur forces généralisées.

#### IV.1.1. le disque

Le disque est supposé rigide. Seule son énergie cinétique est considérée. Soient  $R_0(X, Y, Z)$  un repère fixe et  $R(x, y, z)$  un repère tournant lié au disque (figure III.2). Le système de coordonnées  $x, y$  et  $z$  est relié au système de coordonnées  $X, Y$  et  $Z$  par l'intermédiaire des angles  $\theta_x, \theta_y$  et  $\theta_z$ . Pour déterminer la position du disque, on effectue une rotation initiale d'un angle  $\theta_z$  autour de l'axe  $Z$ , puis d'un angle  $\theta_x$  autour du nouvel axe  $x$ , noté  $x_1$ , enfin d'un angle  $\theta_y$  autour de l'axe de rotation propre du disque  $y$ .

Le vecteur rotation instantanée traduisant la position du repère  $R$  s'écrit

$$\vec{\omega}_{R/R_0}^R = \dot{\theta}_z \vec{Z} + \dot{\theta}_x \vec{x}_1 + \dot{\theta}_y \vec{y} \quad (4.2)$$

Où  $\vec{Z}, \vec{x}_1$  et  $\vec{y}$  sont les vecteurs unitaires suivant les axes  $\vec{OZ}, \vec{Ox}_1$  et  $\vec{Oy}$ .

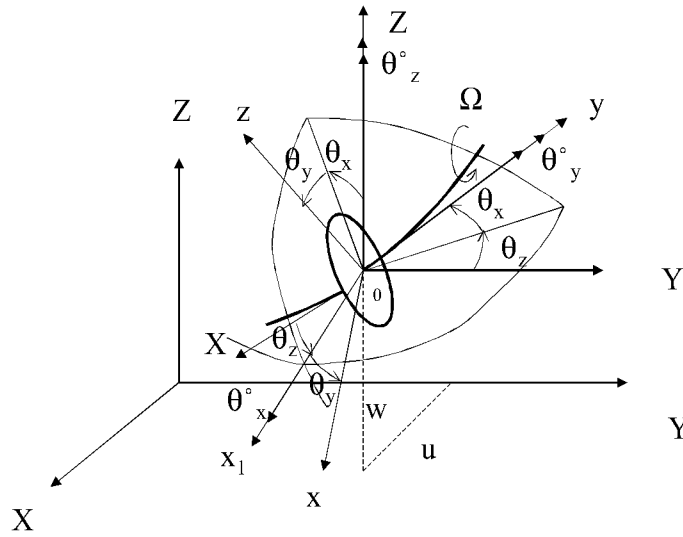
L'énergie cinétique du disque autour de son centre de masse  $O$  est calculée dans le repère tournant  $R$ . Le vecteur de rotation instantanée s'exprime alors dans ce repère :

$$\vec{\omega}_{R/R_0}^R = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_z \cos \theta_x \sin \theta_y + \dot{\theta}_x \cos \theta_y \\ \dot{\theta}_y + \dot{\theta}_z \sin \theta_x \\ -\dot{\theta}_z \cos \theta_x \cos \theta_y + \dot{\theta}_x \sin \theta_y \end{bmatrix}_R \quad (4.3)$$

$\omega_x, \omega_y$  et  $\omega_z$  étant les composants du vecteur de rotation instantanée suivant  $x, y$  et  $z$ . soient  $u$  et  $w$  les coordonnées du centre du disque  $O$  suivant  $OX, OZ$  dans  $R_0$ ; les coordonnées suivant  $OY$  restant constante. la masse de disque et  $m_d$ . le tenseur d'inertie est noté :

$$I_{/O} = \begin{bmatrix} I_{dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dz} \end{bmatrix}_R \quad (4.4)$$

$I_{dx}$ ,  $I_{dy}$  et  $I_{dz}$  sont les moment d'inertie suivant les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$ .



**Figure IV.2** Repère de référence d'un disque monté sur un arbre flexible

L'expression générale de l'énergie cinétique du disque  $T_d$  s'écrit alors :

$$T_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{dx} \omega_x^2 + I_{dy} \omega_y^2 + I_{dz} \omega_z^2) \quad (4.5)$$

Cette expression peut être simplifiée quand le disque est symétrique  $I_{dx} = I_{dz}$ . Lorsque les angles  $\theta_x$  et  $\theta_z$  sont petits et la vitesse angulaire constante  $\theta_y = \Omega$ , l'équation (4.5) devient :

$$T_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_z^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\theta}_x \theta_x) \quad (4.6)$$

Le terme  $\frac{1}{2} I_{dy} \Omega^2$ , qui est constant, n'a pas d'influence. Le dernier terme  $I_{dy} \Omega \dot{\theta}_x \theta_x$  représente l'effet gyroscopique (Coriolis).

## IV.1.2 L'arbre

L'arbre est assimilé à une poutre de section circulaire et caractérisé par ses énergies cinétique et potentielle.

### IV.1.2.1 L'énergie cinétique

La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est similaire à celle développée pour le disque (équation 4.6). Pour un élément de longueur  $L$ , de section droite constante, l'expression de l'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \rho S_a \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] + \rho I_a \left[ \left( \frac{\partial \theta_z}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial t} \right)^2 \right] + \Omega J_a \left[ \theta_z \frac{\partial \theta_x}{\partial t} - \theta_x \frac{\partial \theta_z}{\partial t} \right] \right\} dy \quad (4.7)$$

$\rho$  est la masse volumique,  $S_a$  est la section,  $I_a$  est le moment d'inertie transverse,  $J_a$  est le moment d'inertie polaire.

La première intégrale de l'équation (4.7) correspond à l'expression de l'énergie cinétique d'une poutre en flexion, la seconde à l'effet d'inertie dû à la rotation et la dernière intégrale représente l'effet gyroscopique.

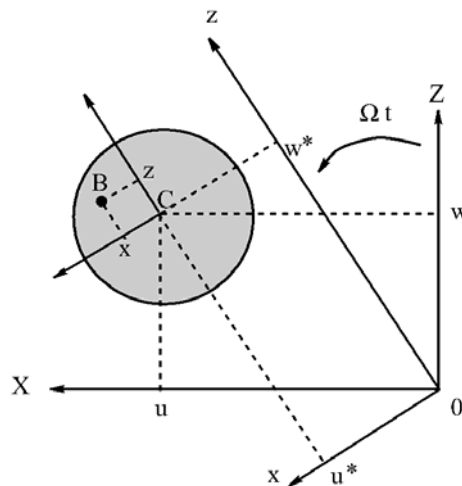
#### IV.1.2.2 Energie de déformation

L'énergie de déformation n'est pas affectée par le mouvement du support car elle ne dépend que des contraintes et donc de la déformée de l'arbre par rapport au support. Dans ce calcul, (en néglige les effets de cisaillement).

Les notations suivantes sont utilisées (figure IV.3) :

**C** est le centre géométrique de l'arbre,  $B(x,z)$  est un point typique de section,  $E$  est le module d'Young du matériau,  $\varepsilon$  et  $\sigma$  représentent la déformation et la contrainte,  $u^*$  et  $w^*$  sont les déplacements du centre géométrique suivant les axes  $x$  et  $z$  (dans le repère mobile).

Le déplacement d'un point de la section droite s'exprime en considérant seules les déformations dues à la flexion, les effets de cisaillement ne sont pas pris en compte.



**Figure IV.3** Coordonnées du centre géométrique C et d'un point arbitraire B de la section du rotor

La déformation en flexion d'un point de l'arbre de coordonnées  $x$  et  $z$  dans R est

$$\varepsilon = \varepsilon_l + \varepsilon_{nl} \quad \text{avec :}$$

déformation linéaire:

$$\varepsilon_l = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (4.8)$$

déformation non linéaire:

$$\varepsilon_{nl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \quad (4.9)$$

L'expression générale de l'énergie de déformation du rotor en flexion est alors

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^t [\sigma] d\tau \quad (4.10)$$

où  $\tau$  est le volume de l'arbre et  $\sigma$  est la contrainte de flexion.

La relation entre contraintes et déformations est:  $\sigma = E\varepsilon$ , donc :

$$U = \frac{E}{2} \int_V (\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_l \varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl}^2) d\tau \quad (4.11)$$

A cause de la symétrie de l'arbre par rapport aux axes x et y :

$$\int_V \varepsilon_{nl} \varepsilon_l d\tau = 0 \quad (4.12)$$

Le troisième terme de l'intégrale (4.11) représente l'effet d'une force axiale et n'est pas pris en compte dans cette étude. En utilisant (4.8):

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left( -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS dy \quad (4.13)$$

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left( x^2 \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xy \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) dS dy \quad (4.14)$$

Par symétrie, le troisième terme de (4.14) est nul et, en introduisant les inerties de section :

$$\begin{aligned} I_x &= \int_S z^2 dS \\ I_z &= \int_S x^2 dS \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\int_S xz dS = 0$$

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left( I_z \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (4.16)$$

Pour éviter des termes périodiques, explicitement fonction du temps, il est nécessaire compte tenu des propriétés des paliers, d'exprimer l'énergie de déformation en fonction de  $U$  et  $w$  composantes du déplacement dans  $R_0$ . Le passage de  $u^*$ ,  $w^*$  à  $u$ ,  $w$  s'écrit (Figure. IV.3) :

$$\begin{cases} u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \\ w^* = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \end{cases} \quad (4.17)$$

En remplaçant  $u^*$  et  $w^*$  par leurs valeurs (4.17) :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left( I_z \left( \cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (4.18)$$

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L I_z \left( \cos^2 \Omega t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \sin^2 \Omega t \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) + I_x \left( \sin^2 \Omega t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \cos^2 \Omega t \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) \quad (4.19)$$

pour un arbre symétrique (où.  $I_x = I_z = I_a$ .) L'expression de l'énergie potentielle devient :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L I_z \left( (\cos^2 \Omega t + \sin^2 \Omega t) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + (\sin^2 \Omega t + \cos^2 \Omega t) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) \quad (4.20)$$

Finalement :

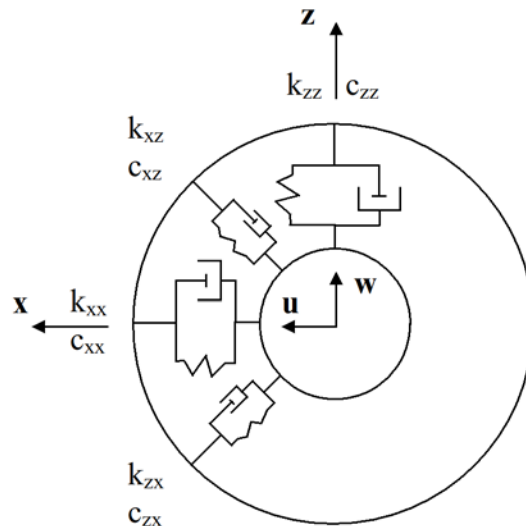
$$U = \frac{E}{2} \int_0^L I_z \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) \quad (4.21)$$

### IV.1.3 Paliers

Un palier comporte des caractéristiques de raideur et d'amortissement dans les deux plans, plus des termes croisés (Figure IV.4). Les forces induites par ces paliers sont dues au déplacement de l'arbre (repère R) par rapport au support (repère  $R_s$ ). Elles ne dépendent donc pas du mouvement du repère  $R_s$  par rapport au repère  $R_0$ .

Le travail virtuel  $\delta W_p$ , des forces extérieures agissant sur l'arbre s'écrit sous la forme :

$$\delta W_p = -k_{xx} u \delta u - k_{xz} w \delta u - k_{zx} u \delta w - c_{xx} \dot{u} \delta u - c_{xz} \dot{w} \delta u - c_{zx} \dot{u} \delta w - c_{zz} \dot{w} \delta w \quad (4.22)$$



**Figure IV.4** Amortissement et raideur des paliers

Ou sous une forme plus compacte :

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w \quad (4.23)$$

Où  $F_u$  et  $F_w$  sont les forces généralisées déterminées à partir des caractéristiques de raideur et d'amortissement des paliers (figure IV.4). En utilisant les deux équations (4.22) et (4.23) il vient:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

**Remarque :** ces équations peuvent également être exprimées en fonction des déplacements dans le repère R. Ces dernières ne font intervenir que  $k_{xx}$  et  $k_{zz}$  sont obtenues à partir de l'expression du travail virtuel suivant :

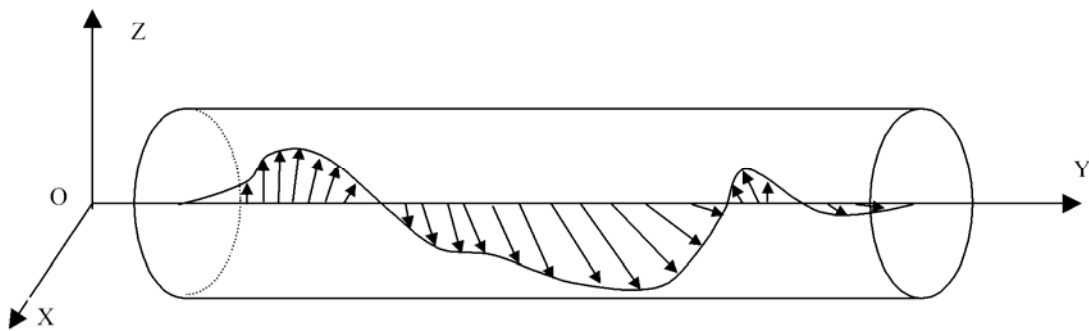
$$\begin{aligned} \delta W_p = & -k_{xx} (u^* \cos \Omega t + w^* \sin \Omega t) (\delta u^* \cos \Omega t + \delta w^* \sin \Omega t) \\ & - k_{zz} (-u^* \sin \Omega t + w^* \cos \Omega t) (-\delta u^* \sin \Omega t + \delta w^* \cos \Omega t) \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \delta W_p = & - \left[ (k_{xx} \cos^2 \Omega t + k_{zz} \sin^2 \Omega t) u^* + \frac{\sin 2\Omega t}{2} (k_{xx} - k_{zz}) w^* \right] \delta u^* \\ & - \left[ (k_{xx} \sin^2 \Omega t + k_{zz} \cos^2 \Omega t) w^* + \frac{\sin 2\Omega t}{2} (k_{xx} - k_{zz}) u^* \right] \delta w^* \end{aligned} \quad (4.26)$$

L'équation (4.26) montre que, si  $k_{xx} \neq k_{zz}$  la contribution des paliers ne permet pas dans ce cas d'éliminer la variable temps des équations.

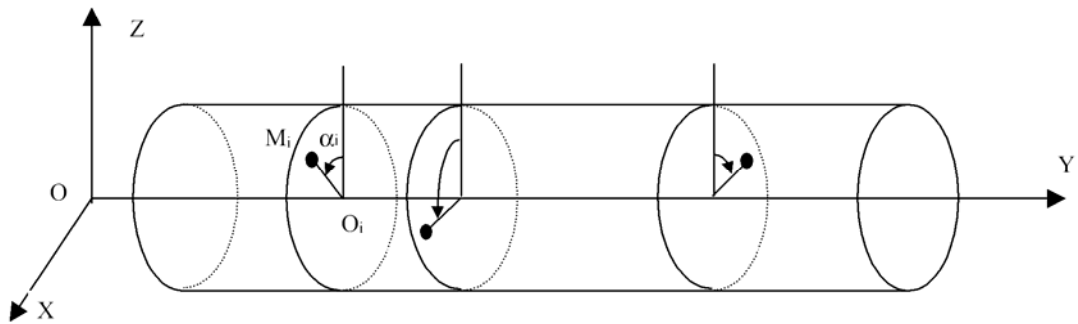
### III.1.4 Le balourd

Le balourd initial est généralement réparti de manière continue et quelconque sur le rotor (figure IV.5)



**Figure IV.5** Répartition du balourd sur le rotor

Pour modéliser simplement le balourd, il est décomposé en masses concentrées situées dans différents plans (figure IV.5). Ces masses sont supposées avoir le même effet que le balourd continu sur le comportement dynamique du rotor.

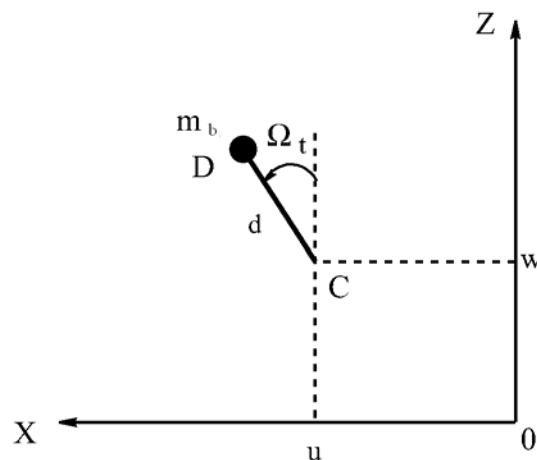


**Figure IV.6** Modélisation de la répartition du balourd sur le rotor

A l'arrêt, la position  $M_i$  de chaque masse  $m_i$  est définie par

- son abscisse sur l'axe  $Y_i$ .
- la distance  $r_i = O_i M_i$ ,  $O_i$  étant le centre de la section de l'arbre,
- l'angle  $\alpha_i$ , que fait la position de la masse par rapport au repère tournant de référence. Lors de la rotation du rotor, chaque masse  $m_i$  est liée à l'arbre en position déformée (figure IV.7).

la masse  $m$  située à la distance  $d$  du centre géométrique de l'arbre. Son énergie cinétique doit être prise en compte.



**Figure IV.7** Masse de balourd

La masse reste dans un plan perpendiculaire à l'axe  $y$ , sa coordonnée selon cet axe dans le repère  $R_0$  est donc constante.

$$\overrightarrow{OD} = \begin{bmatrix} u + d \sin \Omega t \\ \text{constante} \\ w + d \cos \Omega t \end{bmatrix}_{R_0} \quad (4.27)$$

La vitesse du balourd s'écrit alors :



$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OD}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{u} + d\Omega \cos \Omega t \\ 0 \\ \dot{w} + d\Omega \sin \Omega t \end{bmatrix}_{R_0} \quad (4.28)$$

L'expression de l'énergie cinétique  $T_b$  du balourd:

$$T_b = \frac{1}{2} m_b (\vec{V}^0(D))^2 \quad (4.29)$$

Introduisant (4.28) dans (4.29) :

$$T_b = \frac{m_b}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega \dot{u} d \cos \Omega t - 2\Omega \dot{w} d \sin \Omega t) \quad (4.30)$$

Le terme  $\Omega^2 d^2 / 2$  est constant et n'interviendra pas dans les équations. La masse du balourd étant négligeable par rapport à la masse de rotor, l'expression de l'énergie cinétique peut être approximée par:

$$T_b \approx m_b \Omega d (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \quad (4.31)$$

Les expressions de l'énergie cinétique, de déformation et du travail virtuel étant établies, la dissipation due à l'amortissement interne peut être développée via des modèles analytiques ou éléments finis.

## IV.2 Modèle simple

Notre objectif est de présenter la mise en place d'un modèle de calcul permettant, à l'aide d'une approche simplifiée, de déterminer le comportement dynamique d'un rotor vertical pas à pas dans le temps. Ainsi, après avoir validé le modèle sur des exemples de référence, nous pourrions évaluer l'influence de l'action non linéaire d'un palier à air sur le comportement de l'ensemble.

### IV.2.1. Description du modèle

Le modèle retenu est issu de [31]. Il s'agit d'un modèle simple mais réaliste, permettant de rendre compte des phénomènes de base de la dynamique des rotors.

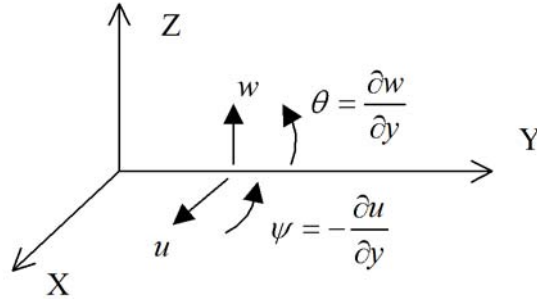
$R_0(X, Y, Z)$  est le repère initial, l'axe du rotor au repos étant porté par la direction Y. La vitesse de rotation est constante. Afin de pouvoir simplifier les calculs, un seul degré de liberté est utilisé pour les déplacements dans les directions X et Z.

Les expressions des déplacements dans les directions X et Z sont respectivement mises sous la forme (méthode de séparation des variables)

$$\begin{aligned} u(y, t) &= f(y) q_1(t) = f(y) q_1 \\ w(y, t) &= f(y) q_2(t) = f(y) q_2 \end{aligned} \quad (4.32)$$

où  $q_1$  et  $q_2$  sont des coordonnées indépendantes généralisées. Etant donné, que les déplacements angulaires  $\psi$  et  $\theta$ , Figure IV.8, sont petits, ils sont approchés par :

$$\begin{cases} \theta = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{df(y)}{dy} q_2 = g(y) q_2 \\ \psi = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{df(y)}{dy} q_1 = -g(y) q_1 \end{cases} \quad (4.33)$$



**Figure IV.8** Représentation des coordonnées

Le second ordre des dérivées des déplacements  $u$  et  $w$  est nécessaire pour exprimer l'énergie élastique de l'arbre

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{d^2 f(y)}{dy^2} q_1 = h(y) q_1 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{d^2 f(y)}{dy^2} q_2 = h(y) q_2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

La fonction de déplacement  $f$  est choisie pour représenter exactement la forme du premier mode d'une poutre de section constante en flexion sur deux appuis situés à ses extrémités.

$$f(y) = \sin \frac{\pi y}{L} \quad (4.35)$$

D'où, 
$$g(y) = \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi y}{L} \quad (4.36)$$

$$h(y) = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin \frac{\pi y}{L} \quad (4.37)$$

Dans ce qui suit toutes les expressions seront données en fonction des coordonnées généralisées  $q_1$  et  $q_2$  et de leurs dérivées.

Les constituants de la ligne d'arbre à prendre en compte sont:

- le(s) disque(s)
- le rotor (section circulaire pleine ou creuse)
- le(s) roulement(s), (palier(s) à action linéaire)
- le(s) palier(s) aérodynamique(s), (palier(s) à action non linéaire)
- le(s) balourd(s)

### IV.2.2 Élément de disque

Le disque est considéré comme étant parfaitement axisymétrique. Son énergie cinétique  $T_D$ , peut s'écrire de la façon suivante:

$$T_D = \frac{1}{2} [M_D f^2(y_{disk}) + I_{Dx} g^2(y_{dick})] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - I_{Dy} \Omega g^2(y_{dick}) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (4.38)$$

Le disque est considéré rigide, son énergie de déformation est donc nulle.

### IV.2.3 Elément de l'arbre

Le rotor est lui aussi considéré axisymétrique. L'expression de son énergie cinétique,  $T_S$ , est la suivante:

$$T_S = \frac{1}{2} \left[ \rho S \int_0^L f^2(y) dy + \rho I \int_0^L g^2(y) dy \right] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2\rho I \Omega \int_0^L g^2(y) dy \dot{q}_1 q_2 \quad (4.39)$$

L'énergie de déformation de l'arbre  $U_S$ , s'écrit:

$$U_S = \frac{EI}{2} \int_0^L h^2(y) dy (q_1^2 + q_2^2) \quad (4.40)$$

Il peut être intéressant d'exprimer l'énergie cinétique  $T_{DS}$ , de l'ensemble disque — rotor.

$$T_{DS} = T_S + T_D = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - a \Omega \dot{q}_1 q_2 \quad (4.41)$$

$$\text{avec } m = \left[ M_D f^2(y_{disk}) + I_{Dx} g^2(y_{disk}) + \rho S \int_0^L f^2(y) dy + \rho I \int_0^L g^2(y) dy \right]$$

$$\text{et } a = I_{Dy} g^2(y_{disk}) + 2\rho I \int_0^L g^2(y) dy$$

### IV.2.4. Paliers à roulement

La ligne d'arbre peut éventuellement recevoir des paliers à roulement. L'expression du travail virtuel des forces exercées sur la ligne d'arbre s'écrit de la façon suivante :

$$\delta W = F_1 q_1 \delta q_1 + F_2 q_2 \delta q_2$$

Nous n'avons pris en compte ici que les termes directs de la matrice de raideur qui sont dans un premier temps assez représentatifs du comportement des roulements. En plus de la géométrie du palier et de la déformation de sa structure, il prend en compte la position de l'arbre à l'intérieur du palier qui peut être due au déplacement et à la déformation du rotor.

### IV.2.5. Balourd

La ligne d'arbre peut être déséquilibrée par la présence d'un balourd. L'énergie cinétique du balourd s'écrit :

$$T_u = m_b d \Omega f(y_{bal}) (\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t) \quad (4.42)$$

### IV.2.6. Equations du mouvement

L'application des équations de Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_c}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = \delta W_i \quad \text{avec } i=1, 2 \quad (4.43)$$

permet d'obtenir le système d'équations du rotor:

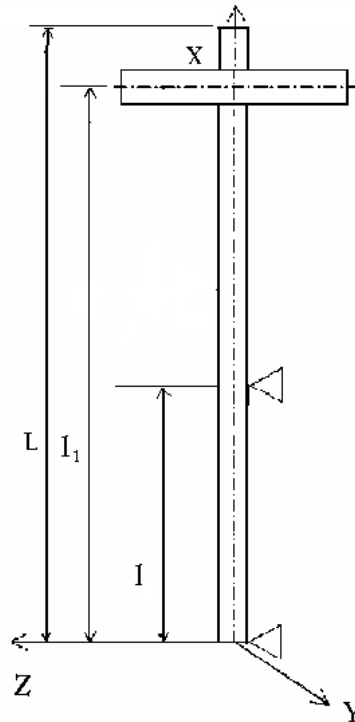
a) La résolution de ce système d'équations permet d'obtenir les déflexions de la ligne d'arbre en chacun de ses points.

b) Le système d'équations de la dynamique de rotor permet alors de calculer les composantes de l'accélération du rotor.

Les conditions initiales sont choisies de façon arbitraire. Elles peuvent aussi résulter d'un calcul antérieur. Etant donné que la sollicitation extérieure est de nature cyclique.

#### IV.2.7 Validation du modèle

Le premier cas concerne une ligne d'arbre simplement supportée par deux appuis.



**Figure IV.9** Schématisation du modèle simple du rotor

Les données numériques communes du cas étudié sont:

Exemple : données :

Disque :

Rayon intérieur  $R_1 = 0.025 \text{ m}$

Rayon extérieur  $R_2 = 0.15 \text{ m}$

épaisseur  $h = 0.03 \text{ m}$

Masse volumique  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

$l_1 = 1 \text{ m}$

La masse et les inerties du disque sont :

$$M_d = \pi (R_2^2 - R_1^2) h \rho = 16.07 \text{ kg}$$

$$I_{dx} = I_{dz} = \frac{M_d}{12} (3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2) = 9.41 \times 10^{-2} \text{ kg.m}^2$$

$$I_{dy} = \frac{M_d}{12} (R_1^2 + R_2^2) = 0,1858 \text{ kg.m}^2$$

Arbre :

Longueur  $L = 1,2 \text{ m}$

Rayon de section droite  $R_1 = 0.025 \text{ m}$

Masse volumique  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^2$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

L'aire de la section droite et le moment d'inertie sont :

$$S = \pi R_1^2 = 1.96 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{\pi R_1^4}{4} = 3.066 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

Balourd :

$$\text{masse } m_b = 10^{-4} \text{ kg}$$

$$\text{distance } d = 0.15 \text{ m}$$

Les fonctions de déplacement sont celles du premier mode d'une poutre de section constante, en flexion et appuyée aux deux extrémités, soit :

$$f(y) = \sin \frac{\pi y}{L} = \sin \frac{\pi y}{1,2}$$

Les expressions générales de l'énergie cinétique  $T$ , de l'énergie de déformation  $U$  et du travail virtuel  $\delta W$  peuvent être obtenus.

L'énergie cinétique a pour expression :

$$T = T_d + T_a + T_b$$

où  $T_d, T_a, T_b$  sont les énergies cinétiques respectives du disque, de l'arbre, du balourd.

Tous calculs faits, on a :

$$T = 2.25(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 0.975\Omega \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 7.5 \times 10^{-6} \Omega (\cos \Omega t \dot{q}_1 - \sin \Omega t \dot{q}_2) \quad (4.44)$$

L'énergie de déformation a pour expression :

$$U_a = 17.28 \times 10^5 (q_1^2 + q_2^2) \quad (4.45)$$

#### IV.2.7.1 Modèle symétrique

L'application des équations de Lagrange (4.43) en utilisant les expressions (4.44) et (4.45) conduit aux équations du mouvement :

$$\begin{aligned} 4.5\ddot{q}_1 - 0.975\Omega \dot{q}_2 + 3.456 \times 10^6 q_1 &= 0.75 \times 10^{-5} \Omega^2 \sin \Omega t \\ 4.5\ddot{q}_2 + 0.975\Omega \dot{q}_1 + 3.456 \times 10^6 q_2 &= 0.75 \times 10^{-5} \Omega^2 \cos \Omega t \end{aligned} \quad (4.46)$$

Qui, sous forme générale s'écrivent :

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 - a\Omega \dot{q}_2 + k q_1 &= m_b d \Omega^2 f(l_1) \sin \Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega \dot{q}_1 + k q_2 &= m_b d \Omega^2 f(l_1) \cos \Omega t \end{aligned} \quad (4.47)$$

#### IV.2.7.2 Fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation

##### Diagramme de Campbell

Le rotor est tout d'abord étudié en mouvement libre. Seule la solution de système (4.49) sans second membre, est considérée :

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 - a\Omega \dot{q}_2 + k q_1 &= 0 \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega \dot{q}_1 + k q_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.49)$$

La deuxième matrice, représente l'effet gyroscopique. Les deux autres matrices sont les matrices de masse et de raideur. Les solutions des équations sont de la forme :

$$\begin{cases} q_1 = Q_1 \exp(rt) \\ q_2 = Q_2 \exp(rt) \end{cases} \quad (4.50)$$

En remplaçant (4.52) dans (4.51), il vient :

$$\begin{bmatrix} k + m r^2 & -a \Omega r \\ a \Omega r & k + m r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.51)$$

La solution simple  $Q_1 = Q_2 = 0$  est sans intérêt et les autres solutions sont celles qui correspondent à l'annulation du déterminant de la matrice. Le calcul du déterminant donne l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned} (k + m r^2)^2 + a^2 \Omega^2 r^2 &= 0 \\ m^2 r^4 + (2km + a^2 \Omega^2) r^2 + k^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

A l'arrêt ( $\Omega = 0$ ), les racines  $r_{10}$  et  $r_{20}$  de (4.52) sont :

$$r_{10}^2 = r_{20}^2 = j^2 \omega_{10}^2 = j^2 \omega_{20}^2 = -\frac{k}{m} \quad (4.53)$$

Avec  $j^2 = -1$

Et les pulsations :

$$\omega_{10} = \omega_{20} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.54)$$

En rotation ( $\Omega \neq 0$ ), les racines de (4.52) sont  $r_1$  et  $r_2$  et les pulsations correspondantes  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Il vient :

$$r_1^2 = -\left[ \omega_{10}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_{10}^2}{a^2 \Omega^2}} \right) \right] = j^2 \omega_1^2 \quad (4.55)$$

Alors :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_{10}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_{10}^2}{a^2 \Omega^2}} \right)} \quad (4.56)$$

Et :

$$r_2^2 = -\left[ \omega_{10}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_{10}^2}{a^2 \Omega^2}} \right) \right] = j^2 \omega_2^2 \quad (4.57)$$

Alors :

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_{10}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_{10}^2}{a^2 \Omega^2}} \right)} \quad (4.58)$$

A partir de (4.56) et (4.58) il est clair que :

$$\omega_1 < \omega_{10} = \omega_{20} < \omega_2 \quad (4.59)$$

De plus, les équations (4.55) et (4.57) montrent que  $r_1^2$  et  $r_2^2$  sont des quantités négatives ; ainsi sont des quantités imaginaires et la solution générale du mouvement reste donc limitée dans le temps, le rotor est stable. La représentation de  $\omega$  en fonction de la vitesse de rotation,  $\omega_1 = \omega_1(\Omega)$  et  $\omega_2 = \omega_2(\Omega)$  est le diagramme de Campbell. En général le diagramme de Campbell représente  $f_1$  et  $f_2$  :

$$\begin{aligned} f_1 &= \omega_1 / 2\pi \\ f_2 &= \omega_2 / 2\pi \end{aligned} \quad (4.60)$$

en fonction de la vitesse de rotation  $N$  (tr/min) qui est reliée à  $\Omega$  (rad/s) par :

$$N = 30\Omega / \pi \quad (4.61)$$

Ici  $\omega$  et  $\Omega$  sont des pulsations et  $f$  une fréquence. Dans ce qui suit les trois quantités sont simplement appelées fréquences. Compte tenu des symboles utilisés, il est facile de savoir de quelle unité il s'agit. Les formes modales (modes) sont examinées ensuite. La première équation de (4.51) donne :

$$Q_1 = \frac{a\Omega r Q_2}{k + mr^2} \quad (4.62)$$

Il est clair que les modes sont complexes ( $r = \pm j\omega$ ) et leur interprétation délicate. Choisissons l'ensemble de conditions initiales suivant, à  $t_0 = 0$  :

$$\begin{cases} q_1 = q_{10} \\ \dot{q}_1 = 0 \\ q_2 = -q_{10} \\ \dot{q}_2 = -\omega_2 q_{10} \end{cases} \quad (4.63)$$

Tous calculs faits, il vient :

$$\begin{aligned} q_1 &= -q_{10} \cos \omega_2 t \\ q_2 &= q_{10} \sin \omega_2 t \end{aligned} \quad (4.64)$$

Les déplacements  $u$  et  $v$  d'un point situé à de l'origine de l'axe du rotor sont donnés par (4.32), soit :

$$\begin{cases} u(l,t) = q_{10} \sin \frac{\pi l}{L} \cos \omega_2 t = R \cos \omega_2 t \\ u(l,t) = -q_{10} \sin \frac{\pi l}{L} \sin \omega_2 t = -R \sin \omega_2 t \end{cases} \quad (4.65)$$

Tel que :

$$R = \sqrt{u^2(l,t) + v^2(l,t)} = q_{10} \sin \frac{\pi l}{L} \quad (4.66)$$

Pour notre cas le rotor est défini par les équations :

$$r^4 + (1.536 \times 10^6 + 4.69 \times 10^{-2} \Omega^2) r^2 + 5.898 \times 10^{11} = 0 \quad (4.67)$$

Les fréquences à l'arrêt du rotor sont :

$$f_{10} = \frac{\omega_{10}}{2\pi} = f_{20} = \frac{\omega_{20}}{2\pi} = 139.48 \text{ Hz} \quad (4.68)$$

Les fréquences en rotation sont :

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{7,68 \times 10^5 + 2,347 \times 10^{-2} \Omega^2 \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{6.544 \times 10^7}{\Omega^2}} \right)} \quad (4.69)$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{7,68 \times 10^5 + 2,347 \times 10^{-2} \Omega^2 \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{6.544 \times 10^7}{\Omega^2}} \right)} \quad (4.70)$$

Le diagramme de Campbell [ $f_1 = f_1(N)$   $f_2 = f_2(N)$ ] est présenté sur la figure IV.10 et les intersections de  $f_1(N)$ ,  $f_2(N)$  avec deux droites sont indiquées. Les points A et B correspondent aux intersections avec la droite  $f = N/60$  ; à c e s deux points une fréquence du rotor égale la fréquence de rotation. Les points C et D correspondent aux intersections avec la droite  $f = 0,5 N / 60$  ; ces deux points correspondent à une fréquence du rotor égale à la moitié de la fréquence de rotation. Il est intéressant d'avoir une expression générale des fréquences correspondant aux points A, B, C, D.

La relation entre  $\omega$  et  $\Omega$  est :

$$\omega = s \Omega \quad (4.71)$$

où  $s = 1$  en A et B,  $s = 0,5$  en C et D, les expressions  $r_1^2 = j^2 \omega_1^2$  et  $r_2^2 = j^2 \omega_2^2$  permettent d'écrire :

$$r = \pm j \omega = \pm j s \Omega \quad (4.72)$$

Substituent dans (4.52) on trouve :

$$\begin{aligned} s^4 m^2 \Omega^4 - (2km + a^2 \Omega^2) s^2 \Omega^2 + k^2 &= 0 \\ s^2 (s^2 m^2 - a^2) \Omega^4 - 2km s^2 \Omega^2 + k^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.73)$$

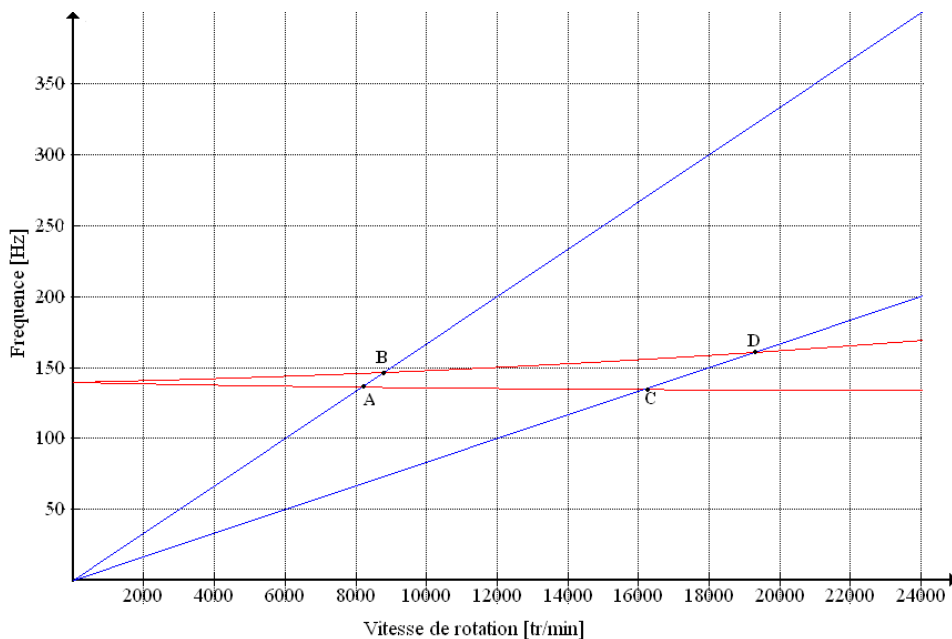


Figure IV.10 Diagramme de Campbell pour modèle simple



Les solutions de (4.73) sont :

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{s(sm+a)}} \quad (4.74)$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{k}{s(sm-a)}} \quad (4.75)$$

Et a partir de (4.71) on tire le fréquence  $\omega_1$  qui correspond aux points A(s=1) et

$$C(s=0,5) \quad \omega_1 = s \sqrt{\frac{k}{s(sm+a)}} \quad (4.76)$$

et de (4.71)  $\omega_2$  qui correspond aux points B(s=1) et D(s=0,5)

$$\omega_2 = s \sqrt{\frac{k}{s(sm-a)}} \quad (4.77)$$

Pour l'application :

- en A :  $f_1 = 135,5$  Hz ;  $N = 8190$  tr/min
- en B :  $f_2 = 146,5$  Hz ;  $N = 8795$  tr/min
- en C :  $f_1 = 134,7$  Hz ;  $N = 16170$  tr/min
- en D :  $f_2 = 160,5$  Hz ;  $N = 19260$  tr/min

### IV.2.7.3 Réponse aux forces d'excitation

Il s'agit ici de réponses en régime permanent. Seule la solution particulière des équations complètes (4.47) est considérée.

#### IV.2.7.3.a. Balourd

Les équations avec  $m^* = m_b f(l_1)$  deviennent :

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = m^*d\Omega^2 \sin\Omega t \quad (4.78)$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = m^*d\Omega^2 \cos\Omega t$$

et comme il n'y a pas d'amortissement, les solutions peuvent être cherchées sous la forme :

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_1 \sin\Omega t \\ q_2 &= Q_2 \cos\Omega t \end{aligned} \quad (4.79)$$

Remplaçant (4.79) dans (4.78) :

$$-m\Omega^2 Q_1 + a\Omega^2 Q_2 + kQ_1 = m^*d\Omega^2 \quad (4.80)$$

$$-m\Omega^2 Q_2 + a\Omega^2 Q_1 + kQ_2 = m^*d\Omega^2$$

$$\text{on trouve } Q_1 = Q_2 = \frac{m^*.d\Omega^2}{k + (a-m)\Omega^2} \quad (4.81)$$

La vitesse critique  $\Omega_c$ , correspond à la valeur de la vitesse qui rend les déplacements infinis et l'annulation du dénominateur de (4.81) entraîne :

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{k}{m-a}} \quad (4.82)$$

Ce résultat montre une seule vitesse critique, elle correspond à la valeur de  $\Omega_2$  donnée en (4.75), quand  $s = 1$ . La valeur correspondante est celle du point B de la figure IV.10.

pour le rotor défini par les équations (4.46)

$$Q_1 = Q_2 = \frac{0.75 \times 10^{-5} \Omega^2}{3.456 \times 10^6 - 3.525 \Omega^2} \quad (4.83)$$

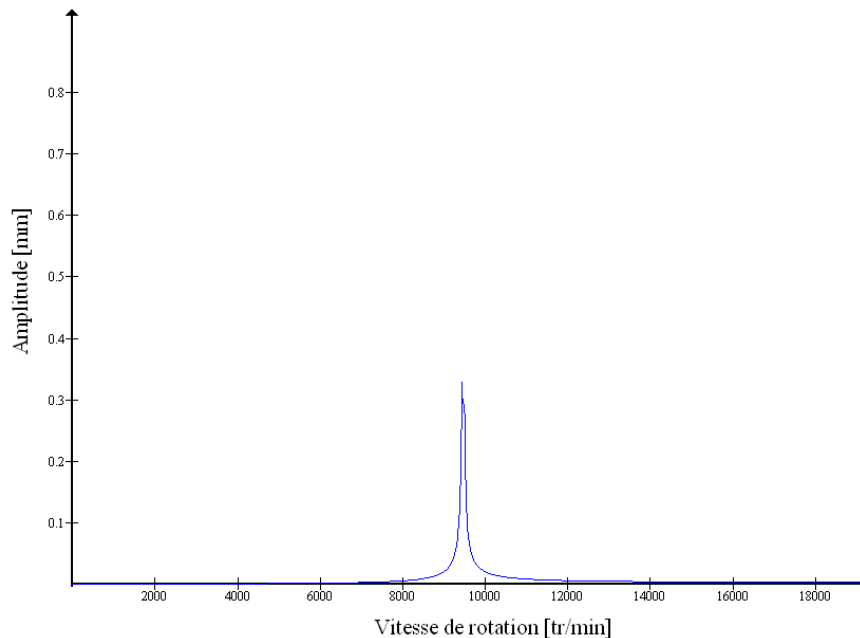
et la vitesse critique correspond à  $\Omega_c / 2\pi = 157,5$  Hz ; soit  $N = 9453$  tr/min. Il faut remarquer que lorsque  $\Omega$  croît, la valeur limite du déplacement est :

$$|Q_1| = |Q_2| = \left| \frac{m * d}{a - m} \right| \quad (4.84)$$

Pour notre cas :

$$|Q_1| = |Q_2| = 2,127 \times 10^{-6} \text{ m}$$

L'amplitude de la réponse  $Q_1$  est représentée sur la figure IV.11.



**Figure IV.11** Réponse à un balourd

Amplitude :  $A_{\max} = 0.35 \times 10^{-3} \text{ m}$ , vitesse de rotation :  $N = 9453 \text{ tr/min}$

#### IV.2.7.3.b Force asynchrone

En fonctionnement le rotor peut être excité par des forces asynchrones. Une force asynchrone est une force d'amplitude constante  $F_0$  tournant à une vitesse ( $s \Omega$ ) différente de celle du rotor. Si cette force est en  $l_3$  il vient :

$$F_{q_1} = F_0 f(l_3) \sin s\Omega t = F \sin s\Omega t \quad (4.85)$$

$$F_{q_2} = F_0 f(l_3) \cos s\Omega t = F \cos s\Omega t$$

Les équations à résoudre :

$$m \ddot{q}_1 - a \Omega \dot{q}_2 + k q_1 = F \sin s\Omega t \quad (4.86)$$

$$m \ddot{q}_2 + a \Omega \dot{q}_1 + k q_2 = F \cos s\Omega t$$

et comme il n'y a pas d'amortissement, les solutions peuvent être cherchées sous la forme :

$$q_1 = Q_1 \sin s \Omega t \quad (4.87)$$

$$q_2 = Q_2 \cos s \Omega t$$

D'où :

$$Q_1 = Q_2 = \frac{F}{k + (a s - m s^2) \Omega^2} \quad (4.88)$$

La vitesse critique  $\Omega_c$ , correspond à l'annulation du dénominateur de (4.88) :

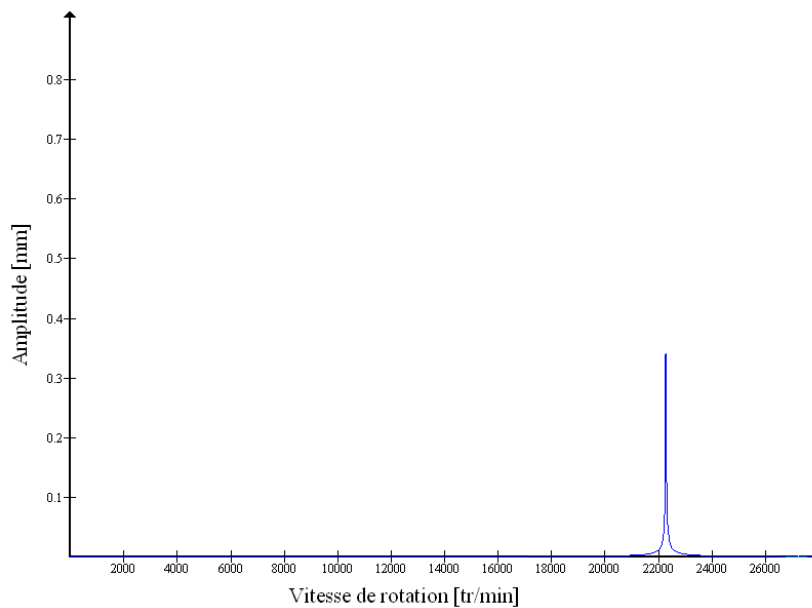
$$\Omega_c = \sqrt{\frac{k}{s(m s - a)}} \quad (4.89)$$

Le résultat montre une seule vitesse critique, elle correspond à la valeur de  $\Omega_2$  donnée en (4.75), la valeur correspondante est celle du point D de la figure IV.10.

Pour le rotor défini par (4.46)

$$Q_1 = Q_2 = \frac{F}{3.456 \times 10^6 - 0.637 \Omega^2} \quad (4.90)$$

et la vitesse correspond à  $\Omega_c / 2\pi = 370.8$  Hz ; soit  $N = 22\ 250$  tr/min. L'amplitude de la réponse  $Q_1$  est représentée sur la figure IV.12 avec  $F = 1$  N.



**Figure IV.12** Réponse à une force asynchrone

Amplitude :  $A_{\max} = 0.34 \times 10^{-3}$  m , Vitesse de rotation :  $N = 22250$  tr / min

### IV.3 Modélisation des rotors par éléments finis

La mise en équations d'un système de solides, reliés par des éléments flexibles (de raideurs connues) et des amortisseurs (de constantes données) fournit une modélisation exacte du système. La modélisation en système continu (masse et rigidité réparties sur tout l'élément) fournit des résultats analytiques en s'appuyant sur la mécanique des milieux continus. Ses formulations sont générales mais ses résultats analytiques se limitent à des cas élémentaires. Les vibrations d'une structure plus complexe, admettant un nombre élevé de degrés de liberté (ddl), nécessitent une méthode générale, modulable et programmable. La méthode des éléments finis (MEF) décompose une structure en petits éléments simples, discrétisés, de type poutre, plaque, rotor... Le comportement vibratoire de l'élément est ramené à celui des noeuds. Ensuite on connecte les différents éléments (maillage) en respectant les conditions de continuité.

On peut alors extraire les matrices de masse et de raideur de la structure complète et déduire les pulsations propres du système non amorti et ses modes normaux. Cet outil de simulation de systèmes mécaniques permet de mieux comprendre le comportement d'un rotor.

L'effet gyroscopique doit être pris en compte et des méthodes de résolution spécifiques peuvent être avantageusement employées.

#### IV.3.1 Éléments finis de rotor

Il est nécessaire de définir les éléments finis permettant de modéliser les rotors : disques, arbres, paliers et de représenter les forces extérieures, en particulier celles dues aux balourds.

##### IV.3.1.1 Disque

Chaque noeud possède quatre degrés de liberté : deux déplacements  $u, w$ , suivant  $X$  et  $Z$ , et deux pentes  $\theta$  et  $\psi$  autour de  $X$  et  $Z$ . Le vecteur  $\delta$  des déplacements nodaux du centre du disque est :

$$\delta = [u, w, \theta, \psi]^t \quad (4.91)$$

L'application des équations de Lagrange à l'expression suivant :

$$T_d = \frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \quad (4.92)$$

La première matrice est la matrice de masse et la seconde est la matrice gyroscopique.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = \begin{bmatrix} M_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{dy} \\ 0 & 0 & I_{dy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

### IV.3.1.2 Arbre

L'arbre est modélisé par des éléments de poutre de section circulaire constante. L'élément fini classique utilisé a 2 noeuds et 4 degrés de liberté par noeud ; les matrices élémentaires ont donc 8 degrés de liberté. Les relations pentes-déplacements sont :

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4.94)$$

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.95)$$

et le vecteur des déplacements nodaux est :

$$\delta = [u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \psi_2]^t \quad (4.96)$$

De plus, on définit les vecteurs  $\delta u$ ,  $\delta w$  tels que :

$$\delta u = [u_1, \psi_1, u_2, \psi_2]^t \quad (4.97)$$

$$\delta w = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2]^t \quad (4.98)$$

et on construit les matrices caractéristiques à partir de :

$$u = N_1(y) \delta u \quad (4.99)$$

$$w = N_2(y) \delta w \quad (4.100)$$

Où  $N_1(y)$  et  $N_2(y)$  sont les fonctions de forme classiques d'une poutre en flexion:

$$N_1(y) =$$

$$\left[ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (4.101)$$

$$N_2(y) =$$

$$\left[ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (4.102)$$

L'énergie cinétique est obtenue à partir de l'expression (4.94) qui donne :

$$\begin{aligned} T_a = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L \left[ \delta \dot{u}^t N_1^t N_1 \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^t N_2^t N_2 \delta \dot{w} \right] dy \\ & + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left[ \delta \dot{u}^t \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^t \frac{dN_2^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \dot{w} \right] dy \\ & - 2\rho I \Omega \int_0^L \delta \dot{u}^t \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta w dy + \rho I L \Omega^2 \end{aligned} \quad (4.103)$$

Et en substituant (4.101) et (4.102) ainsi que leurs dérivées dans (4.103) on aboutit à la forme compacte :

$$T_a = \frac{1}{2} \delta \dot{u}' M_1 \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w}' M_2 \delta \dot{w} + \frac{1}{2} \delta \dot{u}' M_3 \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w}' M_4 \delta \dot{w} + \Omega \delta \dot{u}' M_5 \delta \dot{w} + \rho I L \Omega^2 \quad (4.104)$$

où les matrices  $M_1$  et  $M_2$  sont les matrices classiques de masse,  $M_3$  et  $M_4$  représentent l'effet secondaire d'inertie de rotation de la section par rapport à un diamètre et  $M_5$  l'effet gyroscopique. Le dernier terme qui est une constante a une contribution nulle lors de l'application des équations de Lagrange à (4.104); alors :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_a}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_a}{\partial \delta} = (M + M_a) \ddot{\delta} + C \dot{\delta} \quad (4.105)$$

où  $M$  et  $M_s$  sont déduites respectivement de  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ ,  $M_4$  et où  $C$  vient de  $M_5$ . Les matrices sont :

$$C = \frac{\rho I \Omega}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -36 & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

$$M_a = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

$$M = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.108)$$

L'énergie de déformation est obtenue à partir de l'expression:

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \delta u' \frac{d^2 N_1'}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \delta u + \delta w' \frac{d^2 N_2'}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta w \right] dy \quad (4.109)$$

Après intégration, on a sous une forme compacte :

$$T_a = \frac{1}{2} \delta u' K_1 \delta u + \frac{1}{2} \delta w' K_2 \delta w \quad (4.110)$$

où  $K_1$  et  $K_2$  sont les matrices classiques de raideur. L'effet de cisaillement n'est pas pris en compte.

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 0 & -6L & 4L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

### IV.3.1.3 Paliers

Les caractéristiques de raideur et d'amortissement relient les forces aux déplacements et vitesses. L'influence des pentes et des moments est habituellement négligée et compte tenu de (4. 24) on a :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_\theta \\ F_w \\ F_\psi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \theta \\ w \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & c_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & c_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

La première matrice est une matrice de raideur, la seconde une matrice d'amortissement visqueux. Ces matrices ne sont généralement pas symétriques (paliers hydrodynamiques) et les termes peuvent varier d'une manière importante en fonction de la vitesse de rotation [81].

### IV.3.1.4 Balourds

L'expression générale de l'énergie cinétique due à un balourd est donnée équation (4.31). L'application des équations de Lagrange donne :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = -m_b d \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

avec :

$$\delta = [u, w]^t \quad (4.114)$$

### IV.3.2 Système d'équations

L'obtention du système d'équations se fera classiquement en appliquant les équations de Lagrange.

Le système d'équations général est :

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{Effort\} \quad (4.115)$$

La résolution des équations que nous venons de déterminer conduira donc à obtenir les informations relatives au comportement dynamique du rotor, c'est à dire le mouvement et la déformation de celle-ci dans les paliers.

Nous présentons par la suite une réflexion sur la résolution du système d'équations dynamiques mis en place.

### IV.3.3 Résolution des équations

Si l'on considère que le rotor est discrétiser en n éléments finis, à 4 degrés de liberté, le système obtenu présente ainsi 4(n+1) inconnus. Compte tenu de la taille du système matriciel, la résolution itérative pas à pas dans le temps risque de demander un temps de calcul important, [82]. De plus, la convergence numérique du calcul peut être difficile à obtenir.

C'est ainsi, que l'on retrouve classiquement dans la littérature associée à la dynamique des rotors, l'utilisation de la méthode pseudo-modale, [31, 83]. Elle permet notamment de réduire l'ordre du système d'équations, ce qui autorise un gain important en temps de calcul et en place mémoire. De plus, il est possible d'introduire dans les équations, de l'amortissement modal.

Des travaux similaires sur le comportement dynamique non linéaire des rotors soutenus par des paliers hydrodynamiques, [82], nous apportent des éléments intéressants. Ainsi, il apparaît que pour utiliser la méthode pseudo-modale, il est nécessaire de faire deux hypothèses:

- le comportement des paliers est linéaire, c'est à dire qu'il peut être modélisé par une matrice de raideur [Kp],
- les amortissements ne sont pas pris en compte, aussi bien dans la structure que dans les paliers.

Ces hypothèses permettent de rechercher alors une base modale du système linéaire. Nous ne développons pas la mise en oeuvre de la méthode pour laquelle nous renvoyons aux références [82] et [31].

Il nous a semblé plus important ici de revenir sur les hypothèses formulées pour l'utilisation de la méthode pseudo-modale dans l'étude du comportement dynamique d'une ligne d'arbre soutenue de façon non linéaire par des paliers à air.

Le principal résultat de nos travaux est que les paliers aérodynamiques ont un comportement dynamique non linéaire en ce sens, nous avons montré que l'approche linéaire a un domaine de validité restreint aux faibles excentricités.

Il semble donc qu'il y a lieu de prendre des précautions dans l'utilisation de la méthode pseudo-modale. Compte tenu que la méthode linéaire du calcul des caractéristiques dynamiques des paliers peut amener à des résultats erronés, il peut s'avérer que les modes déterminés par cette méthode ne soient pas corrects. La compréhension des phénomènes dynamiques s'en trouverait alors compromise.

Bonneau, [82], évoque dans ses travaux que le choix de la matrice de raideur des paliers [Kp] est «assez délicat ». Il semble qu'il est nécessaire de prendre



une valeur de raideur faible pour ne pas créer de contraintes sur le déplacement de l'arbre dans les paliers. Les modes de fonctionnement autoriseraient alors une certaine liberté de mouvement.

## Conclusion

Nos efforts se sont portés sur la modélisation du comportement dynamique des systèmes déformables en rotation. Etant donnée l'originalité de cette approche nous avons procédé par des étapes de façon à:

- mieux appréhender la modélisation de rotors déformables,
- affiner la modélisation de l'ensemble pour rendre compte de phénomènes physiques intéressants.

Les possibilités de ces modèles sont nombreuses et dépassent de loin celles du modèle classique du rotor rigide symétrique par :

- la prise en compte de la flexibilité du rotor,
- la prise en compte de disques rigides de dimensions et positions quelconques,
- la prise en compte de roulements définis par leur matrice de raideur et d'amortissement.

Le modèle simple développé a permis de mettre en évidence la spécificité du comportement dynamique des rotors. Ce modèle simplifié nous a permis d'acquérir une expérience intéressante pour l'étude des réponses aux excitations.

Les principales conclusions sont:

Les pics d'amplitude identifiés à l'aide de la courbe de réponse aux excitations présentent des caractéristiques différentes car les valeurs des vitesses de rotation correspondantes à ces pics sont plus ou moins décalées.

En vue d'augmenter les possibilités du code de calcul mis en place, nous avons mené une réflexion sur l'utilisation de la méthode des éléments finis. Les principales caractéristiques de ce type de modélisation ont été présentées. Le point dur reste la résolution des équations obtenues. Dans la littérature de dynamique des rotors, on retrouve le plus souvent la méthode pseudo-modale dont l'efficacité fait la renommée. Toute fois, cette méthode considère que le comportement des paliers est linéaire.

## Chapitre V

### Résultats numériques

#### Introduction

L'analyse modale permet d'établir un modèle de comportement vibratoire d'une structure en basse fréquence (de quelques Hz jusqu'à quelques centaines de Hz). On identifie par le calcul, ces deux paramètres modaux (les fréquences et les vecteurs propres d'un système), on peut construire un modèle analytique qui pourra être employé en simulation pour connaître le comportement dynamique de ce système dans d'autres cas pratiques. En hautes et moyennes fréquences, la densité des modes est souvent trop importante pour que cette méthode soit applicable. Ces considérations dépendent de la complexité du problème étudié pour une poutre ou un rotor, le domaine d'utilisation de l'analyse modale est basé sur quelques hypothèses :

1. Le système est linéaire dans la gamme des amplitudes étudiées.
2. Le système, s'il est continu peut se représenter par un système discret où les paramètres sont exprimés pour chaque noeud du maillage (nombre de degrés de liberté (ddl) total est égale au nombre de noeuds multiplié par le nombre de (ddl) par noeud).
3. L'amortissement qui correspond à la modélisation d'une énergie dissipée proportionnelle à la vitesse est supposé proportionnel à la rigidité et à la masse.
4. Pour des modes clairement identifiés, la méthode de comparaison à une somme de systèmes à 1 ddl est facile à appliquer.

Nous nous intéresserons ici aussi bien à l'aspect numérique qu'à l'aspect pratique, en plus les mathématiques permettent d'exprimer les paramètres modaux à partir des données de l'analyse modale mais aussi à partir des modèles éléments finis de structure.

Il s'agit de calculer le comportement dynamique d'un rotor pas à pas dans le temps, donc notre objectif est de présenter la mise en place d'un modèle de calcul à l'aide d'une approche simplifiée.

La construction du maillage est faite avec le logiciel ANSYS à partir des données fournies pour les profils des différents éléments du rotor.

La modélisation éléments finis nécessite la fourniture de données relatives à la géométrie (coordonnées des noeuds, conditions aux limites, description des éléments : arbre, disque, paliers, éléments supplémentaires), aux données mécaniques (caractéristiques des matériaux, des raideurs et d'amortissement des paliers) et aux informations relatives aux excitations.

Les éléments supplémentaires sont de type masse, raideur, effet gyroscopique et amortissement et ces éléments permettent la modélisation de nombreuses particularités : accouplements, prise en compte du bâti et des supports.

## V.1 Description du modèle

Dans ce chapitre les pales sont modélisé par un disque de façon a calculé les inerties et la masse de ces pales et par la suite introduire ces données pour modélisé le disque.

Le modèle éléments finis du rotor est constitué d'un arbre et disque. L'arbre est de longueur  $L = 1.4 \text{ m}$  et de diamètre externe  $r_a = 0.1 \text{ m}$ . Le matériau est un alliage spécial supposé homogène et isotrope, de densité volumique de masse  $\rho_d = 7850 \text{ kg/m}^3$ , de coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$  et de module d'Young élastique  $E_a = 248 \text{ GPa}$ .

Le disque est une couronne. Le matériau de disque est composite verre époxy supposé homogène et isotrope a pour caractéristique : densité volumique  $\rho_d = 2540 \text{ kg/m}^3$ , de coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$  et de module de Young élastique  $E_d = 73 \text{ GPa}$ .

### V.1.1 Données fournies

Propriété géométrique :

Les pales :

Masse :  $M_d = 396.8 \text{ kg}$

Moment d'inertie :  $I_0 = 4762 \text{ kg.m}^2$

Moment d'inertie polaire :  $I_p = 14.88 \text{ kg.m}^2$

Arbre :

Longueur :  $L = 1.4 \text{ m}$

Diamètre :  $d = 0.1 \text{ m}$

Palier 1 :

$$k_{yy} = 1.10^8 \text{ N/m}$$

$$k_{zz} = 8.10^7 \text{ N/m}$$

$$c_{yy} = 1,2.10^4 \text{ N.s/m}$$

$$c_{zz} = 8.10^3 \text{ N.s/m}$$

Palier 2 :

$$k_{yy} = 7.10^8 \text{ N/m}$$

$$k_{zz} = 5.10^7 \text{ N/m}$$

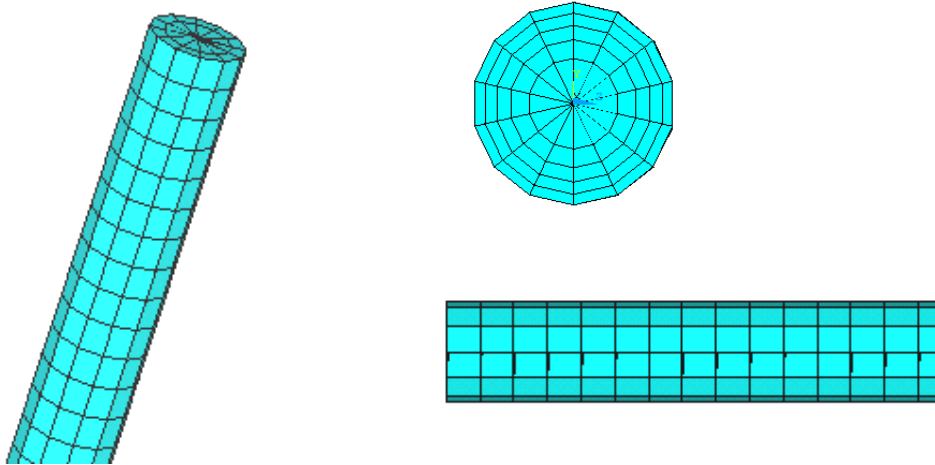
$$c_{yy} = 8.10^3 \text{ N.s/m}$$

$$c_{zz} = 6.10^3 \text{ N.s/m}$$

### V.1.2 Caractéristiques

Le modèle E.F. du rotor est réalisé avec le code de calcul ANSYS, l'arbre est discrétisé par des éléments de poutre à 4 degrés de liberté par nœud, deux déplacements  $u$  et  $w$  et deux rotations selon  $Y$  et  $Z$ . Chaque palier (PA1, PA2) est modélisé par un ensemble raideur /amortisseur suivant les directions  $Y$  et  $Z$  placés aux noeuds 1 et 15. Le modèle E.F. réduit aux dix premiers modes, ce modèle permet de réaliser les simulations temporelles du comportement dynamique de la structure. Le disque est supposé parfaitement rigide et pour sa modélisation on utilise un élément pipe (Pipe16). Pour modéliser l'arbre on utilise l'élément poutre (Beam189). Pour modéliser les paliers on utilise l'élément spring-damper (Combin14).

Le calcul est donc fait à partir de la discrétisation de l'arbre en plusieurs éléments, une fois les données sont introduits le modèle géométrique est établi et on abouti au maillage du rotor.



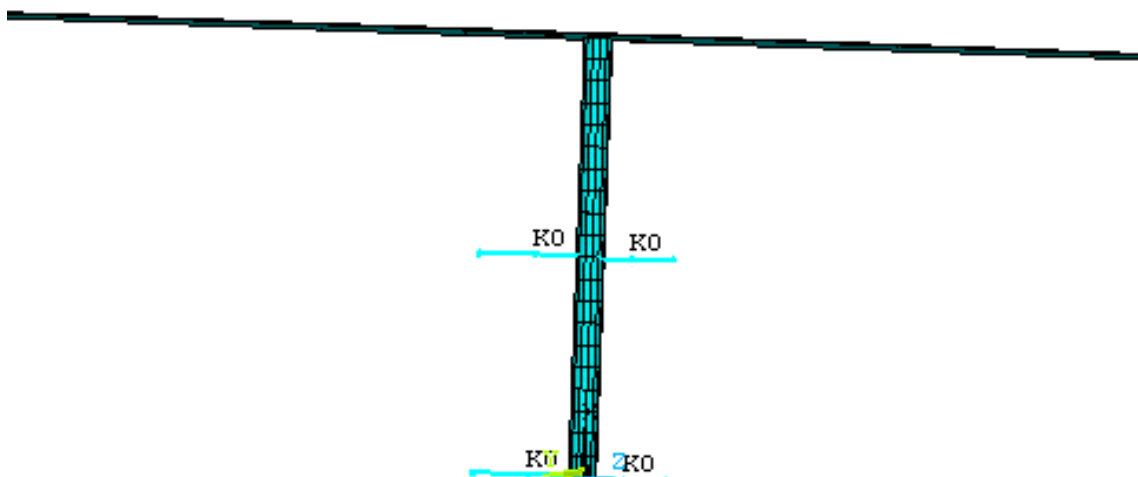
**Figure V.1** Maillage du rotor

L'ensemble des données numériques concernant le maillage de la structure est résumé dans le tableau suivant :

**Tableau V.1** Maillage du rotor

structure	Eléments	Noeuds	DDLs
Rotor	30	51	204

Le modèle comporte 51 noeuds, soit 204 degrés de liberté et la base modale est constituée de dix modes complexes chaque mode complexe comporte une partie réelle et une partie imaginaire.



**Figure V.2** Rotor modèle éléments finis

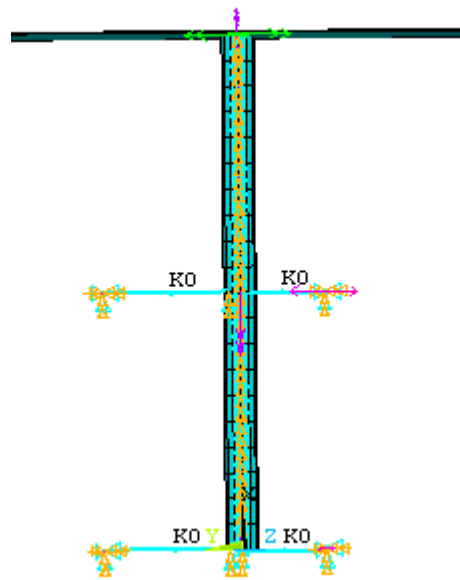
### V.1.3 Conditions aux limites

Maintenant que nous avons modélisé le rotor, on va présenter la méthode de caractérisation des conditions aux limites. La caractérisation de la structure peut se faire par sa décomposition en éléments finis flexibles et donc étudier noeud par noeud les conditions aux limites.

Lors du mouvement, la ligne moyenne de l'arbre ne reste pas confondue avec la droite initiale soient  $(U_x, U_y, U_z)$  les déplacements de l'arbre,  $U_y$  et  $U_z$  sont variables alors que  $U_x$  est considéré comme constant puisque seuls les mouvements de flexion de l'arbre sont étudiés.

Donc pour les nœuds des deux paliers on annule tous les degrés de libertés.

Pour les noeuds propres au rotor on annule les degrés de liberté de translation et de rotation suivant l'axe x, il ne reste que quatre degré de liberté par nœud deux rotations suivant y et z, et deux translations suivant y et z.



**Figure V.3** Conditions aux limites

### V.2 Analyse modale

L'objectif de cette étude est de déterminer les fréquences propres, les modes propres et les contraintes qui se produisent lors des vibrations de flexion du rotor. Les fréquences propre sont représentées au tableau ci-dessous :

**Tableau V.2** Les fréquences propres du rotor

mode	1	2	3	4
Fréquence réelle (Hz)	-0.27	-0.27	-0.35	-0.35
Fréquence imaginaire (Hz)	35	-35	45	-45

5	6	7	8	9	10
- 0.24	-0.24	-0.34	-0.34	-0.32	-0.32
238	-238	328	-328	392	-392

### V.2.1 Les déformées modales

La modélisation éléments finis a été présentée figure V.2. La base modale contient dix modes. L'allure des quatre modes du rotor est présentée sur les figures V.4 à V.7.

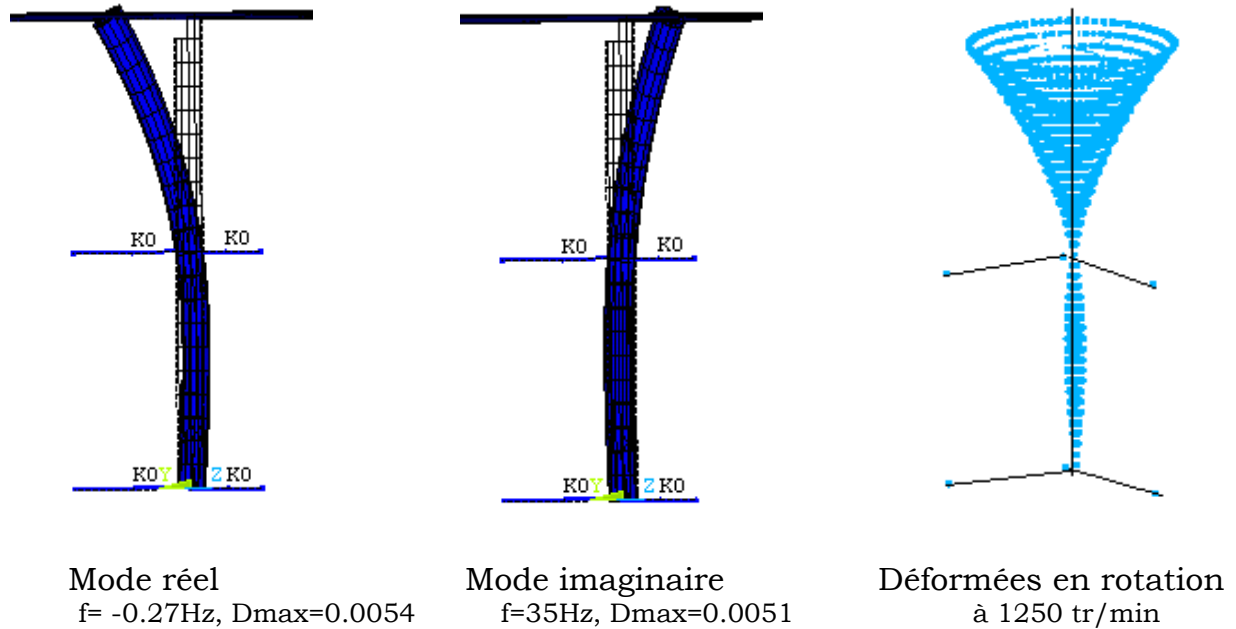


Figure V.4 Premier mode calculé

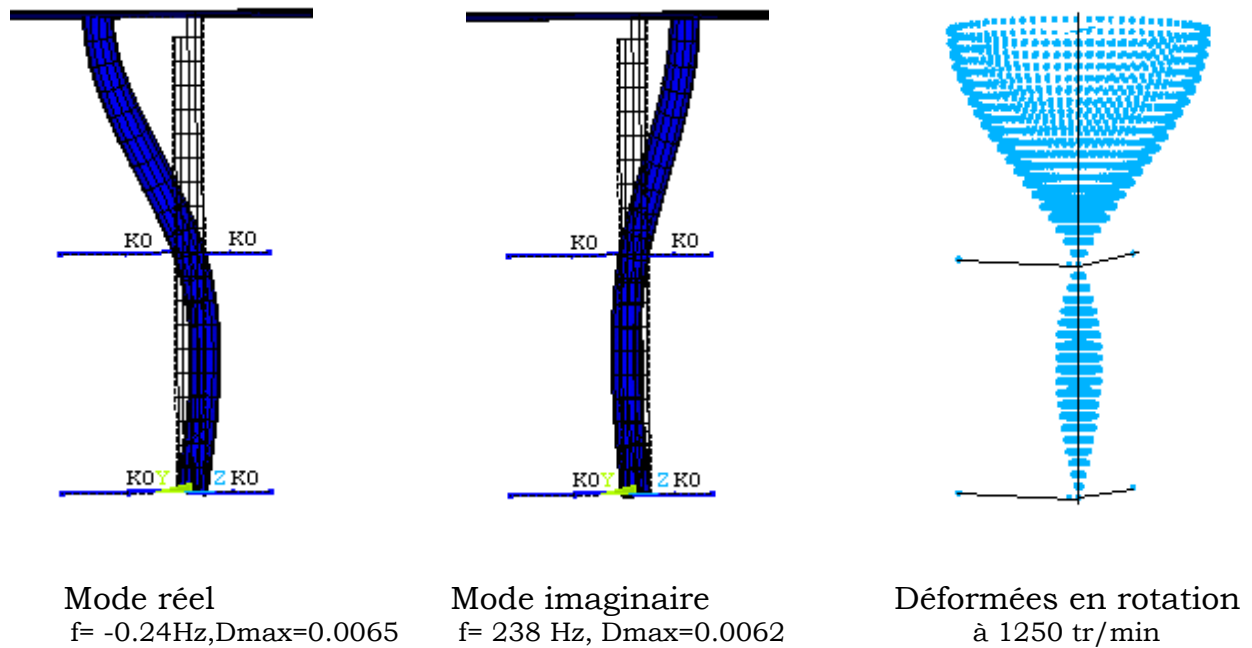


Figure V.5 Cinquième mode calculé

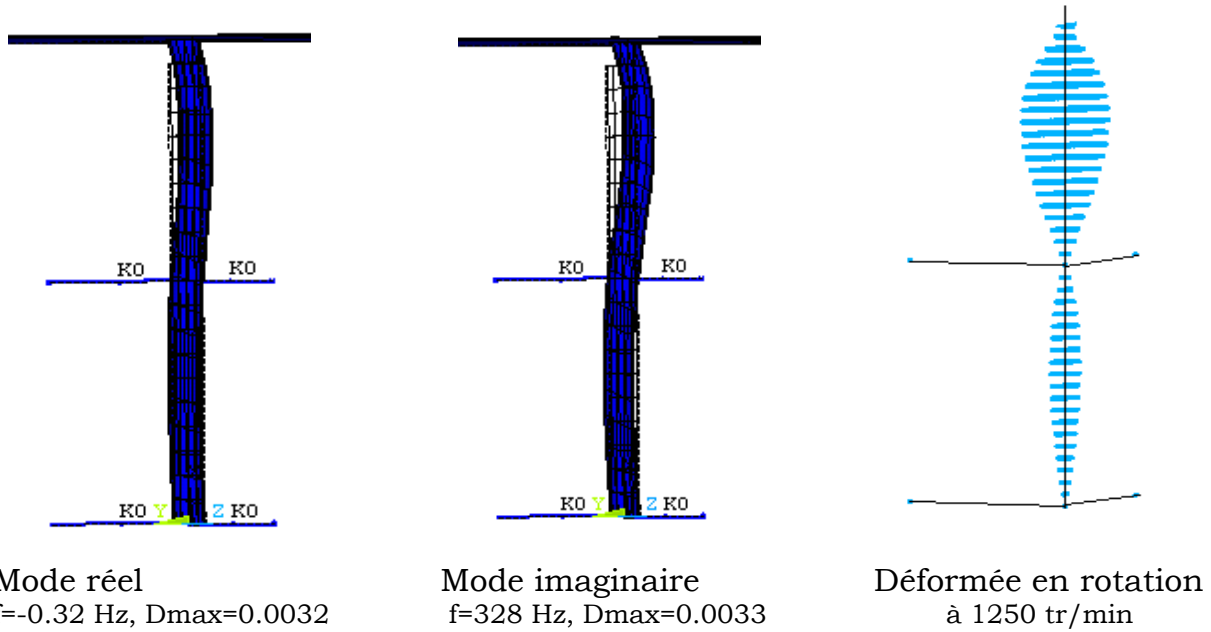


Figure V.6 Septième mode calculé

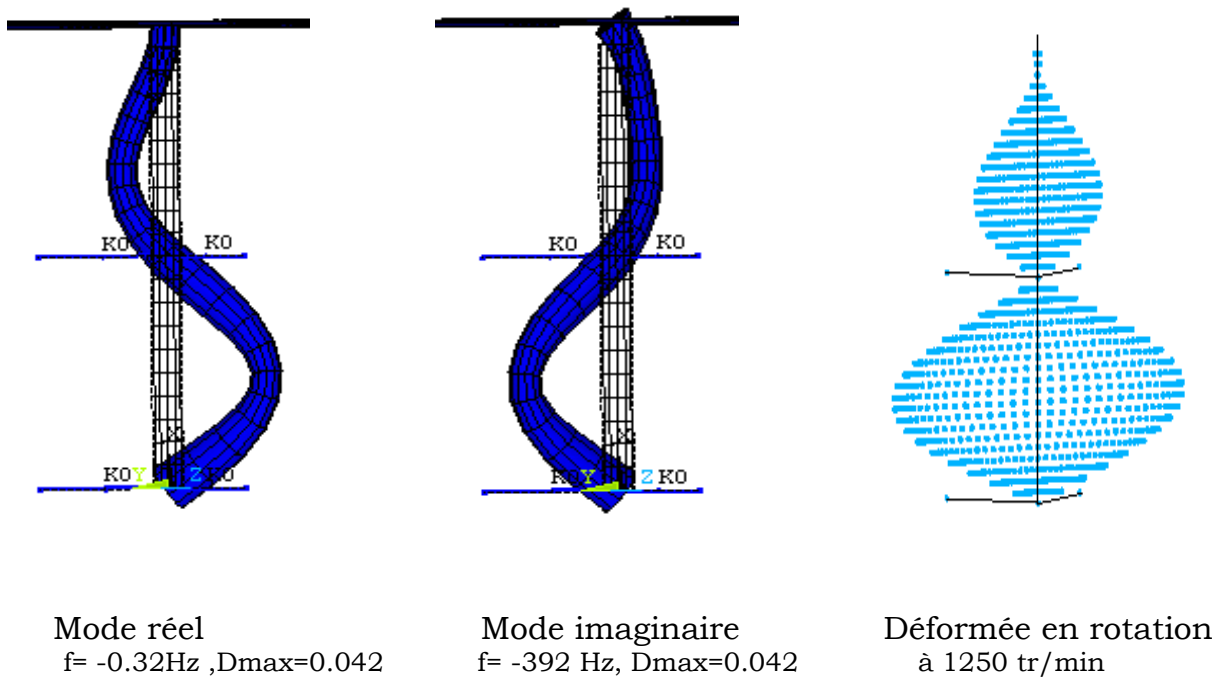
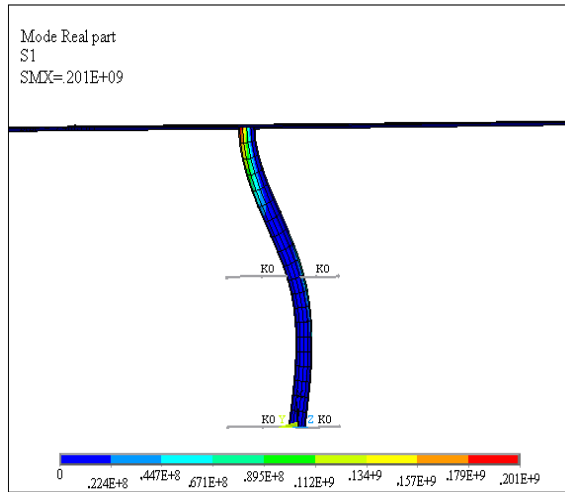


Figure V.7 Dixième mode calculé

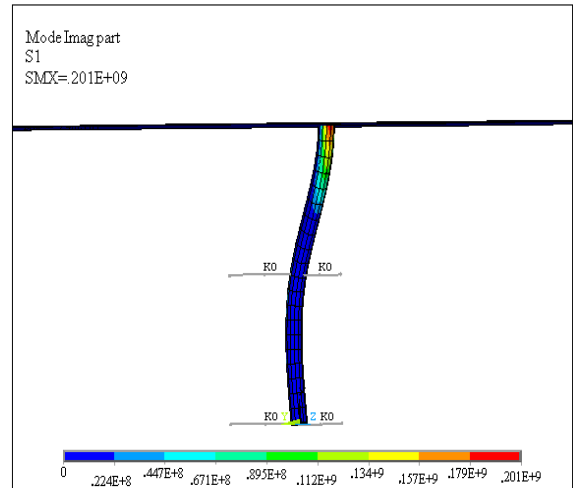
Ces modes sont caractérisés par une flexion locale dans des zones remarquables.

**V.2.2 Evolution des contraintes**

Pour le Cinquième mode calculé (réel et imaginaire) on obtient les trois contraintes principales, l'intensité de contrainte et en fin la contrainte équivalente de Von Misés.

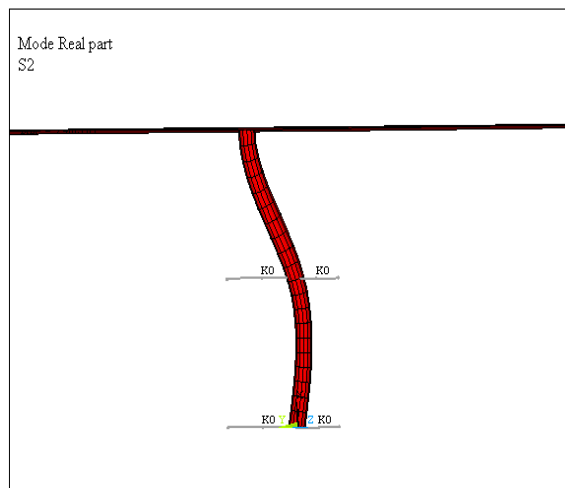


(a)Partie réelle  
Smax=0.201 GPa

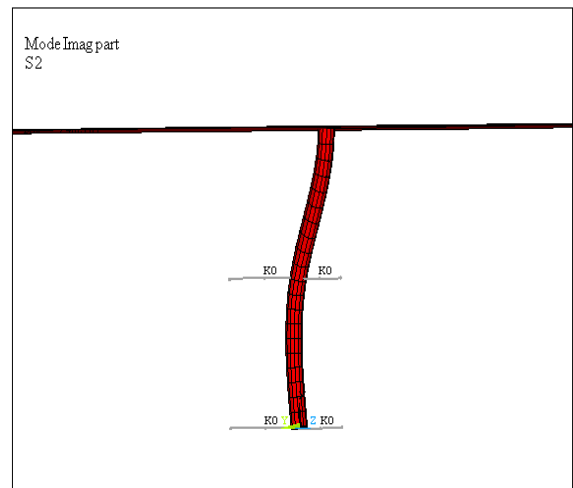


(b) Partie imaginaire  
Smax=0.201 GPa

**Figure V.8** Première contrainte principale



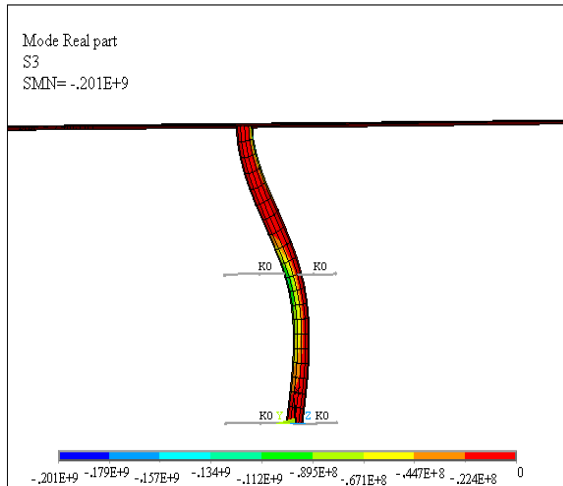
(a) Partie réelle



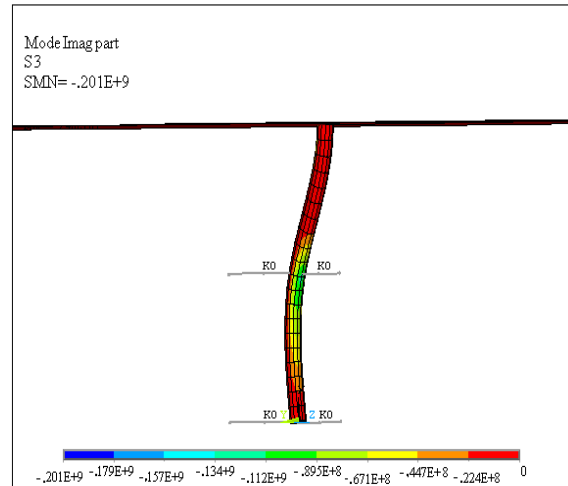
(b) partie imaginaire

**Figure V.9** Deuxième contrainte principale



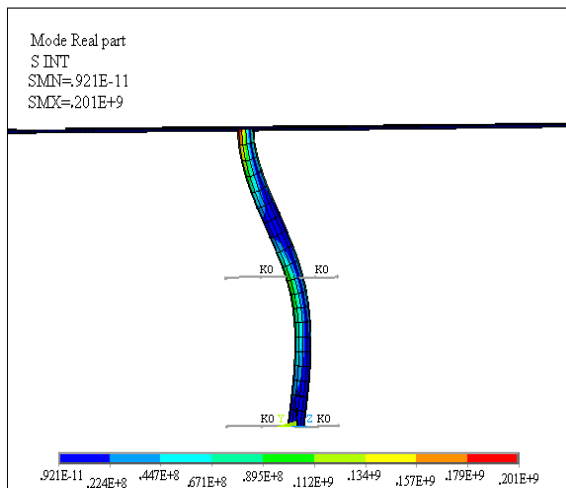


(a) Partie réelle  
Smin=-0.201GPa

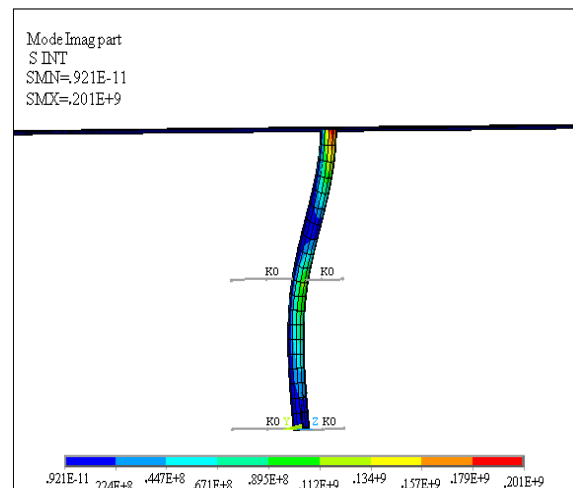


(b) partie imaginaire  
Smin=-0.201 GPa

Figure V.10 Troisième contrainte principale

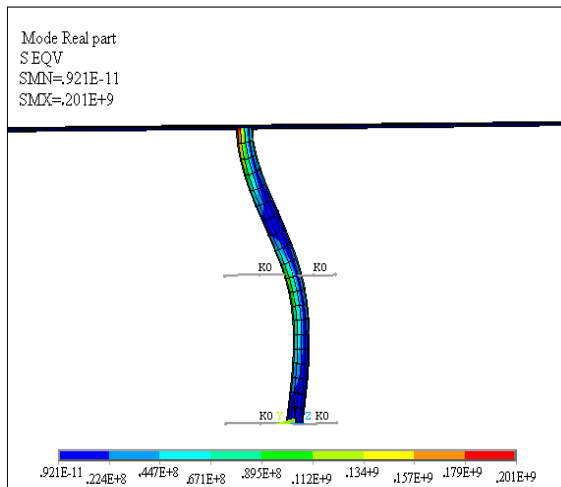


(a) Partie réelle  
Smax=0.201 GPa  
Smin= $0.921 \times 10^{-19}$  GPa

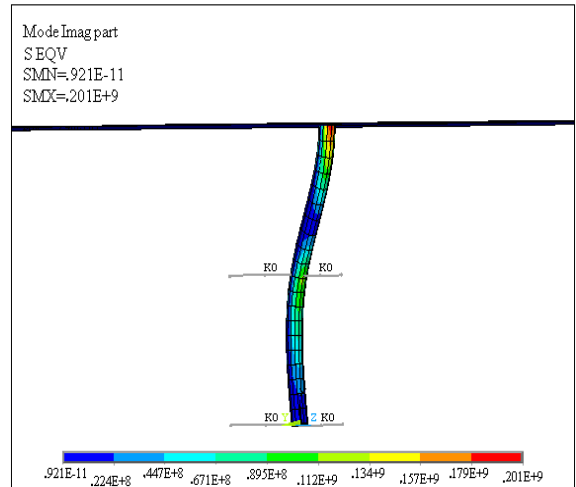


(b) partie imaginaire  
Smax=0.201 GPa  
Smin= $0.921 \times 10^{-19}$  GPa

Figure V.11 Intensité de contrainte



(a) Partie réelle  
Smax=0.201 GPa  
Smin= $0.921 \times 10^{-19}$  GPa



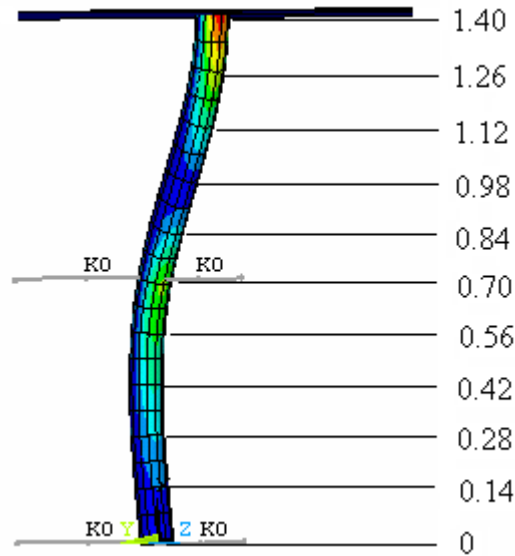
(b) partie imaginaire  
Smax=0.201 GPa  
Smin= $0.921 \times 10^{-19}$  GPa

**Figure V.12** Contrainte équivalente de Von Misés

On remarque la localisation des contraintes maximales aux niveaux des zones soumises à la flexion maximale pour les contraintes principales, l'intensité de contrainte et la contrainte équivalente de Von-Misés.

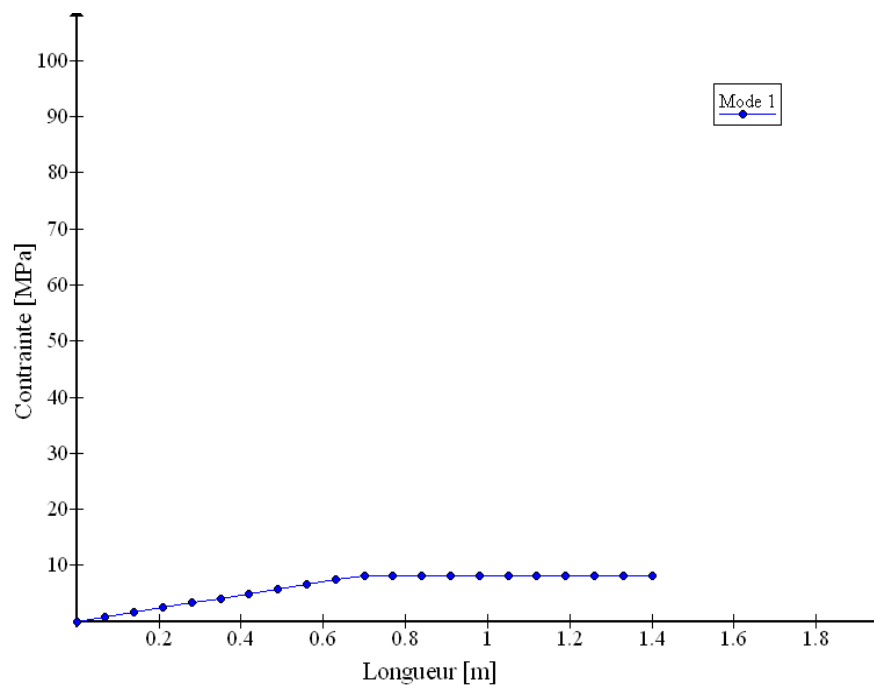
### V.2.3 L'évolution des contraintes selon une ligne longitudinale du rotor

Pour le rotor, on prend une ligne longitudinale et on enregistre la distribution des contraintes suivant cette ligne.

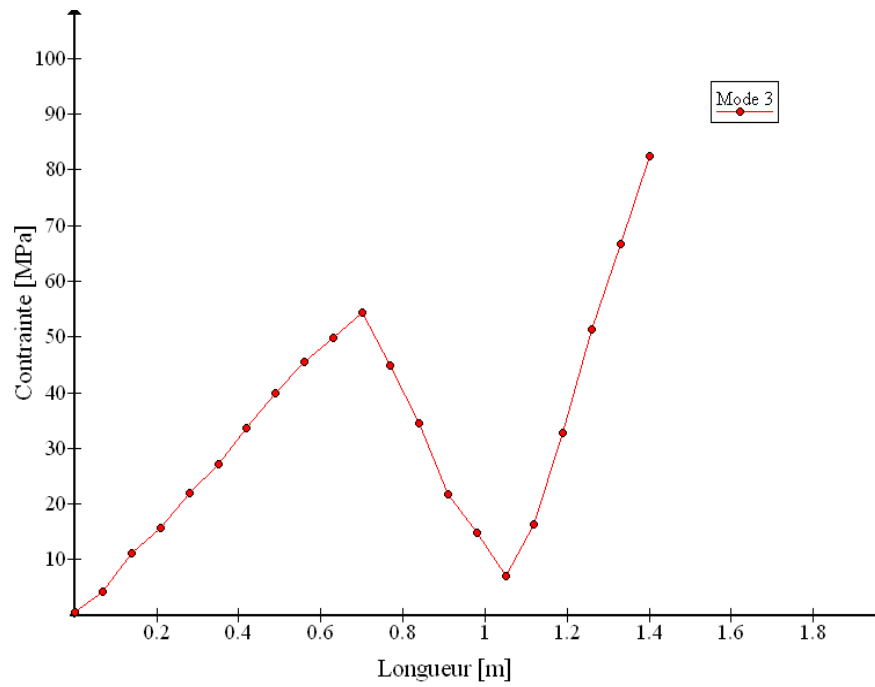


**Figure V.13** Distribution des contraintes suivant une ligne longitudinale

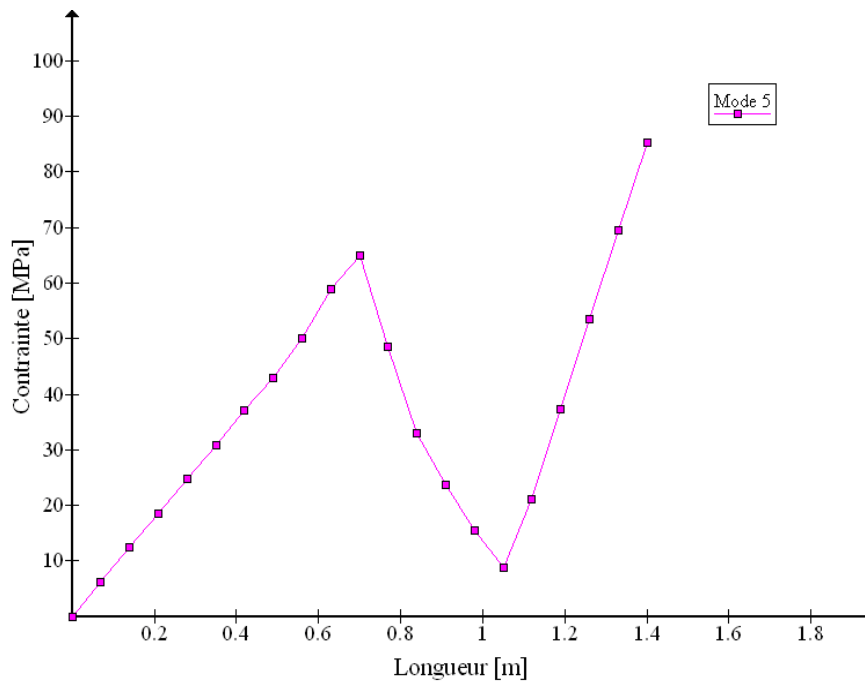
Les résultats sont transmis puis représentés sur les graphes suivants :



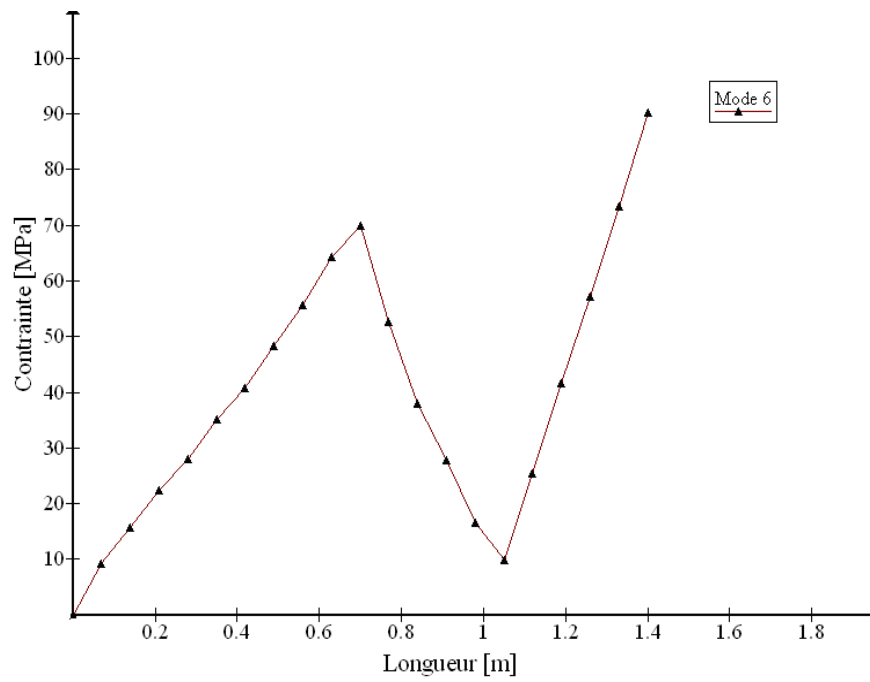
**Figure V.14** Distribution de la contrainte équivalente de Von Mises pour le premier mode



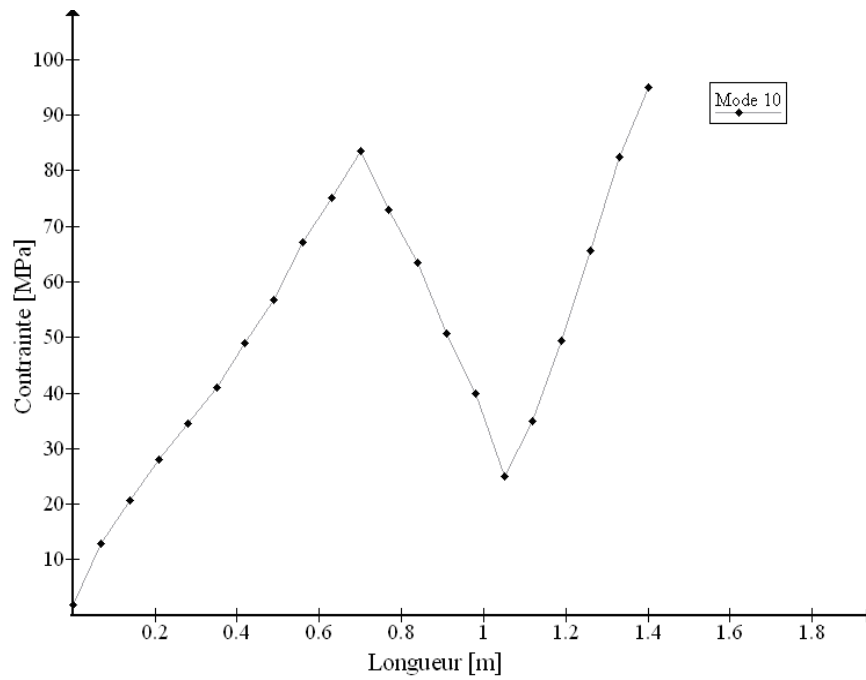
**Figure V.15** Distribution de la contrainte équivalente de Von Misés pour le troisième mode



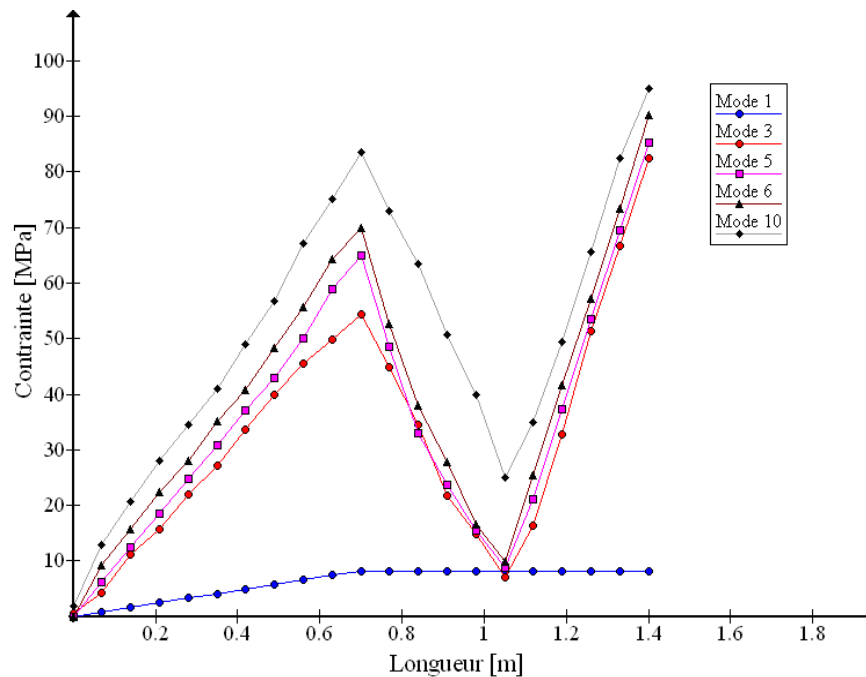
**Figure V.16** Distribution de la contrainte équivalente de Von Misés pour le cinquième mode



**Figure V.17** Distribution de la contrainte équivalente de Von Misés pour le sixième mode



**Figure V.18** Distribution de la contrainte équivalente de Von Misés pour le dixième mode



**Figure V.19** Comparaison qualitative des distributions de la contrainte équivalente de Von Misés pour les différents modes

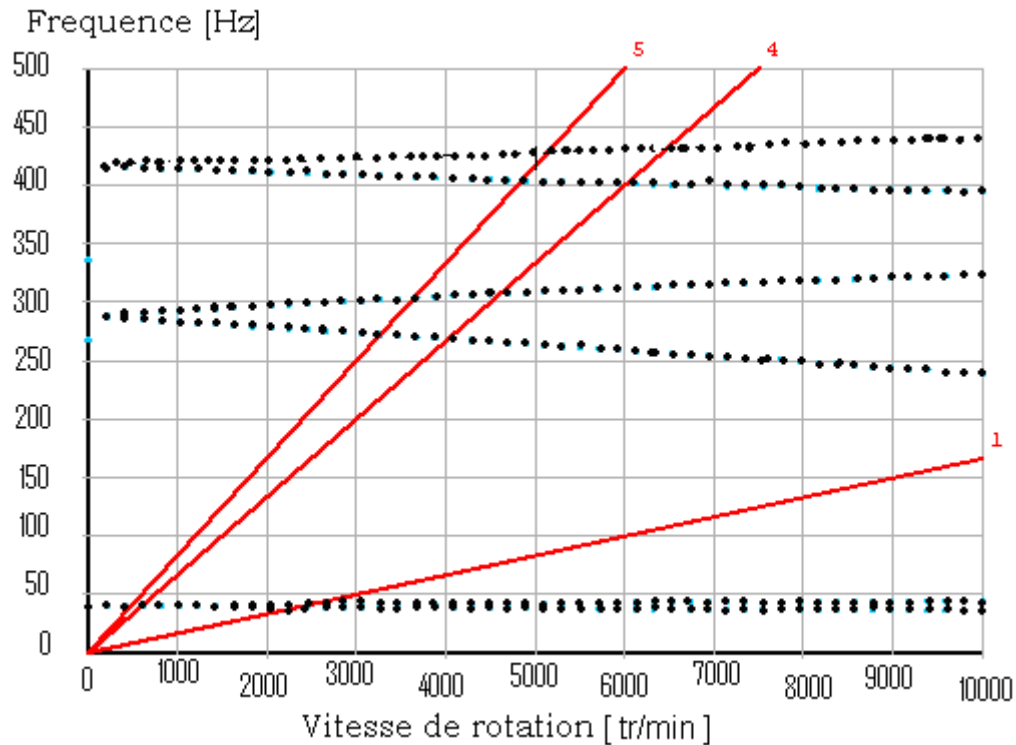
On remarque pour le premier mode une légère augmentation de la contrainte jusqu'au milieu de l'arbre, à partir de ce point la contrainte reste constante pour ce mode. La valeur maximale de la contrainte de Von Misés pour ce mode est la plus petite de tous les modes.

Pour les autres modes la contrainte équivalente de Von Misés augmente jusqu'au maximum qui est situé au point milieu de l'arbre, puis diminue vers le minimum. Une autre fois elle augmente vers un deuxième maximum qui est caractérisé par une contrainte maximale pour chaque mode.

L'augmentation du pic maximal de la contrainte de Von Misés est variée en fonction de l'augmentation du nombre de modes

### V.2.4 Diagramme de Campbell

Les vitesses critiques sont données par les points d'intersection des sources d'excitation (harmoniques 1, 4, 5...) avec les modes propres à précession directe et précession inverse. Nous obtenons Le diagramme de Campbell.



**Figure V.20** Diagramme de Campbell pour le modèle éléments finis

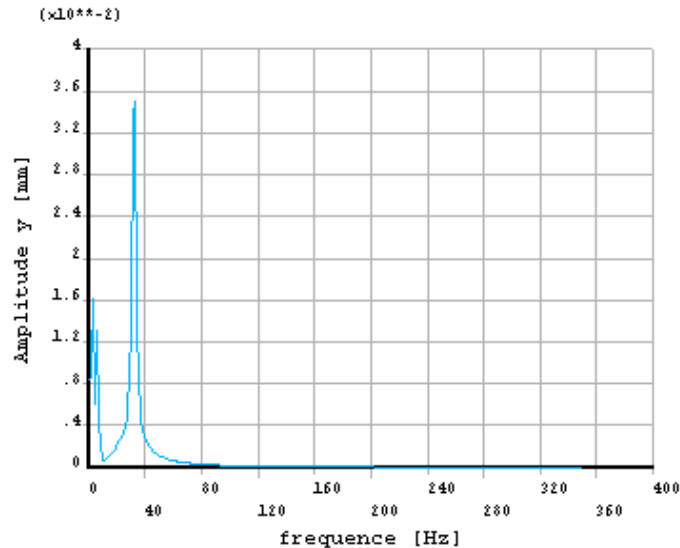
Le diagramme de Campbell (figure V.24) montre que la première vitesse critique pour l'harmonique d'ordre 1 correspond au premier mode de l'arbre qui se situe à 2500tr/min (40 Hz) pour le mode direct.

Pour l'harmonique d'ordre 4 la première vitesse critique citée à 600tr/min (40Hz) et la deuxième vitesse critique citée à 4000 tr/min (270Hz) pour le mode rétrograde et 4500 tr/min (310Hz) pour le mode direct.

### V.3 Analyse de la réponse aux forces aérodynamiques du rotor

Cette étude permet de comprendre la réponse aux forces aérodynamiques.

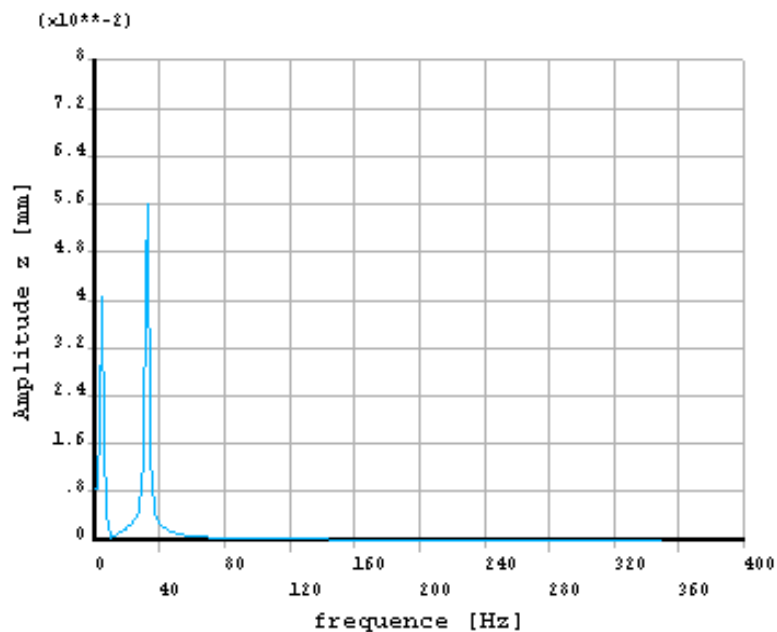
On suppose le vecteur des forces d'excitation de la traînée ( $F_Y=28.26\text{N}$ ,  $F_Z=28.26\text{N}$ ), la poussée du rotor  $F_N = 6059\text{ N}$ , et la vitesse de rotation varié dans la plage 0-400 Hz.



**Figure V.21** Réponse aux forces aérodynamiques en fréquence suivant l'axe y

$$A_1 y_{MAX} = 1.6 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

$$A_2 y_{MAX} = 3.5 \times 10^{-2} \text{ mm}$$



**Figure V.22** Réponse aux forces aérodynamiques en fréquence suivant l'axe z

$$A_1 z_{MAX} = 4 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

$$A_2 z_{MAX} = 5.6 \times 10^{-2} \text{ mm}$$



Pour la figure (V.21), On remarque la présence de deux pics :

1<sup>ere</sup> pic pour la fréquence  $f = 7 \text{ Hz}$  où la valeur maximale d'amplitude est

$$A_1 y_{MAX} = 1.6 \times 10^{-2} \text{ mm} .$$

2<sup>eme</sup> pic pour la fréquence  $f = 35 \text{ Hz}$  où la valeur maximale d'amplitude est

$$A_1 y_{MAX} = 3.5 \times 10^{-2} \text{ mm} .$$

Pour la figure (V.22), On remarque la présence de deux pics :

1<sup>ere</sup> pic pour la fréquence  $f = 7 \text{ Hz}$  où la valeur maximale d'amplitude est

$$A_1 y_{MAX} = 4 \times 10^{-2} \text{ mm} .$$

2<sup>eme</sup> pic pour la fréquence  $f = 35 \text{ Hz}$  où la valeur maximale d'amplitude est

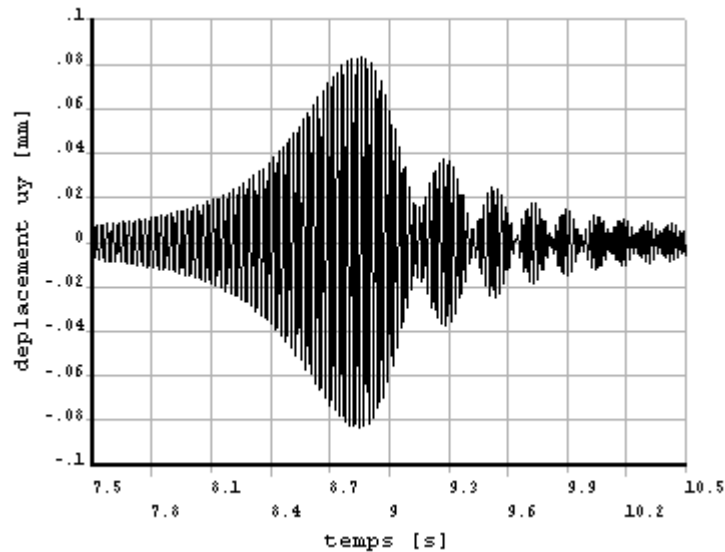
$$A_1 y_{MAX} = 5.6 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

Les spectres des figures (V.21) (V.22) sont calculés dans la plage [0 -400 Hz], ces spectres mettent en évidence l'existence des composantes d'amplitude prépondérante à la fréquence de rotation 7 et 35 Hz, il s'agit de la réponse aux forces aérodynamiques.

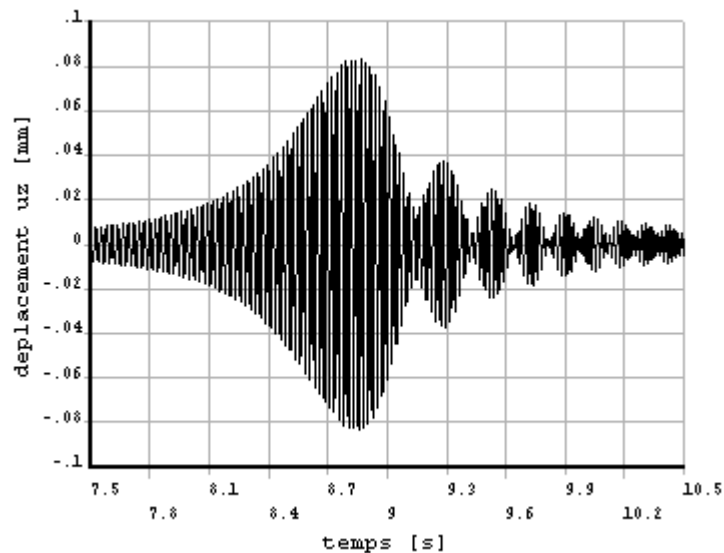
#### V.4 Simulation numérique en régime transitoire à la résonance

Le comportement dynamique du rotor est simulé, le rotor est soumis à un balourd de  $0.001 \text{ kg} \cdot \text{m}$  placés au nœud 19. En montée linéaire de vitesse de 0 à 650 tr/min avec une accélération angulaire constante de l'ordre  $30 \text{ rad/s}^2$ , après l'exécution on aura les réponses à chaque nœud.

Les résultats des réponses au niveau du nœud N°19 sont présentés sous forme de graphes montrant l'amplitude du signal en fonction du temps.



**Figure V.23** Signal temporel de la réponse en déplacement suivant l'axe y



**Figure V.24** Signal temporel de la réponse en déplacement suivant l'axe z

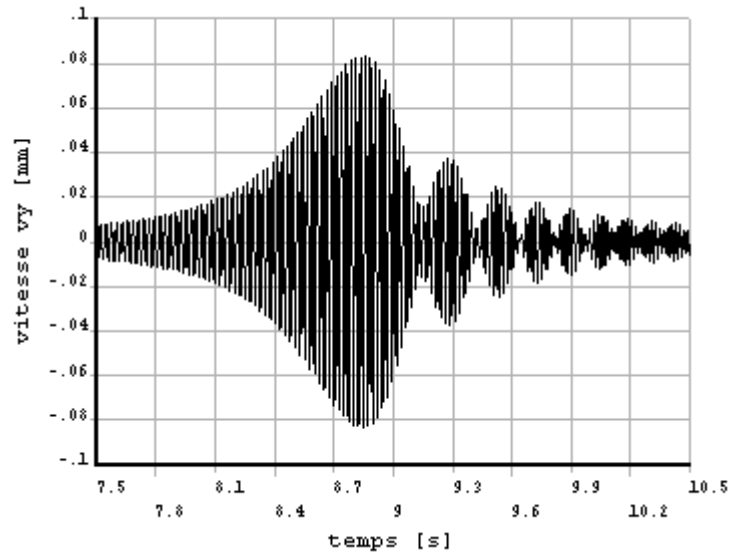


Figure V.25 Signal temporel de la réponse en vitesse suivant l'axe y

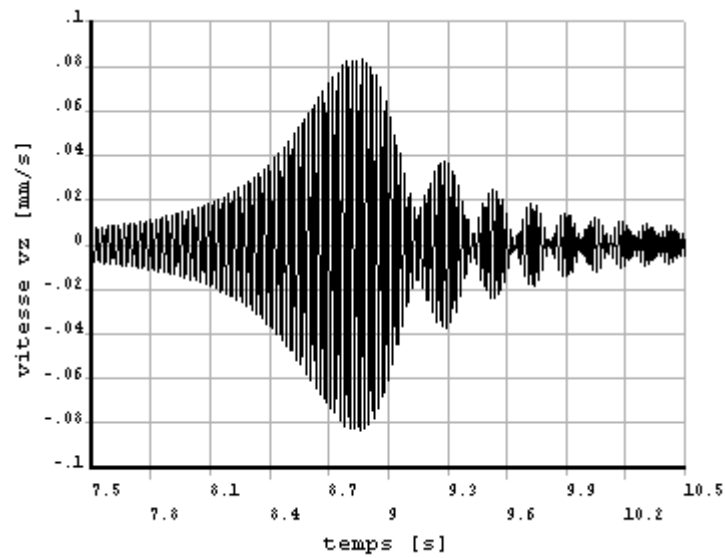
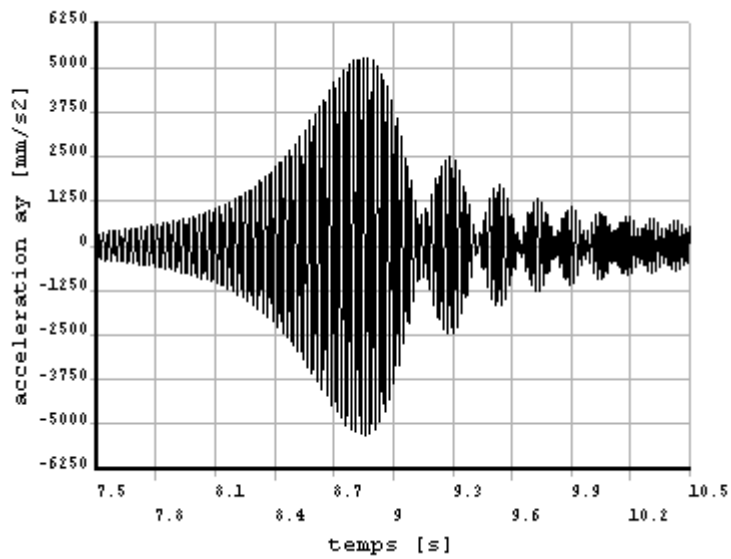
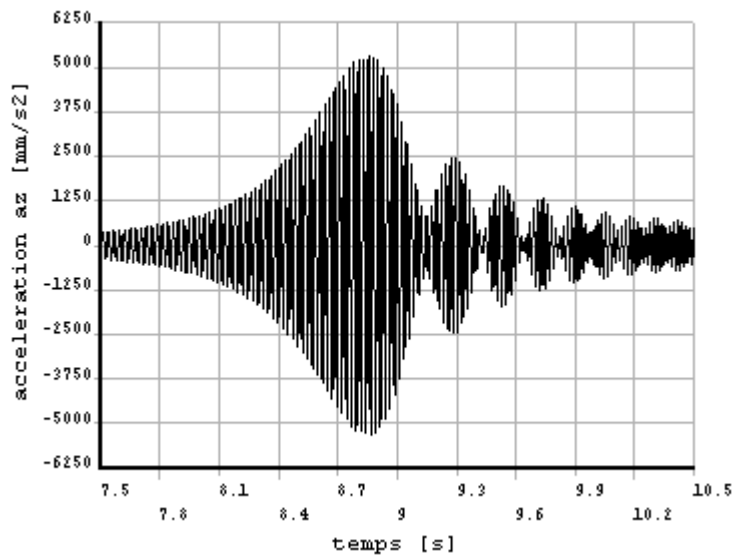


Figure V.26 Signal temporel de la réponse en vitesse suivant l'axe z



**Figure V.27** Signal temporel de la réponse en accélération suivant l'axe y



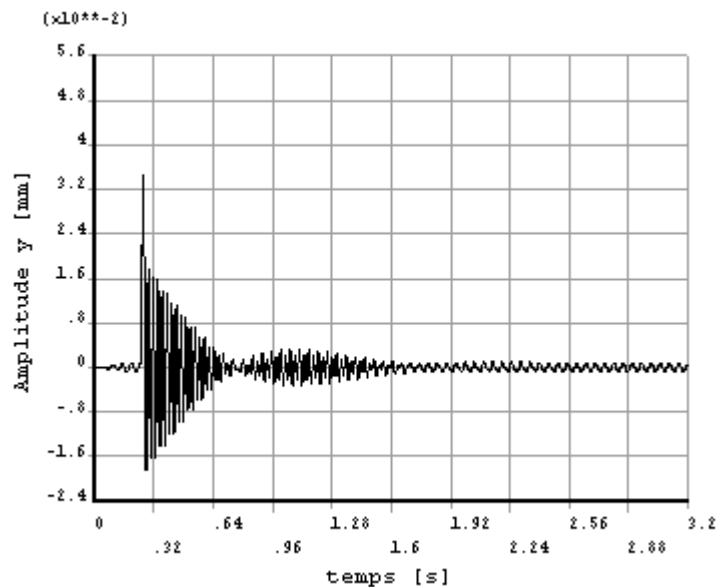
**Figure V.28** Signal temporel de la réponse en accélération suivant l'axe z

On constate pour tous les signaux que la valeur maximale de l'amplitude de la grandeur concernée (déplacement, vitesse, accélération) est située au niveau de la période  $t = 8.8$  s, correspondant au passage de la vitesse critique du rotor suivie d'une atténuation de l'amplitude jusqu'à la stabilité.

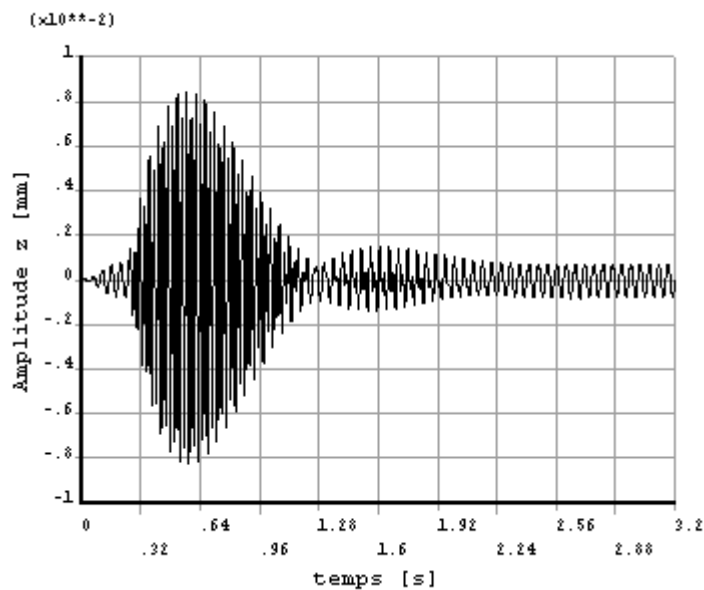
### V.5 Réponse transitoire du rotor à vitesse constante

Les simulations numériques sont effectuées sur le rotor tournant à une vitesse constante de 450 tr/min, avec un intervalle de temps pas à pas de 3s, le rotor soumis à un balourd de  $0.001\text{kg}\cdot\text{m}$  et une force de  $R_H=6060\text{N}$  appliquée au disque.

Les influences du régime transitoire sur le comportement dynamique de structure peuvent être observés, les résultats des simulations sont transmises puis sont représentés sur les graphes suivants :



**Figure V.29** Signal temporel de la réponse en déplacement suivant l'axe  $y$



**Figure V.30** Signal temporel de la réponse en déplacements suivant l'axe  $z$

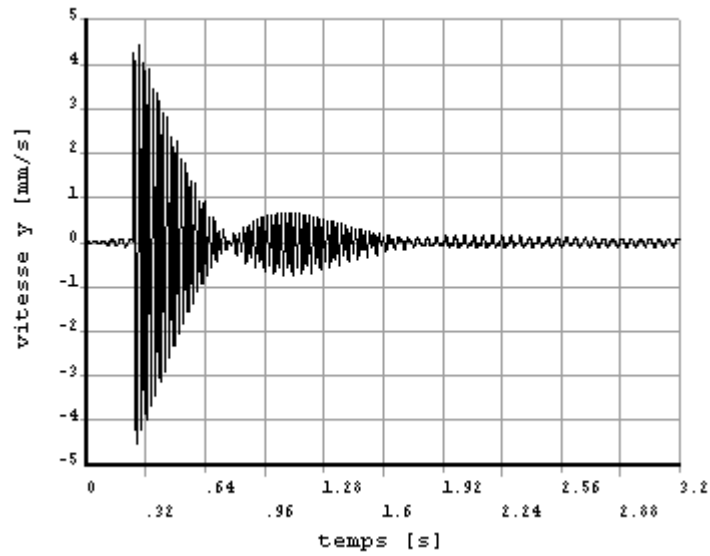


Figure V.31 signal temporel de la réponse en vitesse suivant l'axe y

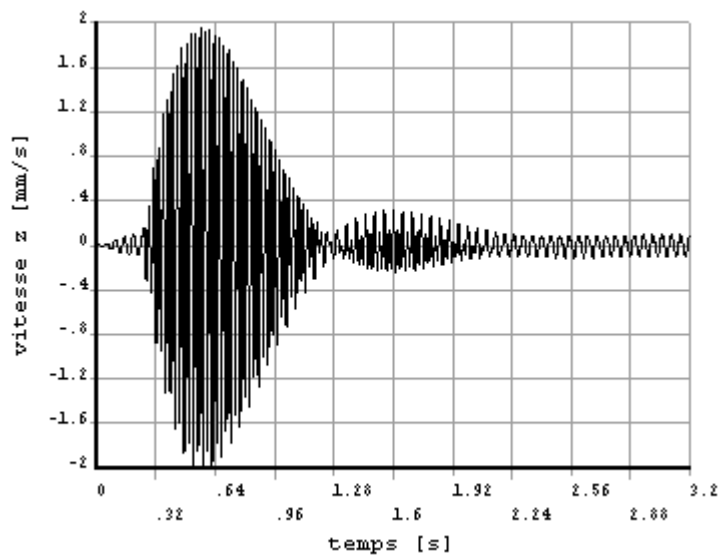
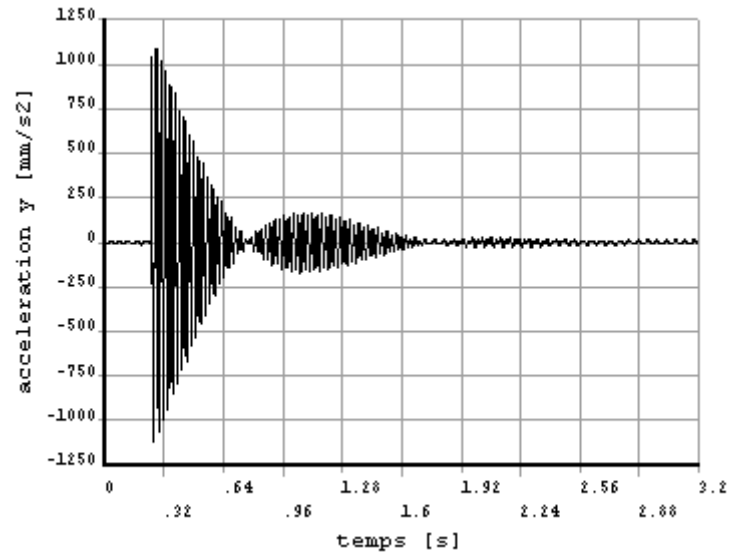
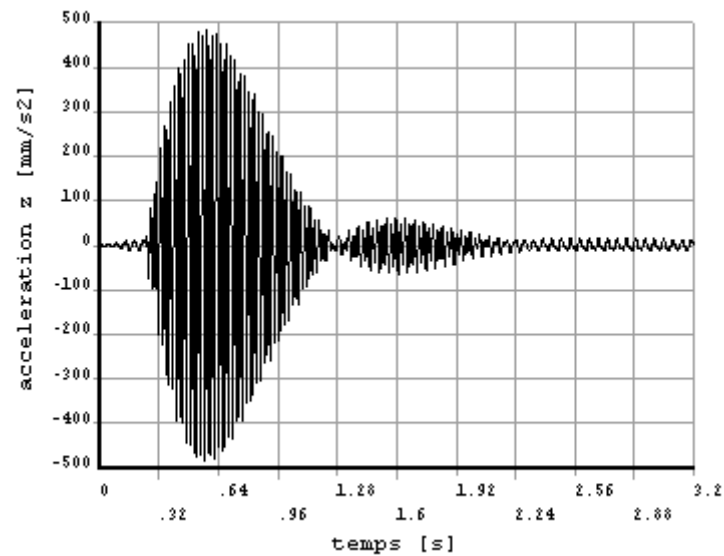


Figure V.32 Signal temporel de la réponse en vitesse suivant l'axe z

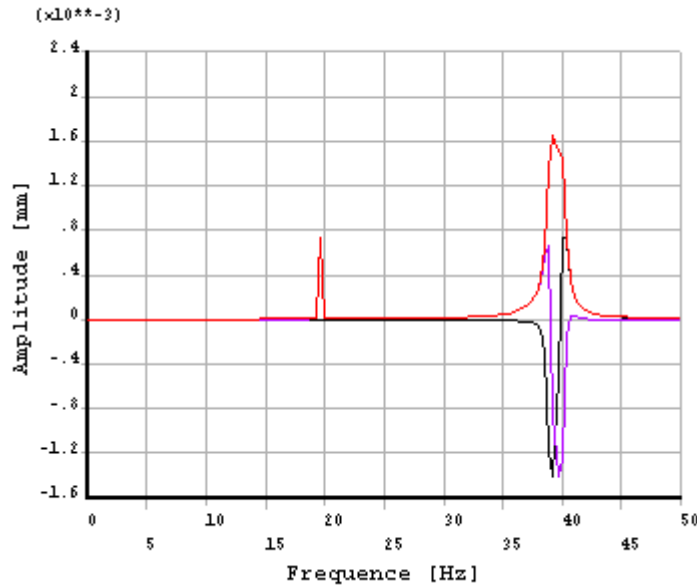


**Figure V.33** Signal temporel de la réponse en accélération suivant l'axe y



**Figure V.34** Signal temporel de la réponse en accélération suivant l'axe y

L'influence des phénomènes transitoires est marquée par une montée rapide en amplitudes (amplitudes maximales). C'est pourquoi, les effets du régime transitoire sont influents lors d'une montée en amplitude de vibration du rotor alors que son comportement lors d'un ralentissement est proche de celui en régime permanent.



**Figure V.35** Spectre du signal en amplitude de déplacement

La figure (V.35) représente la courbe de réponse en fréquence pour des vitesses de rotation allant de 0 à 500 tr/min (l'amplitude de vibration tracée est définie comme la moyenne entre les déplacements suivant y et z maximum et minimum). La fréquence à laquelle le pic de réponse intervient est de 18 Hz et 37 Hz. La première fréquence correspond bien à la fréquence de la vitesse critique du système linéaire associé, cela revient au balourd initial mais la présence du deuxième pic à  $2 \cdot f_0$  d'amplitude croissante est expliquée par un choc initial dû à la force appliquée.



## Conclusion

Le modèle éléments finis du rotor a été conçu à partir d'une géométrie bien déterminée. Une extraction efficace des fréquences et des déformées modales du modèle a été effectuée, la distribution des contraintes le long du rotor a été identifiée.

Le diagramme de Campbell permet de représenter les fréquences en fonction de la vitesse de rotation et d'extraire les vitesses critiques du rotor. Quelques cas d'ordres d'harmonique ont été étudiés.

Les réponses en régime transitoire du modèle éléments finis ont été étudiées. Les différentes amplitudes en déplacement vitesse et accélération des vibrations sont déterminés. Néanmoins, comme la vitesse critique dépend de la rampe considérée, on retrouve ce type de résultat sur la courbe de réponse à un balourd présenté précédemment ; en effet le tracé des courbes de réponse à un balourd présente des augmentations brutales de l'amplitude de vibration du rotor lors du passage par la vitesse critique représentative de l'instabilité de fonctionnement du rotor.

## Conclusions et Perspectives

Le but de ce travail est d'apporter une contribution à l'étude du comportement dynamique des rotors verticaux.

On a fait appel à la simulation numérique pour analyser le comportement des rotors.

Dans le premier chapitre on a présenté une vision globale des travaux numériques et expérimentaux dans le domaine de la dynamique des rotors, suivie par la description des phénomènes qui influent sur les rotors.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude aérodynamique des hélicoptères dans le quel les forces aérodynamiques sont calculées. Afin de voir le comportement du rotor principal d'hélicoptère on a développé un modèle éléments finis de la pale pour extraire ces fréquences et modes propres, les résultats montrent que l'extrémité de la pale est la zone la plus sollicitée par les contraintes et les déformations.

On a modélisé les forces tournantes afin de caractériser ses phénoménologies et leurs influences sur les paliers.

Pour mieux interpréter les phénomènes qui régissent le comportement dynamique des rotors, des modélisations sont proposées via des approches analytiques et numériques, les calculs des différentes énergies et travaux virtuels des différents éléments d'un rotor vertical ont été développés. Aussi nous avons développé un modèle simple qui a été obtenu à l'aide de la méthode de Rayleigh-Ritz, il est utilisé pour mettre en évidence les phénomènes de base en raison de sa simplicité, mais l'inconvénient de ce modèle c'est qu'il considère les paliers comme infiniment rigides.

Un modèle des éléments finis a été développé pour modéliser les systèmes réels car il est plus précis et permet d'étudier l'ensemble des modes de vibration du rotor, il est également modulaire car chaque élément du rotor possède ses propres caractéristiques ; ce qui permet d'ajouter des raideurs, des amortissements et des forces extérieurs en chaque nœud. Le désavantage évident de cette méthode et que les calculs sont lourds même si les modèles éléments finis appliqués à la dynamique des rotors sont en générale de petite taille jusqu'à un certain degré de liberté.

Le modèle simple permet d'acquérir une riche expérience pour l'étude des réponses aux excitations. Les pics d'amplitudes identifiés à l'aide des courbes de réponses présentent des caractéristiques différentes car les valeurs des vitesses de rotation correspondantes à ces pics sont décalées.

Le modèle éléments finis permet d'extraire les fréquences propres et les déformes modales des vibrations du rotor, aussi il permet d'identifier les contraintes agissant sur le système et prévoir le comportement dynamique du rotor en régime transitoire.

Les réponses à différentes excitations en amplitude des déplacements, des vitesses et des accélérations sont déterminées. Ces résultats présentes des augmentations brutales d'amplitude de vibration lors du passage à la vitesse critique.

Le tracé de diagramme de Campbell permet de déterminer les vitesses critiques.

Au futur on souhaite pour approfondir la recherche sur ce sujet l'enrichissement du modèle proposé par l'introduction des effets de cisaillement et le couplage flexion torsion.

## Références Bibliographiques

- [1] Dunkerly, S., "On the whirling and vibration of shafts", *Phil. Trans. R. Soc., London A*, 185, 279, (1894).
- [2] Greenhill, A.G., "On the strength of shafting when exposed both to torsion and to end thrust", *Proc. I. Mech. Eng (London)*, 182, (1883).
- [3] Gunter, E.J. Jr., "Dynamic stability of rotor-bearing systems", NASA SP-113, (1966).
- [4] Holzer, H. "Die Berechnung der Drehschwingungen", Springer, Berlin. (1921).
- [5] Jeffcott, H.H., "The lateral vibration of loaded shafts in the neighbourhood of a whirling speed—the effect of want of balance", *Phil. Mag.*, 37, 304, (1919).
- [6] Kimball, A.L. Jr., "Internal friction theory of shaft whirling", *Gen. Electr. Rev.*, 27, 244, (1924).
- [7] Lomakin, A.A., "Calculating the critical speed and the conditions to ensure dynamic stability of the rotors in high pressure hydraulic machines, taking account of the forces in the seals", *Energomashinostroenie*, 4, 1, (1958).
- [8] Myklestad, N.O., "A new method for calculating natural modes of uncoupled bending vibrations of airplane wings and other types of beams", *J. Aeronaut. Sci.*, 11, 153, (1944).
- [9] Miller, D.F., "Forced lateral vibration of beams on damped flexible end supports", *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 20, 167, (1953).
- [10] Newkirk, B.L., "Shaft Whipping" *Gen. Electr. Rev.* 27, 169, (1924).
- [11] Newkirk, B.L. and Taylor, H.D., "Shaft whipping due to oil action in journal bearings", *Gen. Electr. Rev.*, 28, 559, (1925).
- [12] Nelson, H. and McVaugh, J., "The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements", *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, 98, 593, (1976).
- [13] Poritsky, H., "Contribution to the theory of oil whip", *Trans. ASME*, 75, 1153, (1953).
- [14] Prohl, M.A., "A general method for calculating Critical Speeds of flexible rotors", *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 12, A-142, (1945).
- [15] Pinkus, O. and Sternlicht, B. "Theory of Hydrodynamic Lubrification", McGraw-Hill, New York. (1961).
- [16] Ruhl, R.L. and Booker, J.F., "A finite element model for distributed parameter turborotor systems", *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, 94, 126, (1972).
- [17] Rankine, W.J.M., "On the centrifugal force of rotating shafts", *Engineer*, 249, (1869).
- [18] Rayleigh, J.W.S. "Theory of Sound", Dover Publications, New York. (1945).
- [19] Stodola, A.. "Steam and Gas Turbines", Vol. I, McGraw-Hill, New York. (1927).
- [20] Smith, D.M., "The motion of a rotor carried by a flexible shaft in flexible bearings", *Proc. R. Soc. London A*, 142, 92, (1933).
- [21] Timoshenko, S., Young, D.H., and Weaver, W. Jr. "Vibration Problems in Engineering", 4th ed., Wiley, New York. (1974).
- [22] R. A. WILLEM: Simple mechanical means for dynamic balancing of rigid rotors. *Technos*, 6(2):41—48, (1977).

- [23] M. L. ADAMS : Keep rotor vibration under control. *Power*, 122(8):28—29, (1978).
- [24]; P. E. ALLAIRE, D. W. LEWIS et J. D. KNIGHT : Active vibration control of a single mass rotor On flexible supports. *Journal of the Franklin Institute*, 315(3):211—222, (1983).
- [25]; R. STANWAY et C. R. BURROWS : Stabilization of a flexible rotor by eigen value assignment. *Int Conf on Control and Its Appl* (194): 102—105, (1981).
- [26]; R. FIROOZIAN et R. STANWAY: Active vibration control of turbomachinery : A numerical investigation of modal controllers. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2(3):243—264, (1988).
- [27] E. IMAM, J. DER HAGOPIAN et M. LALANNE: Contribution to the dynamic behavior of flexible mechanisms. In 52nd Symposium on Shock and Vibration. Part1., Invited Papers, Rotor Dynamics and MachineryVibration., Shock and Vibration Bulletin, p. 125—13, New Orleans, LA, USA,(1982).
- [28] P. BERTHIER, G. FERRARIS et M. LALANNE : Prediction of critical speeds, un- balance and nonsynchronous forced response of rotors. In 53rd Symposium on Shock and Vibration. Part 4 Damping and Machinery Dynamics., Shock and Vibration Bulletin, p. 103—11, Danvers, MA, USA, (1983).
- [29] : Ishida Y., Ikeda T., Yamamoto T., Murakami S. Non stationary oscillations of a rotating shaft with nonlinear spring characteristics during acceleration through critical speed, *Memoirs of the School of Engineering, Nagoya University*, ,Vol. 44, n°1, pp. 1-70. (1992).
- [30] Ecker H., Pumphissel T., Tondl A. A study on parametric excitation for suppressing self excited rotor vibrations, *IFTOMM*, In : “Proceedings of the sixth international conference on rotor dynamics”, Sidney, Australia, pp. 85-92, (2002).
- [31] Lalanne M., Ferraris G. *Rotordynamics prediction in engineering*, 2nd Edition, Chichester, John Wiley, 254 p, (1998).
- [32]. Zorzi, E.S., and Nelson, H.D., "Finite Element Simulation of Rotor-bearing Systems With Internal Damping", *Journal Engineers Power, Transaction ASME*, Vol. 99, pp. 71-76. (1977).
- [33] Nelson, H.D., "A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko BeamTheory" , *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, Vol. 102, pp.793-803.(1980).
- [34] Iwatsubo, T., Arii, S. and Kawai, P., "The Coupled Lateral Torsional Vibration of a Geared Rotor System", *Proceedings of the Third International Conference on Vibration in Rotating Machinery, Institution of Mechanical Engineers*, pp.59-66. (1984).
- [35] Özgüven, H.N., and Özkan, Z.L., "Whirl Speeds and Unbalance Response of Multi-bearing Rotors Using Finite Elements", *Journal of Vibration. Acoustics,Stress and Reliability in Design, Transactions of the ASME*, Vol. 106, pp. 72-79. (1984).
- [36] Tran D. M. « Etude du comportement dynamique des rotors flexibles », Thèse Université C.Bernard, Lyon, (1981).
- [37] DUCHEMIN , M . Contribution à l'étude du comportement dynamique d'un rotor embarqué, Thèse de doctorat de l'INSA-Lyon, (2003).

- [38] Dufour R. Influence d'un couple axial sur le comportement dynamique des rotors flexibles, Thèse LMSt. Lyon: INSA de Lyon, 112 p, (1985).
- [39] Al Majid A., Allezy A., Dufour R. Metric of MDOF systems in high transient motion, Proceedings of ASIVIE Design Engineering Technical Conferences, 2—6 September, Chicago, Illinois, USA, 6 p, (2003).
- [40] E.A. MUIJDERMAN « algebraic formulas for the threshold and mode of instability and the first critical speed of a simple flexibility supported rotor »(2001).
- [41] R. BIGRET « vibration des machines tournantes et de structures Tomes 1, 2, 3, 4 »
- [42] J.KURIAN, K.ATHRE, K.N. GUPTA “solution of transfert matrix problems in structural dynamics,A new computer aided technique”(1984).
- [43] ZHENG WHANG “the singularited of a riccati transfert matrix method and a method for its being eliminated”(1987).
- [44] JIALU GU “an improved transfert matrix-direct integration method for rotor dynamics” A.S.M.E. 25 Nov. p1-7,(1985).
- [45] S.S. STECCO, M. PINZAUTI « on the influence of casing stiffness in turbomachinery vibration analysis”. I MECH E p.139-144. (1980).
- [46] G.FERRARIS, P.BERTHIER, M. LALANNE. « Comportement dynamique des multirotors coaxiaux,logiciel »(1996).
- [47] P.BERTHIER, G.FERRARIS, M. LALANNE. « prédiction du comportement dynamique des moteurs d'avions : vitesses critiques – effets de balourds »journal de mécanique théorique et appliquée. Vol.5, n°4, p.573-585 ,(1986).
- [48] J.PEIGNEY “Etude d'un compresseur double en vibration de flexion” CETIM (1984).
- [49] M.L. ADAMS. H. ZAHLOUL « attenuation of rotor vibration used controlled-pressure hydrostatic squeeze-film dampers » A.S.M.E. Vol. 1 p.99-108, (1987).
- [50] MENG GUANG, XU JIAN-KANG, XUE ZHONG-QING « application of linearizing method to the analyses of flexible rotor in centralised squeeze-film damper bearing system” A.S.M.E. Vol. 1 p.115-120,(1987).
- [51] C.R. BURROWS, N.C. KUCUK; M.N. SAHINKAYA, R.S. STANWAK “estimation of squeeze-film bearing inirtia, damping and stiffness coefficients” A.S.M.E.Vol. 1 p.109-114. (1987).
- [52] L.L EARLES, A.B. PALAZZOLO, C.K. LEE, C.H. GERHOLD « hybrid finite element-boundary element simulation of rotating machinery supported on flexible foundation and soil »A.S.M.E. Vol. 1 p.371-382. (1987).
- [53] S. H. CRANDALL, N. A. YEH “automatic generation of component modes for rotor dynamic substructures” A.S.M.E. Vol. 1 p.79-84. (1987).
- [54] A. BERLIOZ et G. FERRARIS «utilisation de la sous structuration en dynamique des rotors » matériaux, mécanique, électricité n°416 mai-juin p. 30-33,(1986).
- [55] ZHENG ZHAO-CHANG, WU NAN-PING, ZHOU KIAO-PING « the complex modal analysis for the large rotor-bearing-foundation system” A.S.M.E. Vol. 1 p.391-398. (1987).
- [56] Samali B., Kim K. B., Yang J. N. Random vibration of rotating machines under earth quake excitations, Journal of Engineering Mechanics,Vol. 112, n° 6, pp.550-565. (1986).

- [57] Suarez L. E., Rohanimanesh M. S., Singh M. P. Seismic response of rotating machines, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, , vol. 21, pp. 21-36. (1992).
- [58] Singh M. P., Chang T. S., Suarez L. E. A response spectrum method for seismic design evaluation of rotating machines, *ASME*, October, vol. 114, pp. 454-460. (1992).
- [59] Subbiah R., Bhat R. B., Sankar T. S. Réponse of rotors subjected to random support excitations, *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 107, pp. 453-459. (1985).
- [60] Beley-Sayettat A. Effet des dissymétries et effet sismique en dynamique des rotors, Thèse de doctorat de l'INSA-Lyon, 159 p, (1994).
- [61] R. SUBBIAH, N. F. RIEGER "on the transient analysis of rotor-bearing systems" *A.S.M.E.* Vol. 1 p.525-536. (1987).
- [62] S.J. YING "transient whirling of a rotating shaft with an unbalanced disk" *A.S.M.E.* Vol. 1 p.537-544. (1987).
- [63] M. GERADIN, N. KILL "A 3-dimensional approach to dynamic analysis of rotating shaft-disk flexible system." *A.S.M.E.* Vol. 1 p.577-584. (1987).
- [64] N. HAGIWARA, H. IJIMA "coupled whirling dynamics of a flexible bladed diskshaft system considering coriolis effects". *A.S.M.E.* Vol. 1 p.590-604. (1987).
- [65] J. M. VANCE, B. T. MURPHY, H. A. TRIPP « critical speeds of turbomachinery :computer predictions versus experimental measurements », *journal of vibration, acoustics, stress and reliability in design* january , Vol . 109 p. 1-7.(1987).
- [66] R. NORDMANN, K. SCHOLLHORN "identification of stiffness and damping coefficients of journal bearing by means of the impact method". Vol . 1 p. 20-31.(1987).
- [67] q. zhang, g. lallement, r. fillod « identification of the dynamic characteristics of oil-film bearing » *A.S.M.E.* Vol. 1 p.57-62. (1987).
- [68] M. J. Stallone, V. Gallardo, A. F. Storace, L. J. Bach, G. Black, and E. F.Gaffney. "Blade loss transient dynamic analysis of turbomachinery". *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 21(8):1134-1138, (1983).
- [69] F.C. Nelson. "A review of the origins and current status of rotor dynamics". In *IFTOMM - Sixth International Conference on Rotor Dynamics*, Sydney, Australia, (2002).
- [70] M. Imregun and D. J. Ewins. "Complex modes- Origins and limits". In *Proceedings of the 13th IMAC*, (1995).
- [71] W. J. Chen. "Energy analysis to the design of rotor-bearing systems". *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 119:411-417, (1997).
- [72] G. Genta. "A fast modal technique for the computation of the Campbell diagram of multi-degree-of-freedom rotors". *Journal of Sound and Vibration*, 155(3):385-402,(1992).
- [73] C. Rao, R. B. Bhat, and G. Xistris. "Experimental verification of simultaneous forward and backward whirling at different points of a Jeffcott rotor supported on identical journal bearings". *Journal of Sound and Vibration*, 198(3):379-388, (1996).

- [74] A. Muszynska. "Forward and backward precession of a vertical anisotropically supported rotor". *Journal of Sound and Vibration*, 192(1):207-222, (1996).
- [75] Y. Ishida. "Nonlinear vibrations and chaos in rotordynamics". *JSME International Journal. Series C*, 37(2):237-245, (1994).
- [76] T. Yamamoto and Y. Ishida. "Linear and nonlinear rotordynamics". John Wiley & Sons, (2001).
- [77] J. M. Vance. "Rotordynamics of turbomachinery". John Wiley & Sons, (1988).
- [78] T. Gmür. *Dynamique des Structures : « Analyse Modale Numérique »*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, (1997).
- [79] Timoshenko. S. "Théorie des vibrations" : Edition Librairie, polytechnique ch ; Béranger, paris et Liège, (1954).
- [80] Jozef HERING. « Cours de mécanique (Mécanique newtonienne) » : Ed. O.P.U ,(1990).
- [81] SOMEYA (T.). – *Journal Bearing Databook*.(Caractéristiques des paliers). Springer Verlag (Berlin), 323 p. (1988).
- [82] O. BONNEAU, « Comportement statique et dynamique de ligne d'arbre montée sur paliers fluides : influence des caractéristiques des paliers », Thèse, Spécialité Génie Mécanique, Poitiers, Université de Poitiers, Février 1989.
- [83] M. LALANNE, P. BERTHIER, J. DER HAGOPIAN, «Mechanical vibrations for engineers », John Wiley and sons.
- [84] J.-J. PHILIPPE L'aérodynamique des hélicoptères, difficultés et perspectives : Science et Défense 91, Paris (France), (1991).
- [85] Stepniewsky, W. Z., *Rotor-wing Aerodynamics, Vol. 1 Basic Theories of Rotor Aerodynamics*, Dover Publishing., Inc., N. Y., (1984).
- [86] Prouty, R. W., *Helicopter Performance, Stability and Control*, Krieger Publishing Company, (1995).
- [87] Padfield, G. D., *Helicopter Flight Dynamics: The Theory and Application of Flying Qualities and Simulation Modeling*, AIAA Education Series, (1996).
- [88] Gianni NACCARATO, *Instabilité du flottement gyroscopique des convertibles*, Thèse de doctorat, ENSAM Paris, 2003



## A1. Modèle dynamique d'un rotor vertical

### A1.1 Equation du mouvement

Tous les systèmes physiques sont continus représentant un nombre des degrés de liberté infinie.

Soit une modélisation simple de système tournante : rotor vertical + disque.

On considère les déformations de l'arbre libre dans le plan X O Z et Y O Z.

On suppose que la courbure dans la poutre est constante pour  $0 \leq z < L$

Pour simplifier le problème, on adopte pour notre étude un système de poutre avec deux nœuds.

On doit tenir compte des approximations suivantes :

- 1)- le système dynamique est linéaire.
- 2)- toute la masse de rotor est concentrée en trois points.
- 3)- la partie de l'arbre entre les points à une flexibilité mais de masse négligeable.

Les deux masses se déplacent suivent les axes X et Y, et on a un déplacement angulaire.

Les coordonnées généralisées du système sont :

$$q = \{ x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \theta_x, \theta_y \}$$

### A1.2 Energie potentielle et énergie cinétique

Pour calculer l'énergie potentielle et énergie cinétique on considère les déformations sur l'arbre sont dans le plan X O Z et Y O Z.

Energie potentielle :

La flexion du rotor produit un travail intérieur provoqué par la dilatation des fibres pour une poutre soumis à une flexion plan.

L'énergie potentielle exprime l'énergie de déformation emmagasinée dans l'arbre due à la flexion de ce dernier .elle à pour expression

$$U = \int_0^{2\pi} \frac{M_x z^2 + M_y z^2}{2EI} dz \quad (A1-1)$$

Maintenant supposons que la section de l'arbre est uniforme, homogène et isotrope donc :

$$\begin{aligned} M_{xy} &= EI \ddot{x} \\ M_{yz} &= EI \ddot{y} \end{aligned} \quad (\text{A1-2})$$

E : module de Young

I : moment d'inertie polaire de la section droite vue à l'axe neutre.

Dans le plan X O Z :

$$\ddot{x} = \frac{3}{L^3} \begin{cases} (x_1 - x_2 + \theta_y L) & \dots\dots\dots 0 \leq z \leq L \\ (x_3 - x_2 - \theta_y L) & \dots\dots\dots L \leq z \leq 2L \end{cases} \quad (\text{A1-3})$$

Dans le plan Y O Z

$$\ddot{y} = \frac{3}{L^3} \begin{cases} (y_1 - y_2 - \theta_x L) & \dots\dots\dots 0 \leq z \leq L \\ (y_3 - y_2 + \theta_x L) & \dots\dots\dots L \leq z \leq 2L \end{cases} \quad (\text{A1-4})$$

Substituons ces équations dans l'expression

On obtient l'expression finale de l'énergie potentielle

$$\begin{aligned} U &= \frac{3EI}{L^3} (x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1\theta_y L - 2x_3\theta_y L + 2\theta_y^2 L^2 + y_1^2 + 2y_2^2 \\ &+ y_3^2 - 2y_1y_2 - 2y_2y_3 - 2y_1\theta_x L + 2y_3\theta_x L + 2\theta_x^2 L^2) \end{aligned} \quad (\text{A1-5})$$

b)- Energie cinétique :

L'énergie cinétique est la somme des énergies cinétiques des points constituant le système.

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{n=2} T_i \\ T &= 1/2 \left[ \sum_{i=1}^{n=2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + \sum_{i=1}^{n=2} \omega^2 m_i (x_i^2 + y_i^2) \right] + 1/2 I_t (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2) \end{aligned} \quad (\text{A1-6})$$

Développant la formule de l'énergie cinétique :

$$T = 1/2 [m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) + \omega^2 m_1 (x_1^2 + y_1^2) + \omega^2 m_2 (x_2^2 + y_2^2) + \omega^2 m_3 (x_3^2 + y_3^2)] + 1/2 I_t (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2) \quad (\text{A1-7})$$

### A1.3 Système des équations

Appliquant la formulation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

On aboutit au système d'équations différentielles qui caractérise le mouvement :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{x}_1 + \left( \frac{4EI}{L^3} - \omega^2 m_1 \right) x_1 - \frac{4EI}{L^3} x_2 + \frac{4EI}{L^2} \theta_y = 0 \\ m_1 \ddot{y}_1 + \left( \frac{4EI}{L^3} - \omega^2 m_1 \right) y_1 - \frac{4EI}{L^3} y_2 + \frac{4EI}{L^2} \theta_x = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + \left( \frac{8EI}{L^3} - \omega^2 m_2 \right) x_2 - \frac{4EI}{L^3} x_1 - \frac{4EI}{L^2} x_3 = 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 + \left( \frac{8EI}{L^3} - \omega^2 m_2 \right) y_2 - \frac{4EI}{L^3} y_1 - \frac{4EI}{L^2} y_3 = 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 + \left( \frac{4EI}{L^3} - \omega^2 m_3 \right) x_3 - \frac{4EI}{L^3} x_2 - \frac{4EI}{L^2} \theta_y = 0 \\ m_3 \ddot{y}_3 + \left( \frac{4EI}{L^3} - \omega^2 m_3 \right) y_3 - \frac{4EI}{L^3} y_2 + \frac{4EI}{L^2} \theta_x = 0 \\ I_t \ddot{\theta}_x + \frac{8EI}{L} \theta_x - \frac{4EI}{L^2} y_1 + \frac{4EI}{L^2} y_3 = 0 \\ I_t \ddot{\theta}_y + \frac{8EI}{L} \theta_y + \frac{4EI}{L^2} x_1 - \frac{4EI}{L^2} x_3 = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A1-8})$$

### A1.4 Effet gyroscopique

L'existence d'un moment d'inertie polaire donne naissance à un moment gyroscopique.

D'après la deuxième loi de Newton pour les corps solides (non déformables) en rotation on a :

$$\dot{\vec{H}} = \vec{M}$$

$\vec{M}$  : Moment des forces extérieures

$\vec{H}$  : Moment cinétique

$$\vec{H} = \dot{\theta}_x I_1 \vec{i} + \dot{\theta}_y I_2 \vec{j} + \omega I_3 \vec{k} \quad (\text{A1-9})$$

On note que la vitesse angulaire  $\omega$  est constante.

Le moment d'inertie d'un disque est :

$$I_p = I_3 = \frac{1}{2} M R^2$$

$$I_1 = I_2 = I_t = \frac{1}{4} M R^2$$

$$\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j}$$

Par identification on trouve :

$$\begin{cases} M_{zx} \\ M_{zy} \end{cases} = \begin{cases} I_t \ddot{\theta}_x + \omega I_p \dot{\theta}_y \\ I_t \ddot{\theta}_y - \omega I_p \dot{\theta}_x \end{cases} = \begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & I_t \end{bmatrix} \begin{cases} \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \end{cases} + \begin{bmatrix} 0 & \omega I_p \\ -\omega I_p & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{cases}$$

Dans cette expression il y a deux termes distincts.

Le premier terme est déjà pris en considération dans les équations du mouvement

Alors que le second tient compte de l'effet gyroscopique :

On le note :

$$\begin{cases} M_{zx}^G = +\omega I_p \dot{\theta}_y \\ M_{zy}^G = -\omega I_p \dot{\theta}_x \end{cases} \quad (\text{A1-10})$$

Par contre les moments gyroscopiques exercés sur l'arbre par le disque sont :

$$\begin{cases} Q_{zx}^G = -\omega I_p \dot{\theta}_x = -M_{zx}^G \\ Q_{zy}^G = +\omega I_p \dot{\theta}_y = -M_{zy}^G \end{cases}$$

Finalement on introduit l'effet gyroscopique dans les équations du mouvement on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 m_1 \ddot{x}_1 + \left( \frac{4EI}{L^3} - \omega^2 m_1 \right) x_1 - \frac{4EI}{L^3} x_2 + \frac{4EI}{L^2} \theta_y = 0 \\
 m_1 \ddot{y}_1 + \left( \frac{4EI}{L^3} - \omega^2 m_1 \right) y_1 - \frac{4EI}{L^3} y_2 + \frac{4EI}{L^2} \theta_x = 0 \\
 m_2 \ddot{x}_2 + \left( \frac{8EI}{L^3} - \omega^2 m_2 \right) x_2 - \frac{4EI}{L^3} x_1 - \frac{4EI}{L^2} x_3 = 0 \\
 m_2 \ddot{y}_2 + \left( \frac{8EI}{L^3} - \omega^2 m_2 \right) y_2 - \frac{4EI}{L^3} y_1 - \frac{4EI}{L^2} y_3 = 0 \\
 m_3 \ddot{x}_3 + \left( \frac{4EI}{L^3} - \omega^2 m_3 \right) x_3 - \frac{4EI}{L^3} x_2 - \frac{4EI}{L^2} \theta_y = 0 \\
 m_3 \ddot{y}_3 + \left( \frac{4EI}{L^3} - \omega^2 m_3 \right) y_3 - \frac{4EI}{L^3} y_2 + \frac{4EI}{L^2} \theta_x = 0 \\
 I_t \ddot{\theta}_x + \omega I_p \dot{\theta}_x + \frac{8EI}{L} \theta_x - \frac{4EI}{L^2} y_1 + \frac{4EI}{L^2} y_3 = 0 \\
 I_t \ddot{\theta}_y - \omega I_p \dot{\theta}_y + \frac{8EI}{L} \theta_y + \frac{4EI}{L^2} x_1 - \frac{4EI}{L^2} x_3 = 0
 \end{array} \right. \quad (A1-11)$$

Ecrivons maintenant le système différentiel sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 & 0 & -B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & BL \\ A_1 & 0 & -B & 0 & 0 & -BL & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & -B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & -B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & 0 & -BL & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S & Y & M & 0 & A_3 & BL & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2BL^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2BL^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tel que :  $A_i, B$  et  $C_i$  sont des constants a pour valeurs :

$$A_i = \frac{4EI}{L^3} - \omega^2 m_i$$

$$B = \frac{4EI}{L^3}$$

$$C_i = \frac{8EI}{L^3} - \omega^2 m_i$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Les matrices d'amortissement  $[C]$  et la raideur  $[K_p]$  sont données par :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{xx}^1 & C_{xy}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{yx}^1 & C_{yy}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{xx}^2 & C_{xy}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{yx}^2 & C_{yy}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega I_p \end{bmatrix}$$

Et

$$[K_p] = \begin{bmatrix} k_{xx}^1 & k_{xy}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{yx}^1 & k_{yy}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{xx}^2 & k_{xy}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{yx}^2 & k_{yy}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalement on trouve les équations du mouvement sous la forme :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + ([K] + [K_p] - \omega^2[M])\{q\} = \{0\} \quad (A1-12)$$

### A1.5 Résolution de système des équations

Donc la solution de l'équation peut être donnée comme suite :

$$\{q\} = \{a\}\sin(\Omega t/2) + \{b\}\cos(\Omega t/2) \quad (\text{A1-13})$$

Substituant l'expression (A1-13) dans (A1-12) on aboutit à :

$$\begin{aligned} & [-[M]\frac{\Omega^2}{4}\{a\}\sin(\Omega t/2) - [M]\frac{\Omega^2}{4}\{b\}\cos(\Omega t/2) + [C]\{a\}\cos(\Omega t/2) - [C]\{b\}\frac{\Omega}{2}\sin(\Omega t/2) + \\ & ([K] + [K_p] - \omega^2[M])\{a\}\sin(\Omega t/2) + ([K] + [K_p] - \omega^2[M])\{b\}\cos(\Omega t/2) \} \{q\} = \{0\} \end{aligned}$$

(A1-14)

Dans l'expression (A1-14) on additionne les termes de même harmonique :

$$\begin{cases} [[K] - [M](\frac{\Omega^2}{4} + \omega^2)]\{a\} + [-\frac{\Omega}{2}[C]]\{b\} = \{0\} \\ [[\frac{\Omega}{2}[C]]]\{a\} + [[K] - [M](\frac{\Omega^2}{4} + \omega^2)]\{b\} = \{0\} \end{cases}$$

La solution simple  $a = b = 0$  est sans intérêt et les autres solutions sont celles qui correspondent à l'annulation du déterminant de la matrice.

$$D = \left[ [K] - [M](\frac{\Omega^2}{4} + \omega^2) \right]^2 + \frac{\Omega^2}{4}[C]^2 \quad (\text{A1-15})$$

Si  $D=0$  on a les pulsations de l'instabilité dynamique

Et si  $D \neq 0$  on a la zone de stabilité pour les quelles le rotor peut tourner.

## A2.Généralités

### Introduction

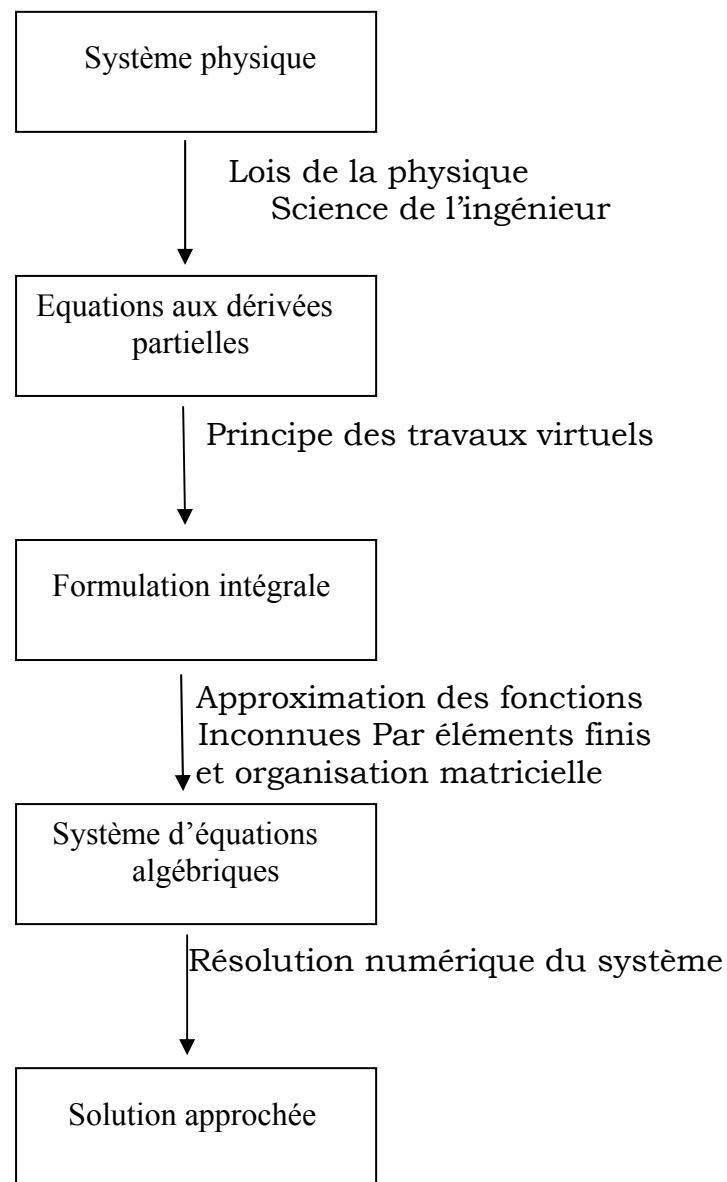
L'évolution technologique conduit les ingénieurs et chercheurs d'aujourd'hui à travailler sur des projets de plus en plus complexes : multi-physique. Pour ce faire, ils construisent des modèles qui leur permettent de simuler le comportement des systèmes étudiés : transport, nucléaire, biologique... Ils peuvent donc prévoir l'influence de leurs décisions lors de la conception.

La Méthode des Eléments Finis (MEF) est un outil mathématique dédié à la résolution de problème d'Equations aux Dérivées Partielles (EDP) associées à des conditions aux limites bien définies. Cet outil mathématique a pour but de rechercher une solution numérique approchée de la solution exacte. Pour cela, la MEF consiste à utiliser une approximation simple de variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. L'avancée informatique de ces dernières années a rendu possible la résolution de problèmes complexes sur les ordinateurs de bureau, notamment en raison d'un accroissement de la puissance de calcul des processeurs ainsi que de la mémoire présente.

De plus aucun domaine n'est épargné par la MEF, de la géophysique jusqu'aux systèmes microélectromécaniques (MEMS) en passant par la biochimie, toutes études nécessitent à un moment ou à un autre le recours aux éléments finis. Nombre de logiciels sont donc apparus sur ce marché anciennement réservé aux stations de travail. Nous pouvons citer par exemple : ANSYS, SYSTUS, MODULEF, ATTILA, NASTRAN, MATLAB/FEMLAB, SCILAB... Chacun d'entre-eux ont des spécificités bien particulières mais se veulent multi-physique.

L'étude présentée dans ce mémoire est réalisée avec ANSYS (ANSYS Structural). Le choix de celui-ci est justifié du fait de la présence de module piézoélectrique ainsi que de la facilité de prise en main. Par conséquent, les différents modèles et problèmes peuvent être traités de façon plus proche de la réalité. De la détermination des modes jusqu'au calcul des paramètres motionnels du circuit électrique équivalent, les éléments finis sont employés partout. Une comparaison avec l'étude analytique est également présentée. Le schéma (Figure A.2.1) montre, depuis la prise en compte du système physique jusqu'à la solution approchée, l'architecture générale de la MEF.





**Figure A.2.1** : Architecture d'une étude par éléments finis.

### A.2.1. Principe

Nous allons décrire le principe de la méthode des éléments finis dans le cas de notre problème. Le comportement d'un rotor est défini par les théorèmes de la mécanique générale. La formulation intégrale d'un tel problème se réduit à [36-40] :

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{\text{volume}} [\sigma_{ij} \delta u_{j,i} + \rho \ddot{u}_j \delta u_j] dV - \int_{\text{surface}} f_i \delta u_i dS \right\} dt = 0 \quad (*)$$

Avec  $t_0$  et  $t_1$  temps initial et final du calcul lorsque le problème dépend du temps,  $u_i$  le déplacement suivant  $i$ ,  $\delta u_i$  un déplacement élémentaire suivant  $i$  et  $f$  la force appliquée par unité de surface.

La méthode consiste à découper le domaine de calcul, ici le rotor, en petits éléments : c'est l'opération de maillage. Et ainsi obtenir une solution approchée du problème à l'aide de fonctions d'interpolation par juxtaposition de solutions calculées sur ces petits éléments. Il faut donc déterminer de façon judicieuse les paramètres de maillage soit :

- le type d'interpolation choisi, le plus fréquemment des polynômes de degré un ou deux
- le nombre d'éléments afin de constituer une approximation satisfaisante de la solution.

Ce qui conduit à la construction d'éléments (mailles) en choisissant arbitrairement des points prédéterminés appelés noeuds de l'élément. C'est en ces points qu'est déterminée la valeur locale des inconnues dans chaque élément. Le nombre d'inconnues scalaires par noeud varie selon la nature du problème. Ce nombre est appelé nombre de degrés de liberté (ddl). L'interpolation permet de calculer une valeur approchée de la solution en tout point de la maille en ne connaissant que les valeurs aux noeuds de l'élément.

La discrétisation de la formulation variationnelle (Eq. (\*)) Consiste à décomposer les intégrales sur le domaine et les frontières en une somme d'intégrales calculées sur les domaines élémentaires.

### A.2.2. Introduction à « ANSYS »

Pour mener notre étude par simulation numérique, on a utilisé le code numérique ANSYS, qui est l'un des codes de calcul, basé sur la méthode d'éléments finis, parmi les plus utilisés dans le monde.

Le code «ANSYS» comprend plusieurs composantes. Chaque composante est destinée à l'un des domaines d'ingénierie, et son choix met automatiquement à la disposition de l'utilisateur les processus adéquats (type d'élément, conditions aux limites, tracés) etc). Les principales composantes sont :

- **ANSYS Multiphysics** : Module le plus complet des solutions ANSYS. Etudes linéaires et non linéaires, statiques et dynamiques, en mécanique et thermique, mécanique des fluides, électromagnétisme basse et haute fréquence, couplages multiphysiques, etc... 2 environnements de simulation accessibles au choix: Workbench et Classic
- **ANSYS Mechanical** : Etudes linéaires et non linéaires, statiques et dynamiques, en mécanique et thermique. 2 environnements de simulation accessibles au choix: Workbench et Classic
- **ANSYS Structural** : Etudes linéaires et non linéaires, statiques et dynamiques en mécanique uniquement. 2 environnements de simulation accessibles au choix: Workbench et Classic
- **ANSYS Professional NLS** : Licence intermédiaire entre ANSYS Professional NLT et ANSYS Structural, elle permet d'aborder les calculs non linéaires. Environnement de simulation: Workbench
- **ANSYS Professional NLT** : Etudes linéaires, statiques et dynamiques, en mécanique et thermique. 2 environnements de simulation accessibles au choix: Workbench et Classic
- **ANSYS DesignSpace** : Etudes linéaires, statiques, modales, et thermiques simples. Interface utilisateur: Workbench

- **ANSYS DesignSpace Structural** : Etudes linéaires, statiques, modales. Interface utilisateur: Workbench
- **ANSYS LS-DYNA** : Etudes en dynamique rapide (crash, emboutissage, etc...). Le solveur explicite LS-DYNA est intégré dans l'environnement pré/postprocesseur d'ANSYS.
- **ANSYS Autodyn** : Etudes en dynamique rapide extrême (hypervélocité, perforation, explosions, etc...). Le solveur explicite LS-DYNA est intégré dans l'environnement pré/postprocesseur d'ANSYS.
- **ANSYS PrePost** : Licence uniquement destinée au preprocessing ou au postprocessing. Cette licence est équivalente à un Multiphysics sans solveur. *Nota:* impose de posséder une licence ANSYS Structural ou supérieure.
- **ANSYS Rigid Dynamics** : Module de simulation de cinématique de corps rigides ou flexibles. Permet de récupérer les contraintes/déformations linéaires dans les pièces d'un mécanisme en mouvement..
- **ANSYS Geometry Interface** : Outil d'importation des géométries CAO natives. Ces dernières sont directement utilisables dans ANSYS. La plupart d'entre elles sont bidirectionnelles, et permettent la récupération des éventuels paramètres de la géométrie CAO. Disponible pour ProE, Inventor MDT, SolidEdge, SolidWorks, NX (Unigraphics), Catia V4, Catia V5, SAT, Parasolid, OneSpaceDesigner..
- **ANSYS University** : Bénéficiez des fonctionnalités du module Multiphysics dans un contexte d'enseignement et/ou de recherche. Limitations (noeuds/éléments) selon les versions.
- **ANSYS CFX** : Calculs CFD en fluide, thermofluide, écoulements, multiphase, cavitation, chimie réactionnelle...
- **ANSYS CFX Mesh** : mailleur CFD totalement intégré à ANSYS CFX: grande performance dans la gestion manuelle ou automatique des couches limites, etc...

Dans notre analyse, on a utilisé le module Structural dans ANSYS/Structural, qui permet de traiter la majorité des problèmes de mécanique des solides et les problèmes de vibration. Il offre des outils puissants pour l'analyse en deux et trois dimensions. On trouve dans le manuel d'aide de «ANSYS » toutes les instructions qui permettent son exploitation à travers son interface utilisateur graphique Graphical User Interface ainsi que toute la documentation nécessaire.

De nombreux processus de calcul sont disponibles dans ce code et chaque processus est une sorte d'ensemble de fonctions qui effectuent une tâche spécifique. Par exemple, dans le pré-processus général Preprocessor, on construit le modèle, le processus Solution dans lequel on applique les conditions initiales et aux limites. Le processus PostProcessor permet d'exploiter les résultats obtenus de différentes manières (courbes, tableaux etc.).

### A.2.3. Méthode Damped

pour l'analyse modale, on utilise la méthode Damped. C'est une méthode utilisée pour le calcul des fréquences propres et les modes propres sous environnement Ansys. Cette méthode présente les fréquences et les dans le domaine complexe (partie réelle et partie imaginaire).