

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA - BOUMERDES
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Modélisation et Simulation en Mécanique

Intitulé du Sujet :

**Simulation des transferts thermo convectifs d'un écoulement
turbulent en régime périodique**

Présenté par : **Mohammed BECHIRI**

Encadré par : **K. MANSOURI**

Soutenu le : 10/02/2010

Devant le jury composé de :

Pr. Slimane AISSANI	Président	Pr	UMB BOUMERDÈS
Dr. Kamal MOHAMMEDI	Examineur	MC	UMB BOUMERDÈS
Dr. Idir BELAIDI	Examineur	MC	UMB BOUMERDÈS
Dr. Hinda KAHALERRAS	Examinatrice	MC	USTHB ALGER
Dr. Kacem MANSOURI	Rapporteur	MC	UMB BOUMERDÈS

ANNEE UNIVERSITAIRE 2009-2010

الْحَمْدُ لِلَّهِ الَّذِي هَدَانَا لِهَذَا وَمَا كُنَّا

لِنَهْتَدِيَ لَوْلَا أَنْ هَدَانَا اللَّهُ

Remerciement

Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur KACEM MANSOURI qui m'a encadré, pour l'échange permanent de vues, d'appréciables contributions et une aide efficace dans la relecture de ce mémoire.

J'exprime ma reconnaissance aux Messieurs K. MOHAMMEDI, I. BELAIDI, S. AISSANI et Mlle H. KAHALERRAS d'avoir bien voulu juger ce travail.

J'adresse enfin mes remerciements à mes parents et à mon frère ALI pour leurs contributions matérielles et morales à la réalisation de ce travail.

Résumé :

Nous traitons dans ce mémoire le problème de la convection forcée turbulente en régime périodique, d'un fluide en écoulement dans une conduite de forme cylindrique ou plane en tenant compte de la conduction transversale dans la paroi solide. L'étude comprend trois parties essentielles: Dans la première partie, une solution exacte utilisant la Technique de la Transformée Intégrale Généralisée (GITT) est développée pour un écoulement turbulent entre deux plaques parallèles. Une comparaison des résultats obtenus avec les littératures [28, 30] est réalisée. Dans la deuxième partie, l'approche quasi-stationnaire (modèle simplifié) est également utilisée et comparée avec la méthode GITT. Dans la troisième partie, le phénomène de la conduction axiale dans la paroi est considéré. Les résultats obtenus numériquement sous le code **Fluent** sont comparés avec la solution exacte GITT. En fin une application pratique à un module de stockage d'un régénérateur à plaques est présentée. La fonction de transfert et l'optimisation du stockage d'énergie dans le module sont étudiées.

Mots-clés : Convection forcée turbulente, régime périodique, méthode GITT, modèle simplifié, résolution numérique, conduit cylindrique et plan.

Abstract:

In this work, an analysis is made of unsteady turbulent forced convection in a duct with periodically varying inlet temperature. The transverse heat transfer in the duct wall is considered. The study includes three essentials parts: In the first part, an exact solution is developed for the turbulent flow inside the parallel-plates channel, by using the Generalised Integral Transformation Technique. A comparison of results found to literatures is made. In the second part, the quasi-steady approach (simplified model) is used and compared with the GITT method. In the third part, the phenomenon of the axial conduction in the wall is considered. The results obtained numerically by the **fluent** code are compared with the exact solution GITT. In the end, a practical application to a storage module of plate regenerator is presented. The transfer function and the optimization of the energy storage in the module are studied.

Keywords: Turbulent forced convection, periodic regime, GITT method, simplified model, numeric resolution, cylindrical and plane duct,

ملخص:

في هذه الأطروحة نعالج ظاهرة الحمل الحراري الحتمي الهائج في نظام دوري، بين مائع في حالة سيلان هائج داخل قناة معدنية ذات شكلا اسطواناني أو مستوي. مع الأخذ بعين الاعتبار لظاهرة الانتقال الحراري العرضي داخل الجدار الصلب. هذه الدراسة تنقسم إلى ثلاث أجزاء رئيسية: في الجزء الأول، وبتطبيق التقنية GITT تحصلنا على الحل الكامل لإشكالية السيلان الهائج داخل قناة تتكون من صفيحتين متوازيتين. النتائج المتحصل عليها تم مقارنتها مع نتائج موجودة (منشورة) في دراسات سابقة، و تم أيضا تحليل الظواهر المتعلقة بهذا النوع من السيلان. استعملت مقارنة الشبه ثابتة (نموذج مبسط) في هذه الدراسة و تمت مقارنتها مع التقنية GITT و ذلك في الجزء الثاني من هذه الدراسة. وفي الجزء الثالث، درست ظاهرة الانتقال الحراري المحوري داخل الجدار الصلب عن طريق الحل الرقمي و ذلك بالاستعانة بالبرنامج **Fluent**، و تم التأكد من نتائج الحل الرقمي عن طريق مقارنتها مع نتائج الحل التحليلي (GITT). و في النهاية تطبيق عملي على وحدة تخزين من مسترجع حراري مكون من صفائح متوازية، و تم أيضا دراسة دالتي الانتقال و التخزين الحراريين.

كلمات مفاتيح: الحمل الحراري الحتمي الهائج، نظام دوري، التقنية GITT، نموذج مبسط، حل رقمي، جدار صلب اسطواناني أو مستوي.

Nomenclature

$[A]$	Matrice du système (2.9a)
a_{kj}	Élément de la matrice $[A]$, équation (2.9e)
a_{kj}^*	Défini par l'équation (2.8b)
$\{C\}$	Vecteur constant, équation (2.13a)
$\{V\}$	Vecteurs propres de la matrice $[A]$
$\{X(\xi)\}$	Vecteur défini par l'équation (2.12a)
R_1	Diamètre de tube ou demi-espacement entre les plaques parallèles (m)
R_2	Diamètre extérieur (m)
l	Paramètre défini pour conduit à plaque par $[R_2 - R_1]$
L	Langueur de la plaque (m)
L_0	Largueur des plaques (m)
R^*	Rayon adimensionnel $[R_2/R_1]$
D_e	Diamètre équivalent (m)
$\{f\}$	Vecteur des conditions initiales défini par l'équation (2.9b)
f_k	Constant défini par (2.8c)
f_m	Coefficient de friction
$i = \sqrt{-1}$	
N	Ordre de la matrice $[A]$
N_k	Normalisation défini par l'équation (2.7c)
Pr	Nombre de Prandtl $[\nu/\alpha_f]$
Pr_t	Nombre de Prandtl turbulent $[\varepsilon_h/\alpha_t]$
Re	Nombre de Reynolds $[u_m D_e/\nu]$
Nu_{int}	Nombre de Nusselt $[(2^{2-m} h_{int} R_1)/k_s]$
R^+	Paramètre défini en Annexe (1) $[(Re/4)\sqrt{f_m/8}]$
T_f	Température de fluide (K)
T_s	Température de solide (K)
T_∞	Température ambiante (K)
ΔT	Amplitude de la température d'entrée (K)
t	Dimension temporelle (s)
$u(r)$	Vitesse d'écoulement ($m\ s^{-1}$)
u_m	Vitesse moyenne ($m\ s^{-1}$)
u^+	Vitesse adimensionnelle $[u/u_m\sqrt{f_m/8}]$
$W(\eta)$	Vitesse adimensionnelle $[W(\eta) = u(r)/u_m]$
\bar{u}	Vitesse moyennée ($m\ s^{-1}$)
u_j	Vitesse locale dans les trois directions ($m\ s^{-1}$)

Nomenclature

x	Coordonnée axiale (m)
r	Coordonnée radiale (m)
y^+	Distance adimensionnelle, dés la paroi vers le centre du conduit. (m)
C_p	Chaleur massique [$J kg^{-1} K^{-1}$]
a^+	Rapport de capacités thermiques fluide/solide [$(\rho C_p)_f \times R_1 / (\rho C_p)_p \times (R_2 - R_1)$]
Bi_{ext}	Nombre du Biot intérieur [$h_{ext} R_1 / K_s$]
Bi_{int}	Nombre du Biot extérieur [$h_{ext} R_1 / K_f$]
h_{ext}	Coefficient de transfert thermique convectif à l'extérieur du conduit ($Wm^{-2} K^{-1}$)
h_{int}	Coefficient de transfert thermique convectif à l'intérieur du conduit ($Wm^{-2} K^{-1}$)
k_f	Conductivité thermique de fluide ($Wm^{-1} K^{-1}$)
k_s	Conductivité thermique de solide ($Wm^{-1} K^{-1}$)
r_{th}	Constant défini par [$r_{th} = \gamma / R^* - 1$]
q_w	Flux thermique à la paroi
$A(\xi)$	Amplitude
P	Pression [$N m^{-2}$]
x_j	Dimension suivant les trois axes (m)
$k \overline{u_i u_j}$	Energie cinétique turbulente
$-u_i u_j$	Contrainte de Reynolds
E_{is}	Energie interne des plaques
W_s	Energie stockée dans les deux demi-plaques
f_s	Fonction de stockage
χ_b	Fonction d'amortissement

Symboles Grecs

$\theta_f(\xi, \eta, \tau)$	Température adimensionnelle de fluide [$(T(\xi, \eta, \tau) - T_\infty) / \Delta T$]
$\theta_s(\xi, \eta, \tau)$	Température adimensionnelle de solide [$(T(\xi, \eta, \tau) - T_\infty) / \Delta T$]
$\tilde{\theta}_f(\xi, \eta)$	Température inverse de fluide, équation (2.7a)
$\bar{\theta}(\xi)$	Température transformée
λ	Valeurs propre de la matrice [A]
μ_k	Valeurs propres du problème (2.6)
ξ	Coordonnée axiale adimensionnelle (m)
η	Coordonnée radiale adimensionnelle (m)
τ	Temps adimensionnel [$t \alpha_f / R_1^2$]
α_f	Diffusivité thermique du fluide ($m^2 s^{-1}$)
α_s	Diffusivité thermique du solide ($m^2 s^{-1}$)
ρ	Masse volumique [$kg m^{-3}$]
Γ	Paramètre défini par [α_f / α_s]

Nomenclature

ν	Viscosité cinématique de fluide ($m^2 s^{-1}$)
$\varepsilon(\eta)$	Diffusivité totale adimensionnelle [$\varepsilon(\eta) = 1 + \varepsilon_h/\alpha_f$]
ε_h	Diffusivité thermique turbulente ($m^2 s^{-1}$)
ε_m	Viscosité turbulente ($m^2 s^{-1}$)
$\psi(\xi)$	Fonctions propres du problème (6)
$\Psi(\xi)$	Matrice fondamentale de l'équation (2.12)
γ	Rapport des conductivités thermiques [k_s/k_f]
β_s	Paramètre de diffusion du solide $(R_2 - R_1)\sqrt{\omega/2\alpha_s}$
$\bar{\beta}$	Paramètre défini par [16] $\gamma(R^* - 1)(u_m/u_{\max})^2 / (\text{Re Pr})^2$
Ω	Fréquence d'entrée adimensionnelle [wR_1^2/α_f]
ω	Fréquence d'entrée (Hz)
τ^*	Période [$2\pi/\omega$]
σ	Coefficient d'amortissement complexe défini par l'équation (4.7b)
α	Coefficient d'amortissement
β	Coefficient de déphasage
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
ν_t	Viscosité turbulente ($m^2 s^{-1}$)
ε	La dissipation
$\phi(\xi)$	Déphasage (Rad)

Subscripts et Superscripts

b, w	Valeur moyenne et valeur interfaciale
f, s	Propriété de fluide et de solide
i, j	Indice des lignes et des colonnes
k	Ordres des valeurs propres.
i, j, k	Indice des directions

Abréviations

GITT	Generalized Integral Transform Technique.
QSA	Quasi-steady Approach

Table des matières

Résumé	II
Nomenclature	III
Introduction	1
1 Recherche bibliographique	
1.1 Etat de l'art.....	3
1.2 Ecoulement fluide soumis à des conditions thermiques transitoires à la paroi.....	4
1.3 Écoulement fluide soumis à des conditions thermiques transitoires à l'entrée.....	8
1.3.1 Régime laminaire.....	8
1.3.2 Régime turbulent.....	16
1.4 Quelques travaux récents utilisant la technique GITT.....	19
1.5 Conclusion.....	20
2 Etude analytique d'un écoulement turbulent entre deux plaques parallèles en régime périodique établi	22
2.1 Description du problème	22
2.2 Hypothèses simplificatrices	22
2.3 Formulation mathématique.....	23
2.4 Méthode de résolution.....	25
2.5 Résultats et commentaires.....	30
2.6 Etude des cas limites : cas d'une paroi isotherme.....	44
2.6.1 Description du problème	44
2.6.2 Formulation mathématique.....	44
2.6.3 Méthode de résolution.....	45
2.6.4 Comparaison des résultats.....	47
2.7 Etude des cas limites : cas d'une paroi mince à température constante	49
Description du problème	49
Formulation mathématique.....	49
Méthode de résolution.....	50
Comparaison des résultats.....	52
2.8 Conclusion	54
3 Etude analytique d'un écoulement turbulent dans un conduit cylindrique avec diffusion dans la paroi	55
3.1 Introduction	55
3.2 Description du problème	55
3.3 Formulation mathématique	56
3.4 Méthode de résolution	58
3.5 Résultats et commentaires	60
3.6 Conclusion	65
4 Etude analytique du modèle quasi-stationnaire	66
4.1 Introduction	66
4.2 Description	66
4.3 Formulation mathématique	67
4.4 Etude des cas limites.....	69
4.5 Résultats et commentaires	72
4.6 Conclusion	79

5 Simulation numérique de l'écoulement turbulent entre deux plaques parallèles en régime périodique établi	81
5.1 Introduction	81
5.2 Equations gouvernantes.....	81
5.2.1 Équations moyennées	81
5.2.2 Modèle de turbulence	82
5.3 Méthodes numériques de simulation	83
5.3.1 Génération du maillage	83
5.3.2 Solveur	83
5.3.3 Maillages	83
5.4 Résultats et commentaire	84
5.4.1 plaque mince à température constante	84
5.4.2 plaque épaisse	92
5.6 Conclusion	97
6 Application : Stockage de l'énergie dans un régénérateur à plaques	98
6.1 Description du problème	98
6.2 Fonction de transfert	99
6.3 Bilan énergétique et fonction de stockage	99
6.4 Discussion des résultats	101
6.4.1 Fonction d'amortissement	101
6.4.2 Etude du déphasage	105
6.4.3 Stockage	107
6.5 Conclusion	108
Conclusion générale	109
References	111
Annexe	115

Introduction

L'analyse du transfert de chaleur par convection et conduction en régime instationnaire ne répond pas seulement à une préoccupation théorique. Elle concerne directement une grande variété de situations industrielles. En particulier, on peut citer les problèmes liés aux phases d'arrêt et de démarrage d'un échangeur de chaleur dans une centrale de puissance ou le fonctionnement des chaudières solaires est périodique.

Les études traitant le régime laminaire sont plus nombreuses comparativement au régime turbulent, la littérature scientifique concernant la convection forcée turbulente reste encore limitée. De plus, parmi ces travaux une grande partie est liée au régime permanent. Le régime transitoire reste à nos jours peu exploré. C'est pour cette raison que l'étude proposée ici constitue une contribution en régime transitoire.

La très grande majorité des travaux effectués à ce jour est d'ordre théorique. Il s'agit essentiellement de développer des solutions analytiques ou numériques aux équations aux dérivées partielles. Les cas étudiés peuvent se distinguer par la nature des conditions aux limites, par le type d'écoulement (laminaire ou turbulent) ou encore par le choix du signal d'excitation.

Les problèmes d'interactions fluide-paroi nécessitent le traitement simultané des équations de bilan énergétique dans les deux milieux liés par la continuité des flux thermiques et des températures à l'interface. Les solutions analytiques pour ce type de problème apparaissent comme l'exception, et les hypothèses simplificatrices parfois physiquement discutables sont nécessaires. Toutefois ces solutions présentent l'intérêt de tester des méthodes numériques qui s'imposent comme la seule voie envisageable.

Dans le domaine industriel, on réduit considérablement les difficultés d'analyse en transposant aux problèmes instationnaires la notion du coefficient d'échange thermique issue du régime permanent. On traite alors ce qu'il est convenu d'appeler un modèle quasi-stationnaire, pour lequel l'analyse théorique reste abordable. La question qui se pose et qui nous intéresse dans la présente étude concerne précisément la, ou les limites d'une telle approche simplificatrice dans son pouvoir de prédiction.

Dans la présente étude on traite un cas particulier des régimes variables à savoir la réponse fréquentielle d'un système plaques parallèles (et tube cylindrique) parcouru par un fluide en régime turbulent. Les paramètres thermo-physiques qui conditionnent la fonction de transfert tels que la fréquence du signal thermique d'entrée, l'épaisseur des plaques ou le rapport des capacités thermiques fluide/solide sont étudiés.

Notre travail se compose de trois parties. Après une recherche bibliographique, la première partie concerne la résolution analytique (utilisant la Technique de Transformé Intégrale Généralisée GITT) du problème de transfert thermique conjugué, entre un fluide en écoulement turbulent et une paroi épaisse, dans les deux configurations (plane et cylindrique). Deux cas simplifiés sont traités, dans le premier nous supposons que la paroi isotherme (pas de conduction transversale), et dans le deuxième cas la paroi est considérée à température constante. Les résultats obtenus sont comparés à la littérature, respectivement [28] et [30].

Dans la deuxième partie, le même problème cité précédemment est résolu en utilisant l'approche quasi-stationnaire basée sur un coefficient d'échange à l'interface fluide-solide, calculé à partir de corrélations utilisées fréquemment pour le régime stationnaire. Une confrontation des résultats est réalisée entre les deux modèles GITT et QSA.

La troisième partie de notre travail concerne la résolution numérique du problème de transfert thermique conjugué en utilisant le code de calcul **Fluent**, qui est basé sur la méthode des volumes finis. La résolution numérique nous fournira une vue claire sur l'effet de la conduction axiale dans la paroi. Les résultats obtenus sont comparés avec le modèle analytique GITT. En fin une application pratique à un module de stockage d'un régénérateur à plaque est présentée. La fonction de transfert et l'optimisation du stockage d'énergie dans le module sont étudiées.

L'utilisation de la technique GITT en régime turbulent avec la prise en considération de la conduction transversale dans la paroi et la résolution numérique sous **Fluent** constitue l'originalité de ce travail.

Chapitre 1 :

Recherche bibliographique :

1.1. Etat de l'art

Les équations caractéristiques des échanges thermiques par convection en régime instationnaire sont écrites pour la première fois par Profos (1943). Depuis, de nombreux auteurs ont poursuivi ces travaux avec des applications directes aux échangeurs de chaleurs. Dans toute ces études, les auteurs font appelle à la notion de coefficient d'échange (h). A la fin des années 60, les premières études détaillées sur le comportement du coefficient d'échanges sont entreprises. **E. M. Sparrow et de Farias [12]** constatent en étudiant un écoulement fluide entre deux plaques parallèles, pour une température d'entrée sinusoïdale, que ce coefficient $h(t)$ est lui-même périodique et prend des valeurs infinis positives ou négatives au cours du temps.

H. Kawamura [36] développe une solution numérique pour un écoulement fluide turbulent dans un conduit cylindrique dont la paroi est soumise un échelon de température. L'auteure montre que le coefficient d'échange déterminé par la condition de Fourier ne peut être constant qu'après une certaine durée de fonctionnement ($t^+ > 2$). Les résultats du modèle quasi-stationnaire confrontés aux résultats expérimentaux sont convenables si la capacité thermique de paroi est grande, la conductivité et la capacité thermique du fluide sont faibles.

B. Fouchier [37] en résolvant le problème du Graetz généralisé à une température périodique arrive à la même conclusion que [12]. Le nombre de Nusselt varie périodiquement en fonction du temps (courbe d'allure voisine de $tg(\omega t)$).

P. Pierson et J. Padet [38] ont étudié le comportement du coefficient d'échange h sur un cas simples du régime transitoire : phase de relaxation. Il s'agit de l'étude d'un système constitué d'un fluide en mouvement en contact d'une paroi. Les auteurs ont examiné cette phase exponentielle en distinguant trois cas. Le seul cas ou le coefficient d'échange peut être considéré constant est la phase exponentielle avec régime final uniforme.

En conclusion, le modèle quasi-stationnaire ne peut pas être utilisé sans précautions dans tous les problèmes de convection en régime variable. Pour cela, certains auteurs travaillent

depuis les années 70 sur la résolution analytique complète des problèmes de convection entre un fluide et une paroi sans faire intervenir la notion du coefficient d'échange. Même en régime turbulent, ils utilisent des modèles pseudo-laminaires faisant intervenir la diffusivité turbulente.

Nous allons dans ce qui suit passer en revue certains de ces travaux publiés que nous avons classé en deux parties, selon que les conditions transitoires sont imposées aux parois ou à l'entrée des conduits.

1.2. Ecoulement fluide soumis à des conditions thermiques transitoires à la paroi

On distingue plusieurs types de conditions thermiques à la paroi, qui peuvent être des échelons ou des variations arbitraires dans l'espace et dans le temps de la température ou du flux thermique. On peut citer les travaux de **M. Perlmutter et R. Siegel [1]**, qui consacrent leur travail à l'étude du phénomène de transfert thermique en régime transitoire, d'un fluide incompressible en écoulement laminaire, entre deux plaques parallèles. Le processus transitoire est déclenché en agissant simultanément sur la pression du fluide et la température à la paroi. Le profil de vitesse est déterminé à partir des équations :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.1)$$

$$\frac{u}{\bar{u}_2} = \frac{3}{2}(1-Y^2) - 6\left(1 - \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i / E_i^3 \exp(-E_i^2 \theta) \cos E_i Y. \quad (1.2)$$

Pour une résistance de paroi négligeable, ils obtiennent en tenant compte de l'équation (1.2) dans l'équation de l'énergie ci-dessous :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

le système suivant :

$$\frac{\partial T^*}{\partial \tau} + \left[(1-Y^2) - 4\left(1 - \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i / E_i^3 \exp(-E_i^2 \text{Pr } \tau) \cos E_i Y \right] \frac{\partial T^*}{\partial X} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial Y^2}$$

$$T^* = 0, \quad \text{à } X = 0 \quad \forall Y \text{ et } \tau$$

$$T^* = 0, \quad \text{à } \tau = 0 \quad \forall X \text{ et } Y$$

$$T^* = 0, \quad \text{à } Y = 1, \quad \tau > 0$$

$$\frac{dT^*}{dY} = 0, \quad \text{à } Y = 0,$$

d'où la solution

$$T^* = 1 - \sum_{n=0}^4 b_{no} \Psi_n(Y) F_n(X, \tau)$$

Les fonctions propres Ψ_n et F_n sont

$$\Psi_n(Y) = \sum_{m=0}^4 b_{nm} / b_{no} \cos(E_m Y)$$

$$F_n(X) = \exp(-\lambda_n^2 X).$$

Les coefficients b_{nm} / b_{no} et les valeurs propres λ_n^2 sont tabulés dans la même référence.

R. Siegel et M. Perlmutter [2] traitent le transfert de chaleur en régime transitoire d'un écoulement laminaire, instationnaire entre deux plaques parallèles. La paroi de résistance thermique négligeable est soumise à des variations spatio-temporelles du flux thermique de la forme :

$$\frac{q}{q_r} = (1 - e^{-AX})(1 - e^{-B\theta})$$

$$\frac{q}{q_r} = (e^{C\theta} - 1) \sin(\pi X / L)$$

La réponse de paroi est aussi examinée en utilisant le modèle simplifié avec un coefficient d'échange constant ($Nu = 12$).

les grandeurs sans dimensions utilisées sont :

$$X = 4x/l' \text{ Re Pr} \quad \text{et} \quad \theta = tv/l'^2 \text{ Pr}.$$

τ et v sont respectivement le temps caractéristique et la viscosité cinématique du fluide. Les constantes A, B et C sont données dans la même référence.

H. Kawamura [3] étudie le problème d'un écoulement turbulent dans un conduit annulaire avec source de chaleur uniforme à la paroi interne, et qui croit en fonction du temps. Dans la référence [4], le même auteur étudie l'écoulement turbulent d'eau dans une conduite cylindrique réchauffée par échelon.

R. M. Cotta et M. N. Özisik [5] traitent du transfert thermique transitoire d'un fluide newtonien en écoulement laminaire dans un conduit plan ou cylindrique. Le fluide est soumis à des variations par échelon de la température de paroi. La solution analytique a été établie en combinant la transformée intégrale généralisée et la méthode de Laplace. Le régime dynamique est supposé établi uniforme et l'épaisseur de paroi nulle. Une approche numérique par différence finis a été développée.

T. F. Lin et J. C. Kuo [6] traitent numériquement par un schéma aux différences finis les transferts conducto-convectifs d'un fluide en écoulement laminaire dans un tube cylindrique, dont la paroi est soumise à un échelon de flux uniforme sur une distance finie. Le couplage solide-fluide est traité en écrivant la conservation des flux et des températures à l'interface. La diffusion dans la paroi est prise en considération. L'auteur montre l'influence des paramètres physiques et géométriques sur les variations longitudinales de la température interfaciale, de mélange et du flux pariétal. Des résultats sont présentés graphiquement pour deux valeurs du nombre de Peclet, des rapports des rayons R_0/R_i , des diffusivités α_w/α_f et des conductivités thermiques k_w/k_f . Les variations des températures radiales sont également présentées pour des abscisses données.

Les indices w et f sont respectivement relatifs au solide et au fluide.

R_0 et R_i sont respectivement les rayons externes et internes du tube.

S. Aboudi et F. Papini [7] traitent numériquement par une méthode implicite de type Cank-Nicolson le problème d'écoulement fluide entre deux plaques parallèles en régime laminaire ou turbulent. La plaque supérieure est soumise à une condition du flux instationnaires et la plaque inférieure est isolée. Les transferts d'énergie par rayonnement, conduction et convection sont pris en considérations. Le profil de température et le coefficient de transfert métal-fluide sont déterminés en tout point du canal. Les résultats obtenus sont ensuite comparés à ceux du modèle quasi-stationnaire ou simplifié (MS) faisant intervenir un coefficient de transfert métal-fluide (H) utilisé de façon classique.

J. N. N. Quaresma et R.M. Cotta [8] traitent la convection forcée d'un écoulement fluide dans un conduit cylindrique, soumis à un flux thermique variable en fonction de la distance axiale, à l'interface solide/fluide. Pour avoir une expression exacte de la distribution de température et du nombre de Nusselt dans la région d'entrée thermique, l'étude est réalisée

analytiquement par la méthode de la transformée intégrale généralisée (GITT). Pour les deux régimes d'écoulement (laminaire et turbulent), deux cas sont considérés pour illustrer l'approche, le premier est une variation sinusoïdale du flux thermique le long du conduit et le second c'est une variation exponentielle.

F. B. Liu et M. N. Özisik [9] traitent, par la méthode inverse, le transfert de chaleur transitoire d'un écoulement fluide turbulent dans un conduit à deux plaques parallèles. Le régime transitoire est provoqué par une condition de flux de type harmonique sur les deux plaques. Les propriétés thermodynamiques du fluide et du solide sont constantes, la conduction axiale, la dissipation visqueuse et la convection naturelle sont supposées négligeables. La formulation mathématique de ce problème est donnée par :

$$\frac{\partial \Theta(x, y, \tau)}{\partial \tau} + U(y) \frac{\partial \Theta(x, y, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon_r(y) \frac{\partial \Theta(x, y, \tau)}{\partial y} \right)$$

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right|_{y=1} = Q(\tau), \quad \left. \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right|_{y=0} = 0,$$

$$\Theta = 1 \quad x = 0 \quad t > 0,$$

$$\Theta = 1 \quad x > 0 \quad t = 0.$$

$\Theta(x, y, \tau)$: la température adimensionnelle.

$Q(\tau)$: flux thermique adimensionnel.

A. Omara et S. Abboudi [10] Traitent numériquement la théorie du transport de chaleur laminaire instationnaire dans une conduite cylindrique soumise à des conditions thermiques périodiques. Le régime transitoire est provoqué par une condition de flux ou par une condition de température d'entrée de type harmonique. Le profil de vitesse est supposé parabolique et indépendant du temps. Les propriétés thermodynamiques du fluide et de la paroi sont constantes, la résistance thermique de la paroi est négligeable.

Dans le cas d'une condition de flux de type harmonique, les auteurs ont étudié la fonction de transfert du fluide en fonction du nombre de Reynolds. Pour une température d'entrée périodique, ils ont étudié l'influence du paramètre b^* (taux de l'énergie stockée dans la paroi au flux transféré par conduction à travers la veine fluide) et des pertes convectives sur l'évolution des températures du fluide et du nombre de Nusselt local.

Plus récemment, **D. T.W. Lin et al [11]** traitent le problème de convection forcée transitoire d'un écoulement laminaire établi, dans un conduit à deux plaques parallèles. L'entrée du conduit est soumise à une température constante. La plaque inférieure est isolée du milieu extérieur et la plaque supérieure est soumise à un flux thermique variable dans l'espace et dans le temps.

1.3. Écoulement fluide soumis à des conditions thermiques transitoires a l'entrée

On distingue la aussi plusieurs types de conditions thermiques à l'entrée des conduits. En effet, le fluide peut subir des variations périodiques de température de toute forme ; sinusoïdale, carrée ou triangulaire de fréquence variable.

1.3.1. Régime laminaire

E. M. Sparrow et F. N. Farias [12] ont analysé au plan théorique la réponse, en régime laminaire, aux variations sinusoïdales de la température d'entrée. Le couplage fluide-paroi est traité en écrivant un bilan thermique à l'interface. Le profile de vitesse est supposé uniforme (écoulement piston) et la paroi isotherme. La distribution spatio-temporelle de la température est cherchée sous la forme :

$$\theta(t, \chi, \eta) = Ae^{i\omega t} X(\chi)Y(\eta)$$

avec

$$X = \exp(-\lambda^2 \chi) \exp(-(L^2 / \alpha) i \omega \chi)$$

$$Y = \cos(\lambda \eta)$$

$$\eta = \frac{y}{L} ; \quad \chi = \frac{x}{LP_e}$$

x et y sont respectivement la coordonnée axiale et transversale, L est l'espacement des plaques. Le problème revient à déterminer les fonctions et les valeurs propres complexes $\lambda = \nu + i\delta$ racines de l'équation transcendante

$$\lambda \operatorname{tg}(\lambda) = ib^*$$

La deuxième partie de l'étude concerne l'approche quasi-stationnaire en supposant un coefficient d'échange local h constant. Les résultats sont présentés pour des nombres de Nusselt différents. L'auteur a tiré la conclusion suivante : dans une gamme de condition opératoire, le modèle

quasi-stationnaire est capable de prédire avec précision, spécialement lorsqu'il utilise un coefficient de transfert de chaleur variable dans l'espace.

R. O. C. Guedes and M. N. Özisik [13] résolvent le problème de la convection forcée transitoire d'un écoulement laminaire à l'intérieur d'un canal à deux plaques parallèles, soumis à une variation périodique de la température d'entrée, en utilisant une solution hybride qui combine la technique de la transformée intégrale généralisée avec la méthode des différences finies de deuxième ordre. Les résultats semi-analytiques sont présentés pour des variations périodiques d'amplitude de la température moyenne et du flux à la paroi, le long du canal pour différentes fréquences. Une formule approximative est développée. Le problème sous forme adimensionnelle s'écrit mathématiquement tels que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta(R, Z, \tau)}{\partial \tau} + W(R) \frac{\partial \Theta(R, Z, \tau)}{\partial Z} &= \frac{\partial^2 \Theta(R, Z, \tau)}{\partial R^2} & 0 < R < 1, Z > 0, \tau > 0 \\ \Theta(R, Z, 0) &= 0, & 0 \leq R \leq 1, Z \geq 0 \\ \Theta(R, Z, 0) &= \sin(\Omega \tau), & 0 \leq R \leq 1, \tau \geq 0 \\ \left. \frac{\partial \Theta(R, Z, \tau)}{\partial y} \right|_{y=0} &= 0 & Z > 0, \tau > 0 \\ \Theta(1, Z, \tau) &= 0. & Z > 0, \tau > 0 \end{aligned}$$

Avec l'utilisation de la technique GITT, un problème axillaire aux valeurs propres est obtenu :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi(\mu_k, R)}{d\eta^2} + \mu_k^2 \psi(\mu_k, R) &= 0 & 0 < R < 1 \\ \left. \frac{d\psi(\mu_k, R)}{d\eta} \right|_{R=0} &= 0, & R = 0, \\ \psi(\mu_k, R) &= 0, & R = 1, \end{aligned}$$

avec:

$$\text{Inversion: } \Theta(R, Z, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{N_k^{1/2}} \psi(\mu_k, \eta) \Theta_k(Z, \tau)$$

$$\text{Transformée : } \bar{\Theta}(Z, \tau) = \int_0^1 \frac{\psi(\mu_k, R)}{N_k^{1/2}} \Theta(R, Z, \tau) dR$$

En utilisant les fonctions transformée $\Theta(R, Z, \tau)$ et inverse $\bar{\Theta}(Z, \tau)$, on obtient le système:

$$\frac{\partial \bar{\Theta}_k(Z, \tau)}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{ki} \frac{\partial \bar{\Theta}_k(Z, \tau)}{\partial Z} + \mu_k^2 \bar{\Theta}_k(Z, \tau) = 0 \quad Z > 0, \tau > 0 \quad (*)$$

ou

$$A_{ik} = A_{ki} = \frac{1}{(N_k N_i)^{1/2}} \int_0^1 W(R) \psi(\mu_k, R) \psi(\mu_i, R) dR$$

Utilisant la méthode des différences finis du deuxième ordre explicite, l'équation (*) devient :

Prédicateur :

$$\bar{\Theta}_{i,j}^{n+1} = \bar{\Theta}_{i,j}^n - \lambda \sum_{k=1}^N A_{ik} (\bar{\Theta}_{k,j}^n - \bar{\Theta}_{k,j-1}^n) - \mu_i^2 \Delta \tau \bar{\Theta}_{i,j}^n$$

Correcteur :

$$\bar{\Theta}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[\bar{\Theta}_{i,j}^n + \bar{\Theta}_{i,j}^{n+1} - \lambda \sum_{k=1}^N A_{ik} (\bar{\Theta}_{k,j}^{n+1} - \bar{\Theta}_{k,j-1}^{n+1}) - \lambda \sum_{k=1}^N A_{ik} (\bar{\Theta}_{i,j}^n - 2\bar{\Theta}_{k,j-1}^n + \bar{\Theta}_{k,j-2}^n) - \mu_i^2 \Delta \tau \bar{\Theta}_{i,j}^{n+1} \right].$$

En conclusion, la méthode hybride a des avantages par rapport à une approche purement numérique conventionnelle. Le flux thermique peut être calculé pour n'importe quel point dans le milieu, en utilisant des expressions analytiques. Aussi, la méthode est un peu restreinte par les considérations de la stabilité.

D. M. Brown et al. [14] se sont basés sur une analyse numérique et expérimentale de la convection forcée d'un écoulement laminaire complètement établi dans un conduit cylindrique, soumis à une variation périodique de la température d'entrée. Les expériences ont été réalisées sur une grande gamme de nombre de Reynolds ($281.2 \leq Re \leq 1024.3$) et fréquence d'entrée comprise entre ($0.01 \leq \beta \leq 0.20$ Hz). Le profil non uniforme de l'amplitude de la température d'entrée tiré de l'expérience ($\Delta\Theta(\eta) = 1.025 - \eta(0.404 + 0.582\eta)$), a été inclus dans le modèle numérique. Un schéma aux différences finis explicite de deuxième ordre a été développé et utilisé pour la résolution de l'équation d'énergie. Les résultats numériques sont obtenus avec un profil de vitesse parabolique de type $U(\eta) = 2(1 - \eta^2)$ sous conditions aux limites du premier ordre, qui a été vérifié par les expériences.

F. F. Hatay et al. [15] traitent le même problème que [14], mais l'écoulement cette fois est dans un conduit à deux plaques parallèles, avec :

$$\Delta\Theta(\eta) = 1 - \eta^2$$

$$U(\eta) = \frac{3}{2}(1 - \eta^2)$$

Les variations des oscillations de l'amplitude de la température axiale, obtenu du modèle numérique et expérimental sont quantitativement et qualitativement comparées.

S. Kakaç et Y. Yener [16] proposent une solution exacte pour l'équation de convection forcée d'un écoulement fluide incompressible entre deux plaques parallèles. La température à l'entrée du canal varie périodiquement de manière sinusoïdale. Pour simplifier le problème, le profil de vitesse est considéré uniforme (slug flow) et l'épaisseur de paroi nulle. Le système d'équation s'écrit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$$

$$\left(k \frac{\partial \theta}{\partial y} + h\theta \right)_{y=d} = f(x), \quad t > 0$$

$$\theta(0, y, t) = \sin \beta t.$$

La solution est décomposée en une fonction θ_1 , relative au régime permanent dépendant uniquement des coordonnées spatiales, et la fonction θ_2 décrivant la phase transitoire, d'où :

$$\theta(x, y, t) = \theta_1(x, y) + \theta_2(x, y, t).$$

Ces équations satisfont respectivement les systèmes (1), (2) et (2') suivant :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} &= \frac{\alpha}{u} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} \\ \theta_1(0, y) &= 0 \\ \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right)_{y=0} &= 0 \\ \left(k \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + h\theta_1 \right)_{y=d} &= f(x) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} + u \frac{\partial \theta_2}{\partial x} &= \alpha \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2} \\ \theta_2(0, y, t) &= \sin \beta t \\ \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right)_{y=0} &= 0 \\ \left(k \frac{\partial \theta_2}{\partial y} + h \theta_2 \right)_{y=d} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial x} &= \alpha \frac{\partial^2 \bar{\theta}_2}{\partial y^2} \\ \bar{\theta}_2(0, y, t) &= \cos \beta t \\ \left(\frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial y} \right)_{y=0} &= 0 \\ \left(k \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial y} + h \bar{\theta}_2 \right)_{y=d} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

Le problème revient à résoudre le système (3) ci-dessous tel que :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta_c}{\partial t} + u \frac{\partial \theta_c}{\partial x} &= \alpha \frac{\partial^2 \theta_c}{\partial y^2} \\ \theta_c(0, y, t) &= \exp(i\beta t) \\ \left(\frac{\partial \theta_c}{\partial y} \right)_{y=0} &= 0 \\ \left(k \frac{\partial \theta_c}{\partial y} + h \theta_c \right)_{y=d} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ou

$$\theta_c = \bar{\theta}_2 + i\theta_2$$

La technique intégrale est en suite appliquée au système (1) et (3), le problème se ramène à la recherche de fonction et de valeurs propres.

Trois types de conditions aux limites à la paroi sont traités. Les variations d'amplitude et de phase sont représentées graphiquement pour différentes valeurs de la fréquence et du nombre de Reynolds.

R. M. Cotta et M. N. Özisik [17] ont étudié le problème de transfert de chaleur transitoire en géométrie plane ou cylindrique. La paroi est considérée sans épaisseur et la température pariétale constante dans le temps et dans l'espace. A l'entrée, la température varie de manière sinusoïdale. A la différence de la référence [16] le profile transversale de vitesse n'est pas considéré uniforme.

D'une manière différente, **W. S. Kim et M. N. Özisik [18]** traitent un problème similaire avec une température d'entrée périodique, en utilisant les méthodes numériques (Runge-kutta et la méthode de tire, voir [40]) pour résoudre le problème adjoint. L'auteur donne

une solution généralisée pour les deux cas de géométrie du conduit. Les résultats sont présentés graphiquement pour les amplitudes de la température de mélange et la température pariétale et sous forme tabulée pour les valeurs propres et les fonctions propres.

S. Kakaç, W. Li et R. M. Cotta [19] analyse le transfert thermique entre un fluide en écoulement laminaire et les parois d'un conduit de section rectangulaire. La température du fluide à l'entrée varie périodiquement en fonction du temps. A la paroi, supposée isotherme, le couplage est traité en écrivant le bilan thermique faisant intervenir la variation de l'énergie interne du solide. Le système d'équation s'écrit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U(\eta) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad 0 < \eta < 1; \quad \xi > 0$$

$$B_i \theta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{1}{a^*} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 0, \quad \eta = 1; \quad \xi > 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 1; \quad \xi > 0$$

$$\theta(0, \eta, \xi) = \Delta \theta(\eta) \exp(i\Omega \tau), \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

La solution est cherchée sous la forme périodique

$$\theta(0, \eta, \xi) = \bar{\theta}(\xi, \eta) \exp(i\Omega \tau)$$

Les résultats expérimentaux présentent des écarts importants comparés aux résultats théoriques ou la température est considérée uniforme dans la section d'entrée. Cette hypothèse non justifiée est la cause des écarts enregistrés au niveau des amplitudes. Enfin, l'auteur montre que le déphasage le long du conduit est inversement proportionnel au nombre de Reynolds.

R. O. C. Guèdes et R. M. Cotta [20] étudient analytiquement le transfert thermique transitoire d'un écoulement laminaire entre deux plaques parallèles de longueur L^+ . L'entrée du canal est soumise à des perturbations périodiques de température. Le gradient transversal de température dans la plaque est négligé, mais ils tiennent en compte les effets de la conduction axiale.

J. S. Travelho et W. F. N. Santos [21] ont donné une solution au problème analogue à celui traité dans [12]. Dans les travaux présentés jusqu'à présent, les solutions sous forme des séries sont fonction de valeurs propres et fonctions propres complexes. L'auteur ici tente une

résolution évitant complètement cette démarche. La solution générale du problème est donnée par :

$$\theta(X, Z, \tau) = \psi(X, Z) e^{i\Omega(\tau-Z)} = \left[C_1(s) \exp(\sqrt{sx}) + C_2(s) \exp(-\sqrt{sx}) + \frac{1}{s} \right] e^{i\Omega(\tau-Z)}. \quad (**)$$

s : variable de Laplace sur la variable z .

C_1 et C_2 sont obtenus à l'aide des conditions aux limites.

Une inversion analytique de l'équation (**) est obtenue à l'aide des tables des transformées (Robert et Kaufmann, 1966). La solution originale est donc :

$$\begin{aligned} \psi(x, z) = & 1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{1 \pm x}{2\sqrt{z}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{3 \pm x}{2\sqrt{z}}\right) - 4ib^+ \sqrt{\frac{z}{\pi}} \exp\left(-\frac{(3 \pm x)^2}{4}\right) + \exp\left(-\frac{(1 \pm x)^2}{4}\right) \times \\ & W\left[-b^+ \sqrt{z} + i\left(\frac{1 \pm x}{2\sqrt{z}}\right)\right] - \left[1 - 2ib^+(3 \pm x + 2ib^+z)\right] \exp\left(-\frac{(3 \pm x)^2}{4}\right) W\left[-b^+ \sqrt{z} + i\left(\frac{3 \pm x}{2\sqrt{z}}\right)\right]. \end{aligned}$$

La fonction W est donnée dans la même référence.

Les amplitudes et les déphasages sont présentés graphiquement et comparés aux résultats obtenus par la méthode décrites auparavant. L'auteur a conclu que la solution est beaucoup plus précise lorsque $z \leq 1$.

K. Mansouri et B. Fourcher [22] présentent une étude du transfert thermique d'un écoulement laminaire entre deux plans parallèles avec une température d'entrée périodique. L'originalité de ce travail réside dans l'analyse rigoureuse de l'influence de l'épaisseur de la plaque, de la fréquence et du nombre de Biot sur la réponse du système. D'une autre manière, l'auteur a considéré la conduction transversale dans la plaque. Ce qui peut se traduire par la formulation suivante :

Dans le solide

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad 0 < y < l; \quad x > 0; \quad t > 0$$

$$k_s \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = h \left(\theta \Big|_{y=0} - T_\infty \right), \quad x > 0; \quad t > 0.$$

Dans le fluide

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u(z) \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_f \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad 0 < z < l'; \quad x > 0; \quad t > 0$$

$$T = T_\infty + \Delta T_\infty \sin(\omega t), \quad 0 < z < l'; \quad x = 0; \quad t > 0$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad x > 0; \quad t > 0.$$

Les conditions de contact

$$T = \theta, \quad x > 0; \quad t > 0$$

$$k_s \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=l} = k_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{z=l}, \quad x > 0; \quad t > 0.$$

Les amplitudes et les déphasages pour la distribution des températures de mélange, d'interface et axiale sont présentées graphiquement.

En utilisant les méthodes variationnelle, **B. Fourcher et K. Mansouri [23]** développent une solution approchée par la méthode de Galarkin pour le problème de convection forcée avec un écoulement établi parabolique entre deux plaques parallèles. Le gradient transversal de la température dans les plaques est aussi pris en considération. Afin de résoudre le problème de diffusion dans les plaques, la méthode de Galarkin est mise en œuvre par couplage avec la transformée de Laplace sur la direction axiale.

S. Cheroto et al. [24] ont résolu analytiquement au moyen de la technique de la transformée intégrale généralisé (GITT), en utilisant une combinaison de calcul symbolique et numérique (à l'aide du logiciel Mathematica 3.0) le problème de la convection forcée laminaire transitoire à l'entrée thermique d'un canal formé par deux plaques parallèles. Les variations de l'amplitude et les déphasages sont représentés et interprétés dans la même référence.

A. Hadiouche et K. Mansouri, [25] ont fait une étude théorique de la convection forcée laminaire avec profile de vitesse parabolique dans un canal à deux plaques parallèles et conduit cylindrique, soumis à une température d'entrée périodique (le même problème traité dans [26]) est présentée. La diffusion thermique dans la paroi du conduit et les conditions aux limites qui définissent la convection extérieure sont pris en considération. Un schéma aux différences finies aux volumes finis est développé et comparé avec une nouvelle méthodologie basée sur la méthode de Ritz variationnelle. Le flux thermique à la paroi, l'amplitude et le déphasage de la

température interfaciale, axiale et moyenne sont déterminés. Un modèle numérique, utilisant la méthode des volumes finis, pour le même problème est fourni pour la première fois dans la référence [27] dont les résultats sont très satisfaisants en comparaison avec le modèle analytique.

Plus récemment en 2009, **A. Hadiouche et K. Mansouri [52]** présentent une étude théorique de la convection forcée laminaire à l'intérieur d'un conduit cylindrique et plan, soumis à une température d'entrée périodique. La diffusion thermique dans la paroi du conduit et les conditions aux limites qui définissent la convection extérieure sont pris en considération. Dans la première partie, ce problème est résolu en appliquant la Technique de Transformée Intégrale Généralisée (GITT). Les valeurs et les vecteurs propres complexes sont écrits et comparés avec la littérature. Dans la deuxième partie, l'approche Quasi-stationnaire (QSA) qui utilise un coefficient du transfert thermique constant à interface fluide-paroi est aussi utilisée et comparée avec la solution GITT. La température moyenne, le nombre de Nusselt, le coefficient d'amortissement et de déphasage sont calculés.

G.E. Cossali [53] à proposé une solution analytique pour le champ de température d'un écoulement complètement établi dans un tube, soumis à une variation périodique de la température d'entrée. La solution est donnée sous forme d'une série de fonctions de Kummer pour les cas de température de la paroi constante.

1.3.2. Régime turbulent

W. S. Kim et M. N. Özisik [28] traitent du transfert thermique pour un écoulement fluide turbulent entre deux plaques parallèles. La température d'entrée varie périodiquement en fonction du temps. La paroi sans épaisseur est soumise à une température constante. Le modèle théorique utilise la diffusivité thermique turbulent sans faire intervenir un coefficient d'échange fluide-paroi, d'où le système suivant :

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} + u(y) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left((\alpha_f + \varepsilon_h) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right)$$

$$T(0, y, t) = T_0 + \Delta T_0 \exp(i\omega t), \quad 0 \leq y \leq l', \quad t > 0$$

$$\left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$T(x, b, t) = T_0 \quad x > 0, \quad t > 0.$$

Les variations d'amplitude et de phase pour la température de mélange sont représentées graphiquement pour différents nombre de Reynolds ($Re = 10^4$ à $Re = 10^6$) et différentes fréquence du signal d'entrée ($\Omega = 0.1$ à 2) à $Pr = 0.7$.

M. ArikL et- al. [29] résolvent le problème du transfert thermique dû à la convection forcée d'un écoulement turbulent entre deux plaques parallèles, soumis à une variation sinusoïdale de la température d'entrée, en employant une solution hybride (numérique et analytique) tel qu'il est utilisée en [13]. La condition à la paroi, peut être une température variable linéairement en fonction de la coordonnée axiale ou constante, est vérifiée avec les résultats expérimentaux. La solution analytique du problème est obtenue à travers la technique de la transformée intégrale généralisée. Un dispositif expérimental a été construit et utilisé pour valider le modèle mathématique utilisé ;

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U(\eta) \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\varepsilon(\eta) \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right] \quad \xi > 0, 0 < \eta < 1, \tau > 0$$

$$\Theta(0, \eta, \tau) = \Delta \Theta(\eta) e^{i\Omega \tau} \quad \xi = 0, 0 < \eta < 1, \tau > 0$$

$$\frac{\partial \Theta(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta} = 0 \quad \eta = 0, \xi > 0, \tau > 0$$

$$\Theta_w(\xi, 1, \tau) = A + B \xi = g(\xi) \quad \eta = 1, \xi > 0, \tau > 0$$

l'amplitude de la température adimensionnelle est obtenue expérimentalement et utilisée dans le modèle hybride.

$$\Delta \Theta(\eta) = 0.997 - 0.4611 \eta - 0.369 \eta^2$$

Les résultats théoriques sont comparés aux valeurs expérimentales. Un accord satisfaisant est obtenu pour différentes positions sur le centre du canal.

S. Kakaç et W. Li [30] analysent de point de vue théorique et expérimentale un écoulement fluide en convection forcée turbulente entre deux plaques parallèles. Le fluide est soumis à l'entrée du canal à des variations sinusoïdales de température. Le bilan d'interface inclut les caractéristiques thermiques de la paroi, considérée isotherme. Les mesures expérimentales mettent en évidence l'existence dans la section d'entrée d'un gradient de température transversal important. Ce profil d'amplitude de forme parabolique ($\Delta \theta(\eta) = 1.035 + 0.098\eta - 1.04\eta^2$) est, d'après l'auteur, la source des écarts importants

enregistrés entre le modèle analytique et les mesures expérimentales. En injectant dans le modèle analytique ce profil de température dans la section d'entrée, ces écarts se réduisent énormément.

R. O. C. Guedes et al [31] étudient analytiquement le transfert thermique transitoire d'un écoulement turbulent entre deux plaques parallèles de longueur L . A l'entrée du canal, le fluide est soumis à des perturbations sinusoïdales de température. Le terme de conduction axiale dans la plaque est pris en considération et le gradient transversal de température négligé (paroi supposée isotherme). Le modèle théorique utilisé introduit la diffusivité turbulente dans l'équation de l'énergie.

Dans la paroi :

$$\frac{\partial^2 \theta(z^+, X, \tau)}{\partial z^{+2}} + \frac{16}{(CP_e)^2} \frac{\partial^2 \theta(z^+, X, \tau)}{\partial X^2} = \alpha_{fs} \frac{\partial \theta(z^+, X, \tau)}{\partial \tau}, \quad 1 < z^+ < \delta, \quad 0 < X < L, \quad \tau > 0$$

$$\frac{\partial \theta(z^+, 0, \tau)}{\partial X} = 0, \quad 1 < z^+ < \delta, \quad \tau > 0$$

$$\frac{\partial \theta(z^+, L, \tau)}{\partial X} = 0, \quad 1 < z^+ < \delta, \quad \tau > 0$$

$$\frac{\partial \theta(\delta, X, \tau)}{\partial z^+} + \bar{B}_l \theta(\delta, X, \tau) = 0, \quad 0 < X < L, \quad \tau > 0.$$

Dans le fluide :

$$\frac{\partial T(z^+, X, \tau)}{\partial \tau} + W(z^+) \frac{\partial T(z^+, X, \tau)}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial z^+} \left[\varepsilon(z^+) \frac{\partial T(z^+, X, \tau)}{\partial z^+} \right], \quad 0 < z^+ < 1, \quad X > 0, \quad \tau > 0$$

$$T(z^+, 0, \tau) = \exp(i\Omega \tau), \quad 0 \leq z^+ \leq 1, \quad \tau > 0$$

$$\frac{\partial T(0, X, \tau)}{\partial z^+} = 0, \quad X > 0, \quad \tau > 0$$

A l'interface Solide-fluide:

$$T(1, X, \tau) = \theta(1, X, \tau)$$

$$k_{fs} \frac{\partial T(1, X, \tau)}{\partial z^+} = \frac{\partial \theta(1, X, \tau)}{\partial z^+}.$$

En introduisant les températures complexes pour le fluide et le solide et en utilisant la méthode de la transformée intégrale généralisée, le problème se ramène à la recherche de valeurs et des vecteurs propres. Les variations d'amplitudes et des déphasages de la température

interfaciale sont représentées le long de l'écoulement pour différentes valeurs du paramètre β caractérisant la conduction axiale dans la plaque et pour deux valeurs du nombre de Reynolds $Re = 10^4$ et 10^5 avec $a^* = 5.10^{-4}$ et 5.10^{-3} (a^* est le rapport des capacités thermiques fluide/solide).

K. Mansouri et al. [32] construisent un dispositif expérimental pour examiner la réponse thermique de la convection forcée turbulente de l'écoulement d'eau entre deux plaques parallèles, soumis à une température périodique à l'entrée. En pratique, un conduit à section rectangulaire de $300 \times 20 \text{ mm}^2$ et une épaisseur de 5 mm , est construit avec de l'acier. Les résultats expérimentaux (amplitude et déphasage) sont comparés avec ceux obtenus par le modèle quasi-stationnaire et ceux de modèle analytique introduisant la diffusivité thermique turbulente. Les effets de la convection extérieure, la capacité thermique de la paroi et la conduction transversale dans la paroi épaisse sont considérés. L'auteur a conclu que pour des petites valeurs de la fréquence d'entrée, le modèle quasi-stationnaire est capable de prédire les températures de mélange ainsi que celles dans la paroi. Contrairement pour des fréquences élevés ($\geq 0.05 \text{ Hz}$), le modèle quasi-stationnaire devient inapplicable.

B. Fourcher et K. Mansouri [33] traitent le même problème que [32], mais cette fois les résultats sont obtenus analytiquement.

1.4. Quelques travaux récents utilisant la technique GITT

Dans l'article [34] la Technique de la transformée Intégrale Généralisée est appliquée pour un problème transitoire d'une cavité carrée soumise à un gradient de température, en considérant les propriétés fluides constantes ou variables. Les équations qui régissent l'écoulement laminaire (les équations de Navier-Stokes et l'équation de l'énergie) sont employées pour chercher la solution hybride (numérique-analytique) du problème de la convection naturelle.

La même technique (GITT) est utilisée dans l'article [35], qui traite à nouveau la convection naturelle dans une cavité, en considérant une formulation transitoire pour l'équilibre énergétique et une formulation quasi-stationnaire pour le problème d'écoulement, mais le problème cette fois est tridimensionnel et la cavité est remplie d'une matière poreuse.

C.P. Naveira et al. [36] ont cherché une solution hybride de la convection forcée d'un écoulement fluide laminaire transitoire sur plaque plane, soumise aux variations arbitraires (dans le temps) du flux thermique, appliqué au-dessus de la paroi. La partie analytique de la solution hybride est basée sur la technique GITT.

Plus récemment, en 2009, **J. S. P. Guerrero et al. [37]** Présentent une solution exacte de l'équation de transport linéaire advective-diffusive, avec des coefficients constants pour le régime transitoire et stationnaire. Une substitution mathématique classique transforme l'équation advective-diffusive originale en une équation uniquement diffusive. Le nouveau problème diffusif est résolu en utilisant la version classique de la Technique de Transformée Intégrale Généralisée (GITT). L'équation de transport est définie par :

- ***Problème transitoire***

L'équation de transport :

$$R \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} + LT(x, y, z, t) + S(x, y, z, t) = \nabla^2(x, y, z, t)$$

Les opérateurs L et ∇^2 sont :

$$L \equiv u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} + \lambda R$$

$$\nabla^2 \equiv D_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Les conditions initiales sont :

$$T(x, y, z, 0) = \rho(x, y, z).$$

- ***Problème quasi-stationnaire :***

L'équation de transport :

$$\nabla^2 T(x, y, z, t) = LT(x, y, z, t) + S(x, y, z, t).$$

avec

u , v et w sont les composantes des vitesses

λ : le constant d'amortissement.

D_x , D_y et D_z sont les coefficients de diffusion.

$S(x, y, z, t)$: le terme source.

R : paramètre constant.

1.5. Conclusion

La convection forcée transitoire dans un conduit est un sujet très important, si on observe le nombre de publications présentées dans cette partie. L'ensemble de ces travaux marque une claire préférence pour les approches numériques et analytiques par rapport à l'expérimentation très coûteuse financièrement.

Du point de vue analytique, ces travaux portent sur le développement des méthodologies de résolution, en s'appuyant sur un nombre important d'hypothèses simplificatrices. Parmi les plus constantes, on retiendra celle d'une paroi isotherme et parfois sans épaisseur.

La recherche de modèle simplifié comme l'utilisation des corrélations semi empiriques (suffisantes aux yeux des industriels) sont également développés par certains auteurs. Ces solutions sont assujetties à de nombreuses critiques dans certaines conditions particulières.

Le nombre de travaux consacrés à l'étude de l'écoulement laminaire est beaucoup plus important que celui consacré aux écoulements turbulents. Donc, notre contribution est venue compenser ce manque, en tenant compte de la conduction transversale dans la paroi. Le manque important de renseignement au sujet du modèle quasi-stationnaire nous a également conduit à étudier le comportement du coefficient d'échange en fonction de la fréquence d'entrée.

La technique que nous allons adopter dans notre travail (GITT) donne une solution complète, qui reste toujours applicable pour la résolution analytique des problèmes de la convection forcée, en régime laminaire et turbulent.

Chapitre 2 :

Etude analytique d'un écoulement turbulent entre deux plaques parallèles
en régime périodique établi

2.1. Description du problème

On considère un conduit constitué de deux plaques parallèles d'épaisseur $l = R_2 - R_1$, séparées par une distance $2R_1$ (fig. 2.1), et parcouru par un écoulement fluide en régime turbulent dont la température d'entrée varie périodiquement en fonction du temps. Les faces extérieures des parois échangent avec le milieu extérieur à température constante T_∞ . Ce qui peut se résumer par :

- Des échanges convectifs (paroi-milieu extérieur).
- Des échanges conducto-convectifs (paroi-fluide caloporteur).
- Diffusion dans la paroi (ce qui est ignoré autrefois dans les recherches antérieures en ce type de problèmes).

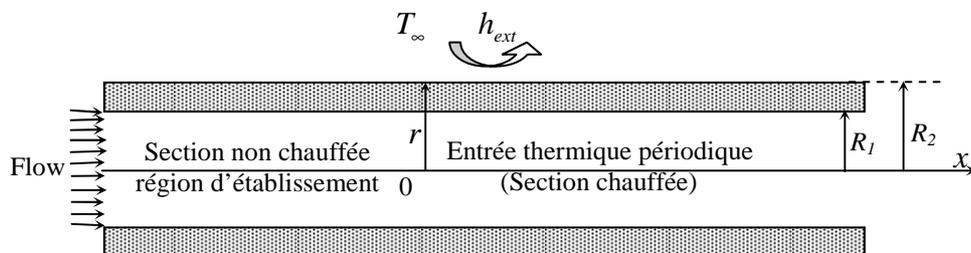


Fig.2.1 : Géométrie du conduit considéré.

La résolution d'un tel problème passe le traitement simultané des équations de bilan dans les deux milieux, liquide et solide, liés par la condition d'égalité des flux thermiques et de températures (condition limite dite de type 4).

2.2. Hypothèses simplificatrices

Vu la complexité du problème décrit ci-dessous, sa résolution analytique est quasiment impossible. Dans ce genre de situations, on utilise souvent des hypothèses simplificatrices à savoir :

- Les propriétés thermo-physiques du fluide et du solide sont constantes.
- Le terme de conduction axiale dans le fluide est négligeable dans l'équation d'énergie. Cette hypothèse est vérifiée dès que le nombre de Peclet est supérieur à 100 [12, 41].
- La conduction axiale dans la paroi est négligeable devant la diffusion transversale.
- Les termes de dissipation visqueuse et de convection naturelle sont négligeables.

2.3. Formulation mathématique

La formulation mathématique de ce problème s'écrit ;

Région fluide :

$$\frac{\partial T_f(x, r, t)}{\partial t} + u(r) \frac{\partial T_f(x, r, t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \left((\alpha_f + \varepsilon_h) \frac{\partial T_f(x, r, t)}{\partial r} \right) \quad 0 < r < R_1, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (2.1a)$$

$$T_f(0, r, t) = T_\infty + \Delta T \exp(i\omega t) \quad 0 \leq r \leq R_1, \quad t > 0 \quad (2.1b)$$

$$\left. \frac{\partial T_f(x, r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (2.1c)$$

Région solide :

$$\frac{\partial T_s^2(x, r, t)}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial T_s(x, r, t)}{\partial t} \quad R_1 < r < R_2, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (2.1d)$$

$$h_{ext}(T_s(x, r, t) - T_\infty) = -k_s \frac{\partial T_s(x, r, t)}{\partial r}, \quad r = R_2, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (2.1e)$$

Interface solide fluide :

$$k_f \frac{\partial T_f(x, r, t)}{\partial r} = k_s \frac{\partial T_s(x, r, t)}{\partial r}, \quad r = R_1, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (2.1f)$$

$$T_f(x, r, t) = T_s(x, r, t), \quad r = R_1, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (2.1g)$$

En introduisant les paramètres adimensionnels suivants:

$$\eta = \frac{r}{R_1}, \quad \xi = \frac{(x/D_e)(D_e/R_1)^2}{\text{Re.Pr}}, \quad \tau = \frac{t\alpha_f}{R_1^2}, \quad \Omega = \frac{\omega R_1^2}{\alpha_f}, \quad \text{Bi}_{\text{ext}} = \frac{h_{\text{ext}} R_1}{k_s}, \quad R^* = \frac{R_2}{R_1}, \quad \gamma = \frac{k_s}{k_f},$$

$$\Gamma = \frac{\alpha_f}{\alpha_s}, \quad \beta_s = (R_2 - R_1) \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha_s}}, \quad \varepsilon(\eta) = 1 + \frac{\varepsilon_h}{\alpha_f}, \quad a^+ = \frac{(\rho C_p)_f \times R_1}{(\rho C_p)_s \times (R_2 - R_1)},$$

$$W(\eta) = \frac{u(r)}{u_m}, \quad \theta_f(\xi, \eta, \tau) = \frac{T_f(x, r, t) - T_\infty}{\Delta T}, \quad \theta_s(\xi, \eta, \tau) = \frac{T_s(x, r, t) - T_\infty}{\Delta T},$$

Le diamètre équivalent $D_e = 4R_1$.

Le problème sous forme adimensionnelle s'écrit :

Région fluide :

$$\frac{\partial \theta_f(\xi, \eta, \tau)}{\partial \tau} + W(\eta) \frac{\partial \theta_f(\xi, \eta, \tau)}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\varepsilon(\eta) \frac{\partial \theta_f(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta} \right) \quad 0 < \eta < 1, \quad \xi > 0, \quad \tau > 0 \quad (2.2a)$$

$$\theta_f(0, \eta, \tau) = \exp(i\Omega \tau), \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad \tau > 0 \quad (2.2b)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_f(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \xi > 0, \quad \tau > 0 \quad (2.2c)$$

Région solide :

$$\frac{\partial \theta_s^2(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta^2} = \Gamma \frac{\partial \theta_s(\xi, \eta, \tau)}{\partial \tau} \quad 1 < \eta < R^*, \quad \xi > 0, \quad t > 0 \quad (2.2d)$$

$$\frac{\partial \theta_s(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta} = -\text{Bi}_{\text{ext}} \theta_s(\xi, \eta, \tau), \quad \eta = R^*, \quad \xi > 0, \quad \tau > 0 \quad (2.2e)$$

Interface solide fluide :

$$\frac{\partial \theta_f(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta} = \gamma \frac{\partial \theta_s(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta}, \quad \eta = 1, \quad \xi > 0, \quad \tau > 0 \quad (2.2f)$$

$$\theta_f(\xi, \eta, \tau) = \theta_s(\xi, \eta, \tau), \quad \eta = 1, \quad \xi > 0, \quad \tau > 0 \quad (2.2g)$$

$$\text{ou :} \quad \varepsilon(\eta) = 1 + \frac{\varepsilon_h}{\alpha_f} = 1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \frac{\varepsilon_m}{\nu}, \quad (2.2h)$$

Les modèles utilisés pour le profil des vitesses et la viscosité turbulente sont données en Annexe (1). Dans cette étude, on s'intéresse au régime périodique établi. La température de fluide et du solide sont cherchée en notation complexe sous la forme :

$$\theta_f(\xi, \eta, \tau) = \tilde{\theta}_f(\xi, \eta) \exp(i\Omega \tau) \quad (2.3a)$$

$$\theta_s(\xi, \eta, \tau) = \tilde{\theta}_s(\xi, \eta) \exp(i\Omega \tau) \quad (2.3b)$$

En introduisant les expressions (2.3) dans le problème (2.2), on obtient le système:

Région fluide :

$$W(\eta) \frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\varepsilon(\eta) \frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) - i\Omega \tilde{\theta}_f(\xi, \eta) \quad 0 < \eta < 1, \xi > 0 \quad (2.4a)$$

$$\tilde{\theta}_f(0, \eta) = 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (2.4b)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \xi > 0, \quad (2.4c)$$

Région solide :

$$\frac{\partial \tilde{\theta}_s^2(\xi, \eta)}{\partial^2 \eta} = 2i \left(\frac{\beta_s}{R^* - 1} \right)^2 \tilde{\theta}_s(\xi, \eta) \quad 1 < \eta < R^*, \xi > 0, \quad (2.4d)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}_s(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -Bi_{ext} \tilde{\theta}_s(\xi, \eta), \quad \eta = R^*, \xi > 0, \quad (2.4e)$$

Interface solide fluide :

$$\frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \gamma \frac{\partial \tilde{\theta}_s(\xi, \eta)}{\partial \eta}, \quad \eta = 1, \xi > 0, \quad (2.4f)$$

$$\tilde{\theta}_f(\xi, \eta) = \tilde{\theta}_s(\xi, \eta), \quad \eta = 1, \xi > 0, \quad (2.4g)$$

2.4. Méthode de résolution

En introduisant le paramètre complexe $\tilde{\beta}_s = \beta_s(1-i)$, la distribution de température dans le solide est mentionnée en Annexe (2). La distribution de température du fluide sera évaluée par la résolution du système suivant :

$$W(\eta) \frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\varepsilon(\eta) \frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) - i\Omega \tilde{\theta}_f(\xi, \eta) \quad 0 < \eta < 1, \xi > 0 \quad (2.5a)$$

$$\tilde{\theta}_f(0, \eta) = 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (2.5b)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \xi > 0, \quad (2.5c)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \tilde{H} \tilde{\theta}_f(\xi, \eta) = 0, \quad \eta = 1, \xi > 0, \quad (2.5d)$$

Le paramètre complexe \tilde{H} intègre rigoureusement l'influence de la paroi sur l'écoulement, il est discuté en Annexe (2). Il s'écrit sous forme générale par :

$$\tilde{H} = R_H + iG_H$$

Une solution formaliste du problème (2.5) est développée à travers la Technique de Transformée Intégrale Généralisée (GITT). Cependant, la solution complète exige le calcul des valeurs propres (*eigenvalues*), fonctions propres (*eigenfunctions*) et la normalisation d'un système Sturm-Liouville complexe. Un problème auxiliaire aux valeurs propres est obtenu à partir du système complexe originale (2.5) tel que :

$$\frac{d}{d\eta} \left(\varepsilon(\eta) \frac{d\psi(\mu_k, \eta)}{d\eta} \right) + \mu_k^2 W(\eta) \psi(\mu_k, \eta) = 0 \quad 0 < \eta < 1 \quad (2.6a)$$

$$\left. \frac{d\psi(\mu_k, \eta)}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \eta = 0, \quad (2.6b)$$

$$\frac{\partial \psi(\mu_k, \eta)}{\partial \eta} + R_H \psi(\mu_k, \eta) = 0, \quad \eta = 1, \quad (2.6c)$$

En utilisant les fonctions propres ($\psi(\mu_k, \eta)$) de ce système, nous définissons la transformé intégrale paire suivante :

$$\text{Inversion :} \quad \tilde{\theta}_f(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{N_k^{1/2}} \psi(\mu_k, \eta) \bar{\theta}_k(\xi) \quad (2.7a)$$

$$\text{Transformée:} \quad \bar{\theta}_k(\xi) = \int_0^1 W(\eta) \frac{\psi(\mu_k, \eta)}{N_k^{1/2}} \tilde{\theta}_f(\xi, \eta) d\eta \quad (2.7b)$$

$$\text{Normalisation :} \quad N_k = \int_0^1 W(\eta) [\psi(\mu_k, \eta)]^2 d\eta \quad (2.7c)$$

En multipliant l'équation (2.5a) par le terme :

$$\int_0^1 \frac{\psi(\mu_k, \eta)}{N_k^{1/2}} d\eta$$

le problème aux valeurs propres (2.6), les conditions aux limites (2.6c et 2.5d) sont utilisées pour obtenir l'équation ci-dessous :

$$\frac{d\bar{\theta}_k(\xi)}{d\xi} + \mu_k^2 \bar{\theta}_k(\xi) + i\Omega \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^* \bar{\theta}_j(\xi) = 0 \tag{2.8a}$$

avec :

$$a_{kj}^* = a_{jk}^* = \frac{1}{(N_k N_j)^{1/2}} \left(\frac{\varepsilon(1) \psi(\mu_k, 1) \psi(\mu_j, 1) G_H}{\Omega} + \int_0^1 \psi(\mu_k, \eta) \psi(\mu_j, \eta) d\eta \right) \tag{2.8b}$$

La condition d'entrée est donnée par :

$$\bar{\theta}_k(0) = f_k = \int_0^1 W(\eta) \frac{\psi(\mu_k, \eta)}{N_k^{1/2}} d\eta \tag{2.8c}$$

Le système (2.8) forme un ensemble infini d'équations différentielles linéaire de premier ordre. Cet ensemble peut être remplacé par un nombre fini d'équations couplées si un nombre de termes suffisamment grand est considéré dans la sommation qui apparaît dans l'équation (2.8a). L'équation (2.8) s'écrit sous forme matricielle :

$$\{X'(\xi)\} + [A]\{X(\xi)\} = 0 \tag{2.9a}$$

avec la condition initiale :

$$\{X(0)\} = \{f\} \tag{2.9b}$$

où l'indice prime ('), dénote la première dérivé par apport à ξ , le vecteur $\{X(\xi)\}$ et $\{f\}$ sont définis par :

$$\{X(\xi)\} = \left\{ \bar{\theta}_1(\xi), \bar{\theta}_2(\xi), \dots, \bar{\theta}_N(\xi) \right\} \tag{2.9c}$$

$$\{f\} = \{f_1, f_2, \dots, f_N\} \tag{2.9d}$$

Les éléments (a_{kj}) de la matrice $[A]$ sont définis par :

$$(a_{kj}) = (\delta_{kj} \mu_k^2 + i\Omega a_{kj}^*) \quad k, j = 1, 2, \dots, N \tag{2.9e}$$

a_{kj}^* est défini par l'équation (2.8b) et δ_{kj} est le symbole de Kronecker.

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases} \tag{2.9f}$$

Pour résoudre le système (2.9), nous supposons que la matrice $[A]$ a un ensemble complet de N vecteurs propres linéairement indépendants. Nous cherchons une solution de la forme :

$$\{X(\xi)\} = \{V\}e^{-\lambda\xi} \quad (2.10)$$

où les valeurs propres et les vecteurs propres, respectivement λ et $\{V\}$ seront calculés.

En introduisant l'équation (2.10) dans l'équation (2.9a), nous obtenons le système d'équations algébriques homogènes suivant :

$$\{[A] - \lambda[I]\}\{V\} = 0 \quad (2.11)$$

$[I]$ est la matrice unitaire. L'équation (2.11) permet de déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice complexe $[A]$. La solution du problème (2.9) peut être écrite sous forme d'une combinaison linéaire des solutions fondamentales sous la forme :

$$\{X(\xi)\} = c_1\{X^{(1)}(\xi)\} + \dots + c_N\{X^{(N)}(\xi)\} \quad (2.12a)$$

ou

$$\{X(\xi)\} = c_1\{V^{(1)}\}e^{-\lambda_1\xi} + \dots + c_N\{V^{(N)}\}e^{-\lambda_N\xi} \quad (2.12b)$$

Les vecteurs $\{X^{(1)}\}$, $\{X^{(2)}\}$,, $\{X^{(N)}\}$ forment l'ensemble des solutions fondamentales de l'équation (2.9). Le système équations (2.12b) peut être écrit sous la forme :

$$\{X(\xi)\} = [\Psi(\xi)]\{C\} \quad (2.12c)$$

$[\Psi(\xi)]$ est la matrice fondamentale du système (2.8), elle est définie par :

$$[\Psi(\xi)] = \begin{bmatrix} v_1^{(1)} e^{-\lambda_1 \xi} & \cdot & \cdot & \cdot & v_1^{(N)} e^{-\lambda_N \xi} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_N^{(1)} e^{-\lambda_1 \xi} & \cdot & \cdot & \cdot & v_N^{(N)} e^{-\lambda_N \xi} \end{bmatrix}$$

Pour déterminer les constantes d'intégration $\{C\}$, il faut satisfaire la condition initiale (2.9b) et obtenir le système d'équations algébriques linéaires suivant :

$$[\Psi(0)]\{C\} = \{f\} \quad (2.13a)$$

$$[\Psi(0)] = [v_k^{(j)}] \quad k, j = 1, 2, \dots, N \quad (2.13b)$$

où $v_k^{(j)}$ sont les éléments de la matrice $[\Psi(0)]$.

Connaissons les valeurs propres, les vecteurs propres et les coefficients $\{C\}$, la fonction $\{X(\xi)\}$ (représente la distribution de température transformée $\bar{\theta}_k(\xi)$) peut être déterminée, ainsi la fonction $\tilde{\theta}_f(\xi, \eta)$ est également obtenue par la formule inverse (2.6a). En notant que la température adimensionnelle $\theta_f(\xi, \eta, \tau)$ est reliée à la fonction $\tilde{\theta}_f(\xi, \eta)$ par l'équation (3), le flux de chaleur à la paroi est évalué à partir de sa définition :

$$q_w = - \left. \frac{\partial \theta(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = - \left. \frac{\partial \tilde{\theta}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} e^{i\Omega\tau} \quad (2.14a)$$

avec :

$$- \left. \frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{N_k^{1/2}} \psi'(\mu_k, 1) \bar{\theta}_k(\xi) \quad (2.14b)$$

La température moyenne est également déterminée à partir de sa définition :

$$\theta_b(\xi, \tau) = \int_0^1 W(\eta) \theta(\xi, \eta, \tau) d\eta \quad (2.15)$$

Les équations (2.14) et (2.15) sont des quantités complexes, la distribution des températures, le flux de chaleur à la paroi q_w et la température de mélange peuvent être écrits respectivement en coordonnées polaires tels que :

$$\theta_f(\xi, \eta, \tau) = A(\xi, \eta) \exp\{i[\Omega\tau + \phi(\xi)]\} \quad (2.16)$$

$$q_w = A_f(\xi) \exp\{i[\Omega\tau + \phi_f(\xi)]\} \quad (2.17)$$

$$\theta_b(\xi, \tau) = A_b(\xi) \exp\{i[\Omega\tau + \phi_b(\xi)]\} \quad (2.18)$$

avec $A(\xi, \eta)$ et $\phi(\xi)$ sont respectivement l'amplitude et le déphasage.

2.5. Résultats et commentaires

Pour un couple des matériaux donné $\gamma = k_s/k_f = 25$ et un rapport géométrique $R^* = R_2/R_1 = 1.5$ ($r_{th} = \gamma/R^* - 1 = 50$), le choix des valeurs de β_s dépendra des paramètres Ω et a^+ ($\Omega/a^+ = 2 r_{th} \beta_s^2$). Ce choix doit couvrir une grande partie de conditions opératoires tels que le cas des échangeurs de chaleurs. Le nombre de Reynolds est choisi entre 10^4 et 10^6 .

- **Température interfaciale**

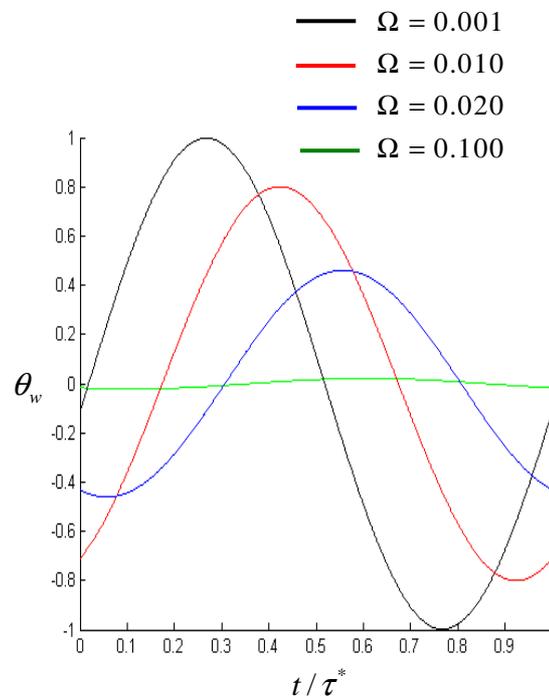


Fig. 2.2 : Température interfaciale en $\xi = 0.1$ pour différentes valeurs de Ω , avec $Re = 10^5$, $Bi_{ext} = 0$ et $a^+ = 0.001$.

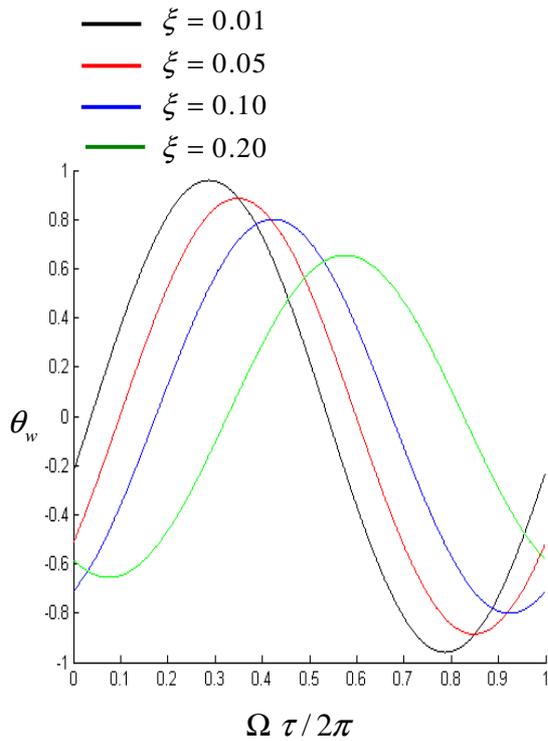


Fig. 2.3 : Température interfaciale pour différentes valeurs de ξ , avec $\Omega = 0.01$
 $Re = 10^5$, $Bi_{ext} = 0$ et $a^+ = 0.001$.

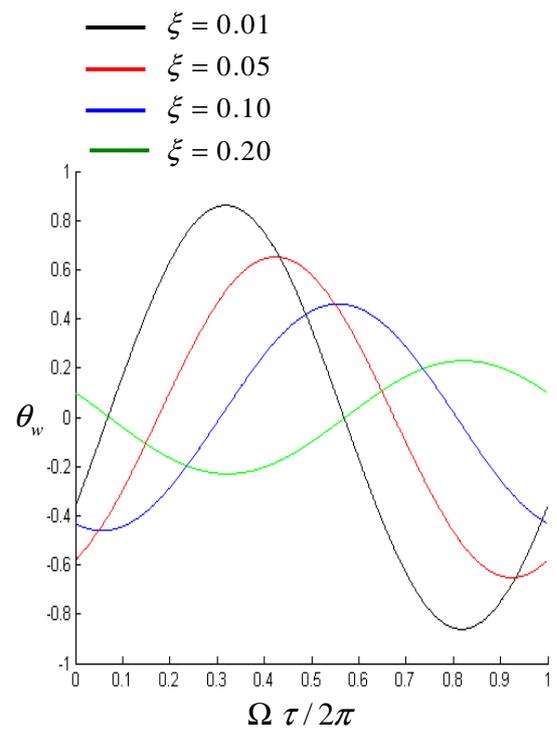


Fig. 2.4 : Température interfaciale pour différentes valeurs de ξ , avec $\Omega = 0.02$
 $Re = 10^5$, $Bi_{ext} = 0$ et $a^+ = 0.001$.

L'évaluation temporelle des températures interfaciales est présentée dans les figures (2.2), (2.3) et (2.4). Ces figures, révèlent que l'amplitude de la température interfaciale diminue de manière monotone et le déphasage augmente avec l'augmentation du ξ (le long du conduit) et de la fréquence adimensionnelle $\Omega = \omega R_1^2 / \alpha_f$. Alors, avec l'augmentation de α_f il y'a une diminution de déphasage. Puisque α_f accélère la diffusion de la chaleur.

- **Température de mélange**

La température de mélange appelée aussi température moyenne, est représentée par les figures (2.5), (2.6) et (2.7) pour les mêmes valeurs des paramètres a^+ , β_s , ξ , Bi_{ext} et r_{th} . L'allure de ces courbes est similaire à celle des températures interfaciales. Notons que dans les cas de grandes valeurs de Ω , l'atténuation des amplitudes (amortissement) pour la température moyenne est moins rapide que celle de la température interfaciale.

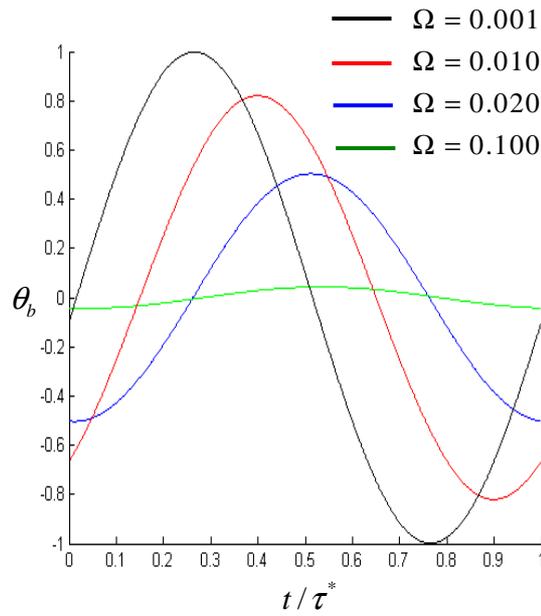


Fig. 2.5 : Température moyenne pour différentes valeurs de Ω en $\xi = 0.1$, avec $Re = 10^5$, $Bi_{ext} = 0$ et $a^+ = 0.001$.

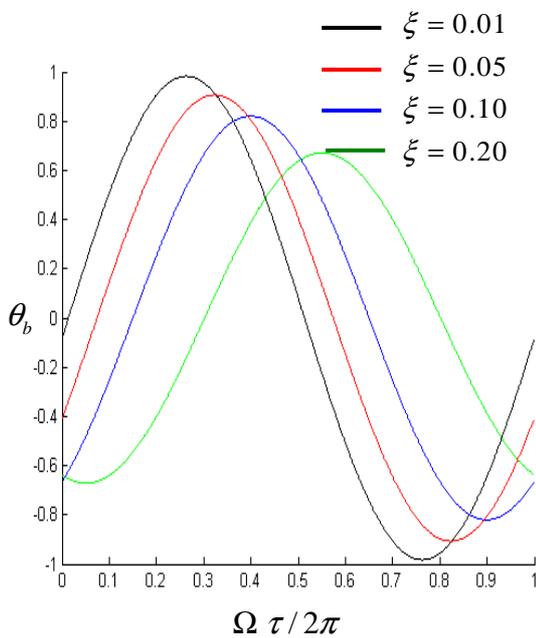


Fig. 2.6 : Température moyenne pour différentes valeurs de ξ , avec $\Omega = 0.01$, $Re = 10^5$, $Bi_{ext} = 0$ et $a^+ = 0.001$.

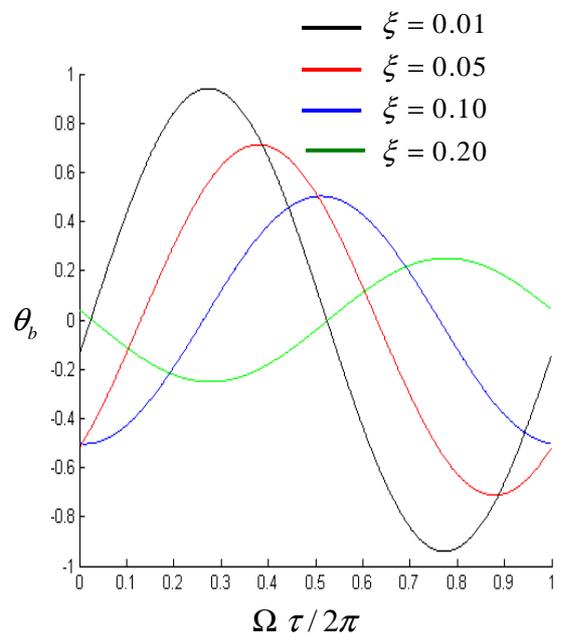


Fig. 2.7 : température moyenne pour différentes valeurs de ξ , avec $\Omega = 0.02$, $Re = 10^5$, $Bi_{ext} = 0$ et $a^+ = 0.001$.

- **Flux thermique à l'interface fluide-paroi**

Le flux thermique transversal à l'interface fluide paroi est donné par l'expression :

$$-\left. \frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{N_k^{1/2}} \psi'(\mu_k, 1) \bar{\theta}_k(\xi).$$

Soit en coordonnées polaire :

$$-\left. \frac{\partial \theta_f(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = A_f(\xi) \exp\{i[\Omega \tau + \phi_f(\xi)]\}$$

Les figures (2.8) et (2.9) présentent les variations de l'amplitude et du déphasage du flux thermique pariétale le long du conduit, pour différentes valeurs de a^+ avec $\Omega = 0.1$ et $Bi_{ext} = 0$. On remarque, qu'à l'entrée du conduit (x/D_e petit) l'amplitude du flux thermique est grande pour les petites valeurs de a^+ . Pour les grandes distances (loin de l'entrée), l'amplitude du flux thermique diminue rapidement.

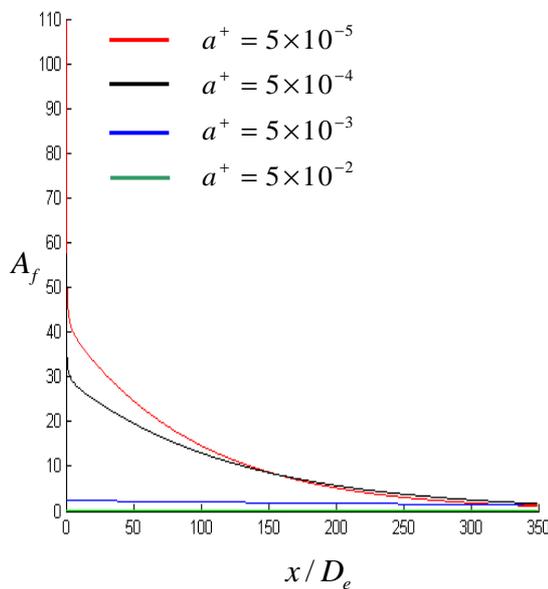


Fig. 2.8 : Amplitude du flux thermique à la paroi pour différentes valeurs de a^+ , avec $\Omega = 0.1$, $Re = 10^5$ et $Bi_{ext} = 0$.

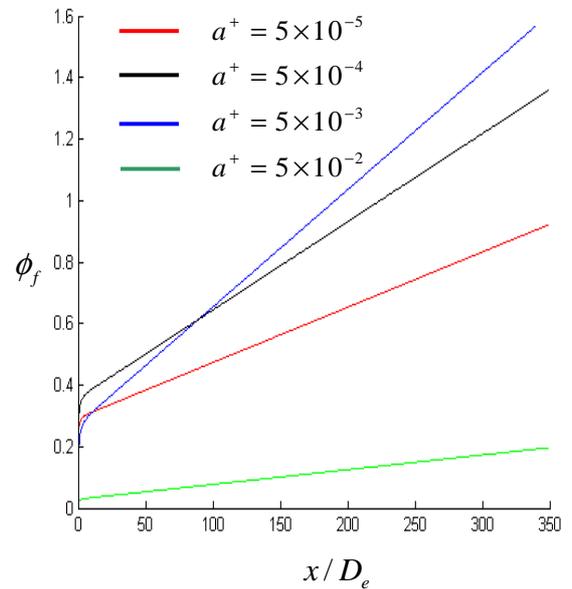


Fig. 2.9 : Déphasage du flux thermique à la paroi pour différentes valeurs de a^+ , avec $\Omega = 0.1$, $Re = 10^5$ et $Bi_{ext} = 0$.

- **Influence du paramètre a^+ sur les températures de mélange et interfaciale**

Le paramètre a^+ est défini comme étant le rapport des capacités thermiques de fluide et de solide. Selon [12, 41], le choix des valeurs de a^+ est souvent inférieur à 1, donc dans cette étude on se limite aux valeurs de a^+ allant de 5×10^{-5} à 5×10^{-1} .

Les variations de l'amplitude et du déphasage des températures moyenne et intrfaciale sont présentées sur les figures (2.10), (2.11), (2.12) et (2.13), pour les valeurs de $a^+ = 5 \cdot 10^{-5}$, $5 \cdot 10^{-4}$, $5 \cdot 10^{-3}$, $5 \cdot 10^{-2}$ et $5 \cdot 10^{-1}$, avec $\Omega = 0.1$ et $Bi_{ext} = 0$.

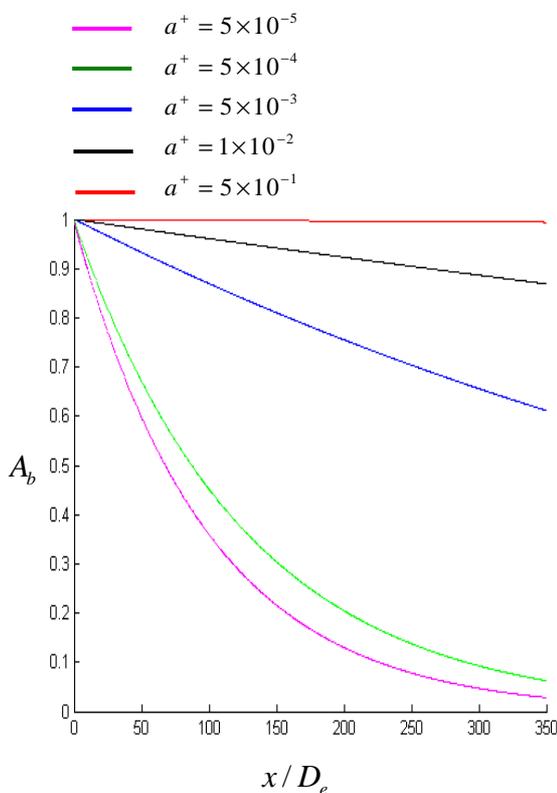


Fig. 2.10 : Amplitude de la température moyenne pour différentes valeurs de a^+ , avec $\Omega = 0.1$, $Re = 10^5$ et $Bi_{ext} = 0$.

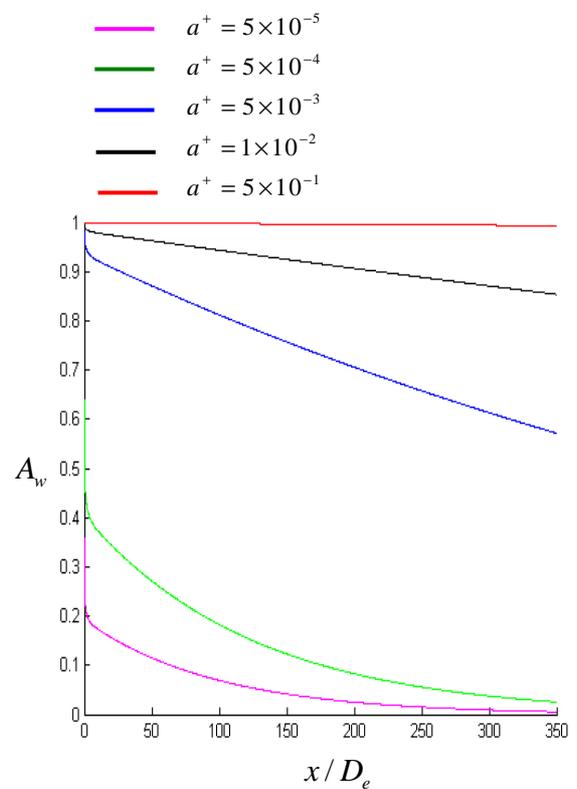


Fig. 2.11 : Amplitude de la température interfaciale pour différentes valeurs de a^+ , avec $\Omega = 0.1$, $Re = 10^5$ et $Bi_{ext} = 0$.

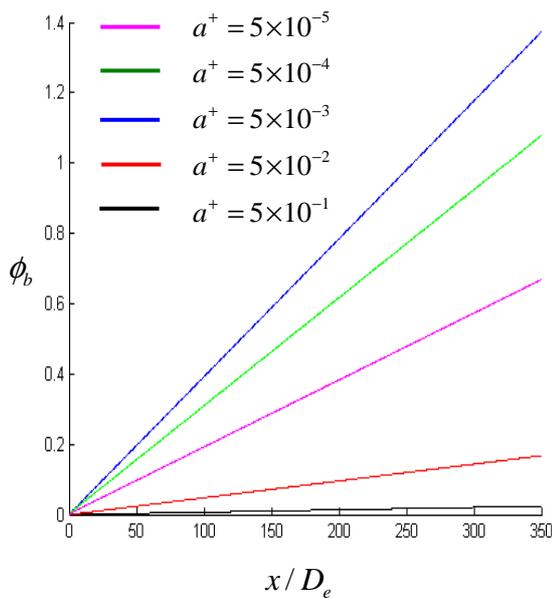


Fig. 2.12 : Déphasage de la température moyenne pour différentes valeurs de a^+ , avec $\Omega = 0.1$, $Re = 10^5$ et $Bi_{ext} = 0$.

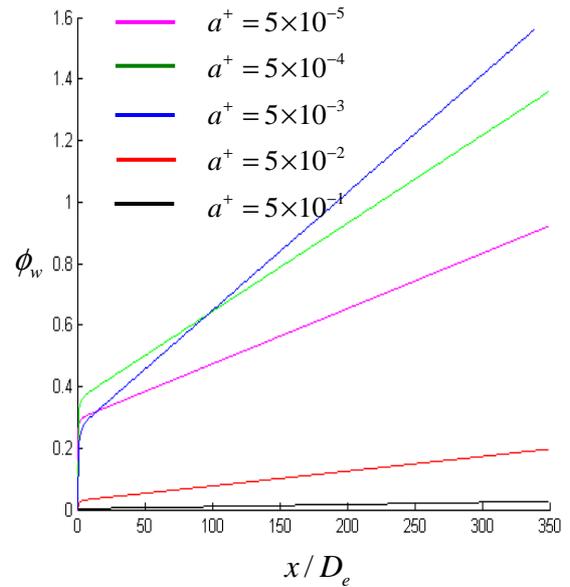


Fig. 2.13 : Déphasage de la température interfaciale pour différentes valeurs de a^+ , avec $\Omega = 0.1$, $Re = 10^5$ et $Bi_{ext} = 0$.

Les figures (2.10) et (2.11) montrent que l'atténuation des amplitudes le long du conduit augmente avec la diminution du paramètre a^+ , c'est-à-dire avec l'augmentation de la capacité thermique du solide. D'un autre côté, cette atténuation est beaucoup plus importante pour la température interfaciale.

Les figures (2.12) et (2.13) présentent respectivement le déphasage de la température de mélange et de la température interfaciale, on remarque que le déphasage évolue selon une fonction linéaire de x/De (ou : $\xi = 16(x/D_e)/Re Pr$), loin de l'entrée du conduit. Pour des valeurs très grandes de a^+ ($a^+ = 5 \cdot 10^{-1}$), le déphasage a une tangente très faible, ce qui correspond à l'état stationnaire. Pour des basses capacités thermiques, le déphasage est plus important et augmente avec l'augmentation de ξ .

- **Diffusion transversale**

Nous nous intéressons ici à la diffusion transversale dans le fluide pour différentes distances dès l'entrée du conduit. A cet effet, les figures (2.14) et (2.15) présentent respectivement les profils transversaux de l'amplitude et du déphasage de température de fluide pour différentes x/D_e (ou ξ) dans le cas $\beta_s = 1$, $a^+ = 0.001$ et $Bi_{ext} = 0$. La figure (2.14) montre que l'amplitude des températures diminue avec l'augmentation de la distance dès le centre du conduit, cela révèle l'existence d'un gradient transversale de température. Ce gradient est d'autant plus important qu'on s'éloigne de l'entrée du conduit.

Contrairement, dans la figure (2.15), on montre que le déphasage est moins important à l'entrée du conduit, puis il augmente avec l'augmentation de la distance axiale. D'une autre manière, à partir d'une distance $x/D_e = L_{th}$ ces profils sont stabilisés.

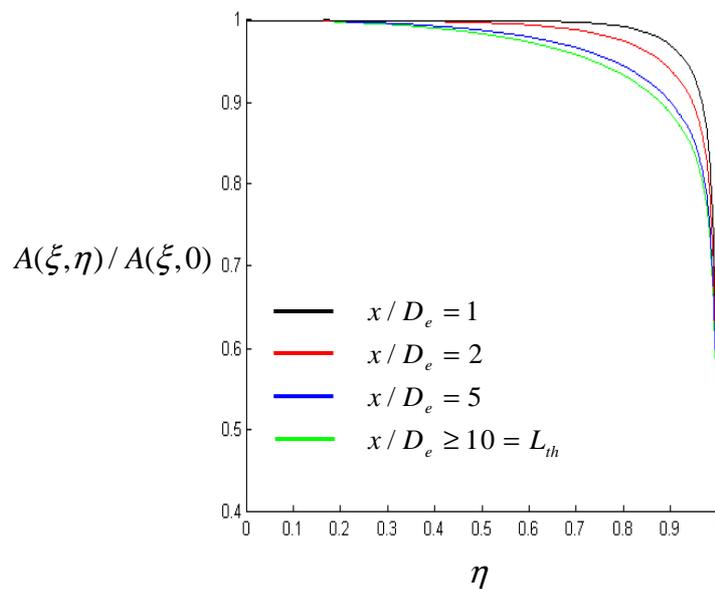


Fig. 2.14 : Profil transversal de l'amplitude de la température pour différentes valeurs de x/D_e , avec $Re = 10^5$, $a^+ = 0.001$ et $Bi_{ext} = 0$.

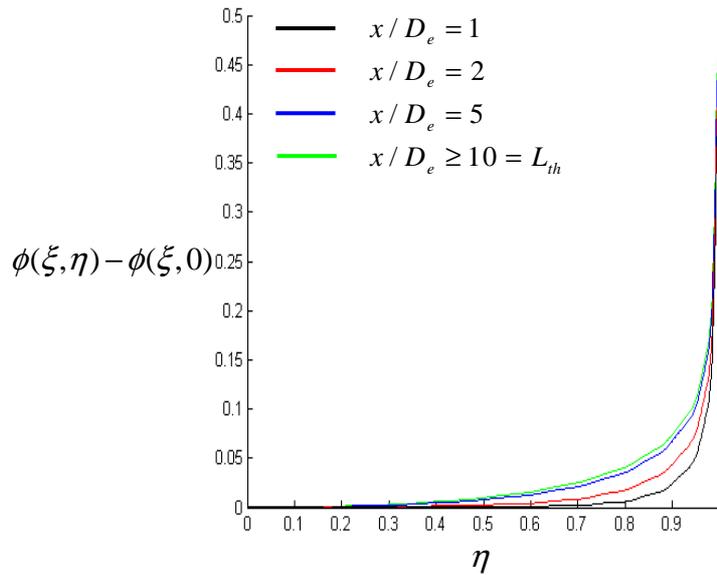


Fig. 2.15 : Profile transversal de déphasage de la température de fluide pour différentes valeurs de x/D_e , avec $Re = 10^5$, $a^+ = 0.001$ et $Bi_{ext} = 0$.

- **Influence du nombre de Biot**

Tous les résultats présentés jusqu'à ici, considèrent que la paroi externe du conduit est isolée du milieu extérieur ($Bi_{ext} = 0$). Pour cette raison dans les figures (2.16), (2.17), (2.18) et (2.19) on montre l'influence du nombre de Biot sur les amplitudes et les déphasages de la température de mélange le long de conduit pour les deux cas : $\beta_s = 0.045$ et $\beta_s = 1.41$.

Les figures (2.16), (2.17), (2.18) et (2.19) montrent l'influence du nombre Biot (fuite vers l'extérieur). On remarque, que pour des faibles capacités thermiques du conduit $\beta_s = 0.045$, les effets de la convection sur l'amplitude et le déphasage du signal thermique sont importants. Jusqu'à un nombre $Bi_{ext} = 50$ considéré comme une limite. Par ailleurs, pour des grandes capacités thermiques $\beta_s = 1.41$, l'amortissement le long du conduit est important et le nombre de Biot n'a aucune influence notable sur ce dernier.

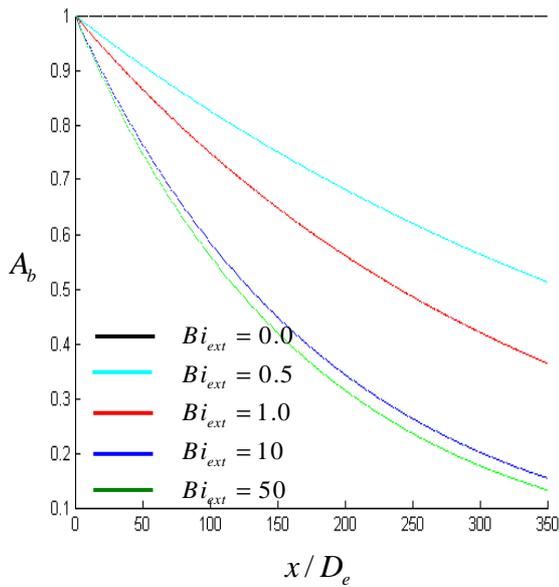


Fig. 2.16 : Amplitude de la température moyenne pour différentes valeurs de Bi_{ext} avec $Re = 10^5$, $a^+ = 5 \times 10^{-1}$ et $\Omega = 0.1$ ($\beta_s = 0.045$).

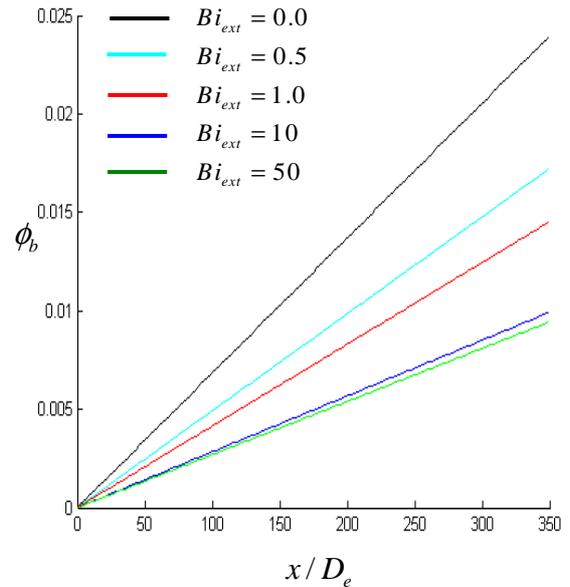


Fig. 2.17 : Déphasage de la température moyenne pour différentes valeurs de Bi_{ext} avec $Re = 10^5$, $a^+ = 5 \times 10^{-1}$ et $\Omega = 0.1$ ($\beta_s = 0.045$).

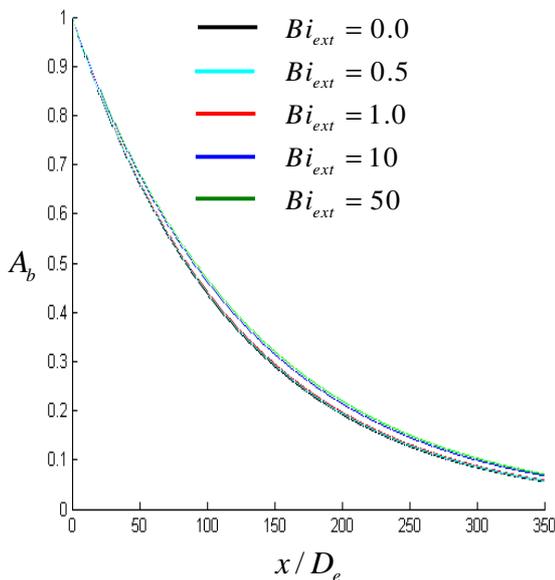


Fig. 2.18 : Amplitude de la température moyenne pour différentes valeurs de Bi_{ext} avec $Re = 10^5$, $a^+ = 5 \times 10^{-4}$ et $\Omega = 0.1$ ($\beta_s = 1.41$).

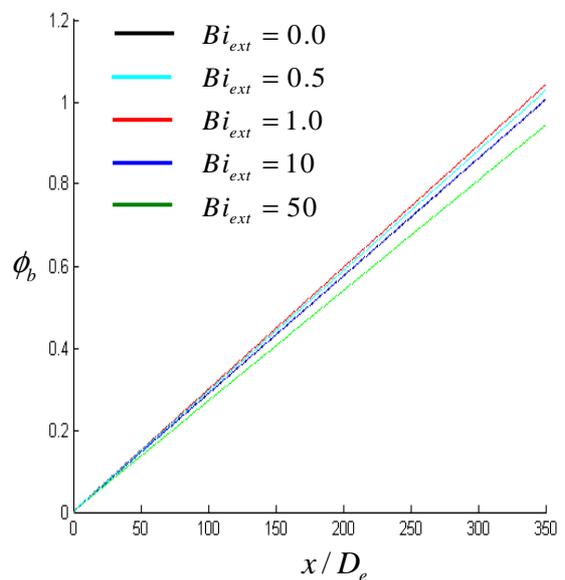


Fig. 2.19 : Déphasage de la température moyenne pour différentes valeurs de Bi_{ext} avec $Re = 10^5$, $a = 5 \times 10^{-4}$ et $\Omega = 0.1$ ($\beta_s = 1.41$).

• **Discussion de l'hypothèse d'isothermicité**

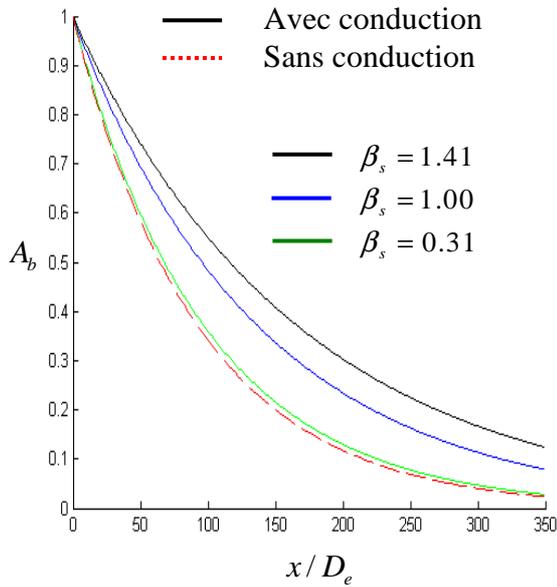


Fig. 2.20 : Comparaison de l'amplitude de la température moyenne pour différentes valeurs de β_s avec $Re=10^5$, $a^+ = 1 \times 10^{-3}$, $\Omega = 0.1$ et $Bi_{ext} = 0$.

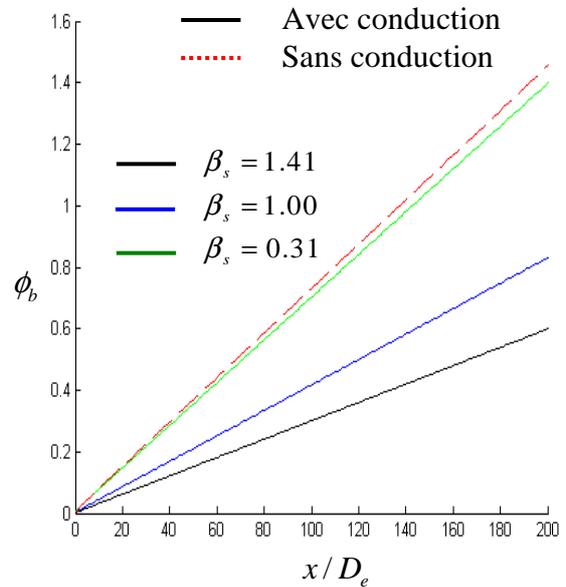


Fig. 2.21 : Comparaison de déphasage de la température moyenne pour différentes valeurs de β_s avec $Re=10^5$, $a^+ = 1 \times 10^{-3}$, $\Omega = 0.1$ et $Bi_{ext} = 0$.

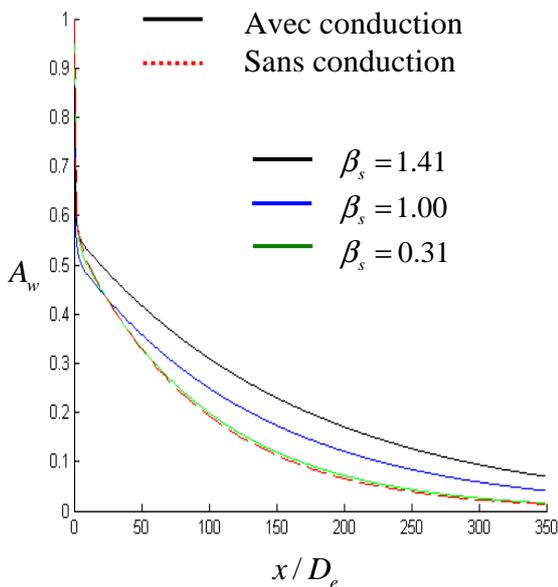


Fig. 2.22 : Comparaison de l'amplitude de la température interfaciale pour différentes valeurs de β_s avec $Re=10^5$, $a^+ = 1 \times 10^{-3}$, $\Omega = 0.1$, et $Bi_{ext} = 0$.

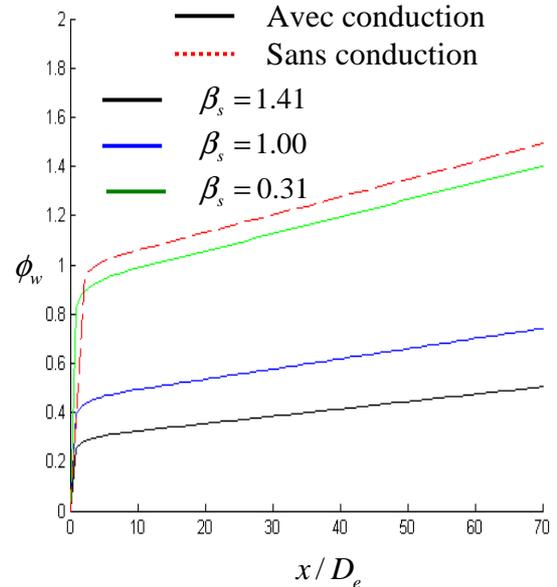


Fig. 2.23 : Comparaison de déphasage de la température interfaciale pour différentes valeurs de β_s avec $Re=10^5$, $a^+ = 1 \times 10^{-3}$, $\Omega = 0.1$, et $Bi_{ext} = 0$.

Les figures (2.20), (2.21), (2.22) et (2.23) montrent l'évolution de l'amplitude et du déphasage de la température moyenne et interfaciale respectivement, le long du conduit pour les deux cas : avec et sans diffusion dans la paroi. Ces figures dévoilent que l'hypothèse d'isothermicité reste valable, si seulement les valeurs de β_s sont très petites ($\beta_s \leq 0.31$). Contrairement, dans les cas des grandes valeurs de β_s ($\beta_s > 0.31$), cette hypothèse n'est plus valable.

- **Influence de a^+ pour différent Biot**

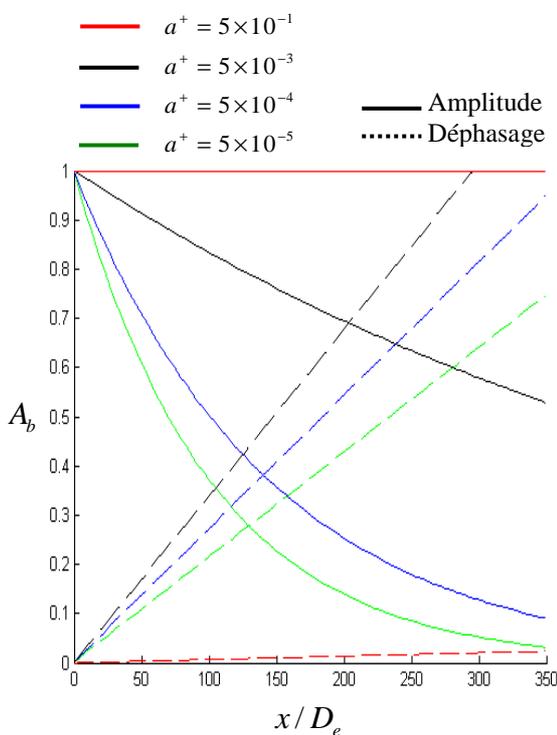


Fig. 2.24 : Amplitude et déphasage de la température moyenne pour différentes valeurs de a^+ avec $Re = 10^5$, $\Omega = 0.1$, et $Bi_{ext} = 0$.

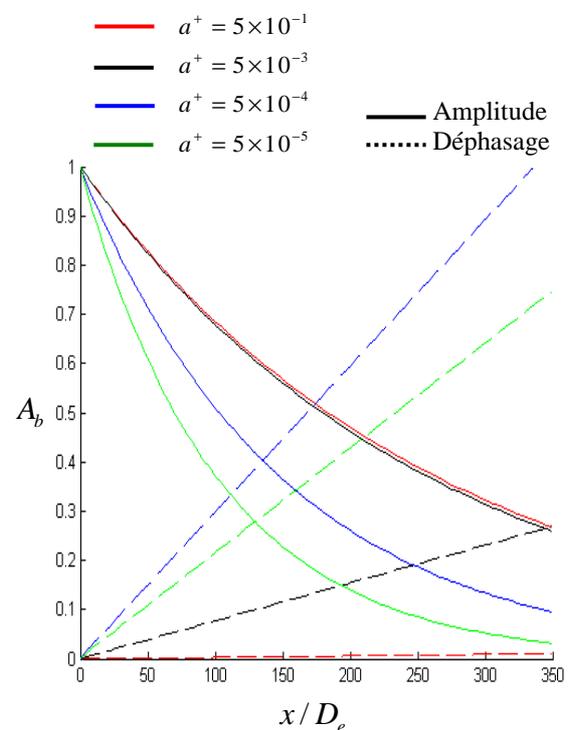


Fig. 2.25 : Amplitude et déphasage de la température moyenne pour différentes valeurs de a^+ avec $Re = 10^5$, $\Omega = 0.1$, et $Bi_{ext} = 50$.

Les figures (2.24) et (2.25) montrent l'influence du rapport des capacités thermiques a^+ sur l'amplitude de la température axiale pour les cas de $Bi_{ext} = 0$ et $Bi_{ext} = 50$ avec $\Omega = 0.1$ et $Re = 10^5$. Il est clair que, pour une paroi ayant une grande capacité thermique (faible valeur de a^+), la chaleur stockée au sein de la paroi est dominante en comparant avec celle transférée à l'extérieur par convection.

- **Influence du nombre de Reynolds**

Les figures (2.26) et (2.27) présentent la variation de l'amplitude de la température moyenne pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. On remarque que l'augmentation du nombre de Reynolds engendre un amortissement moins rapide le long du conduit, et un déphasage moins important. Les figures (2.28) et (2.29) montrent que, la quantité de chaleur transférée du fluide vers la paroi s'accroît avec l'accroissement du nombre de Reynolds. Cependant, il est montré sur les figures (2.26) et (2.27) que l'influence du nombre de Reynolds sur l'amplitude est moins significative pour des valeurs de β_s plus élevé.

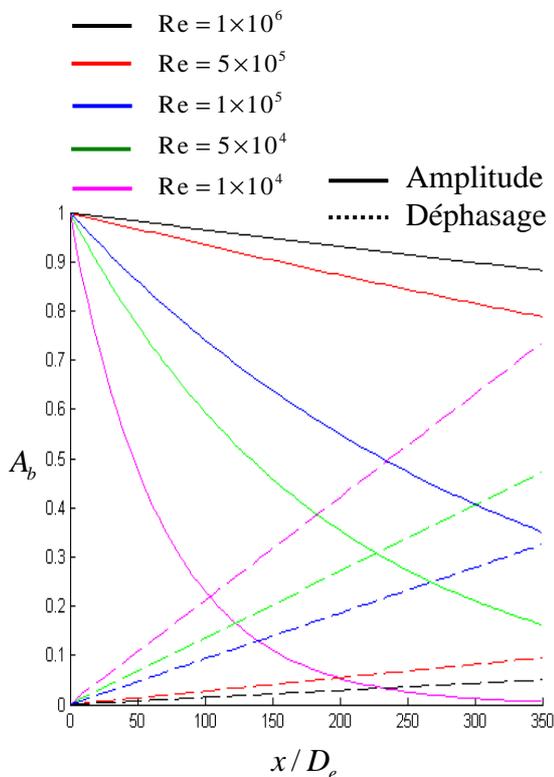


Fig. 2.26 : Amplitude et déphasage de la température moyenne pour différentes valeurs du nombre de Reynolds avec $a^+ = 0.001$, $\Omega = 0.01$, et $Bi_{ext} = 0$.

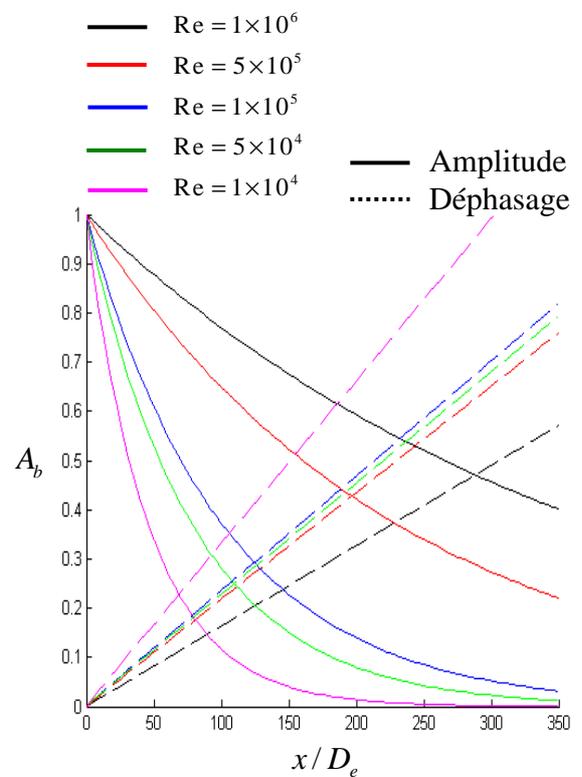


Fig. 2.27 : Amplitude et déphasage de la température moyenne pour différentes valeurs de nombre de Reynolds avec $a^+ = 0.001$, $\Omega = 1$, et $Bi_{ext} = 0$.

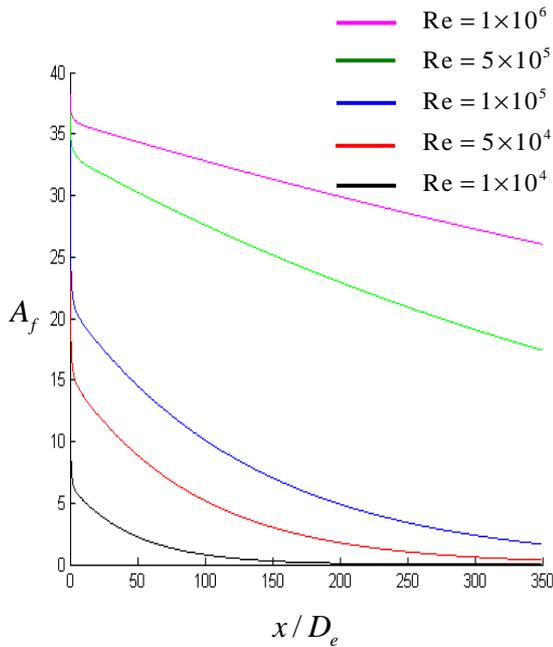


Fig. 2.28 : Evolution de l'amplitude du flux thermique à la paroi pour différentes valeurs de nombre de Reynolds, avec $a^+ = 0.001$, $\Omega = 0.1$ et $Bi_{ext} = 0$.

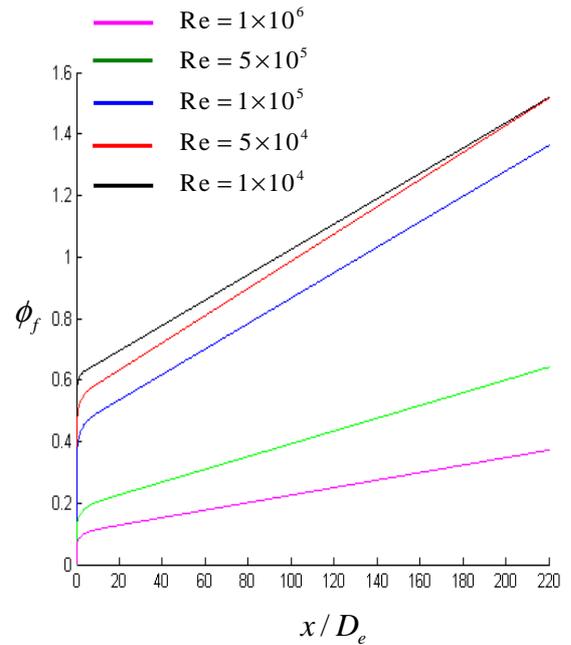


Fig. 2.29 : Evolution de déphasage du flux thermique à la paroi pour différentes valeurs de nombre de Reynolds, avec $a^+ = 0.001$, $\Omega = 0.1$ et $Bi_{ext} = 0$.

- **Influence de l'épaisseur du conduit**

Pour voir clairement l'effet de l'épaisseur sur le transfert thermique nous allons fixer les propriétés thermo-physiques de fluide et de solide.

$$\Gamma = \frac{\alpha_s}{\alpha_f} = 1, \quad \gamma = \frac{K_s}{K_f} = 25,$$

Les figures (2.30) et (2.31) montrent que, pour une paroi isolée ($Bi_{ext} = 0$), l'amortissement des amplitudes augmente avec l'augmentation de l'épaisseur jusqu'à une valeur limite (ligne en rose) ou une autre augmentation de l'épaisseur n'a aucune signification. Contrairement, dans le cas où $Bi_{ext} = 10$, l'augmentation de l'épaisseur engendre une diminution de l'amortissement jusqu'à la même valeur limite ($Bi_{ext} = 0$). Ce phénomène revient que, pour une paroi isolée l'augmentation de l'épaisseur donne une augmentation de la capacité thermique de la paroi. Tandis que pour $Bi_{ext} = 10$, l'augmentation de l'épaisseur donne une augmentation de la résistance thermique.

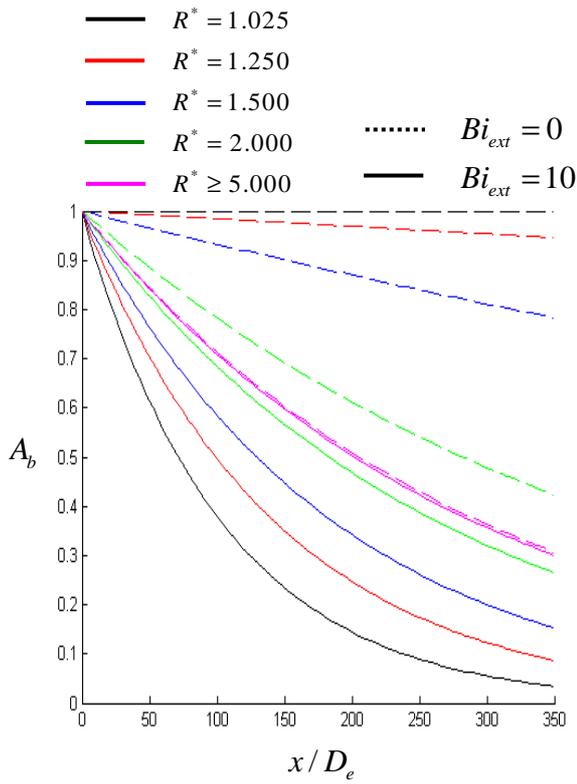


Fig. 2.30 : Amplitude de la température moyenne pour différentes valeurs R^* , avec $\Omega = 1$ et $Re = 10^5$.

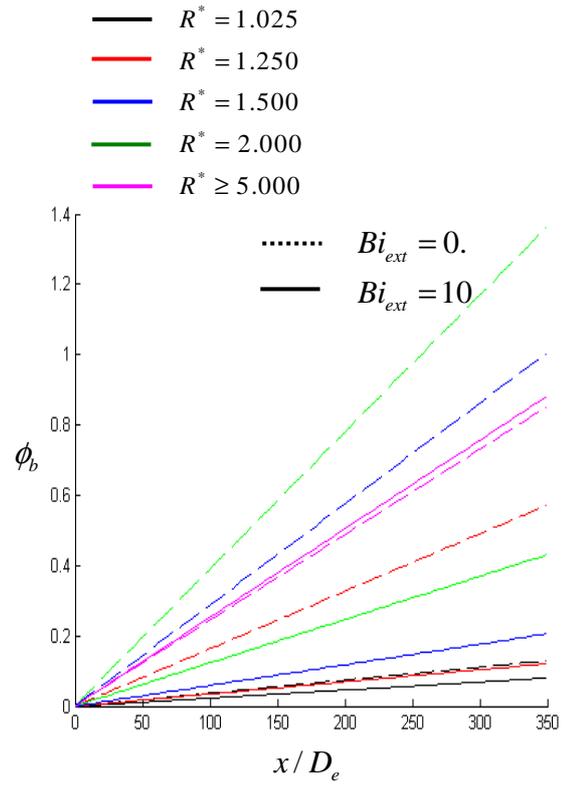


Fig. 2.31 : Amplitude de la température moyenne pour différentes valeurs R^* , avec $\Omega = 1$ et $Re = 10^5$.

2.6. Etude des cas limites : cas d'une paroi isotherme

Dans cette partie de travail nous employons la même méthodologie utilisée par Kakac et Li [30].

2.6.1. Description du problème

Nous considérons ici le même problème traité précédemment (la convection forcée à l'intérieur d'un conduit à deux plaques parallèles), Mais cette fois on néglige la diffusion transversale dans la paroi.

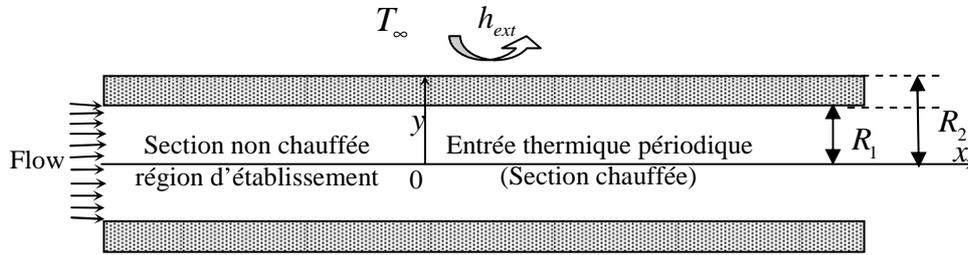


Fig.2.32 : géométrie du conduit considéré.

2.6.2. Formulation mathématique

$$\frac{\partial T_f(x, y, t)}{\partial t} + u(y) \frac{\partial T_f(x, y, t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left((\alpha_f + \varepsilon_h) \frac{\partial T_f(x, y, t)}{\partial y} \right) \quad 0 < y < R_1, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (2.19a)$$

$$T_f(0, y, t) = T_\infty + \Delta T(y) \exp(i\omega t) \quad 0 \leq y \leq R_1, \quad t > 0 \quad (2.19b)$$

$$\left. \frac{\partial T_f(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (2.19c)$$

$$h_{ext}(T_f(x, y, t) - T_\infty) + k_f \frac{\partial T_f(x, y, t)}{\partial y} + (\rho C_p)_p (R_2 - R_1) \frac{\partial T_f(x, y, t)}{\partial t} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (2.19d)$$

En introduisant les paramètres adimensionnels suivants :

$$\eta = \frac{y}{R_1}, \quad \xi = \frac{(x/D_e)(D_e/R_1)^2}{\text{Re Pr}}, \quad \tau = \frac{t\alpha_f}{R_1^2}, \quad \Omega = \frac{\omega R_1^2}{\alpha_f}, \quad \text{Bi}_{ext} = \frac{h_{ext} R_1}{k_f}, \quad \varepsilon(\eta) = 1 + \frac{\varepsilon_h}{\alpha_f},$$

$$a^+ = \frac{(\rho C_p)_f \times R_1}{(\rho C_p)_s \times (R_2 - R_1)}, \quad \Delta\theta(\eta) = \frac{\Delta T(y)}{\Delta T}, \quad W(\eta) = \frac{u(y)}{u_m}, \quad \theta_f(\xi, \eta, \tau) = \frac{T_f(x, y, t) - T_\infty}{\Delta T(y)},$$

Le problème sous forme adimensionnelle s'écrit :

$$\frac{\partial \theta_f(\xi, \eta, \tau)}{\partial \tau} + W(\eta) \frac{\partial \theta_f(\xi, \eta, \tau)}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\varepsilon(\eta) \frac{\partial \theta_f(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta} \right) \quad 0 < \eta < 1, \xi > 0, \tau > 0 \quad (2.20a)$$

$$\theta_f(0, \eta, \tau) = \Delta\theta(\eta) \exp(i\Omega \tau), \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad \tau > 0 \quad (2.20b)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_f(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \xi > 0, \quad \tau > 0 \quad (2.20c)$$

$$Bi_{ext} \theta_f(\xi, \eta, \tau) + \frac{\partial \theta_f(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta} + \frac{1}{a^+} \frac{\partial \theta_f(\xi, \eta, \tau)}{\partial \tau} = 0, \quad \eta = 1, \quad \xi > 0, \quad \tau > 0 \quad (2.20d)$$

La température dans le fluide est cherchée en notation complexe sous la forme :

$$\theta_f(\xi, \eta, \tau) = \tilde{\theta}_f(\xi, \eta) \exp(i\Omega \tau) \quad (2.21)$$

En introduisant l'expression (2.21) dans le problème (2.20), on obtient :

$$W(\eta) \frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\varepsilon(\eta) \frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) - i\Omega \tilde{\theta}_f(\xi, \eta) \quad 0 < \eta < 1, \xi > 0 \quad (2.22a)$$

$$\tilde{\theta}_f(0, \eta) = \Delta\theta(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (2.22b)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \xi > 0, \quad (2.22c)$$

$$Bi_{ext} \tilde{\theta}_f(\xi, \eta) + \frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{i\Omega}{a} \tilde{\theta}_f(\xi, \eta), \quad \eta = 1, \quad \xi > 0, \quad (2.22d)$$

La température adimensionnelle à l'entrée est donnée par :

$$\Delta\theta(\eta) = 1.035 + 0.098 \eta - 1.04 \eta^2 \quad (2.22)$$

2.6.3. Méthode de résolution

Une solution formaliste du problème (2.22) est développée à travers la technique de la transformée intégrale généralisée (GITT). Donc un problème auxiliaire aux valeurs propres est obtenu de système complexe original (2.22) :

$$\frac{d}{d\eta} \left(\varepsilon(\eta) \frac{d\psi(\mu_k, \eta)}{d\eta} \right) + \mu_k^2 W(\eta) \psi(\mu_k, \eta) = 0 \quad 0 < \eta < 1 \quad (2.23a)$$

$$\left. \frac{d\psi(\mu_k, \eta)}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \eta = 0, \quad (2.23b)$$

$$Bi_{ext} \psi(\mu_k, \eta) + \frac{d\psi(\mu_k, \eta)}{d\eta} = 0, \quad \eta = 1, \quad (2.23c)$$

On utilisant les fonctions propres $(\psi(\mu_k, \eta))$ de ce système, nous définissons la transformé intégrale paire suivant :

$$\text{Inversion :} \quad \tilde{\theta}_f(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{N_k^{1/2}} \psi(\mu_k, \eta) \bar{\theta}_k(\xi) \quad (2.24a)$$

$$\text{Transformée:} \quad \bar{\theta}_k(\xi) = \int_0^1 W(\eta) \frac{\psi(\mu_k, \eta)}{N_k^{1/2}} \tilde{\theta}_f(\xi, \eta) d\eta \quad (2.24b)$$

$$\text{Normalisation :} \quad N_k = \int_0^1 W(\eta) [\psi(\mu_k, \eta)]^2 d\eta \quad (2.24c)$$

En multipliant l'équation (2.22a) par le terme :

$$\int_0^1 \frac{\psi(\mu_k, \eta)}{N_k^{1/2}} d\eta.$$

le problème aux valeurs propres (2.23), les conditions aux limites (2.22d) et (2.23c) sont utilisées pour obtenir l'équation ci-dessous :

$$\frac{d\tilde{\theta}_k(\xi)}{d\xi} = \mu_k^2 \bar{\theta}_k(\xi) + i\Omega \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^* \bar{\theta}_j(\xi) = 0 \quad (2.25a)$$

où

$$a_{kj}^* = a_{jk}^* = \frac{1}{(N_k N_j)^{1/2}} \left(\frac{\varepsilon(1) \psi(\mu_k, 1) \psi(\mu_j, 1)}{a^+} + \int_0^1 \psi(\mu_k, \eta) \psi(\mu_j, \eta) d\eta \right) \quad (2.25b)$$

La condition d'entrée est donnée par :

$$\bar{\theta}_k(0) = f_k = \int_0^1 W(\eta) \Delta\theta(\eta) \frac{\psi(\mu_k, \eta)}{N_k^{1/2}} d\eta \quad (2.25c)$$

Donc en poursuivant les mêmes étapes citées précédemment dans la première partie, nous arriverons à la solution finale.

$$\theta_f(\xi, \eta, \tau) = A(\xi, \eta) \exp\{i[\Omega\tau + \phi(\xi)]\} \quad (2.26a)$$

$$q_w = A_f(\xi) \exp\{i[\Omega\tau + \phi_f(\xi)]\} \quad (2.26c)$$

$$\theta_b(\xi, \tau) = A_b(\xi) \exp\{i[\Omega\tau + \phi_b(\xi)]\} \quad (2.26d)$$

avec $A(\xi, \eta)$ et $\phi(\xi)$ sont respectivement l'amplitude et le déphasage.

2.6.4. Comparaison des résultats

Dans un but de comparaison et validation, Les figures (2.33) et (2.34) donnent une comparaison graphique des résultats (Amplitude de la température axiale), et les tableaux (2.1) (2.2) portent les valeurs numériques de la température en fonction de ξ , obtenus par la présente étude et celles obtenus par Kakaç et Li [30]. La comparaison des résultats relève une bonne satisfaction sur le plan de précision.

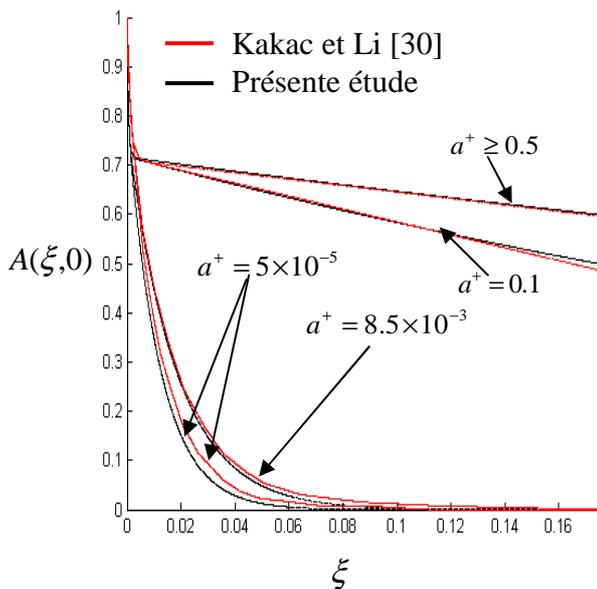


Fig. 2.33 : L'effet du rapport de capacité thermique sur l'amplitude de la température axiale pour $Bi_{ext} = 1$, $Re = 10^5$ et $\Omega = 1$.

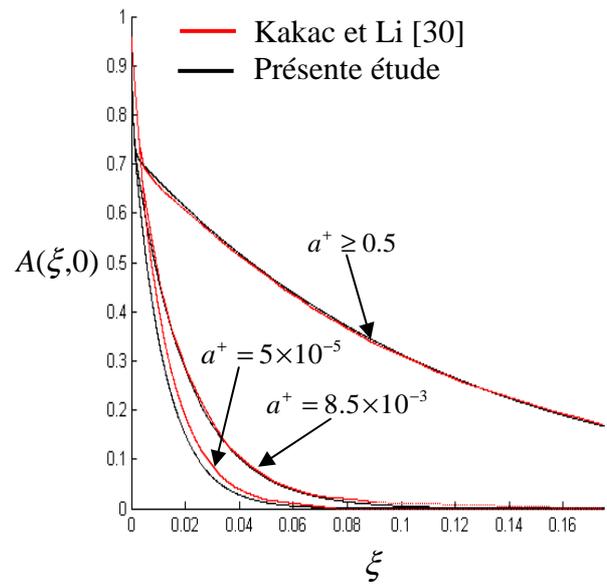


Fig. 2.34 : L'effet du rapport de capacité thermique sur l'amplitude de la température axiale pour $Bi_{ext} = 10$, $Re = 10^5$ et $\Omega = 1$.

2.7. Etude des cas limites : cas d'une paroi mince à température constante

Dans cette partie de travail nous poursuivons la même méthodologie utilisée par Kim et Özisik [28].

2.7.1. description de problème

Dans ce qui va suivre, nous allons considérer que la paroi conserve une température constante T_0 , et une épaisseur négligeable pour toute la longueur du conduit (fig. 2.35).

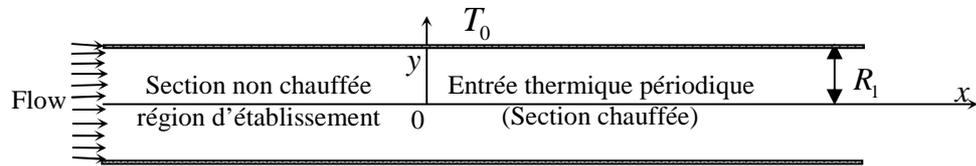


Fig.2.35 : Géométrie du conduit considéré.

2.7.2. Formulation mathématique

$$\frac{\partial T_f(x, y, t)}{\partial t} + u(y) \frac{\partial T_f(x, y, t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left((\alpha_f + \varepsilon_h) \frac{\partial T_f(x, y, t)}{\partial y} \right) \quad 0 < y < R_1, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (2.27a)$$

$$T_f(0, y, t) = T_0 + \Delta T \exp(i\omega t) \quad 0 \leq y \leq R_1, \quad t > 0 \quad (2.27b)$$

$$\left. \frac{\partial T_f(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (2.27c)$$

$$T(x, R_1, t) = T_0 \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (2.27d)$$

En introduisant les paramètres adimensionnels suivants :

$$\eta = \frac{y}{R_1}, \quad \xi = \frac{16x/D_e}{\text{Re Pr}}, \quad \tau = \frac{t\alpha_f}{R_1^2}, \quad \Omega = \frac{\omega R_1^2}{\alpha_f},$$

$$W(\eta) = \frac{u(y)}{u_m}, \quad \varepsilon(\eta) = 1 + \frac{\varepsilon_h}{\alpha_f}, \quad \theta_f(\xi, \eta, \tau) = \frac{T_f(x, y, t) - T_0}{\Delta T},$$

Le problème sous forme adimensionnelle s'écrit :

$$\frac{\partial \theta_f(\xi, \eta, \tau)}{\partial \tau} + W(\eta) \frac{\partial \theta_f(\xi, \eta, \tau)}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\varepsilon(\eta) \frac{\partial \theta_f(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta} \right) \quad 0 < \eta < 1, \quad \xi > 0, \quad \tau > 0 \quad (2.28a)$$

$$\theta_f(0, \eta, \tau) = \exp(i\Omega \tau), \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad \tau > 0 \quad (2.28b)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_f(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \xi > 0, \quad \tau > 0 \quad (2.28c)$$

$$\theta_f(\xi, 1, \tau) = 0, \quad \xi > 0, \quad \tau > 0 \quad (2.28d)$$

La température dans le fluide est cherchée en notation complexe sous la forme :

$$\theta_f(\xi, \eta, \tau) = \tilde{\theta}_f(\xi, \eta) \exp(i\Omega \tau) \quad (2.29)$$

En introduisant l'expression (2.3) dans le problème (2.2), on obtient :

$$W(\eta) \frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\varepsilon(\eta) \frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) - i\Omega \tilde{\theta}_f(\xi, \eta) \quad 0 < \eta < 1, \quad \xi > 0 \quad (2.30a)$$

$$\tilde{\theta}_f(0, \eta) = 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (2.30b)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \xi > 0, \quad (2.30c)$$

$$\tilde{\theta}_f(\xi, 1) = 0, \quad \xi > 0, \quad (2.30d)$$

2.7.3. Méthode de résolution

Avec la méthode GITT un problème auxiliaire aux valeurs propres est obtenu de système complexe original (2.30).

$$\frac{d}{d\eta} \left(\varepsilon(\eta) \frac{d\psi(\mu_k, \eta)}{d\eta} \right) + \mu_k^2 W(\eta) \psi(\mu_k, \eta) = 0 \quad 0 < \eta < 1 \quad (2.31a)$$

$$\left. \frac{d\psi(\mu_k, \eta)}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad (2.31b)$$

$$\psi(\mu_k, 1) = 0, \quad (2.31c)$$

En utilisant les fonctions propres $(\psi(\mu_k, \eta))$ de ce système, nous définissons la transformé intégrale paire suivant.

$$\text{Inversion :} \quad \tilde{\theta}_f(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{N_k^{1/2}} \psi(\mu_k, \eta) \bar{\theta}_k(\xi) \quad (2.32a)$$

$$\text{Transformée:} \quad \bar{\theta}_k(\xi) = \int_0^1 W(\eta) \frac{\psi(\mu_k, \eta)}{N_k^{1/2}} \tilde{\theta}_f(\xi, \eta) d\eta \quad (2.32b)$$

$$\text{Normalisation :} \quad N_k = \int_0^1 W(\eta) [\psi(\mu_k, \eta)]^2 d\eta \quad (2.32c)$$

En multipliant l'équation (2.4a) par le terme :

$$\int_0^1 \frac{\psi(\mu_k, \eta)}{N_k^{1/2}} d\eta.$$

Le problème des valeurs propres (2.31), les conditions aux limites (2.31c) et (2.30d) sont utilisées pour obtenir l'équation ci-dessous :

$$\frac{d\bar{\theta}_k(\xi)}{d\xi} = \mu_k^2 \bar{\theta}_k(\xi) + i\Omega \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^* \bar{\theta}_j(\xi) = 0 \quad (2.23a)$$

La condition d'entrée est donnée par :

$$\bar{\theta}_k(0) = f_k = \int_0^1 W(\eta) \frac{\psi(\mu_k, \eta)}{N_k^{1/2}} d\eta \quad (2.33b)$$

où

$$a_{kj}^* = a_{jk}^* = \frac{1}{(N_k N_j)^{1/2}} \int_0^1 \psi(\mu_k, \eta) \psi(\mu_j, \eta) d\eta \quad (2.33c)$$

Donc en poursuivant les mêmes étapes citées précédemment dans la première, partie nous arriverons à la solution finale.

$$\theta_f(\xi, \eta, \tau) = A(\xi, \eta) \exp\{i[\Omega \tau + \phi(\xi)]\} \quad (2.34a)$$

$$q_w = - \left. \frac{\partial \theta_f(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = A_f(\xi) \exp\{i[\Omega \tau + \phi_f(\xi)]\} \quad (2.34b)$$

$$\theta_b(\xi, \tau) = A_b(\xi) \exp\{i[\Omega \tau + \phi_b(\xi)]\} \quad (2.34c)$$

avec $A(\xi, \eta)$ et $\phi(\xi)$ sont respectivement l'amplitude et le déphasage.

2.7.4. Comparaison des résultats

Une comparaison graphique est affichée sur les figures (2.36), (2.37), (2.38) et (2.39) en montrant l'évolution de déphasage de la température moyenne en fonction de la distance axiale pour différentes valeurs de la fréquence adimensionnelle Ω , et différents nombres de Reynolds. Les tableaux (2.3), (2.4), (2.5) et (2.6) portent des valeurs numériques de déphasage de température moyenne pour différentes positions (x/D_e), obtenus par la présente étude et celles obtenus par Kim et Özisik [28]. Donc, de point de vue de précision la comparaison des résultats relève une bonne satisfaction.

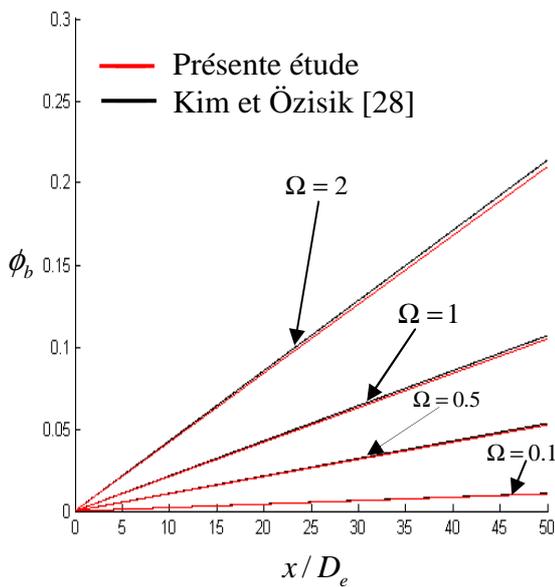


Fig. 2.36 : Variation de déphasage de température moyenne le long du conduit pour différentes valeurs de Ω et $Re = 10^4$

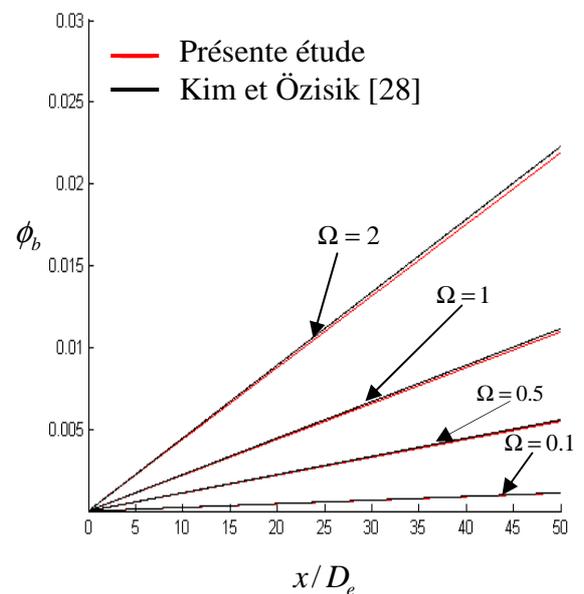


Fig. 2.37 : Variation de déphasage de température moyenne le long du conduit pour différentes valeurs de Ω et $Re = 10^5$.

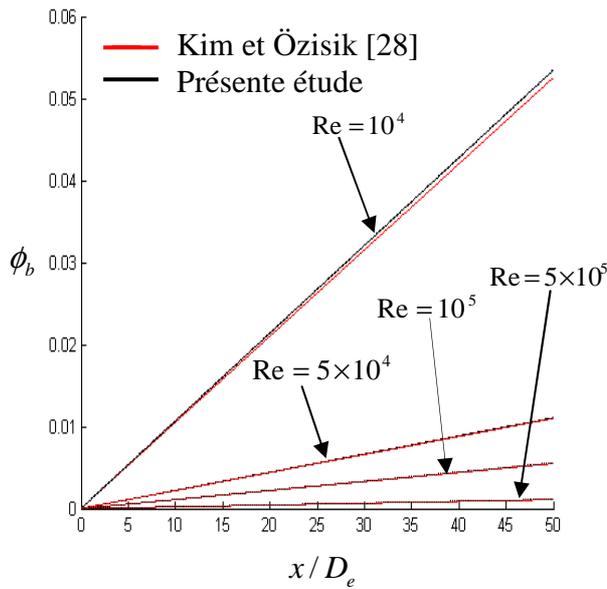


Fig. 2.38 : Variation de déphasage de la température moyenne le long du conduit pour différentes valeurs de nombre du Reynolds et $\Omega = 0.5$.

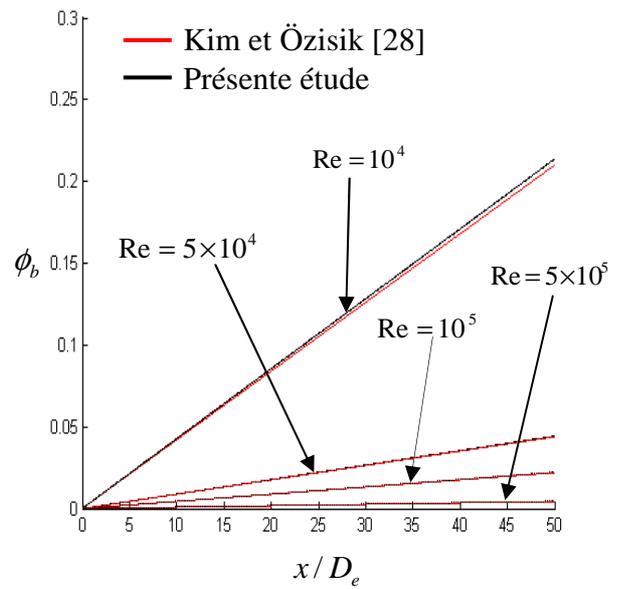


Fig. 2.39 : Variation de déphasage de la température moyenne le long du conduit pour différentes valeurs du nombre de Reynolds et $\Omega = 2$.

Table. 2.3 : Comparaison de déphasage de la température moyenne avec des valeurs données par Kim et Özisik [28], pour $Re = 10^4$ et différentes valeurs de Ω .

x/D_e	$\phi_b(x/D_e)$											
	$\Omega=2$			$\Omega=1$			$\Omega=0.5$			$\Omega=0$		
	Kim et Özisik [28]	Présente étude	Erreur %	Kim et Özisik [28]	Présente étude	Erreur %	Kim et Özisik [28]	Présente étude	Erreur %	Kim et Özisik [28]	Présente étude	Erreur %
5	0.0210	0.0215	0.23	0.0105	0.0108	0.14	0.0052	0.0054	0.09	0.0011	0.0011	0.00
15	0.0629	0.0643	0.66	0.0315	0.0321	0.28	0.0157	0.0161	0.19	0.0031	0.0032	0.04
30	0.1259	0.1284	1.19	0.0629	0.0642	0.61	0.0315	0.0321	0.28	0.0063	0.0064	0.04
45	0.1888	0.1925	1.76	0.0944	0.0963	0.90	0.0472	0.0481	0.42	0.0094	0.0096	0.09
50	0.2100	0.2139	1.85	0.0950	0.0969	0.90	0.0525	0.0535	0.47	0.0105	0.0107	0.09

Table. 2.4 : Comparaison de déphasage de la température moyenne avec des valeurs données par Kim et Özisik [28], pour $Re = 10^5$ et différentes valeurs de Ω .

x/D_e	$\phi_b(x/D_e)$											
	$\Omega=2$			$\Omega=1$			$\Omega=0.5$			$\Omega=0$		
	Kim et Özisik [28]	Présente étude	Erreur %	Kim et Özisik [28]	Présente étude	Erreur %	Kim et Özisik [28]	Présente étude	Erreur %	Kim et Özisik [28]	Présente étude	Erreur %
5	0.0022	0.0022	0.00	0.0011	0.0011	0.00	0.0005	0.0006	0.45	0.0001	0.0001	0.00
15	0.0066	0.0067	0.45	0.0033	0.0033	0.00	0.0016	0.0017	0.45	0.0003	0.0003	0.00
30	0.0132	0.0134	0.90	0.0066	0.0067	0.45	0.0033	0.0033	0.00	0.0007	0.0007	0.00
45	0.0198	0.0201	1.36	0.0099	0.0100	0.45	0.0049	0.0050	0.45	0.0010	0.0010	0.00
50	0.0220	0.0223	1.36	0.0110	0.0111	0.45	0.0055	0.0056	0.45	0.0011	0.0011	0.00

Table. 2.5 : Comparaison de déphasage de la température moyenne avec des valeurs données par Kim et Özisik [28], pour $\Omega = 0.5$ et différentes valeurs du nombre de Reynolds.

x/D_e	$\phi_b(x/D_e)$											
	Re = 10^4			Re = 5×10^4			Re = 10^5			Re = 5×10^5		
	Kim et Özisik [28]	Présente étude	Erreur %	Kim et Özisik [28]	Présente étude	Erreur %	Kim et Özisik [28]	Présente étude	Erreur %	Kim et Özisik [28]	Présente étude	Erreur %
5	0.0052	0.0054	0.38	0.0011	0.0011	0.00	0.0005	0.0006	0.45	0.0001	0.0001	0.00
15	0.0158	0.0161	0.57	0.0033	0.0033	0.00	0.0016	0.0017	0.45	0.0003	0.0003	0.00
30	0.0315	0.0321	1.14	0.0066	0.0066	0.45	0.0033	0.0033	0.00	0.0007	0.0007	0.00
45	0.0473	0.0481	1.52	0.0099	0.0100	0.45	0.0049	0.0050	0.45	0.0010	0.0010	0.00
50	0.0525	0.0535	1.90	0.0110	0.0111	0.45	0.0055	0.0056	0.45	0.0011	0.0011	0.00

Table. 2.6 : Comparaison de déphasage de la température moyenne avec des valeurs données par Kim et Özisik [28], pour $\Omega = 2$ et différentes valeurs du nombre de Reynolds.

x/D_e	$\phi_b(x/D_e)$											
	Re = 10^4			Re = 5×10^4			Re = 10^5			Re = 5×10^5		
	Kim et Özisik [28]	Présente étude	Erreur %	Kim et Özisik [28]	Présente étude	Erreur %	Kim et Özisik [28]	Présente étude	Erreur %	Kim et Özisik [28]	Présente étude	Erreur %
5	0.0210	0.0215	0.23	0.0044	0.0045	0.04	0.0022	0.0022	0.00	0.0004	0.0005	0.04
15	0.0630	0.0643	0.61	0.0132	0.0133	0.04	0.0066	0.0067	0.04	0.0013	0.0014	0.04
30	0.1260	0.1284	1.14	0.0264	0.0266	0.09	0.0132	0.0134	0.09	0.0026	0.0027	0.04
45	0.1890	0.1925	1.66	0.0396	0.0399	0.14	0.0198	0.0201	0.14	0.0040	0.0040	0.00
50	0.2100	0.2139	1.85	0.0440	0.0443	0.14	0.0220	0.0223	0.14	0.0044	0.0045	0.04

2.8. Conclusion

L'analyse physique des résultats issus du modèle ici développé, peut être suffisante pour comprendre le phénomène de la convection forcée turbulente en régime périodique. Toute fois on montre que :

- L'amortissement des amplitudes suit une fonction exponentielle le long du conduit. Il est plus important pour les grandes capacités thermiques du conduit. le déphasage est une fonction linéaire loin de l'entrée du conduit.
- L'effet du nombre Biot est notable pour des faibles valeurs des capacités thermiques du conduit.
- L'hypothèse d'iso-thermicité des parois du conduit n'est retenue que pour des faibles épaisseurs, faible fréquence d'entrée et/ou grandes rapport des capacités thermiques.
- L'augmentation de l'amortissement des amplitudes long du conduit peut être aussi engendrée par le décroissement du nombre de Reynolds. Cependant, pour un nombre de Reynolds élevé, les échanges thermiques avec le milieu extérieur sont plus importants.
- Les modèles utilisés dans la présente étude donnent des résultats bien comparables avec les littératures [28, 30].

Chapitre 3 :

Etude analytique d'un écoulement turbulent dans un conduit
cylindrique avec diffusion dans la paroi

3.1. Introduction

Les écoulements dans les conduits cylindriques sont les plus répandus dans l'industrie, comparativement aux écoulements dans les conduits à plaques parallèles. Une étude détaillée des écoulements fluides dans un conduit cylindrique est nécessaire.

Dans ce chapitre, nous allons résoudre analytiquement les équations qui régissent l'écoulement fluide dans un conduit cylindrique par la méthode GITT en comparant avec l'écoulement entre deux plaques parallèles.

3.2. Description du problème

Nous considérons ici la convection forcée turbulente à l'intérieur d'un conduit cylindrique, parcourue par un écoulement fluide complètement établi. La température à l'entrée varie périodiquement dans le temps (fig.3.1). La conduction transversale (suivant r) dans la paroi est prise en considération.

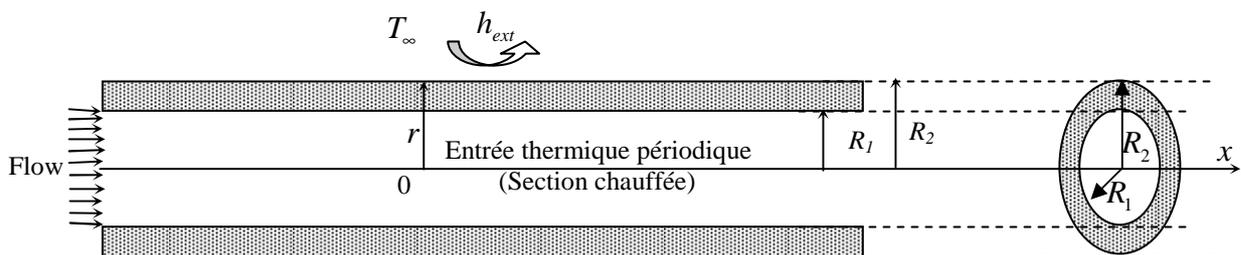


Fig.3.1 : Géométrie du conduit considéré.

3.3. Formulation mathématique

Région fluide :

$$\frac{\partial T_f(x, r, t)}{\partial t} + u(r) \frac{\partial T_f(x, r, t)}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r(\alpha_f + \varepsilon_h) \frac{\partial T_f(x, r, t)}{\partial r} \right) \quad 0 < r < R_1, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (3.1a)$$

$$T_f(0, r, t) = T_\infty + \Delta T \exp(i\omega t) \quad 0 \leq r \leq R_1, \quad t > 0 \quad (3.1b)$$

$$\left. \frac{\partial T_f(x, r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (3.1c)$$

Région solide :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_s(x, r, t)}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial T_s(x, r, t)}{\partial t} \quad R_1 < r < R_2, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (3.1d)$$

$$h_{ext}(T_s(x, r, t) - T_\infty) = -k_s \frac{\partial T_s(x, r, t)}{\partial r}, \quad r = R_2 \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (3.1e)$$

Interface solide fluide :

$$k_f \frac{\partial T_f(x, r, t)}{\partial r} = k_s \frac{\partial T_s(x, r, t)}{\partial r}, \quad r = R_1 \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (3.1f)$$

$$T_f(x, r, t) = T_s(x, r, t), \quad r = R_1 \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (3.1g)$$

En introduisant les paramètres adimensionnels :

$$\eta = \frac{r}{R_1}, \quad \xi = \frac{(x/D_e)(D_e/R_1)^2}{\text{Re Pr}}, \quad \tau = \frac{t\alpha_f}{R_1^2}, \quad \Omega = \frac{\omega R_1^2}{\alpha_f}, \quad \text{Bi}_{ext} = \frac{h_{ext} R_1}{k_s}, \quad R^* = \frac{R_2}{R_1}, \quad \gamma = \frac{k_s}{k_f},$$

$$\Gamma = \frac{\alpha_f}{\alpha_s}, \quad \beta_s = (R_2 - R_1) \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha_s}}, \quad \varepsilon(\eta) = 1 + \frac{\varepsilon_h}{\alpha_f}, \quad a^+ = \frac{(\rho C_p)_f \times R_1}{(\rho C_p)_p \times (R_2 - R_1)},$$

$$W(\eta) = \frac{u(r)}{u_m}, \quad \theta_f(\xi, \eta, \tau) = \frac{T_f(x, r, t) - T_\infty}{\Delta T}, \quad \theta_s(\xi, \eta, \tau) = \frac{T_s(x, r, t) - T_\infty}{\Delta T},$$

Le problème s'écrit sous forme adimensionnelle :

Région fluide :

$$\frac{\partial \theta_f(\xi, \eta, \tau)}{\partial \tau} + W(\eta) \frac{\partial \theta_f(\xi, \eta, \tau)}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \varepsilon(\eta) \frac{\partial \theta_f(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta} \right) \quad 0 < \eta < 1, \quad \xi > 0, \quad \tau > 0 \quad (3.2a)$$

$$\theta_f(0, \eta, \tau) = \exp(i\Omega \tau), \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad \tau > 0 \quad (3.2b)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_f(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \xi > 0, \quad \tau > 0 \quad (3.2c)$$

Région solide :

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta_s(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta} \right) = \Gamma \frac{\partial \theta_s(\xi, \eta, \tau)}{\partial \tau} \quad 1 < \eta < R^*, \quad \xi > 0, \quad t > 0 \quad (3.2a)$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial \eta} = -Bi_{ext} \theta_s, \quad \eta = R^*, \quad \xi > 0, \quad \tau > 0 \quad (3.2b)$$

Interface solide fluide :

$$\frac{\partial \theta_f(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta} = \gamma \frac{\partial \theta_s(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta}, \quad \eta = 1, \quad \xi > 0, \quad \tau > 0 \quad (3.2d)$$

$$\theta_f(\xi, \eta, \tau) = \theta_s(\xi, \eta, \tau), \quad \eta = 1, \quad \xi > 0, \quad \tau > 0 \quad (3.2e)$$

Comme le régime périodique est établi, les températures dans le fluide et dans la paroi solide sont écrites en notation complexes tels que :

$$\begin{aligned} \theta_f(\xi, \eta, \tau) &= \tilde{\theta}_f(\xi, \eta) \exp(i\Omega \tau) \\ \theta_s(\xi, \eta, \tau) &= \tilde{\theta}_s(\xi, \eta) \exp(i\Omega \tau) \end{aligned} \quad (3.3)$$

En introduisant l'expression (3.3) dans le système (3.2), on obtient le système :

Région fluide :

$$W(\eta) \frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \varepsilon(\eta) \frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) - i\Omega \tilde{\theta}_f(\xi, \eta) \quad 0 < \eta < 1, \quad \xi > 0 \quad (3.4a)$$

$$\tilde{\theta}_f(0, \eta) = 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (3.4b)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \xi > 0, \quad (3.4c)$$

Région solide :

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \tilde{\theta}_s(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) = 2i \left(\frac{\beta_s}{R^* - 1} \right)^2 \tilde{\theta}_s(\xi, \eta) \quad 1 < \eta < R^*, \quad \xi > 0, \quad (3.4d)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}_s(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -Bi_{ext} \tilde{\theta}_s(\xi, \eta), \quad \eta = R^*, \quad \xi > 0, \quad (3.4e)$$

Interface solide fluide :

$$\frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \gamma \frac{\partial \tilde{\theta}_s(\xi, \eta)}{\partial \eta}, \quad \eta = 1, \quad \xi > 0, \quad (3.4f)$$

$$\tilde{\theta}_f(\xi, \eta) = \tilde{\theta}_s(\xi, \eta), \quad \eta = 1, \quad \xi > 0, \quad (3.4g)$$

3.4. Méthode de résolution

En introduisant le paramètre complexe $\tilde{\beta}_s = \beta_s(1-i)$, la distribution de température dans le solide est mentionnée en annexe (2). La distribution de température dans la veine fluide est évaluée avec la résolution du système suivant :

$$W(\eta) \frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \varepsilon(\eta) \frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) - i\Omega \tilde{\theta}_f(\xi, \eta) \quad 0 < \eta < 1, \quad \xi > 0 \quad (3.5a)$$

$$\tilde{\theta}_f(0, \eta) = 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (3.5b)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \xi > 0, \quad (3.5d)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \tilde{H} \tilde{\theta}_f(\xi, \eta) = 0, \quad \eta = 1, \quad \xi > 0, \quad (3.5e)$$

Le paramètre complexe \tilde{H} intègre le rôle de la paroi sur l'écoulement. Il est exprimé en annexe (2). Il s'écrit en forme générale :

$$\tilde{H} = R_H + iG_H$$

En utilisant la Technique de Transformée Intégrale Généralisée (GITT). Le problème auxiliaire aux valeurs propres est obtenu à partir du système complexe original (3.5) :

$$\frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \varepsilon(\eta) \frac{d\psi(\mu_k, \eta)}{d\eta} \right) + \mu_k^2 W(\eta) \psi(\mu_k, \eta) = 0 \quad 0 < \eta < 1 \quad (3.6a)$$

$$\left. \frac{d\psi(\mu_k, \eta)}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \eta = 0, \quad (3.6b)$$

$$\frac{\partial \psi(\mu_k, \eta)}{\partial \eta} + R_H \psi(\mu_k, \eta) = 0, \quad \eta = 1, \quad (3.6c)$$

avec :

$$\text{Inversion : } \quad \tilde{\theta}_f(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{N_k^{1/2}} \psi(\mu_k, \eta) \bar{\theta}_k(\xi) \quad (3.7a)$$

$$\text{Transformée: } \quad \bar{\theta}_k(\xi) = \int_0^1 \eta W(\eta) \frac{\psi(\mu_k, \eta)}{N_k^{1/2}} \tilde{\theta}_f(\xi, \eta) d\eta \quad (3.7b)$$

$$\text{Normalisation : } \quad N_k = \int_0^1 \eta W(\eta) [\psi(\mu_k, \eta)]^2 d\eta \quad (3.7c)$$

En multipliant l'équation (3.5a) par le terme :

$$\int_0^1 \eta \frac{\psi(\mu_k, \eta)}{N_k^{1/2}} d\eta. \quad (3.8)$$

Et en utilisant les conditions aux limites (3.6c) et (3.5e), on abouti au système différentielle ci-dessous :

$$\frac{d\bar{\theta}_k(\xi)}{d\xi} + \mu_k^2 \bar{\theta}_k(\xi) + i\Omega \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^* \bar{\theta}_j(\xi) = 0 \quad (3.9a)$$

avec

$$a_{kj}^* = a_{jk}^* = \frac{1}{(N_k N_j)^{1/2}} \left(\frac{\varepsilon(1) \psi(\mu_k, 1) \psi(\mu_j, 1) G_H}{\Omega} + \int_0^1 \eta \psi(\mu_k, \eta) \psi(\mu_j, \eta) d\eta \right) \quad (3.9b)$$

La condition d'entrée est donnée par :

$$\bar{\theta}_k(0) = f_k = \int_0^1 \eta W(\eta) \frac{\psi(\mu_k, \eta)}{N_k^{1/2}} d\eta \quad (3.9c)$$

En appliquant les mêmes étapes que dans le chapitre précédent, nous arriverons à la solution finale :

$$\theta_f(\xi, \eta, \tau) = A(\xi, \eta) \exp\{i[\Omega \tau + \phi(\xi)]\} \quad (3.10a)$$

$$q_w = A_f(\xi) \exp\{i[\Omega \tau + \phi_f(\xi)]\} \quad (3.10c)$$

$$\theta_b(\xi, \tau) = A_b(\xi) \exp\{i[\Omega \tau + \phi_b(\xi)]\} \quad (3.10d)$$

$A(\xi, \eta)$ et $\phi(\xi)$ sont respectivement l'amplitude et le déphasage des températures et du flux thermique à la paroi.

3.5. Résultats et commentaires

- **Influence de la géométrie des conduits (effets de a^+)**

Les figures (3.2) et (3.3) montrent respectivement, l'évolution des amplitudes et déphasages de la température moyenne le long des conduits (plaques parallèles et conduit cylindrique) pour différentes valeurs de a^+ avec $Re = 10^5$, $\Omega = 0.1$ et $Bi_{ext} = 0$. On remarque que pour des valeurs de a^+ élevées, la géométrie du conduit n'a quasiment aucun effet sur le l'amortissement de la température de mélange. Lorsque a^+ diminue, l'amortissement est beaucoup plus important dans la configuration cylindrique que dans le cas de deux plaques parallèles. Pour le déphasage, notons que ce dernier est beaucoup plus important dans le tube cylindrique.

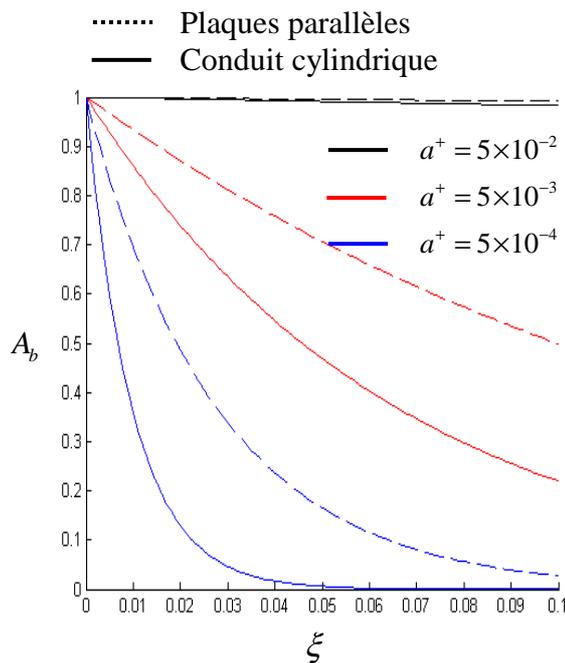


Fig. 3.2 : Amplitude de la température moyenne pour différentes valeurs de a^+ , avec $\Omega = 0.1$, $Re = 10^5$ et $Bi_{ext} = 0$.

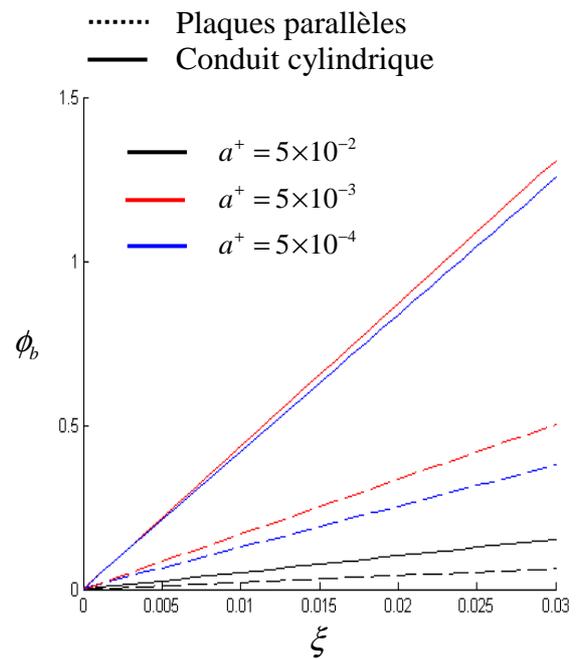


Fig. 3.3 : Déphasage de la température moyenne pour différentes valeurs de a^+ , avec $\Omega = 0.1$, $Re = 10^5$ et $Bi_{ext} = 0$.

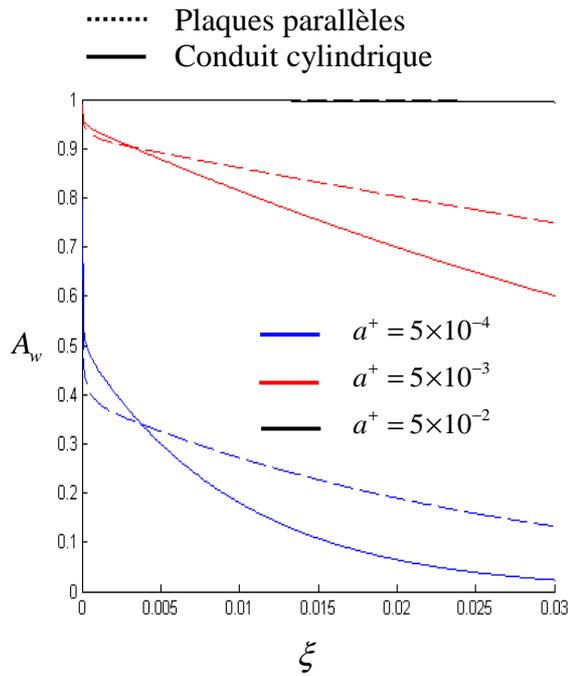


Fig. 3.4 : Amplitude de la température à l'interface pour différentes valeurs de a^+ avec $\Omega = 0.1$, $Re = 10^5$ et $Bi_{ext} = 0$.

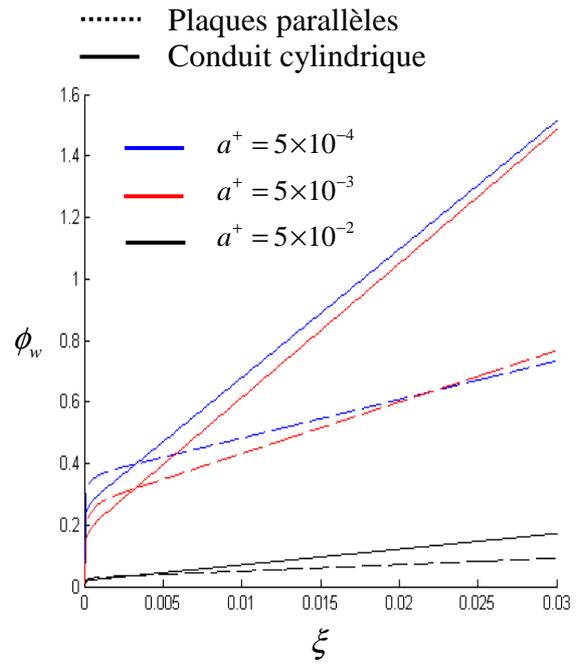


Fig. 3.5 : Déphasage de la température à l'interface pour différentes valeurs de a^+ avec $\Omega = 0.1$, $Re = 10^5$ et $Bi_{ext} = 0$.

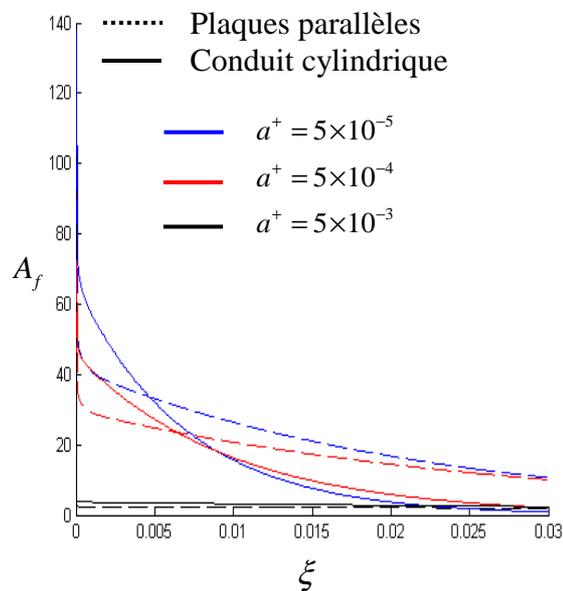


Fig. 3.6 : Amplitude du flux thermique à la paroi pour différentes valeurs de a^+ avec $\Omega = 0.1$, $Re = 10^5$ et $Bi_{ext} = 0$.

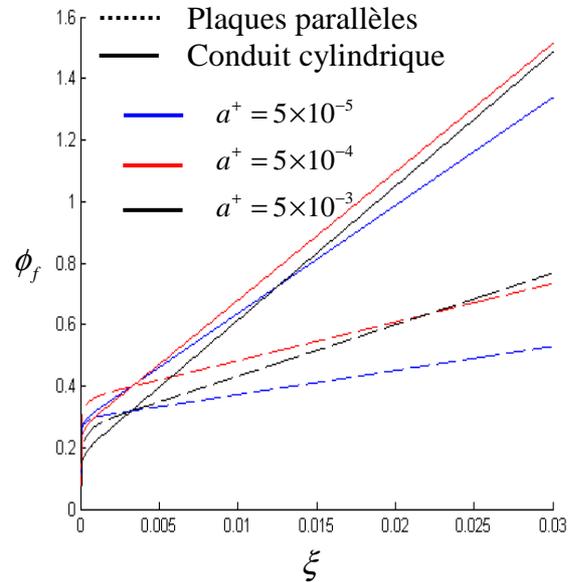


Fig. 3.7 : Déphasage du flux thermique à la paroi pour différentes valeurs de a^+ avec $\Omega = 0.1$, $Re = 10^5$ et $Bi_{ext} = 0$.

Les figures (3.4) et (3.5) montrent respectivement, l'évolution des amplitudes et déphasages de la température d'interface le long des conduits pour différentes valeurs de a^+ avec $Re = 10^5$, $\Omega = 0.1$ et $Bi_{ext} = 0$. On remarque que l'amortissement est plus important dans les plaques parallèles à l'entrée du conduit, mais loin de l'entrée, l'amortissement dans le tube cylindrique devient plus important. De plus, le conduit cylindrique présente à l'entrée un déphasage moins important. On note aussi que pour des valeurs élevées de a^+ la géométrie n'a pas une grande influence.

Les figures (3.6) et (3.7) montrent respectivement, l'évolution des amplitudes et déphasages du flux thermique à la paroi le long des conduits (plaques parallèles et conduit cylindrique) pour différentes valeurs de a^+ avec $Re = 10^5$, $\Omega = 0.1$ et $Bi_{ext} = 0$. L'influence de la géométrie sur le flux thermique est la même que celle notée pour la température d'interface, puisque le flux thermique à la paroi est fortement dépendant de la température d'interface.

- **Influence de la géométrie (effets du nombre de Reynolds)**

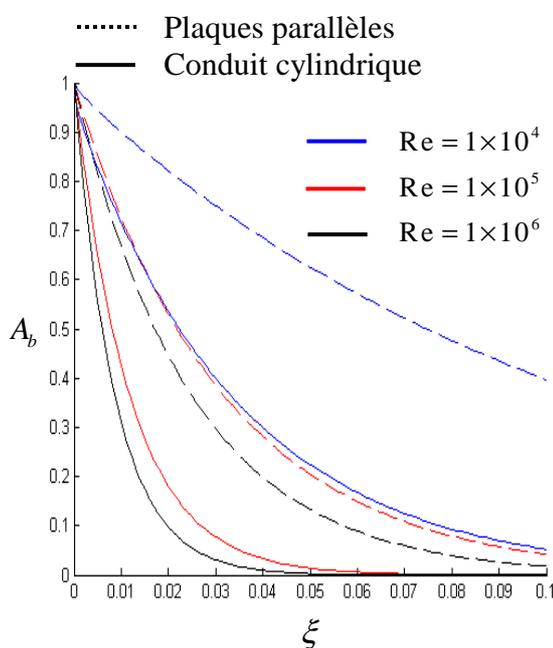


Fig. 3.8 : Amplitude de la température moyenne pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, avec $\Omega = 0.1$, $a^+ = 0.001$ et $Bi_{ext} = 0$.

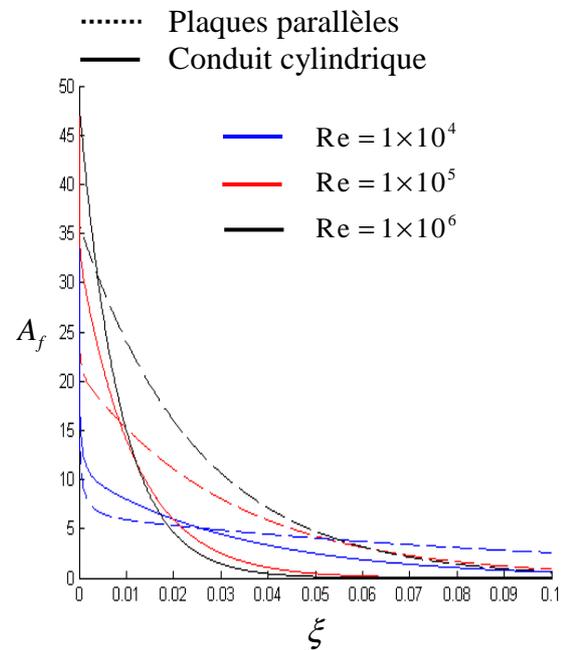


Fig. 3.9 : Amplitude du flux thermique à la paroi pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, avec $\Omega = 0.1$, $a^+ = 0.001$ et $Bi_{ext} = 1$.

Les figures (3.8) et (3.9) montrent respectivement, l'évolution des amplitudes et déphasages de la température moyenne et du flux thermique à la paroi pour différentes valeurs de nombre de Reynolds avec $a^+ = 0.001$, $\Omega = 0.1$ et $Bi_{ext} = 0$. Les effets de la géométrie sur l'amplitude de la température moyenne restent remarquables. Cependant, pour le cas du flux thermique à la paroi, et avec un nombre de Reynolds faible, la géométrie n'a pas une importante influence sur l'amplitude.

- **Influence de la géométrie en fonction du nombre de Biot (Bi_{ext})**

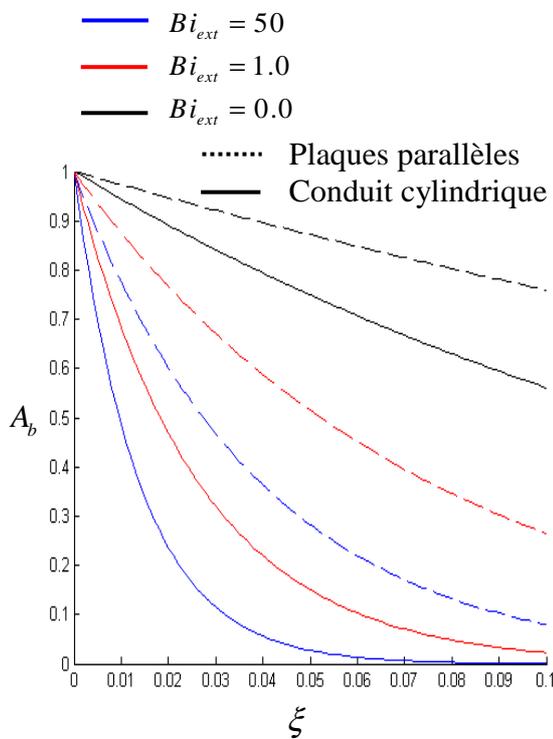


Fig. 3.10 : Amplitude de la température moyenne pour différentes valeurs du nombre de Biot, avec $\Omega = 0.1$, $Re = 10^5$ et $a^+ = 8.5 \times 10^{-3}$.

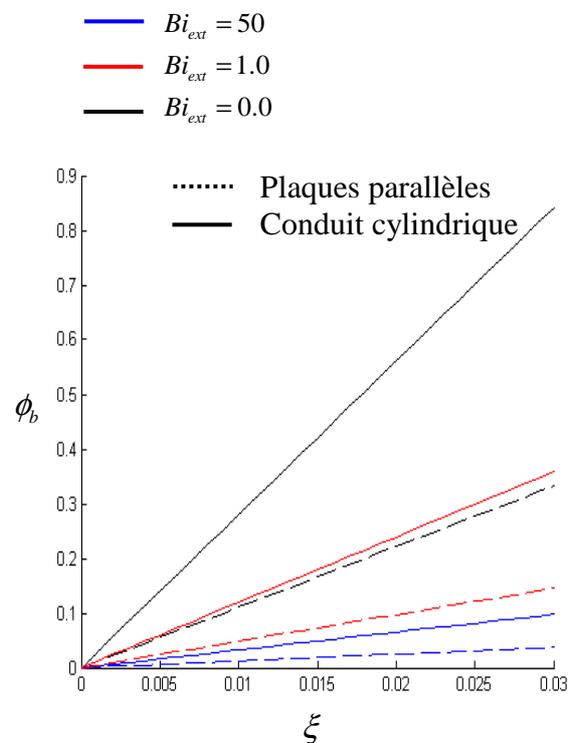


Fig. 3.11 : Déphasage de la température moyenne pour différentes valeurs du nombre de Biot, avec $\Omega = 0.1$, $Re = 10^5$ et $a^+ = 8.5 \times 10^{-3}$.

Les figures (3.10) et (3.11) montrent respectivement, l'évolution des amplitudes et déphasages de la température moyenne le long des conduits pour différentes valeurs du nombre de Biot (Bi_{ext}) avec $\Omega = 0.1$, $a^+ = 8.5 \times 10^{-3}$ et $Re = 10^5$. Les courbes montrent que les écarts

(amplitude et déphasage) entre les deux géométries ne semblent pas être influencés par le nombre de Biot.

- **Influence de la géométrie en fonction de Ω**

Les figures (3.12) et (3.13) montrent respectivement, l'évolution des amplitudes et déphasages de la température moyenne le long des conduits pour différentes valeurs de Ω . Pour une faible fréquence d'entrée ($\Omega \leq 0.01$), les températures moyennes sont presque de mêmes valeurs, mais avec l'accroissement de la fréquence d'entrée ($\Omega \geq 0.01$) les effets de la géométrie se font remarquer.

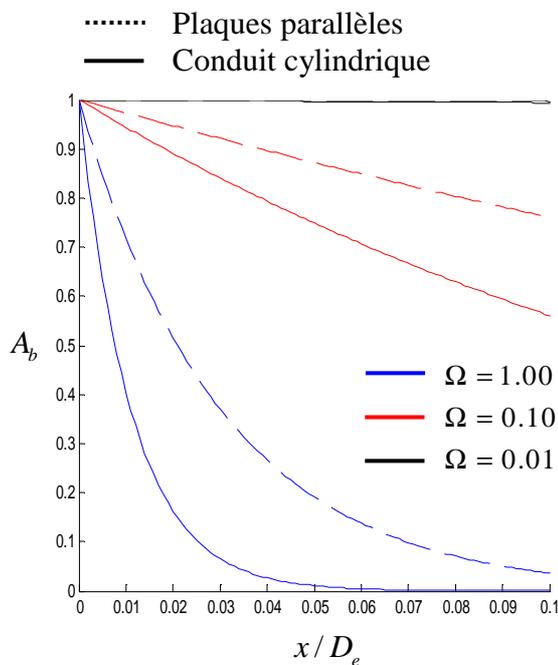


Fig. 3.12 : Amplitude de la température moyenne pour différentes valeurs de Ω , avec $Bi_{ext} = 0$, $a^+ = 8.5 \times 10^{-3}$ et $Re = 10^5$.

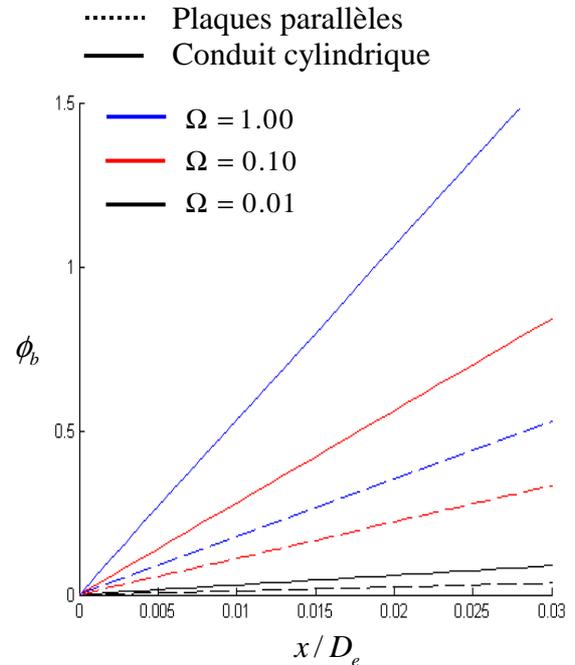


Fig. 3.13 : Déphasage de la température moyenne pour différentes valeurs de Ω , avec $Bi_{ext} = 0$, $a^+ = 8.5 \times 10^{-3}$ et $Re = 10^5$.

3.6. Conclusion

L'objectif principale de ce chapitre est de voir l'influence et les effets de la géométrie du conduit sur la réponse du signal thermique. Nous retenons que :

- l'amortissement et le déphasage sont beaucoup plus importants dans la configuration cylindrique que dans le cas du conduit à deux plaques parallèles.
- Le rôle de la géométrie n'est pas fortement influencé par le nombre de Reynolds ainsi que le nombre de Biot.
- Les écarts en amplitude et en phase le long du conduit sont plus importants pour les petites valeurs du rapport des capacités thermiques a^+ , Ce constat est plus visible pour la température du mélange (cf. fig. 3.2 et 3.3). Inversement les grandes valeurs de Ω , favorisent l'augmentation des écarts (amplitude et déphasage) entre les deux géométries plane et cylindrique.

Chapitre 4 :

Etude analytique du modèle quasi-stationnaire

4.1. Introduction

Le fonctionnement des équipements thermiques est souvent simulé dans la pratique par des modèles simplifiés faisant intervenir des corrélations d'origine expérimentales, valable en régime permanent de fonctionnement. L'intérêt de ces modèles est de simplifier la résolution analytique du problème. L'utilisation de ces modèles pour la modélisation des transferts thermoconvectifs en régime instationnaire ne peut se faire sans précautions [12].

Le coefficient d'échange h_{int} tiré des corrélations expérimentales dépend de :

- La nature du régime d'écoulement (turbulent ou laminaire).
- La géométrie du canal (plane, cylindrique ou autre).
- La nature du fluide considéré (eau, gaz, liquide métal, etc.).
- Les conditions thermiques à la paroi (flux constant, température constante, etc.).

On propose donc, dans ce qui suit, d'envisager la possibilité d'extension du concept classique du coefficient d'échange (modèle quasi-stationnaire) pour le cas d'un écoulement fluide turbulent dans un conduit (cylindrique ou plan) en régime périodique établi.

4.2. description

Le même problème traité dans le chapitre précédent sera résolu dans cette partie avec l'approche quasi-stationnaire (QSA) qui utilise un coefficient de transfert de chaleur constant à l'interface solide fluide.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \theta_f(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta} = \frac{Nu_{\text{int}}}{2^{2-m}} (\theta_f(\xi, 1, \tau) - \theta_b(\xi, \tau)) \\ Nu_{\text{int}} = 2^{2-m} \frac{h_{\text{int}} R_1}{k_S} \\ Bi_{\text{int}} = \frac{Nu_{\text{int}}}{\gamma 2^{2-m}} \end{array} \right. \quad \eta = 1, \xi > 0, \tau > 0 \quad (4.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m=0: \text{ plaques parallèles} \\ m=1: \text{ conduit cylindrique} \end{array} \right.$$

4.3. Formulation mathématique

Le problème sous forme adimensionnelle s'écrit :

$$\frac{\partial \theta_b(\xi, \eta, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta_b(\xi, \eta, \tau)}{\partial \xi} = \frac{Nu_{\text{int}}}{2^{2-2m}} (\theta_f(\xi, \eta, \tau)_{\eta=1} - \theta_b(\xi, \tau)) \quad \xi > 0, \tau > 0 \quad (4.2a)$$

$$\theta_b(0, \tau) = \exp(i\Omega \tau) \quad \xi = 0, \tau > 0 \quad (4.2b)$$

Région solide :

$$\frac{1}{\eta^m} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta^m \frac{\partial \theta_s(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta} \right) = \Gamma \frac{\partial \theta_s(\xi, \eta, \tau)}{\partial \tau} \quad 1 < \eta < R^*, \xi > 0, t > 0 \quad (4.2c)$$

$$\frac{\partial \theta_s(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta} = -Bi_{\text{ext}} \theta_s(\xi, \eta, \tau), \quad \eta = R^*, \xi > 0, \tau > 0 \quad (4.2d)$$

Interface solide fluide :

$$\frac{\partial \theta_f(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta} = Bi_{\text{int}} (\theta_f(\xi, \eta, \tau) - \theta_b(\xi, \tau)) \quad \eta = 1, \xi > 0, \quad (4.2e)$$

En introduisant les températures complexes :

$$\begin{cases} \theta_b(\xi, \tau) = \tilde{\theta}_b(\xi) \exp(i\Omega \tau), \\ \theta_s(\xi, \eta, \tau) = \tilde{\theta}_s(\xi, \eta) \exp(i\Omega \tau) \end{cases} \quad (4.3)$$

Le système d'équation devient:

Région fluide :

$$i\Omega \tilde{\theta}_b(\xi) + \frac{\partial \tilde{\theta}_b(\xi)}{\partial \xi} = \frac{Nu_{\text{int}}}{2^{2-2m}} (\tilde{\theta}_f(\xi, \eta)_{\eta=1} - \tilde{\theta}_b(\xi)) \quad 1 < \eta < R^*, \xi > 0, \quad (4.4a)$$

$$\tilde{\theta}_b(0) = 1 \quad \xi = 0, \quad (4.4b)$$

Région solide :

$$\frac{1}{\eta^m} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta^m \frac{\partial \tilde{\theta}_s(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) = 2i \left(\frac{\beta_s}{R^{*2} - 1} \right)^2 \tilde{\theta}_s(\xi, \eta), \quad 1 < \eta < R^*, \xi > 0, \quad (4.4c)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}_s(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -Bi_{\text{ext}} \tilde{\theta}_s(\xi, \eta), \quad \eta = R^*, \xi > 0, \quad (4.4d)$$

Interface solide fluide :

$$\frac{\partial \tilde{\theta}_f(\xi, \eta)}{\partial \eta} = Bi_{\text{int}} (\tilde{\theta}_f(\xi, \eta) - \tilde{\theta}_b(\xi)), \quad \eta = 1, \xi > 0, \quad (4.4e)$$

La distribution de la température moyenne est obtenue par :

$$\tilde{\theta}_b(\xi) = \exp \left[- \int_0^{\xi} \sigma(\xi) d\xi \right] \quad (4.5a)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \sigma(\xi) = i\Omega + \frac{Nu_{int}(\xi)}{2^{2-2m}} (1 - \vartheta(\eta = 1)) \\ \sigma(\xi) = \alpha + i\beta \end{cases} \quad (4.5b)$$

La solution finale du problème est donnée par :

$$\theta_b(\xi, \tau) = A_b(\xi) \sin(\Omega\tau - \phi_b(\xi)) \quad (4.6a)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} A_b(\xi) = \exp(-\alpha \xi) \\ \phi_b(\xi) = \beta \xi \end{cases} \quad (4.6b)$$

La distribution de température dans la région fluide est exprimée par :

$$\tilde{\theta}_f(\xi, \eta) = \tilde{\theta}_b(\xi) \times \vartheta(\eta), \quad (4.7)$$

La fonction $\vartheta(\eta)$ est donnée dans le cas des plaques parallèles ($m = 0$) tel que :

$$\vartheta(\eta) = \varphi(Bi_{int}, \tilde{\beta}_s) \left[\cos \left(\frac{\tilde{\beta}_s \eta}{R^* - 1} \right) + \frac{G}{F} \sin \left(\frac{\tilde{\beta}_s \eta}{R^* - 1} \right) \right] \quad (4.8a)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} G = \frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} \sin \left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1} \right) - Bi_{ext} \cos \left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1} \right) \\ F = \frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} \cos \left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1} \right) + Bi_{ext} \sin \left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1} \right) \\ \vartheta(Bi_{int}, \tilde{\beta}_s) = \frac{Bi_{int}}{\sin \left(\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} \right) \left[\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} + Bi_{int} \frac{G}{F} \right] + \sin \left(\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} \right) \left[Bi_{int} - \frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} \frac{G}{F} \right]} \end{cases} \quad (4.8b)$$

Dans le cas du conduit cylindrique ($m = 1$) la fonction $\vartheta(\eta)$ devient:

$$\vartheta(\eta) = \varphi(Bi_{int}, \tilde{\beta}_s) \left[J_0 \left(\frac{\tilde{\beta}_s \eta}{R^* - 1} \right) + \frac{G}{F} Y_0 \left(\frac{\tilde{\beta}_s \eta}{R^* - 1} \right) \right] \quad (4.9a)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} G = \frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} J_1 \left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1} \right) - Bi_{ext} J_0 \left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1} \right) \\ F = Bi_{ext} Y_0 \left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1} \right) - \frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} Y_1 \left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1} \right) \\ \vartheta(Bi_{int}, \tilde{\beta}_s) = \frac{Bi_{int}}{\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} \right) \left[J_1 \left(\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} \right) + \frac{G}{F} Y_1 \left(\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} \right) \right] + Bi_{int} \left[J_0 \left(\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} \right) + \frac{G}{F} Y_0 \left(\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} \right) \right]} \end{cases} \quad (4.9b)$$

4.4. Etude des cas limites

- **Flux nul et température imposée à la paroi**

Le coefficient d'échange externe h_{ext} caractérise les échanges paroi-milieu extérieur, la condition (2.3e) peut se ramener à une condition de flux nul, si ces échanges sont minimisés par calorifugeage de la paroi externe ($h_{ext} = 0$). Le rapport des fonctions $\frac{G}{F}$ contenu dans la fonction $\vartheta(\xi)$ devient alors :

Pour m=0 :

$$\frac{G}{F} = \tan \left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1} \right). \quad (4.10a)$$

Pour m=1 :

$$\frac{G}{F} = \frac{J_1 \left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1} \right)}{Y_1 \left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1} \right)}. \quad (4.10b)$$

La condition de température imposée correspond à une conductivité thermique très petite de la paroi du conduit. Nous donnons, pour les deux configurations géométriques, les expressions du rapport $\frac{G}{F}$:

Pour m=0 :

$$\frac{G}{F} = \cot\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right). \quad (4.10c)$$

Pour m=1 :

$$\frac{G}{F} = \frac{J_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right)}{Y_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right)}. \quad (4.10b)$$

- **Paroi mince et/ou capacité thermique du conduit très importante**

Pour une épaisseur mince et une capacité thermique de paroi très importante, la fonction $\sigma(\xi)$ devient :

Pour m=0 :

$$\sigma(\xi) = i\delta + \frac{Nu_{\text{int}}}{4} \left[\frac{\tilde{\beta}_s (1 - R^*) + Bi_{\text{ext}} (1 - R^*)^2 + \tilde{\beta}_s^2 Bi_{\text{ext}} R^*}{\tilde{\beta}_s^2 (1 - R^*) + Bi_{\text{ext}} (1 - R^*)^2 + \tilde{\beta}_s^2 Bi_{\text{ext}} R^* + Bi_{\text{int}} (1 - R^*)^2} \right] \quad (4.11a)$$

Si de plus la paroi est isolée de l'extérieur ($Bi_{\text{ext}} = 0$), l'expression $\tilde{\beta}_s^2 Bi_{\text{ext}} R^*$ devient négligeable devant les autres termes de l'équation (4.11a). La fonction $\sigma(\xi)$ s'écrit alors :

$$\sigma(\xi) = i\delta + \frac{Nu_{\text{int}}}{4} \left[\frac{\gamma Bi_{\text{ext}} - \gamma \frac{\tilde{\beta}_s^2}{R^* - 1}}{\gamma Bi_{\text{ext}} - \gamma \frac{\tilde{\beta}_s^2}{R^* - 1} + \frac{Nu_{\text{int}}}{4}} \right] \quad (4.11b)$$

Pour m=1 :

$$\sigma(\xi) = i\delta + Nu_{\text{int}} \left[\frac{\tilde{\beta}_s^2 (1 - R^*)(1 + R^*) + 2Bi_{\text{ext}} (1 - R^*)^2 R^* + \tilde{\beta}_s^2 Bi_{\text{ext}} R^* \ln\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right)}{\tilde{\beta}_s^2 (1 - R^*)(1 + R^*) + 2Bi_{\text{ext}} (1 - R^*)^2 + \tilde{\beta}_s^2 Bi_{\text{ext}} R^* \ln\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right) + 2Bi_{\text{int}} (1 - R^*)^2} \right] \quad (4.12a)$$

Pour une paroi mince $R^* \approx 1$, sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$, l'expression

$\tilde{\beta}^2 Bi_{ext} R^* \ln \left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1} \right)$ devient négligeable devant les autres termes de (4.12a) et la

fonction $\sigma(\xi)$ s'écrit :

$$\sigma(\xi) = i\delta + Nu_{int} \left[\frac{\gamma Bi_{ext} - \gamma \frac{\tilde{\beta}_s^2}{R^* - 1}}{\gamma Bi_{ext} - \gamma \frac{\tilde{\beta}_s^2}{R^* - 1} + \frac{Nu_{int}}{2}} \right] \quad (4.12b)$$

4.5. Résultats et commentaire

Dans le modèle quasi stationnaire développé ici, nous utilisons des corrélations extraites de la référence [23, 42]. Pour comparaison avec la méthode GITT, nous utilisons les résultats obtenus dans le chapitre 3.

Un balayage en fréquence du signal thermique d'entrée Ω entre les valeurs 0.05 et 5 est examiné.

- **Influence de la fréquence**

Dans les figures (4.2), (4.3), (4.4) et (4.5) nous présentons les variations de l'amplitude et de déphasage de la température moyenne pour $Re = 10^5$ et $a^+ = 8.5 \times 10^{-3}$ en comparant le modèle quasi-stationnaire et la méthode GITT pour les deux géométries de conduit. Ces figures révèlent que le rapprochement entre les deux modèles est net lorsque la fréquence d'entrée est petite ($\Omega = 0.05$). Contrairement au cas des grandes fréquences ($\Omega = 5$) les écarts en phase entre les deux modèles sont plus importants.

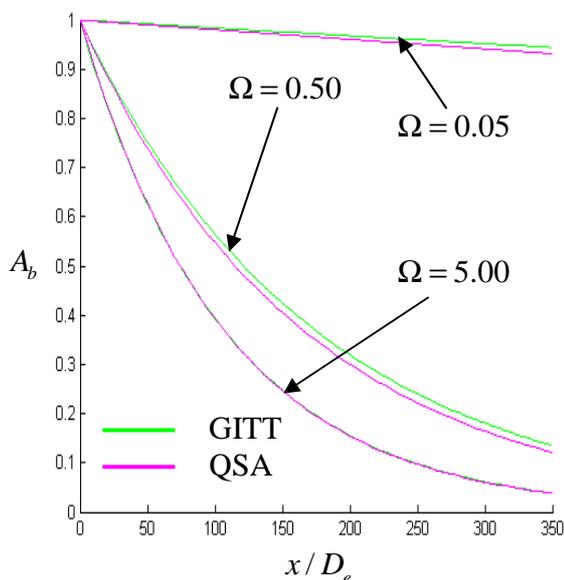


Fig. 4.2 : Amplitude de la température moyenne pour différentes valeurs de Ω le long des plaques parallèles, avec $Re = 10^5$, $a^+ = 8.5 \times 10^{-3}$ et $Bi_{ext} = 0$.

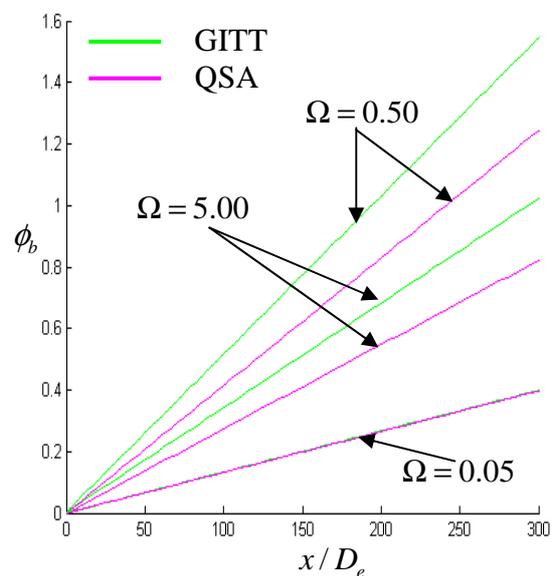


Fig. 4.3 : Déphasage de la température moyenne pour différentes valeurs de Ω le long des plaques parallèles, avec $Re = 10^5$, $a^+ = 8.5 \times 10^{-3}$ et $Bi_{ext} = 0$.

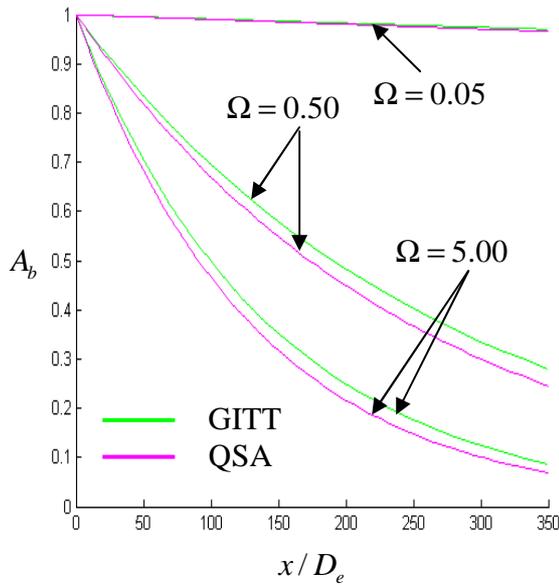


Fig. 4.4 : Variation de l'amplitude de température moyenne le long du conduit cylindrique pour divers valeurs de Ω avec $Re=10^5$, $Bi_{ext}=0$ et $a^+=8.5\times 10^{-3}$.

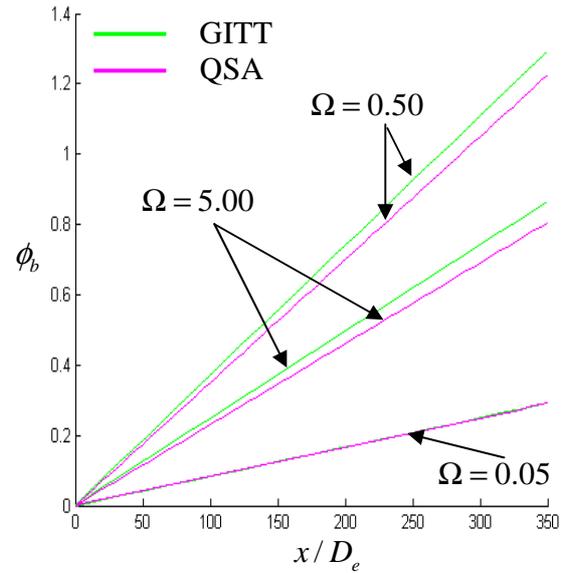


Fig. 4.5 : Variation du déphasage de température moyenne le long du conduit cylindrique pour divers valeurs de Ω avec $Re=10^5$, $Bi_{ext}=0$ et $a^+=8.5\times 10^{-3}$.

• **Influence de nombre de Reynolds**

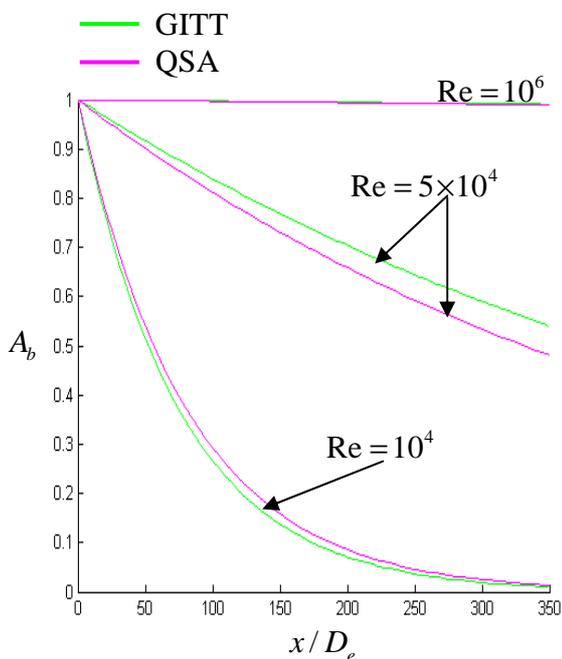


Fig. 4.6 : Amplitude de la température moyenne le long des plaques parallèles pour différents nombre de Reynolds, avec $\Omega=0.1$, $a^+=8.5\times 10^{-3}$ et $Bi_{ext}=0$.

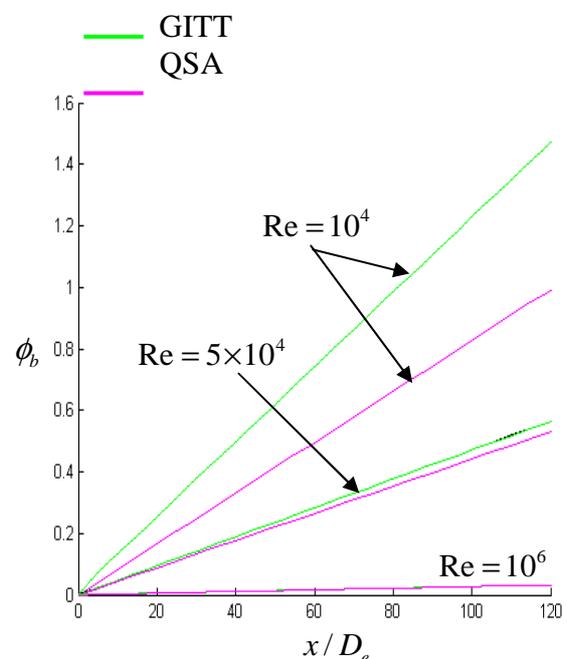


Fig. 4.7 : Déphasage de la température moyenne le long de des plaques parallèles pour différents nombre de Reynolds, avec $\Omega=0.1$, $a^+=8.5\times 10^{-3}$ et $Bi_{ext}=0$.

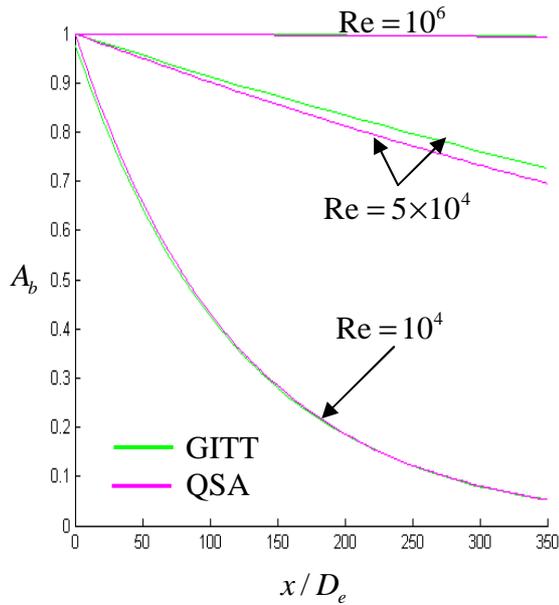


Fig. 4.8 : Amplitude de la température moyenne le long du conduit cylindrique pour différents nombre de Reynolds, avec $\Omega = 0.1$, $a^+ = 8.5 \times 10^{-3}$ et $Bi_{ext} = 0$.

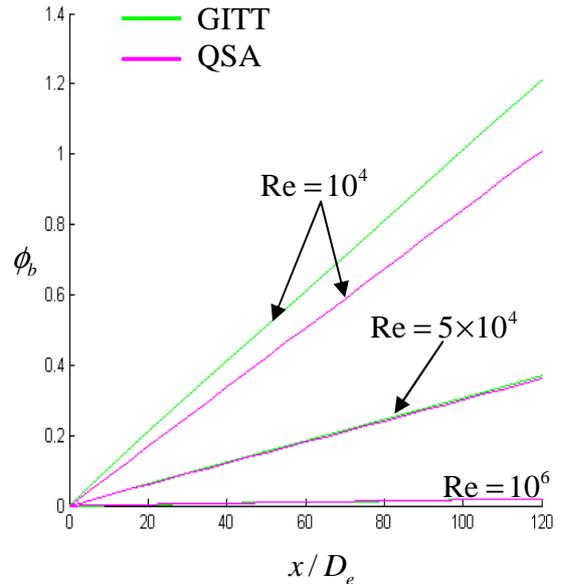


Fig. 4.9 : Déphasage de la température moyenne le long du conduit cylindrique pour différents nombre de Reynolds, avec $\Omega = 0.1$, $a^+ = 8.5 \times 10^{-3}$ et $Bi_{ext} = 0$.

Les figures (4.6), (4.7), (4.8) et (4.9) présentent les variations de l'amplitude et de déphasage de la température moyenne le long des deux plaques parallèles et du conduit cylindriques respectivement, pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. La comparaison montre que le modèle quasi-stationnaire devient plus précis avec l'augmentation du nombre de Reynolds. On note que l'influence du nombre de Reynolds est plus remarquable sur le déphasage.

- **Influence de nombre de Biot**

Sur les figures (4.10), (4.11), (4.12) et (4.13) nous présentons les variations de l'amplitude et de déphasage de la température moyenne le long des deux plaques parallèles et conduit cylindriques respectivement, en montrant l'influence du terme qui définit les échanges thermo-convectifs vers l'extérieur (Bi_{ext}) sur la précision du modèle quasi-stationnaire. D'après ces figures, et pour les deux géométries, le nombre de Biot n'a quasiment aucune influence sur la précision du modèle quasi-stationnaire.

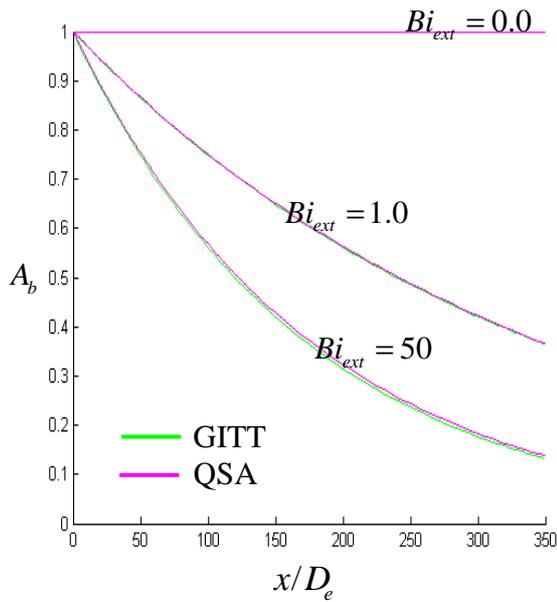


Fig. 4.10 : Amplitude de la température moyenne le long des plaques parallèles pour différentes valeurs de nombre de Biot, avec $\Omega = 0.1$, $a^+ = 5 \times 10^{-1}$ et $Re = 10^5$.

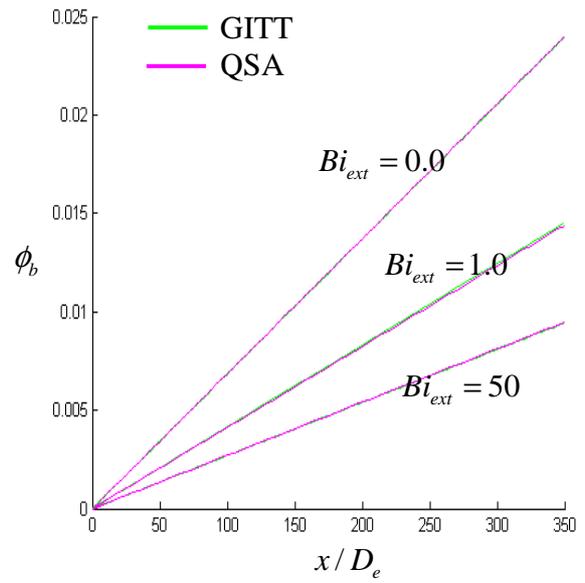


Fig. 4.11 : Déphasage de la température moyenne le long des plaques parallèles pour différentes valeurs de nombre de Biot, avec $\Omega = 0.1$, $a^+ = 5 \times 10^{-1}$ et $Re = 10^5$.

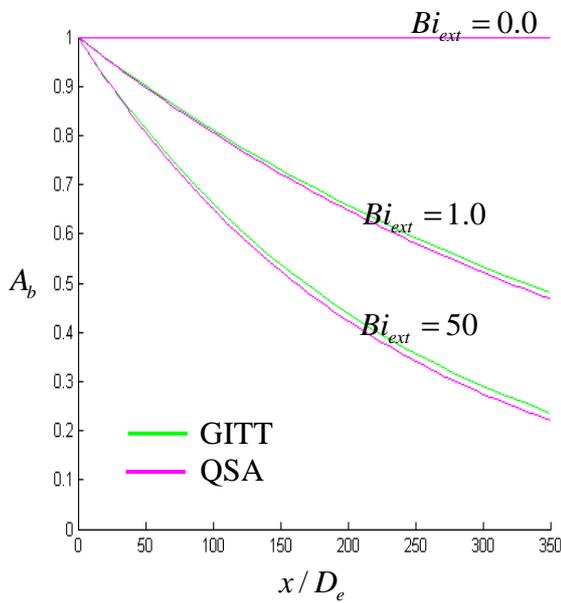


Fig. 4.12 : Amplitude de la température moyenne le long du conduit cylindrique pour différentes valeurs de nombre de Biot, avec $\Omega = 0.1$, $a^+ = 5 \times 10^{-1}$ et $Re = 10^5$.

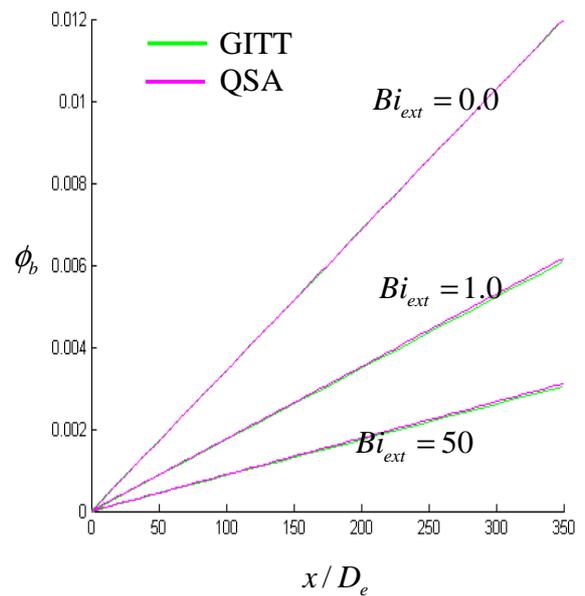


Fig. 4.13 : Déphasage de la température moyenne le long du conduit cylindrique pour différentes valeurs de nombre de Biot, avec $\Omega = 0.1$, $a^+ = 5 \times 10^{-1}$ et $Re = 10^5$.

• Coefficient de l'amortissement et Coefficient de déphasage

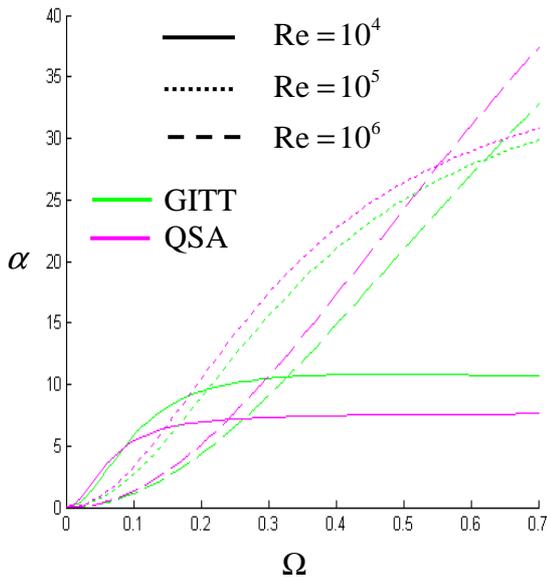


Fig. 4.14 : Evolution du coefficient d'amortissement en fonction de Ω , pour différents nombre de Reynolds (cas de deux plaques parallèles avec $a^+ = 8.5 \times 10^{-3}$).

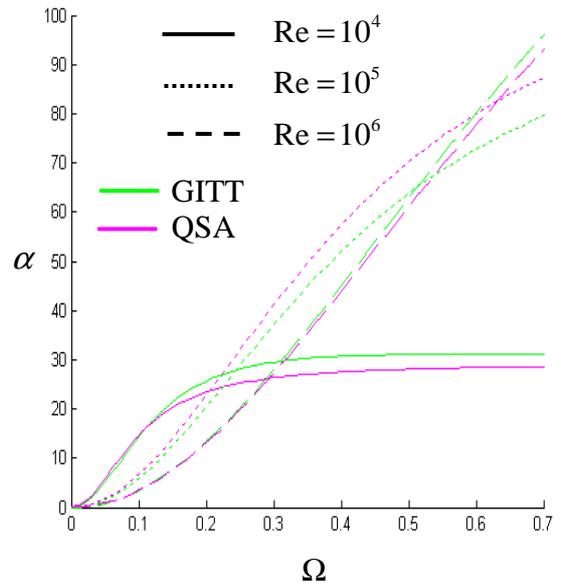


Fig. 4.15 : Evolution du coefficient d'amortissement en fonction de Ω , pour différents nombre de Reynolds (cas de conduit cylindrique avec $a^+ = 8.5 \times 10^{-3}$).

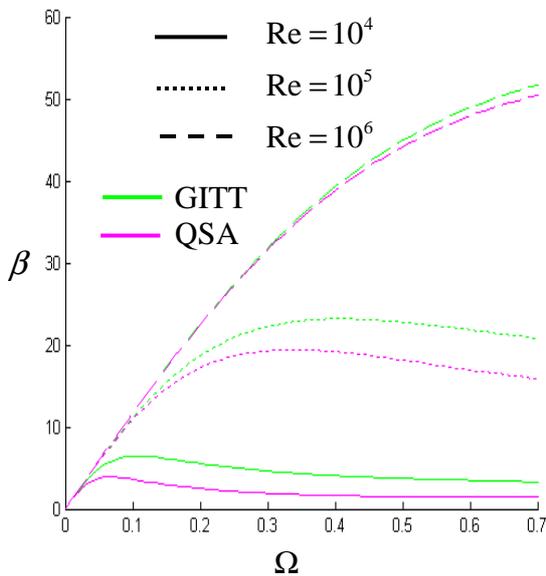


Fig. 4.16 : Evolution du coefficient de déphasage en fonction de Ω , pour différents nombre de Reynolds (cas de deux plaques parallèles avec $a^+ = 8.5 \times 10^{-3}$).

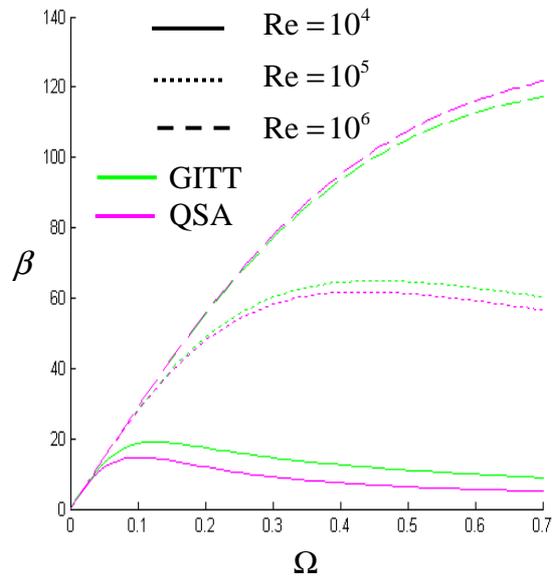


Fig. 4.17 : Evolution du coefficient de déphasage en fonction de Ω , pour différents nombre de Reynolds (cas de conduit cylindrique avec $a^+ = 8.5 \times 10^{-3}$).

Les figures (4.14) et (4.15) présentent le coefficient d'amortissement α en fonction de la fréquence d'entrée Ω pour les deux modèles quasi-stationnaires (QSA) et GITT, respectivement entre deux plaques parallèles et dans un conduit cylindrique. Notons que pour une faible valeur de Ω ($\Omega \leq 0.2$ et $Re = 10^6$), les résultats obtenus par QSA conviennent mieux avec ceux calculés avec la méthode GITT. De l'autre côté, pour une haute valeur de la fréquence d'entrée Ω ($\Omega \geq 0.2$ et $Re = 10^6$), l'erreur relative aura automatiquement augmentée.

Sur les figures (4.16) et (4.17), nous présentons le coefficient de déphasage β en fonction de la fréquence d'entrée Ω pour les deux modèles quasi-stationnaires (QSA) et GITT, respectivement entre deux plaques parallèles et dans un conduit cylindrique. Notons que le coefficient de déphasage a la même tendance que le coefficient d'amortissement pour les faibles et les hautes valeurs de la fréquence d'entrée Ω .

On remarque que la valeur limite de Ω avec laquelle l'erreur relative devient inacceptable, augmente avec l'augmentation du nombre de Reynolds.

- **Evolution temporelle de la température moyenne**

Les résultats de la distribution de la température moyenne obtenus par le modèle quasi-stationnaire (QSA) et la Technique de Transformée Intégrale Généralisée (GITT) sont présentés sur les figures (4.18) et (4.19) pour deux plaques parallèles et conduit cylindrique, ces figures révèlent que l'amplitude de la température moyenne diminue de façon monotone avec l'augmentation de la distance axiale.

De plus, les sommets des courbes consécutives sont espacés dans le temps, en découvrant un déphasage croissant avec l'accroissement de la distance axiale. Plus loin, l'inspection sur ces figures montre que les valeurs décroissantes du paramètre a^+ ont une influence décisive sur la diminution de l'amplitude et l'augmentations du déphasage.

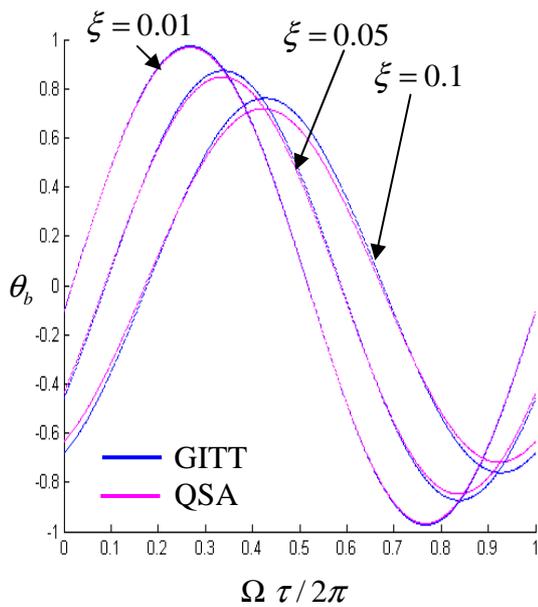


Fig. 4.18 : Température moyenne en fonction de temps entre deux plaques parallèles, pour différentes valeurs de ξ avec $\Omega = 0.1$, $a^+ = 8.5 \times 10^{-3}$ et $Re = 10^5$.

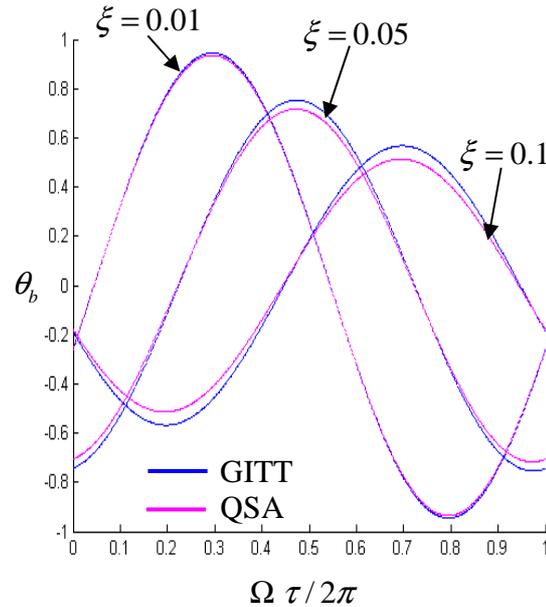


Fig. 4.19 : Température moyenne en fonction de temps dans le conduit cylindrique, pour différentes valeurs de ξ avec $\Omega = 0.1$, $a^+ = 8.5 \times 10^{-3}$ et $Re = 10^5$.

- **Evolution de nombre de Nusselt**

Finalement, sur les figures (4.20) et (4.21), nous présentons le nombre de Nusselt en fonction du temps en $x/De = 1$ respectivement entre deux plaques parallèles et dans un conduit cylindrique pour diverse valeurs de Ω . Quand la température moyenne et la température à la paroi ont les mêmes valeurs et le flux thermique est différent de zéro, le nombre de Nusselt tend vers l'infini. Quand $\theta_b < \theta(\eta = 1)$, le flux thermique est transféré de la paroi vers le fluide, et le nombre de Nusselt tend vers $+\infty$. Quand la température moyenne devient plus grande que la température à la paroi le flux thermique change de direction, et le nombre de Nusselt tend vers $-\infty$. D'autre part, nous remarquons que pour une faible fréquence ($\Omega = 0.01$), la partie horizontale de la courbe de Nusselt est ajustée avec le nombre de Nusselt à l'état stationnaire (ligne discrétisée) $Nu = 250$ et $Nu = 240$ respectivement pour plaques parallèles et conduit cylindrique. Pour les hautes fréquences d'entrée ($\Omega = 0.1 \div 1$), le nombre Nusselt instationnaire deviendra fortement dépendant du temps et le QSA devient inadéquat.

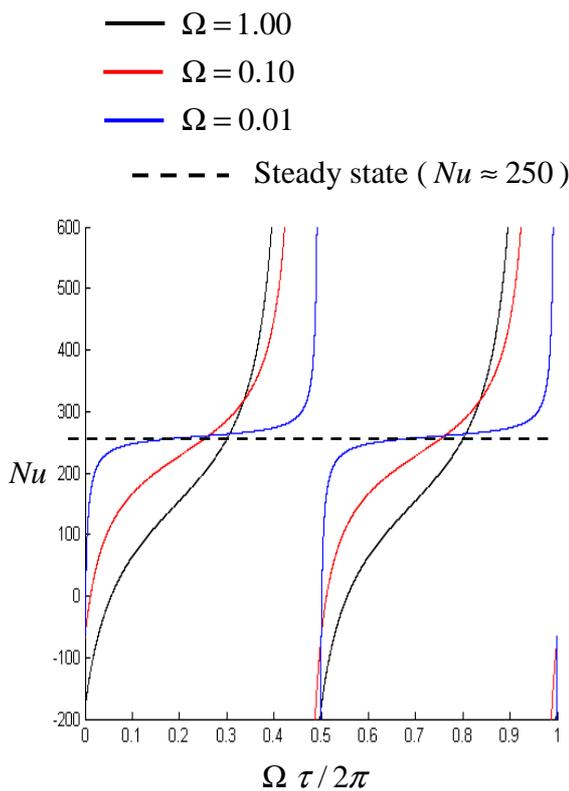


Fig. 4.20 : Nombre de Nusselt en fonction de temps entre deux plaques parallèles, pour différentes valeurs de Ω , avec $Re=10^5$, $x/D_e=1$, $a^+=8.5 \times 10^{-3}$ et $Bi_{ext}=1$.

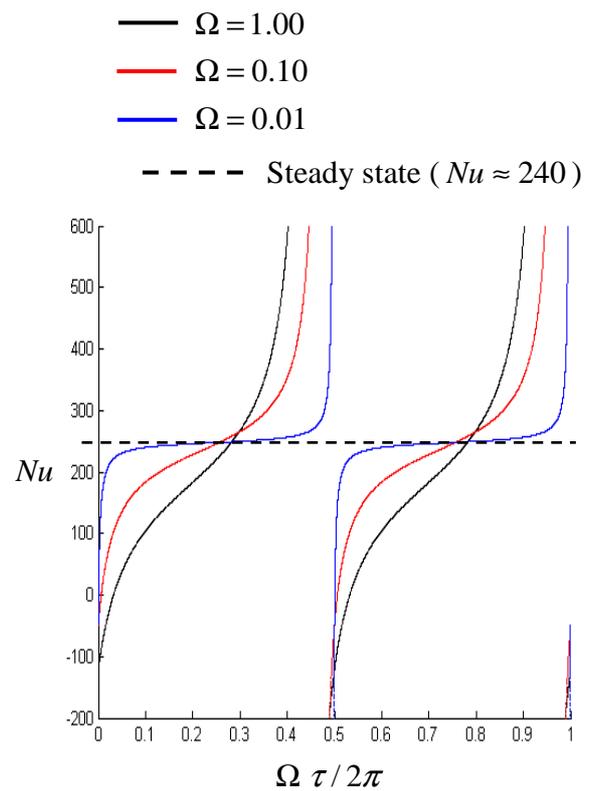


Fig. 4.21 : Nombre de Nusselt en fonction de temps dans le conduit cylindrique, pour différentes valeurs de Ω , avec $Re=10^5$, $x/D_e=1$, $a^+=8.5 \times 10^{-3}$ et $Bi_{ext}=1$.

4.6. Conclusion

Dans ce chapitre, le problème de transfert thermique a été étudié dans le cas de la convection forcée turbulente pour un écoulement fluide entre deux plaques parallèles et dans un conduit cylindrique avec une variation périodique de la température à l'entrée. La solution complète utilisant la Technique de Transformée Intégrale Généralisée (GITT) est développée et comparée avec l'approche quasi-stationnaire utilisant un coefficient de transfert thermique à l'interface fluide solide. La comparaison entre ces deux solutions montre que :

- Le modèle quasi-stationnaire devient plus précis avec l'augmentation du nombre de Reynolds.
- Le nombre de Biot (pertes vers l'extérieur) n'a quasiment aucune influence sur la précision du modèle quasi-stationnaire.

-
- Nous concluons que le modèle quasi-stationnaire ne peut approcher correctement, dans le cas d'un régime turbulent, la solution exacte que si la fréquence d'entrée est petite, ce qui correspond au régime quasi-permanent.

Chapitre 5 :

Simulation numérique d'un écoulement turbulent entre deux plaques
parallèles en régime périodique établi**5.1. Introduction**

La simulation numérique en mécanique des fluides a pour objectif la détermination des caractéristiques (températures, vitesses, pressions, flux de chaleur, etc....) d'un écoulement fluide dans diverses configurations. Cette discipline, en progrès continu depuis une cinquantaine d'années a atteint un stade de développement suffisamment avancé pour que l'ingénieur la considère, avec confiance, comme un moyen d'appréhender la réalité physique au même titre que les mesures acquises au cours d'essais expérimentaux. Dans la pratique des sciences physiques, on considère à de rares exceptions près, les milieux solides, liquides ou gazeux comme continus, c'est-à-dire que l'on néglige la structure atomique et moléculaire de la matière. Dans le cadre de cette hypothèse, l'écriture des grands principes de la physique (lois de mécanique, de la thermodynamique ou encore de l'électromagnétisme) prennent la forme d'équations aux dérivées partielles. Il est important donc de pouvoir résoudre les équations aux dérivées partielles qui gouvernent le fonctionnement des systèmes pour en avoir une meilleure compréhension et construire des outils de prédiction.

5.2. Equations gouvernantes**5.2.1. Équations moyennées**

Pour un écoulement turbulent, incompressible, bidimensionnel et instationnaire, les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie peuvent être écrites sous forme compacte comme suit :

Région fluide

$$\text{Continuité : } \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (5.1)$$

$$\text{Quantité de mouvement : } \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right) \quad (5.2)$$

$$\text{Energie : } \frac{\partial T_f}{\partial t} + \frac{\partial (u_j T_f)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_f \frac{\partial T_f}{\partial x_j} - \overline{u_j t} \right) \quad (5.3)$$

Région solide

$$\text{Energie : } \frac{\partial T_s}{\partial t} = \alpha_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial x_j^2} \quad (5.4)$$

5.2.2. Modèles de turbulence

Dans la présente simulation, nous avons utilisé le modèle $k-\varepsilon$ standard [50], les contraintes de Reynolds ($-\overline{u_i u_j}$) au nombre de six, qui apparaissent dans les équations de l'écoulement s'écrivent :

$$\overline{u_i u_j} = -\nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad (5.5)$$

$$\overline{u_i t} = -\frac{\nu_t}{\sigma_\theta} \frac{\partial T_f}{\partial x_i} \quad (5.6)$$

La viscosité turbulente ν_t , est donnée par :

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (5.7)$$

Ce terme doit faire l'objet d'une modélisation, dans laquelle l'énergie cinétique k et le taux de dissipation turbulente ε sont obtenus en basant sur le modèle $k-\varepsilon$ comme équations de transport, telles que :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P - \varepsilon \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (5.9)$$

P_k est le taux de génération de l'énergie cinétique turbulente, il s'écrit comme suit :

$$P_k = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Les constantes du modèle sont :

$$\begin{cases} \sigma_k = 1.0 \\ \sigma_\varepsilon = 1.3 \\ \sigma_\theta = 0.9 \end{cases} \quad \begin{cases} C_\mu = 0.09 \\ C_{\varepsilon 1} = 1.44 \\ C_{\varepsilon 2} = 1.92 \end{cases}$$

5.3. Méthodes numériques de simulation

5.3.1. Génération du maillage

Il existe plusieurs méthodes de génération du maillage, les plus utilisées sont les méthodes algébriques et elliptiques. A base de ces méthodes, plusieurs algorithmes sont présentés, le plus souvent sous forme de codes CFD. On peut citer à titre d'exemple : CFX-Mesh, CFX-Turbogrid (spécialisé en génération des maillages pour les applications de turbomachines), Gambit de Fluent Inc, Grid Gen,...etc.

L'utilisation de ces codes a rendue la phase de génération de maillage plus facile même pour des géométries complexes. Dans notre étude, les maillages utilisés sont générés par le code Gambit 2.3.16 de la firme Fluent Inc. C'est un mailleur généraliste, disposant d'outils de conception géométriques puissants.

5.3.2. Solveur

C'est le code de calcul utilisé pour résoudre un problème en mécanique des fluides. Son algorithme est basé sur l'une des formulations : volumes finis, éléments finis ou différences finis. Le progrès spectaculaire des calculateurs actuels a permit l'émergence de plusieurs codes de calcul développés par des firmes internationales ou par des laboratoires de recherches mondialement reconnus. On peut citer à titre d'exemple les codes suivants : **CFX** et **Ansys** d'Ansys.Inc, **Fluent** de FLUENT. Inc, **TurboFine** de Numeca, **TEAM** de l'UMIST, **STREAM** de Streamline Numerics Inc, **CANARI** de l'ONERA ...etc.

Dans notre étude, le code utilisé est Fluent 6.3.26 de Fluent. Inc, qui est un code CFD de choix pour les écoulements en géométrie complexes, adapter aux fluides incompressibles et compressibles, aux écoulements subsonique, transsonique et l'hyper sonique. Fluent permet de prédire avec une bonne précision les écoulements laminaires et turbulents, incluant différents modes de transfert de chaleur, les réactions chimiques et les écoulements multiphasiques.

5.3.3. Maillages

Les maillages utilisés dans la présente simulation sont générés par le code Gambit, ils consistent en maillages structurés composés de mailles quadrilatérales pour les deux domaines, fluide et solide. A fin de faciliter la simulation (réduction du temps et de l'espace mémoire), le domaine de calcul ne comportera que la moitié du conduit (condition de symétrie). Le nombre total de cellules du domaine fluide est 11250, et 6000 pour le domaine solide.

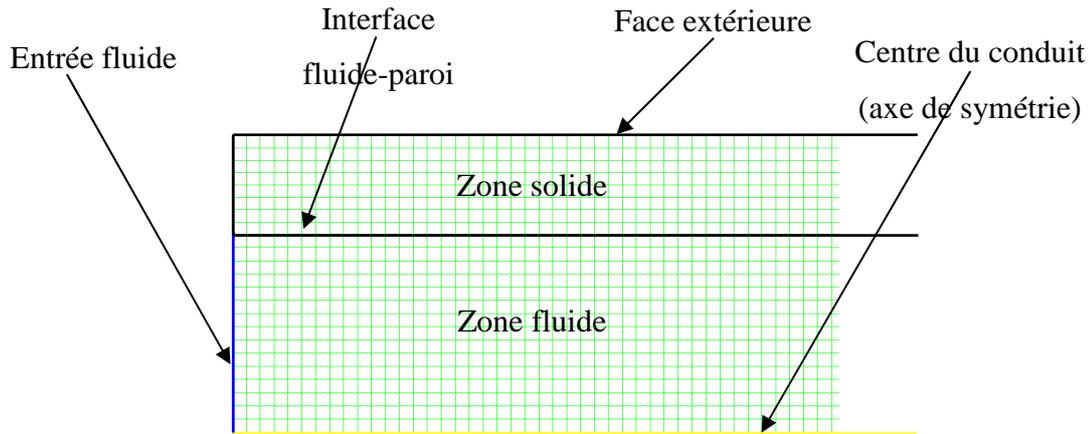


Fig. 5.1 : Zoom sur maillage à l'entrée du conduit.

5.4. Résultats et commentaire

Pour valider le modèle numérique, nous comparons les résultats obtenus numériquement (sous Fluent) avec ceux trouvés analytiquement (par la méthode GITT) pour le cas d'un écoulement turbulent entre deux plaques parallèles.

5.4.1. Plaque mince à température constante

Les conditions aux limites sont :

- Entrée fluide

$$T_f(0, r, t) = T_0 + \Delta T \sin(i\omega t)$$

$$u = f(r), \text{ (cf. Annexe 1)}$$

- Sortie fluide

$$\left. \frac{\partial T_f(x, r, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0,$$

- Axe de symétrie

$$\left. \frac{\partial T_f(x, r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

- Température à la paroi:

$$T(x, R_1, t) = T_0,$$

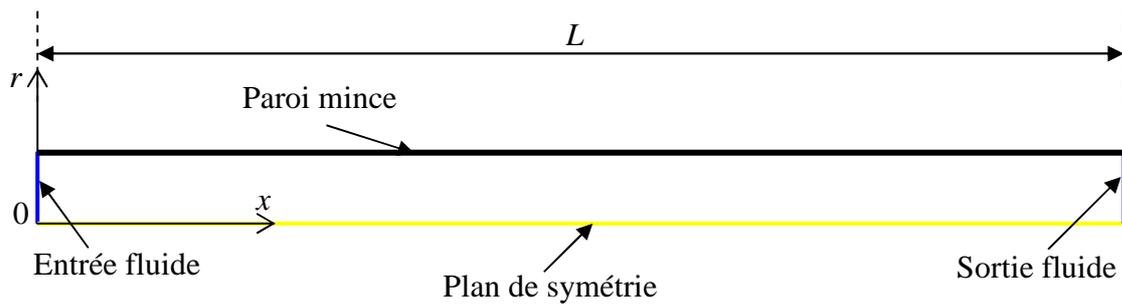


Fig. 5.2 : Conditions aux limites

La figure (5.3) présente la variation de la température axiale obtenue pour différents modèles de turbulence. Le modèle de Spalart-Allmaras est insuffisant pour simuler correctement le problème traité. Des écarts sont tout de même enregistrés pour $x/D_e > 4$ alors que dans la zone d'entrée $x/D_e < 4$, ce modèle fournit des résultats satisfaisants. Les modèles $k-\varepsilon$ et $k-\omega$ qui sont de même précision, donnent des résultats très acceptables quelque soit la valeur de x/D_e . Dans ce qui suit nous adopterons donc le modèle $k-\varepsilon$.

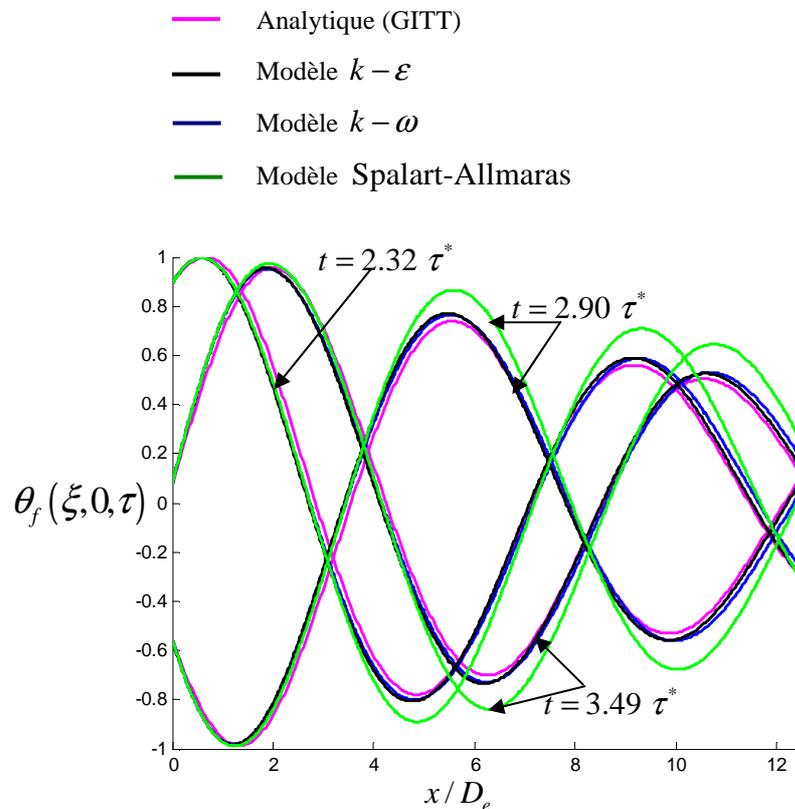


Fig. 5.3 : Variation de la température axiale pour différents instants, avec $Re = 10^4$, $\Omega = 50$ et $Pr = 0.1$.

L'évolution de la température axiale le long du conduit pour différents instants est présentée sur la figure (5.4), en comparant le modèle analytique et numérique. La comparaison montre que les courbes sont bien confondues. Cette figure montre aussi que le signal thermique est fortement amorti, pour les valeurs choisies Re et Ω .

Afin d'avoir une vue claire sur l'amortissement, la figure (5.5) présente une séquence temporelle en montrant le contour de la température adimensionnelle le long du conduit.

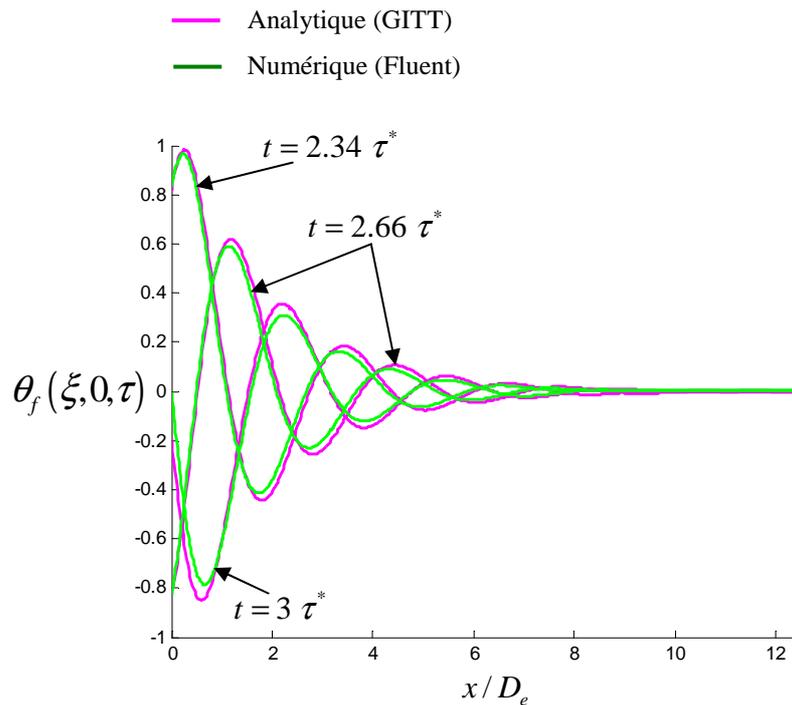


Fig. 5.4 : Variation de la température adimensionnelle le long de centre du conduit pour différents instants, avec $Re = 10^4$, $\Omega = 10$ et $Pr = 0.0074$.

Tableau. 5.1 : Comparaison Numérique/Analytique de la température axiale.

t	$\theta_f(\xi, \eta, \tau)$	$x/D_e = 2.5$	$x/D_e = 5$	$x/D_e = 7.5$	$x/D_e = 10$
$2.34 \tau^*$	Analytique	-0.144570	-0.075843	0.004878	0.005332
	Numérique	-0.095678	-0.062338	0.005657	0.000042
$2.66 \tau^*$	Analytique	-0.202698	0.055128	0.016864	-0.002603
	Numérique	-0.202377	0.032855	0.012616	0.000043
$3.00 \tau^*$	Analytique	0.312360	0.018709	-0.019552	-0.002454
	Numérique	0.268326	0.026358	-0.011569	0.000024

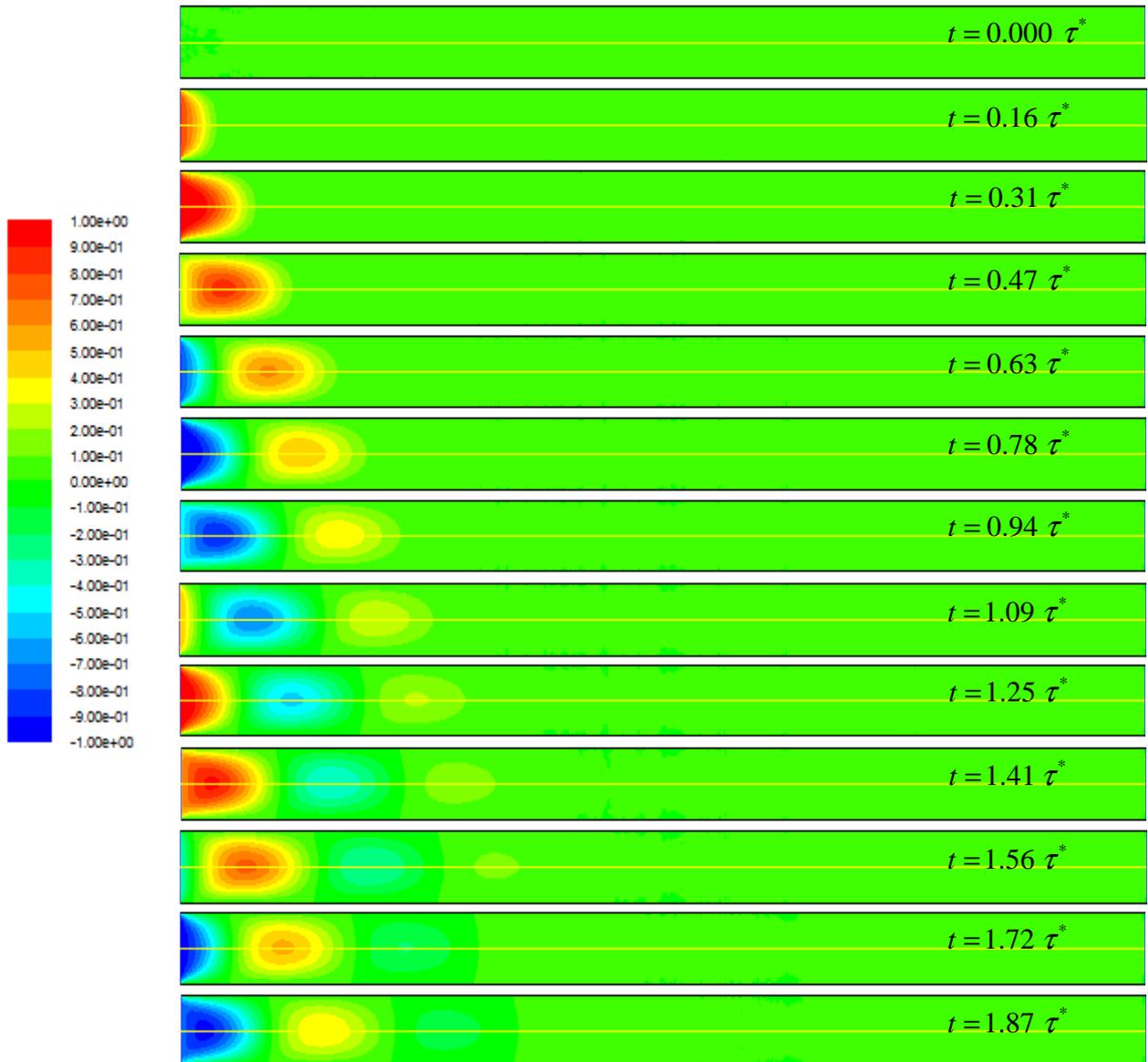


Fig. 5.5: Séquence temporelle du contour de la température adimensionnelle le long du conduit avec $Re = 10^4$, $\Omega = 10$ et $Pr = 0.0074$.

La figure (5.6) présente la variation de la température adimensionnelle le long de l'axe du conduit pour différents instants. Dans ce cas le nombre de Reynolds est égale à 10^5 et $\Omega = 10$. Et la figure (5.7) représentant la séquence temporelle du contour de la température. Il est clair que la température axiale est moins amorti par rapport au cas précédent ($Re = 10^4$) pour une même fréquence du signale thermique d'entrée.

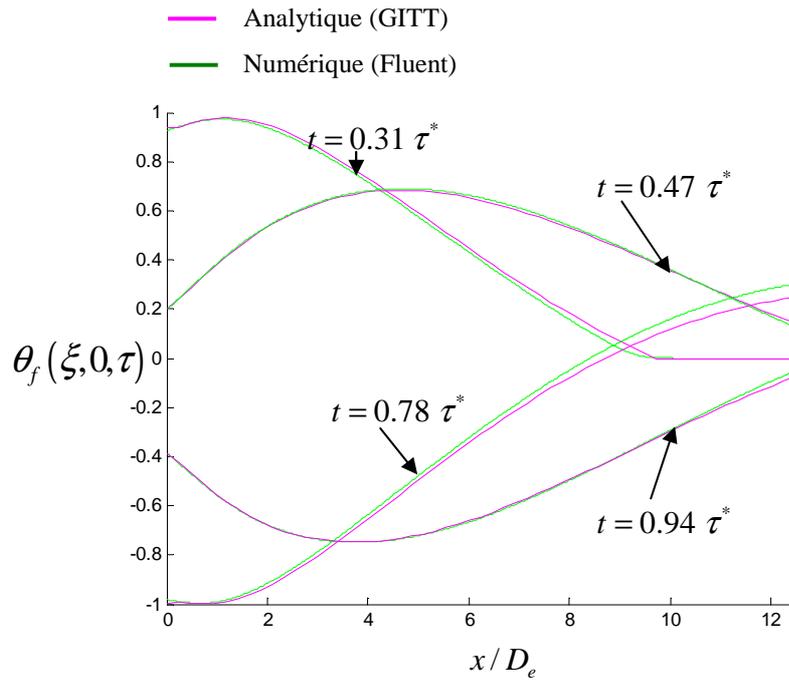


Fig. 5.6 : Variation de la température adimensionnelle le long de centre du conduit pour différents instants, avec $Re = 10^5$, $\Omega = 10$ et $Pr = 0.0074$.

Tableau. 5.2 : comparaison Numérique-Analytique de la température axiale.

t	$\theta_f(\xi, \eta, \tau)$	$x/D_e = 2.5$	$x/D_e = 5$	$x/D_e = 7.5$	$x/D_e = 10$
$0.31 \tau^*$	Analytique	0.907416	0.592016	0.244799	0.000000
	Numérique	0.894965	0.576236	0.223111	0.000064
$0.47 \tau^*$	Analytique	0.588289	0.680505	0.566834	0.357175
	Numérique	0.591013	0.688010	0.577832	0.361935
$0.78 \tau^*$	Analytique	-0.870052	-0.497681	-0.138503	0.118251
	Numérique	-0.855884	-0.478683	-0.112097	0.158725
$0.94 \tau^*$	Analytique	-0.713706	-0.717702	-0.5392821	-0.296245
	Numérique	-0.713354	-0.720752	-0.544235	-0.292480

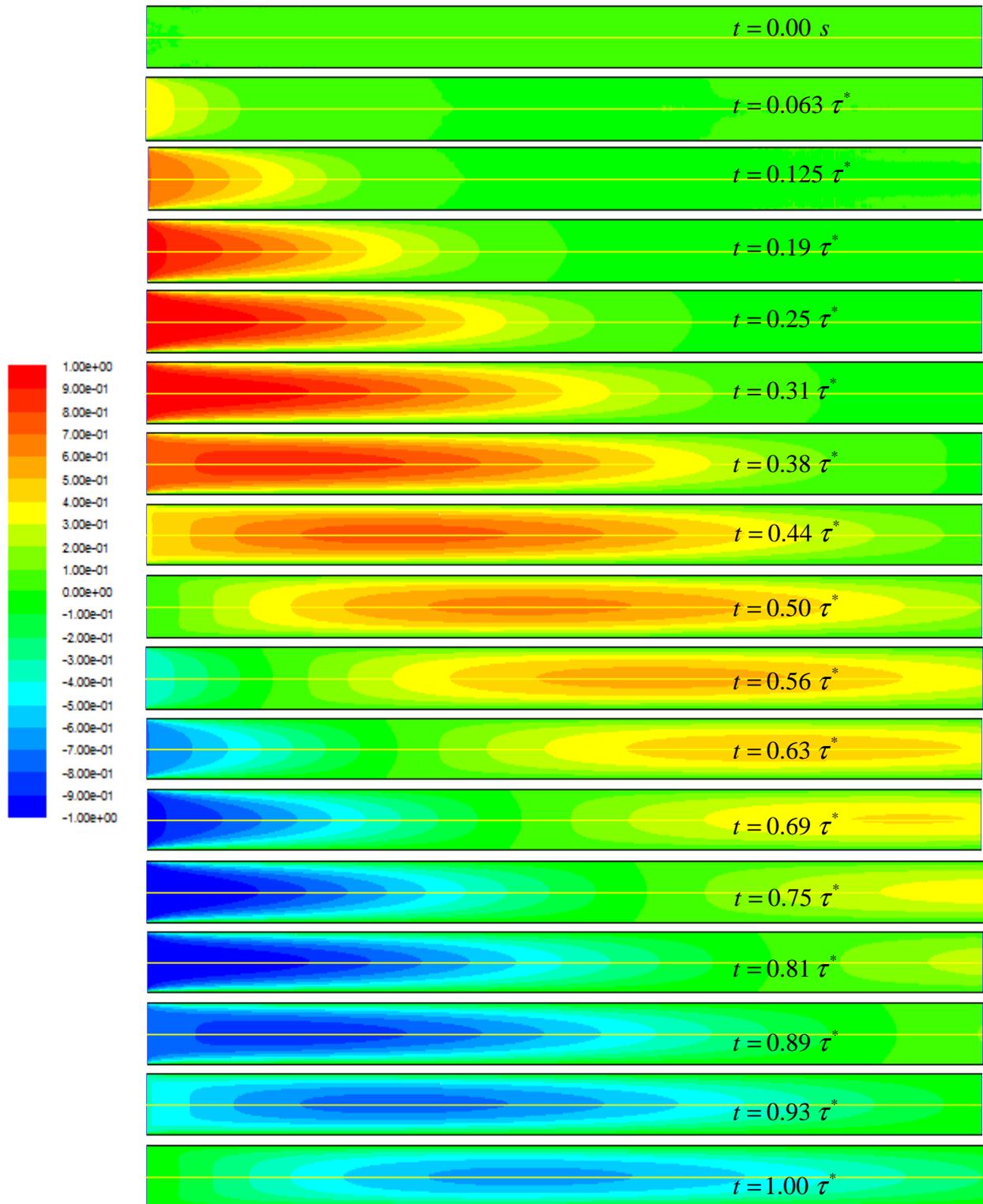


Fig. 5.7: Séquence temporelle du contour de la température adimensionnelle le long du conduit avec $Re = 10^5$, $\Omega = 10$ et $Pr = 0.0074$.

Pour voir l'influence de la fréquence adimensionnelle Ω , sur l'amortissement de l'amplitude, nous fixons le nombre de $Re = 10^4$ et $\Omega = 1$. Les figures (5.8) et (5.9) présentent respectivement la température adimensionnelle le long de l'axe du conduit et le contour de la température. Nous constatons que le signal s'amortit rapidement comme dans le premier cas, il s'atténue fortement dans la zone d'entrée.

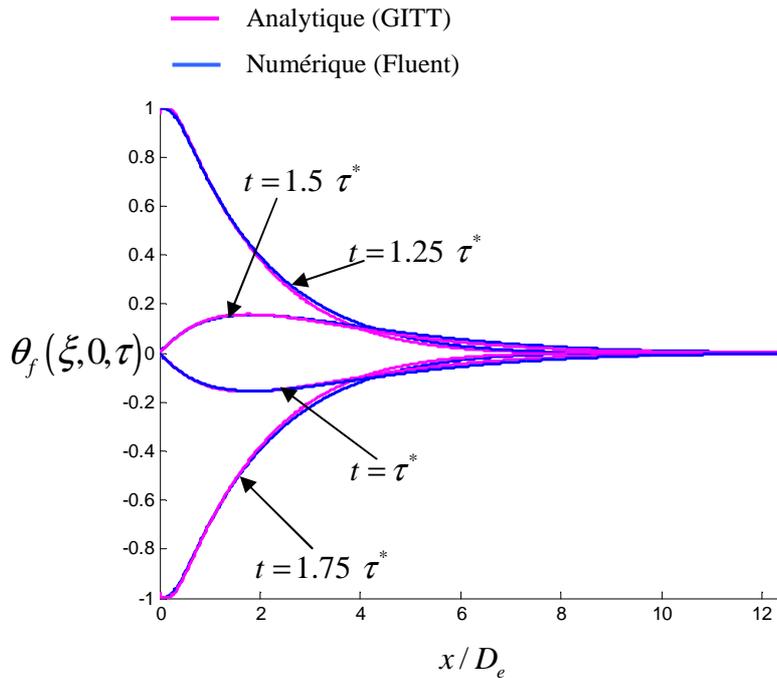


Fig. 5.8 : Variation de la température adimensionnelle le long de l'axe du conduit pour différents instants, avec $Re = 10^4$, $\Omega = 1$ et $Pr = 0.0074$.

Tableau. 5.3 : comparaison Numérique-Analytique de la température axiale.

t	$\theta_f(\xi, \eta, \tau)$	$x/D_e = 2.5$	$x/D_e = 5$	$x/D_e = 7.5$	$x/D_e = 10$
τ^*	Analytique	-0.147047	-0.067459	-0.021085	-0.005146
	Numérique	-0.148196	-0.079553	-0.030596	-0.009249
$1.25 \tau^*$	Analytique	0.279758	0.0464785	0.0025383	-0.001957
	Numérique	0.295981	0.0617249	0.0070617	-0.001873
$1.5 \tau^*$	Analytique	0.147314	0.0675037	0.0210882	0.0051446
	Numérique	0.148535	0.0796234	0.0307465	0.0095764
$1.75 \tau^*$	Analytique	-0.279618	-0.046414	-0.0025182	0.0019625
	Numérique	-0.295822	-0.0616821	-0.0069091	0.0021911

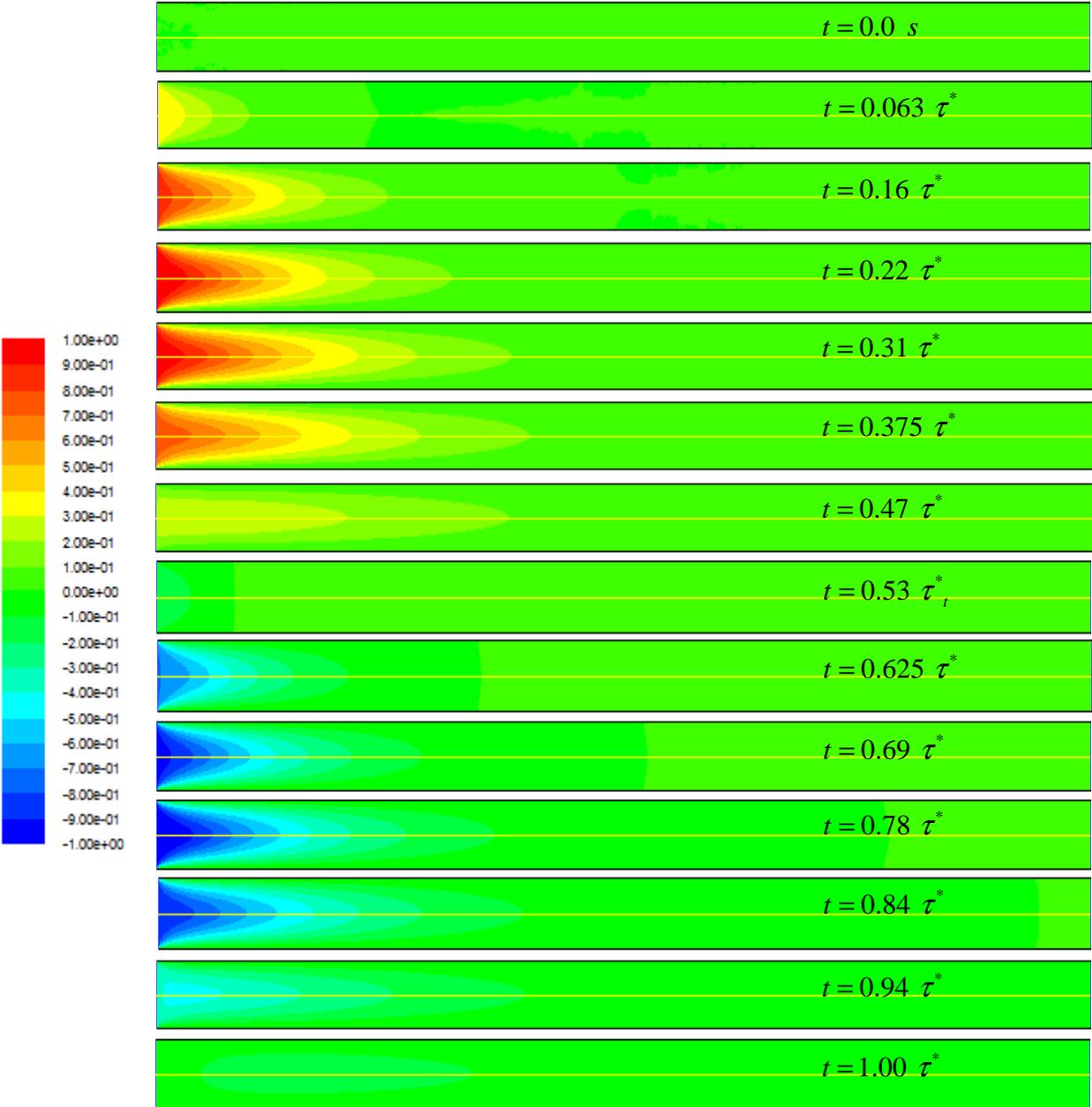


Fig. 5.9: Séquence temporelle du contour de la température adimensionnelle le long du conduit avec $Re = 10^4$, $\Omega = 1$ et $Pr = 0.0074$.

5.4.2. plaque épaisse

Les figures présentées jusqu'ici sont relatives au cas du conduit à paroi mince soumise à température constante, mais ce cas reste simple est particulier. Par la suite, nous traitons le cas général, d'un conduit à paroi épaisse parcouru par un fluide. La paroi échange de la chaleur avec le milieu extérieur.

Les conditions aux limites imposées sont:

- Entrée fluide:

$$T_f(0, r, t) = T_\infty + \Delta T \sin(i\omega t)$$

$$u = f(r), \text{ Annexe (1)}$$

- Sortie fluide:

$$\left. \frac{\partial T_f(x, r, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$$

- Interface solide fluide :

$$k_f \left. \frac{\partial T_f(x, r, t)}{\partial r} \right|_{r=R_1} = k_s \left. \frac{\partial T_s(x, r, t)}{\partial r} \right|_{r=R_1}$$

$$T_f(x, R_1, t) = T_s(x, R_1, t)$$

- Plan de symétrie :

$$\left. \frac{\partial T_f(x, r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

- Face extérieure

$$h_{ext}(T_s(x, R_2, t) - T_\infty) = -k_s \left. \frac{\partial T_s(x, r, t)}{\partial r} \right|_{r=R_2}$$

- Face extérieure gauche :

$$\left. \frac{\partial T_s(x, r, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

- Face extérieure droite :

$$\left. \frac{\partial T_s(x, r, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$$

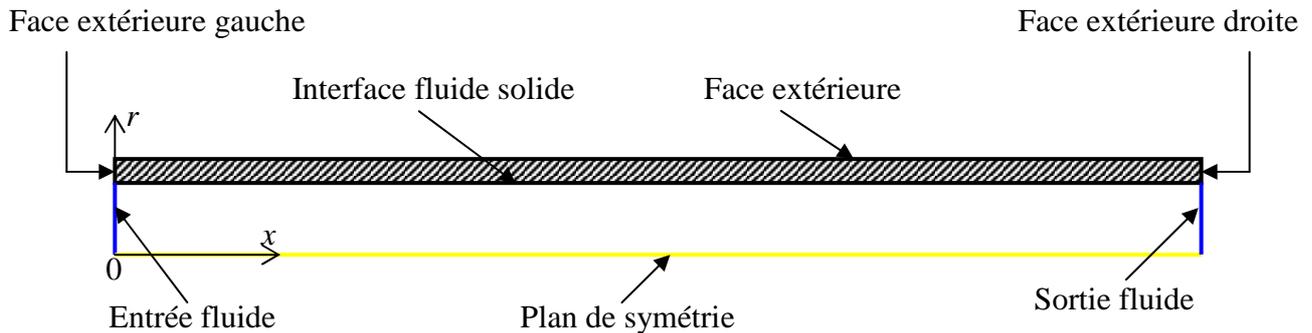


Fig. 5.10 : Conditions aux limites

Le modèle analytique qui a été adoptée dans les chapitres précédents n'a pas pris en compte les effets de la conduction axiale dans la paroi, tandis que le modèle numérique étudié dans ce chapitre prend en considération ces effets. Le modèle numérique nous fournit des renseignements concernant l'influence de la conduction axiale dans la paroi sur l'évolution des températures le long du conduit.

D'après l'article [31], le même point est étudié en tenant compte de la conduction axiale dans la paroi, qui est défini par le paramètre $\bar{\beta}$ ($\bar{\beta} = 16 \gamma (R^* - 1) (u_m / u_{\max})^2 / (\text{Re Pr})^2$), mais la conduction transversale est négligée. Pour $\bar{\beta} = 0$, la conduction axiale est nulle, et l'influence de $\bar{\beta}$ est grande pour des valeurs de a^+ élevées.

Par la suite, nous choisissons un cas test dans lequel les paramètres thermo-physiques du fluide et du solide auront des valeurs de telle sorte que la conduction transversale sera négligeable et l'effet du paramètre $\bar{\beta}$ devient remarquable.

La figure (5.11) présente la variation de la température axiale le long du conduit pour différents instants avec $\text{Re} = 10^4$, $\Omega = 50$, $a^+ = 0.5$, $Bi_{\text{ext}} = 0$ et $\text{Pr} = 0.1$. Cette figure montre que l'écart entre la solution analytique et numérique, visible dans la zone d'entrée, s'estompe progressivement. La figure (5.12) montre l'effet du paramètre $\bar{\beta}$ sur la température axiale. Nous constatons que l'influence du paramètre $\bar{\beta}$ sur la température axiale n'est pas significative pour les valeurs choisies.

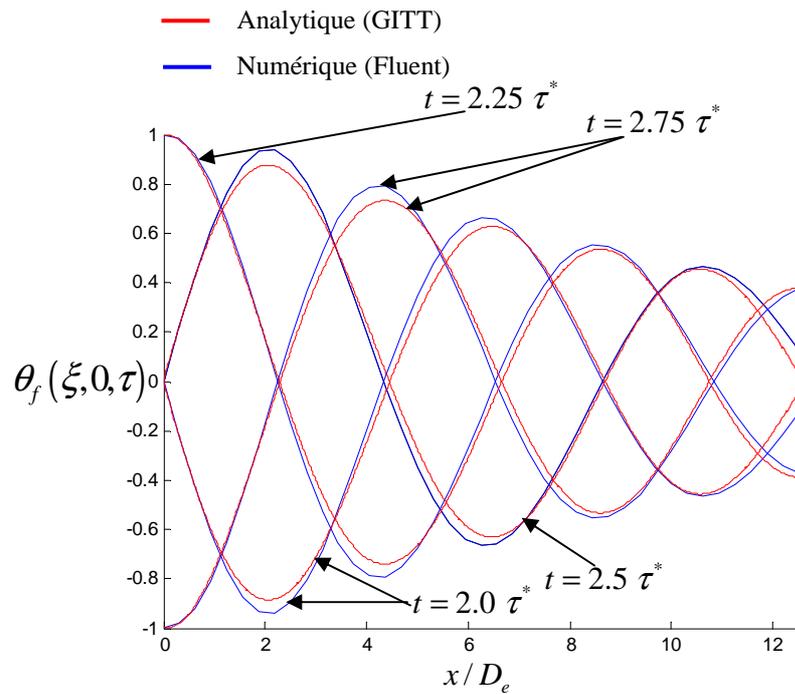


Fig. 5.11 : Variation de la température adimensionnelle le long de centre du conduit pour différents instants, avec $Re = 10^4$, $\Omega = 50$, $a^+ = 0.5$, $Bi_{ext} = 0$ et $Pr = 0.1$.

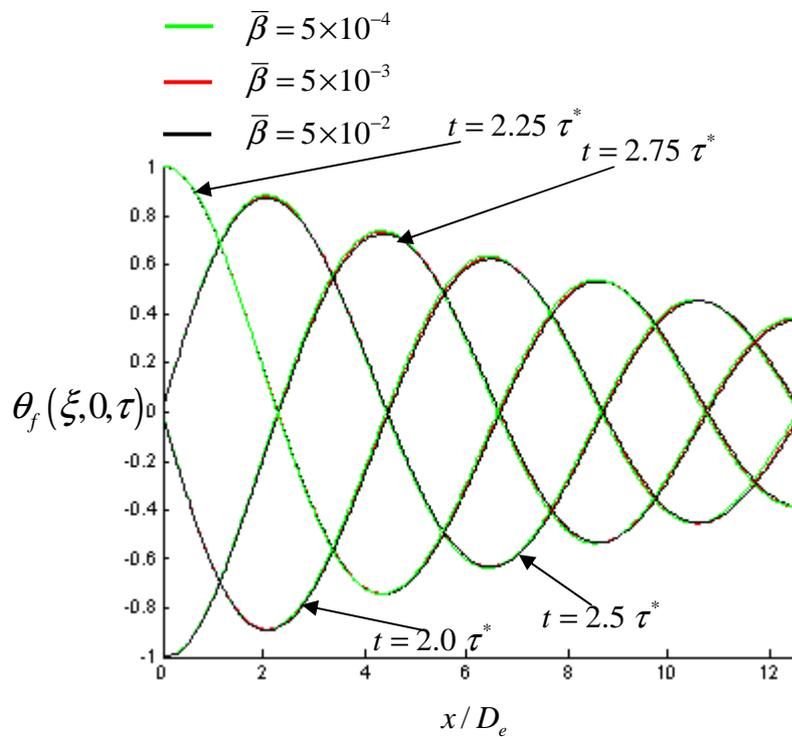


Fig. 5.12 : Effets du paramètre $\bar{\beta}$ sur la température axiale pour différents instants, avec $Re = 10^4$, $\Omega = 50$, $a^+ = 0.5$, $Bi_{ext} = 0$ et $Pr = 0.1$.

Pour clarifier l'effet du paramètre $\bar{\beta}$ sur le champ de température, les figures (5.13) et (5.14) montrent que l'influence du $\bar{\beta}$ sur la température interfaciale est beaucoup plus claire et importante, nous pouvons aussi montrer que la l'augmentation de la valeur du $\bar{\beta}$ engendre une diminution de l'amplitude de la température interfaciale, ce qui est bien claire sur l'article [31].

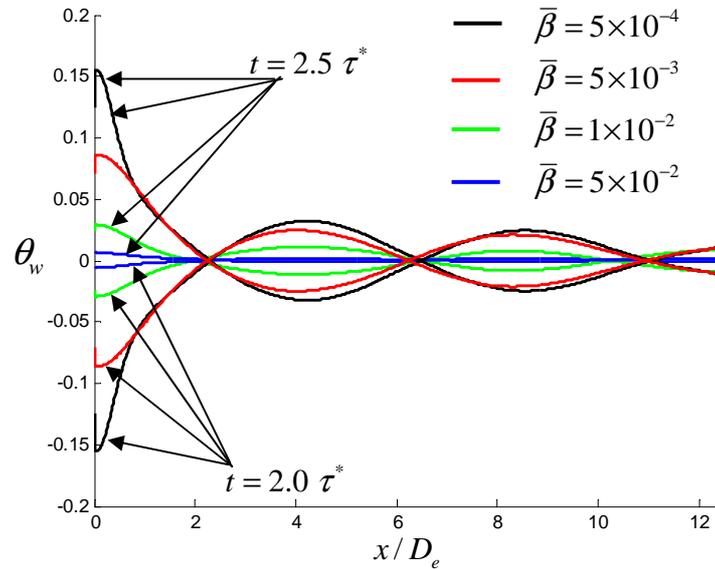


Fig. 5.13 : Effets du paramètre $\bar{\beta}$ sur la température interfaciale pour différents instants, avec $Re = 10^4$, $\Omega = 50$, $a^+ = 0.5$, $Bi_{ext} = 0$ et $Pr = 0.1$.

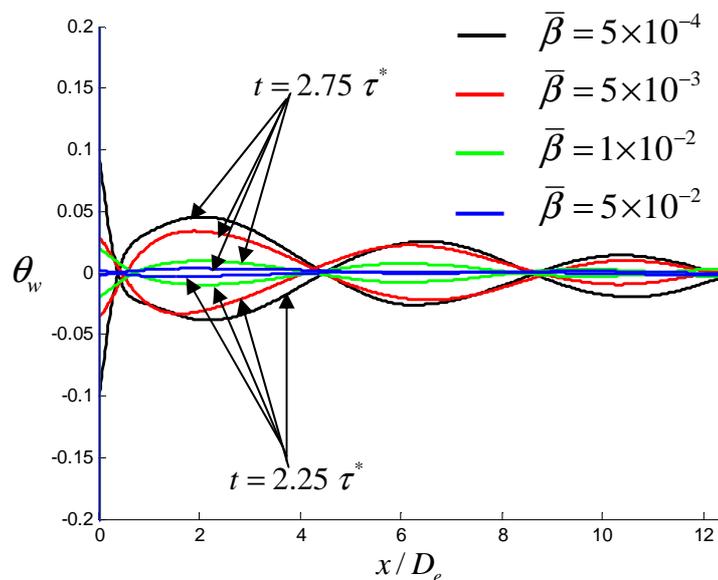


Fig. 5.14 : Effets du paramètre $\bar{\beta}$ sur la température interfaciale pour différents instants, avec $Re = 10^4$, $\Omega = 50$, $a^+ = 0.5$, $Bi_{ext} = 0$ et $Pr = 0.1$.

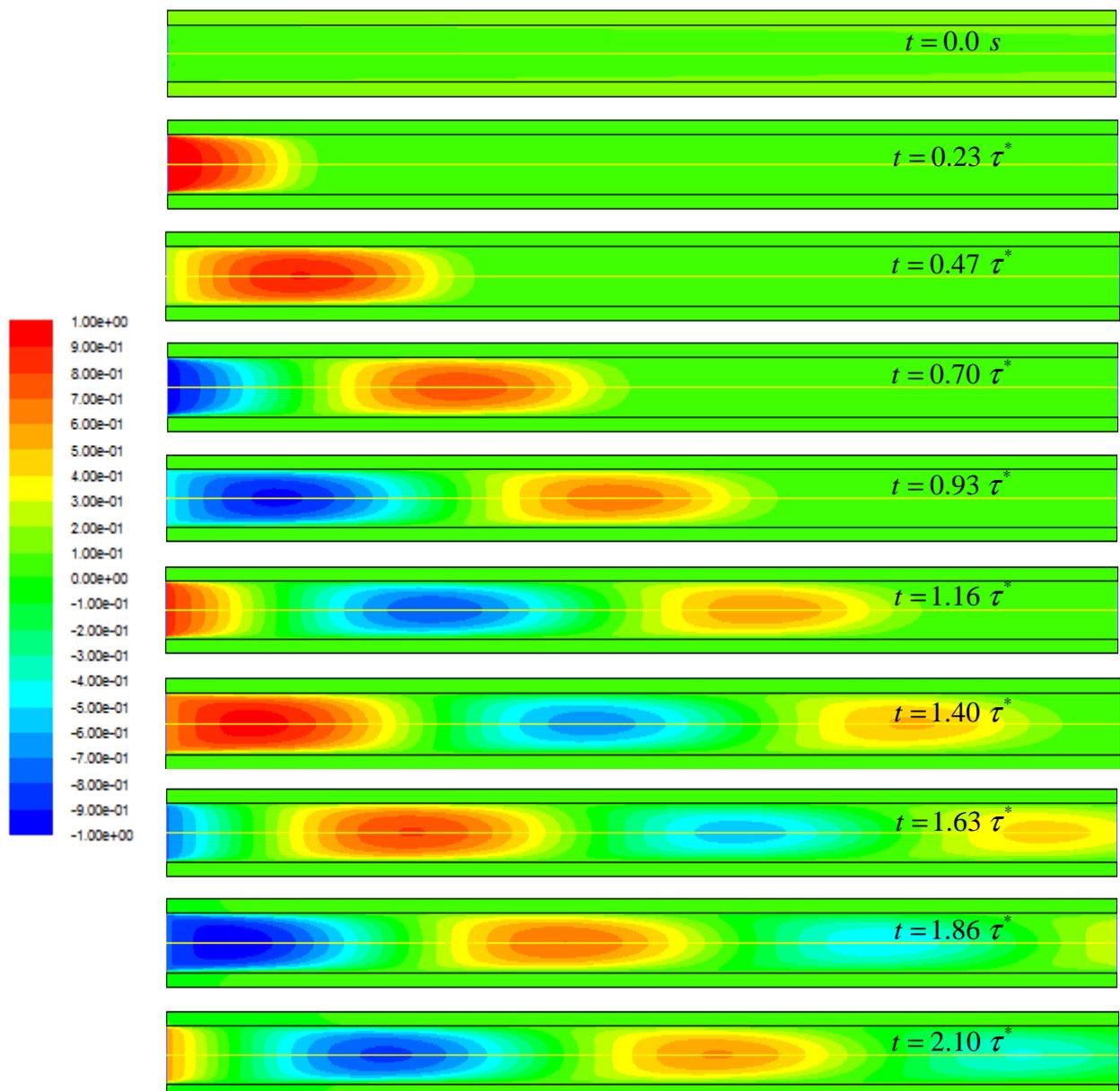


Fig. 5.15: Séquence temporelle du contour de la température adimensionnelle le long du conduit avec $Re = 10^4$, $Bi_{ext} = 0$, $a^+ = 0.5$, $\Omega = 50$ et $Pr = 0.1$.

5.6. Conclusion

D'après la simulation qui a été faite dans ce chapitre nous avons arrivé à conclure que :

- Le modèle de Spalart-Allmaras est insuffisant pour simuler correctement le problème de l'écoulement turbulent en régime périodique, ce qui est contraire aux modèles de $k - \varepsilon$ et $k - \omega$ qui nous ont donné de bons résultats.
- Pour le cas d'une paroi mince à température constante, les modèles analytique et numérique fournissent des résultats identiques (courbes confondus).
- Pour le modèle numérique, et avec la prise en considération de la conduction axiale dans la paroi épaisse, la température d'interface fluide-solide est fortement influencée par cette conduction. De plus, l'augmentation de la conduction axiale dans la paroi engendre un amortissement plus rapide de l'amplitude.

Chapitre 6 :

Application : Stockage de l'énergie dans un régénérateur à plaques

Nous avons modélisé, dans les chapitres précédents, le problème de convection forcée turbulente en régime périodique et analysé l'influence de certains paramètres physiques et géométriques sur la réponse du système. Certes que les résultats couvrent une large gamme de conditions opératoires, mais n'ont lieu que pour des raisons théoriques (étude et validation des modèles utilisés). Dans ce chapitre, une application issue de la réalité industrielle est réalisée.

Nous avons choisi d'étudier le cas des régénérateurs de chaleur dont le fonctionnement s'apparente directement aux situations étudiées (régime thermique périodique).

6.1. Description du problème

Parmi les configurations possibles d'une unité de stockage par chaleur sensible (régénérateur), nous retiendrons le schéma élémentaire, à savoir un module constitué de plaques solides de forme rectangulaire, balayées par un fluide caloporteur circulant à sens unique (Fig. 6.1).

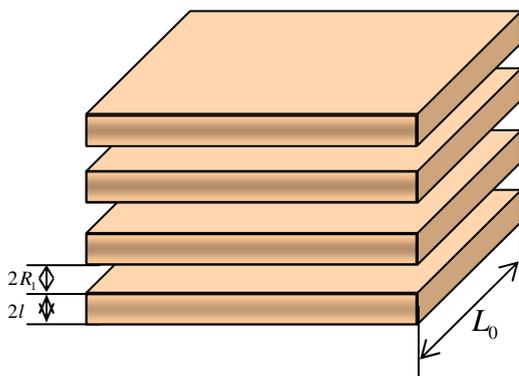


Fig. 6.1 : unité de stockage.

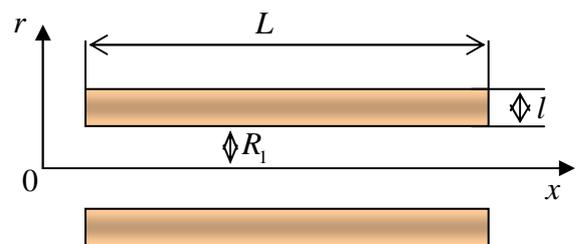


Fig. 6.2 : Module de stockage.

Dans le module présenté, nous supposons que toutes les plaques sont identiques ainsi que les canaux aménagés entre plaques successives. Cette configuration classique permet par symétrie de réduire le problème à celui d'une demi-plaque d'épaisseur l , isolée sur une face et balayée sur l'autre face par un fluide dont la température d'entrée varie périodiquement dans le temps (Fig. 6.2). Cette situation pratique correspond à un nombre de Biot nul.

En état actuel, nous retiendrons les conditions de travail utilisées autre fois dans les références [41, 43] en régime laminaire, ou les couples de matériaux utilisés sont donnés par la table (6.1) ci-dessous :

Table. 6.1 : Propriété thermo-physique des matériaux utilisés.

	Alumine	Brique	Air (300°C)	Santotherm55 (300°C)
k ($Wm^{-1}K^{-1}$)	9.83	0.66	$4.29 \cdot 10^{-2}$	0.1104
C ($J kg^{-1}K^{-1}$)			1047	2951
ρ ($kg m^{-3}$)			0.596	720
ρC ($J m^{-3}K^{-1}$)	$3.32 \cdot 10^6$	$1.428 \cdot 10^6$	624	$2.072 \cdot 10^6$
ν ($m^2 s^{-1}$)			$4.92 \cdot 10^{-5}$	$6.4 \cdot 10^{-7}$

En fixant la période du signal thermique d'entrée à $\tau^* = 24h$ et l'espacement entre plaques $R_1 = 10^{-2}m$, le problème consiste donc à définir la géométrie du système conduisant à un stockage optimal et un filtrage meilleur de la température du fluide à la sortie.

6.2. Fonction de transfert

A partir du modèle développé précédemment (chapitre 3), on peut écrire la distribution de la température de mélange sous forme asymptotique :

$$\tilde{\theta}_b(\xi) = \exp(-\sigma\xi).$$

Le paramètre σ peut s'écrire sous forme :

$$\sigma = \alpha + i\beta,$$

d'où :

$$\tilde{\theta}_b(\xi) = \exp(-\alpha\xi) \exp(-i\beta\xi).$$

Ce qui confirme un amortissement exponentielle en ξ pour l'amplitude et un déphasage linéaire. On définit alors l'amortissement et le déphasage respectivement par:

$$\chi_b = \exp(-\alpha\xi)$$

$$\phi_b = \beta \xi.$$

6.3. Bilan énergétique et fonction de stockage

L'énergie stockée est égale à la quantité de chaleur accumulée par les plaques quand le flux thermique est positif. Le stockage s'effectue pendant une demi-période, et sur la deuxième demi-période c'est le déstockage qui s'effectue.

En appelant W_s , l'énergie stockée dans les deux demi-plaques et $Q(\tau)$ le flux thermique.

$$W_s = \int Q(\tau) d\tau .$$

W_s s'exprime également en fonction de l'énergie interne des plaques E_{is} . Elle est égale à la variation maximale de celle-ci, c'est-à-dire au double de son amplitude.

$$W_s = 2|E_{is}|$$

$$\text{avec : } E_{is} = L_0 \int_1^{R^*} \int_0^{\xi_L} 2(\rho C)_s \tilde{\theta}_s(\xi, \eta) d\xi d\eta .$$

En se rapportant à la quantité $H_m = \frac{\tau^*}{\pi} \dot{m} C_f$, l'énergie maximale transportée par le fluide à l'entrée du canal pendant une demi-période, fonction de stockage est définie comme étant la quantité :

$$f_s = \frac{W_s}{H_m} .$$

Nous obtenons par le modèle GITT l'expression:

$$f_s = 8\gamma \frac{\pi}{\tau^*} \left(\frac{\rho C}{k} \right)_s \frac{1}{\text{Re Pr}} \left| \frac{H_3}{H_2} \sum_{k=0}^N \frac{1}{N_k^{1/2}} \psi(\mu_k, 1) \int_0^{\xi_L} \tilde{\theta}_k(\xi) d\xi \right|$$

H_2 et H_3 s'écrivent respectivement:

$$H_2 = \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1}\right) - H_1 \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1}\right)$$

$$H_3 = \left(\frac{R^* - 1}{\tilde{\beta}_s}\right) \left[\sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right) - \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1}\right) - H_1 \left(\cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right) - \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1}\right) \right) \right]$$

avec :

$$H_1 = \frac{\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right) - Bi_{ext} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right)}{Bi_{ext} \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right) + \frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right)}$$

6.4. Discussion des résultats

Pour quatre systèmes (solide/fluide) différents, nous présentons le coefficient d'amortissement α , la fonction d'amortissement χ_b , la fonction de déphasage ϕ_b et la fonction de stockage f_s calculées à partir du :

- Modèle complet (GITT).
- Modèle simplifié (QSA).

6.4.1. Fonction d'amortissement

Les figures (6.3) et (6.4) présentent l'influence de l'épaisseur du conduit sur la fonction α , pour trois couples de matériaux et un écartement entre plaques $R_1 = 10^{-2} m$.

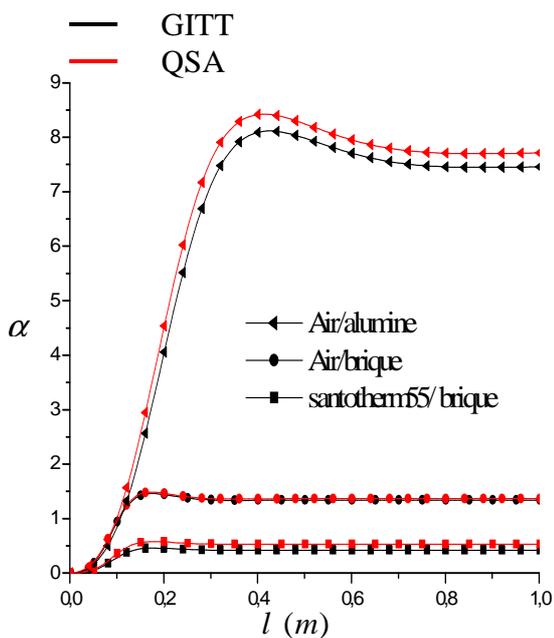


Fig.6.3 : Evolution du coefficient α en fonction de l'épaisseur de la plaque ($R_1 = 0.01 m$ et $Re = 10^5$).

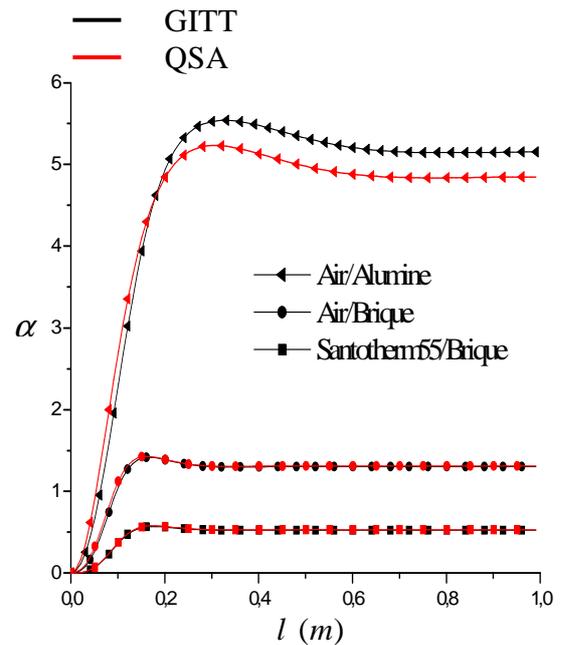


Fig.6.4 : Evolution du coefficient α en fonction de l'épaisseur de la plaque ($R_1 = 0.01 m$ et $Re = 10^4$).

On remarque que les résultats obtenus avec les deux modèles sont confondus pour les petites épaisseurs de paroi ($l \leq 0.3m$). Des écarts sont enregistrés particulièrement pour le couple

Air/Alumine pour $Re = 10^4$ à partir de $l = 0.3m$, (cf. fig. 6.4). Par contre pour les couples de matériaux Air/brique et Air/ Santotherm55, les deux approches donnent des résultats identiques quelque soit l'épaisseur de la plaque. Par ailleurs, pour une certaine épaisseur de plaque, les deux modèles marquent un extremum pour une épaisseur bien définie l_{opt} . Autrement dit, l'efficacité du système est atteinte pour cette valeur (l_{opt}).

D'autre part, on remarque que la fonction α est plus importante pour le couple Air/Alumine que pour les deux autres couples de matériaux.

- **Influence de la surface d'échange**

En fixant la section d'écoulement (du conduit), la surface d'échange n'est fonction que de la longueur du conduit (L).

Les figures (6.5) et (6.6) montrent que l'augmentation de la longueur du conduit (L) augmente la qualité du filtrage.

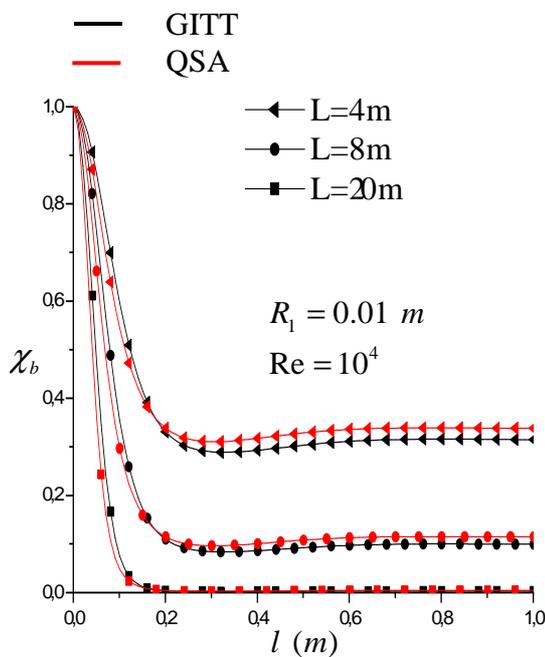


Fig. 6.5 : Fonction d'amortissement χ_b (air/alumine)

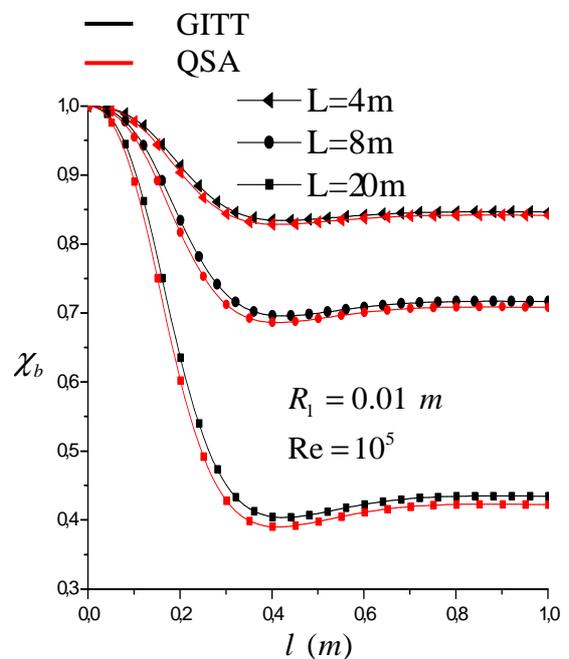


Fig. 6.6 : Fonction d'amortissement χ_b (air/alumine)

- **Influence de l'écartement entre plaques R_1**

Les figures (6.7) et (6.8) montrent que la diminution de l'espacement des plaques améliore le filtrage. Le modèle quasi-stationnaire dans cette situation ($\tau^* = 24h$) permet un rapprochement considérable du modèle GITT. Pour compléter les figures précédentes, nous présentons dans les tableaux (6.2), (6.3), (6.4) et (6.5) les résultats d'optimisation pour différentes configurations.

Nous désignons par χ_{bm} l'amortissement maximal correspondant à un système donné et par l_{opt} l'épaisseur optimale des plaques.

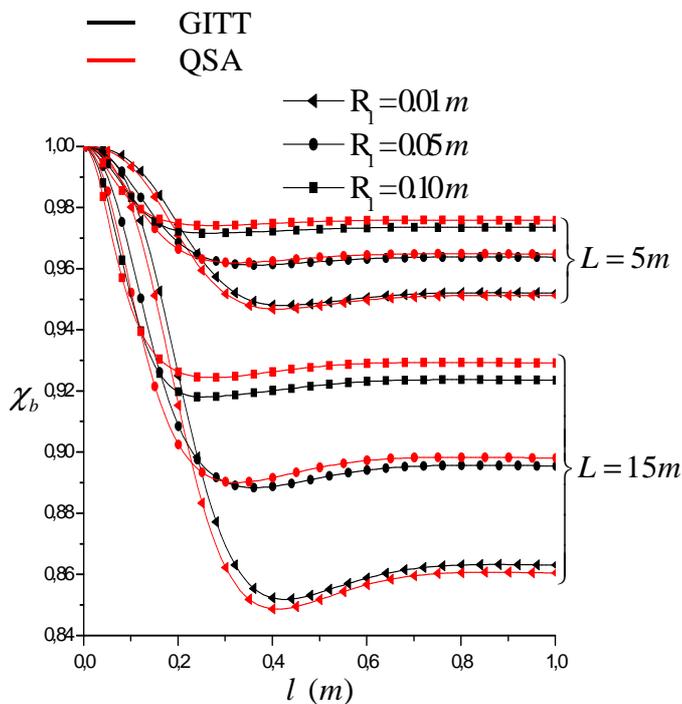


Fig. 6.7 : Fonction d'amortissement χ_b
(santitherm55/alumine, $Re = 10^4$)

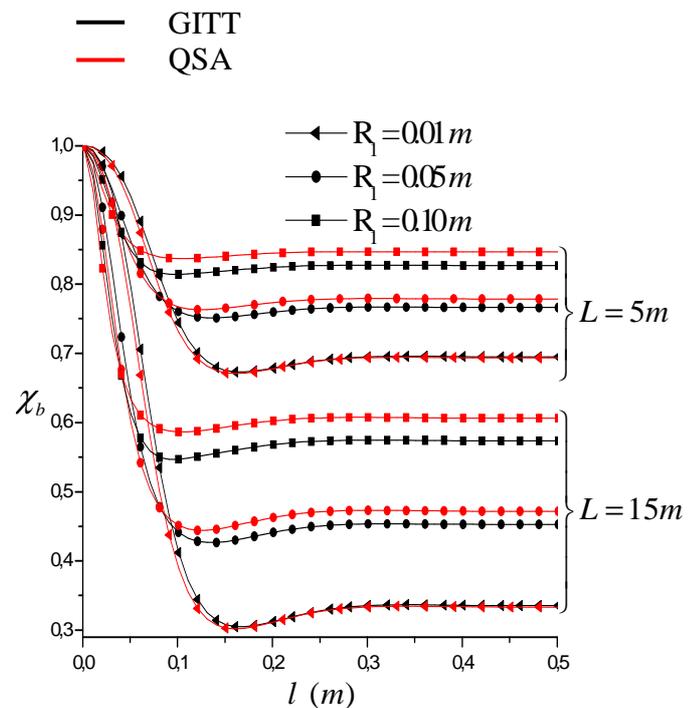


Fig. 6.8 : Fonction d'amortissement χ_b
(air/brique, $Re = 10^4$)

Table. 6.2 : Amortissement optimal du système (santitherm55/alumine).

		santitherm55/alumine						
		L	5			15		
		R_1	0.01	0.05	0.1	0.01	0.05	0.10
GITT	l_{opt}	0.4111	0.3311	0.2305	0.4111	0.3311	0.2505	
	χ_{bm}	0.9478	0.9608	0.9713	0.8513	0.8873	0.9167	
QSA	l_{opt}	0.4111	0.3211	0.2305	0.4111	0.3211	0.2604	
	χ_{bm}	0.9468	0.9619	0.9743	0.8487	0.901	0.9244	

Table. 6.3 : Amortissement optimal du système (santitherm55/brique)

		santitherm55/brique						
		L	5			15		
		R_1	0.01	0.05	0.1	0.01	0.05	0.1
GITT	l_{opt}	0.171	0.171	0.15	0.171	0.171	0.1601	
	χ_{bm}	0.9905	0.9908	0.9912	0.9719	0.9726	0.9738	
QSA	l_{opt}	0.171	0.151	0.14	0.171	0.161	0.15	
	χ_{bm}	0.9904	0.9907	0.9912	0.9716	0.9722	0.9738	

Table. 6.4 : Amortissement optimal du système (air/alumine).

		Air/alumine						
		L	5			15		
		R_1	0.01	0.05	0.1	0.01	0.05	0.1
GITT	l_{opt}	0.321	0.141	0.12	0.321	0.141	0.12	
	χ_{bm}	0.212	0.5603	0.7169	0.01243	0.1816	0.3847	
QSA	l_{opt}	0.301	0.161	0.14	0.301	0.191	0.14	
	χ_{bm}	0.2317	0.653	0.8011	0.0143	0.2781	0.5141	

Table. 6.5 : Amortissement optimal du système (air/brique).

		air/brique						
		L	5			15		
		R_1	0.01	0.05	0.1	0.01	0.05	0.1
GITT	l_{opt}	0.1611	0.1317	0.1005	0.1611	0.1311	0.0905	
	χ_{bm}	0.6709	0.7497	0.8141	0.3051	0.4267	0.5469	
QSA	l_{opt}	0.1611	0.121	0.1005	0.1611	0.121	0.1005	
	χ_{bm}	0.6709	0.763	0.8371	0.302	0.4442	0.5865	

6.4.2. Etude du déphasage

Sur la figure (6.9), nous représentons la fonction de déphasage ϕ_b en fonction de l'épaisseur de plaque l pour le système (santotherme55 /alumine), pour deux valeurs de L et des écartements entre plaques différents. On remarque que le déphasage passe par un maximum ϕ_{b_m} en générale un peu plus élevé pour le modèle GITT que pour le modèle quasi-stationnaire (QSA).

D'une autre manière, nous présentons dans les tableaux (6.6), (6.7), (6.8) et (6.9), les valeurs maximales enregistrées pour le déphasage à la sortie du conduit et les épaisseurs des plaques correspondantes. Notons que l'épaisseur optimale l_{opt} des plaques correspondante au déphasage maximal est inférieure à celle enregistrée pour l'amortissement (table 6.2, 6.3, 6.4 et 6.5).

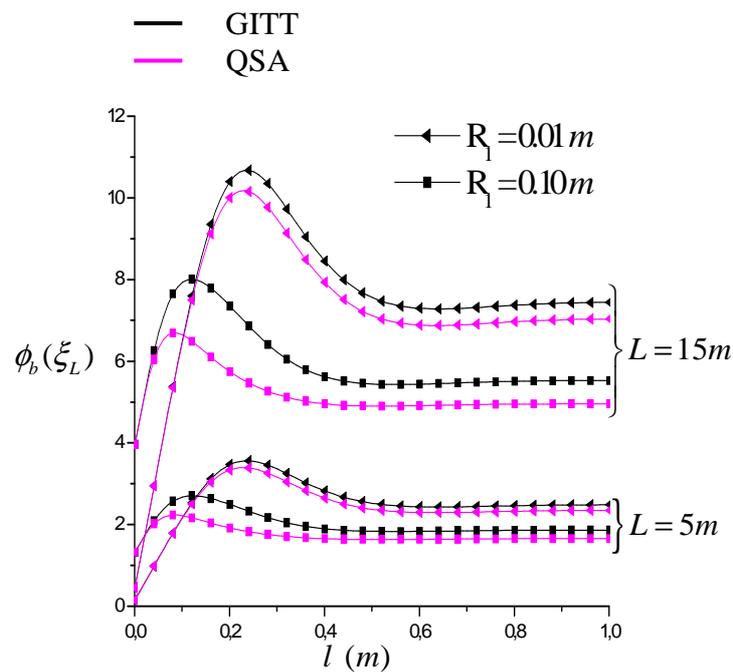


Fig. 6.9 : Fonction de déphasage ϕ_b (santitherm55/alumine, $Re = 10^4$)

Table. 6.6 : Déphasage optimal du système (santitherm55/alumine)

		santitherm55/alumine						
		L	5			15		
		R_1	0.01	0.05	0.1	0.01	0.05	0.1
GITT	l_{opt}	0.241	0.161	0.121	0.241	0.161	0.121	
	χ_{bm}	3.551	2.73	2.649	10.66	8.143	7.846	
QSA	l_{opt}	0.231	0.141	0.081	0.231	0.141	0.081	
	χ_{bm}	3.393	2.272	3.23	10.18	6.817	6.691	

Table. 6.7 : Déphasage optimal du système (santitherm55/brique)

		santitherm55/brique						
		L	5			15		
		R_1	0.01	0.05	0.1	0.01	0.05	0.1
GITT	l_{opt}	0.101	0.091	0.09005	0.101	0.091	0.09005	
	χ_{bm}	0.7939	1.223	1.82	0.382	3.729	5.448	
QSA	l_{opt}	0.101	0.091	0.09005	0.101	0.091	0.08005	
	χ_{bm}	0.7939	1.223	1.73	2.382	3.668	5.34	

Table. 6.8 : Déphasage optimal du système (air/alumine)

		air/alumine						
		L	5			15		
		R_1	0.01	0.05	0.1	0.01	0.05	0.1
GITT	l_{opt}	0.1401	0.0401	0.021	0.1401	0.0401	0.021	
	χ_{bm}	75.04	19.71	10.36	181.82	57.8	29.63	
QSA	l_{opt}	0.1201	0.0301	0.011	0.1201	0.0301	0.011	
	χ_{bm}	57.05	12.96	6.28	171.03	38.89	18.84	

Table. 6.9 : Déphasage optimal du système (air/brique)

		air/brique						
		L	5			15		
		R_1	0.01	0.05	0.1	0.01	0.05	0.1
GITT	l_{opt}	0.09001	0.061	0.04005	0.09001	0.061	0.04005	
	χ_{bm}	24.67	14.26	9.107	74.02	42.2	26.3	
QSA	l_{opt}	0.09001	0.05101	0.03005	0.09001	0.05101	0.03005	
	χ_{bm}	23.38	11	6.603	70.14	32.99	18.61	

6.4.3. Stockage

Nous avons présenté sur la figure (6.10) la fonction de stockage f_s , pour le couple santitherm55/alumine à $Re = 10^4$, qui correspond à un nombre du Peclet $P_e = 120116$. Dans les mêmes conditions que le filtrage (Fig. 6.7), nous avons considéré différentes surfaces d'échange (L) et différents espacements entre plaques (R_1).

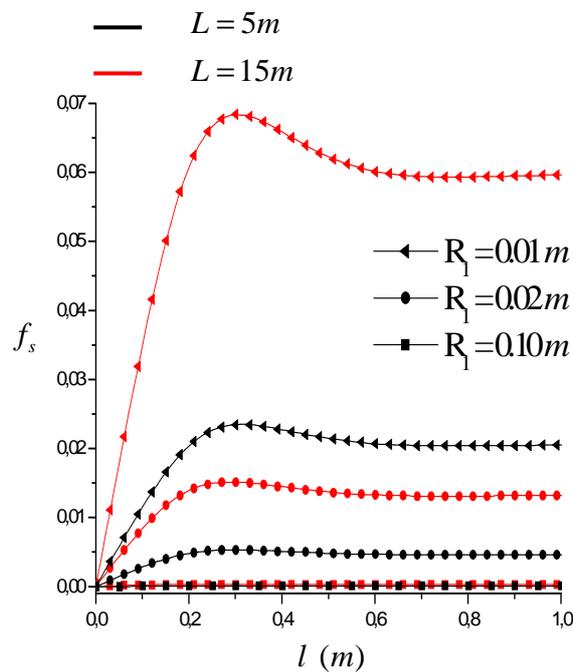


Fig. 6.10 : Fonction de stockage f_s (santitherm55/alumine, $Re = 10^4$)

Table. 6.10 : Stockage optimal du couple (santitherm55/alumine).

		santitherm55/alumine						
		5			15			
		R_1	0.01	0.02	0.1	0.01	0.02	0.1
GITT	l_{opt}		0.311	0.311	0.295	0.301	0.2901	0.2611
	f_{sm}		0.005309	0.005309	0.00001012	0.006835	0.01514	0.000304

On remarque que le stockage (f_s) est important pour une grande surface d'échange (L) et petit espacement entre plaque (R_1). Pour une épaisseur de plaques (l_{opt}), jugée optimale, cette fonction passe par un maximum f_{sm} .

En comparaisons avec le filtrage optimal, on constate bien le lien filtrage/stockage. Il ne reste donc, qu'à améliorer le filtrage en même temps que le stockage augmente.

6.5. Conclusion

A l'échelle industrielle, les résultats de cette étude montrent les limites des systèmes (longueur de plaque, période, etc.) concernant le cycle stockage-déstockage. Au début, nous avons démontré la possibilité d'atténuer considérablement les fluctuations de température du fluide caloporteur. Il s'est avéré, dans un système donné, que la performance du filtrage dépend de l'épaisseur des plaques (l), l'écartement entre plaque (R_1) et la longueur du conduit (L).

En fin, nous avons précisé le rôle fondamental que joue l'épaisseur des plaques dans le stockage par chaleur sensible et son incidence sur l'optimisation de l'énergie stockée. De plus, le fait de tenir compte de la conduction transversale dans le solide permet de mettre en évidence la notion d'épaisseur limite utile des plaques de stockage.

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons présenté une étude traitant le problème de la convection forcée turbulente d'un écoulement fluide dans un conduit cylindrique et plan. Ce travail se compose de six chapitres, le premier chapitre est consacré à l'étude bibliographique des principaux travaux effectués sur le sujet. Nous avons montré au cours de cette recherche bibliographique l'intérêt du sujet du fait des nombreuses applications dans des domaines divers.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté le problème de référence à savoir un conduit à deux plaques parallèles, parcouru par un fluide incompressible en écoulement turbulent. La température du fluide à l'entrée du canal varie de façon sinusoïdale. Les équations régissant le problème sont résolues analytiquement, par la technique de la transformée intégrale généralisée. Les cas limites étudiés donnent des résultats très satisfaisants en comparaison avec la littérature [28-30].

Dans le chapitre trois, nous avons présenté une étude détaillée sur l'écoulement turbulent dans un conduit cylindrique. Afin d'obtenir une vue claire sur l'influence de la géométrie sur les caractéristiques de l'écoulement, les résultats obtenus (avec GITT) sont comparés à ceux de l'écoulement entre deux plaques parallèles, la comparaison montre que l'influence de la géométrie est importante.

Dans le chapitre quatre, une approche de ce problème est effectuée à partir d'un modèle simplifié introduisant un coefficient d'échange à l'interface fluide-paroi. Les résultats montrent que ce modèle dit Quasi-stationnaire (QSA) peut approcher le modèle analytique exact sous certaines conditions c'est le cas de basses fréquences, ce qui correspond au régime quasi-permanent. En effet, le coefficient d'échange varie périodiquement avec le temps. Il faudrait donc disposer de corrélations liant le coefficient d'échange au temps et aux autres paramètres du fluide et du solide.

Une solution numérique obtenue en utilisant le code de calcul **Fluent**, est présentée dans le chapitre cinq. La résolution numérique a montré l'influence de la conduction axiale dans la paroi (négligée dans le modèle analytique) sur le profile des températures.

Dans le chapitre six, nous avons traité un cas pratique. Une optimisation simultanée du filtrage et du stockage de l'énergie est réalisée dans le cas d'un régénérateur à plaques.

De point de vue physique, les conclusions tirées à partir des résultats présentés dans les chapitres précités peuvent être résumées par les points suivants :

- L'hypothèse d'isothermicité, souvent utilisé, est contestée. Elle n'est plus retenue pour des grandes épaisseurs ou pour des petites capacités thermiques de paroi.
- L'effet de la conduction axiale dans la paroi augmente pour des grandes valeurs de $\bar{\beta}$.
- L'effet du nombre du Biot est affirmé pour des grandes valeurs du paramètre a^+ .

References

- [1] **M. Perlmutter et R. Siegel**, Two dimensional unsteady incompressible laminar ducts flow with step change in wall temperature.
Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 3, pp. 94-107, (1960)
- [2] **R. Siegel et M. Perlmutter**, Laminar heat transfer in a channel with unsteady flow and wall heating varying with position and time.
Trans. ASME, J. heat transfer 85C, pp. 358-365, (1963)
- [3] **H. Kawamura**, Transient turbulent heat transfer in annulus: part 1: heating element with a finite (Nonzero) heat capacity and No thermal resistance.
Trans. ASME, pp. 2160-2193, (1973)
- [4] **H. Kawamura**, Transient hydraulic and heat transfer in turbulent flow.
Nuclear technology, Vol. 30, Sept. (1976)
- [5] **R. M. Cotta et M. N. Özisik**, Transient forced convection channel flow with stepwise variation of wall temperature.
The Can. J. of Chem. Eng, Vol. 64, pp. 734-742, Oct. (1986)
- [6] **T. F. Lin et J. C. Kuo**, Transient conjugated heat transfer in fully developed laminar pipe flows.
Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 31, N° 5, pp. 1093-1102, (1988)
- [7] **S. Abboudi et F. Papini**, Etude numérique du transfert thermique métal-fluide dans un conduit rectangulaire en régime in-stationnaire.
Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 33, N° 9, pp. 1909-1920, (1989)
- [8] **J. N. N. Quaresma et R.M. Cotta**, Exact solution for thermally developing tube flow with variable wall heat flux.
Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 21, N° 5, pp. 729-742, (1994)
- [9] **F. B. Liu et M. N. Özisik**, Inverse analysis of transient turbulent forced convection inside parallel plate ducts.
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 39, N° 12, pp. 2615-2618, (1996)
- [10] **A. Omara et S. Abboudi**, Influence des conditions d'entrée variables sur le transfert de chaleur non-stationnaire dans une conduite cylindrique.
Rev. Energ. Ren, Vol. 1, pp. 109-123, (1998)
- [11] **D. T. Lin, W. M. Yan et H. Y. Li**, Inverse problem of unsteady conjugated forced convection in parallel plate channels.
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 51, pp. 993-1002, (2008)
- [12] **E. M. Sparrow et F. N. Farias**, Unsteady heat transfer in ducts with time varying inlet temperature and participating walls.
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 11, pp. 837- 853, (1968)
- [13] **R. O. C. Guedes and M. N. Özisik**, Hybrid approach for solving unsteady laminar forced convection inside ducts with periodically varying inlet temperature.
Int. J. Heat and Fluid Flow, Vol. 15, N° 2, (1994)

-
- [14] **D. M. Brown, W. Li et S. Kakaç**, Numerical and experimental analysis of unsteady heat transfer with periodic variation of inlet temperature in circular ducts. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 20, pp. 883-899, (1993)
- [15] **F. F. Hatay, W. Li, S. Kakaç et F. Mayinger**, Numerical and experimental analysis of unsteady laminar forced convection channels. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 18, pp. 407-417, (1991)
- [16] **S. Kakaç et Y. Yener**, Exact solution of transient forced convection energy equation for timewise variation of inlet temperature. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 16, pp. 2205-2214, (1973)
- [17] **R. M. Cotta et M. N. Özisik**, Laminar forced convection inside ducts with periodic variation of inlet temperature. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 29, N° 10, pp. 1495-1501, (1986)
- [18] **S. Kim et M. N. Özisik**, Conjugated laminar forced convection in ducts with periodic variation of inlet temperature. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 11, N° 4, (1990)
- [19] **S. Kakaç, W. Li et R. M. Cotta**, Unsteady laminar forced convection in a duct with periodic variation of inlet temperature. *Int. J. Heat Transfer*, Vol. 112, pp. 913-920, (1990)
- [20] **R. O. C. Guèdes et R. M. Cotta**, Periodic laminar forced convection within ducts including wall heat conduction effects. *Int. J. Engng. Sci*, Vol. 29, N° 5, pp. 535-547, (1991)
- [21] **J. S. Travelho et W. F. N. Santos**, Solution of transient conjugated forced convection in the thermal entrance region of a ducts with periodic varying inlet temperature. *Trans. ASME, J. heat transfer*, Vol. 113, pp. 558-562, (1991)
- [22] **K. Mansouri et B. Fourcher**, Réponse à un signal thermique sinusoïdal dans le cas d'un écoulement sur un plan directeur. *Int. Comm. Heat and Mass Transfer*, Vol. 22, N° 5, pp. 305-315, (1995)
- [23] **K. Mansouri**, Thèse de Doctorat. Science pour l'ingénieur université de Nantes. France 1995.
- [24] **S. Cheroto, M. D. Mikhailov, S. Kakac, R. M. Cotta**, Periodic laminar forced convection: solution via symbolic computation and integral transforms *Int. J. Therm. Sci*, Vol. 38, pp. 613-621, (1999)
- [25] **A. Hadiouche et K. Mansouri**, On the solution of periodic internal laminar flow. *Int. Symposium on Advances in Computational Heat Transfer (ICHMT)*, pp. 248-260, Maroc (2008)
- [26] **B. Fourcher et K. Mansouri**, An approximate analytical solution to the Graetz problem with periodic inlet temperature. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 18, pp. 229-235, (1997)
- [27] **A. Hadiouche et K. Mansouri**, Etude analytique et simulation numérique d'un écoulement laminaire en régime périodique. *Conf. Int. Energies Renouvelables (ICRE' 07)*, Bejaia (2007)

- [28] **W. S. Kim et M. N. Özisik**, Turbulent forced convection inside a parallel-plate channel with periodic variation of inlet temperature.
Trans. ASME, J. Heat Transfer, Vol. 111, pp. 882-888, (1989)
- [29] **M. ArikL, C. A. Santos et S. Kakac**, Turbulent forced convection with sinusoidal variation of inlet temperature between tow parallel-plates
Int. Comm. Heat Mass Transfer, Vol. 23, N° 8, pp. 1121-1132, (1996)
- [30] **S. Kakaç et W. Li**, Unsteady turbulent forced convection in a parallel-plate channel with timewise variation of inlet temperature,
Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 37, pp. 447-456, (1994)
- [31] **R. O. C. Guedes, M. N. Özisik et R. M. Cotta**, Conjugated periodic turbulent forced convection in a parallel- plate channel.
Trans. ASME, J. Heat Transfer, Vol. 116, pp. 40-46, (1994)
- [32] **K. Mansouri, D. Sadaoui et B. Fourcher**, The effects of inlet temperature frequency on the quasi-steady approach of periodic conjugated heat transfer problem.
Int. J. Engng. Sci, Vol. 42, pp. 825-839, (2004)
- [33] **B. Fourcher et K. Mansouri**, Theoretical study of periodic turbulent forced convection inside a parallel-plate channel.
Int. J. Engng. Sci, Vol. 36, N° 4, pp. 411-420, (1998)
- [34] **M.A. Leala, H.A. Machadob et R.M. Cotta**, Integral transform solutions of transient natural convection in enclosures with variable fluid properties.
Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 43, pp. 3977-3990, (2000)
- [35] **H. L. Neto, J. N. Quaresma et R.M. Cotta**, Integral transform solution for natural convection in three-dimensional porous cavities: Aspect ratio effects.
Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 49, pp. 4687-4695, (2006)
- [36] **C.P. Naveira, M. Lachi, R.M. Cotta et J. Padet**, Integral transform solution of transient forced convection in external flow.
Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 34, pp.703-712, (2007)
- [37] **S. P. Guerrero, L.C. Pimentel, T.H. Skaggs et M.T. Genuchten**, Analytical solution of the advection-diffusion transport equation using a change-of-variable and integral transform technique.
Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 52, pp. 3297-3304, (2009)
- [38] **H. Kawamura**, Experimental and analytical study of transient heat transfer for turbulent flow in a circular tube.
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 20, pp. 443-450, (1977)
- [39] **B. Foucher**, Couplage conduction convection en régime périodique établi, application au stockage de la chaleur. Thèse de Doctorat d'état, (1987).
- [40] **P. Pierson et J. Padet**, Evaluation des transferts thermo-convectifs en régime instationnaire : approche théorique et expérimentale.
Revue Générale de Technique, N° 287, pp. 781-788, Nov. (1985)
- [41] **Hadiouche**, Etude théorique en régime périodique d'un écoulement forcé à plan directeur. Mémoire de Magistère, (2008)

-
- [42] **S. Kakaç and Y. Yener:** Convective Heat Transfer. Communication
CRC. Press, Inc. (1993)
- [43] **M. T. Acker et B. Fourcher,** Analyse en régime thermique périodique du couplage conduction-convection entre un fluide en écoulement laminaire et une paroi de stockage.
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 24, N° 1, pp. 1201-1210, (1981)
- [44] **R. Larson et S. Yerazunis,** Mass transfer in turbulent flow.
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 16, pp. 121-128, (1994)
- [45] **M. N. Özisik,** Heat conduction.
John Wiley and Sons, Inc. (1980)
- [46] **R. M. Cotta, M. D. Mikhailov et M. N. Özisik,** Transient conjugated forced convection in ducts with periodically varying inlet temperature.
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 30, N° 10, pp. 2073-2082, (1987)
- [47] **Y. Taille et A. Tamir,** Application of the integral method to flows with axial conduction.
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 15, pp. 733-740, (1972)
- [48] **R. M. Cotta,** On the solution of the periodic multidimensional diffusion problem.
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 16, pp. 569-579, (1989)
- [49] **S. Kim, M. N. Özisik et M. D. Mikhailov,** On the solution of a complex eigenvalue problem of Sturm-Liouville type and application to periodic internal turbulent flow.
J. The Franklin Inst, Vol. 328, N° 4, pp. 431-443, (1991)
- [50] **S.A. Nassab, R. Moosavi et S.M. Sarvari,** Turbulent forced convection flow adjacent to inclined forward step in a duct.
Int. J. of Thermal Sciences, Vol. 48, pp. 1319–1326, (2009)
- [51] **R. M. Cotta,** Integral transforms computational heat and fluid flow.
CRC. Press, Inc. (1993)
- [52] **A. Hadiouche, et K. Mansouri,** Application of integral transform technique to the transient laminar flow heat transfer in the ducts.
Int. J. of Thermal Sciences, In press, (2009)
- [53] **G.E. Cossali,** Analytical solution of Graetz problem in pipe flow with periodic inlet temperature variation.
Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol. 52, pp. 3396–3401, (2009)

Annexe (1)

1.1. Profil de vitesse et viscosité turbulente

- **Profil de vitesse**

Nous pouvons exprimer le profil de vitesse établi en régime turbulent, par un modèle développé empiriquement par Reichardt [42], tel que :

$$u^+ = 2.5 \ln(1 + 0.4y^+) + 7.8 \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{11}\right) - \left(\frac{y^+}{11}\right) \exp(-0.33y^+) \right]$$

$$\text{ou : } \begin{cases} u^+ = \frac{u(\eta)}{\sqrt{\tau_w / \rho}} \\ u(\eta) = \frac{u(y)}{u_m}, \text{ avec } \eta = \frac{y}{b} = \frac{y}{R_1} \\ y^+ = (1 - \eta)R^+ \\ R^+ = \frac{\text{Re}}{2^{2-m}} \sqrt{\frac{f_m}{8}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 0: \text{ Plaques parallèles} \\ m = 1: \text{ Conduit cylindrique} \end{cases}$$

y^+ : est la distance adimensionnelle mesurée dès la paroi vers le centre du conduit.

- **Viscosité turbulente**

Il est essentiel de connaître la viscosité turbulente ε_m et la diffusivité thermique turbulente ε_h , l'expression empirique de la viscosité turbulente d'après Reichardt [42], s'écrit :

$$\frac{\varepsilon_m}{\nu} = -1 + \left(\frac{1}{1 + 0.4y^+} + 7.8 \left[\left(\frac{1}{11}\right) \exp\left(-\frac{y^+}{11}\right) - \left(\frac{1}{11}\right) \exp(-0.33y^+) + 0.03y^+ \exp(-0.33y^+) \right] \right)^{-1}$$

Le nombre de Prandtl turbulent est défini comme étant le rapport entre la viscosité turbulente et la diffusivité thermique turbulente :

$$\text{Pr}_t = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_h}.$$

d'après l'expérience de Larson et Yrazunis [44], Pr_t est supposé constant pour l'air, et sa valeur peut être pris environ de $\text{Pr}_t = 0.86$ et $\text{Pr} = 0.70$.

Remarque : les travaux de Kim et Özisik [28] et Kakaç et Li [30], ont utilisé les mêmes valeurs de Pr_r et Pr qui sont évaluées par Larson et Yerazunis [44].

1.2. Détermination de coefficient de frottement

- **Plaques parallèles**

La relation entre le nombre de Reynolds ($Re = u_m D_e / \nu$) et R^+ est donnée d'après [28] par :

$$\frac{Re}{2^{2-m}} = \int_0^{R^+} u^+ dy^+ \quad (*)$$

ou bien :

$$\sqrt{\frac{f_m}{8}} \int_0^1 u(\eta) d\eta = 1 \quad (**)$$

Pour un nombre de Reynolds donnée, l'équation (**) fournit une équation transcendante peut être utilisée pour déterminer f_m .

- **Conduit cylindrique :**

Une corrélation expérimentale fournit par [29] s'écrit telle que :

$$f_m = A_1 + \frac{A_2}{Re^{1/n}}, \quad 4 \times 10^3 \leq Re \leq 1 \times 10^7$$

$$\text{avec : } \begin{cases} A_1 = 1.28 \times 10^{-3} \\ A_2 = 0.1143 \\ n = 3.2154 \end{cases} .$$

Annexe (2)

2. Détermination de paramètre complexe \tilde{H} :

La distribution de la température dans la paroi du conduit, respectivement pour les plaques parallèles et le conduit cylindrique prend la forme suivante :

$$\tilde{\theta}_s(\xi, \eta) = C_1 \cos(\tilde{\beta}_s \eta) + C_2 \sin(\tilde{\beta}_s \eta)$$

$$\tilde{\theta}_s(\xi, \eta) = C_3 J_0(\tilde{\beta}_s \eta) + C_4 Y_0(\tilde{\beta}_s \eta)$$

2.1. Plaques parallèles

Pour les plaques parallèles le paramètre complexe \tilde{H} est donné par:

$$\tilde{H} = \gamma \frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} \frac{\sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1}\right) - \left[\frac{\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right) - Bi_{ext} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right)}{Bi_{ext} \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right) + \frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right)} \right] \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1}\right)}{\cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1}\right) + \left[\frac{\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right) - Bi_{ext} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right)}{Bi_{ext} \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right) + \frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right)} \right] \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1}\right)}.$$

Il intègre les effets des trois paramètres qui gouvernent le problème de transfert thermique conjugué complet, à savoir γ , β_s , et le nombre de Biot (Bi_{ext}). Pour de faibles valeurs de β_s ($\sin \tilde{\beta}_s \approx \tilde{\beta}_s$), l'effet de la conduction thermique dans la paroi peut être négligeable, en obtenant :

$$\lim_{\beta_s \rightarrow 0} \tilde{H} = -\gamma \frac{\tilde{\beta}_s^2 (R^* - 1) - Bi_{ext} (R^* - 1)^2 - Bi_{ext} \tilde{\beta}_s^2 R^*}{(R^* - 1)^2 [1 + Bi_{ext} (R^* - 1)]},$$

et si la surface extérieure de la paroi est isolée ($Bi_{ext} \rightarrow 0$), le coefficient \tilde{H} devient:

$$\tilde{H} = -\frac{\gamma}{(R^* - 1)} \left[\tilde{\beta}_s^2 - Bi_{ext} (R^2 - 1) \right].$$

2.2. Conduit cylindrique

$$\tilde{H} = \gamma \frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} \frac{J_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1}\right) + \left[\frac{\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} J_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right) - Bi_{ext} J_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right)}{Bi_{ext} Y_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right) - \frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} Y_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right)} \right] Y_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1}\right)}{J_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1}\right) + \left[\frac{\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} J_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right) - Bi_{ext} J_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right)}{Bi_{ext} Y_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right) - \frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1} Y_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right)} \right] Y_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1}\right)}.$$

Pour une paroi mince ($\beta_s \rightarrow 0$), l'effet de la conduction thermique dans la paroi peut être négligeable :

$$\lim_{\beta_s \rightarrow 0} \tilde{H} = -\gamma \frac{\tilde{\beta}_s^2 (R^* - 1) \left(\frac{1}{R^*} + 1 \right) - 2 Bi_{ext} (R^* - 1)^2 - Bi_{ext} \tilde{\beta}_s^2 \ln\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right)}{2 (R^* - 1)^2 \left[1 + \left(\frac{R^* - 1}{R^*} \right) + Bi_{ext} \ln\left(\frac{\tilde{\beta}_s R^*}{R^* - 1}\right) - Bi_{ext} \ln\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{R^* - 1}\right) \right]}.$$

Quand ($Bi_{ext} \rightarrow 0$), nous obtenons:

$$\tilde{H} = -\frac{\gamma}{(R^* - 1)} \left[\tilde{\beta}_s^2 - Bi_{ext} (R^* - 1) \right],$$

Annexe (3)

3. Quelques valeurs propres et fonctions propres :

Table. A3.1 : Valeurs propres et fonctions propres (conduit à deux plaques avec température constante imposée à la paroi).

k	μ_k ($Re = 10^4$)	μ_k ($Re = 10^5$)	μ_k ($Re = 10^6$)
1	3.1260e+0 + 1.3120e-11i	7.3175e+0 + 1.4915e-10i	1.8310e+1 - 2.7553e-11i
2	1.7957e+1 - 1.2157e-13i	4.5213e+1 + 7.7916e-12i	1.2280e+2 - 2.9503e-12i
3	3.0401e+1 - 9.3246e-12i	8.0354e+1 + 5.9857e-13i	2.1817e+2 - 2.9756e-13i
4	4.2919e+1 - 1.9841e-11i	1.1521e+2 + 1.5095e-12i	3.1278e+2 - 7.7275e-12i
5	5.5422e+1 + 8.4246e-15i	1.4959e+2 + 1.7535e-12i	4.0721e+2 - 4.0085e-14i
6	6.7915e+1 - 2.1816e-13i	1.8341e+2 - 3.5968e-14i	5.0160e+2 + 1.2443e-16i
7	8.0413e+1 - 2.6924e-14i	2.1683e+2 - 1.7245e-13i	5.9598e+2 - 4.3757e-13i
8	9.2912e+1 - 1.1039e-13i	2.5018e+2 + 4.7042e-12i	6.9036e+2 - 1.1391e-13i
9	1.0541e+2 - 5.0869e-15i	2.8364e+2 + 8.3898e-14i	7.8472e+2 - 5.3925e-13i
10	1.1792e+2 + 3.9732e-14i	3.1723e+2 - 4.0018e-15i	8.7903e+2 - 2.2870e-13i
11	1.3042e+2 + 1.9430e-12i	3.5087e+2 + 9.3782e-17i	9.7327e+2 - 1.3312e-15i
12	1.4292e+2 - 1.1312e-27i	3.8450e+2 + 5.8658e-13i	1.0674e+3 - 2.5132e-14i
13	1.5543e+2 - 4.1819e-15i	4.1810e+2 - 1.6949e-18i	1.1615e+3 - 1.1921e-15i
14	1.6793e+2 + 4.1114e-8i	4.5169e+2 - 1.0593e-14i	1.2554e+3 + 3.7278e-16i
15	1.8044e+2 - 7.8793e-15i	4.8527e+2 - 5.0325e-15i	1.3491e+3 + 2.3869e-18i
16	1.9294e+2 - 4.5413e-18i	5.1886e+2 + 1.0883e-18i	1.4427e+3 + 2.3244e-16i
17	2.0545e+2 - 4.7530e-14i	5.5245e+2 + 6.5648e-18i	1.5362e+3 + 1.2822e-07i
18	2.1796e+2 - 3.8775e-21i	5.8605e+2 - 1.8005e-16i	1.6295e+3 - 1.8354e-17i
19	2.3046e+2 - 3.1484e-17i	6.1965e+2 - 2.2667e-15i	1.7227e+3 - 1.9334e-19i
20	2.4297e+2 + 8.8506e-16i	6.5324e+2 - 4.2206e-17i	1.8158e+3 + 1.0444e-16i

Table. A3.2 : Valeurs propres et fonctions propres (paroi épaisse : $Re = 10^5$, $\Omega = 1$, $a^+ = 8.5e - 3$, $Bi_{ext} = 0$ et $r_{th} = 50$).

k	Plaques parallèles		Conduit cylindrique	
	μ_k	$\psi(\mu_k, 1)$	μ_k	$\psi(\mu_k, 1)$
1	5.0621e+0 - 2.2241e-08i	5.0896e-1 - 4.2133e-09i	8.7126e+0 + 9.4159e-9i	5.7736e-1 + 8.8274e-10i
2	4.2908e+1 - 5.8196e-11i	-1.3446e+0 + 3.2902e-11i	6.3159e+1 - 1.8209e-11i	-7.3366e-1 + 3.7235e-12i
3	7.7550e+1 - 1.7133e-10i	1.9451e+0 - 1.1530e-10i	1.0960e+2 - 1.0769e-10i	7.9223e-1 - 2.1461e-11i
4	1.1166e+2 + 2.0562e-10i	-2.6116e+0 - 1.4592e-10i	1.5513e+2 - 4.9682e-11i	-8.5311e-1 + 9.3201e-12i
5	1.4501e+2 - 1.9028e-11i	3.3594e+0 - 1.3157e-11i	2.0005e+2 + 3.9344e-13i	9.3016e-1 + 6.7897e-14i
6	1.7773e+2 - 7.4620e-10i	-4.0221e+0 + 6.8045e-10i	2.4435e+2 - 5.2082e-12i	-1.0174e+0 + 8.0779e-13i
7	2.1037e+2 - 4.0140e-11i	4.4452e+0 - 2.4147e-11i	2.8807e+2 + 1.4114e-15i	1.0954e+0 + 1.9297e-16i
8	2.4332e+2 - 7.7304e-13i	-4.6885e+0 + 4.5148e-13i	3.3145e+2 - 6.7148e-11i	-1.1422e+0 + 8.0382e-12i
9	2.7657e+2 + 5.4044e-13i	4.8904e+0 + 3.1566e-13i	3.7482e+2 - 9.5028e-11i	1.1513e+0 - 1.0094e-11i
10	3.0995e+2 - 1.2130e-13i	-5.1122e+0 + 7.1175e-14i	4.1838e+2 + 1.5025e-5i	-1.1349e+0 - 1.4578e-06i
11	3.4333e+2 + 9.2876e-08i	5.3440e+0 + 5.4297e-08i	4.6219e+2 - 1.0865e-16i	1.1106e+0 - 9.9179e-18i
12	3.7668e+2 + 1.8320e-14i	-5.5578e+0 - 1.0593e-14i	5.0618e+2 - 1.2050e-14i	-1.0893e+0 + 1.0543e-15i
13	4.1005e+2 - 1.1477e-14i	5.7396e+0 - 6.5537e-15i	5.5026e+2 - 9.0578e-12i	1.0744e+0 - 7.6455e-13i
14	4.4344e+2 + 1.7503e-16i	-5.8932e+0 - 9.8957e-17i	5.9434e+2 - 2.2168e-16i	-1.0646e+0 + 1.8039e-17i
15	4.7687e+2 - 3.2940e-16i	6.0289e+0 - 1.8501e-16i	6.3841e+2 + 4.0949e-16i	1.0571e+0 + 3.2028e-17i
16	5.1032e+2 - 1.6546e-15i	-6.1543e+0 + 9.2531e-16i	6.8246e+2 - 5.5697e-06i	-1.0494e+0 + 4.1793e-07i
17	5.4380e+2 + 3.8664e-14i	6.2725e+0 + 2.1549e-14i	7.2650e+2 - 1.2120e-17i	1.0404e+0 - 8.7287e-19i
18	5.7728e+2 - 8.1407e-16i	-6.3836e+0 + 4.5234e-16i	7.7056e+2 - 1.7333e-11i	-1.0299e+0 + 1.2011e-12i
19	6.1078e+2 + 8.4448e-18i	6.4879e+0 + 4.6797e-18i	8.1463e+2 + 4.8008e-10i	1.0186e+0 + 3.2119e-11i
20	6.4429e+2 - 3.3611e-13i	-6.5857e+0 + 1.8583e-13i	8.5872e+2 + 3.0018e-14i	-1.0070e+0 - 1.9460e-15i