

## ANALYSE DE FIABILITE DES STRUCTURES : MODELISATION PAR LA METHODE SANS MAILLAGE DE GALERKIN EFG

MAHDAD M'hamed<sup>1</sup>, BELAIDI Idir<sup>2</sup>, BENOUALI Abdelhamid<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Centre National d'Etudes et Recherches Intégrées du Bâtiment (CNERIB), Souidania, Alger

<sup>2</sup>Laboratoire d'Energétique, Mécanique et Ingénierie, Université M'hamed Bougara de  
Boumerdes

E-Mail : mahdadm@yahoo.fr

### Résumé

Cet article concerne une simulation numérique comparative de structures en mécanique et génie civil, basée sur les méthodes éléments finis MEF et la méthode sans maillage de Galerkin EFG, réalisée dans un ordre de difficulté croissante pour mettre en évidence les contraintes et les déformations des modèles considérés. Nous montrons l'efficacité de la méthode sans maillage EFG, pour caractériser le comportement statique des poutres et plaques trouées soumise à un chargement de traction en contraintes planes, en comparant notamment les performances de cette méthode (via le code MATLAB) par rapport à la méthode classique par élément fini (sous le logiciel ANSYS). Dans ce contexte, on met en exergue une des particularités très recherchée en simulation numérique, à savoir que sur un ensemble de nœuds répartis dans le domaine d'influence, la construction d'un maillage reliant ces nœuds n'est plus exigée, à cet effet, la fonctionnalité des algorithmes EFG par rapport à la distribution irrégulière des points sur le domaine d'intérêt donne des résultats d'une qualité supérieure aux éléments finis, en raison de sa stabilité et de sa convergence rapide, et de son aptitude à évaluer les contraintes et les déplacements maximums. En outre, la méthode sans maillage EFG a un temps de calcul plus élevé en comparaison avec la méthode les éléments finis, ceci est dû à l'imposition des conditions limites de type Lagrange dans les cas bidimensionnels qui exige plus de temps de calcul.

**Mots clés** Simulation, Eléments finis, méthodes sans maillage, mécanique de la rupture, méthodes sans maillage de Galerkin.

### Abstract

This article provides a comparative simulation of structures and mechanical engineering, based on finite element methods FEM and meshless Galerkin method EFG performed in order of increasing difficulty to highlight the stresses and strains of the models considered. We show the effectiveness of meshless EFG method to characterize the static behavior of beams and perforated plates subjected to tensile loading in plane stress, in particular by comparing the performance of this method (via the MATLAB code) compared to the classical finite element method (in ANSYS). In this context, it highlights one of the highly sought after features in digital simulation, ie a set of nodes distributed in the area of influence, the construction of a mesh connecting these nodes is no longer required in this

*Indeed, the functionality of the algorithms EFG compared to the irregular distribution of points on the area of interest gives the results of a high quality finite element because of its stability and its fast convergence, and its ability to assess the maximum stresses and displacements. In addition, the method meshless EFG has a higher computation time compared with the finite element method, this is due to the imposition of boundary conditions in the Lagrange case dimensional which requires more computation time.*

**Key words** Simulation, Finite element method, fracture mechanic, meshless methods, mesh-free methods of Galerkin.

## 1. Introduction

Le principal objectif de l'optimisation fiabiliste est de trouver une solution optimale des structures en satisfaisant simultanément un certain niveau de fiabilité. Généralement, un problème d'optimisation fiabiliste est formulé comme un problème général d'optimisation classique en prenant en compte l'indice de fiabilité dans les contraintes (Jhojan. E, 2008).

L'analyse de fiabilité est l'évaluation probabiliste du risque ou de la défaillance d'un système sur certaines limites spécifiées (HALDAR et al. 2000 b). Selon Melchers (1987), la fiabilité est la probabilité rapportée à la parfaite opération d'un système structural donné durant un certain temps, appelé temps de vie utile, en conditions normales d'opération.

Une bonne synthèse des techniques d'analyse de fiabilité appliquées à des systèmes structuraux est présentée dans les travaux de Haldar et al. (2000a), Melchers et (2004). Parmi les principales méthodes numériques développées pour l'analyse de fiabilité des structures, on peut citer : la simulation de Monte Carlo (SMC), les méthodes d'approximation locale de premier et deuxième ordre (FORM - First Order Reliability Method et SORM-Second Order Reliability Method) et la méthode de surface de réponse liée à ces dernières techniques. Selon Kharmanda (2002), la méthode hybride permet de diminuer les coûts de calcul par rapport à la méthode d'optimisation fiabiliste, très coûteuse et sujet à des problèmes de convergence.

La plupart des méthodes classiques de modélisation en mécanique sont basées sur la discrétisation du domaine continu en employant des maillages. Parmi les plus connues sont les méthodes des éléments finis (MEF), des volumes finis et des différences finies. Ces techniques dépendent fortement du maillage du système pour formuler et résoudre les équations qui décrivent les problèmes mécaniques. D'autre part, il existe des méthodes sans maillage qui n'exigent pas des mailles structurées. Elles adoptent seulement un ensemble de points ou nœuds dispersés dans le domaine d'intérêt.

La méthode sans maillage de Galerkin EFG, employée, utilise des théories d'approximation basées sur des fonctions de forme construites entièrement à partir de points arbitrairement distribués (Belytschko et al. 1994). Elle est basée sur la résolution de la forme faible des équations aux dérivées partielles par une méthode de Galerkin. Dans la méthode EFG, chaque point a une fonction poids non nulle sur une partie du domaine, appelée domaine



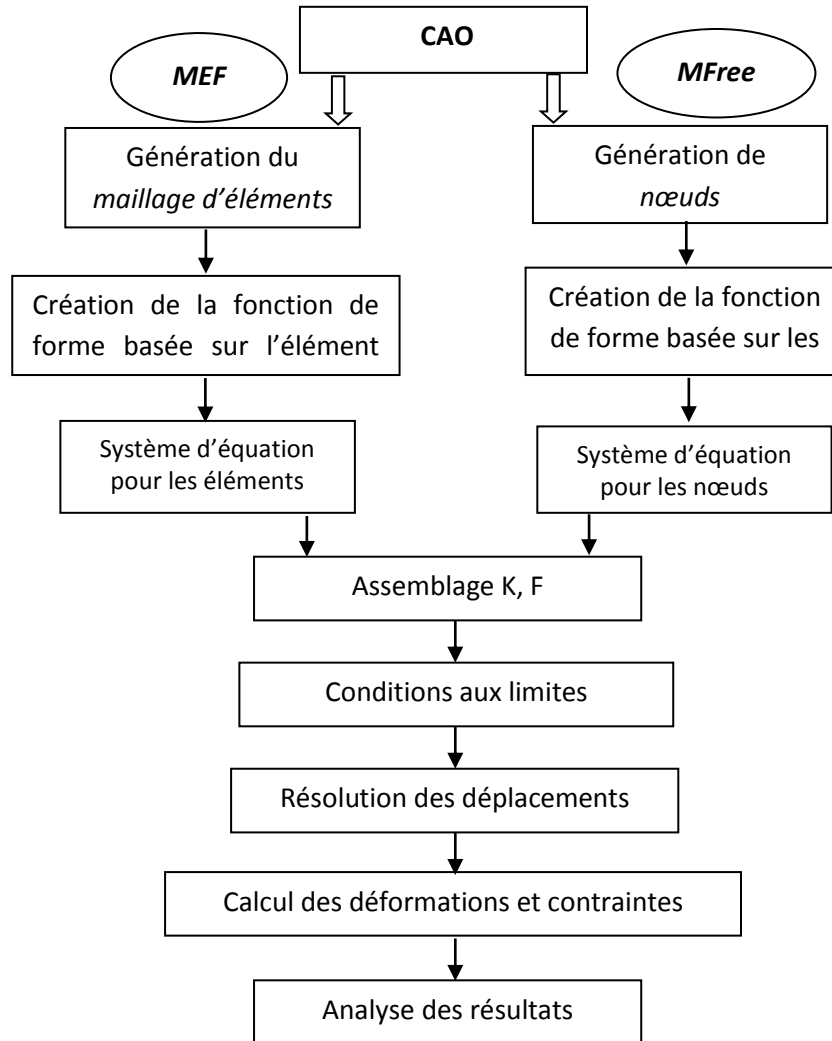
d'influence. La valeur de la fonction approchée en un point dépend des points qui se trouvent dans le domaine d'influence. Ces points interprètent le point par une technique appelée l'approximation par MCM (Moindres carrés mobiles) à partir des valeurs de la fonction d'approximation des points (Liu GR et al. 1999).

Au niveau des applications de la méthode sans maillage de Galerkin on cite les travaux de M. Duflot. (2004) qui exposent leur méthode pour résoudre les problèmes de propagation de fissures. Quelques études proposent l'utilisation de formulations mixtes d'interpolations des éléments finis et interpolations sans maillage de Galerkin (Xiaofei Pan et al. 2010). La modélisation de stratifiés composites à travers la méthode EFG est proposée par Chen et al. (2003) pour le calcul des fréquences propres.

Cet article porte sur une simulation numérique comparative des structures mécaniques en 2D, basée sur les méthodes MEF et EFG et une solution analytique. Le cas des poutres et structures trouées, soumises à un chargement de traction en contraintes planes a été traité, la fonctionnalité des algorithmes EFG par rapport à la distribution irrégulière des points sur le domaine d'intérêt est mise en exergue. Une comparaison avec la méthode FEM sous le logiciel ANSYS confirmera tout l'intérêt et la pertinence de la méthode EFG en chargement statique.

## **2. Démarche de résolution (éléments finis/ méthodes sans maillage)**

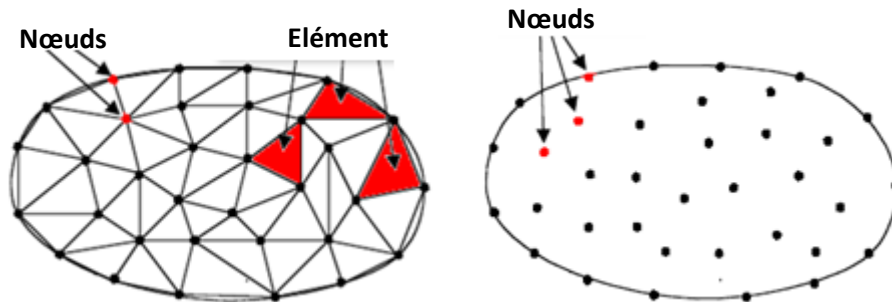
La démarche suivie dans la méthode des éléments finis et les méthodes sans maillage pour la résolution des problèmes physiques est illustrée par l'organigramme (FIG.1),



**Fig.1:** Les étapes suivies par les deux méthodes pour la résolution d'un problème physique.

Selon cet organigramme, les deux méthodes divergent aux étapes de création du maillage. La différence fondamentale entre ces deux méthodes se situe dans la construction des fonctions de forme.

Dans la méthode des éléments finis, les fonctions de forme sont construites à partir des éléments, et seront les mêmes dans chaque famille, ces fonctions de forme sont habituellement prédéterminées pour différents types d'éléments, avant de commencer l'analyse par éléments finis.



**Fig.2** Méthode des éléments finis (a); Méthode sans maillage(b)

Cependant, dans les méthodes sans maillage, les fonctions de forme sont construites habituellement seulement pour un point particulier. Cette fonction de forme change quand l'endroit de ce point change, la construction des fonctions de forme s'effectue pendant l'analyse, et non avant l'analyse comme il est le cas dans la méthode des éléments finis (M. Dufloy, 2004).

### 2.1 Procédure de modélisation sans maillage de Galerkin

La méthode Element Free Galerkin EFG est développée par Belytschko et al., basée sur la méthode des éléments diffuse (DEM) développée par Nayroles et al. Cette méthode se caractérise par :

1. Construction des fonctions de forme à partir d'une approximation par moindres carrées mobiles.
2. Utilisation de la forme faible de Galerkin pour développer l'équation du système discrétisée.
3. Utilisation d'un sous maillage pour l'intégration (quadrature de Gauss).

### 2.2 Formulation de la méthode EFG avec multiplicateur de Lagrange

Considérant un problème bidimensionnel dans un domaine  $\Omega$  limité par la frontière  $\Gamma$ . Les équations différentielles partielles et les conditions aux limites du système (problème 2D) peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$L^T \sigma + b = 0 \quad (1)$$

Equation d'équilibre du domaine  $\Omega$  du problème

$u = \bar{u}$  Condition limite de la frontière  $\Gamma_u$

$\sigma n = \bar{t}$  Dans la frontière naturelle  $\Gamma_t$

Où :

L : Matrice des opérateurs différentiels.

En 2D :

$$L = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (2)$$

La forme faible contrainte de Galerkin avec multiplicateur de Lagrange s'écrit sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega} \delta (Lu)^T (cLu) d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u^T \bar{t} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \lambda^T (u - \bar{u}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta u^T \lambda d\Gamma = 0 \quad (3)$$

En remplaçant l'ensemble des quantités matricielles dans la forme variationnelle, on trouve :

$$\begin{aligned} \delta U^T [KU - F] + \delta \Lambda^T (G^T U - Q) + \delta U^T G \Lambda &= 0 \\ \delta U^T [KU + G\Lambda - F] + \delta \Lambda^T (G^T U - Q) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

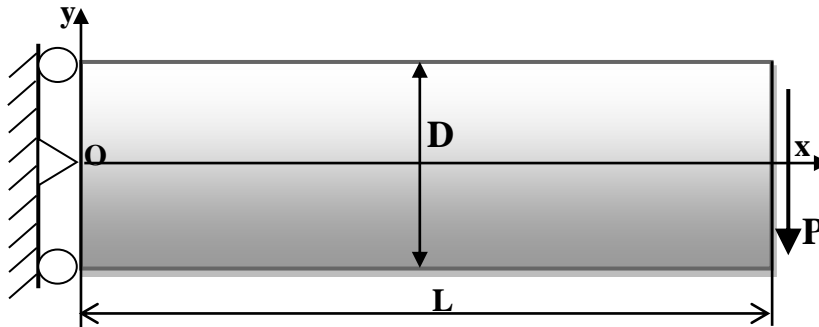
Qui peut s'écrire :

$$\begin{cases} KU + G\Lambda - F = 0 \\ G^T U - Q = 0 \end{cases} \quad (5)$$

### 3. Mise en œuvre d'un test de validation de la méthode EFG

Nous avons choisi l'exemple d'une poutre Timoshenko afin de pouvoir établir une comparaison entre les deux méthodes : méthode sans maillage « *Element Free Galerkin* » et la méthode analytique exacte dont la solution analytique connue.

En vue d'effectuer une analyse quantitative, la poutre en porte-à-faux est soumise à une traction parabolique à l'extrémité libre.



**Fig.3 :** Poutre Timoshenko soumise à une traction parabolique à l'extrémité libre

### 3.1 Propriétés mécaniques de la poutre

On considère ici une poutre encastree de longueur  $L$ , de hauteur  $D$ , soumise à l'action d'une force transversale parabolique concentrée  $P$  à l'extrémité libre (Fig. 3).

Dans cet exemple, on admet les valeurs suivantes des paramètres :

- Chargement :  $-1000\text{ N}$
- Module de Young :  $E=3 \times 10^7\text{ N/m}^2$
- Coefficient de Poisson:  $\nu = 0.3$
- Largeur de la poutre :  $D=12\text{m}$
- Longueur de la poutre:  $L=48\text{m}$
- Epaisseur de la poutre : *Unité*

### 3.2 Solution analytique

Les distributions des contraintes et déplacements dans la poutre sont décrites par les équations suivantes [13]:

La formule de la traction parabolique est donnée par :

$$t_y = -\frac{P}{2I} \left( \frac{D^2}{4} - y^2 \right) \quad (6)$$

Le déplacement dans la direction  $x$  est donné par :



$$u(x, y) = -\frac{Py}{6EI} \left[ (6L - 3x)x + (2 + \nu) \left( y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right] \quad (7)$$

Où le moment d'inertie  $I$  d'une poutre à section rectangulaire avec l'épaisseur transversale égale à l'unité :

$$I = \frac{D^3}{12} \quad (8)$$

Le déplacement dans la direction  $y$  est donné par :

$$v(x, y) = \frac{P}{6EI} \left[ 3\nu y^2(L - x) + (4 + 5\nu) \frac{D^2 x}{4} + (3L - x)x^2 \right] \quad (9)$$

La contrainte normale à la section de la poutre :

$$\sigma_{xx}(x, y) = -\frac{P(L - x)y}{I} \quad (10)$$

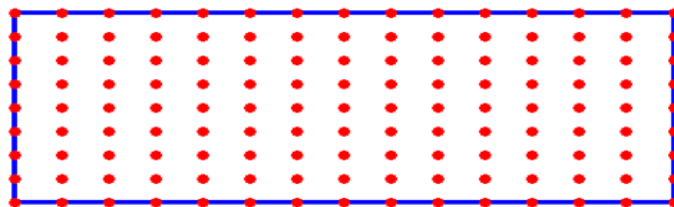
La contrainte normale dans la direction  $y$  :  $\sigma_{yy} = 0$

La contrainte de cisaillement :

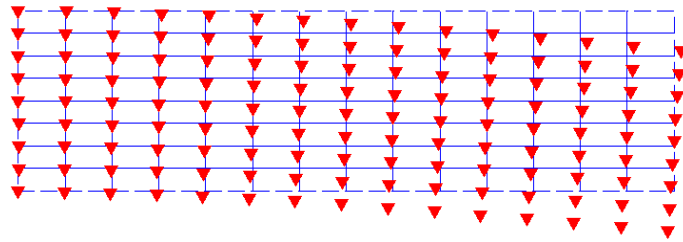
$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{P}{2I} \left[ \frac{D^2}{4} - y^2 \right] \quad (11)$$

### 3.3 Mise en œuvre informatique

L'exécution du programme EFG implémenté sous Matlab renvoie le schéma de la figure 4.



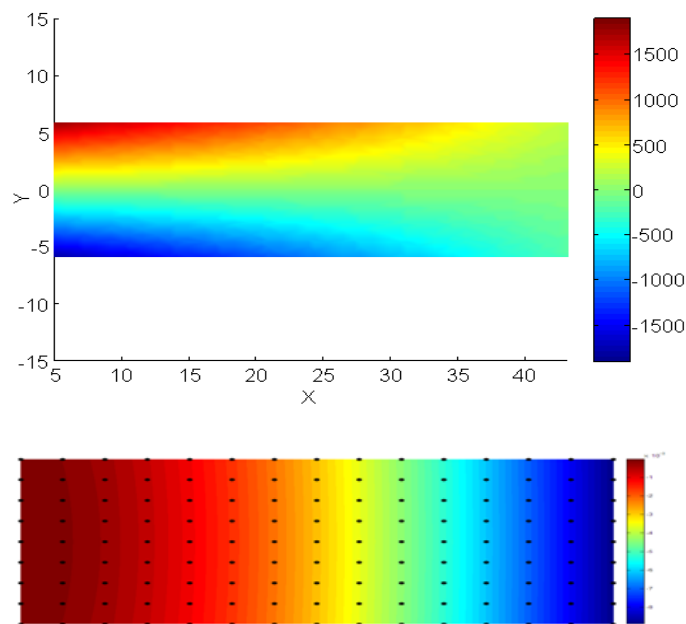




**Fig.4 :** Configuration déformée et non déformée du modèle de poutre sans maillage

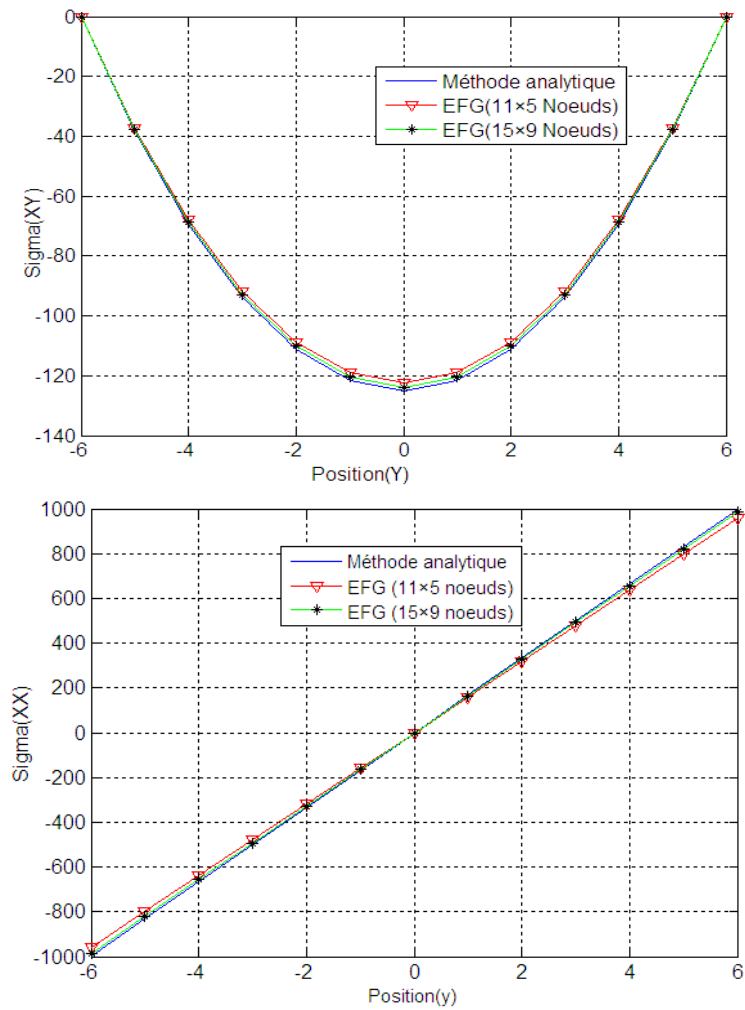
La Figure 4 illustre le modèle sans maillage de la poutre déformée et non déformée (pour 15x9 points uniformément distribués).

Les résultats obtenus la méthode EFG, pour la distribution de contraintes ( $\sigma_{xx}$  normales) et de des déplacements verticaux le long de la poutre sont illustrés dans la figure 5.



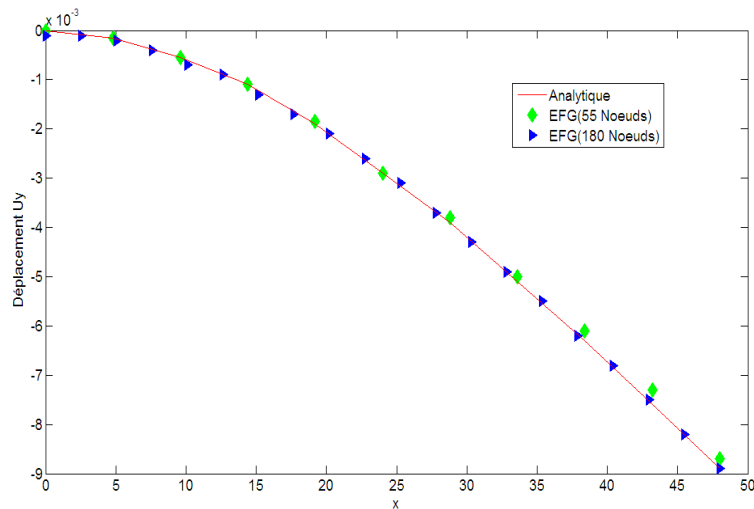
**Fig.5 :** Distribution de contraintes ( $\sigma_{xx}$ ) et de déplacement par la méthode EFG

La figure 6 illustre bien l'évolution des contraintes (de cisaillement  $\sigma_{xy}$ , normale  $\sigma_{xx}$ ) situées au milieu de la poutre ( $x = L / 2$  et  $y = -D/2 : D/2$ ) en utilisant la méthode EFG et l'expression de la solution exacte (superposition des deux graphes), afin de comparer les résultats.



**Fig.6 :** Comparaison des résultats de contraintes : (a) normale, (b) de cisaillement.

Les résultats du déplacement obtenus par la méthode EFG et le modèle analytique pour le de la poutre sont illustrés dans la figure 7.



**Fig. 7 :** Déplacement vertical  $U_y$  de la poutre à l'axe central ( $y=0$ ) obtenu par la méthode EFG et le modèle analytique.

#### 4. Simulation d'une plaque trouée en traction uniforme

L'intérêt de cette étude vise à illustrer l'applicabilité des algorithmes EFG décrits dans la section précédente à travers des simulations numériques pour des plaques présentant des défauts (trou). Cette application permettra de mettre en évidence aussi la fonctionnalité des algorithmes par rapport à la distribution irrégulière des points, avec la combinaison des algorithmes de création automatique des points du logiciel élément fini ANSYS (ANSYS User's Guide), qui est souvent utilisée dans l'industrie et la recherche et couvre plusieurs secteurs de la mécanique, notamment la mécanique de la rupture.

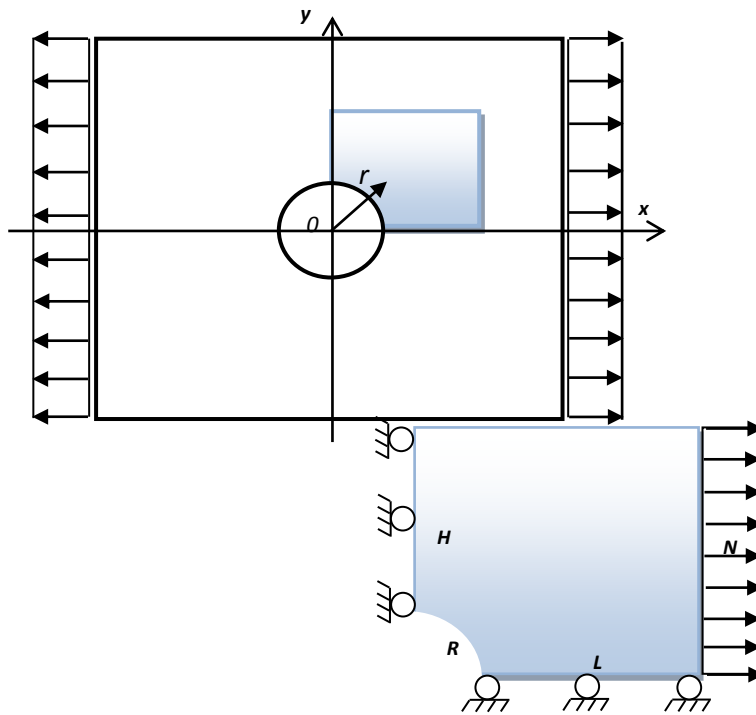


Fig.8 : modélisation du 1/4 de la plaque trouée

**Condition de symétrie**

La plaque est bloquée suivant l'axe Oy le long du côté H et suivant Ox le long du côté L.

**Propriétés mécanique**

Les propriétés géométriques et mécaniques sont résumées dans le Tableau suivant :

$L$	$H$	$a$	$E$	$\nu$	$N_x$
5	5	1	$1 \times 10^3$	0.3	1

Tableau.1 : Propriété mécanique de la plaque trouée

**4.1 Solution analytique du problème**

Timoshenko et Goodier (1987) [13] détaillent le modèle analytique des contraintes sur une plaque infinie avec un trou au milieu. Elle est soumise à une traction normale ( $N_x$ ) dans la direction Ox. Les distributions des contraintes dans la plaque trouée ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$ ) est décrite par les équations suivantes :



$$\sigma_{xx} = N_x \left[ 1 - \frac{R^2}{r^2} \left( \frac{3}{2} \cos(2\theta) + \cos(4\theta) \right) + \frac{3R^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right] \quad (13)$$

$$\sigma_{yy} = N_x \left[ -\frac{R^2}{r^2} \left( \frac{3}{2} \cos(2\theta) - \cos(4\theta) \right) - \frac{3R^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right] \quad (14)$$

$$\sigma_{xy} = N_x \left[ -\frac{R^2}{r^2} \left( \frac{3}{2} \sin(2\theta) + \sin(4\theta) \right) + \frac{3R^4}{2r^4} \sin(4\theta) \right] \quad (15)$$

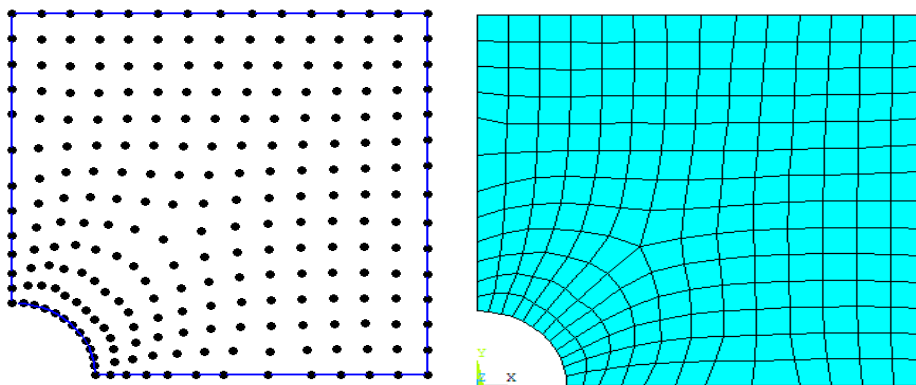
#### 4.2. Résultats de l'analyse

Nous illustrons le potentiel de la méthode EFG pour simuler un problème de plaque trouée bidimensionnel.

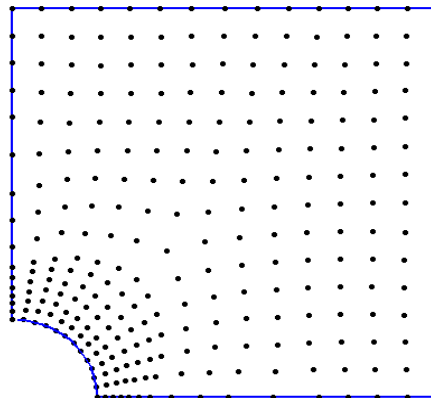
La figure 9 montre la distribution irrégulière de points (nœuds) sur la plaque avec le logiciel ANSYS.12.

Les simulations en éléments finis utilisent des éléments d'élasticité PLANE42 qui est formé par 4 nœuds et 2 d.d.l. ( $U_x$  et  $U_y$ ) par nœuds. En sachant que le logiciel ANSYS emploie des algorithmes de création de maillages optimisés, la procédure de modélisation via EFG couple la génération de points d'ANSYS dans ses procédures.

Pour comparer les résultats, la même distribution des points est utilisée ci-après (FIG.9).



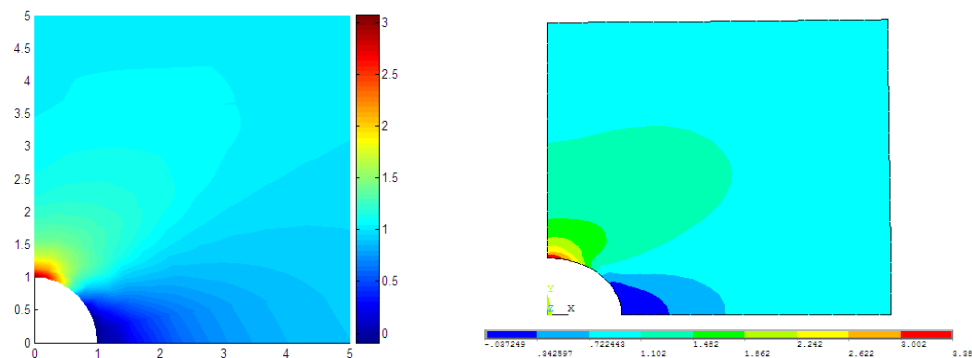
**Fig.9** : Modèles de plaque trouée pour les méthodes FEM et EFG pour 241 nœuds



**Fig.10 :** *Discretisation de plaque par la méthode EFG adapté (333 nœuds)*

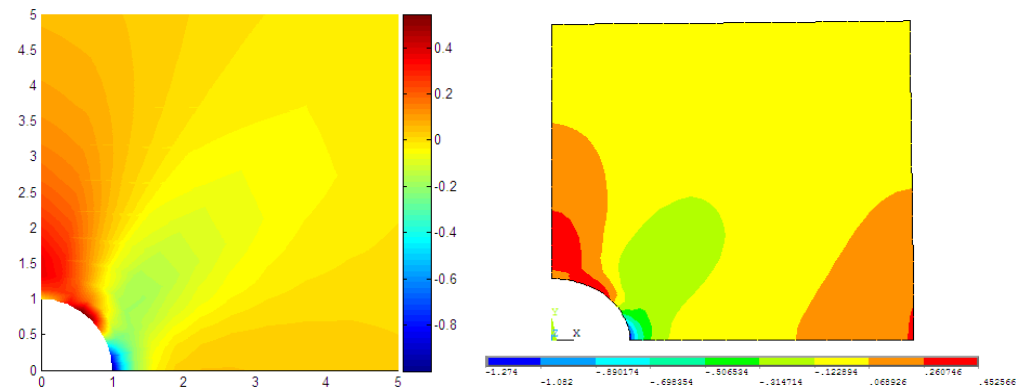
Les différents résultats de simulation obtenus, tels que : Les distributions des contraintes dans la plaque trouée ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$ ) sont récupérés et analysés.

En regard de ces figures, il est aisé de constater que les distributions de déplacements sont très proches pour les deux méthodes de modélisation.

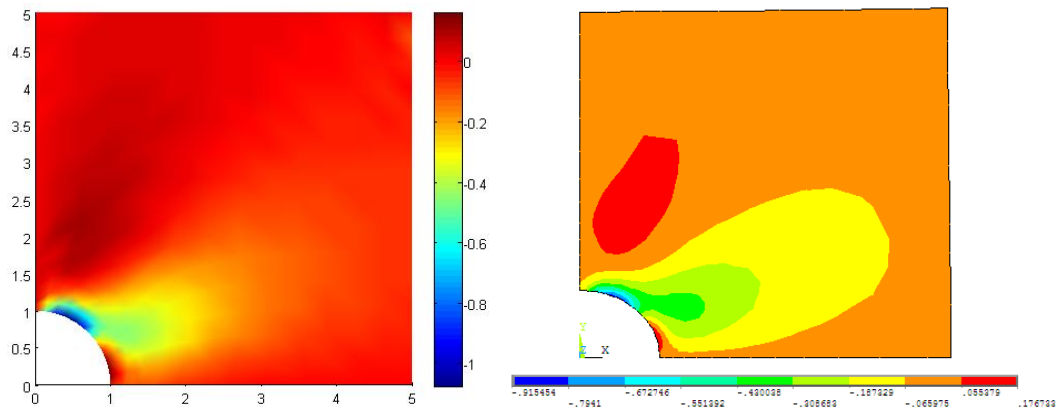


**Fig.11 :** *Les contraintes  $\sigma_{xx}$  suivant la direction  $x$  obtenus par les deux méthodes EFG et FEM*

La Figure 12 permet de comparer les contraintes dans les directions  $x$  et  $y$  de la plaque trouée par les deux méthodes de modélisation pour une même distribution de nœuds.



**Fig.12 :** Les contraintes  $\sigma_{yy}$  suivant la direction  $y$  obtenus par les deux méthodes EFG et FEM



**Fig.13 :** Les contraintes  $\sigma_{xy}$  obtenus par les deux méthodes EFG et FEM

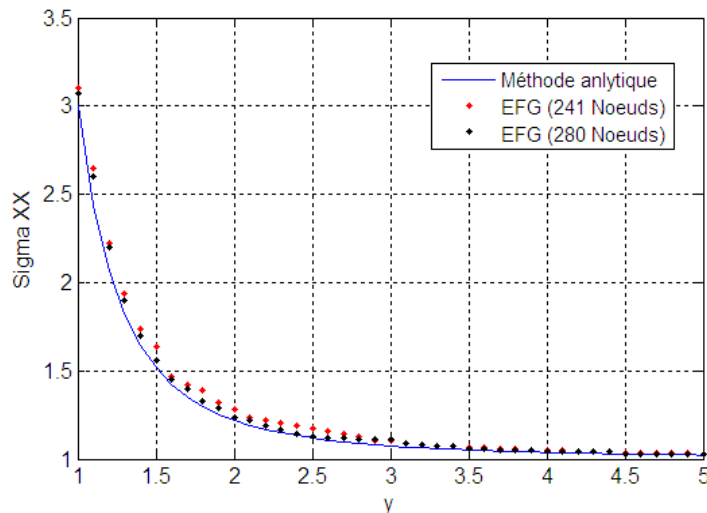
A l'instar des remarques établies pour les distributions des contraintes par les deux méthodes de modélisation, nous constatons également une distribution très proche de contraintes par les deux méthodes de numérique.

Le Tableau 2 contient les résultats des déplacements ( $U_x$ ,  $U_y$ ) et contraintes ( $S_x$ ,  $S_y$ ) maximaux calculés à partir de la méthode MEF et EFG, ainsi que leurs différences perceptuelles ou erreurs relatives, pour une même distribution des points du domaine.

**Tableau.2 :** Déplacements et contrainte maximums obtenus par EFG et FEM.

Paramètre	EFG	FEM	Erreur (%)
$U_x$	0.006128	0.006176	0.772
$U_y$	-0.00220	-0.002206	0.2719
$S_x$	3.1552	3.232	2.3163
$S_y$	0.5085	0.517	1.664

Les résultats des contraintes et déplacements présentés dans le tableau.2 sont très proches, ce qui permet d'en déduire que nous pouvons approcher par les méthodes de modélisations EFG et FEM le mode de comportement de la plaque trouées.  
 Les variations relative entre les résultats analytiques et ceux obtenus par les deux méthodes numériques sont aussi représentées dans les FIG .14.



**Fig.14 :** Contrainte normale  $\sigma_{xx}$  sur la plaque le long de la section  $x=0$ , obtenus par la méthode MEF, EFG et le modèle analytique.

Nous remarquons que la superposition des courbes contraintes relatives aux valeurs obtenues par les méthodes numérique EFG et MEF d'une part, et la confrontation avec la solution analytique d'autre part, ont produit presque la même allure, ce qui permet de valider la méthode EFG implémentée pour la modélisation des plaques carrées en présence des défauts.

Au rapport des résultats obtenus, nous constatons que les deux techniques de modélisation EFG et MEF diffèrent aux étapes de création du maillage, la différence fondamentale entre ces deux méthodes se situe dans la construction des fonctions de forme. Dans la méthode des éléments finis, les fonctions de forme sont construites à partir des éléments, et seront les mêmes pour chaque élément de la même famille, ces fonctions de forme sont habituellement prédéterminées pour différents types d'éléments, avant de commencer l'analyse par éléments finis. Par contre la méthode EFG consiste à utiliser des fonctions de forme de l'approximation MLS. Cette approximation est construite sans l'existence d'un maillage du domaine dans la discrétisation de chacune des composantes du champ de déplacement.

Les résultats obtenus dans ce travail ont permis, d'une part, de positionner la méthode EFG vis-à-vis de la méthode des éléments finis, et d'autre part, de calibrer certains paramètres concernant l'intégration stabilisée (influence du domaine d'intégration et choix du nombre de points d'intégration). Un point marquant est que l'approche EFG donne des résultats d'une qualité supérieure aux éléments finis pour les applications bidimensionnelles, montrent que la méthode sans maillage converge très bien, reste performante lorsqu'on observe l'évaluation



des contraintes et déplacements maximums par les deux méthodes de modélisation (EFG et FEM), en revanche, la méthode sans maillage EFG a un temps de calcul plus élevé en comparaison avec la méthode les éléments finis, ceci est dû à l'imposition des conditions limites de type Lagrange dans les cas bidimensionnels qui exige plus de temps de calcul.

## 5. Conclusion

La base théorique pour l'incorporation de la modélisation sans maillage dans la méthodologie d'analyse de fiabilité est présentée dans cet article. Les procédures de modélisation mathématique et algorithmique (EFG) développées, intégrées à la méthodologie de conception fiabiliste se sont avérées efficaces pour caractériser le comportement statique des poutres et plaques trouées en élasticité linéaire, où nous avons enregistré de meilleures performances (contrainte, déformations), par rapport la méthode analytique et celle des éléments finis, en jouissant de l'avantage particulier de partir d'un ensemble de nœuds répartis dans le domaine, évitant ainsi la construction d'un maillage qui relie ces nœuds, et la possibilité d'insérer, ou de retirer des nœuds très facilement. Cette particularité était d'un grand avantage pour la simulation des problèmes complexes de fissuration (cas de plaque infinie), car il n'est pas nécessaire de reconstruire le maillage entre chaque étape de calcul.

## Référence

- ANSYS User's Guide, Revision 12.0 Tutorials, Swanson Analysis System, 2012.
- BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L. Element-free Galerkin Methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 37, p. 229-256, 1994.
- CHEN, X. L.; LIU, G. R.; LIM, S. P. An Element Free Galerkin Method for the Free Vibration Analysis of Composite Laminates of Complicated Shape. Composite Structures, v.59, p. 279-289, 2003.
- HALDAR, A.; MAHADEVAN, S. Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design, John Wiley & Sons, Inc., New York, USA, 2000 b.
- HALDAR, A.; MAHADEVAN, S. Reliability Assessment Using Stochastic Finite Element Analysis. John Wiley & Sons, Inc., New York, USA, 2000 a.
- Jhojan Enrique ROJAS. « Méthodologie d'analyse de fiabilité basée sur des techniques heuristiques d'optimisation et modèles sans maillage: applications aux systèmes mécaniques ». Phd thesis, Université Fédérale d'Uberlândia, 2008.
- KHARMANDA, G. ; MOHAMED, A. ; LEMAIRE, M. Efficient Reliability-based Design Optimization Using a Hybrid Space with Application to Finite Element Analysis. Structural Multidisciplinary Optimization, v. 24. p. 233-245, 2002.
- Liu GR and Yang KY, A New Meshless Method for Stress Analysis for Solids and Structure, Proceedings of Fourth Asia-Pacific Conference on Computational Mechanics, 15-17 December, Singapore 1999.
- M. DufLOT. « Application des méthodes sans maillage en mécanique de la rupture ». Phd



thesis, Université de Liège, 2004.

MELCHERS, R. E.; M. AHAMMED, A Fast Approximate Method for Parameter Sensitivity Estimation in Monte Carlo Structural Reliability, Computers and Structures, v. 82, p. 55-61, 2004.

MELCHERS, R. E. Structural Reliability Analysis and Prediction. Ellis Horwood Limited, England, 1987.

Nayroles B, Touzot G and Villon P, Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. Computational Mechanics, 10, 307-318.1992.

Timoshenko, S. P. Goodier, J. N. Theory of Elasticity. McGraw-Hill, New York. 1987.

Xiaofei Pan, Huang Yuan, Applications of the element-free Galerkin method for singular stress analysis under strain gradient plasticity theories, Engineering Fracture Mechanics journal 2010.