MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ M'HAMED BOUGARA BOUMERDES
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire

Filière : Mathématiques

Spécialité : Modélisation stochastique et statistique

Par

KACIMI Sara et SADOUDI Nawel

THÈME

Système de files d'attente M/G/1 avec rappels

Soutenu publiquement, devant le jury composé de :

M^{me}.	H.CHEMERIK	UMBB	Promotrice.
Mr.	KH.KHALDI	UMBB	Président.
M^{me}.	S.MEDDAHI	UMBB	Examinatrice.

Table des matières

Introduction générale **ii**

1 Généralités sur les processus stochastiques **3**

1.1 Introduction 4

1.2 Chaînes de Markov 4

1.2.1 Chaînes de Markov à temps discret 4

1.2.2 Chaînes de Markov à temps continu 8

1.3 Processus de Poisson 9

1.4 Processus de naissance et de mort 11

2 Systèmes de files d'attente **14**

2.1 Introduction 15

2.2 Classification des systemes d'attente 15

2.3 Analyse mathématique 17

2.4 Files d'attente markoviennes 18

2.4.1 Système d'attente M/M/S 18

2.4.2 Système d'attente $M/M/1$ 22

2.4.3 Système d'attente$M/M/\infty$ 25

2.5 Système d'attente M/G/1 28

2.5.1 Chaîne de Markov induite 28

2.6 Systemes d'attente particuliers 31

2.6.1 Système $M/M/1$ 31

2.6.2 Systéme $M/E_2/1$ 33

2.6.3 Système $M/Géo/1$ 35
2.7 Simulation 36

3 Systéme de files d'attente M/G/1 avec rappels **38**
3.1 Introduction 39
3.2 Quelques exemples 39
3.3 Déscription de modèle 41
3.4 Chaîne de Markov induite 42
3.5 Distribution stationnaire de la chaine induite 45
3.6 Distribution stationnaire de l'état du systéme 48
3.7 Paramètres de performances 52
3.8 Système M/M/1 avec rappel 53
3.9 Décomposion stochastique pour le systéme M/G/1 avec rappels 56
3.10 Comportement asymptotique du systéme de files d'attente M/G/1 avec rappels 57

4 Application **62**
4.1 Introduction 63
4.2 Système $M/M/1$ avec rappel 63
4.3 Système $M/E_2/1$ avec rappel 64
4.4 Système $M/Géo/1$ avec rappel 66

Conclusion générale **73**

Annexes **74**

Introduction générale

L'origine des études sur les phénomènes d'attente remonte aux années "$1909-1920$" avec les travaux de l'ingénieur Danois Anger Krarup Erlang concernant le réseau téléphonique de Copenhague.Apartir des années 30 la théorie des files d'attente adopte un langage de plus en plus mathématique qui à été développée notamment grâce aux contributions de Palm, Kolmogorov, Khintchine, Pollaczek,.....

Elle fait actuellement toujours l'objet de nombreuses plublications scientifiques. Cette théorie s'est ensuite étendue à de nombreux champs d'application comme la gestion de stocks, les réseaux téléphoniques, la modélisation des systèmes de production, les télécommunications en général.....

Les files d'attente peuvent être considérées comme un phénomène caractéristique de la vie contemporaine, un outil d'analyse et de modélisation .L'étude mathématique des phénomènes d'attente constitue un champ d'application important des processus stochastiques. On parle des files d'attente chaque fois que certaines unités appelées "clients" se présentent d'une manière aléatoire à des "stations" afin de recevoir un service dont la durée est généralement aléatoire.

L'évolution rapide des systèmes informatique et des réseau de télécommunication ont montré les limites de la théorie des files d'attente dites classiques qui ne permettent pas d'expliquer le comportement stochastique de certains systèmes complexes où le client répéte sans cesse sa demande jusqu'à ce que l'obtention de service désiré .Le client se trouve en "orbite", ce qui conduit certains chercheurs à dévolopper d'autre modèle plus élaborés qu'on appelle "files d'attente avec rappels ".Plusieurs méthodes basées sur la transformée de" Laplace "ont été utilisées pour étudier les caractéristiques de ces systèmes d'attente.

Notre travail est organisé en quatre chapitres.

• Dans le premier chapitre, nous présentons les processus stochastiques à temps discret et continu tels que les chaîne de Markov, processus de Poisson et processus de naissance et de mort qui servent d'outils mathématique de base pour résoudre les problémes de files d'attente.

• Dans le chapitre 2 nous abordons les notions de files d'attente en passant en revue quelques files d'attente Markoviennes les plus connues : $M/M/1$, $M/M/S$ et $M/M/\infty$. Ensuite nous étudions le systéme d'attente $M/G/1$ à un seul serveur dont la durée de service est distbuée selon une loi générale.Une simulation sous Matlab est établit pour le systéme d'attente $M/M/1$.

• Le chaitre 3 est consacré à l'étude des files d'attente $M/G/1$ avec rappels exponentiel. Nous décrivons le modéle associé à ce type de files puis nous détérminons la distribution stationnaire et nous calculons les paramétres de performance. Enfin nous présentons un aperçu sur la propriété de décomposition stochastique et le comportement asymptotique du systéme.

•Le chapitre 4 est une application des résultats théorique obtenus sur les systéme $M/M/1$, $M/E_2/1$ et $M/Géo/1$ avec rappels.

Chapitre 1

Généralités sur les processus stochastiques

1.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de donner une idée générale sur les processus stochastiques, les chaînes de Markov à temps discret et à temps continu, on introduit le prcessus de Poisson et le processus de naissance et de mort.

1.2 Chaînes de Markov

Nous présentons ici les chaînes de Markov à temps discret et à temps continu d'espace des états fini ou dénombrable.

Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires liées par des relations de dépendance. Elles sont caractérisées par la propriété que l'état présent du processsus,

c'est-à-dire son état à l'instant n, résume toute l'information utile pour connaitre son évolution future.

Définition 1.2.1 *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires ou de vecteurs aléatoires $(X_t)_{t\in T}$ indexées par l'ensemble T de temps discret ou continu, définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \digamma, P)$ est à valeurs dans un espace d'état E. La variable ou vecteur aléatoire X_t décrit l'état de processus au temps t. A toute occurence w on fait correspondre la trajectoire de la réalisation du processus définie par l'application :*

$$t \in T \rightarrow X_t(w) \in E$$

1.2.1 Chaînes de Markov à temps discret

Définition 1.2.2 *Le processus stochastique $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E est appele une chaîne de Markov si pour tout $j, i_0, i_1, ..., i_n \in E$ et pour tout entier positif n, elle vérifie*

$$P(X_{n+1} = j/X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots.., X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j/X_n = i)$$

sous réserve que $P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots.., X_0 = i_0)$ est non nulle.

Cette propriété est connue sous le nom "Propriété de Markov"(propriété de sans mémoire).

La probabilité $p_{ij} = P(X_{n+1} = j/X_n = i)$ *pour tout* $(i,j) \in E$ *est appelée probabilité de transition de l'état* i *vers l'état* j *en un étape. La probabilité de transition en* n *étapes est définie par la probabilité de passage d'état à un autre en* n *étapes.*

Soit $p_{ij}^n = P(X_{n+k} = j/X_k = i) = P(X_n = j/X_0 = i) \quad n \geq 1, k \geq 1$

On s'intéresse au chaînes de Markov homogènes c'es- à-dire pour les quelles les probabilités $p_{ij}(n)$ sont indépendantes du temps n et seront notées p_{ij}.

Matrice de transition

La matrice de transition P de la chaîne discret $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une matrice carrée, constituée par les probabilités de transition. Elle vérifie les proprétées.

$$\begin{aligned} \forall i,j \quad &\in \quad E,\ p_{ij}(t) \geq 0 \\ \forall i,j \quad &\in \quad E, \sum_{j\in E} p_{ij} = 1 \end{aligned}$$

Graphe des transitions

Le graphe des transitions est formé de points représentant les états du processus correspondant au transitions possibles, c'est-à-dire pour lesquelles les probabilités p_{ij} sont positives.

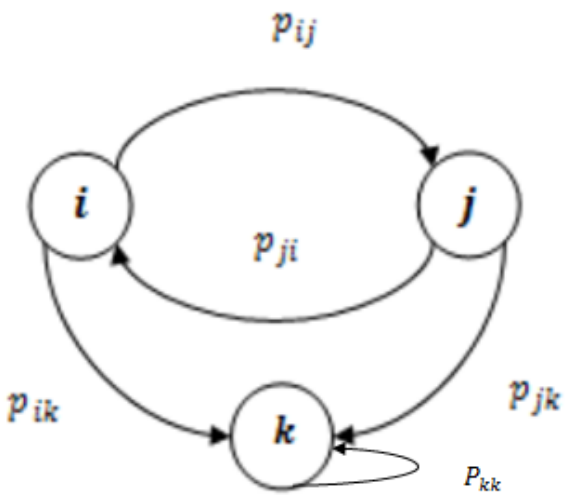

Figure 1.1.Graphe de transition d'une chaîne de Markov

Théorème 1.2.1 *On considère une chaîne de Markov sur l'aspace d'états E de matrice de transition P d'espace d'états E. On a :*

$$p_{ij}^{n} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(n-1)}\ p_{kj}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} p_{ij}^{n} &= P(X_n = j / X_0 = i) = P(X_n = j, \underset{k \in E}{\cup} \{X_{n-1} = k\} / X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in E} P(X_n = j, X_{n-1} = k \ / \ X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in E} P(X_n = j, X_{n-1} = k \ / \ X_0 = i) P(X_{n-1} = k \ / \ X_0 = i) \end{aligned}$$

puisque $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov, on a

$$p_{ij}^{n} = \sum_{k\in E} p_{ik}^{(n-1)}\ p_{kj}$$

Sous forme matricielle, on écrit $P^n = P^{n-1}P$

De façon générale,

$$\begin{aligned} p_{ij}^{m+n} &= \sum_{k\in E} p_{ik}^{(m)}\ p_{kj}^{(n)} \qquad i,j \in E, m \geq 1, n \geq 1 \\ &\quad et \\ P^{m+n} &= P^m P^n \end{aligned}$$

Le système d'équations connu sous le nom d'équations de "Chapman Kolmogorov" ■

Loi de probabilité de X_n

Soit $\pi_k(n)$ les probabilités d'état E d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'espace d'états E.

$$\pi_k(n) = P(X_n = k) \qquad n = 0, 1...., .\ et\ k = 1, 2.....$$

La distribution de X_n peut être écrite cmme sous forme de vecteur ligne $\pi(n) = (\pi_1(n),\ \pi_2(n), ...)$ dont la somme des termes à 1 pour calculer $\pi(n)$, il faut connaitre soit la valeur prise par X_0, soit sa distribution initiale $\pi(0)$.

D'aprés le théorème des probabilités totales, on a :

$$\pi_k(n) = \sum_{i\in E} \pi_i(0) p_{ik}^{(n)} \quad \text{sous forme matricielle } \pi(n) = \pi(0)P^n$$

De façon analogue, on obtient

$$\pi(n+1) = \pi(n)P$$

Distribution stationnaire

Une distribution de probabilité discrete $\pi = (\pi_1, \pi_2, ...)$ est appelée stationnaire par rapport à une matrice stochastique P si :

$$\pi.P = \pi \qquad \text{et } \sum_{i\in E} \pi_i = 1$$

Une distribution de probabilité stationnaire n'est donc pas affectée par une ou par plusieurs transitions d'une chaîne de Markov.

1.2.2 Chaînes de Markov à temps continu

Par rapport aux chaînes de Markov en temps discret $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la différence se situe dans le fait que la chaînes peut change d'état à n'importe quel moment de $T \in [0, +\infty]$ et non uniquement à des instants entiers.

Définition 1.2.3 *Le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est une chaîne de Markov en temps continu si :* $\forall$ $0 \leq t_0 < t_1 < .... < t_n < t, \quad P(X_t = j/X_{t_0} = i_0 , ..., X_{t_n} = i_n) = P(X_t = j/X_{t_n} = i_n)$

$$pour\ tout \quad , \quad i_0, i_1...., j, i_n \in E$$

Une chaîne de Markov à temps continu est homogène si pour tout $t \in \mathbb{R}^+, i, j \in E$

$$P(X_{t+s} = j/X_s = i) = P(X_t = j/X_0 = i) = p_{ij}(t)$$

Matrice de transition

La matrice de transition $P(t)$ dont le terme générale $p_{ij}(t) = P(X_t = j/X_0 = i)$ est la probabilité de transition de l'état i vers l'état j en une seule étape.

La matrice $P(t)$ est une matrice stochastique tel que :

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &\geq 0 \\ \sum_{j\in E} p_{ij}(t) &= 1 \quad \forall i \in E \end{aligned}$$

Théorème 1.2.2 *[14]*

Les probabilités de transition satisfont les équations suivante dites de

Chapman-Kolmogorov

Pour tout couple d'entiers (i, j), pour tout réels positifs t et

$$p_{ij}(t + s) = \sum_{k\in E} p_{ik}(t)\ p_{kj}(s)$$

1.3 Processus de Poisson

Parmi les processus stochastique à temps continu, le processus de Poisson occupe une place importante. Il est utilisé pour décrire la réalisation dans le temps d'évènements aléatoires d'un type donné.

La discription mathématique d'un flux d'évènements aléatoire peut se faire de manière differents.

1−On consédère le nombre d'évènements $N(t)$ survenus dans l'intervalle de temps $[0,t]$ et on cherche à déterminer la distribution de cette variable aléatoire discrete.

Le processus stochastique $N(t)_{t\geq 0}$ est appelé processus de Comptage.

2− On consédère les intervalles de temps séparant les instants d'application de deux évènements consécutifs.Ce sont des variables aléatoires continues et positives dont on

admettera généralement qu'elles sont indépendentes identiquement distribuées.

Définition 1.3.1 *On dit qu'un processus de Comptage $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson s'il satisfait aux trois conditions suivantes :*

c_1 ►*Le processus est homogène dans le temps* **:** *La probabilité d'avoir k évènements dans un intervalle de longueur donné t ne dépend que de t et non pas de la position de l'intervalle par rapport à l'axe temporel*

$$p_k(t) = P(N(t) = k) = P(N(s+t) - N(s) = k \qquad \textit{pour tout } s > 0,\ \ t > 0$$

c_2 ►*Le processus $N(t)$ est à accroissements indépendents :*

$$\begin{aligned} P(N(s+t) - N(s) &= k\ , N(s) = j) = P(N(s+t) - N(s) = k)P(N(s) = j) \\ &= p_k(t)\ p_j(s) \end{aligned}$$

pour tout $s > 0$, $t > 0$.

c_3 ►*La probabilité $p_k(\triangle t)$*

$$p_k(\triangle t) = \begin{cases} 1 - \lambda(\triangle t) + o(\triangle t) & si \quad k = 0 \\ \lambda(\triangle t) + o(\triangle t) & si \quad k = 1 \\ o(\triangle t) & si \quad k \geq 2 \end{cases}$$

Le coéfficient λ est appelé densité ou intensité du processus.C'est le nombre d'évènements qui apparissent par unité de temps.

Théorème 1.3.1 *[14]si un processus de Comptage $(N(t))_{t\geq 0}$ satisfait aux conditions c_1, c_2 et c_3, alors*

$$\begin{aligned} P(N(t) &= k) = p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}\exp^{-\lambda t} \qquad \lambda > 0, k > 0 \\ E[N(t)] &= \lambda t \qquad , \qquad Var[(N(t)] = \lambda t \end{aligned}$$

Ces relations définissent le régime stationnaire du Poisson. Aucune régime stationnaire n'existe vu que $\lim p_k(t) \to 0$ *pour tout k lorsque $t \to \infty$*

Théorème 1.3.2 *[14]*

Le temps T qui sépare un instant quelconque du prochain évènement est une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ.

Graphe des transitions

Dans le cas des processus à temps continu, en particulier le processus de Poisson. On remplace l'unité temporelle par un petit intervalle $\triangle t$ et l'on indique sur chaque arc la probabilité de transition correspondante (Figure1.2) pour ne pas la surcharger, on.supprime le terme $+o(\triangle t)$ qui figure dans toute probabilité de transition.

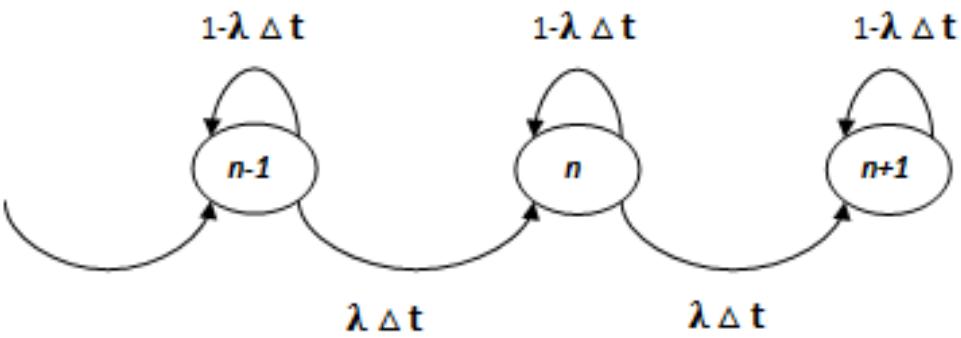

Figure1.2. Graphe des transitions du processus de Poisson

1.4 Processus de naissance et de mort

Les processus de naissance et de mort sont des processus stochastiques à temps continu et à espace d'états discrets $n = 0, 1, 2.....$ Ils sont sans mémoire, et à partir d'un état donné n, seules les transitions vers l'un des états voisins $(n+1)$ et $(n-1)$ avec $n \geq 1$ sont possibles. On parle alors de « naissances » et de « morts ». Ces processus sont utilisés pour modéliser les systèmes d'attente et l'évolution de populations.

Définition 1.4.1 *Soit un processus stochastique $\{X(t); t \geq 0\}$ à états discrets $n \in \mathbb{N}$, et homogène dans le temps, c'est à dire :*

$$P(X(t+s) = j / X(s) = i) = p_{ij}(t) \text{ , ne dépend pas de } s$$

Le processus $\{X(t); t \geq 0\}$ est un processus de naissance et de mort s'il satisfait les conditions Suivantes :

$$\begin{cases} p_{i,i+1}(\triangle t) = \lambda_i \triangle t + o(\triangle t) & (i \geq 0) \\ p_{i,i-1}(\triangle t) = \mu_i \triangle t + o(\triangle t) & (i \geq 1) \\ p_{i,i}(\triangle t) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)\triangle t + o(\triangle t) & (i \geq 0) \\ p_{i,j}(\triangle t) = o(\triangle t) & \mid i - j \mid \geq 2 \end{cases}$$

Les coefficients positifs λ_i et μ_i sont appelés taux de transition, plus particulièrement taux de naissance (ou de croissance) pour λ_i et taux de mort (ou de décroissance) pour μ_i.

Régime transitoire

Pour calculer les probabilités d'états $p_n(t) = P(X(t) = n)$ nous pouvons écrire d'aprés le théorème des probabilités totales et pour $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} p_n(\triangle t + t) &= \sum_{i \geq 0} p_i(t) p_{in}(\triangle t) \\ &= p_{n-1}(t) p_{n-1,n}(\triangle t) + p_n(t) p_{n,n}(\triangle t) + p_{n+1}(t) p_{n+1,n}(\triangle t) \\ &= \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) \triangle t + (1 - (\lambda_n + \mu_n)) p_n(t) \triangle t + \mu_{n+1} p_{n+1}(t) \triangle t + o(\triangle t) \\ \Rightarrow \quad & \frac{p_n(t + \triangle t) - p_n(t)}{\triangle t} = \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) p_n(t) + \mu p_{n+1}(t) + \frac{o(\triangle t)}{\triangle t} \end{aligned}$$

On faisant tendre $\triangle t$ vers 0, on trouve :

$$p_n^{'}(t) = \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) p_n(t) + \mu_{n+1} p_{n+1}(t), \ \forall n \geq 1..... \tag{1.4.1}$$

Pour $n = 0$, on pose $\mu_0 = 0$,

$$p_0^{'}(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t).....\tag{1.4.2}$$

On a $p_{n-1}(t) = 0$ si $n = 0$

$$\begin{aligned} p_0^{'}(t) &= -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \\ p_n^{'}(t) &= \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) p_n(t) + \mu_{n+1} p_{n+1}(t), \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

Les équations (1.4.1) et (1.4.2) sont connues sous le nom "équations différentielles de Kolmogorov "elles permettent de calculer les probabilités d'état $p_n(t)$ si l'on connait les condition initiales du processus.

Régime stationnaire

Lorsque $t \to +\infty$ les limites p_n=$\lim_{t\to\infty} p_n(t)$ existent et sont indépendantes de l'état initial du processus, on a alors $\lim_{t\to\infty} p_n^{'}(t) = 0$. Ceci se traduit par les équations dites de balances.

$$\begin{aligned} 0 &= -(\lambda_n + \mu_n) p_n + \lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1} \qquad n \geq 1 \\ 0 &= \lambda_0 p_0 + \mu\ p_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n = 0 \end{aligned}$$

aux quelles il faut ajouter la condition $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$.

En addionnant les $(n+1)$ premières equations, on obtient: $\mu_{n+1} = \lambda_n p_n$

d'où

$$p_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 ....\lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 .....\mu_n} p_0$$

avec

$$\sum_{n\geq 0} p_n = 1 \Longrightarrow p_0 = \frac{1}{\sum_{n\geq 0} \prod_{J\geq 0} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}}$$

Graphe des transitions

Le graphe de transition décrit en chaque état le flux entrant et le flux sortant

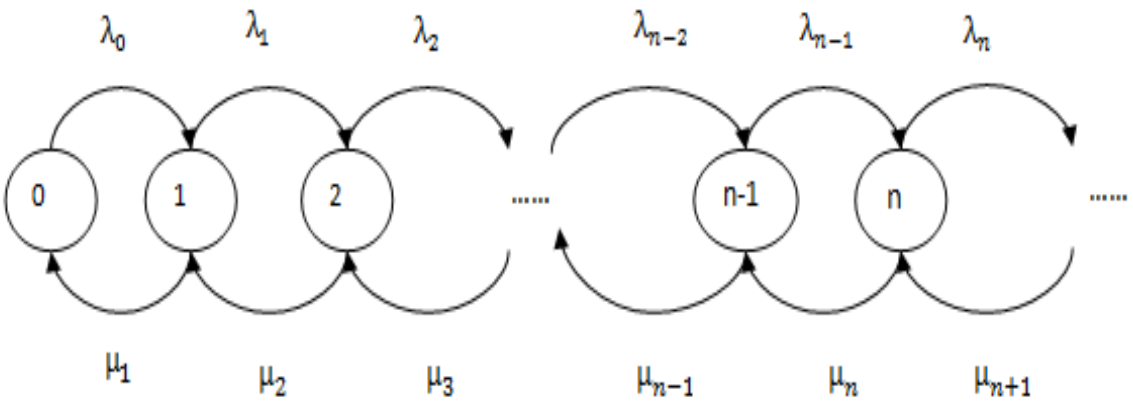

Fig.1.3.Graphe d'un processus de naissance et de mort

Chapitre 2

Systèmes de files d'attente

2.1 Introduction

Un phénoméne d'attente peut être décrit comme un systeme composé d'un certain nombre de places d'attente (fini où infini)d'un plusieurs serveurs et de clients arrivant à des instants quelconques à un intervalle de temps aléatoire pour acquérir un service auprés d'un serveur. Les clients se font servir selon des régles spécifiées et quittent le systeme quand les serveurs sont tous occupés, les clients doivent alors patients dans un espace d'attente(s'il existe)jusqu'à ce qu'un serveur soit disponible.

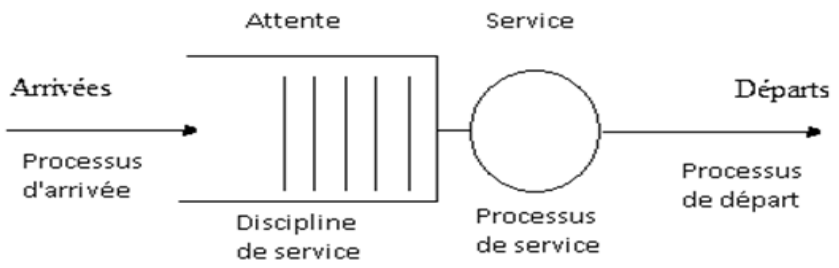

Figure.2.1.Structure générale d'un systéme d'attente

2.2 Classification des systemes d'attente

La classification des systèmes des files d'attente se base principalement sur :

•Le processus des arrivées, il spécifie les instants aux quels les clients arrivent dans le systéme, le processus peut-être régulier : c'est-à-dire à chaque unité du temps, on a une arrivée (processus de poissons).

•La distriution du temps aléatoire de service.

•Le nombre S de stations de service qui sont montée en paralléle, on admet que le temps de service correspondants suivants la même distribution et que les clients qui arrivent forment une seule file d'attente.

•La capacité N du systéme.

Si $N < \infty$ la file d'attente ne peut dépasser une langueur de $N - S$ unités.Si un client arrive dans un systéme ayant atteint sa capacité maximale d'accueuil, il est refoulé et doit quitter le systéme sans avoir été servi.

•La population des clients est supposées homogène, c'est-à-dire que les temps de service nécessaires au traitement des clients sont identiquement distribués selon une loi de probabilité commune.

•La discipline de service détermine l'ordre dans les clients sont rangés dans la file et sont retirés pour recevoir un service. Les disciplines les plus courantes sont :

$FIFO$ (First In First Out) ou (Premier Arrivé Premier Servi) : c'est la file standard, dans laquelle les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée.

$LIFO$ (Last In First Out) ou (Dernier Arrivé Premier Servi). Cela correspond à une file, dans laquelle le dernier client arrive sera le premier traité.

$RANDOM$ (Aléatoire) le prochain client qui sera servi est choisi aléatoirement dans la file d'attente.

Notation de Kendall

Elle comprend des symboles rangé dans l'ordre :$T/X/S/K/Z$

Où :

T : distribution des temps entre deux arrivées consécutives.

X : distribution des durées de service.

S : nombre de serveurs.

K : capacité de systéme.

Z : discipline de service (généralement FIFO).

Si les deux dérniers symboles ne sont pas précisés, il est sous entendu que $K = \infty$ et $Z = FIFO$.

Pour specifier les distribution T et X, on introduit les symboles suivants :

M : distribution exponentielle (markovienne).

G : distribution générale.

D : distribution déterministe.

E_K : distribution de Erlang dordre K.

$Géo$: distribution géometrique.

H_K : distribution hyper exponentielle dordre K.

2.3 Analyse mathématique

L'étude mathématique d'un systeme de file d'attente se fait par l'introduction d'un processus stochastique qui décrit l'évolution temporelle du système pour cela on s'intéresse d'abord au nombre $X(t)$ de clients se trouvant dans le système à l'instant t ($t \geq 0$) et on cherche à calculer :

• les probabilités d'état $p_n(t) = P(X(t) = n)$ définissent le régime transitoire du processus

• le régime stationnaire du processus est définit par $p_n = \lim_{t\to\infty} p_n(t)$.

Paramètres de performance

A partir de la distribution stationnaire du processus $\{X(t); t \geq 0\}$, on peut obtenir d'autres caractéristiques d'exploitation du système telles que :

• $L = E(X)$: Le nombre moyen de clients dans le système.

•L_q : Le nombre moyen de clients dans la file d'attente.

• W : La durée moyenne de séjour d'un client dans le système.

•W_q : La durée moyenne de séjour d'un client dans le file d'attente.

Formules de Little

La loi de Little est une relation qui s'applique à une grande classe de systèmes, la seule condition d'application de la loi de Little est que le système soit stable.

$L = \lambda_e.W$

$L_q = \lambda_e.W_q$

$W = W_q + \frac{1}{\mu}$

$L = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu}$

Où, λ_e est le taux d'entrée dans le système.

Si la capacité du système est infinie on a :

$\lambda_e = \lambda$ sinon on a $\lambda_e < \lambda$.

2.4 Files d'attente markoviennes

Les modéles Markoviens caractérisent le systéme dans lesquels les deux quantités stochastique principales, qui sont le temps des interarrivées et la durée de service, sont des variables aléatoires indépendantes et exponentillement distribuées.

L'étude mathématique de tels systéme se fait par l'introduction du processus défini comme étant le nombre de clients dans le systéme à l'instant t.

La notion de Kendall pour ce type de file d'attente est $M/M/\cdot/\cdot$.

Une file d'attente Mrkovienne peut être considéré comme un processus de naissance et de mort.

$$\begin{aligned} \text{naissance} &\iff \text{arrivée du client} \\ \text{mort} &\iff \text{départ du client du systéme aprés son service.} \end{aligned}$$

2.4.1 Système d'attente M/M/S

Les files $M/M/s$ sont les plus simples à analyser, tel que chaque file comporte S serveurs identiques et indépendants les uns des autres.Le processus d'arrivée des clients est Poissonien de taux λ et le temps de service est exponentiel de taux μ (pour chacun des serveurs). Le client entrant au système n'est pas obligé de visiter tous les S serveurs (tel que dans le cas ou le client peut choisir le serveur, bien sur il doit choisir la file la moins langue). Nous avons donc un modèle de file d'attente ou les arrivées et les départs sont modélisés par un processus de naissance et de mort où :

$$\lambda_n = \lambda, \forall n \geq 0 \ ; \ \mu_n = \begin{cases} nS & si \quad n \leq S \\ S\mu & si \quad n > S \end{cases}$$

Stabilité du système

La condition de stabilité de cette file est $\lambda < S\mu$ et exprime le fait que le nombre moyen de clients qui arrivent à la file par unité de temps doit être inferieur au nombre moyen de clients que les serveurs de la file sont capables de traiter par unité de temps.

$\rho = \frac{\lambda}{S\mu} < 1$.

Graphe de transition

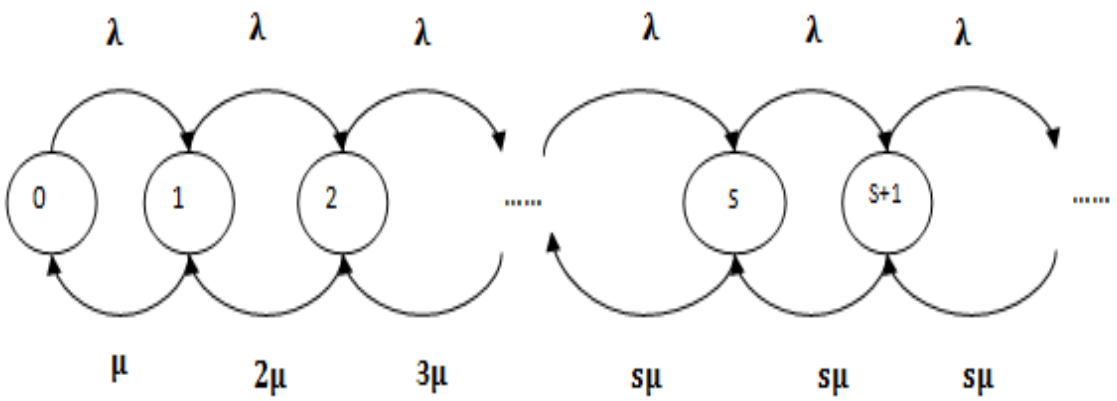

Figure.2.2: Graphe des transitions d'une file d'attente M/M/S

Analyse de régime permanent

On suppose que le système est stable ($\rho < 1$).

Les équations de balances sont :

Si : $n \leq S$

$$\begin{cases} 0 & : & \lambda p_0 & = & \mu p_1 \\ 1 & : & \lambda p_1 + \mu p_1 & = & \lambda p_0 + \mu p_2 \\ & & . & & \\ & & . & & \\ & & . & & \\ (S-1) & : & \lambda p_{S-1} + (S-1)\mu p_{S-1} & = & \lambda p_{S-2} + S\mu\ p_S \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\lambda}{\mu}\, p \\ p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^2 p_0 \\ p_3 = \frac{\lambda}{3\mu} p_2 = \frac{1}{2\cdot 3}(\frac{\lambda}{\mu})^3 p_0 \\ \quad . \\ \quad . \\ p_S = \frac{1}{S!}(\frac{\lambda}{\mu})^S p_0 \end{cases}$$

Si :$n > S$

$$\begin{cases} S : \lambda p_S + S\mu p_{(S-1)} = \lambda p_{(S-1)} + S\mu p_{(S+1)} \\ (S+1) : \lambda p_{(S+1)} + S\mu p_{(S+1)} = \lambda p_S + S\mu p_{(S+2)} \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_S = \frac{1}{S!}(\frac{\lambda}{\mu})^S p_0 \\ p_{(S+1)} = \frac{1}{S!S}(\frac{\lambda}{\mu})^{S+1} p_0 \\ p_{(S+2)} = \frac{1}{S!S^2}(\frac{\lambda}{\mu})^{S+2} p_0 \\ \quad . \\ \quad . \\ p_n = \frac{1}{S!S^{n-s}}(\frac{\lambda}{\mu})^n p_0 \end{cases}$$

D'où :

$$p_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}(\frac{\lambda}{\mu})^n p_0 & si \quad n \leq S \\ \frac{1}{S!S^{n-s}}(\frac{\lambda}{\mu})^n p_0 & si \quad n > S \end{cases}$$

On cherche p_0 :

On a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{S} p_n + \sum_{n=S+1}^{\infty} p_n &= 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{S} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} p_0 + \sum_{n=S+1}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{S!S^{n-S}} p_0 = 1 \\ &\Longrightarrow p_0 \left[\sum_{n=0}^{S} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \sum_{n=S+1}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{S!S^{n-S}} \right] = 1 \\ &\Longrightarrow p_0 \left[\sum_{n=0}^{S} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{1}{S!} (\frac{\lambda}{S\mu})^S \sum_{n-S=1}^{\infty} (\frac{\lambda}{S\mu})^{n-S} \right] = 1\end{aligned}$$

On pose $n - S = j$

$$\begin{aligned}1 + \sum_{j=1}^{\infty} (\frac{\lambda}{S\mu})^j &= \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{S\mu}} \Longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} (\frac{\lambda}{S\mu})^j = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{S\mu}} - 1 \\ p_0 &= \left[\sum_{n=0}^{S} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{1}{S!} (\frac{\lambda}{S\mu})^S \frac{\frac{\lambda}{S\mu}}{1 - \frac{\lambda}{S\mu}} \right]^{-1} \\ p_0 &= \left[\sum_{n=0}^{S} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{S\mu})^{S+1}}{S!(S - \frac{\lambda}{\mu})} \right]^{-1}\end{aligned}$$

Les paramétres de performance de systeme $M/M/S$ sont :

Soit X_q le nombre de clients dans la file d'attente.

$$X_q = \begin{cases} 0 & si \quad X \leq S \\ X - S & si \quad X > S \end{cases}$$

►Le nombre moyen de clients dans la file d'attente :

On a:

$$\begin{aligned}L_q &= E(X_q) = \sum_{n=S+1}^{\infty} (n - S) p_n = \sum_{n=S+1}^{\infty} (n - S) \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{S!S^{n-S}} p_0 \\ &= \frac{p_0}{S!} (\frac{\lambda}{\mu})^S \sum_{n=S+1}^{\infty} (n - S) (\frac{\lambda}{S\mu})^{n-S} = \frac{p_S \, \rho}{(1 - \rho)^2}\end{aligned}$$

D'où

$$L_q = \frac{p_S \, \rho}{(1 - \rho)^2}$$

►Le nombre moyen de clients dans le système :

$$\begin{aligned} L &= L_q + \frac{\lambda}{\mu} \Longrightarrow L = L_q + S\rho \\ &\Longrightarrow L = p_S \frac{\rho}{(1-\rho)^2} + S\rho \end{aligned}$$

►Le temps moyen de présence d'un client dans le système :

A partir de la formule de Little, on obtient :

$$L = \lambda.W \Longrightarrow W = \frac{L}{\lambda}$$

D'où :

$$W = p_S \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)^2} + \frac{S\rho}{\lambda}$$

►Le temps moyen de présence d'un client dans la file d'attente :

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{p_S \rho}{\lambda(1-\rho)^2}$$

2.4.2 Système d'attente $M/M/1$

Le systeme d'attente $M/M/1$ est un système formé d'une file de capacité infinie, d'un unique serveur et la discipline de service de la file est $FIFO$. Supposons que les instants d'arrivés des clients sont distribués selon un processus de Poisson de taux λ et que les temps de service sont indépendants suivant la loi exponentielle de taux μ.

Les taux des arrivés λ_n et de service μ_n sont.

$$\lambda_n = \lambda \ , \forall n \geq 0; \ \mu_n = \begin{cases} \mu & si \quad n \geq 1 \\ 0 & si \quad n = 0 \end{cases}$$

Le système est stable si :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

-Si $\rho > 1$ le nombre de client tend vers l'infini donc le système n'est pas stable.

-Si $\rho = 1$ la file se vide réguliérement et le temps moyen de retour à 0 est infini.

Graphe de transition

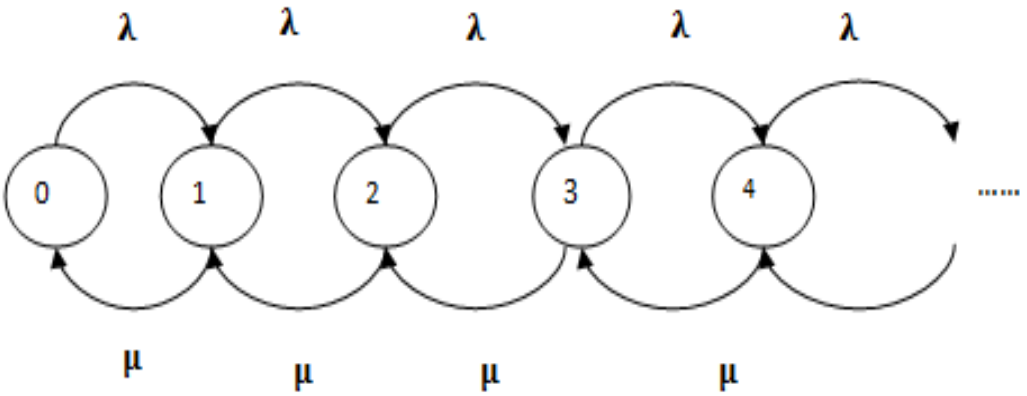

Figure.2.3.Graphe de transition d'une file d'attente M/M/1

Analyse du régime permanent.

On suppose que le système est stable $\rho < 1$.

Les équations de balance sont données par :

$$\begin{cases} 0 : & \lambda p_0 & = & \mu p_1 \\ 1 : & \lambda p_1 + \mu p_1 & = & \lambda p_0 + \mu p_2 \\ & . & & \\ & . & & \\ & . & & \\ n : & \lambda_n + \mu p_n & = & \lambda p_{(n-1)} + \mu p_{(n+1)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 & & \\ p_2 = \frac{\lambda}{\mu} p_1 & = & (\frac{\lambda}{\mu})^2 p_0 \\ p_3 = \frac{\lambda}{\mu} p_2 & = & (\frac{\lambda}{\mu})^3 p_0 \\ . & & \\ . & & \\ p_n = \frac{\lambda}{\mu} p_{n-1} & = & (\frac{\lambda}{\mu})^n p_0 \end{cases}$$

On cherche p_0 :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p_n &= 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{\lambda}{\mu})^n p_0 = 1 \\
&\Longrightarrow p_0 \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{\lambda}{\mu})^n = 1 \\
p_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{\lambda}{\mu})^n} \\
p_0 &= 1 - \frac{\lambda}{\mu}
\end{aligned}$$

D'où :

$$p_n = (1 - \frac{\lambda}{\mu}) \cdot (\frac{\lambda}{\mu})^n = (1 - \rho)\rho^n$$

Paramètres de performance

▶Le nombre moyen de clients dans le système

$$\begin{aligned} L &= E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-\rho)\cdot\rho^n = (1-\rho)\rho\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} = \\ &= (1-\rho)\rho\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{d\rho}(\rho)^n \\ &= (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\sum_{n=1}^{\infty}(\rho)^n \\ &= (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}(\frac{1}{1-\rho}) \\ &= (1-\rho)\rho(\frac{1}{(1-\rho)^2}) \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} \end{aligned}$$

Donc

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

▶Le nombre moyen de client dans la file d'attente

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

▶Le temps moyen de présence d'un client dans le système

$$W = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

▶Le temps moyen de présence d'un client dans la file d'attente

$$W_q = \frac{p_S}{(1-\rho)^2\lambda}$$

2.4.3 Système d'attente$M/M/\infty$

Le système $M/M/\infty$ est un système comprenant une infinité de serveurs identiques, donc chaque client est servi dés son entré. Le processus de naissance et de mort associé a pour taux de transition

$$\lambda_n = \lambda, \forall n \geq 0 \quad \text{et} \quad \mu_n = n\mu, \forall n \geq 0$$

Stabilité de systeme

$$\rho = \frac{\lambda}{n\mu} < 1$$

Graphe de transition

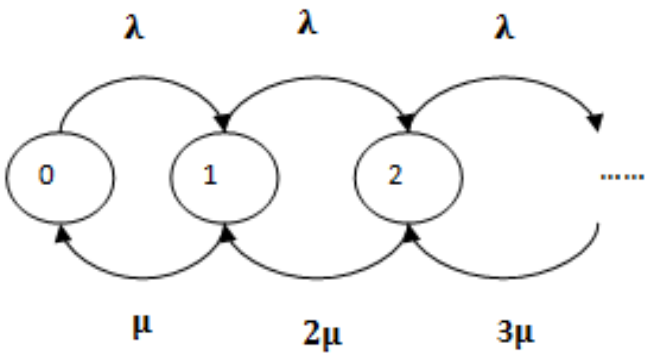

Figure.2.4.Graphe de transition d'un système M/M/∞

Analyse de régime permanent

Les équations de balances

$$\begin{cases} 0 : \lambda p_0 = \mu p_1 \\ 1 : \lambda p_1 + \mu p_1 = \lambda p_0 + 2\mu p_2 \\ . \\ . \\ . \\ (n-1) : \lambda p_{n-1} + (s-1)\mu p_{n-1} = \lambda p_{n-2} + n\mu p_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1 & = \frac{\lambda}{\mu} p_0 & \\ p_2 & = \frac{\lambda}{2\mu} p_1 & = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^2}{2} p_0 \\ p_3 & = \frac{\lambda}{3\mu} p_2 & = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^3}{3!} p_0 \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ p_n & = \frac{\lambda}{n\mu} p_{n-1} & = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} p_0 \end{cases}$$

On cherche p_0 :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \quad = \quad 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} p_0 = 1 & \\ \Longrightarrow \quad p_0 = \left[\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!}} \right] \Longrightarrow p_0 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} \right]^{-1} & \\ \Longrightarrow \quad p_n = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} \right]^{-1} & \\ \Longrightarrow \quad p_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n \frac{\exp\left\{-\frac{\lambda}{\mu}\right\}}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots\ldots) & \end{aligned}$$

Paramètres de performance

▶Le nombre moyen de clients dans le système

En régime stationnaire le nombre de client X dans le système $M/M/\infty$ suit une distribution de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{\mu}$ donc

$$L = E(X) = \frac{\lambda}{\mu}$$

▶Le nombre moyen de clients dans la file d'attente

$$L_q = 0 \quad \text{(Pas de file)}$$

▶Le temps moyen de présence d'un client dans le système

$$W = \frac{L}{\lambda} \Longrightarrow W = \frac{1}{\mu}$$

►temps moyen de présence d'un client dans la file d'attente

$$W_q = 0$$

2.5 Système d'attente M/G/1

Le système d'attente $M/G/1$ est un système d'une file d'attente à capacité illimitée de discipline $FIFO$ et d'un seule serveur.Les clients arrivents dans le systéme suivant un processus Poissonien d'intensité $\lambda > 0$, le temps de service Y est réparti suivant une loi quelconque dont la fonction de répartition $F(x)$, la transformée de Laplace-stieltejes $\bar{f}(z)$ et l'espérance mathématique $E(Y) = \frac{1}{\mu} = m$.

2.5.1 Chaîne de Markov induite

Nous considérons le processus $X(t)$ aux les instants t_1, t_2, t_3....où les clients terminent leur serviceet quittent le systéme. On définit ainsi le processus stochastique à temps discret $\{X_n = X(t_n), n \in \mathbb{N}\}$ où t_n est l'instant de départ du $n^{iéme}$ client.Pour vérifier que cette suite est une châine de Markov à temps discret, on considére le nombre A_n de clients qui entrent dans le système pendant que le $n^{iéme}$ client est servi.

Soit la variables aléatoires A_n indépendantes et identiquement distribuées telle que A_n est le nombre de clients arrivant pendant $n^{iéme}$ service.

$$P(A_n = k) = a_k = \int_0^{\infty} \frac{\exp\{-\lambda t\}(\lambda t)^k}{k!} f(t)dt \qquad \text{où} \qquad a_k > 0 \ (k = 0, 1, 2...)$$

Alors:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + A_{n+1} & si \quad X_n \geq 0 \\ A_{n+1} & si \quad X_n = 0 \end{cases} \qquad n \geq 1$$

Qui s'écrit

$$X_{n+1} = X_n - \delta_n + A_{n+1}$$

avec

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & si \quad X_n > 0 \\ 0 & si \quad X_n = 0 \end{cases}$$

X_{n+1} ne dépend que de X_n et de A_{n+1} et non pas des valeurs prises par X_{n-1}, $X_{n-2,}$ .....

La suite de variables aléatoires $\{X_{n,}\ n \geq 1\}$ est une chaine de Markov induite du processus $\{X(t)_{,}\ t \geq 0\}$. Ses probabilités de transition se calcule par :

$$\begin{cases} p_{0j} = a_j & si \quad j \geq 0 \\ p_{ij} = a_{j-i+1} & si \quad 1 \leq j \leq j+1 \\ p_{ij} = 0 & si \quad \text{ailleurs} \end{cases}$$

Ainsi la matrice de transition P est donnée :

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & .... & .... \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & .... & .... \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & .... & .... \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & .... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

La chaine est une chaine de Markov érgodique car en peut passer de chaque états vers n'import quel autre état.

$E(A_n) = \rho$ (ρ est appelé l'intensité du trafic).

-La distribution stationnaire de la chaîne existe si :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \qquad où \quad \mu = \frac{1}{m}$$

Théorème 2.5.1 *[14]*

Si $\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n z^n$, *si* $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ z^n$ *et si* $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, *alors* $\pi(z) = \frac{\pi_0 A(z)\ (z-1)}{z - A(z)}$

Preuve. La distribution stationnaire π doit verifier $\pi = \pi P$ soit $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}$, ce qui s'écrit également

$$\pi_j = a_j \pi_0 + \sum_{i=1}^{j+1} a_{j-i+1} \pi_i - a_{j+1} \pi_0$$

Si l'on multiplie cette équation par z^j et si l'on somme sur j, on a

$$\pi(z) = A(z)\pi_0 + \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+1} z^{j+1} - \frac{\pi_0}{Z}(A(z) - a_0)$$

Où $a_j = \sum_{i=0}^{j} a_{j-i}$ et $\frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+1} z^{j+1} = \frac{1}{Z}(A(z)\pi(z) - a_0\pi_0)$

Ainsi

$$\pi(z) = \frac{\pi_0 A(z)(z-1)}{z - A(z)}$$

$\pi(z)$ est la fonction génératrice de la distribution stationnaire π pour calculer $A(z)$, on a

$$A(z) = \bar{f}(\lambda - \lambda z)$$

Où $\bar{f}(z)$ est la transformée de Laplace de la densité de probabilité de service Y. ■

Parametres de performance

Pour le systéme d'attente $M/G/1$ le nombre moyen de clients dans le systéme L, le temps de séjour moyen W,le nombre moyen de clients dans la file L_q et le temps moyen d'ttente W_q sont donnés par :

►le nombre moyen de client dans le système

$$L = E(X) = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 V(Y)}{2(1-\rho)}$$

►Le nombre moyen de client dans la file d'attente

$$L_q = L - \rho \Rightarrow L_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2 V(Y)}{2(1-\rho)}$$

►Le temps moyen de présence d'un client dans le système

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + \left(\frac{\lambda(V(y) + \frac{1}{\mu^2})}{2(1-\rho)} \right)$$

►Le temps moyen de présence d'un client dans la file d'attente

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda(V(y) + \frac{1}{\mu^2})}{2(1-\rho)}$$

2.6 Systemes d'attente particuliers

2.6.1 Système $M/M/1$

On peut obtenir les caractéristiques de système d'attente $M/M/1$ à partir des résultats du système $M/G/1$ où Le temps de service suit une loi exponentielle de paramètre μ .

La transformer de Laplace est :

$$\begin{aligned}
A(z) &= \bar{f}_T(\lambda - \lambda z) = \int_0^\infty \exp\{(-\lambda - \lambda z)\ t\}\ \ f(t)\ dt \\
&= \int_0^\infty \exp\left((-\lambda - \lambda z)\ t\ \right)\mu\ \exp\left(-\mu\ t\right)\ dt = \mu \int_0^\infty \exp\left(-(\lambda - \lambda z + \mu)\ t\ \right) dt \\
&= \frac{-\mu}{\lambda - \lambda z + \mu}\left[\exp\left(-t(\lambda - \lambda z + \mu)\ \right)\right]_0^\infty \\
&= \frac{\mu}{\lambda - \lambda z + \mu}
\end{aligned}$$

En remplaçant la transformé de Laplace dans $\pi(z)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\pi(z) &= \frac{(1-\rho)(z-1)\mu}{(\lambda - \lambda z + \mu)z - \mu} = \frac{(1-\rho)(z-1)\mu}{[(\rho - \rho z + 1)z - 1]\mu} \\
\pi(z) &= \frac{(1-\rho)(z-1)}{1 - z + \rho\ z - \rho\ z^2} = \frac{(1-\rho)(z-1)}{(1-\rho\ z)(z-1)} \\
\pi(z) &= \frac{(1-\rho)}{(1-\rho\ z)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi(z) &= \frac{(1-\rho)}{(1-\rho\ z)} = (1-\rho)\left[\frac{1}{(1-\rho\ z)}\right](1-\rho) = \sum_{n\geq 0}(\rho\ z)^n \\
&= \sum_{n\geq 0}(1-\rho)\rho^n\ z^n
\end{aligned}$$

Comme

$$\pi(z) = \sum_{n\geq 0} \pi(z) z^n \qquad \text{alors} \quad \pi(n) = (1-\rho)\rho^n \qquad n \geq 1$$

Les paramétres de pérformance de systeme M/M/1 sont :

$$L = E(X) = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 V(Y)}{2(1-\rho)} \qquad \text{avec} \qquad V(Y) = \frac{1}{\mu^2}$$

$$\begin{aligned} L &= \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2(\frac{1}{\mu^2})}{2(1-\rho)} = \rho + \frac{2\rho^2}{2(1-\rho)} \\ L &= \frac{\rho - \rho^2 + \rho^2}{(1-\rho)} \\ L &= \frac{\rho}{(1-\rho)} = \frac{\lambda}{(\mu-\lambda)} \end{aligned}$$

$$L_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2 V(Y)}{2(1-\rho)}$$

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{\rho^2 + \lambda^2 V(Y)}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2 + \lambda^2(\frac{1}{\mu^2})}{2(1-\rho)} \\ &= \frac{2\rho^2}{2(1-\rho)} \\ &= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \end{aligned}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda(V(y) + \frac{1}{\mu^2})}{2(1-\rho)}$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda(\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^2})}{2(1-\rho)} = \frac{1}{\mu} + \frac{2\lambda}{2\ \mu^2\ (1-\rho)} \\ &= \frac{1}{\mu} + \frac{2\lambda}{\mu^2\ - \lambda\mu} = \frac{\mu}{\mu(\mu-\lambda)} \\ &= \frac{1}{(\mu-\lambda)} \end{aligned}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda(V(y) + \frac{1}{\mu^2})}{2(1-\rho)}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

2.6.2 Systéme $M/E_2/1$

Consédérons un système d'attente $M/G/1$ où le temps de service Y est composé de deux variables aléatoire indépendents qui suivent chacune une loi exponentielle de paramètre μ.

Soit la densité de la distribution d'Erlang d'ordre 2

$$f(t) = \mu^2 t \exp(-\mu t) \qquad ,t \geq 0$$

On suppose que $A(z) = \bar{f}(\lambda - \lambda z)$

La transformé de Laplace

$$\begin{aligned} A(z) &= \bar{f}(\lambda - \lambda z) = \int_0^\infty \exp(-(\lambda - \lambda z)t)\ f(t)dt \\ &= \int_0^\infty \exp(-(\lambda - \lambda z)t)\mu^2 t \exp(-\mu t)dt \\ &= \mu^2 \int_0^\infty \exp(-(\lambda - \lambda z)t) t \exp(-\mu t)dt \\ &= \mu^2 \int_0^\infty t \exp(-(\lambda - \lambda z + \mu)t)dt \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} x &= (\lambda - \lambda z + \mu)t \\ \Longrightarrow\ t &= \frac{x}{(\lambda - \lambda z + \mu)} \qquad \text{et} \quad dt = \frac{dx}{(\lambda - \lambda z + \mu)} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} A(z) &= \mu^2 \int_0^\infty \frac{x}{(\lambda - \lambda z + \mu)^2} \exp(-x)dx \\ &= \frac{\mu^2}{(\lambda - \lambda z + \mu)^2} \int_0^\infty x\ \exp(-x)\ dx \\ &= \frac{\mu^2}{[\lambda(1 - Z) + \mu]^2} = \left[\frac{\mu}{\lambda(1 - Z) + \mu}\right]^2 \end{aligned}$$

D'où

$$A(z) = \left[\frac{1}{\rho(1-Z)+1}\right]^2$$

$$\begin{aligned}
\pi(z) &= \frac{\pi_0 A(z)(z-1)}{z-A(z)} = \frac{(1-\rho)\left[\frac{1}{\rho(1-Z)+1}\right]^2(z-1)}{z-\left[\frac{1}{\rho(1-Z)+1}\right]^2} \\
&= \frac{(1-\rho)(z-1)}{z(\rho(1-z)+1)^2-1} \\
\Longrightarrow \qquad & \pi(z) = \frac{(1-\rho)(z-1)}{z(\rho(1-Z)+1)^2-1}
\end{aligned}$$

Les paramétre de performances sont :

$$L = E(X) = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 V(Y)}{4(1-\rho)} \qquad \text{avec} \quad V(Y) = \frac{2}{\mu^2}$$

$$\begin{aligned}
L &= \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2(\frac{2}{\mu^2})}{4(1-\rho)} \\
&= \rho + \frac{3\rho^2}{4(1-\rho)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_q &= L - \frac{\lambda}{\mu} = \rho + \frac{3\rho^2}{4(1-\rho)} - \frac{\lambda}{\mu} \\
L_q &= \frac{3\rho^2}{4(1-\rho)}
\end{aligned}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + \left(\frac{\lambda(V(Y)+\frac{1}{\mu^2})}{4(1-\rho)}\right)$$

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{\mu} + \left(\frac{\lambda(\frac{2}{\mu^2}+\frac{1}{\mu^2})}{4(1-\rho)}\right) \\
&= \frac{1}{\mu} + \frac{3\lambda}{4\mu^2(1-\rho)} \\
&= \frac{1}{\mu} + \frac{3\rho}{4\mu(1-\rho)}
\end{aligned}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{3\rho^2}{4\lambda(1-\rho)}$$

2.6.3 Système $M/Géo/1$

On considère un système d'une file $FIFO$ à capacité illimitée et d'un seul serveur.

Le processus d'arrivée des clients et Poissonnien d'intensité λ mais le temps de service Y d'un client est distribué selon une loi Géometrique de paramètre p et de densité $P(Y = n) = p(1-p)^{n-1},\ \ n \geq 1$

la transformé de Laplace de système $M/Géo/1$ est :

$$\begin{aligned}
\bar{f}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-zn)\, p(1-p)^{n-1} = \frac{p}{1-p} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\exp(-z)(1-p)\right]^n \\
&= \frac{p}{1-p}\left[\frac{1}{1-\exp(-z)(1-p)} - 1\right] = \frac{p\exp(-z)}{1-\exp(-z)(1-p)} \\
A(z) &= \bar{f}(\lambda - \lambda z) = \frac{p\exp(-(\lambda-\lambda z))}{1-(1-p)\exp(-(\lambda-\lambda z))}
\end{aligned}$$

On remplece $A(z)$ dans $\pi(z)$

$$\begin{aligned}
\pi(z) &= \frac{\pi_0 A(z)(z-1)}{z - A(z)} = \frac{(1-\rho)(z-1)\left[\frac{p\exp(-(\lambda-\lambda z))}{1-(1-p)\exp(-(\lambda-\lambda z))}\right]}{z - \left[\frac{p\exp(-(\lambda-\lambda z))}{1-(1-p)\exp(-(\lambda-\lambda z))}\right]} \\
&= \frac{(1-\rho)(z-1)p\exp(-(\lambda-\lambda z))}{z[1-(1-p)\exp(-(\lambda-\lambda z))] - p\exp(-(\lambda-\lambda z))}
\end{aligned}$$

Les paramétre de performances de $M/Géo/1$ sont.

$$L = E(X) = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 V(Y)}{2(1-\rho)}, \qquad V(Y) = \frac{q}{p^2} \ \text{ avec } \ q = (1-p)$$

$$\begin{aligned}
L &= \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2(\frac{q}{p^2})}{2(1-\rho)} \\
L &= \rho + \frac{(\rho p)^2 + \lambda^2 q}{2p^2(1-\rho)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L_q &= L - \frac{\lambda}{\mu} = \rho + \frac{(\rho p)^2 + \lambda^2 q}{2p^2(1-\rho)} - \rho \\
L_q &= \frac{(\rho p)^2 + \lambda^2 q}{2p^2(1-\rho)}
\end{aligned}
$$

$$
W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + \frac{p^2\lambda^2}{2\mu^2 p^2(1-\rho)}
$$

$$
W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{(\rho p)^2 + \lambda^2 q}{2p^2\lambda(1-\rho)}
$$

2.7 Simulation

Dans cette partie, on allons simuler les paramètres de performance da la file d'attente $M/M/1$. Sous la condition de stabilité du système, nous avons pris les paramètres suivants $\lambda = 7$, $\mu = 9$.

Résultats analytique

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{\mu - \lambda} = 0.5 \\
W_q &= \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = 0.3714 \\
L &= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 3.500 \\
L_q &= \frac{2\rho^2}{2(1-\rho)} = 2.600
\end{aligned}
$$

Résultats obtenus en Matlab

NSM	W	W_q	L	L_q
10	0.6571	0.3652	0.3521	2.3670
100	0.5300	0.3791	3.4245	2.6540
500	0.4729	0.3774	3.3920	2.6420
1000	0.5176	0.4071	3.630	2.8500
2000	0.4814	0.3657	3.3700	2.5600
3000	0.5056	0.3906	3.5116	2.7342
5000	0.4903	0.3842	3.4720	2.6893
10000	0.5	0.3714	3.500	2.600

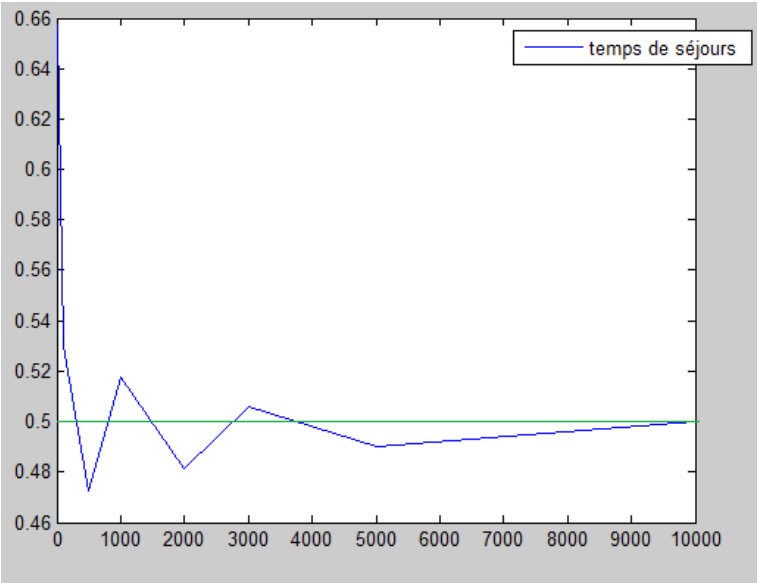

Figure.2.5. Graphe représente la simulation de W de systéme M/M/1

D'aprés le graphe les résultats obtenus par la simulation de temps moyen de séjour ,nous remarquons graphiquement qu'il se rapproche de sa vraie valeur (résultat analytique) lorsque la taille de la simulation est grande, Autrement dit il y a une stabilité à partir d'un certain nombre de simulation

Chapitre 3

Systéme de files d'attente M/G/1 avec rappels

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des files d'attente $M/G/1$ avec rappel .Elles sont

caractérisés par la propriété qu'un client qui trouve à son arrivée tous les serveurs occupés quitte l'espace de service et rappelle ultérieurement à des instants aléatoires. Entre deux rappels successifs, le client est dit "en orbite".

Le modèle général d'un système de files d'attente avec répétition d'appels peut être décrit comme suit : le système est composé d'un seule serveur la discipline de service est $FIFO$. Les clients arrivent dans le système selon un processus de Poisson, le temps de service est répartis suivant une loi quelconque. A l'arrivée d'un client, s'il y a une position d'attente libre, le client rejoint la file d'attente. Dans le cas contraire, il quitte l'espace de service temporairement pour tenter sa chance après une durée de temps aléatoire. Entre les tentatives, le client est "en orbite" et devient source d'appels répétés ou d'appels secondaires. La capacité de l'orbite peut être finie ou infinie. Dans le cas où elle est finie et si l'orbite est pleine, le client quitte le système pour toujours. Lorsqu'un client est rappelé de l'orbite, il est traité de la même manière qu'un client primaire.

La notation de Kendall est $T/X/S/K/O/H$, où T et X décrivent respectivement la distribution du temps inter-arrivées et la distribution du temps de service, S est le nombre de serveurs identiques et indépendants, K est la capacité de la file d'attente, O est la capacité de l'orbite, H est la fonction de persistance $H = \{H_k, k \geq 0\}$.

On décrit l'entrée dans le système par T_n^e ,l'intervalle de temps entre les arrivées des $n^{ème}$ et $(n+1)^{ème}$ clients primaires, T_n^s la durée de service et $T_n^r = \{T_0^r, T_1^r, ...\}$une suite d'intervalles de temps entre deux rappels successifs.Les variables aléatoires T_n^e, T_n^s ,T_n^r sont indépendentes et définies sur l'espace de probabilité (Ω, F, P).on suppose que les suites (T_n^e) , (T_n^s) ,(T_n^r) sont indépendentes et identiquement distribuées

3.2 Quelques exemples

♦Réseaux de ommunication par paquet

Considérons un réseau de communications d'ordinateurs dans lequel on trouve un ensemble d'interfaces IMPs (Interface Message Processors) reliées entre elles par des câbles.

Un ordinateur principal est connecté à l'une de ces interfaces. Si l'ordinateur veut envoyer un message à un autre ordinateur principal, il doit en premier lieu envoyer le message avec l'adresse de destination à l'interface à laquelle il est connecté. L'interface à son tour envoie le message à l'ordinateur destinataire directement si elle y est connectée, ou indirectement via d'autres interfaces.

Une interface à laquelle un ordinateur principal est connecté. Les messages arrivent de l'extérieur selon un processus aléatoire. Après la réception du message, l'ordinateur l'envoie immédiatement à son interface. S'il y a un tampon libre, le message est accepté. Dans le cas contraire, le message est rejeté et l'ordinateur doit réessayer une autre fois après une période de temps. S'il existe des tampons libres, le message rejeté sera stocké dans un tampon de l'ordinateur principal. Dans le cas contraire, le message est considéré comme perdu. On peut poser les questions suivantes:

Le problème présenté peut être modélisé comme un système avec rappels à serveur unique (interface IMP) possédant des tampons (positions d'attente). Le nombre de tampons de l'ordinateur principal constitue la capacité de l'orbite.

♦Système mémoire sur les disques magnétiques

Considérons un système mémoire où K unités disques partagent un contrôleur des disques, et transmettent l'information quand elles trouvent ce dernier libre. Les demandes insatisfaites sont répétées après une rotation du disque. Ce système peut être présenté comme un système de files d'attente avec rappels. Le serveur est le contrôleur des disques. L'arrivée dans le système est quasi-aléatoire: le nombre de sources est fini et égal à K. La rotation du disque dans le cas de la répétition de demande peut être considérée comme un intervalle entre deux rappels consécutifs de durée constante.

♦Problème de réservation

Le problème de réservation est l'exemple le plus simple d'un client qui sollicite une réservation par téléphone dans un restaurant. Il y a une ligne unique qui est consacrée à répondre aux requêtes des réservations. Ainsi, si un client appelle et trouve la ligne occupée, il renouvellera sa tentative aprés une certaine période de temps aléatoire avec la probabilité p qui, en pratique,est strictement inférieure à 1 car le client ne peut rappeler indéfiniment.

Cet exemple peut être modélisé par une file d'attente $M/G/1$ avec rappels et avec perte en considérant que le processus d'arrivée des appels est poissonnien. L'étude de ce genre de problèmes permet de prédire le temps d'attente du client, le nombre de clients perdus dù à ce blocage, ..

.

3.3 Déscription de modèle

Le modèle $M/G/1$ avec rappel est un modèle à un seul serveur où les clients arrivent suivant un flux poissonnien d'intensité $\lambda > 0$. La durée de service est de loi générale $F(x)$ et de transformée de Laplace $\bar{f}(z)$. Soient les moments $m_k = (-1)^k \bar{f}^{(k)}(0)$, l'intensité de trafic $\rho = \lambda m_1$ et $\mu = \frac{1}{m_1}$. Les intervalles de temps inter-rappels suivent une distribution exponentielle de paramètre $\theta > 0$:

$$F^*(x) = P(T_n^r \leq x) = 1 - \exp(-\theta x)$$

Un client qui arrive et trouve le serveur occupé, quitte l'aire du service pour rejoindre l'orbite. Après un certain temps aléatoire, il renouvelle sa tentative d'entrer en service, une fois, deux fois, ..., jusqu'à ce qu'il le trouve disponible. Une fois servi, le client doit décider, soit de rejoindre l'orbite pour un autre service où de quitter le système définitivement .

Toutes les variables aléatoires introduites sont mutuellement indépendantes.

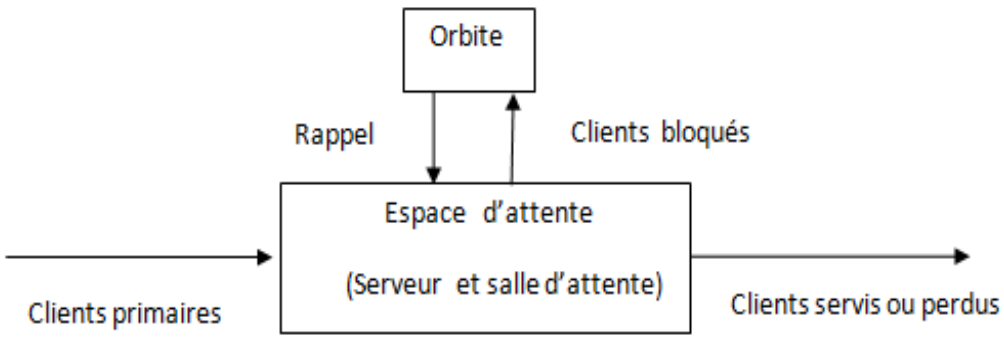

Figure.3.1.Shéma général d'un systéme d'attente avec rappels

3.4 Chaîne de Markov induite

L'état du système à l'instant t peut ètre décrit par le processus :

$$X(t) = \{C(t), N_0(t), \zeta(t), t \geq 0\}$$

où:

$C(t)$: la variable aléatoire indiquant l'état du serveur à l'instant t.

$$C(t) = \begin{cases} 0 & si \quad \text{le serveur est libre ;} \\ 1 & si \quad \text{le serveur est occupé;} \end{cases}$$

$N_0(t)$: le nombre de clients en orbite à l'instant t.

Si $C(t) = 1$, $\zeta(t)$ représente le temps de service écoulé du client en service.

Soit (q_n) la chaine de Markov induite aux instants de départ ,où $q_n = N_0(\zeta_n)$ represente le nombre de clients en orbite aprés le $n^{ème}$ départ. dont l'équation fondamentale est :

$$q_{n+1} = q_n - \sigma_{q_n} + \upsilon_{n+1}$$

où:

• υ_{n+1} est le nombre de clients qui arrivent dans le système durant le service du $(n+1)^{ème}$ client. La distribution de υ_{n+1} est donnée par :

$$a_i = P(\upsilon_n = i) = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^i}{i!} \exp(-\lambda x) dF(x) \qquad \text{où} \quad a_i \ > 0, i \geq 0$$

Si $\lim_{n\to\infty} \upsilon_n = \upsilon$ et $E(\upsilon) = \rho$ alors

$$A(z) = \sum_{i\geq 0} a_i z^i = \int_0^\infty \exp^{-x(\lambda-\lambda z)} \, dF(x) = \bar{f}(\lambda - \lambda z)$$

• $\sigma_{q_n:}$: est la variable de Bernoulli définie par :

$$\sigma_{q_n:} = \begin{cases} 1 \quad si \qquad \text{le } (n+1)^{ème} \text{client servi provient de l'orbite.} \\ 0 \quad sinon \end{cases}$$

Elle dépend de q_n et sa distribution est donnée par :

$$P(\sigma_{q_n} = 1/q_n = i) = \frac{i\theta}{\lambda + i\theta} \quad ; \quad P(\sigma_{q_n} = 0/q_n = i) = \frac{\lambda}{\lambda + i\theta}$$

Les probabilités de transition à une étape de l'état i vers l'état j notées r_{ij} sont données par :

$$r_{ij} = P(q_{n+1} = j/q_n = i) = a_{j-i}\frac{\lambda}{\lambda + i\theta} + a_{j-i+1}\frac{i\theta}{\lambda + i\theta} \qquad (\forall j \geq 0 \ \text{ et } \ \forall \ 0 \leq i \leq j)$$

En effet

$$\begin{aligned} r_{ij} &= P(q_{n+1} = j/q_n = i) = P(q_n - \sigma_{q_n} + \upsilon_{n+1} = j/q_n = i) \\ &= P(\upsilon_{n+1} = j - i + \sigma_{q_n}/q_n = i) \\ &= P(\upsilon_{n+1} = j - i/q_n = i, \sigma_{q_n} = 0)P(\sigma_{q_n} = 0/q_n = i) + \\ P(\upsilon_{n+1}) &= j - i + 1/q_n = i, \sigma_{q_n} = 1)P(\sigma_{q_n} = 1/q_n = i) \\ &= P(\upsilon_{n+1} = j - i)P(\sigma_{q_n} = 0/q_n = i) + P(\upsilon_{n+1} = j - i + 1)P(\sigma_{q_n} = 1/q_n = i) \\ &= a_{j-i}\left[\frac{\lambda}{\lambda + i\theta}\right] + a_{j-i+1}\left[\frac{i\theta}{\lambda + i\theta}\right] \end{aligned}$$

►Condition d'existence du régime stationnaire

L'accroissement moyen de la chaîne est :

$$\begin{aligned} E\left[q_{n+1}-q_n/q_n \right. &= \left. i\right] = E\left[\upsilon_{n+1}-\sigma_{q_n}/q_n=i\right] \\ &= E\left[\upsilon_{n+1}\right] - E[\sigma_{q_n}=1/q_n=i] \\ &= \rho - \frac{i\theta}{1+i\theta} \end{aligned}$$

$*$ Si $\rho<1$, alors $\lim\limits_{i\to\infty} E\left[q_{n+1}-q_n/q_n=i\right]=\rho-1<0 \Longrightarrow$la chaine est donc érgodique.

$*$ Si $\rho\geq 1$, $\lim\limits_{i\to\infty} E\left[q_{n+1}-q_n/q_n=i\right]=\rho-\frac{i\theta}{\lambda+i\theta} \geq 1-\frac{i\theta}{\lambda+i\theta} = \frac{\lambda}{\lambda+i\theta}>0 \Longrightarrow$la chaine est donc transitoire.

Graphe de transition

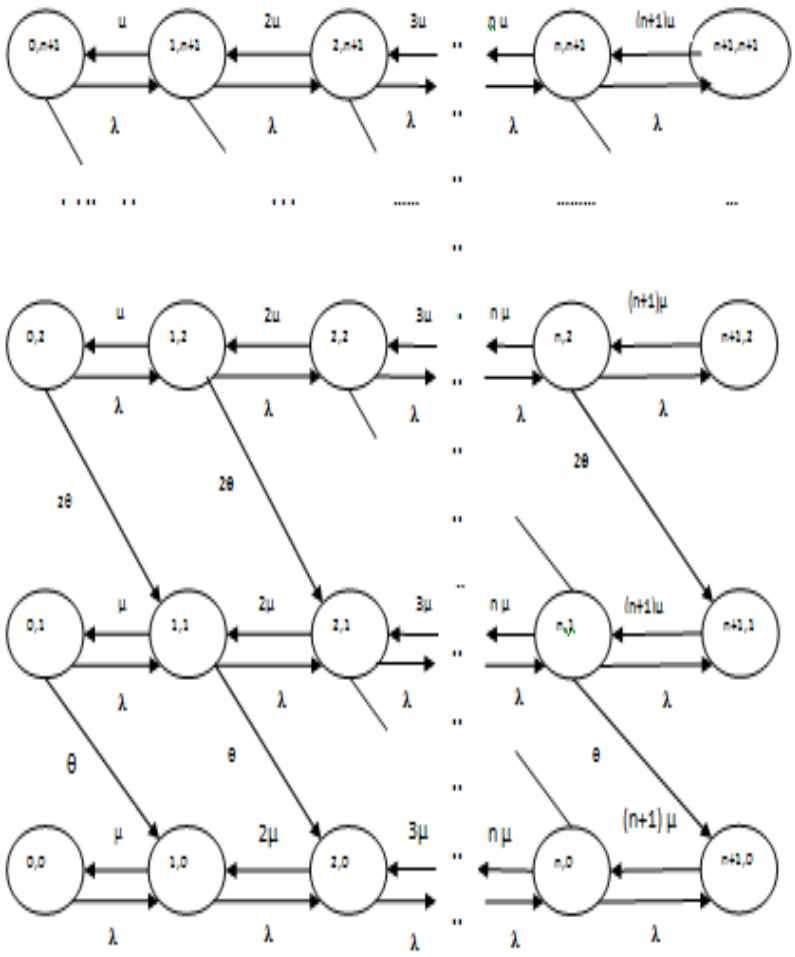

Figure.3.2.Graphe de transition de systéme M/G/1 avec rappels

3.5 Distribution stationnaire de la chaine induite

Soit $\rho < 1$ et $\pi = (\pi_0\ , \pi_1, ...)$ la distribution stationnaire de la chaine de Markov induite. Il ne sera généralement pas possible de trouver la distribution stationnaire π, mais nous pouvons calculer la fonction génératrice correspondante $\pi(z)$.

Théorème 3.5.1 *La distribution stationnaire de la chaine de Markov induite possède la fonction génératrice suivante :*

$$\pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)A(z)}{A(z)-z} \exp\left[\frac{\lambda}{\theta}\int_1^z \frac{1-A(u)}{A(u)-u}du\right]$$

où $A(z) = \bar{f}(\lambda - \lambda z)$

Preuve. Soit $\pi_n = \lim_{n\to\infty} P(N_0(\zeta_i) = n)$. Les équations de Kolmogorov sont donnée par :

$$\pi_n = \sum_{k=0}^{n} \pi_k \frac{\lambda}{\lambda + k\theta} a_{n-k} + \sum_{k=1}^{n+1} \pi_k \frac{k\theta}{\lambda + k\theta} a_{n-k+1} \qquad n = 0, 1, 2.....$$

On a

$$\pi_n = \sum_{k=0}^{n} P_{kn}\pi_k \quad (n = 0, 1, ...)$$

Ce qui s'écrit

$$\pi_n = \sum_{k=0}^{n} \pi_k \frac{\lambda}{\lambda + k\theta} a_{n-k} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k\theta}{\lambda + k\theta} a_{n-k+1}$$

Par le produit de convolution et en introduisant les fonction génératrices

$$\pi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n z^n \quad ,A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{et} \quad C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{où} \quad c_n = \frac{\pi_n}{\lambda + n\theta}$$

On obtient :

$$\pi(z) = A(z)[\lambda C(z) + \theta C'(z)]$$

D'autre part

$$\pi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n z^n \frac{1}{\lambda + n\theta} + \theta z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n z^n \pi_n}{\lambda + n\theta}$$

$$\pi(z) = \lambda C(z) + \theta z C'(z) \tag{3.5.1}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} A(z)[\lambda C(z)+\theta C'(z)] &= \lambda C(z)+\theta z C'(z) \\ \theta C'(z)[A(z)-z] &= \lambda C(z)[1-A(z)] \\ C'(z) &= \frac{\lambda C(z)[1-A(z)]}{\theta[A(z)-z]} \Rightarrow \frac{C'(z)}{C(z)} = \frac{\lambda[1-A(z)]}{\theta[A(z)-z]} \\ &\Rightarrow [\log C(z)]' = \frac{\lambda}{\theta}\left(\frac{1-A(z)}{A(z)-z}\right) \Rightarrow \log C(z) = \frac{\lambda}{\theta}\int_0^z \left(\frac{1-A(u)}{A(u)-zu}\right) du + c \\ C(z) &= C(1)\exp\left\{\frac{\lambda}{\theta}\int_0^z \left(\frac{1-A(u)}{A(u)-zu}\right) du\right\} \end{aligned}$$

De(3.5.1)on a

$$\begin{aligned} \pi(z) &= \lambda C(z)+\theta z C'(z) \\ &= \lambda C(z)+\theta\frac{\lambda}{\theta}\left(\frac{C(z)[1-A(z)]}{A(z)-z}\right) \\ &= \lambda C(z)\left[1+\frac{1-A(z)}{A(z)-z}\right] \\ &= \lambda C(z)\left[\frac{1-z}{A(z)-z}\right] = 1 \end{aligned}$$

Puisque $\pi(1)=1$, on a

$$C(1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi_n}{\lambda+n\theta}z^n = \frac{1-\rho}{\lambda}$$

D'où

$$C(z) = \frac{1-\rho}{\lambda}\exp\left\{\frac{\lambda}{\theta}\int_0^z \left(\frac{1-A(u)}{A(u)-zu}\right) du\right\}$$

On obtient ainsi

$$\pi(z) = \frac{(1-z)(1-\rho)A(z)}{A(z)-z}\exp\left[\frac{\lambda}{\theta}\int_1^z \frac{1-A(u)}{A(u)-u}du\right]$$

■

3.6 Distribution stationnaire de l'état du systéme

Supposons que $\rho < 1$. La méthode des variables supplémentaires, permet de trouver la

distribution stationnaire du systeme à partir de l'état du serveur et la taille de l'orbite. Elle consiste à décrire le processus des arrivées comme processus de Markov avec dépendance de l'état de paramètre λ_{in} quand $\{C(t), N_0(t)\}$est dans l'état (i, n) et à appliquer les schémas récursifs. L'état du système peut être décrit par le processus suivant:

$$X(t) = \begin{cases} N_0(t) & si \quad C(t) = 0 \\ \{C(t); N_0(t); \xi(t)\} & si \quad C(t) = 1 \end{cases}$$

où $\xi(t)$ est une variable aléatoire supplémentaire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, désignant la durée de service écoulé à l'instant t. Notons par

$$\begin{aligned} p_{0n} &= \lim_{t\to\infty} P(C(t) = 0, N_0(t) = n) \\ p_{1n}(x) &= \lim_{t\to\infty} \frac{d}{dx} P(C(t) = 1, \xi(t) \leq x, N_0(t) = n) \end{aligned}$$

A partir du **Figure**.3.1, les probabilités p_{0n} et $p_{1n}(x)$ vérifient le système d'équations de balance :

$$(\lambda + n\theta)p_{0n} = \int_0^\infty p_{1n}(x)f(x)dx \quad , n \geq 0 \tag{3.6.1}$$

$$p_{1n}^{'}(x) = -(\lambda + f(x))p_{1n}(x) + \lambda p_{1n-1}(x) \quad , n \geq 1 \tag{3.6.2}$$

$$p_{1n}(0) = \lambda p_{0n} + (n+1)\theta p_{0n+1} \quad , n \geq 0 \tag{3.6.3}$$

Où $f(x) = f^{'}(x)/(1 - f(x))$ est l'intensité instantanée du service étant donné que la durée écoulée est égale à x.

Soient les fonctions génératrices :

$$P_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{0n} \qquad \text{et} \quad P_1(z,x) \ = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{1n}(x)$$

Le système d'équations de balance devient

$$\begin{cases} \lambda \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{0n} + \theta \sum_{n=0}^{\infty} z^n \ n \ p_{0n} = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{1n}(x) f(x) dx \\ \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{1n}^{'}(x) = -(\lambda + f(x)) \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{1n}(x) + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{1n-1}(x) \\ \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{1n}(0) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{0n} + \theta \sum_{n=0}^{\infty} z^n (n+1) p_{0n+1} \end{cases}$$

D'où

$$\lambda P_0(z) + \theta z P_0^{'}(z) = \int_0^{\infty} P_1(z,x) f(x) dx \tag{3.6.4}$$

$$P_1^{'}(z,x) = (\lambda z - \lambda - f(x)) P_1(z,x) \tag{3.6.5}$$

$$P_1(z,0) = \lambda P_0(z) + \theta P_0^{'}(z) \tag{3.6.6}$$

De (3.6.5), on a

$$P_1(z,x) = P_1(z,0)[1 - f(x)] \exp(-(\lambda - \lambda z)x)$$

Donc, (3.6.4) devient

$$\begin{aligned} \lambda P_0(z) + \theta z P_0^{'}(z) &= \int_0^{\infty} P_1(z,0)[1 - f(x)] \exp(-(\lambda - \lambda z)x) f(x) dx \\ &= P_1(z,0) \int_0^{\infty} f\ '(x) \exp(-(\lambda - \lambda z)x) dx \\ &= P_1(z,0) \int_0^{\infty} \exp(-(\lambda - \lambda z)x) dF(x) \end{aligned}$$

$$= P_1(z,0)\bar{f}(\lambda - \lambda z) = P_1(z,0)A(z) \tag{3.6.7}$$

A partir des équations (3.6.7) et (3.6.6), on a

$$\begin{aligned} P_1(z,0)A(z) &= \lambda P_0(z) + \theta z(\frac{P_1(z,0)}{\theta} - \frac{\lambda}{\theta}P_0(z)) \\ P_1(z,0)(A(z)-z) &= (\lambda - \lambda z)P_0(z) \\ P_1(z,0) &= \frac{(\lambda - \lambda z)}{(A(z)-z)}P_0(z) \\ &\Rightarrow \quad P_1(z,x) = \frac{\lambda - \lambda z}{A(z)-z}P_0(z)[1-f(x)]\exp(-(\lambda - \lambda z)x) \end{aligned}$$

En intégrant cette équation, et en utilisant la formule suivante

$$\int_0^\infty \exp(-sx)[1-f(x)]dx = (1-\bar{f}(s))/\ s$$

On obtient

$$\begin{aligned} P_1(z) &= \int_0^\infty P_1(z,x)dx = \frac{\lambda - \lambda z}{A(z)-z}P_0(z)\int_0^\infty [1-f(x)]\exp(-(\lambda - \lambda z)x) \\ &= \frac{\lambda - \lambda z}{A(z)-z}P_0(z)\frac{1-\bar{f}(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z} \qquad \text{avec } \bar{f}(\lambda - \lambda z) = A(z) \\ &\Longrightarrow \quad P_1(z) = P_0(z)\frac{1-A(z)}{A(z)-z} \end{aligned}$$

De (3.6.7)et (3.6.4), on peut obtenir

$$\lambda P_0(z) + \theta z P_0^{'}(z) = A(z)[\lambda P_0(z) + \theta P_0^{'}(z)] \tag{3.6.8}$$

$$\theta[A(z)-z]P_0^{'}(z) = \lambda[1-A(z)]P_0(z) \tag{3.6.9}$$

Considérons $f(z) = A(z) - z$, $f(z)$ est une fonction décroissante sur $[0,1]$, positive et pour $\rho < 1$et $z \in [0,1] : z < A(z) < 1$. En plus

$$\lim_{z\to 1}\frac{1-A(z)}{A(z)-z}=\frac{A^{'}(1)}{A(1)-1}=\frac{\rho}{1-\rho}<\infty \quad .$$

De ce fait, pour $z=1$, la fonction

$$\frac{1-A(z)}{A(z)-z}=\frac{\rho}{1-\rho}$$

Théorème 3.6.1 *Si $\rho=\lambda m_1<1$, le système est en régime stationnaire et les fonctions génératrices de la distribution conjointe de l'état du serveur et de la taille de l'orbite sont données*

par :

$$\begin{aligned} P_0(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{0n} = (1-\rho)\exp\left[\frac{\lambda}{\theta}\int_1^z \frac{1-A(u)}{A(u)-u}du\right] \\ P_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{1n} = \frac{1-A(z)}{A(z)-z}P_0(z) \end{aligned}$$

L'équation (3.6.9) devient

$$P_0' = \frac{\lambda}{\theta}\left[\frac{(1-A(z))}{A(z)-z}\right]P_0(z)$$

La résolution de cette équation nous donne

$$\begin{aligned} P_0(z) &= (1-\rho)\exp\left[\frac{\lambda}{\theta}\int_1^z \frac{1-A(u)}{A(u)-u}du\right] \\ P_1(z) &= \left[\frac{1-A(z)}{A(z)-z}\right]_0 P(z) \end{aligned}$$

De plus, $P_1(1)=\frac{\rho}{1-\rho}\ P_0(z)$. Et vu que, $P_0(1)+P_1(1)=1$ on obtient $P_1(1)=\rho$ et $P_0(1)=1-\rho$.

Par conséquent, la distribution marginale du nombre de serveurs occupés s'exprime de la manière suivante :

$$P_0=\lim_{t\to\infty}P(C(t)=0)=(1-\rho) \quad \text{et} \quad P_1=\lim_{t\to\infty}P(C(t)=1)=\rho$$

La fonction génératrice de la distribution marginale de la taille de l'orbite est définie par :

$$\begin{aligned} P(z) &= P_0(z) + P_1(z) = P_0(z) + \frac{1 - A(z)}{A(z) - z} P_0(z) \\ &= \left[\frac{1 - A(z)}{A(z) - z} + 1 \right] P_0(z) \\ &= \frac{1 - z}{A(z) - z} P_0(z) \\ &= \frac{(1 - z)(1 - \rho)}{A(z) - z} \exp \left[\frac{\lambda}{\theta} \int_1^z \frac{1 - A(u)}{A(u) - u} du \right] \end{aligned}$$

Et la fonction génératrice de la distribution de l'état stationnaire du nombre de clients dans le système est :

$$\begin{aligned} Q(z) &= P_0(z) + zP_1(z) \\ &= P_0(z) + z \left[\frac{1 - A(z)}{A(z) - z} \right] P_0(z) \\ &= \left[1 + \frac{z - zA(z)}{A(z) - z} \right] P_0(z) \\ &= \frac{A(z)(1 - z)}{A(z) - z} P_0(z) \\ &= \frac{(1 - z)(1 - \rho)A(z)}{A(z) - z} \exp \left[\frac{\lambda}{\theta} \int_1^z \frac{1 - A(u)}{A(u) - u} du \right] \end{aligned}$$

Qui est la fonction génératrice de la distribution de la chaine induite.

3.7 Paramètres de performances

les paramétres de performance du modéle $M/G/1$ avec rappels sont :

►nombre moyen de clients dans le système[**8**]

$$L = Q^{'}(1) = \rho + \frac{\lambda^2 m_2}{2(1 - \rho)} + \frac{\lambda \rho}{\theta(1 - \rho)} \tag{3.7.1}$$

►nombre moyen de clients dans l'orbite

$$N_0 = P^{'}(1) = L - \rho = \frac{\lambda^2 m_2}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda\rho}{\theta(1-\rho)}$$

►Temps moyen d'attente d'un client

$$W = \frac{N_0}{\lambda} = \frac{\lambda m_2}{2(1-\rho)} + \frac{\rho}{\theta(1-\rho)}$$

►Nombre moyen de rappels par client

$$R = W\ \theta = \frac{\lambda\ \theta m_2}{2(1-\rho)} + \frac{\rho}{(1-\rho)}$$

3.8 Système M/M/1 avec rappel

le système $M/M/1$ avec rappel est un système de files d'attente à un seul serveur.Le

processus des arrivées est Poissonien d'intensité $\lambda > 0$, les durées de service suivent une loi exponentielle de fonction de répartition

$F(x) = 1 - \exp^{-\mu x}$, $x \geq 0$ et de moyenne fini $\frac{1}{\mu}$ et les temps entre deux rappels consécutifs sont également exponentiels de paramètre $\theta > 0$ de fonction de répartition

$F^*(x) = 1 - \exp^{-\theta x}$,$x \geq 0$. Nous admettons que les durées de service, les durées entre deux rappels consécutifs ainsi que entre deux arrivées successives sont mutuellement indépendantes. L'état du système peut être décrit par le processus

$$X(t) = \{C(t)\ ,N_0(t),t \geq 0\} \tag{3.8.1}$$

Graphe de transition

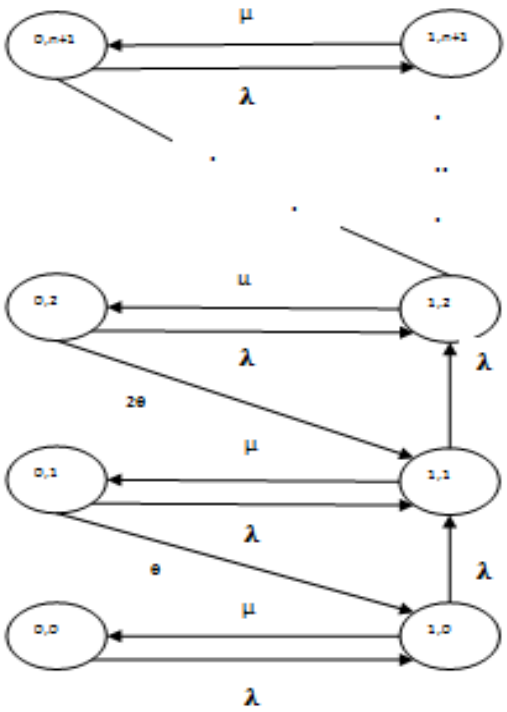

Figure.3.3.Graphe de transition de systéme M/M/1
avec rappels

Distributionn stationnaire de l'état du système

Supposons que le systeme est stable ($\rho < 1$). La fonction génératrice de systeme $M/M/1$ avec rappels est :

$$Q(z) = \left[\frac{1-\rho}{1-z\rho}\right]^{\frac{\lambda}{\theta}+1}$$

En effet :

On a

$$Q(z) = P_0(z) + zP_1(z) = \frac{(1-z)(1-\rho)A(z)}{A(z)-z} \exp\left\{\frac{\lambda}{\theta}\int_1^z \frac{1-A(u)}{A(u)-u}du\right\} \tag{3.8.2}$$

On calcule la transformé de laplace :

$$\begin{aligned} A(z) &= \bar{f}(\lambda - \lambda z) = \int_0^\infty \exp\{-(\lambda - \lambda z)t\}\, dF(t) = \mu \int_0^\infty \exp\{-(\lambda - \lambda z + \mu)t\}\, dt \\ &= \frac{\mu}{\lambda(1-z)+\mu} = \frac{1}{\rho(1-z)+1} \end{aligned}$$

Où $\rho = \lambda m_1$ et $\mu = \frac{1}{m_1}$.

Calculons l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_1^z \frac{1-A(u)}{A(u)-u} du &= \int_1^z \left[\frac{1 - \frac{1}{\rho(1-u)+1}}{\frac{1}{\rho(1-u)+1} - u} \right] du \\ &= \int_1^z \frac{\rho(1-u)}{(1-u) - u\rho(1-u)} du \\ &= \int_1^z \frac{\rho}{(1-u\rho)} du \\ &= [-\ln(1-u\rho)]_1^z \\ &= -\ln(1-z\rho) + \ln(1-\rho) \\ &= \ln\left[\frac{1-\rho}{1-z\rho}\right] \end{aligned}$$

On remplace cette intégrale dans la formule (3.8.2) on obtient :

$$\begin{aligned} Q(z) &= \frac{(1-z)(1-\rho)A(z)}{A(z)-z} \exp\left\{ \frac{\lambda}{\theta} \int_1^z \frac{1-A(u)}{A(u)-u} du \right\} = \frac{(1-z)(1-\rho)A(z)}{A(z)-z} \exp\left\{ \frac{\lambda}{\theta} \ln\left[\frac{1-\rho}{1-z\rho}\right] \right\} \\ &= \frac{(1-z)(1-\rho)A(z)}{A(z)-z} \left[\frac{1-\rho}{1-z\rho}\right]^{\frac{\lambda}{\theta}} \\ &= \frac{(1-z)(1-\rho)}{(1-z\rho)(1-z)} \left[\frac{1-\rho}{1-z\rho}\right]^{\frac{\lambda}{\theta}} \\ &= \frac{(1-\rho)}{(1-z\rho)} \left[\frac{1-\rho}{1-z\rho}\right]^{\frac{\lambda}{\theta}} = \left[\frac{1-\rho}{1-z\rho}\right]^{\frac{\lambda}{\theta}+1} \\ \Rightarrow\ & Q(z) = \left[\frac{1-\rho}{1-z\rho}\right]^{\frac{\lambda}{\theta}+1} \end{aligned}$$

3.9 Décomposion stochastique pour le systéme M/G/1 avec rappels

Parmi les approches permettant d'étudier les systèmes de files d'attente avec rappels, on rencontre celles basées sur la propriété de décomposition stochastique que peut posséder un modèle. Le concept général de la propriété de décomposition stochastique d'un système d'attente $M/G/1$ avec rappels est défini de la manière suivante : le nombre de clients se trouvant dans le système à une date aléatoire est distribué comme la somme de deux variables aléatoires indépendantes ou plus, l'une de ces variables représente le nombre de clients se trouvant dans le système M/G/1 classique à une date aléatoire (le serveur est toujours disponible).

La propriété de décomposition stochastique présente diverses applications pratiques dans le modèle M/G/1 avec rappels parmis eux :

– Estimation de la vitesse de convergence vers le système $M/G/1$ classique.

θ tend vers ∞

$$D = \sum_{i=0}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} \mid p_{in}(\theta) - p_{in}(\infty) \mid = \circ(\frac{1}{\theta}).$$

– Estimation de la distance entre les distributions stationnaires du modèle $M/G/1$ avec rappels et le modèle $M/G/1$ classique correspondant :

$$\begin{aligned} 2(1-\rho)(1-N_0(\theta)) &< D < 2(1-N_0(\theta)) \qquad \text{où} \\ N_0(\theta) &= \exp\{-\frac{\lambda}{\theta}\int_0^1 \frac{1-\bar{f}(\lambda-\lambda x)}{\bar{f}(\lambda-\lambda x)-x}dx \end{aligned}$$

$N_0(\theta)$: le nombre de client en orbite à la date t.

3.10 Comportement asymptotique du systéme de files d'attente M/G/1 avec rappels

Maintenant, nous étudions le comportement asymptotique de notre systéme quand le taux des rappels est élevé ou faible, bien que les caractéristiques de performance de ces systèmes sont disponibles sous forme explicite, elles sont d'une utilisation restreinte du point de vue pratique.

►**Trafic chargé** [8]

Nous considérons le cas où le taux d'arrivée λ augmente de telle manière que $\rho \to 1$.

Théorème 3.10.1 *[8]*

Si le système de files d'attente $M/G/1$ avec rappels est dans un régime stationnaire $(\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1)$ et $m_2 < \infty$ alors :

$$\lim_{\lambda \to \frac{1}{m_1}} E\left[\exp^{-s(1-\rho)N_0(t)}\right] = \left(1 + \frac{m_2}{2m_1^2}S\right)^{-1-\frac{2m_1}{\theta m_2}}$$

c'est-à-dire en régime chargé la longueur de l'orbite $N_0(t)$ asymptotiquement a une distribution Gamma

►**Taux faible des rappels**

Le théorème suivant décrit la distribution du nombre de clients on orbite lorsque le taux de rappels est faible : $\theta \to 0$.

Théorème 3.10.2 *[8]*

Si $m_2 < \infty$, alors pour $\theta \to 0$ le nombre de clients on orbite suit asymptotiquement une loi normale de l'espérance $\frac{\lambda\rho}{(1-\rho)\theta}$ et de la variance $\frac{\lambda^3 m_2 + 2\lambda\rho - 2\lambda\rho^2}{2(1-\rho)^2\theta}$

Preuve. *Soit* $N_0^*(u) = \frac{N_0(u) - \frac{\lambda\rho}{(1-\rho)\theta}}{\frac{1}{\sqrt{\theta}}} = \sqrt{\theta}N_0(u) - \frac{\lambda\rho}{(1-\rho)\sqrt{\theta}}$

La fonction caractéristique $E[e^{itN_0^*(u)}]$ peut être exprimée sous forme de la fonction génératrice $P(z)$ comme suit :

$$\begin{aligned} E[e^{itN_0^*(u)}] &= P(e^{it\sqrt{\theta}}).e^{it\frac{\lambda\rho}{(1-\rho)\sqrt{\theta}}} \\ &= \exp\{\frac{\lambda}{\theta}\int_1^{it\sqrt{\theta}} \frac{1-A(u)}{A(u)-u}du - it\frac{\lambda\rho}{(1-\rho)\sqrt{\theta}}\}(1-\rho)\frac{1-e^{it\sqrt{\theta}}}{k(e^{it\sqrt{\theta}}) - e^{it\sqrt{\theta}}} \end{aligned}$$

Si $\theta \to 0$,*alors* $z = e^{it\sqrt{\theta}} \to 1$. *Ainsi* $(1-\rho)\frac{1-e^{it\sqrt{\theta}}}{k(e^{it\sqrt{\theta}})-e^{it\sqrt{\theta}}} \to 1$

pour calculer

$\lim_{\theta\to 0} \exp\{\frac{\lambda}{\theta}\int_1^{e^{it\sqrt{\theta}}} \frac{1-k(u)}{k(u)-u}du - it\frac{\lambda\rho}{(1-\rho)\sqrt{\theta}}\}(1-\rho)\frac{1-e^{it\sqrt{\theta}}}{k(e^{it\sqrt{\theta}})-e^{it\sqrt{\theta}}}$, *il faut transformer l'argument de la fonction exponentielle comme suit:*

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{\theta}\int_1^{e^{it\sqrt{\theta}}} \frac{1-A(u)}{A(u)-u}du - it\frac{\lambda\rho}{(1-\rho)\sqrt{\theta}}\}(1-\rho)\frac{1-e^{it\sqrt{\theta}}}{k(e^{it\sqrt{\theta}})-e^{it\sqrt{\theta}}} &= \frac{\lambda}{\theta}\int_1^{e^{it\sqrt{\theta}}}\left(\frac{1-A(u)}{A(u)-u}-\frac{\rho}{1-\rho}\right)du \\ &\quad +\frac{\lambda\rho}{1-\rho}\ \frac{e^{it\sqrt{\theta}}-1-it\sqrt{\theta}}{\theta} \\ \lim_{\theta\to 0}\frac{\lambda\rho}{1-\rho}\ \frac{e^{it\sqrt{\theta}}-1-it\sqrt{\theta}}{\theta} &= \frac{\lambda\rho t^2}{2(1-\rho)}\end{aligned}$$

Pour calculer

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\lambda}{\theta}\int_1^{e^{it\sqrt{\theta}}}\left(\frac{1-k(u)}{k(u)-u}-\frac{\rho}{1-\rho}\right)du$$

Nous introduisons la fonction suivante:

$$f(\theta) = \int_1^{e^{it\sqrt{\theta}}}\left(\frac{1-A(u)}{A(u)-u}-\frac{\rho}{1-\rho}\right)du$$

Il est clair que :

- $f(0) = 0$
- $f'(0) = -\frac{\lambda^2 m_2}{4(1-\rho)^2}t^2$

De cette maniére , lorsque $\theta \to 0$, *on obtient:*

$f(\theta) = f(0) + \theta f'(0) + O(\theta) = -\frac{\lambda^2 m_2}{4(1-\rho)^2}t^2 + O(\theta)$

Donc $\frac{\lambda}{\theta}\int_1^{e^{it\sqrt{\theta}}}\left(\frac{1-k(u)}{k(u)-u}-\frac{\rho}{1-\rho}\right)du = \frac{\lambda}{\theta}f(\theta) = \frac{\lambda^3 m_2}{4(1-\rho)^2}t^2 + O(1)$

Par consèquent

$\lim_{\theta\to 0} E[e^{itN_0^*(u)}] = \exp\{-\frac{t^2}{2}\frac{\lambda^3 m_2+2\lambda\rho-2\lambda\rho^2}{2(1-\rho)^2\theta}\}$, *où* $\exp\{-\frac{t^2}{2}\frac{\lambda^3 m_2+2\lambda\rho-2\lambda\rho^2}{2(1-\rho)^2\theta}\}$ *est la fonction caractéristique d'une valeur aléatoire normale ayant l'espérance mathématique égale à 0 et varince égale à* $\frac{\lambda^3 m_2+2\lambda\rho-2\lambda\rho^2}{2(1-\rho)^2}$. ■

►**Taux fort des rappels**

Théorème 3.10.3 *[8]*

Quand $\theta \to \infty$ *la distance* $\sum_{n=0}^{\infty} \mid q_n - q_n(\infty) \mid$

entre les distributions q_n *et* $q_n(\infty)$ *est* $\circ(\frac{1}{\theta})$*. Pour être plus exacte, on a les inegalites suivantes :*

$$\begin{aligned} 2\frac{1-\rho}{\bar{f}(\lambda)}\left[1-\exp\{-\frac{\lambda}{\theta}\int_0^1 \frac{1-A(u)}{A(u)-u}du\}\right] &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \mid q_n - q_n(\infty) \mid \\ &\leq 2\left[1-\exp\{-\frac{\lambda}{\theta}\int_0^1 \frac{1-A(u)}{A(u)-u}du\}\right] \end{aligned} \tag{3.10.1}$$

Preuve. *La preuve est basée sur la propriété de décomposition stochastique du nombre de clients en orbite :*

$$N_{0\theta} = N_{f\infty} + R_\theta$$

qui peut être présentée sous forme des distributions suivantes :

$$\begin{aligned} q_n &= \lim_{t\to\infty} p(N_0(t)=n) \qquad ; q_n = \lim_{t\to\infty}\ p(N_{f\infty}(t)=n) \\ \overset{\wedge}{q_n} &= \lim_{t\to\infty} p(R_0(t)=n) \end{aligned}$$

Où $R_0(t)$ *est le nombre de clients en orbite étant donné que le serveur est libre :*

$$\overset{\wedge}{q_n} = \lim_{t\to\infty} p(N_0(t)=n/C(t)=0) = \frac{p_{0n}}{1-\rho} \tag{3.10.2}$$

Cette propriété veut dire que qn est une convolution des distributions $q_n(\infty)$ *et* $\overset{\wedge}{q_n}$ *:*

$$q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k(\infty)\overset{\wedge}{q_{n-k}}$$

La fonction génératrice de $\overset{\wedge}{q_n}$*est définie par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \hat{q_n} = \exp\{\frac{\lambda}{\theta}\int_1^z \frac{1-A(u)}{A(u)-u}\}du \tag{3.10.3}$$

A présent, la formule(3.10.2)devienne :

$$q_n - q_n(\infty) = q_n(\infty)\hat{q_0} - q_n(\infty) + \sum_{k=0}^{n-1} q_k(\infty)\hat{q_{n-k}}$$

On a donc,

$$\begin{aligned} \mid \quad q_n - q_n(\infty) \mid \leq \mid q_n(\infty)\hat{q_0} - q_n(\infty) \mid + \sum_{k=0}^{n-1} q_k(\infty)\hat{q_{n-k}} \\ = \quad q_n(\infty)(1-\hat{q_0}) + q_n - q_n(\infty)\hat{q_0} \\ = \quad q_n(\infty)(1-2\hat{q_0}) + q_n \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mid q_n - q_n(\infty) \mid \leq (1-2\hat{q_0})\sum_{n=0}^{\infty} q_n(\infty) + \sum_{n=0}^{\infty} q_n$$

Vu que
$\sum_{n=0}^{\infty} q_n(\infty) = 1 \quad et \quad \sum_{n=0}^{\infty} q_n = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mid q_n - q_n(\infty) \mid \leq 2(1-\hat{q_0}) \tag{3.10.4}$$

En posant $z = 0$ dans l'équation(3.10.3), on obtient la formule suivante pour $\hat{q_0}$:

$$\hat{q_0} = \exp\{-\frac{\lambda}{\theta}\int_1^z \frac{1-A(u)}{A(u)-u}\}du \tag{3.10.5}$$

A présent, de(3.10.4) et (3.10.5)on obtient la première partie de l'inégalité (3.10.1).

A l'aide de $\mid a-b \mid \geq a-b$, nous calculons

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \mid \; q_n - q_n(\infty) \mid = & \mid q_0 - q_0(\infty) \mid + \sum_{n=1}^{\infty} \mid q_n - q_n(\infty) \mid \\ \geq & \mid q_0 - q_0(\infty) \mid + \sum_{n=1}^{\infty}(q_n - q_n(\infty)) \\ = & \mid q_0 - q_0(\infty) \mid + q_0(\infty) - q_0\end{aligned}$$

Cependant,

$$q_0(\infty) = \frac{1-\rho}{\bar{f}(\lambda)}$$

$$q_0 = q_0(\infty)\hat{q_0} < q_0(\infty)$$

Par conséquent,

$$\mid q_0 - q_0(\infty) \mid = q_0(\infty) - q_0 = q_0(\infty)(1 - \hat{q_0})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mid q_0 - q_0(\infty) \mid \geq 2(q_0(\infty) - q_0) = 2\frac{1-\rho}{\bar{f}(\lambda)}(1 - \hat{q_0})$$

La probabilité $\hat{q_0}$ *peut être estimée à l'aide d'une approche basée sur les ordres stochastiques sous forme simple. En particulier, on a toujours*

$$1 - \hat{q_0} \leq 1 - \exp\{-\frac{\lambda}{\theta}\int_1^z \frac{1 - e^{-\rho(1-u)}}{e^{-\rho(1-u)} - u}\}du$$

■

Chapitre 4

Application

4.1 Introduction

A présent, nous allons appliquer les résultats obtenus dans le chapitre précédent, pour certain types de files d'attente avec rappel, à savoir

-$M/M/1$ avec rappel.

-$M/E_2/1$ avec rappel.

-$M/Géo/1$ avec rapel.

4.2 Système $M/M/1$ avec rappel

Calculons la transformé de Laplace :

$$\begin{aligned} A(z) &= \bar{f}(\lambda - \lambda z) = \int_0^\infty \exp\{-(\lambda - \lambda z)t\}\, dF(t) = \mu \int_0^\infty \exp\{-(\lambda - \lambda z + \mu)t\}\, dt \\ &= \frac{\mu}{\lambda(1-z)+\mu} = \frac{1}{\frac{\lambda}{\mu}(1-z)+1} \end{aligned}$$

Où $\rho = \lambda m_1$ et $\mu = \frac{1}{m_1}$.

La transformé de Laplace est :

$$\bar{f}(\lambda - \lambda z) = \frac{1}{\rho(1-z)+1}$$

Pour dérerminer les paramètres de performance L, N_0, W, R de ce système on doit d'abord calculer m_2

$$m_2 = \bar{f}''(0)$$

$$\bar{f}'(\lambda - \lambda z) = \frac{-(-\rho)}{[\rho(1-z)+1]^2} = \frac{\rho}{[\rho(1-z)+1]^2}$$

$$\bar{f}''(\lambda - \lambda z) = \frac{2\rho(\rho(1-z)+1)}{[\rho(1-z)+1]^4} = \frac{2\rho^2}{[\rho(1-z)+1]^3}$$

$$\bar{f}''(0) = 2\rho^2$$

D'où

$$m_2 = 2\rho^2$$

On remplace m_2 dans l'équation (3.7.1) on trouve

$$\begin{aligned} L &= \rho + \frac{\lambda^2 m_2}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda\rho}{\theta(1-\rho)} \\ \Longrightarrow\ L &= \rho + \frac{2\lambda^2\rho^2}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda\rho}{\theta(1-\rho)} \\ &= \rho + \frac{2(\lambda\rho)^2}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda\rho}{\theta(1-\rho)} \\ &= \rho + \frac{\lambda\rho[\theta\lambda\rho+1]}{\theta(1-\rho)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_0 &= L - \rho = \rho + \frac{\lambda\rho[\theta\lambda\rho+1]}{\theta(1-\rho)} - \rho \\ \Longrightarrow\ N_0 &= \frac{\lambda\rho[\theta\lambda\rho+1]}{\theta(1-\rho)} \end{aligned}$$

$$W = \frac{N_0}{\lambda} = \frac{\rho[\theta\lambda\rho+1]}{\theta(1-\rho)}$$

$$R = W\theta = \frac{\rho[\theta\lambda\rho+1]}{(1-\rho)}$$

4.3 Système $M/E_2/1$ avec rappel

Le systéme $M/E_2/1$ avec rappel est un systéme avec un unique serveur, la discpline est $FIFO$. Le processus des arrivées est Poissonien d'intensité $\lambda > 0$ et la durée de service suit une loi d'Erlang d'ordre 2, de moyenne finie $\frac{1}{\mu}$ et de fonction de répartion

$F(t) = 1 - \mu\ t \exp^{-\mu\ t} - \exp^{-\mu\ t}$ et de densité $f(t) = \mu^2\ t \exp^{-\mu\ t}$.

Supposons que toutes les variables aléatoires introduites sont mutuellement indépendantes.

On calcule la transformé de Laplace :

$$\begin{aligned} A(z) &= \bar{f}(\lambda - \lambda z) = \int_0^\infty \exp\{-(\lambda - \lambda z)t\}\, \mu^2 t \exp\{-\mu t\}\, dt = \mu^2 \int_0^\infty \exp\{-(\lambda - \lambda z)t\}\, t \exp\{-\mu t\}\, dt \\ &= \mu^2 \int_0^\infty t \exp^{-(\lambda - \lambda z + \mu)t}\, dt \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} x &= (\lambda - \lambda z + \mu)t \\ \Longrightarrow\ t &= \frac{x}{(\lambda - \lambda z + \mu)} \qquad \text{et} \quad dt = \frac{dx}{(\lambda - \lambda z + \mu)} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} A(z) &= \mu^2 \int_0^\infty \frac{x}{(\lambda - \lambda z + \mu)^2} \exp(-x) dx \\ &= \frac{\mu^2}{(\lambda - \lambda z + \mu)^2} \int_0^\infty x\ \exp(-x)\ dx \\ &= \frac{\mu^2}{[\lambda(1 - Z) + \mu]^2} = \left[\frac{\mu}{\lambda(1 - Z) + 2\mu}\right]^2 \end{aligned}$$

D'où

$$\bar{f}'(\lambda - \lambda z) = \frac{-2(-\rho)[\rho(1 - z) + 1]}{[\rho(1 - z) + 1]^4} = \frac{2\rho}{[\rho(1 - z) + 1]^3}$$

$$\bar{f}''(\lambda - \lambda z) = \frac{6\rho^2(\rho(1 - z) + 1)}{[\rho(1 - z) + 1]^6} = \frac{6\rho^2}{[\rho(1 - z) + 1]^4}$$

$$\bar{f}''(0) = 6\rho^2$$

$$\Longrightarrow m_2 = 6\rho^2$$

On remplace m_2 dans l'équation (3.7.1) on trouve :

$$\begin{aligned} L &= \rho + \frac{\lambda^2 m_2}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda\rho}{\theta(1-\rho)} \\ \Longrightarrow\ & L = \rho + \frac{\lambda\rho[3\theta\lambda\rho + 1]}{\theta(1-\rho)} \end{aligned}$$

$$N_0 = L - \rho = \frac{\lambda\rho[3\theta\lambda\rho + 1]}{\theta(1-\rho)}$$

$$W = \frac{N_0}{\lambda} = \frac{\rho[3\theta\lambda\rho + 1]}{\theta(1-\rho)}$$

$$R = W\theta = \frac{\rho[3\theta\lambda\rho + 1]}{(1-\rho)}$$

4.4 Système $M/Géo/1$ avec rappel

Le systéme $M/Géo/1$ avec rappel est un systéme avec un unique serveur, la discpline est $FIFO$. Le processus des arrivées est Poissonien d'intensité $\lambda > 0$ et la durée de service suit une géometrique de paramétre p et de densité $P(Y = n) = p(1-p)^{n-1}$.

Supposons que toutes les variables aléatoires introduites sont mutuellement indépendantes.

$$\begin{aligned} \bar{f}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-zn) p(1-p)^{n-1} \qquad (4.4.1) \\ &= \frac{p}{1-p} \sum_{n=0}^{\infty} [\exp(-z)(1-p)]^n = \frac{p}{1-p}\left[\frac{1}{1-\exp(-z)(1-p)} - 1\right] \qquad (4.4.2) \\ \bar{f}(z) &= \frac{p\exp(-z)}{1-\exp(-z)(1-p)} \qquad (4.4.3) \end{aligned}$$

$$A(z) = \bar{f}(\lambda - \lambda z) = \frac{p \exp(-\ (\lambda - \lambda z))}{1 - (1-p)\exp(-\ (\lambda - \lambda z))}$$

$$\begin{aligned}
\bar{f}'(\lambda - \lambda z) &= \frac{\lambda p \exp(-\ (\lambda - \lambda z)) - \lambda p(1-p)\exp(-2\ (\lambda - \lambda z)) + \lambda p(1-p)\exp(-2\ (\lambda - \lambda z))}{[1 - (1-p)\exp(-\ (\lambda - \lambda z))]^2} \\
&= \frac{\lambda p \exp(-\ (\lambda - \lambda z))}{[1 - \exp(-\ (\lambda - \lambda z))(1-p)]^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{f}''(\lambda - \lambda z) &= \frac{\lambda^2 p \exp(-\ (\lambda - \lambda z))\left[1 - (1-p)\exp(-\ (\lambda - \lambda z))\right] + 2p(1-p)\lambda^2 \exp(-\ 2(\lambda - \lambda z))}{[1 - \exp(-(\lambda - \lambda z))(1-p)]^3} \\
&= \frac{p\lambda^2 \exp(-\ (\lambda - \lambda z)) + p(1-p)\lambda^2 \exp(-\ 2(\lambda - \lambda z))}{[1 - (1-p)\exp(-(\lambda - \lambda z)]^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_2 &= \bar{f}''(0) = \frac{p\lambda^2 + \lambda^2 p(1-p)}{[1-(1-p)]^3} \\
&= \frac{p\lambda^2 + \lambda^2 p(1-p)}{p^3} = \frac{\lambda^2 + (1-p)\lambda^2}{p^2} \\
&= \frac{\lambda^2(1 + (1-p))}{p^2} = \frac{\lambda^2(1 + (1-p))}{p^2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad m_2 = \frac{\lambda^2(2-p)}{p^2}$$

D'aprés (3.7.1) on a :

$$L = \rho + \frac{\lambda^2 m_2}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda\rho}{\theta(1-\rho)}$$

$$L = \rho + \frac{\lambda^4(2-p)}{2p^2(1-\rho)} + \frac{\lambda\rho}{\theta(1-\rho)}$$

$$N_0 = L - \rho = \frac{\lambda^4(2-p)}{2p^2(1-\rho)} + \frac{\lambda\rho}{\theta(1-\rho)}$$

$$W = \frac{N_0}{\lambda} = \frac{\lambda^3(2-p)}{2p^2(1-\rho)} + \frac{\rho}{\theta(1-\rho)}$$

$$R = W\theta = \frac{\lambda^3\theta(2-p)}{2p^2(1-\rho)} + \frac{\rho}{(1-\rho)}$$

Le tableau ci-dessous représente les résultats obtenus pour le nombre moyen de clients en orbite (m) et la variance d'aprés le théorème(3.10.2), lorsque $\rho \to 1$ et $\theta \to 0$. on choisit $\mu = 1,\ \ \lambda = \{0,2\ ;\ 0,5\ ;\ 0,8\}$ et $p = 0.25$.

ρ	θ	Exp		Erl		Géo(0.25)	
		m	var	m	var	m	var
0.2	0.02	2.5	2.525	2.5	2.575	2.5	2.85
	0.002	25	25.25	25	25.75	25	28.5
	0.0002	250	252.5	250	257.5	250	285
0.5	0.02	25	31.25	25	43.75	25	112.5
	0.002	250	312.5	250	437.5	250	1125
	0.0002	2500	3125	2500	4375	2500	11250
0.8	0.02	160	56.96	160	1388.8	160	5894.4
	0.002	1600	569.6	1600	13888	1600	58944
	0.0002	16000	5696	16000	138880	16000	589440

D'aprés le résultats obtenus en remarque une augmentation importante de la moyenne et de la variance lorsque $\rho \longrightarrow 1$ et $\theta \longrightarrow 0$.

Pour confirmer ces résultats on calcule le temps moyen d'attante des clients dans l'orbite pour les trois distributions (Exponentiel ,Erlang ,Géometrique), en donnant les même valeurs à ρ et θ pour chaque distribution;

Le tableau suivant représente le temps d'attente dans l'orbite.

ρ	θ	Exp W_1	Erl W_2	Géo W_3
0.2	0.02	12.51	12.53	12.64
	0.002	125.01	125.03	125.14
	0.0002	1250.01	1250.03	1250.14
0.5	0.02	50.25	50.75	53.5
	0.002	500.25	500.75	503.5
	0.0002	5000.25	5000.75	5003.5
0.8	0.02	202.56	207.68	235.84
	0.002	2002.56	2007.68	2035.84
	0.0002	20002.56	20007.68	20035.84

D'aprés ces résultats on conclue:

-Le temps d'attente dans l'orbite augumente à chaque fois le taux de rappels diminu.

- Le client à plus de chance de passer en service lorsque son taux de rappels est grand.

D'aprés le théorème (3.10.3) le système $M/M/1$ avec rappels admet des bornes inferieur et superieur.

Nous avons calculé d'abord $N_0(\theta)$.

$$\begin{aligned} N_0(\theta) &= \exp\left\{-\frac{\lambda}{\theta}\int_0^1 \frac{1-\bar{f}(\lambda-\lambda u)}{\bar{f}(\lambda-\lambda u)-u}\right\} \\ &\textit{Alors} \\ N_0(\theta) &= \exp\left\{-\frac{\lambda}{\theta}\int_0^1 \frac{\rho-\rho\ u}{\rho u^2-(\rho+1)u+1}\right\} = \exp\left\{-\frac{\lambda}{\theta}\int_0^1 \frac{\rho(1-\ u)}{(u-1)(\rho u-1)}\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{\lambda}{\theta}\int_0^1 \frac{\rho(\ u-1)}{(u-1)(\rho u-1)}du\right\} = \exp\left\{\ln(1-\rho)^{\frac{\lambda}{\theta}}\right\} \\ &= (1-\rho)^{\frac{\lambda}{\theta}} \end{aligned}$$

ρ	θ	Borne inférieure	Borne supérieure
0.2	2	0.035	0.04
	200	0.000035	0.00004
	20000	0.0000035	0.000004
0.5	2	0.159	0.3182
	200	0.00173	0.00346
	20000	0.0000173	0.0000346
0.8	2	0.1898	0.9493
	200	0.00256	0.0128
	20000	0.0000064	0.000032

Les valeurs numériques obtenues pour les borne inférieure et superieurs lorsque $\theta \to \infty$ nous donne l'augmentation de taux de rappels ce qui implique une convergence trés rapide au système $M/M/1$ classique.

La distance est négligeable entre la distribution de système classique et le système avec rappel, donc on conclue que le système $M/M/1$ avec rappel devient un système $M/M/1$ classique lorsque $\theta \to \infty$.

Conclusion générale

Notre objectif est d'étudier les systèmes d'attente avec rappels en particulier le système $M/G/1$ avec rappels exponentiel.

L'analyse mathématique élaborée pour déterminer la distribution stationnaire est basée sur la méthode de la chaine de Markov induite et la méthode des variables supplémentaires.

Nous avons déterminé les formules explicites des paramétres de pérformance et calculé le temps moyen d'attente dans l'orbite des systémes $M/M/1$,$M/E_2/1$et $M/Géo/1$ avec rappels.

L'approche de décomposition stochastique nous a permis de calculer le nombre moyen de client dans l'orbite à l'instant t pour le modèle $M/M/1$ avec rappels.

Le comportement asymptotique de système d'attente $M/G/1$ avec rappels permet à la variable de nombre de client en orbite de se comporter comme une variable normale lorsque le taux de rappel θ tend vers 0.

Sous un taux de rappel élevé la distribution de nombre de clients dans le système $M/M/1$ avec rappels converge vers la distribution de nombre de clients classique .

Annexe

1-Loi exponentielle

La densité de probabilité d'une loi exponentielle de paramétre λ est donnée par :

$$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t) \ , t \geq 0$$

La fonction de répartition est de la forme : $F(t) = 1\text{-}\exp(-\lambda t) \ , t \geq 0$

2-Loi d'Erlang

Par définition, la loi d'Erlang $E_k(\mu)$ est la loi suivie par la somme de k variables aléatoires indépendantes chacune distribuées selon la loi exponentielle de paramètre μ. Ainsi, si des évènements aléatoires indépendants arrivent selon un processus de Poisson, alors la date t_kd'arrivée du $k^{iéme}$ événement est gouvernée par la loi d'Erlang.Les fonctions de densité de probabilités et de répartition sont données par :

$$f(t) = \frac{\mu^k \ t^{k-1} \ \exp(-\mu t)}{(k-1)!} \qquad et \ F(t) = 1 - \exp(-\mu t) \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\mu \ t)^j}{j!}, t \geq 0$$

3-Fonction génératrice

X est une variable aléatoire à valeur entières non négative . La fonction génératrice de X est définie par :

$$F(z) = E(z^k) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \ z^n \quad \text{Où} \quad p_n = p(X = n) \ , n \in \mathbb{N}$$

Et z est une variable complexe. On vérifie immédiatement que $f(z)$ est définie au moins pour $\mid z \mid \leq 1$ et que

$f(0) = p_0 \quad$ et $f(1) = 1$

4-Transformée de Laplace

Si Xest une variable aléatoire continue à valeurs positives ou nulles , la transformé de Laplace de X est obtenue à partir de la fonction génératrice de moments

$$\bar{F} = \int_0^{\infty} \exp(-z \ t) \ f_x(t) dt$$

4-Code Matlab pour le système M/M/1 classique

```
lambda=input('lambda= ');
mu=input('mu= ');
n=input('nbre experience= ');
L=0;
Lq=0;
W=0;
Wq=0;
nbre_my_client_quittant=0;
for i=1:n
    h=0;
    T=1000;
    ta=0;
    td=T;
    tf=T;
    ns=0;
    nf=0;
    nq=0;
    while h<T
        if h==ta
            ns=ns+1;
            nf=nf+1;
            ta=h-(1/lambda)*log(rand);
            if ns==1
                td=h;
```

```
                end
            end
            if h==td
                nf=nf-1;
                tf=h-(1/mu)*log(rand);
                td=T;
            end
            if h==tf
                ns=ns-1;
                nq=nq+1;
                if ns~=0
                    td=h;
                end
                tf=T;
            end
            h=min([ta,td,tf]);
        end
    L=L+ns;
    Lq=Lq+nf;
    nbre_my_client_quittant=nbre_my_client_quittant+nq;
    end
    L=L/n;
    Lq=Lq/n;
    W=L/lambda;
```

```
    Wq=Lq/lambda;
    nbre_my_client_quittant=nbre_my_client_quittant/n;

    %========== affichage ===============
    L,
    Lq,
    W,
    Wq,
    nbre_my_client_quittant,
```

Ce code est valable pour tout les systéme classique, on remplaçant seulement la loi de service.

Bibliographie

[1] Aïssani.Dj,Mohamed.B, Cherfaoui.M, Djellab.N, Analyse des performances du système M/G/1avec rappels et Bernoulli feedback,(2013).

[2] ARRAR .N.K,Problèmes de convergence,optimisation d'algorithmes et analyse stochastique de systèmes de files d'attente avec rappels,Université Paris 1, Panthéon-Sorbonne, France,(2012).

[3] Babes. M:statistiques file d'attentes& simulation ,publications universitaires 1,Place centrale de Ben –aknoun (Alger)

[4] Bareche.A and Aissani. Dj,Statistical MethodologyforApproximating G/G/1 Queues by theStrongStabilityTechnique,Béjaia, Algéria,(2014).

[5] Baynat.B:theorie des files d'attente (des chaines de markov aux reseaux a forme produit), (2000).

[6] Boualem M., Djellab N., Aïssani D. Stochastic approximations and monotonicity of a single server feedback retrial queue.Mathematical Problems in Engineering,(2012).

[7] Claudie.H,Elements de la théorie des files d'attente, Université tlse2,France(2008).

[8] Doghmane;S,Sur le comportement asymptotique du systéme de file d'attente M/G/1 avec rappels.Annaba-Algerie. université Badji Mokhtar,(2012).

[9] J. Kim, A. Kanechny and A.N. Dudin. Threshold control by a single-server retrial queue with batch arrivals and group services. Operations Research Letters,(2006)

[10] Keilson, J. Cozzolino and H. Young. A service system with unfilled requests repeated. Operation research, (1968).

[11] Krishna Kumar B., Vijayalakshmi G., Krishnamoorthy A., Sadiq Basha S. A single server feedback retrial queue with collisions. Computer and Operations Research(2010).

[12] Lee.A.M.les files d'attente « théorie et applications », Paris (1970)

[13] Messegmine_mohammed_houssem_edine,T.I,Modilisation de flux dans un réseau :étude et simulation de files d'attente.Tlemcen-Algérie:université Abou Beke Belkaid, (2012).

[14] Ruegg.A:processus stochastique ,Presses polytechnique romandes , Lausanne Suisse,(1989).

[15] Ycart.B. Files d'attente,Cahier de Mathématiques Appliquées n° 14.