N^0 d'ordre : ..../ 2015...../ 2016.

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE M'HAMED BOUGARA BOUMERDES
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

l

Mémoire pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques

Domaine: Mathématique-Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse mathématique

THÈME

THÉORÈMES DU POINT FIXE DES CONTRACTIONS MULTI-VOQUES DANS L'ESPACE MÉTRIQUE PARTIEL CÔNE

Présenté Par:

GHERBIA Zahia

Soutenu publiquement, le ..../..../ 2016 devant le jury composé de:

Mme	**K. LAOUBI**	Maître de conférences /B	U.M.B.B.	Présidente.
M.	**Y. ADJABI**	Maître de conférences /B	U.M.B.B.	Encadreur.
M.	**M. MAZIANI**	Maître de assistant /A	U.M.B.B.	Examinateur.

Remerciements

Avant tout je remercier Dieu tout puissant de nous savoir donnée le courage et patience pour la réalisation de ce travail.

Un grand merci à mon promoteur de mémoire, le docteur Y. Adjabi pour sa patience et son encouragement à finir ce travail.

Je voudrais remercier aux membres du jury à savoir, Mme K. Laoubi, Mr M. Maziani qui ont accepté d'évaluer ce travail.

Certaines personnes ne peuvent être oubliées à savoir ceux qui sont passés temps durant ces années de formation, Mm Laoubi, Mm Seba, Mm Mechrouk, Mr Adjabi, Mr Khlifati, Mr Osmanov, Mr Abassov, et tous les enseignants de département de mathématique, sans oublier tous les personnels travaillants de département mathématiques.

Nous remercions toute l'équipe de nos promotions et en particulier nos collègues d'étude Master 2 analyse mathématique.

J'exprime toute ma gratitude du fond du coeur à ma mère, mon père mon oncle Mouhemed et Zaki et toute ma famille pour leur soutien constant et leur soin le plus attentif.

Mes remerciments vont encore a tous mes amis et qui m'ont accompagès durant mon ce jour.

Table des matières

Introduction générale

dcr12En analyse, un *théorème de point fixe* est un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un point fixe.Ces théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématiques.

La notion d'espace métrique, introduite en 1906 par Mr. Fréchet et développée peu après par F. Hausdorff.

Le concept d'espace métrique partiel était introduit par Matthews en 1994 [6, 1992]. La topologie de tels espaces métriques partiels est un peu particulière. Précisément, la distance d'un point à lui même peut ne pas être égale à zéro. De plus, la limite d'une suite convergente n'est pas unique. Matthews a étendu le principe de Banach aux espaces métriques partiels complets. Après le résultat de Matthews, beaucoup de résultats intéressent de point fixe ont été établis dans des espaces métriques partiels.

Récemment, L. G. Huang et X. Zhang [2007] ont introduit la notion d'espace métrique cône (cone metric space), où l'ensemble des nombres réels est remplacé par un espace de Banach partiellement ordonné. Ils ont établi des théorèmes de point fixe dans un tel espace.

Le théorème de Nadler (1969) est une généralisation du principe de contraction de Banach pour les contractions multivoques, i;e., des contractions d'un espace métrique complet à valeurs dans l'espace de tous les sous-ensembles fermés, bornés, non-vides de cet espace, muni de la métrique de Hausdorff.

Le théorème de Caristi (1976), qui garantit l'existence d'un point fixe d'une fonction d'un espace métrique complet à valeur dans lui-même et respectant une condition particulière sur $d(x, f(x))$, a plus tard été généralisé aux fonctions multivoques.

Souvent, pour généraliser le principe de Banach (1922) classique, on a recours à modifier la topologie de l'espace X dans lequel on étudie l'existence de point fixe.

Ultérieurement, beaucoup de résultats de point fixe ont été élaborés pour des contractions faibles et leurs généralisations. On s'intéressera dans ce mémoire de prouver certains théorèmes de point fixe des contractions univoques ou multivoques dans des espaces métriques partiels cônes. La démarche est décrite dans [4, 1] et [7].

Ce travail est réparti en trois chapitres:

Le premier chapitre est consacré d'une part, à quelques définitions concernant les cônes et d'autre part, à un résultat principal qui concerne les espaces métriques partiels.

Dans le chapitre 2, nous allons présenter quelques théorèmes de point fixe pour les applications définies sur les espaces métriques partiels (voir [1]).

Nous poursuivons dans le chapitre 3, la présentation de quelques théorèmes de point fixe, nous vous proposons de découvrir et de dévlopper certains théorèmes pour les applications multivoques définies sur les espaces métriques cônes. Ensuite, nous appliquons ces mêmes résultats de point fixe, nous établissons des résultats de point fixe pour les applications univoques et multivoques définies sur les espaces métriques partiels cônes.

Enfin, ce mémoire est clôturé par une conclusion et une bibliographie.

Chapitre 1

Des résultats dans l'espace métrique partiel et métrique partiel cône

1.1 Introduction

Commençons ce chapitre par quelques définitions, quelques lemmes et quelques propositions qu'on utilisera dans les chapitres suivants.

1.2 Quelques définitions d'Analyse multivoque

Soit X un espace normé. On désigne par 2^X l'ensemble des parties de X.

Comme nous l'avons dit précédemment, nous nous intéressons dans ce mémoire aux applications dites multivoques. Ce sont des applications dont les images ne sont pas nécessairement des points comme en analyse classique, mais des ensembles. Dans cette section, nous allons présenter quelques définitions et propriétés relatives à ces fonctions.

Définition 1.1. *Considérons deux ensembles X et Y. Si à tout élément x de X, on fait correspondre un sous ensemble bien déterminé Tx de Y, on dit alors que la correspondance $x \longmapsto T(x)$ est une application multivoque de X dans Y.*

$$\textit{graphe } (T) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in T(x)\}.$$

On dit que l'ensemble $T(x)$ est l'image de x par T.

Dans la littérature, ces applications sont aussi appelées *multi-applications*, fonctions *multivaluées*, *multifonctions* ou encore *correspondances*.

Remarque 1.1. *Remarquons qu'une application univoque est aussi une application multivoque puisque pour $x \in X$ le singleton $f(x) = \{y\}$ est un sous-ensemble de Y.*

Une application multivoque définie sur X et à valeurs dans les sous-ensembles de Y sera notée $T : X \to 2^Y$, ou encore $T : X \rightrightarrows Y$ pour faire la différence avec la notation usuelle des applications univoques.

Définition 1.2. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et $T : X \longrightarrow 2^X$ une application multivoque.*

i. *T est dite à valeurs fermées si pour tout $x \in X$, $T(x)$ est fermé.*

ii. *T est dite semi-continue supérieurement (s.c.s) en $x_0 \in X$ si pour tout ouvert W tel que $T(x_0)$ est dans W, il existe un voisinage ouvert $v(x_0)$ dans X tel que pour tout $x \in v(x_0)$ on a $T(x) \subset W$.*

iii. *T est dite bornée si pour tout ensemble borné B dans X, l'ensemble $T(B)$ est borné dans X, c'est-à-dire*

$$\sup_{y\in B}\{\sup\{\|x\| : x\in T(y)\}\}<\infty.$$

iv. *T possède un point fixe s'il existe $x\in X$ tel que $x\in T(x)$.*

Définition 1.3. *Soit E un espace de Banach. X un sous ensemble non vide, fermé de E et $T : X\longrightarrow 2^X$ un opérateur multivoque à valeurs non vides, fermées. T est dit semi-continu inférieurement (s.c.i) si l'ensemble $\{x\in X : T(x)\cap C\neq\varnothing\}$ est ouvert pour tout ensemble ouvert C dans E.*

Exemple 1.

1. *L'application multivoque $T_1 : \mathbb{R}\longrightarrow 2^{\mathbb{R}}$ définie par*

$$T_1(x)=\begin{cases}[-1,1] & si\ x=0,\\ \{0\} & si\ x\neq 0.\end{cases}$$

est s.c.s en $x=0$ et n'est pas s.c.i en $x=0$.

2. *L'application multivoque $T_2 : \mathbb{R}\longrightarrow 2^{\mathbb{R}}$ définie par*

$$T_2(x)=\begin{cases}\{0\} & si\ x=0,\\ [-1,1] & si\ x\neq 0.\end{cases}$$

est s.c.i en $x=0$ et n'est pas s.c.s en $x=0$.

1.3 Éspace métrique partiel

1.3.1 L'éspace métrique

Définition 1.4. (espace métrique) *Soit X un ensemble non vide.un métrique sur X est une application $d : X\times X\rightarrow\mathbb{R}^+$ telle que pour tous $x,\ y,\ z\in X$,*

$M_0 : 0\leq d(x,\ y)$, (positivité),

M_1 : si $x=y\Longrightarrow d(x,\ y)=0$, (nullité sur la diagonale),

M_2 : si $d(x,\ y)=0$ alors $x=y$, (séparation),

$M_3 : d(x,\ y)=d(y,\ x)$, (symétrie),

$M_4 : d(x,\ z)\leq d(x,\ y)+d(y,\ z)$, (inégalité triangulaire).

Un espace métrique est une paire (X,d) tel que X est un ensemble non vide et d est un métrique sur X.

Remarque 1.2. *On dit parfois distance à la place de métrique. Si l'on n'impose pas* (M_2), *on dit que* d *est une semi-distance sur* X.

Définition 1.5. (ultramétrique) *si une distance* d *vérifie la propriété suivante:*

$$d(x,\ z) \leq \max\{d(x,\ y),\ d(y,\ z)\},$$

On dit que d *est ultra-métrique.*

Définition 1.6. (contractante) *Soient* $(X,\ d)$ *un espace métrique ,et* $T : X \longrightarrow X$ *une application, on dit que* T *est contractante s'il existe* $c \in (0,\ 1)$ *tel que pour tout* $x \in X$ *on ait*

$$d\left(T\left(x\right),\ T\left(y\right)\right) \leq cd\left(x,\ y\right).$$

Définition 1.7. (faiblement contractante) *soient* $(X,\ d)$ *un espace métrique,et soit* $T : X \longrightarrow X$ *une application on dit que* T *est faiblement contractante s'il existe* $c \in (0,\ 1)$ *tel que pour tout* $x \in X$ *on ait* $d\left(y,\ T\left(y\right)\right) \leq cd\left(x,\ y\right)$.

1.3.2 L'espace métrique partiel

Définition 1.8. (espace métrique partiel) *Soit* X *un ensemble non vide. Un métrique partiel sur* X *est une application* $p : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *telle que pour tous* $x,\ y,\ z \in X$, *on a*

$p_1 : p\left(x,\ x\right) \leq p\left(x,\ y\right),$
$p_2 : x = y \Longleftrightarrow p\left(x,\ x\right) = p\left(x,\ y\right) = p\left(y,\ y\right),$
$p_3 : p\left(x,\ y\right) = p\left(y,\ x\right),$
$p_4 : p\left(x,\ y\right) \leq p\left(x,\ z\right) + p\left(z,\ y\right) - p(y,\ y).$

Un espace métrique partiel est une paire $(X,\ p)$ tel que X est un ensemble non vide et p est un métrique partiel sur X.

Exemple 2. *la fonction* $\rho_i : X \times X \to \mathbb{R}^+ (i \in \{1, 2, 3\})$ *définie par:*

$\rho_1(x,\ y) = d(x,\ y) + p(x,\ y),$
$\rho_2(x,\ y) = \rho(x,\ y) + \max\{w(x), w(y)\},$
$\rho_3(x,\ y) = d(x,\ y) + a.$

est un métrique partiel dans X *où* $w : X \to \mathbb{R}^+$ *est une fonction arbitraire et* $a \geq 0$.

Preuve.

1a. -$\rho_1(x,y) = d(x,y) + p(x,y)$.

$\rho_1(x,x) = d(x,x) + p(x,x)$, on a $0 = d(x,x) \leq d(x,y)$, et $p(x,x) \leq p(x,y)$.

donc,

$$d(x,x) + p(x,x) \leq d(x,y) + p(x,y) = \rho_1(x,y),$$

2a. -$\rho_2(x,y) = p(x,y) + \max\{w(x), w(y)\}$.

$\rho_2(x,x) = p(x,x) + \max\{w(x), w(x)\}$, on a $p(x,x) \leq p(x,y)$ et $\max\{w(x), w(y)\}$,

donc,

$$p(x,x) + \max\{w(x), w(x)\} \leq p(x,y) + \max\{w(x), w(y)\} = \rho_2(x,y).$$

3a. -$\rho_3(x,y) = d(x,y) + a$.

$$\rho_3(x,x) = p(x,x) + a \leq p(x,y) + a,$$

car $0 = d(x,x) \leq d(x,y)$, ce qui implique la 1^{er} condition est satisfie.

1b. $x = y \iff \rho_1(x,x) = \rho_1(x,y) + \rho_1(y,y)$,

$$\begin{aligned} x = y \quad \iff \quad & \rho_1(x,x) = d(x,x) + p(x,x) \\ & = d(x,y) + p(x,y) = d(y,y) + p(y,y). \\ \iff \quad & \rho_1(x,x) = \rho_1(x,y) = \rho_1(y,y). \end{aligned}$$

2b. $x = y \iff \rho_2(x,x) = \rho_2(x,y) + \rho_2(y,y)$,

$$\begin{aligned} x = y \quad \iff \quad & \rho_2(x,x) = p(x,x) + \max\{w(x), w(x)\} \\ & = p(x,y) + \max\{w(x), w(y)\} \\ & = p(y,y) + \max\{w(y), w(y)\} \\ \iff \quad & \rho_2(x,x) = \rho_2(x,y) = \rho_2(y,y). \end{aligned}$$

3b. $x = y \iff \rho_3(x,x) = \rho_3(x,y) + \rho_3(y,y)$,

$$\begin{aligned} x = y \quad \iff \quad & \rho_3(x,x) = d(x,x) + a \\ & = d(x,y) + a = d(y,y) + a. \\ \iff \quad & \rho_3(x,x) = \rho_3(x,y) + \rho_3(y,y). \end{aligned}$$

La 2^{eme} condition est satisfie.

1c. $\rho_1(x,y) = d(x,y) + p(x,y) = d(y,x) + p(y,x) = \rho_1(y,x)$.

2c. $\rho_2(x,y) = p(x,y) + \max\{w(x), w(y)\} = p(y,x) + \max\{w(y), w(x)\} = \rho_2(y,x)$.

3c. $\rho_3(x,y) = d(x,y) + a = d(y,x) + a = \rho_3(y,x)$.

La 3^{eme} condition est satisfie.

1d.

$$\begin{aligned}\rho_1(x,y) &= d(x,y)+p(x,y)\\ &\leq d(x,z)+d(z,y)-d(z,z)+p(x,z)+p(z,y)-p(z,z),\end{aligned}$$

car $d(z,z)=0$, donc, $\rho_1(x,y)\leq \rho_1(x,z)+\rho_1(z,y)-\rho_1(z,z)$.

2d.

$$\begin{aligned}\rho_2(x,y) &= p(x,y)+\max\{w(x),w(y)\}\\ &\leq p(x,z)+p(z,y)-p(z,z)+\max\{w(x),w(z)\}+\max\{w(z),w(y)\}-\max\{w(z),w(z)\}\\ &\leq \rho_2(x,z)+\rho_2(z,y)-\rho_2(z,z).\end{aligned}$$

3d.

$$\begin{aligned}\rho_3(x,y) &= d(x,y)+a\leq d(x,z)+d(z,y)+2a\\ &\leq \rho_3(x,z)+\rho_3(z,y).\end{aligned}$$

La 4^{eme} condition est satisfie.

Donc (X,ρ_i) est un espace métrique partiel. ■

Exemple 3. *on considère la fonction* $p:\mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^-\to\mathbb{R}^+$ *définie par :*

$$p(x,y)=-\min\{x,y\},$$

pour tout $x,\ y\in X$, *le paire* $(\mathbb{R}^-,p)$ *est un espace métrique partiel.*

Preuve. En effet, pour tous $x,\ y,\ z\in\mathbb{R}^-$,

P_1. $\min\{x,\ y\}\leq x$ donc $p(x,\ y)\geq p(x,\ x)=-x$.

P_2. on pose $p(x,\ y)=p(x,\ y)=p(y,\ y)$,donc $-x=-y$ d'où $x=y$.

P_3. c'est évident que $p(x,\ y)=p(y,\ x)$.

P_4. on vérifie cela $\min\{x,\ z\}\geq\min\{x,\ y\}+\min\{y,\ z\}-\min\{y,\ y\}$,

En considérant les cas $y\leq x\leq z,\ x\leq y\leq z$ et $x\leq z\leq y$, d'où

$$p(x,\ z)\leq p(x,y)+p(y,\ z)-p(y,\ y).$$

Les boules ouvertes sont les $B_\varepsilon(x)=\{Y\in\mathbb{R}^- : -\min\{x,\ y\}<\varepsilon\}=(-\varepsilon,0)$ avec autrement,si $x<-\varepsilon$ alors $p(x,\ x)=-x>\varepsilon$ et $B_\varepsilon(x)=\varnothing$.

On pose que $y\in B_\varepsilon(x)$, alors $-\min\{x,\ y\}<\varepsilon$ lequel implique que $\min\{x,\ y\}>-\varepsilon$. D'où $y>-\varepsilon$. ■

Exemple 4. *Soit* $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *est définie par* $p(x, y) = \max\{x, y\}$ *pour tous* $x,\ y \in \mathbb{R}^+$.*alors* $(\mathbb{R}^+,\ p)$ *est un espace métrique partiel.*

Preuve. On vérifie que pour tous $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}^+$.
P_1 : $\max\{x, y\} \geq y$ donc $p(x,\ y) \geq p(x,\ x)$,
P_2 : on pose que $p(x,\ x) = p(x,\ y) = p(y,\ y)$ alors $x = y$,
P_3 : c'est évident que $p(x,\ y) = p(y,\ x)$,
P_4 : on vérifie que

$$\max\{x,\ z\} \leq \max\{x,\ y\} + \max\{y,\ z\} - \max\{y,\ y\},$$

On considère les cas $y \leq x \leq z,\ x \leq y \leq z$ et $x \leq z \leq y$, d'où

$$p(x,\ z) \leq p(x,\ y) + p(y,\ z) - p(y,\ y).$$

Les boules ouvertes sont les $B_\varepsilon(x)$ de la forme

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^+ : \max\{x,\ y\} < \varepsilon\} = B(0,\ \varepsilon),$$

avec $x \leq \varepsilon$ autrement, if $x \geq \varepsilon$, alors $B_\varepsilon(x)$ .on pose que $y \in B_\varepsilon(x)$ alors $\max\{x, y\} < \varepsilon$ qui implique que $y < \varepsilon$. ■

Définition 1.9. (espace métrique d'Hausdorff) *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $CB(X)$ *la famille de toute les sous ensembles fermés et bornés de* X, $\forall\ A,\ B \in X$ *on définit*

$$H(A,\ B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a,\ B),\ \sup_{b \in B} d(b,\ A)\}, \tag{1.3.1}$$

où $d(x,\ A) = \inf\{d(x,\ a) : a \in A\}$, *la distance entre le point* a *et l'ensemble* A, H *est le métrique dans* $CB(X)$,*c'est le métrique d'Hausdorff induite par le métrique* d.

Soit $(X,\ p)$ un espace métrique partiel et soit $CB^p(X)$ la famille de toute les sous-ensembles fermés et bornés dans l'espace métrique partiel $(X,\ p)$.

Définition 1.10. A *est dite ensemble borné dans* $(X,\ p)$ *si* $\exists x_0 \in X$ *et* $M \geq 0$ *tel que pour tout* $a \in A$ *on a* $a \in B_p(x_0,\ M)$, *c'est*

$$p(x_0,\ a) < p(a,\ a) + M. \tag{1.3.2}$$

Pour $A,\ B \in CB^p(X)$ et $x \in X$, on définit

$$p(x,\ A) = \inf\{p(x,\ a),\ a \in A\},$$

et

$$\delta_p(B,\ A) = \sup\{p(b,\ A) : b \in B\},$$

et

$$\delta_p(A,\ B) = \sup\{p(a,\ B) : a \in A\},$$

et on a

$$p(x,\ A) = 0 \Rightarrow p^s(x,\ A) = 0,$$

où

$$p^s(x,\ A) = \inf\{p^s(x,\ A), a \in A\},$$

Maintenant, on étudier quelques propriétés de l'application

$$\delta_p : CB^p(X) \times CB^p(X) \longrightarrow [0, +\infty[\,,$$

Proposition 1.1. *soit (X, p) un espace métrique partiel pour tous $A,\ B,\ C \in CB^p(X)$, nous avons le suivant*

i. $\delta_p(A,\ A) = \sup\left\{p(a,\ a) : a \in A\right\}.$

ii. $\delta_p(A,\ A) \leq \delta_p(A,\ B).$

iii. $\delta_p(A,\ B) = 0 \Longrightarrow A \subseteq B.$

iv. $\delta_p(A,\ B) \leq \delta_p(A,\ C) + \delta_p(C,\ B) - \inf_{c \in C} p(c,\ c).$

Preuve.

i. de

$$(p(a,\ A) = p(a,\ a)), \tag{1.3.3}$$

Si $A \in CB^p(X)$ alors pour tout $a \in A$ nous avons $p(a,\ A) = p(a,\ a)$ comme $\overline{A} = A$ par conséquent

$$\delta_p(A,\ A) = \sup\{p(a,\ A) : a \in A\} = \sup\{p(a,\ a) : a \in A\}.$$

ii. soit $a \in A$ depuis $p(a,\ a) \leq p(a,\ b)$ pour tout $b \in B$ par conséquent nous avons

$$p(a,\ a) \leq p(a,\ B) \leq \delta_p(A,\ B),$$

de (i) nous concluons que

$$\delta_p(A,\ A) = \sup\{p(a,\ a) : a \in A\} \leq \delta_p(A,\ B),$$

iii. on pose $\delta_p(A,\ B) = 0$ par conséquent $p(a,\ B) = 0$ pour tout $a \in A$ de (i) et (ii) on a

$$p(a,\ a) \leq \delta_p(A,\ B) = 0 \text{ pou tout } a \in A,$$

alors

$$p(a,\ a) = 0 \text{ pour tout } a \in A,$$

d'où

$$p(a,\ B) = p(a,\ a) \text{ pour tout } a \in A,$$

de (1.3.3) nous avons $a \in \overline{B} = B$ pour tout $a \in A$ donc $A \subseteq B$

iv. soit $a \in A,\ b \in B$ et $c \in C$ comme

$$p(a,\ b) \leq p(a,\ c) + p(c,\ b) - p(c,\ c),$$

donc nous avons

$$p(a,\ B) \leq p(a,\ c) + p(c,\ B) - p(c,\ c),$$

et

$$p(a,\ B) + p(c,\ c) \leq p(a,\ c) + \delta_p(C,\ B).$$

Comme c est un élément arbitraire de C alors nous avons

$$\delta_p(A,\ B) \leq \delta_p(A,\ C) + \delta_p(C,\ B) - \inf_{c \in C} p(c,\ c).$$

■

Soit $(X,\ p)$ un espace métrique partiel pour tous $A,\ B \in CB^p(X)$ on définit

$$H_p(A,\ B) = \max\{\delta_p(A,\ B), \delta_p(B,\ A)\}. \tag{1.3.4}$$

Proposition 1.2. *soit* (X, p) *un espace métrique partiel pour tous* $A,\ B \in CB^p(X)$, *on définit*

h_1. $H_p(A,\ A) \leq H_p(A,\ B)$.

h_2. $H_p(A,\ B) \leq H_p(B,\ A)$.

h_3. $H_p(A,\ B) \leq H_p(A,\ C) + H_p(C,\ B) - \inf_{c \in C} p(c,\ c)$.

Corollaire 1.1. *soit* $(X,\ p)$ *un espace métrique partiel pour* $A,\ B \in CB^p(X)$ *on a*

$$H_p(A,\ B) = 0 \Rightarrow A = B. \tag{1.3.5}$$

Preuve. soit $H_p(A,\ B) = 0$ par définition de H_p,

$$\delta_p(A,\ B) = \delta_p(B,\ A) = 0, \tag{1.3.6}$$

utilisant (iii) de la proposition (1.1) on obtient $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$ donc $A = B$. ■

Remarque 1.3. *la réciproque de ce corollaire n'est pas vrai en général comme il clair de l'exemple suivant:*

Exemple 5. *soit* $X = [0,\ 1]$ *et soit* $(X,\ p)$ *un espace métrique partiel définie par*

$$p(x, y) = \max\{x, y\},$$

de (i) *de la proposition* (1.1) *nous avons*

$$H_p(X,\ X) = \delta_p(X,\ X) = \sup\{x : 0 \leq x \leq 1\} = 1 \neq 0,$$

de proposition (1.2) *et corollaire* (1.1) *l'application*

$$H_p : CB^p(X) \times CB^p(X) \to [0, +\infty[\,,$$

définie un métrique partiel d' Hausdorff induit par p.

Remarque 1.4. *il facile montrer que tout Hausdorff métrique est un Hausdorff métrique partiel ; la réciproque n'est pas vrai.*

Lemme 1.3. *soit* $(X,\ p)$, *un espace métrique partiel* $A,\ B \in CB^p(X)$ *et* $r > 0$, $\forall a \in A,\ \exists b = b(a) \in B$ *tel que*

$$p(a,\ b) \leq H_p(A,\ B) + r. \tag{1.3.7}$$

Preuve. si

$$A = B,\ H_p(A,\ B) = H_p(A,\ A) = \delta_p(A,\ A) = \sup\{p(a,\ A), a \in A\}, \tag{1.3.8}$$

soit $a \in A$, alors

$$p(a,\ a) \leq \sup\{p(x,\ x), x \in A\} = H_p(A,\ B), \tag{1.3.9}$$

de(1.3.8) et (1.3.9) on a

$$p(a,\ b) \leq H_p(A,\ B) + r,$$

on pose $A \neq B$, soit $a \in A$ tel que

$$p(a,\ b) \leq H_p(A,\ B) + r,\ \forall b \in B,$$

alors

$$\inf\{p(a,\ y),\ y \in B\} \geq H_p(A,\ B) + r,$$

c'est

$$p(a,\ B) \leq H_p(A,\ B) + r$$

on note que

$$H_p(A,\ B) \geq \delta_p(A,\ B) + \sup_{x \in a} p(x,\ B) \geq p(a,\ B) \geq H_p(A,\ B) + r,$$

mais $A \neq B$

$$H_p(A,\ B) \neq 0.$$

et l'inégalité ci-dessus rapporte une contradiction. Par conséquent, il n'existe aucun $a \in A$ tel que (1.3.7) vérifier. ■

1.3.3 Suites de points d'un espace métrique partiel

Lemme 1.4. *Soit $\{x_n\}$ une suite convergente dans l'espace métrique partiel telle que $x_n \to x,\ x_n \to y$ si*

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n,\ x_n) = p(x,\ x) = p(y,\ y),$$

alors $x = y$.

Preuve. comme

$$p(x,\ y) \leq p(x,\ x_n) + p(x_n,\ y) - p(x_n,\ x_n),$$

par conséquent

$$p(x_n,\ x_n) \leq p(x,\ x_n) + p(x_n,\ y) - p(x,\ y),$$

Par les suppositions données, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n,\ x) = p(x,\ x), \lim_{n\to\infty} p(x_n,\ y) = p(y,\ y),$$

et

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n,\ x_n) = p(x,\ x),$$

par conséquent

$$c \leq p(x,\ x) + p(y,\ y) - p(x,\ y),$$

lequel montre que

$$p(y,\ y) \leq p(x,\ y) \leq p(y,\ y).$$

Aussi,

$$p(x,\ y) \leq p(y,\ x_n) + p(x_n,\ x) - p(x_n,\ x_n),$$

ce qui implique

$$p(x_n,\ x_n) \leq p(y,\ x_n) + p(x_n,\ x) - p(x,\ y),$$

lorsque $n \to \infty$ on obtient

$$p(y,\ y) \leq p(y,\ y) + p(x,\ x) - p(x,\ y),$$

et

$$p(x,\ x) \leq p(x,\ y) \leq p(x,\ x),$$

alors

$$p(x,\ x) = p(x,\ y) = p(y,\ y),$$

par conséquent $x = y$. ■

Définition 1.11. *[6]*

i. Soit $(X,\ p)$ un espace métrique partiel, la suite $\{x_n\}$ est dite de Cauchy dans X si $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,\ x_m)$ existe et finie.

ii. $(X,\ p)$ est dit complet si pour toute suite de Cauchy $\{x_n\}$ dans X converge, par rapport à τ_p, vers un point $x \in X$, tel que

$$\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,\ x_m) = p(x,\ x). \tag{1.3.10}$$

iii. $\{x_n\}$ *est dite de Cauchy dans* X *si*

$$\exists a > 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall m,\ n > \eta_\varepsilon,\ |p(x_m,\ x_n) - a| < \varepsilon. \tag{1.3.11}$$

Lemme 1.5. *[6] Soit* $(X,\ p)$ *un espace métrique partiel. Alors,*

1. $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans $(X,\ p)$ si et seulement si elle est de Cauchy dans l'espace métrique $(X,\ p^s)$.

2. $(X,\ p)$ est complet si et seulement si, l'espace métrique $(X,\ p^s)$ est complet. De plus,

$$\lim_{n\to\infty} p^s(x_n,\ x) = 0 \Longleftrightarrow p(x,\ x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n,\ x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n,\ x_m). \tag{1.3.12}$$

Lemme 1.6. *soit* $(X,\ p)$ *un espace métrique partiel et* A *un ensemble non vide dans* X, *en définie* $p(a,\ A)$ *par* $p(x_0,\ A) = \inf\{p(x_0,\ A) : a \in A\}$.*on a*

$$a \in \overline{A} \text{ si et seulement si } p(a,\ A) = p(a,\ a). \tag{1.3.13}$$

tel que $\overline{A}$ *désigne la fermeture de* A *en ce qui concerne la topologie du* p *métrique partiel.*A *est dite fermé dans* $(X,\ p)$ *si et seulement si* $A = \overline{A}$.

Preuve.

$$\begin{aligned}
a \quad \in \quad & \overline{A} \Longleftrightarrow B_p(a,\ \varepsilon) \cap A \neq \varnothing \text{ pour tout } \varepsilon > 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & p(a,\ x) < \varepsilon + p(a,\ a) \text{ pour tout } \varepsilon > 0 \text{ et } \forall x \in A \\
\Longleftrightarrow \quad & p(a,\ x) - p(a,\ a) < \varepsilon \text{ pour tout } \varepsilon > 0 \text{ et } \forall x \in A \\
\Longleftrightarrow \quad & \inf\{p(a,\ x) - p(a,\ a) : x \in A\} = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \inf\{p(a,\ x) : x \in A\} - p(a,\ a) = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \inf\{p(a,\ x) : x \in A = p(a,\ a) \\
\Longleftrightarrow \quad & p(a,\ A) = p(a,\ a).
\end{aligned}$$

■

Lemme 1.7. *Soit* $(X,\ p)$ *un espace métrique partial complet alors:*

1. si $p(x,\ y) = 0$, alors $x = y$.

2. si $x \neq y$, alors $p(x,\ y) > \ 0$.

Preuve.

1. Soit $p(x,\ y)=0$, de (P_0), on a

$$p(x,\ x)\leq p(x,\ y)=0,$$

et

$$p(y,\ y)\leq p(x,\ y)=0,$$

on trouve

$$p(x,\ x)=p(y,\ y)=p(x,\ y)=0,$$

de (P_1) on a $x=y$.

2. on pose $x\neq y$, par définition $p(x,\ y)\geq 0,\ \forall x,\ y\in X$,on pose $p(x,\ y)=0$ de $(1)\,,\ x=y$ contradiction, d'où $p(x,\ y)>0$, donc $x\neq y$.

■

Lemme 1.8. *On pose $x_n\to z$ dans l'espace métrique partiel $(X,\ p)$,tel que $p(z,\ z)=0$, alors*

$$\lim_{n\to\infty}p(x_n,\ y)=p(z,\ y);\ \forall y\in X. \tag{1.3.14}$$

Preuve. On note

$$\lim_{n\to\infty}p(x_n,\ z)=p(z,\ z)=0,$$

de l'inégalité triangulaire, on obtient

$$p(x_n,\ y)\leq p(x_n,\ z)+p(z,\ y)-p(z,\ z)=p(x_n,\ z)+p(z,\ y),$$

et

$$p(z,\ y)\leq p(z,\ x_n)+p(x_n,\ y)-p(x_n,\ x_n)\leq p(x_n,\ z)+p(x_n,\ y).$$

D'où

$$0<|p(x_n,\ y)-p(z,\ y)|\leq p(x_n,\ z),$$

on fait tendre $n\to\infty$, on conclure. ■

Lemme 1.9. *Si $\{x_n\}$ est une suite convergente dans $(X,\ p^s)$,alors elle est convergente dans l'espace métrique partiel $(X,\ p)$*

Preuve. Comme
$$\lim_{n\to\infty} p^s(x_n,\ x) = 0,$$
et
$$p(x_n,\ x_n) \leq p(x_n,\ x),\ \forall n;\ \forall x \in X,$$
ce qui implique
$$\limsup_{n\to\infty} p(x_n,\ x) - p(x,\ x) \leq \lim_{n\to\infty} p^s(x_n,\ x),$$
et par conséquent
$$\lim_{n\to\infty} p(x_n,\ x) = p(x,\ x).$$

■

Définition 1.12. (semi- continue inférieure) *Soit $(X,\ p)$ un espace métrique partiel et $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, la fonction ϕ est dit semi- continue inférieure si,*
$$\lim_{n\to\infty} p\left(x_n,\ x\right) = p\left(x,\ x\right) \Longrightarrow \phi\left(x\right) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \phi\left(x_n\right). \tag{1.3.15}$$

Définition 1.13. (boule ouverte et fermée) *Soit $(X,\ p)$ un espace métrique partiel. Pour tout $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, nous définissons respectivement la boule ouverte et fermée pour le métrique partiel p on mettent*
$$B_\varepsilon(x,\ \varepsilon) = \{y \in X : p(x,\ y) < p(x,\ x) + \varepsilon\}, \tag{1.3.16}$$

boule ouverte de centre x et de rayon ε.
$$\overline{B}_\varepsilon(x,\ \varepsilon) = \{y \in X : p(x,\ y) \leq p(x,\ x) + \varepsilon\}, \tag{1.3.17}$$

boule fermée de centre x et de rayon ε.

Remarque 1.5. *contrairement au cas de l'espace métrique, quelques p boules ouvertes peuvent être vides, comme un exemple, dans un espace métrique partiel $(X,\ p)$, la boule ouverte $B_{p(x,\ x)}(x)$ est vide pour tout $x \in X$.*

Définition 1.14. (continue) *soit $(X,\ p)$ est un espace métrique partiel. F une application*
$$F : X \to X,$$

est dite continue en $x \in X$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que
$$F(B_p(x,\ \varepsilon)) \subseteq B_p(Fx,\ \varepsilon).$$

Définition 1.15. (suite de $0-$Cauchy) *la suite $\{x_n\}_{n\in N}$ dans l'espace métrique partiel (X, p) est dite $0-$Cauchy si*

$$\lim_{n\to\infty} p(x_m, x_n) = 0$$

l'espace métrique partiel $(X,\ p)$ est dit pour être $0-$Complet si toute suite $0-$Cauchy converge à un point $x \in X$ en ce qui concerne la topologie τ_p.tel que

$$p(x, x) = 0,$$

on note que chaque suite $0-$cauchy dans $(X,\ p)$ est de Cauchy dans $(X,\ p^s)$ et que chaque espace métrique partiel complet est $0-$complet.

Lemme 1.10. *Si $(X,\ p)$ est un espace métrique partiel, alors les fonctions définies par*

$$p^s,\ p^m : X \times X \to \mathbb{R}^+,$$

$$p^s(x,\ y) = 2p(x,\ y) - p(x,\ x) - p(y,\ y),$$

et

$$p^m(x, y) = \max\left\{p(x,\ y) - p(x,\ x),\ p(x,\ y) - p(y,\ y)\right\},$$

définies le métrique équivalant dans X.

Preuve. C'est simple de voir que $p^s,\ p^m$ est un métrique dans X. en effet

$$p^m(x, y) \leq p^s(x,\ y),$$

$\forall x,\ y \in X$, comme pour chaque nombre réel a et b on a

$$a + b \leq 2\max\{a,\ b\},$$

par conséquent

$$p^s(x, y) = 2p(x,\ y) - p(x,\ x) - p(y,\ y) \leq 2\max\{p(x,\ y) - p(x,\ x), p(x,\ y) - p(y,\ y)\} = 2p^m(x,\ y),$$

d'où

$$\frac{1}{2}p^s(x, y) \leq p^m(x,\ y) \leq p^s(x,\ y),$$

alors $p^s,\ p^m$sont équivalent. ■

1.4 Éspace métrique partiel cône

1.4.1 L'éspace métrique cône

Définition 1.16. (cône) *Soit E un espace de Banach réel et $P \subseteq E$. Le sous-ensemble P est dit un cône, s'il satisfait les conditions suivantes:*

(C_1) P est fermé, $P \neq \emptyset$ $P \neq \{0_E\}$. où 0_E est un élément neutre de E .

(C_2) $ax + by \in P$ pour tous $x, y \in P$, pour tous $a, b \geq 0$.

(C_3) $P \cap (-P) = \{0_E\}$, c'est-à-dire, $x \in P$ et $-x \in P \Longrightarrow x = 0_E$ où 0_E est l'élément nul de E.

Définition 1.17. (cône normal) *Le cône P est dit normal s'il existe une constante $K > 0$ telle que: pour tout $x, y \in P$.*

$$0 \leq x \leq y \Longrightarrow \|x\|_E \leq K \|y\|_E$$

Le réel K est appelé constante normale de P.

Définition 1.18. *On dit que E est partiellement ordonné par le cône P si :*

$$x \leq y \Longrightarrow y - x \in P.$$

Définition 1.19. *Le cône P est dit régulier si pour toute suite croissante qui est majorée est convergente, c-à-d : si $\{x_n\}$ est une suite telle que: $x_1 \leq x_2 \leq .... \leq x_n \leq .... \leq y$.*

pour un certain $y \in E$, alors il existe $x \in E$ telle que: $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow +\infty$.

Proposition 1.11. *Tout cône régulier est un cône normale.*

Définition 1.20. *(espace métrique cône) Soit X un ensemble non vide. Supposons qu'une application $d : X \times X \longrightarrow E$ pour tous $x, y, z \in X$ satisfait :*

(CM_1) $0_E \leq d(x, y)$ et $d(x, y) = 0_E \iff x = y$,

(CM_2) $d(x, y) = d(y, x)$,

(CM_3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

L'application d est appelée une métrique cône sur X le couple (X, d) est appelé un espace métrique cône.

Exemple 6. *Soit $E = \mathbb{R}^2, P = \{(x; y) \in E, x \geq 0_E, y \geq 0_E\}, X = \mathbb{R}$ et l'application d : $X \times X \longrightarrow E$ définie par:*

$$d(x, y) = (|x - y|, \beta |x - y|) = |x - y| (1, \beta),$$

ou β est une constante positive. Alors (X, d) est un espace métrique cône.

Preuve. On montre que (X, d) est un espace métrique cône complet.

1. on a, $P = \{(x, y) : x, y \geq 0\}$ est un cône car: P est fermé et non vide.

i. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in P$ on a $ax + by \in P$.

ii. Soit $x \in P$ et $-x \in P$ alors, $x = 0$.

2. on a $d(x, y) = (|x - y|\,; \beta\,|x - y|)$ est une métrique cône.$\forall x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$,

et si $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

$$d(x, y) = (|x - y|\,; \beta\,|x - y|) \geq 0$$

car $|.| \geq 0$ et $\beta \in (0, 1)$, et si

$$\begin{aligned} d(x, y) &= 0 \Rightarrow (|x - y|\,; \beta\,|x - y|) = (0, 0) \\ &\Rightarrow |x - y| = 0 \\ &\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

$\forall x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$, on a

$$d(x, y) = (|x - y|\,; \beta\,|x - y|) = (|y - x|\,; \beta\,|y - x|) = d(y, x),$$

$\forall x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, on a

$$\begin{aligned} d(x, y) &= (|x - y|\,; \beta\,|x - y|) \\ &= (|x - z + z - y|\,; \beta\,|x - z + z - y|) \\ &\leq (|x - z| + |z - y|\,; \beta\,|x - z| + |z - y|) \\ &\leq (|x - z|\,; \beta\,|x - z|) + (|z - y|\,; \beta\,|z - y|) \\ &= d(x, z) + d(z, y), \end{aligned}$$

donc (X, d) est un espace métrique cône. ■

1.4.2 L'éspace métrique partiel cône

Définition 1.21. *(espace métrique partiel cône) Soit X un ensemble non vide. Supposons qu'une application $p : X \times X \longrightarrow E$ pour tous $x, y, z \in X$, satisfait:*

(P_0) $0 \leq p(x, x) \leq p(x, y)$,

(P_1) $x = y \iff p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$,

(P_2) $p(x, y) = p(y, x)$,

(P_3) $p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y) - p(z, z)$, L'application p est appelée une métrique cône partiel et le couple (X, p) est appelé un espace métrique partiel cône.

Exemple 7. *Soit* $E = \mathbb{R}^2$,

$$p = \{(x, y) \in E : x, y \geq 0\},$$

L'application $p : X \times X \longrightarrow E$ *définie par:*

$$p(x, y) = (\max\{x, y\}, \alpha \max\{x, y\}) = \max\{x, y\}(1, \alpha),$$

où α *est une constante positive. Alors* (X, p) *est une espace métrique partiel cône.*

Preuve. P est un cône car satisfait les trois conditions de cône.

On montre que p est un métrique partiel cône.

1. $0 \leq p(x, x) \leq p(x, y), \forall x, y \in X$, on a:

$$p(x, x) = (\max\{x, x\}; \alpha \max\{x, x\}) \geq 0$$

car $p(x, x) = (x, \alpha x)$ et $x \in \mathbb{R}^+, \alpha \geq 0$.

$$p(x, x) = (\max\{x, x\}; \alpha \max\{x, x\}) \leq (\max\{x, y\}; \alpha \max\{x, y\}) = p(x, y)$$

puisque

$$\begin{aligned} \text{si } x &= \max\{x, y\} \text{ alors } p(x, x) = p(x, y), \\ \text{si } y &= \max\{x, y\} \text{ alors } p(x, x) \prec p(x, y), \end{aligned}$$

donc, $0 \leq p(x, x) \leq p(x, y)$.

2. pour tous $x, y \in X$,si

$$x = y \iff p(x, x) = p(x, y) = p(y, y),$$

si

$$x = y \iff p(x, x) = (\max\{x, x\}; \alpha \max\{x, x\})$$

$$\begin{aligned} &= (\max\{x, y\}; \alpha \max\{x, y\}) \\ &= (\max\{y, y\}; \alpha \max\{y, y\}) \\ &= p(x, y) = p(y, y), \end{aligned}$$

3. $p(x, y) = p(y, x), \forall x, y \in X$, on a:

$$p(x, y) = (\max\{x, y\}; \alpha \max\{x, y\}) = (\max\{y, x\}; \alpha \max\{y, x\}) = p(y, x),$$

4. $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z), \forall x,y,z \in X$, on a:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= (\max\{x,y\}\,; \alpha \max\{x,y\}) \\ &\leq (\max\{x,z\} + \max\{z,y\} - \max\{z,z\})(1,\alpha) \\ &\leq (\max\{x,z\}\,; \alpha \max\{x,z\}) + (\max\{z,y\}\,; \alpha \max\{z,y\}) - (\max\{z,z\}\,; \alpha \max\{z,z\}) \\ &= p(x,z) + p(z,y) - p(z,z). \end{aligned}$$

donc, (X,p) est un espace métrique partiel cône mais n'est pas un espace métrique cône.

Remarque 1.6. *un espace métrique cône est un espace métrique partiel cône, mais la reciproque est n'est pas vrai, car:*

la condition 2/ si $x = y \iff p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$ *et* $p(x,x) \neq 0$.

et la condition 4/ on a: $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z), \forall x,y,z$

on peut suppose que $p(z,z) = 0$, *dans l'espace métrique cône mais dans l'espace métrique partiel cône* $p(z,z) \neq 0$.

■

Exemple 8. *Soit* $E = C^1_{\mathbb{R}}[0,1]$ *avec la norme* $u = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$, *et* $X = P = \{u \in E : u(t) \geq 0, t \in [0,1]\}$. *On définit* $p : X \times X \to P$ *par*

$$p(x,y) = \begin{cases} x & x = y, \\ x+y, & x \neq y, \end{cases}$$

Preuve. On montre que p est un métrique partiel cône mais non métrique cône,

Pour $x, y \in X$, on a

$$p(x,y) = p(y,x) = x$$

et

$$p(x,x) = p(x,y) = x \text{ si } \ x = y,$$

et

$$p(x,y) = p(y,x) = x + y$$

et

$$p(x,x) = x \leq x + y = p(x,y) \text{ si } x = y.$$

Pour $x, y \in X$, on a

$$p(x,y) = p(x,x) = p(y,y) = x \text{ si } x = y,$$

et

$$x = y \text{ si } p(x,x) = p(y,y).$$

Pour $x, y, z \in X$, on a

$$p(x,y) = x = p(x,z) + p(y,z) - p(z,z), \text{ si } x = y = z,$$

$$p(x,y) = x \leq x + y + z = p(x,z) + p(y,z) - p(z,z), \text{ si } x = y, y = z,$$

$$p(x,y) = x + y = p(x,z) + p(y,z) - p(z,z), \text{ si } x = y, y = z,$$

$$p(x,y) = x + y = p(x,z) + p(y,z) - p(z,z), \text{ si } x = y, x = z,$$

$$p(x,y) = x + y \leq x + y + z = p(x,z) + p(y,z) - p(z,z), \text{ si } x = y,\ y = z, x = z,$$

Donc, p est un métrique partiel cône mais non métrique cône, d'où $p(z,z) \neq 0$ pour chaque $z \in X$ avec $z \neq 0$. ■

Définition 1.22. *Soit X un ensemble non vide et A, B deux parties de X,on a*

1. $p(x, A) = \inf\{p(x,a) : a \in A\}$,
2. $p(A, B) = \inf\{p(a,b) : a \in A, b \in B\}$.

Théorème 1.12. *Tout espace métrique partiel cône (X,p) est un espace topologique.*

Preuve. *pour $c \in int(P)$,*
Soit $B(x,c) = \{y \in X : p(x,y) \ll c + p(x,x)\}$ et $\beta = \{B(x,c) : x \in X, c \in \ int(P)\}$.
Donc, $\tau_p = \{U \subset X : \forall x \in U, \exists B \in \beta,\ x \in B \subset U\} \cup \{\emptyset\}$ est un espace topologique. ■

Théorème 1.13. *Soit (X,p) un espace métrique partiel cône. Soit (x_n) est une suite de X et $x \in X$. On dit que (x_n) est convergente vers x et x est une limite de (x_n) si*

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = p(x,x)$$

Théorème 1.14. *Soit (X,p) un espace métrique partiel cône et (x_n) une suite de X. Si(x_n) convergente vers x,alors pour tout $c \in int(P)$ il existe N telle que*

$$p(x_n, x) \ll c + p(x,x) \text{ pour tout } n > N.$$

Définition 1.23. *Soit (X,p) un espace métrique partiel cône et (x_n) une suite de X,*

1. *(x_n) est dit converge vers un point $x \in X$,si et seulement si $p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x)$.*
2. *(x_n) est dit de Cauchy s'il existe $a \in P$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et soit N telle que :*

$$\|p(x_n, x_m) - a\| < \varepsilon \text{ pour tous } n, m > N.$$

3. *(X,p) est dit complèt si pour tout suite de Cauchy (x_n) dans X convergente vers $x \in X$.*

Définition 1.24. *Soit une fonction $f : X \longrightarrow X$. On dit que f est continue en un point x de X, si pour tout $c \in$ int(P) alors il existe $d \in f(B(x,d)) \subset B(f(x), c)$.*

Si f est continue en tout point x de X, alors on dit que f continue sur X.

Définition 1.25. *Soit une fonction $f : X \longrightarrow X$.On dit que f est une suite des fonctions continues en $a \in X$, si $(f(x_n))$ converges vers $f(x)$ telle que (x_n) converge vers x.*

Théorème 1.15. *Soit (X, p) un espace métrique partiel cône, P un constante normal K. Si (x_n) une suite de Cauchy dans (X, p) alors est une suite de Cauchy dans l'espace métrique cône (X, d).*

Preuve. *Soit (x_n) une suite de Cauchy dans (X, p).Pour tout réel $\varepsilon \succ 0$ on peut choisi $c \in$ int(P) telle que $K\|c\| < .\varepsilon$ il existe $a \in P$ et N telle que $p(x_n, x_m) \ll \frac{c}{4} + a$ pour tous $n, m > N$.*

$$d(x_n, x_m) = 2(p(x_n, x_m) - a) - (p(x_n, x_n) - a) - (p(x_m, x_m) - a),$$

alors

$$\|d(x_n, x_m)\| \leq K\|c\| < \varepsilon$$

pour $n, m > N$,ce qui implique $d(x_n, x_m) \longrightarrow 0$ $(n, m \longrightarrow \infty)$,donc (x_n) est une suite de Cauchy dans (X, d).Pour $x \in X$ on donne $B_P(x, c)$ $B_d(x, c)$ telle que $B_d(x, c) \subset B_p(x, c)$.Par conséquent on note $\tau_p \subseteq \tau_d$. ■

Définition 1.26. *Soit (X, p) un espace métrique partiel cône, et A un ensemble non vide dans X.*

On dit que $a \in \overline{A}$ si et seulement si $p(a, A) = p(a, a)$, telle que $a \in A$.

Lemme 1.16. *On définit $p(a, A)$ par $p(x, A) = \inf\{p(x, a) : a \in A\}$, $\overline{A}$ désigne la fermeture de A en ce qui concerne la topologie de métrique partiel cône. A est dit fermé de A si et seulement si $A = \overline{A}$.*

Chapitre **2**

Quelques théorèmes du point fixe dans l'espace métrique partiel

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats de la théorie du point fixe. A savoir le théorème du point fixe de Nadler, celui de Feng et Liu et enfin nous abordons le théorème du point fixe de Caristi.

Théorème 2.1. ***(Banach)*** *Soit* $(X,\ d)$ *un espace métrique complet, et* $T : X \longrightarrow X$ *une application contractante , Alors* T *admet un unique point fixe* $x^* \in X$*. De plus, pour tout* $x \in X$*, la suite* $\{T^n x\}_{n\in N}$ *converge vers* x^*.

Théorème 2.2. (Nadler) *[4] Soit* $(X,\ d)$ *un espace métrique complet* T *une application multivoque dans* X *telle que* $T(x)$ *un sous-ensemble fermé borné non vide de* X $\forall x \in X$*, s'il existe* $c \in (0, 1)$ *tel que:*

$$H_d(T(x),\ T(y)) \leq cd(x,\ y)\, \forall x, y \in X, \tag{2.1.1}$$

alors T *possède un point fixe dans* X.

Feng et Liu ont donné un généralisation du théorème de point fixe de Nadler dans l'espace métrique, ils prouvés le théorème suivant dans [4].

Théorème 2.3. (Y. Feng et S. Liu) *Soit* $(X,\ d)$ *un espace métrique complet,* $T : X \longrightarrow C(X)$ *une application multi-voque dans* X *telle que* $T(x)$ *un sous-ensemble fermé borné non vide de* X $\forall x \in X$*. Soit* $I_b^x = \{y \in T(x) : bd(x,\ y) \leq d(x,\ y)\}$ *tel que* $b \in (0,\ 1)$*, s'il existe un constant* $c \in (0,\ 1)$ *tel que* $\forall x \in X,\ \exists y \in I_b^x$ *vérifie*

$$d(y,\ T(y)) \leq cd(x,\ Tx). \tag{2.1.2}$$

Alors T *possède un point fixe dans* X *à condition que* $c < b$ *et la fonction* $f(x) = d(x,\ T(x))$ *est semi-continue inférieure.*

L'exemple suivant montre que le théorème (2. 3) est une extension du théorème (2. 2).

Exemple 9. *Soit* $X = \{1/2,\ 1/4,\ ...1/2^n,\ ...\} \cup \{0,\ 1\}$, $d(x,\ y) = |x - y|$, $\forall x,\ y \in X$*, l'espace* $(X,\ d)$ *est complet,*

$T : X \longrightarrow C(X)$,

$$T(x) = \begin{cases} \{\frac{1}{2^{n+1}},\ 1\},\ x = \frac{1}{2^n},\ n = 0,\ 1,\ 2, \\ \{0,\ \frac{1}{2}\},\ x = 0. \end{cases}$$

d'une part, T n'est pas vérifier la contractions de Nadler, en éffet

$$H\left(T(\frac{1}{2^n}),\ T(0)\right)=\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2^n}=|\frac{1}{2^n}-0|=d(\frac{1}{2^n},\ 0),\ n=1,\ 2,\ ...$$

d'autre part

$$f(x)=d(x,\ T(x))=\begin{cases}\frac{1}{2^{n+1}},\ x=\frac{1}{2^n},\ n=1,\ 2,\\ 0,\ x=0,\ 2,\end{cases}$$

d'où f est continue, de plus $\exists y\in I_{0.7}^x,\ \forall x\in X$ tel que

$$d(y,\ T(y))=\frac{1}{2}d(x,\ y),$$

alors il existe un point fixe d'après le théorème (2.3).

Matthews [6] a étendu le principe de Banach aux espaces métriques partiels complets, comme suit.

Théorème 2.4. ***(Matthews)*** *[6] Soit $(X,\ p)$ un espace métrique partiel complet et $T:X\longrightarrow X$ une application contractante,Alors T admet un unique point fixe $x\in X$.*

Exemple 10. *Le voilà un exemple affirmant que le principe de Banach n'est pas appliqué,c'est-à-dire, le théorème de Matthews [6] dans les espaces métriques partiels est bien une extension du théorème de Banach (dans des espaces métriques usuels). On considère $X=\{1,\ 2,\ 3\}$ muni de sa métrique partielle usuelle $p:X\longrightarrow X$ donnée par*

$$p\,(x,\ y)=\max\{x,\ y\}\ \textit{pour tous } x,\ y\in X.$$

Prenons $f:X\longrightarrow X$ définie par $f\,(0)=0,\ f\,(1)=0,\ f\,(2)=1$. Il est clair que les hypothèses du théorème de Matthews sont satisfaites avec $c=2/3$ (le point $x^*=0$ est un point fixe de f).

D'autre part, supposons que le principe de Banach dans les espaces métriques usuels est vérifié.

Après le résultat de Matthews, beaucoup de résultats intéressent de point fixe ont été établis dans des espaces métriques partiels.

Théorème 2.5. *[2]* ***(Nadler)*** *soit $(x,\ p)$ un espace métrique partiel ,$T:X\longrightarrow CB^P$est une application multivoque tel que $\forall x,\ y\in X$ on a*

$$H_p\,(T(x),T(y))\leq cp\,(x,y)\,,$$

où $c\in(0,1)$ alors T admet un point fixe.

2.2 Théorème de Feng et Liu dans l'espace métrique partiel

Ce théorème donne l'existence du point fixe à condition qu'il existe une fonction semi-continue inférieure et $c < b$.

Soit $T : X \to N(x)$ une application multi-voque , on définie la fonction

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad X \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) \quad &= \quad p(x, T(x)), \end{aligned}$$

pour un constant positive $b \in (0,\ 1)$ on définit l'ensemble

$$I_b^x = \{y \in T(x) : bp(x,\ y) \leq p(x,\ T(x))\}.$$

Théorème 2.6. *Soit $(X,\ p)$ un espace métrique partiel complet, et $T : X \to C(X)$ une application multi-voque s'il existe un constant $c \in (0,\ 1)$ tel que :$\forall x \in X,\ \exists y \in I_b^x$ vérifie*

$$p(y,\ T(y)) \leq cp(x,\ y), \tag{2.2.1}$$

alors T possède un point fixe dans X à condition que $c < b$ et f est semi-continue inférieure.

Preuve. comme $T(x) \subset C(X),\ \forall x \in X$ alors $\forall x \in X,\ I_b^x$ non vide pour tout $b \in (0,\ 1)$, pour tout point initial $x_0 \in X,\ \exists x_1 \in I_b^x$ tel que

$$p(x_1,\ T(x_1)) \leq cp(x_0,\ x_1),$$

$\forall x_1 \in X,\ \exists x_2 \in I_b^x$ tel que

$$p(x_2,\ T(x_2)) \leq cp(x_1,\ x_2),$$

ainsi on trouve une suite itérative $\{x_n\}$ telle que

$\forall x_n \in X,\ \exists x_{n+1} \in I_b^x$ tel que

$$p(x_{n+1},\ T(x_{n+1})) \leq cp(x_n,\ x_{n+1}), n = 0, 1, 2, ... \tag{2.2.2}$$

on vérifie que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ est de Cauchy.

d'une part, $x_{n+1} \in I_b^x$

$$bp(x_n,\ x_{n+1}) \leq p(x_n,\ T(x_n)); n = 0, 1, 2, ... \tag{2.2.3}$$

on utilise (2.2.2) on trouve

$$p(x_{n+1},\ T(x_{n+1})) \leq \frac{c}{b} p(x_n,\ T(x_n)), \tag{2.2.4}$$

de (2.2.3) on trouve

$$\begin{aligned} bp(x_{n+1},\ x_{n+2}) &\leq p(x_{n+1},\ T(x_{n+1})), \\ p(x_{n+1},\ x_{n+2}) &\leq \frac{1}{b}p(x_{n+1},\ T(x_{n+1})), \\ p(x_{n+1},\ x_{n+2}) &\leq \frac{c}{b}p(x_n,\ x_{n+1}), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} p(x_{n+1},\ x_{n+2}) &\leq \frac{c}{b}p(x_n,\ x_{n+1}),\ n = 0,\ 1,\ 2,\ ... \\ p(x_{n+1},\ T(x_{n+1})) &\leq \frac{c}{b}p(x_n,\ T(x_n)),\ n = 0,\ 1,\ 2,\ ... \end{aligned}$$

on preuve que

$$p(x_n,\ x_{n+1}) \leq \frac{c^n}{b^n}p(x_0,\ x_1),\ n = 0,\ 1,\ 2... \tag{2.2.5}$$

$$p(x_n,\ T(x_n)) \leq \frac{c^n}{b^n}p(x_0,\ T(x_0)),\ n = 0,\ 1,\ 2, ... \tag{2.2.6}$$

on a

$$p(x_{n+1},\ x_{n+2}) \leq \frac{c}{b}p(x_n,\ x_{n+1}),\ n = 0,\ 1,\ 2,\ ...$$

$$\begin{aligned} p(x_n,\ x_{n+1}) &\leq \frac{c}{b}p(x_{n-1},\ x_n), n = 0, 1, 2, ... \\ p(x_n,\ x_{n+1}) &\leq \frac{c^2}{b^2}p(x_{n-2},\ x_{n-1}), n = 0, 1, 2, ... \\ p(x_n,\ x_{n+1}) &\leq \frac{c^3}{b^3}p(x_{n-3},\ x_{n-2}), n = 0, 1, 2, ... \\ &\ \ ... \\ p(x_n,\ x_{n+1}) &\leq \frac{c^n}{b^n}p(x_0,\ x_1), n = 0, 1, 2, ... \end{aligned}$$

d'autre part

$$p(x_{n+1},\ T(x_{n+1})) \leq \frac{c}{b}p(x_n,\ T(x_n)),\ n = 0,\ 1,\ 2, ...$$

$$\begin{aligned} p(x_n,\ T(x_n)) &\leq \frac{c}{b}p(x_{n-1},\ T(x_{n-1})),\ n = 0,\ 1,\ 2, ... \\ p(x_n,\ T(x_n)) &\leq \frac{c^2}{b^2}p(x_{n-2},\ T(x_{n-2})),\ n = 0,\ 1,\ 2, ... \\ p(x_n,\ T(x_n)) &\leq \frac{c^3}{b^3}p(x_{n-3},\ T(x_{n-3})),\ n = 0,\ 1,\ 2, ... \\ &\ \ ... \\ p(x_n,\ T(x_n)) &\leq \frac{c^n}{b^n}p(x_0,\ T(x_0)),\ n = 0,\ 1,\ 2, ... \end{aligned}$$

alors $\forall m,\ n \in \mathbb{N},\ m > n$ on a

$$\begin{aligned}
p(x_m,\ x_n) &\leq p(x_m,\ x_{m-1}) + p(x_{m-1},\ x_n) - p(x_{m-1},\ x_{m-1}),\\
&\leq p(x_m,\ x_{m-1}) + p(x_{m-1},\ x_{m-2}) + p(x_{m-2},\ x_n) - p(x_{m-2},\ x_{m-2}) - p(x_{m-1},\ x_{m-1}),\\
&\leq \frac{c^{m-1}}{b^{m-1}}p(x_0,\ x_1) + \frac{c^{m-2}}{b^{m-2}}p(x_0,\ x_1) + \frac{c^{m-3}}{b^{m-3}}p(x_0,\ x_1) + ... + \frac{c^n}{b^n}p(x_0,\ x_1)\\
&\leq (\frac{c^{m-1}}{b^{m-1}} + \frac{c^{m-2}}{b^{m-2}} + \frac{c^{m-3}}{b^{m-3}} + ... + \frac{c^n}{b^n})p(x_0,\ x_1),\\
&\leq (\frac{\frac{c^n}{b^n}}{1-\frac{c}{b}})p(x_0,\ x_1) \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty,
\end{aligned}$$

alors $\{x_n\}$ est de Cauchy dans $(X,\ p)$.

On définie la nouvelle application

$$p^s : X \longrightarrow X$$

alors

$$p^s(x_m,\ x_n) \leq 2p(x_m,\ x_n) \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

donc $\{x_n\}$ est de cauchy dans $(X,\ p^s)$.comme $(X,\ p)$ est complet donc $(X,\ p^s)$ est complet alors $\exists x^* \in X$,

tel que $x_n \to x^*$ lorsque $n \to \infty$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} p^s(x_n,\ x^*) = 0$ et de plus on a

$$p(x^*,\ x^*) = \lim_{n\to\infty} p(x_n,\ x^*) = \lim_{n\to\infty} p(x_n,\ x_n) = 0, \tag{2.2.7}$$

alors $x_n \to x^*$lorsque $n \to \infty$ dans $(X,\ p)$.

On montre que x^* est le point fixe de T.

$$f(x_n) = p(x_n,\ T(x_n)),$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} p(x_n,\ T(x_n)) = 0 \text{ (d'après (2.2.6))},$$

comme f est semi-continue inférieure on obtient

$$0 \leq f(x^*) \leq \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0,$$

donc

$$f(x^*) = 0 \Longleftrightarrow p(x^*,\ T(x^*)) = 0, \tag{2.2.8}$$

de (2.2.8) et (2.2.7) on obtient

$$p(x^*,\ T(x^*)) = p(x^*,\ x^*)$$

la fermeture de T implique que $x^* \in T(x^*)$, x^* est le point fixe de T. ■

Corollaire 2.1. *Soit $(X,\ p)$ un espace métrique partiel complet, et $T : X \to C(X)$ une application multi-voque s'il existe un constant $c \in (0,\ 1)$ tel que $\forall x \in X,\ \forall y \in T(x)$,*

$$p(y,\ T(y)) \leq cp(x,\ y), \tag{2.2.9}$$

alors T posséde un poit fixe dans X à condition que f est semi-continue inférieure.

2.3 Théorème de Caristi dans l'espace métrique partiel

En 1976, et pour la première fois, J. Caristi a élaboré son théorème du point fixe qui, contrairement au théorème de Banach, n'exige pas que la fonction en question soit une contraction . Ce théorème de Caristi, garantit l'existence d'un point fixe d'une fonction d'un espace métrique complèt à valeur dans lui-même et respectant une condition particulière sur $d(x; f(x))$, a plus tard été généralisé aux fonctions multivoques.

Dans les années dernières, le théorème du point fixe de Caristi aètè généralisè et ètè ètendu dans plusieurs directions, et les preuves donnèes pour le résultat de Caristi variè et usagè différent techniques.

Nous énoncerons des théorèmes de point fixe pour des fonctions multivoques définies sur un sous-ensemble d'un espace métrique partiel.

Définition 2.1. **(*module de continuité*)** *On appelle module de continuité toute fonction $\eta : [0,\ \infty[\longrightarrow [0,\ \infty[$ qui est croissante, telle que $\eta(0) = 0$, et continue en 0.*

Définition 2.2. *On dira qu'une application $T : X \longrightarrow Y$ admet η comme module de continuité si l'on a:*

$$p\left(T(x),\ T(y)\right) \leq \eta\left(p(x,\ y)\right).$$

Proposition 2.7. *si $T : X \longrightarrow Y$ admet un module de continuité η : T est uniformément continue sur X.*

Preuve.

$$\lim_{t \longrightarrow 0,\ t \geq 0} \eta(t) = \eta(0) = 0,$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall t \in [0,\ \infty[: 0 \leq t \leq \delta \Longrightarrow \eta(t) \leq \varepsilon.$$

par conséquent,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \forall x \in X, \ \forall y \in X : p(x, \ y) \leq \delta \Longrightarrow p(T(x), \ T(y)) \leq \varepsilon.$$

■

Théorème 2.8. ***(Caristi)*** *tout application $T : X \longrightarrow X$ possède un point fixe à condition que X est métrique complet et il existe une fonction semi-continue inférieure telle que*

$$d(x, \ Tx) \leq \phi(x) - \phi(T(x)) . \ \forall x \in X. \tag{2.3.1}$$

En 2011 Erdal Karapinar à donner un théorème de point fixe de type Caristi dans l'espace métrique partiel.

Théorème 2.9. *[5]soit $(X, \ p)$un espace métrique partiel complet, $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est semi-continue inferieure dans X, alors toute applications $T : X \longrightarrow X$ satisfaitr*

$$p(x, \ T(x)) \leq \phi(x) - \phi(T(x)), \ \forall x \in X$$

admet un point fixe dans X.

Théorème 2.10. *[5]Soit $(X, \ d)$ un espace métrique complet,et*

$T : X \longrightarrow N(X)$ une application multi-voque,

$\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi- continue inférieure et bornée inférieurement,

$\eta : [0, \ \infty[\longrightarrow [0, \ \infty[$ une fonction continue croissante sub-additive telle que,

$$\eta^{-1}(\{0\}) = \{0\} .$$

Si pour tout $x \in X$, il existe $y \in T(x)$ vérifie

$$\eta(d(x, \ y)) \leq \phi(x) - \phi(y) . \tag{2.3.2}$$

alors T possède un point fixe dans X.

Chapitre **3**

Quelques Théorèmes de point fixe dans l'espace métrique partiel cône

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous vous proposons de découvrir quelques théorèmes de point fixe pour les applications univoques ou multivoques définies sur les espaces métriques cônes et.les espaces métriques partiels cônes

3.2 Théorèmes de point fixe dans l'espace métrique cône

Soit (X, d) est un espace métrique cône.

3.2.1 Généralisation du théorème de Banach pour les applications univoques

Quelques théorèmes de point fixe pour des applications univoques définies sur un espace métrique cône et à valeur dans lui-même seront énoncés.

Théorème 3.1. *Soit (X, d) un espace métrique cône,P un cône normal avec constante normal K. On suppose que une application $T : X \longrightarrow X$ satisfait la condition de contraction.*

$$d(Tx, Ty) \leq cd(x, y) \text{ pour tous } x, y \in X$$

où $c \in (0, 1)$,alors T admet un point fixe sur X.Aussi, pour tout $x \in X$ la suite itérative$(T^n x)$ converge vers le point fixe.

Preuve. On pose $x_0 \in X$. On définie une suite (x_n) telle que

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2 x_0, ..., Tx_{n+1} = Tx_n = T^{n+1} x_0.$$

Pour $n \geq 0$, on a

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq cd(x_n, x_{n-1}) \leq ... \leq c^n d(x_1, x_0)$$

i) On montre que cette suite est de Cauchy, pour $n \geq m$:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + ... + d(x_{m+1}, x_{m+2}) \\ &\quad + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq \left(c^{n-1} + c^{n-2} + ... + c^m\right) d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

donc
$$\|d(x_n, x_m)\| \leq K\frac{c^m}{1-c}\|d(x_1, x_0)\| \longrightarrow 0.$$
D'où, $\{x_n\}$ est de cauchy dans (X, d). et comme (X, d) est complete il existe $x^* \in X$ telle que $\{x_n\}$ est converge vers x^* .

ii) On montre que x^* est le point fixe, pour tout $n \in \mathbb{N}$,ona:

$$\begin{aligned} d(Tx^*, x^*) &\leq d(Tx_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*) \leq cd(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*) \\ \|d(Tx^*, x^*)\| &\leq Kc\|d(x, T^n x_0)\| + \|d(T^n x_0, x)\| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

donc$\|d(Tx^*, x^*)\| = 0$. implique $Tx^* = x^*$. donc x^* est un point fixe.

iii) L'unicité : On suppose que il existe deux point x, y et on démontre que $x^* = y^*$, on a

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq cd(x^*, y^*)$$

d'où $x^* = y^*$ .Donc T admet un unique point fixe $Tx^* = x^*$. ■

Exemple 11. *Soit* (X, d) *un espace métrique cone,telle que* $E = \mathbb{R}^2, P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 x, y \geq 0\}$ *et* $X = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0, x) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1\}$. $d : X \times X \longrightarrow E$ *est une distene définie par :*
$$\begin{aligned} &d((x,0),(y,0)) = (\tfrac{4}{3}|x-y|, |x-y|), \\ &d((0,x),(0,y)) = (|x-y|, \tfrac{2}{3}|x-y|), \\ &d((x,0),(0,y)) = d((0,y),(x,0)) = (\tfrac{4}{3}x + y, x + \tfrac{2}{3}y), \end{aligned}$$
et $T : X \longrightarrow X$ *telle que :*

$$T(x, y) = (0, x), T(x, y) = (\frac{1}{2}x, 0).$$

Preuve. On a $c = \frac{3}{4} \in (0, 1)$, donc T admet un point fixe $(0, 0) \in X$,mais T n'est contraction dans l'espace metrique. ■

Exemple 12. *Soit* $E = \mathbb{R}^2$, $X = \left\{(x, y) : x = \cos t, y = \sin t; 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$, *et*

$$P = \{(x, y) \in E : x, y \geq 0\}.$$

Soit (X, d) *un espace métrique cone, on définie* $d : X \times X \longrightarrow E$ *par* $d(x, y) = (|x-y|, \alpha|x-y|)$ *où* $\alpha \geq 0$, *on suppose que la fonction* $f : X \longrightarrow X$ *telle que*

$$f((\cos t, \sin t)) = (\cos(t/2), \sin(t/2)).$$

La fonction f *est contraction localment, mais n'est pas globalment contraction.*

3.2.2 Théorème de Feng et Liu dans l'espace métrique cône

Définition 3.1. *Soit* $s(p)=\{q \in E : p \leq q\}$ *pour tout* $p \in E$, *et* $s(a, B) = \cup_{b \in B} s(d(a,b))$ *pour* $a \in X$ *et* $B \in N(X)$.

$$\text{Pour } A, B \in B(X), \text{ on note } s(A,B) = (\cap_{a \in A} s(a,B)) \cap (\cap_{b \in B} s(b,A)).$$

Lemme 3.2. *Soit* (X,d) *est un espace métrique cône, et* $P \subset E$ *est un cône.*

1. Soit $p,\ q \in E.$ Si $p \leq q$,alors $s(q) \subset s(p)$.
2. Soit $x \in X$ et $A \in N(X).$ Si $\theta \in s(x,A)$,alors $x \in A$.
3. Soit $q \in p$ et $A, B \in B(X)$ et $a \in A.$ Si $q \in s(A,B)$.

Remarque 3.1. *Soit* (X,d) *un espace métrique cône, alors* $s(\{a\},\{b\}) = s(d(a,b))$ *poura,* $b \in X$.

Définition 3.2. *Si* $u_n \in E$ *avec* $u_n \longrightarrow \theta$,*alors pour chaque* $c \in int(P)$ *il existe* N *telle que* $u_n \ll c$ *pour tout* $n > N$.

Définition 3.3. *On suppose que* (X,d) *un espace métrique cône,et soit* $A \in N(X)$.

La fonction $\phi : X \longrightarrow 2^p - \{\emptyset\}$ *définie par* $\phi(x) = s(x,A)$ *est appelée semi-continuité inférieure, si pour tout* $c \in int(P)$,*il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *telle que* $\phi(x_n) \subset \phi(x) - c$ *pour tout* $n \geq n_0, \lim_{n\to\infty} x_n = x$ *pour tout suite* $\{x_n\} \subset X$ *et* $x \in X$.

Définition 3.4. *Soit* $T : X \longrightarrow C(X)$ *est une application mulivoque. On définit une function* $\phi : X \longrightarrow 2^p - \{\emptyset\}$ *par* $\phi(x) = s(x, Tx)$.

$$\text{Pour } b \in [0,1)\,,\ \text{soit } J_b^x = \{y \in Tx : s(x,Tx) \subset s(bd(x,y))\}\,.$$

Théorème 3.3. *Soit* (X,d) *un espace métrique cône et soit* $T : X \longrightarrow C(X)$ *est une application mulivoque si il existe une constante* $c \in (0,1)$ *telle que pour tout* $x \in X$ *il existe* $y \in J_b^x$ *satisfait:*

$$cd(x,y) \in s(y,Ty)$$

alors T *admet un point fixe dans* X *fourni* $c < b$ *et* ϕ *est semi-continuité inférieure.*

Preuve. *Soit* $x_0 \in X$. *puit il existe* $x_1 \in J_b^{x_0}$ *telle que*

$$cd(x_0,x_1) \in s(x_1,Tx_1).$$

Pour x_1,*il existe* $x_2 \in J_b^{x_1}$ *telle que*

$$cd(x_1, x_2) \in s(x_2, Tx_2).$$

i) On pouvent, trouver une suite $\{x_n\}$ *telle que*

$$x_{n+1} \in J_b^{x_n}$$

et

$$cd(x_n, x_{n+1}) \in s(x_{n+1}, Tx_{n+1}).\text{pour tout } n = 0, 1... \tag{3.2.1}$$

ii) On montre que $\{x_n\}$ *est une suite de Cauchy sur* X.

Puisque $x_{n+2} \in J_b^{x_{n+1}}, s(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \subset s(bd(x_{n+1}, x_{n+2}))$.*Depuis* (3.2.1) *on a*

$$cd(x_n, x_{n+1}) \in s(bd(x_{n+1}, x_{n+2})).$$

d'où, $bd(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq cd(x_n, x_{n+1})$. *Donc,*

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq Kd(x_n, x_{n+1})$$

pour tout $n = 0, 1, ...,$ *telle que* $k = \frac{c}{b}.$,*donc on a*

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq kd(x_{n-1}, x_n) \leq d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq ... \leq k^n d(x_0, x_1).$$

pour $m > n$,*on a*

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + ... + k^{m-1})d(x_0, x_1) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

D'après Lemme $\{x_n\}$*est une suite de Cauchy sur* X . *Et comme* X *est complèt, il existe* $z \in X$ *telle que* $\lim_{n\to\infty} x_n = z$.

iii) Maintenant on montre que $z \in Tz$. *Suppose que* $z \notin Tz$.

Puisque Tz *est fermé, il existe* $c \in$ *int*(P) *telle que* $d(z, y) \ll c$ *implique* $y \notin Tz$.*mais puisque* ϕ *est une semi-continuité inférieure, il existe* N *telle que*

$$d(x_N, x_{N+1}) \ll \frac{c}{2} \text{ et } s(x_N, x_N) \subset s(z, Tz) - \frac{c}{2}.$$

donc, il existe $y \in Tz$ *telle que*

$$d(z, y) - \frac{c}{2} \leq d(x_N, x_{N+1}).$$

Donc, $d(z, y) \leq d(x_N, x_{N+1}) + \frac{c}{2} \ll c$,*ce qui est un contradiction.* ■

Exemple 13. *Soit* $X = \{f \in L^1[0,1] : f(x) \geq 0\}$, $E = C[0,1]$ *et* $P = \{f \in E : f \geq 0\}$ *.définie* $d : X \times X \longrightarrow E$ *par*

$$d(f,g)(t) = \int_0^t |f(x) - g(x)|\, dx, \text{ dans } 0 \leq t \leq 1.$$

Preuve. Considérons l'application $T : X \longrightarrow CB(X)$ définie par

$$(Tf)(x) = \{a(f), a(f) + 2f\},$$

Soit d est un espace métrique cône complèt, avec $a(f) \in X$ est définie par

$$a(f)(x) = \int_0^x y(f(y) + 1)dy.$$

et on a, $\phi(f) = s(f, Tf)$ est une semi-continuité inférieure.

Pour tout $f \in X$,on peut prouver $a(f) \in J_1^f$.:

$$\begin{aligned} d(f, a(f) + 2f)(t) &= \int_0^t |a(f)(x) + f(x)|\, dx. \\ &= \int_0^t (a(f)(x) + f(x))dx \\ &\geq \int_0^t (a(f)(x) - f(x))dx \\ &= d(f, a(f))(t). \end{aligned}$$

puisque $(Tf)(x) = \{a(f), a(f) + 2f\}$,on a $s(f, Tf) \subset s(d(f, a(f)))$, et donc on obtient $a(f) \in J_1^f$. Mais $a(f) = g$.

On a $a(a(f)) = a(g) \in T(a(f))$ et pour $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} d(a(f), a(a(f)))(t) &= d(a(f), a(g))(t) \\ &= \int_0^t |a(f)(x) - a(g)(x)|\, dx \\ &= \int_0^t \left| \int_0^x y(f(y) + 1)dy - \int_0^x y(g(y) + 1)dy \right| dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t \left| \int_0^x y(f(y)-g(y))dy \right| dx \\
&\leq \int_0^t \int_0^x y \left| f(y)-g(y) \right| dydx \\
&= \int_0^t \int_y^t y \left| f(y)-g(y) \right| dxdy = \int_0^t (t-y)y \left| f(y)-g(y) \right| dy \\
&\leq \int_0^t \frac{t^2}{4} \left| f(y)-g(y) \right| dy \leq \frac{1}{4} \int_0^t \left| f(y)-g(y) \right| dy \\
&= \frac{1}{4} d(f,g)(t).
\end{aligned}
$$

Donc, on a $g \in J_1^f$,et $\frac{1}{4}d(f,g)(t) \in s(g,Tg)$. ■

Définition 3.5. *Soit (X,d) un espace métrique cône. Soit $T : X \longrightarrow C(X)$ pour $x \in X$, on note*

$$
\begin{aligned}
D(x,Tx) &= \{d(x,z) : z \in Tx\}, \\
S(x,Tx) &= \{u \in D(x,z) : \|u\| = \inf \{\|v\| : v \in D(x,Tx)\}\}.
\end{aligned}
$$

Théorème 3.4. *Soit (X,d) un espace métrique cône complet, P un cône normal avec constante normal K,et $T : X \longrightarrow C(X)$. $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par $I(x) = \inf_{y \in Tx} \|d(x,z)\|$, $x \in X$ est une semi-continuité inférieure. S'il existe $\lambda \in [0,1)$,$b \in (\lambda, 1]$ telle que:*

$$
\forall x \in X,\ \exists y \in Tx,\ \exists v \in D(x,Tx),\ \forall u \in D(x,Tx) : [bd(x,y) \leq u] \ \ et \ \ [v \leq \lambda d(x,y)], \tag{3.2.2}
$$

alors il existe un point fixe.

Preuve. *On suppose $x_0 \in X$ un point arbitaire et fixé,$u_0 \in D(x_0,Tx_0)$.De (3.2.2) il existe $x_1 \in Tx_0$,$u_1 \in D(x_1,Tx_1)$ telle que*

$$
bd(x_0,x_1) \leq u_0
$$

et

$$
u_1 \leq \lambda d(x_0,x_1).
$$

Pour x_1 il existe $x_2 \in Tx_{1,}u_2 \in D(x_2,Tx_2)$ satisfait:

$$
bd(x_1,x_2) \leq u_1
$$

et

$$u_2 \leq \lambda d\left(x_1, x_2\right).$$

pour x_n *il existe* $x_{n+1} \in Tx_n$, $u_{n+1} \in D\left(x_{n+1}, Tx_{n+1}\right)$ *telle que:*

$$bd\left(x_n, x_{n+1}\right) \leq u_n \tag{3.2.3}$$

et

$$u_{n+1} \leq \lambda d\left(x_n, x_{n+1}\right). \tag{3.2.4}$$

De (3.2.3) *et* (3.2.4) *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *ona:*

$$u_{n+1} \leq \lambda d\left(x_n, x_{n+1}\right) \leq \frac{\lambda}{b} u_n \leq \frac{\lambda^2}{b} d\left(x_{n-1}, x_n\right) \leq ... \leq \frac{\lambda^{n+1}}{b^n} d\left(x_0, x_1\right) \leq (\lambda/b)^{n+1} u_0.$$

$$\left\|u_{n+1}\right\| \leq K\left(\lambda/b\right)^{n+1}\left\|u_0\right\|, \text{ pout tout } n \in \mathbb{N}. \tag{3.2.5}$$

de (3.2.5) $\|u_n\| \longrightarrow 0$, *quand* $n \longrightarrow \infty$. *ce qui implique* (u_n) *est convergente vers* 0. *De* (3.2.3) *et* (3.2.4), *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$(b-\lambda) d\left(x_n, x_{n+1}\right) = bd\left(x_n, x_{n+1}\right) - \lambda d\left(x_n, x_{n+1}\right) \leq u_n - u_{n+1}. \tag{3.2.6}$$

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ *telle que* $n < m$. *De* (3.2.6) *on a l'inégalités*

$$d\left(x_m, x_n\right) \leq \sum_{j=n}^{m-1} d\left(x_j, x_{j+1}\right) \leq \frac{1}{b-\lambda} \sum_{j=n}^{m-1}\left(u_j, u_{j+1}\right) = \frac{1}{b-\lambda} u_n - u_m,$$

donc

$$\left\|d\left(x_m, x_n\right)\right\| \leq \frac{K}{b-\lambda}\left\|d\left(u_n, u_m\right)\right\|.$$

D'après la convergente de $\{u_n\}$ *vers* 0, *on a* $\{x_n\}$ *est une suite de Cauchy.*

Comme X *est complète, il existe* $x^* \in Tx^*$ *telle que* $x_n \longrightarrow x^*$, $n \longrightarrow \infty$,

Soit $u_n \in D(x_n, Tx_n)$, *il existe une suite* $\{z_n\}$*telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}, z_n \in Tx_n$ *et* $u_n = d(x_n, y_n)$

$$\inf_{y \in Tx^*}\|d(x^*, y)\| \leq \lim_{n \to \infty} \inf \inf_{y \in Tx_n}\|d(x_n, y)\| \leq \lim_{n \to \infty} \inf \|d(x_n, z_n)\| = 0.$$

donc,

$$\inf_{y \in Tx^*}\|d(x^*, y)\| = 0. \tag{3.2.7}$$

On suppose que $x^* \notin Tx^*$.*d'après* (3.2.7) *il existe une suite* $\{y_n\} \subset Tx^*$ *telle que*

$$\lim_{n \to \infty}\|d(x^*, y_n)\| = 0. \text{ pour tout } m, n \geq 0$$

on a:

$$d(y_m, y_n) \leq d(y_m, x^*) + d(x^*, y_n),$$

d'où, il vient que $\{y_n\}$ *est une suite de Cauchy.et comme* (X, d) *est complète il existe* $y^* \in X$ *telle que* $\{y_n\}$ *est converge vers* y^*. *Puisque* Tx^* *est fermé, on a* $y^* \in Tx^*$*.maintenant, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *, on obtient*

$$d(x^*, y^*) \leq d(x^*, y_n) + d(y_n, y^*),$$

et

$$\|d(x^*, y^*)\| \leq K \|d(x^*, y_n)\| + K \|d(y_n, y^*)\| .$$

Ce qui implique $x^* = y^*$*,est contraction, donc* $x^* \in Tx^*$. ■

Exemple 14. *Soit* $X = [0, 1]$, $E = \mathbb{R}^2$ *un espace de banach accosie la norme maximal,*$P = \{(x, y) \in E : x, y \geq 0\}$*un cône normal et soit* $d : X \times X \longrightarrow E$ *défini par:*

$$d(x, y) = (|x - y| , \beta |x - y|), \beta \in (0, 1).$$

Alors le pair (X, d) *est un espace métrique cône complèt.*

Preuve. On définit l'application $T : X \times X \longrightarrow E$ par

$$Tx = \begin{cases} \left\{\frac{1}{2}x\right\}, \text{pour } x \in [0, 1) ; \\ \left[\frac{1}{2}, 1\right], \text{pour } x = 1, \end{cases}$$

et

$$I(x) = \inf_{y \in Tx} \|d(x, y)\| = \begin{cases} \frac{1}{2}x, \text{ pour } x \in [0, 1) \\ 0, \text{ pour } x = 1, \end{cases}$$

L'application I est semi-continuité inférieure. Pour tout $x \in [0, 1)$ et $y = \frac{1}{2}x$, on a

$$D(x, Tx) = \left\{d(x, \frac{1}{2}x)\right\} = \left\{\frac{1}{2}x, \beta\frac{1}{2}x\right\}$$

et

$$D(y, Ty) = \left\{d(\frac{1}{2}x, \frac{1}{4}x)\right\} = \left\{\frac{1}{4}x, \beta\frac{1}{4}x\right\}$$

$\lambda = \frac{1}{2}$ et $b = 1$ donc,

$$bd(x, y) \leq u, \text{ pour } u \in D(x, Tx)$$

et

$$v \leq \lambda d(x, y), \text{pour } v = (\frac{1}{4}x, \beta\frac{1}{4}x).$$

Le cas où $x = 1$, la condition (2) est satisfait $y = 1$ donc

$$bd(x, y) = 0 \leq u, \text{ pour tout } u \in D(x, Tx)$$

et

$$v \leq \lambda d(x, y), \text{ pour } v = 0 \in D(y, Ty).$$

D'où il vient que il existe deux points fixes $\{1, 2\}$. ■

3.2.3 Théorème de Caristi dans l'espace métrique cône

Définition 3.6. *Soit (X, d) un espace métrique cône une suite $\{x_n\}$ des points de X est dit $\sqsubseteq$ décroissante si $x_{n+1} \sqsubseteq x_n$ pour tout $n \geq 0$. L'ensemble $S(x) = \{y \in X : y \sqsubseteq x\}$ est $\sqsubseteq$-complet si chaque suite de Cauchy décroissante à $S(x)$ converge on-t-elle.*

Définition 3.7. *une fonction $f : X \longrightarrow E$ est appelée semi-continue inférieure si pour chaque suite $\{x_n\} \subset X$ conversant à quelque point et satisfait $fx_{n+1} \leq fx_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,on a $fx \leq \lim_{n\to\infty} fx_n$.*

Lemme 3.5. *Soit (X, d) est un espace métrique cône, et soit $T : X \longrightarrow N(x)$ est une application multivoque. On suppose que $\phi : X \longrightarrow E$ est une fonction et $\eta : P \longrightarrow P$est une fonction non-décroissante continue et sous-additive telle que $\eta(0) = 0$ si et seulement si $t = 0$. On définit une relation $\leq_\eta$sur X comme suit:*

$$y \leq_\eta x \text{ si et seulement si } \phi(x) - \phi(y) \in s(\eta(d(x, y))). \tag{3.2.8}$$

alors $\leq_\eta$ est un ordre partiel sur X.

Preuve. On montre que " $\leq_\eta$ " est d'ordre partiel c'est-à -dire" $\preceq$ " réflexive, antysémétriqe et transitive.

1. réflixive: on a

$$x \leq_\eta x \iff \varphi(x) - \varphi(x) \in s(\eta(d(x, x))),$$

$$0 \in s(\eta(0)) = s(0) \iff x \leq_n x.$$

2. antysémétrique: on a

$$y \leq_\eta x \iff \varphi(x) - \varphi(y) \in s(\eta(d(x, y))) \tag{3.2.9}$$

et

$$x \leq_\eta y \iff \varphi(y) - \varphi(x) \in s(\eta(d(y, x))) \tag{3.2.10}$$

de (3.2.9) et (3.2.10), $0 \in s(\eta(2d(y,x)))$ car $d(x,y) = d(y,x)$, et $\eta(s) = 0 \implies s = 0$.

$$\eta(2d(y,x)) = 0 \implies d(x,y) = 0 \implies x = y.$$

3. transitive: on a

$$\begin{cases} x \leq_\eta y \\ y \leq_\eta z \end{cases} \implies x \leq_n z,$$

alors

$$x \leq_\eta y \iff \varphi(y) - \varphi(x) \in s(\eta(d(y,x))).$$

et

$$y \leq_\eta z \iff \varphi(z) - \varphi(y) \in s(\eta(d(z,y))).$$

On a $\eta(x+y) \leq \eta(x) + \eta(y)$, et $x \leq y \implies s(y) \subset s(x)$.

$$\varphi(x) - \varphi(z) \in s(\eta(d(x,y))) + s(\eta(d(y,z))).$$

$$\eta(d(x,z)) \leq \eta(d(x,y) + d(y,z)) \leq \eta(d(x,y)) + \eta(d(y,z)).$$

$$s(\eta(d(x,y) + d(y,z))) \subset s(\eta(d(x,z))) \implies \varphi(x) - \varphi(z) \in s(\eta(d(x,z))).$$

donc, $x \leq_n z$. d'où " $\leq_\eta$ " est d'ordre partiel dans X. ∎

Lemme 3.6. *Soit P est un cône et soit $(X, \sqsubseteq)$ est un ensemble pré-ordre, on suppose une application $\Psi : X \longrightarrow E$ satisfait les conditions suivantes:*

1. *$x \sqsubseteq y$ et $x \neq y$ implique $\Psi(x) < \Psi(y)$;*

2. *pour tout suite $\{x_n\}$ $\sqsubseteq$-décroissant ,il existe $y \in X$ telle que $y \sqsubseteq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;*

3. *Ψ est limitée au dessous.*

alors pour chaque un élément minimal en $S(x)$ où $S(x) = \{y \in X : y \sqsubseteq x\}$.

Théorème 3.7. *Soit (X, d) est un espace métrique cône,telle que P est fortement et continue, et soit $T : X \longrightarrow N(X)$est une application multivoque et $\phi : X \longrightarrow E$ est une application limitée au dessous. Suppose que, pour chaque $x \in X$, $S(x) = \{y \in X : y \leq_\eta x\}$ est $\leq_\eta$ complet ou $\leq_\eta$est un ordre partiel sur X définie par* (3.2.8).

Si pour tout $x \in X$, il existe $y \in Ty$ satisfait

$$\phi(x) - \phi(y) \in s(\eta(d(x,y))), \tag{3.2.11}$$

Alors T admet un point fixe sur X.

Preuve. On définit une relation d'oredre partiel "$\leq_\eta$"sur X,

Si $x \leq_\eta y$ et $x \neq y$,alors $0 \prec d(y,x)$ et $\phi(y) - \phi(x) \in s(\eta(d(y,x)))$,

et donc

$$0 \prec \eta(d(y,x)) \leq \phi(y) - \phi(x).$$

donc $\phi(x) \prec \phi(y)$.

Soit $\{x_n\}$ une suite $\leq_\eta$-décroissant sur X.Alors $x_{n+1} \in S(x_n)$ pour tout $n \geq 0$, et $\{\phi(x_n)\}$ est limitée au dessous, car ϕ est limite au dessous.

Donc $\{\phi(x_n)\}$ limitée .Puisque P est fortement, $u = \inf \phi(x_n)$ existe dans E, donc est continue,

$$\inf \{\|\phi(x_n) - u\| : n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = u \text{ et } u \leq \phi(x_n) \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Pour n, m

$$x_m \leq_\eta x_n, \phi(x_n) - \phi(x_m) \in s(\eta(d(x_n, x_m)))$$

Alors

$$\eta(d(x_n, x_m)) \leq \phi(x_n) - \phi(x_m) \leq \phi(x_n) - u.$$

Donc $\lim_{n,m\to\infty} \eta(d(x_n, x_m)) = \theta$.Puisque η est continue,

$$\eta(\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m)) = \theta.$$

D'où $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = \theta$.

Donc,$\{x_n\}$ est une suite de cauchy $\leq_\eta$-décroissant sur $S(x_0)$.Puisque $S(x_n)$ est $\leq_\eta$-complete et $x_{n+1} \in S(x_n)$ pour tout $n \geq 0$,il existe $x \in S(x_n)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

D'où.$x \leq_\eta x_n$ pour tout $n \geq 0$.

D'après lemme (3.5), $S(x_0)$ admet un élément minimal $\overline{x}$ dans $S(x_0)$.par hypothèse, il existe $y_0 \in T\overline{x}$ telle que

$$\phi(\overline{x}) - \phi(y_0) \in s(\eta(d(\overline{x}, y_0))).$$

Donc $y_0 \leq_\eta \overline{x}$. Puisque $\overline{x}$ est un élément minimal dans $S(x_0), y_0 = \overline{x}$. D'où, $\overline{x} \in T\overline{x}$. ■

Théorème 3.8. *Soit (X,d) est un espace métrique cône telle que P est fortement hémiedrique et continue. Suppose que $T : X \longrightarrow N(X)$ est un application multivoque et $\phi : X \longrightarrow E$ est* *semi-continue inférieur au haut et limitée au déssus. Si pour tout $x \in X$,il existe $y \in Tx$ satisfait*

$$\phi(x) - \phi(y) \in s(\eta(d(x, y))),$$

alors T admet un point fixe sur X.

Preuve. *On définit un ordre partiel $\leq_\eta$dans X par (3.2.8).Il suffit devoir que, pour chaque $x_0 \in X$, $S(x_0)$ est $\leq_\eta$-complète.*

Soit $x_0 \in X$ est un point fixe, et soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy $\leq_\eta$-décroissant sur $S(x_0)$, alors $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy $\leq_\eta$-décroissant sur X.

Donc $\phi(x_{n+1}) \leq \phi(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Puisque X est complète, il existe $x \in X$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Puisque ϕ est semi-continue inférieur au déssous.,

$$\phi(x) \leq \lim_{n\to\infty} \phi(x_n). \Longrightarrow \phi(x) \leq \phi(x_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Puisque $x_m \leq_\eta x_n$ pour $m > n$, on obtient:

$$\phi(x_n) - \phi(x_m) \in s(\eta(d(x_n, x_m))).$$

Donc,

$$\eta(d(x_n, x_m)) \leq \phi(x_n) - \phi(x_m) \leq \phi(x_n) - \phi(x).$$

quand $m \longrightarrow \infty$ en déssous ingalité ,on a $\eta(d(x_n, x)) \leq \phi(x_n) - \phi(x)$ car η et d sont continues. Donc

$$\phi(x_n) - \phi(x) \in s(\eta(d(x_n, x))).$$

On a .$x \leq_\eta x_n$ et donc.$x \leq_\eta x_n \leq_\eta x_0$. D'où $x \in S(x_0)$,et $S(x_0)$ est $\leq_\eta$-complète, donc T admet un point fixe sur X. ■

Exemple 15. *Soit $X = L^\infty[0,1]$,et soit $E = \mathbb{R}^2$ et $P = \{(x, y) : x, y \geq 0\}$.on définit par*

$$\begin{aligned} d &: X \times X \longrightarrow E \\ d(f, g) &= (\|f-g\|_\infty, \|f-g\|_p),\ 1 \leq p \prec \infty. \end{aligned}$$

alors (X, d) est un espace métrique cône complète, et P est fortement et continue.

Preuve. Soit $\eta(s) = s$ pour tout $s \in P$. On définit $T : X \longrightarrow N(X)$ par

$$Tf = \begin{cases} g \in X : -2f(x) \leq g(x) \leq \frac{1}{2}f(x) & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ \frac{1}{2}f(x) \leq g(x) \leq -2f(x) & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

et on définit une application $\phi : X \longrightarrow P$ par:

$$\phi(f) = (\|f\|_\infty, \|f\|_p).$$

alors ϕ est semi-continue inférieur au haut et limitée au déssus. Pout tout $f \in X$, mais $g(x) = \frac{1}{2}f(x) \in Tf$. Alors on a

$$\eta(d(f,g)) = (\frac{1}{2}\|f\|_\infty, \frac{1}{2}\|f\|_p) = \phi(f) - \phi(g),$$

et donc

$$\phi(f) - \phi(g) \in s(\eta(d(f,g))).$$

D'où, T admet un point fixe $f^*(x) = 0$. ∎

3.3 Théorèmes de point fixe dans l'espace métrique partiel cône

Cette section, comporte essentiellement des généralisations de quelques théorèmes qui ont été énoncés dans le deuxième chapitre, Cette dernière est construite de la même manière que la section précédente, mais pour les théorèmes de point fixe dans les espaces métriques partiels cônes, nous établissons des résultats de point fixe pour les applications univoques et multivoques définies sur ces espaces métriques partiels cônes.

3.3.1 Généralisation du théorème de Banach pour les applications univoques

Théorème 3.9. *Soit (X,p) un espace métrique partiel cône, P un cône normal avec constante normal K. On suppose que une application $T : X \longrightarrow X$ satisfait la condition de contraction.*

$$p(Tx,Ty) \leq cp(x,y) \text{ pour tous } x,y \in X,$$

où $c \in (0,1)$, alors T admet un point fixe sur X. Aussi, pour tout $x \in X$ la suite itérative $(T^n x)$ converge vers le point fixe.

Preuve. On pose $x_0 \in X$. On définit une suite (x_n) telle que $x_1 = Tx_0$, $x_2 = Tx_1 = T^2x_0$,...,$Tx_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0$,.Pour $m > n$,

$$\begin{aligned} p(x_m, x_n) &\leq p(x_m, x_{m-1}) + p(x_{m-1}, x_{m-2}) + ... + p(x_{n+1}, x_{n+2}) \\ &\quad + p(x_{n+1}, x_n) - \sum_{k=1}^{m-n-1} p(x_{m-k}, x_k) \\ &\leq \left(c^{m-1} + c^{m-2} + ... + c^n\right) p(x_1, x_0), \end{aligned}$$

donc

$$\|p(x_m, x_n)\| \leq c^n K \frac{1}{1-c} \|p(x_1, x_0)\|.$$

D'où, $(T^n x)$ est une suite de Cauchy dans (X, p) telle que $\lim_{n,m\to\infty} p(T^n x_0, T^m x_0) = 0$ et comme (X, p) est complète, il existe $x \in X$ telle que $(T^n x_0)$ converge vers x et on a:

$$p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = 0,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$,on a:

$$\begin{aligned} p(Tx, x) &\leq p\left(Tx, T^{n+1}x_0\right) + p\left(T^{n+1}x_0, x\right) - p\left(T^{n+1}x_0, T^{n+1}x_0\right) \\ &\leq cp(x, T^n x_0) + p(T^n x_0, x), \end{aligned}$$

$$\|p(Tx, x)\| \leq Kc \|p(x, T^n x_0)\| + \|p(T^n x_0, x)\| \longrightarrow 0.$$

Donc $p(x, x) = 0$. mais puisque $p(Tx, Tx) \leq cp(x, x) = 0$, on a $p(Tx, Tx) = p(Tx, x) = p(x, x) = 0$ ce qui implique $Tx = x$.

Si y est un autre point fixe de T, alors

$$p(x, y) = p(Tx, Ty) \leq cp(x, y),$$

puisque $c < 1$ on a $p(x, y) = p(x, x) = p(y, y)$. Donc $x = y$,d'où le point fixe de T est *unique.* ■

Théorème 3.10. *Soit (X, p) un espace métrique partiel cône complèt, P un cône normal avec constante normal K. Pour $c \in int(P)$ et $x_0 \in X$, soit un ensemble*

$$B(x_0, c) = \{x \in X : p(x_0, x) \leq c\}.$$

On suppose que une application $T : X \longrightarrow X$ satisfait la condition de contraction

$$p(Tx, Ty) \leq \alpha p(x, y) \ \ x, y \in X,$$

telle que $\alpha \in [0, 1)$,et $p(Tx_0, x_0) \leq (1 - \alpha) c$. Alors T admet un point fixe dans $B(x_0, c)$.

Preuve. On montre que $B(x_0, c)$ est complèt et $Tx \in B(x_0, c)$ pour tout $x \in B(x_0, c)$.

On suppose que (x_n) est une suite de Cauchy dans $B(x_0, c)$. Alors (x_n) toujours est une suite de Cauchy dans X.d'après la complètè de X, on a $x \in X$ telle que $x_n \longrightarrow x$ $(n \longrightarrow \infty)$.

$$p(x_0, x) \leq p(x_n, x_0) + p(x_n, x) - p(x_n, x_n) \tag{3.3.1}$$

et on a

$$\begin{aligned} \left\| \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) - \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) \right\| &= \left\| \left[\lim_{n\to\infty} p(x_n, x) - p(x_n, x_n) \right] \right\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \| [p(x_n, x) - p(x_n, x_n)] \| \\ &= 0, \end{aligned}$$

et comme $[p(x_n, x) - p(x_n, x_n)] \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$ alors si $n \longrightarrow \infty$ dans (3.3.1) on a

$$p(x_0, x) \leq c \Longrightarrow x \in B(x_0, c).$$

D'où $B(x_0, c)$ est fermé et $B(x_0, c)$ est complèt. pour $x \in B(x_0, c)$,

$$\begin{aligned} p(x_0, Tx) &\leq p(x_0, Tx_0) + p(Tx_0, Tx) - p(Tx_0, Tx_0) \\ &\leq p(x_0, Tx_0) + \alpha p(x_0, x) \\ &\leq (1-\alpha)c + \alpha c = c, \end{aligned}$$

donc $Tx \in B(x_0, c)$. ■

3.3.2 Généralisation du théorème de Banach pour les applications multivoques

Voici une généralisation du théorème de Banach.

Théorème 3.11. *Soit (X, p) un espace métrique partiel cône,P un cône normal avec constante normal K.si $T : X \longrightarrow CB^P(X)$ une application multivoque satisfait .*

$$H_p(Tx, Ty) \leq cp(x, y) \text{ pour tous } x, y \in X$$

où $c \in (0, 1)$, alors T admet un point fixe sur X.

Pour démontré cette théorème on utilisé le lemme suivant

Lemme 3.12. *Soit (X,p) un espace métrique partiel cône, et P un cône normal avec constante normal K, soient $A,B \in CB^p(X)$ et $h>1$ pour tout $a \in A$ alors il existe $b=b(a) \in B$ telle que*

$$p(a,b) \leq hH_p(A,B) \tag{3.3.2}$$

Preuve. *1. Si $A=B$ on a*

$$H_p(A,B) = H_p(A,A) = \delta_p(A,A) = \sup_{x\in A} p(x,x)$$

soit $a \in A$ et $h>1$ on a

$$p(a,a) \leq \sup_{x\in A} p(x,x) = H_p(A,B) \leq hH_p(A,B)$$

par consequent si $b=a$ alors satisfait (3.3.2).

2. Si $A \neq B$ on suppose il existe $a \in A$ telle que $p(a,b) \geq hH_p(A,B)$ pour tout $b \in B$, ce qui implique

$$\inf\{p(a,y) : y \in B\} \geq hH_p(A,B),$$

donc $p(a,B) \geq hH_p(A,B)$

$$H_p(A,B) \geq \delta_p(A,B) = \sup_{x\in A} p(x,B) \geq p(a,B) \geq hp(A,B).$$

puisque $A \neq B$ an a $H_p(A,B) \neq 0$ et $h \leq 1$ contradiction. ■

Preuve. On pose $x_0 \in X$. On définie une suite $\{x_n\}$ telle que $x_1 = Tx_0$; d'après lemme on prend $h = \frac{1}{\sqrt{c}}$, il existe $x_2 \in Tx_1$ telle que

$$p(x_1,x_2) \leq \frac{1}{\sqrt{c}} H_p(Tx_0,Tx_1)$$

On a $H_p(Tx_0,Tx_1) \leq cp(x_0,x_1)$, donc $p(x_1,x_2) \leq \sqrt{c}p(x_0,x_1)$.pour $x_2 \in Tx_1$ il existe $x_3 \in Tx_2$ telle que

$$p(x_2,x_3) \leq \frac{1}{\sqrt{c}} H_p(Tx_1,Tx_2) \leq \sqrt{c}p(Tx_1,Tx_2)$$

On trouve une suite $\{x_n\} \in X$ telle que :$x_{n+1} = Tx_n$, et $p(x_{n+1},x_n) \leq \sqrt{c}p(x_n,x_{n-1})$ $\forall n \geq 1$.

On montre que cette suite est de Cauchy, pour $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
p(x_n,x_{n+m}) &\leq p(x_n,x_{n+1}) + p(x_{n+1},x_{n+2}) + ... + p(x_{n+m-1},x_{n+m-2}) \\
&\quad + p(x_{n+m-1},x_{n+m}) - \sum_{k=1}^{m-1} p(x_{n+k},x_{n+k}) \\
&\leq \left((\sqrt{c})^n + (\sqrt{c})^{n+1} + ... + (\sqrt{c})^{n+m-1}\right) p(x_0,x_1) \\
&\leq \frac{(\sqrt{c})^m}{1-\sqrt{c}} p(x_0,x_1)
\end{aligned}$$

donc

$$\|p(x_n, x_{n+m})\| \leq K \frac{\sqrt{c}^m}{1-\sqrt{c}} \|p(x_0, x_1)\| \longrightarrow 0.$$

D'où, $\{x_n\}$ est de cauchy. et comme (X, p) est complète; il existe $x^* \in X$ telle que $\{x_n\}$ est converge vers x^* .

$$p(x^*, x^*) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x^*) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = 0.$$

Maintnaent on a $x_{n+1} = Tx_n$ et $H_p(Tx_n, Tx^*) \leq cp(x_n, x^*)$, et donc

$$p(x_{n+1}, Tx^*) \leq \delta_P(Tx_n, Tx^*) \leq H_p(Tx_n, x^*).$$

Donc $\lim_{n\to\infty} H_p(Tx_n, Tx^*) = 0$

On montre que x^* est le point fixe, pour tout $n \in \mathbb{N}$,on a:

$$\begin{aligned} p(Tx^*, x^*) &\leq p(Tx_n, Tx^*) + p(Tx_n, x^*) - p(Tx_n, Tx_n) \\ &\leq p(Tx_n, Tx^*) + p(Tx_n, x^*) \\ &\leq \sqrt{c}p(x_n, x^*) + p(x_{n+1}, x^*) \\ \|p(Tx^*, x^*)\| &\leq K\sqrt{c}\|p(x, T^n x_0)\| + \|p(T^n x_0, x)\| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

alors $\|p(Tx^*, x^*)\| \longrightarrow 0$,donc $p(Tx^*, x^*) = 0$. implique $p(x^*, x^*) = 0$. donc $p(Tx^*, x^*) = p(x^*, x^*)$

ce qui implique $x^* \in \overline{Tx^*} = Tx^*$est un point fixe. ∎

Exemple 16. *Soient* $E = \mathbb{R}^2$ $X = \{(0,0), (1,1), (4,4)\}$, *et* $p : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *est un métrique partiel cône définie par:* $\forall x, y \in X$ *on a*

$$p(x, y) = (\frac{1}{4}|x-y| + \frac{1}{2}\max\{x, y\})(1, \alpha),$$

telle que $\alpha \geq 0$ *et* $P = \{(x, y) \in E : x, y \geq 0\}$.

On suppose que $T : X \longrightarrow X$ *est défine par:*

$$T((0,0)) = T((1,1)) = \{(0,0)\},$$

$$T((4,4)) = (\{0,1\}, \{0,1\}).$$

Preuve. *On montre que* $\forall x, y \in X$ *la contraction est satisfaite pour* $k = (1/2)$

i. Soit $x, y \in \{(0,0), (1;1)\}$. *On a*

$$Hp(T(x), T(y)) = Hp(\{(0,0)\}, \{(0,0)\}) = (0,0),$$

La condition de contraction est satisfaite.

ii.pour $x \in \{(0,0),(1,1)\}, y = (4,4)$. *on a*

$$\begin{aligned}
Hp(T(x),T(y)) &= Hp(T(0,0),T(4,4)) = Hp(T(1,1)\},T(4,4)) \\
&= Hp(\{(0,0)\},\{(0,0),(1;1)\}) \\
&= \max\{p(\{(0,0)\};\{(0,0),(1,1)\}),\max\{p((0,0),(0,0));p((0,0)(1,1)\}\} \\
&= (0,\alpha\frac{1}{2}) \leq (0,\alpha) = \frac{1}{2}(0,2\alpha) = kp((0,0),(4,4)) \\
&\leq (\frac{1}{4},\alpha) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2},2\alpha) \\
&= kp((1,1),(4,4)).
\end{aligned}$$

iii. pour $x = y = (4,4)$, *on a:*

$$\begin{aligned}
Hp(T(x),T(y)) &= Hp(T(4,4),T(4,4)) = Hp(\{(0,0),(1;1)\},\{(0,0),(1;1)\}) \\
&= \sup\{p(x;x) : x \in \{(0,0),(1;1)\}\} \\
&= \max\{p((0,0),(0,0));p((1,1),(1,1))\} \\
&= \max\left\{(0,0);(\frac{1}{2},\alpha\frac{1}{2})\right\} \\
&= (\frac{1}{2},\alpha\frac{1}{2}) \leq (1,\alpha) = \frac{1}{2}(2,2\alpha) \\
&= kp((4,4),(4,4)).
\end{aligned}$$

Les hypothèses de théorème sont satisfaits, donc $x = (0,0)$ *est un point fixe.* ■

3.3.3 Théorème de feng et Liu dans l'espace métrique partiel cône

Théorème 3.13. *Soit* (X,p) *un espace métrique partiel cône* P *un cône normale avec* k *un constant , et soit* $T : X \longrightarrow C(X)$ *est une application multivoque si il existe une constante* $c \in (0,1)$ *telle que pour tout* $x \in X$ *il existe* $y \in J_b^x$ *satisfait:*

$$cp(x,y) \in s(y,Ty)$$

alors T *admet un point fixe dans* X *fourni* $c < b$ *et* h *est semi-continuité inférieure.*

Preuve. *Soit* $x_0 \in X$. *puit il existe* $x_1 \in J_b^{x_0}$ *telle que*

$$cp(x_0,x_1) \in s(x_1,Tx_1).$$

Pour $x_1 \in X$, *il existe* $x_2 \in J_b^{x_1}$ *telle que*

$$cp(x_1,x_2) \in s(x_2,Tx_2).$$

1. Pouvent trouver une suite $\{x_n\}$ *telle que*

$$x_{n+1} \in J_b^{x_n}$$

et

$$cp(x_n, x_{n+1}) \in s(x_{n+1}, Tx_{n+1}).(2.2)$$

pour tout $n = 0, 1...$

2. Maintenant on montre que $\{x_n\}$ *est une suite de Cauchy sur* X*.*

Puisque $x_{n+2} \in J_b^{x_{n+1}}$,

$$s(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \subset s(bp(x_{n+1}, x_{n+2})).$$

On a $cp(x_n, x_{n+1}) \in s(bp(x_{n+1}, x_{n+2})).$*d'où*

$$bp(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq cp(x_n, x_{n+1}).$$

Donc,

$$(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq Ld(x_n, x_{n+1})$$

pour tout $n = 0, 1, ...,$*telle que* $L = \frac{c}{b}$. *donc on a*

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq Lp(x_{n-1}, x_n) \leq L^2 p(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq ... \leq L^n p(x_0, x_1).$$

pour $m > n$,*on a*

$$\begin{aligned} p(x_n, x_m) &\leq p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + p(x_{m-1}, x_m) - \sum_{j=1}^{m-n-1} p(x_{n+j}, x_{n+j}) \\ &\leq (L^n + L^{n+1} + ... + L^{m-1}) p(x_0, x_1) \leq \frac{L^n}{1-L} p(x_0, x_1). \end{aligned}$$

D'où

$$\|p(x_n, x_m)\| \leq k \frac{L^n}{1-L} \|p(x_0, x_1)\| \longrightarrow 0$$

Donc $\{x_n\}$ *est une suite de cauchy sur* X*.*

Et comme X *est complèt donc il existe* $x^* \in X$ *telle que* $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x^*) = 0$.

$$p(x^*, x^*) = \lim{}_{n\to\infty} p(x_n, x^*) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = 0.$$

Alors x_n *converge vers* x^* *dans* (X, p)*.*

3. Maintenant on montre que $x^* \in Tx^*$*.On suppose que* $x^* \notin Tx^*$*.*

puisque Tx^* *est fermé, il existe* $c \in int(P)$ *telle que* $p(x^*, y) \ll c$ *implique* $y \notin Tx^*$*.mais puisque* h *est une semi-continuité inférieure, il existe* N *telle que*

$$p(x_N, x_{N+1}) \ll \frac{c}{2} et s(x_N, x_N) \subset s(x^*, Tx^*) - \frac{c}{2}.$$

donc, il existe $y \in Tx^*$ *telle que* $p(x^*, y) - \frac{c}{2} \leq p(x_N, x_{N+1})$*. Donc,*

$$p(x^*, y) \leq pd(x_N, x_{N+1}) + \frac{c}{2} \ll c,$$

ce qui est un contradiction. Donc T *admet une point fixe.* ■

Conclusion

Le théorème du point fixe est fondamental en analyse. Il a des applications nombreuses, à la fois théoriques et pratiques.

Nous avons entamé notre mémoire par une étude bibliographique qui a englobé les notions de base du théorèmes du point fixe des contractions multivoques dans l'espace métrique partiel et nous avons pu développer quelques propriétés des éspaces métriques partiels cônes. Dans notre travail, on a étudié des théorèmes du point fixe des contractions multivoques dans l'espace métrique partiel cône.

Dans ce mémoire, Au premier chapitre, les outils mathématiques liés aux éspaces métriques partiels cônes et les applications univoques et multivoques ont été présentés.

Au second chapitre, les outils liés aux théorèmes du point fixe des contractions multivoques dans l'espace métrique partiel ont été introduits. Puis nous exposons quelques théorèmes du point fixe des contractions multivoques dans l'espace métrique partiel.

Au troixième chapitre, le but premier visé est d'étudier quelques théorèmes de point fixe dans les espaces métriques cônes. La deuxième section de ce dernier chapitre, est l'objet de notre contribution, qui porte sur l'application et l'adaptation des résultats de deuxième chapitre à l'étude de quelques théorèmes de point fixe des contractions multivoques dans les espaces métriques partiels cônes. Cette section contient une résultat originale de notre travail.

Bibliographie

[1] N. Allem et N. Aouadi "*Théorèmes du point fixe des contractions multivoques dans les espaces métriques partiels*", soutenue le 26 Juin 2014 à l'UMBB (Encadreur: Y. Adjabi).

[2] H. Aydi, M. Abbas, C.Vetro *"Partial Hausdorff metric and Nadler's fixed point theorem on partial metric spaces"* http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.06.012, (2012) .

[3] L. -G. Huang, X. Zhang, "*Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings"*, J. Math. Anal. Appl., 332, 1468-1476.2 (2007).

[4] Y. Feng et S. Liu, "*Fixed point theorems for multi-valued contractive mappings and multi-valued Caristi-type mappings"*.J Math Anal Appl. $317, 103-112(2006)$.

[5] E. Karapinar, *"Generalizations of Caristi Kirk's Theorem on partial metrics paces,"* Fixed Point Theory and. Appl., vol. 2011, no. 4, (2011).

[6] S. G. Matthews, "*Partial metric topology"*, Research Report 212, Dept. of Computer Science, University ofWarwick, (1992).

[7] A. Sonmez "*On partial cone metric spaces*", (2012) ..