

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université M'hamed Bouguerra Boumerdes  
Faculté des Sciences  
Département des Mathématiques



Mémoire Présenté  
Pour L'Obtention Du Diplôme De Master  
En Recherche Opérationnelle Option : Recherche Opérationnelle  
Modélisation et Aide à la Décision

Thème

*La méthode de déchargement*

Présenté Par :

M<sup>lle</sup> ABBAS Hafida

M<sup>lle</sup> CHEKIR Loubna

devant le jury composé de :

Président	M <sup>elle</sup> S.NAIT BELKACEM	M.A.A	U.M.B.B.
Rapporteurs	M <sup>elle</sup> S.OUATIKI	M.A.A	U.M.B.B.
Examineurs	M <sup>r</sup> F.CHEURFA	M.A.A	U..M.B.B.

Année Universitaire 2015 – 2016

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>4</b>
<b>1 Les Notions de Base</b>	<b>6</b>
1.1 Quelques définitions et notations dans les ensembles . . . . .	7
1.2 Concepts de graphe . . . . .	8
1.2.1 Définitions . . . . .	8
1.2.2 Familles particulière des graphes . . . . .	16
<b>2 Coloration de graphes</b>	<b>20</b>
2.1 Historique . . . . .	21
2.2 Aperçu sur la planarité . . . . .	24
2.2.1 Le graphe dual . . . . .	27
2.3 Coloration de graphes . . . . .	28
2.4 Coloration de sommets . . . . .	28
2.4.1 Le nombre chromatique . . . . .	29
2.4.2 Bornes et valeurs exactes de $\chi(G)$ . . . . .	30
2.4.3 Exemples de coloration de graphe . . . . .	32
2.5 Coloration des arêtes . . . . .	36
2.5.1 L'indice chromatique . . . . .	37
2.5.2 Bornes de l'indice chromatique . . . . .	37
2.6 Coloration de sommet par liste . . . . .	38
2.6.1 Le nombre chromatique par liste . . . . .	39
2.7 Coloration des arêtes par liste . . . . .	40
2.7.1 L'indice chromatique par liste . . . . .	40
2.8 Les graphes parfaits . . . . .	42

---

2.8.1	Coloration des graphes parfaits . . . . .	44
2.9	Coloration des graphes planaires . . . . .	45
2.9.1	Coloration des faces . . . . .	46
2.10	Notions de compléxité . . . . .	47
2.10.1	Les problèmes de la classe $P$ . . . . .	48
2.10.2	Les problèmes de la classe NP . . . . .	48
2.10.3	Les problèmes de la classe NP-Complet . . . . .	48
2.10.4	La réduction polynomiale . . . . .	48
2.11	L'étude de la NP-Complétude du problème de coloration . . . . .	49
2.11.1	La réduction polynomiale du problème de coloration au problème de 3-Sat . . . . .	50
<b>3</b>	<b>La méthode de déchargement</b>	<b>54</b>
3.1	Introduction . . . . .	55
3.2	Les différentes techniques de démonstration . . . . .	56
3.2.1	Les connecteurs logiques . . . . .	56
3.2.2	Définitions . . . . .	56
3.2.3	Démonstration directe . . . . .	57
3.2.4	Démonstration par un contre-exemple . . . . .	57
3.2.5	Démonstration par contraposée . . . . .	58
3.2.6	Démonstration par l'absurde . . . . .	58
3.2.7	Démonstration par induction . . . . .	59
3.2.8	La méthode probabiliste . . . . .	60
3.3	Quelques notions et propositions . . . . .	61
3.4	La méthode de déchargement . . . . .	63
3.4.1	Les configurations inévitables et réductibles . . . . .	64
3.5	Le déroulement de la méthode . . . . .	65
3.5.1	L'application par le degré moyen maximum . . . . .	65
3.5.2	L'application par la formule d'Euler . . . . .	66
3.6	Exemples d'application avec le déchargement . . . . .	66
3.6.1	Méthode de déchargement avec le degré moyen maximum . . . . .	66
3.6.2	Méthode de déchargement avec la formule d'Euler . . . . .	81

---

<b>4 Implémentation de la méthode de résolution</b>	<b>95</b>
4.1 Généralités sur le langage . . . . .	96
4.2 Programmation avec Matlab . . . . .	96
4.3 L'implimentation de la méthode de déchargement . . . . .	97
4.3.1 La coloration . . . . .	99
4.3.2 Les configurations réductibles . . . . .	101
4.3.3 Les règles de déchargement . . . . .	105
<b>Conclusion général</b>	<b>112</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>114</b>

# Table des figures

1.1	<i>Un multigraphe : <math>G</math> non simple.</i>	8
1.2	<i>Un graphe simple <math>G</math>.</i>	9
1.3	<i>La chaîne rouge joignant le sommet <math>f</math> au sommets <math>b</math> est de longueur 5 . . .</i>	10
1.4	<i>Un 6-cycle : cycle de longueur 6 . . . . .</i>	11
1.5	<i>Un Le graphe <math>G</math>.</i>	11
1.6	<i>Un 2-thread de longueur 3 . . . . .</i>	11
1.7	<i>Le <math>K_5</math> . . . . .</i>	12
1.8	<i>Un graphe <math>G</math> avec 2 composantes connexes.</i>	12
1.9	<i>Les sommets caractéristiques.</i>	13
1.10	<i>Un graphe <math>G</math> et son complémentaire <math>\overline{G}</math>.</i>	13
1.11	<i>Un graphe <math>G</math> est 3-régulier.</i>	13
1.12	<i>Le graphe <math>G'=(V,E')</math> ou <math>V = \{a, \dots, h\}</math> et <math>E'</math> les arêtes en rouge est un graphe partiel. . . . .</i>	14
1.13	<i>Le sous-graphe induit par l'ensemble <math>\{a, b, c, d\}</math>. . . . .</i>	14
1.14	<i>La subdivision du graphe <math>G</math>.</i>	15
1.15	<i>Le graphe triangulé. . . . .</i>	15
1.16	<i>L'ensemble <math>S = \{a, e, f\}</math> est un stable. . . . .</i>	16
1.17	<i>Le sous-graphe engendré par l'ensemble <math>C = \{a, b, c, d\}</math> est une clique. . . . .</i>	16
1.18	<i>Un graphe biparti. . . . .</i>	17
1.19	<i>(a) un <math>k_{3,3}</math>, (b) l'étoile <math>K_{1,5}</math>. . . . .</i>	17
1.20	<i>Un graphe puissance <math>G^2</math>. . . . .</i>	17
1.21	<i>Un arbre <math>T</math>. . . . .</i>	18
1.22	<i>Une forêt . . . . .</i>	18
1.23	<i>Un sparce graphe. . . . .</i>	19

1.24	<i>(a) Un graphe cubique, (b) un graphe subcubic . . . . .</i>	19
1.25	<i>Le graphe complet <math>K_6</math> est 5-sommet-connexe . . . . .</i>	19
2.1	<i>La carte géographique d'Algérie colorée par 4 couleurs. . . . .</i>	21
2.2	<i>La letter de Morgan à Hamilton, 23 Oct 1852. . . . .</i>	22
2.3	<i><math>G</math> est sa représentation planaire . . . . .</i>	24
2.4	<i>Les faces d'un graphe planaire <math>G</math> . . . . .</i>	24
2.5	<i>Un graphe plnaire <math>G</math> . . . . .</i>	25
2.6	<i>Le graphe <math>G</math> est son dual <math>G^*</math> . . . . .</i>	28
2.7	<i>Coloration de sommets d'un graphe <math>G</math> . . . . .</i>	29
2.8	<i>Coloration de graphe <math>G</math> . . . . .</i>	30
2.9	<i>Le graphe qui modélise le problème de planification d'examens . . . . .</i>	33
2.10	<i>Un réseau d'antenne. . . . .</i>	34
2.11	<i>Le graphe d'interférences. . . . .</i>	35
2.12	<i>Coloration des arêtes d'un graphe <math>G</math> . . . . .</i>	36
2.13	<i>Coloration des arêtes d'un graphe <math>G</math>. . . . .</i>	37
2.14	<i>Un biparti qui n'est pas 2-liste coloration. . . . .</i>	39
2.15	<i>Coloration des arêtes par liste. . . . .</i>	41
2.16	<i>Un graphe d'intervalle de sept intervalles. . . . .</i>	43
2.17	<i>(a)Un trou,(b) anti trou. . . . .</i>	43
2.18	<i>Un graphe planaire coloré avec 4-couleurs. . . . .</i>	46
2.19	<i>La réduction polynomiale. . . . .</i>	49
2.20	<i>Le graphe <math>G(C)</math> associe à une affectation <math>C</math>. . . . .</i>	51
3.1	<i>Quelques configurations réductibles. . . . .</i>	65
3.2	<i>La règle de déchargement (R1) si <math>d(v) = 4</math> . . . . .</i>	68
3.3	<i>La règle de déchargement (R1) si <math>d(v) = 3</math> . . . . .</i>	69
3.4	<i>La règle de déchargement (R1) si <math>d(v) = 2</math> . . . . .</i>	69
3.5	<i>La règle de déchargement (R2) si <math>d(v) = 5</math> . . . . .</i>	69
3.6	<i>La règle de déchargement (R2) si <math>d(v) = 6</math>. . . . .</i>	70
3.7	<i>La règle de déchargement si <math>d(v) = 5</math> et <math>j \geq 5</math>. . . . .</i>	70
3.8	<i>La règle de déchargement si <math>d(v) = 6</math> et <math>j = 4</math>. . . . .</i>	71
3.9	<i>La règle de déchargement si <math>d(v) = 6</math> et <math>j = 5</math>. . . . .</i>	71

3.10	<i>La règle de déchargement si <math>d(v) = 6</math> et <math>j = 6</math>.</i>	71
3.11	<i>La règle de déchargement si <math>d(v) = 7</math> et <math>j = 3</math>.</i>	72
3.12	<i>La règle de déchargement si <math>d(v) = 7</math> et <math>j = 4</math>.</i>	72
3.13	<i>La règle de déchargement si <math>d(v) = 7</math> et <math>j = 5</math>.</i>	73
3.14	<i>La règle de déchargement si <math>d(v) = 7</math> et <math>j = 6</math>.</i>	73
3.15	<i>La règle de déchargement si <math>d(v) = 8</math> et <math>j = 2, j = 3</math>.</i>	73
3.16	<i>Coloration de graphe <math>G</math> à distance <math>d = 3</math>.</i>	74
3.17	<i>Coloration de graphe <math>G</math> à distance <math>d = 2</math>.</i>	74
3.18	<i>La configuration de Claim 3.6.1.</i>	76
3.19	<i>La preuve du configuration de Claim 3.6.1.</i>	77
3.20	<i>La configuration de Claim 3.6.2.</i>	77
3.21	<i>La preuve de la configuration de Claim 3.6.2.</i>	77
3.22	<i>La configuration de Claim 3.6.3.</i>	78
3.23	<i>La configuration de Claim 3.6.4.</i>	78
3.24	<i>La règle de déchargement (R1).</i>	79
3.25	<i>La règle de déchargement (R2).</i>	79
3.26	<i>La règle de déchargement (R2.1).</i>	79
3.27	<i>Les règles de déchargement du théorème 3.6.4.</i>	80
3.28	<i>La configuration réductible du Claim 3.6.5.</i>	84
3.29	<i>La preuve de la configuration réductible du Claim 3.6.5.</i>	84
3.30	<i>La configuration réductible du Claim 3.6.6.</i>	85
3.31	<i>Preuve de la configuration réductible du Claim 3.6.6.</i>	85
3.32	<i>La configuration réductible du claim 3.6.7 pour <math>j = 4</math>.</i>	86
3.33	<i>La règle de déchargement (R1).</i>	87
3.34	<i>La règle de déchargement (R2).</i>	87
3.35	<i>La règle de déchargement (R3) pour <math>j = 5</math>.</i>	88
3.36	<i>La règle de déchargement (R3) pour <math>j = 6</math>.</i>	88
3.37	<i>La règle de déchargement (R3) pour <math>j = 7</math>.</i>	89
3.38	<i>La configuration réductible de Claim 3.6.9.</i>	91
3.39	<i>preuve du configuration réductible de Claim 3.6.9.</i>	91
3.40	<i>La configuration réductible de Claim 3.6.10.</i>	91
3.41	<i>Preuve du configuration réductible de Claim 3.6.10.</i>	92

---

3.42	<i>La règle de déchargement.</i>	92
4.1	Fenêtre qui représente la page de garde.	98
4.2	Fenêtre qui représente le plan de notre méthode.	98
4.3	Fenêtre qui représente la coloration du graphe $G$ .	100
4.4	Fenêtre qui représente l'existence des sommets d'articulation $G$ .	104
4.5	Fenêtre qui représente les faces du graphe $G$ .	105
4.6	Fenêtre qui représente les faces du graphe $G$ .	108
4.7	<i>Le graphe de déchargement.</i>	111

# Liste des tableaux

2.1	Un tableau qui résume les interférences entre les antennes d'un réseau mobile	35
3.1	Les connecteurs logiques.	56
3.2	Relation entre la maille et le mad dans un graphe planaire $G$ .	63
4.1	Le vecteur des sommets et leurs couleurs.	100
4.2	Le temps d'exécution de coloration.	101
4.3	Le vecteur des sommets d'articulations et leurs numéros dans le graphe $G$ .	103
4.4	Le temps d'exécution de sommet séparateur.	104
4.5	Les faces de degré 3.	108
4.6	Les faces de degré 12.	108
4.7	Le temps d'exécution de face.	109

# List of Algorithms

1	L'algorithme ND de coloration. . . . .	50
2	L'algorithme coloration; . . . . .	99
3	L'algorithme configuration réductible 2; . . . . .	102
4	L'algorithme sommet séparateur; . . . . .	103
5	L'algorithme générateur; . . . . .	105
6	L'algorithme degré inférieure à 2; . . . . .	106
7	Faces; . . . . .	107
8	L'algorithme Règle de déchargement . . . . .	110
9	L'algorithme Déchargement . . . . .	110

## *Remerciements*

Ce n'est pas par coutume que cette page figure au préambule de ce mémoire, mais c'est plutôt un devoir moral et une reconnaissance sincère qui nous poussent à la faire.

Nous remercierons ALLAH le tout puissant de nous ouvrir les portes du savoir, de nous aidé dans les moments difficiles, et de nous avoir permis d'être ce que nous devenus.

Nos chaleureux et sincère remerciements vont tout d'abord à notre promotrice **madame OUATIKI. S** sans qui, ce travail ne pouvoir avoir cette forme, nous lui témoignons tous notre gratitude et reconnaissance pour nous avoir encouragé, consacrés son temps précieux et nous avoir accordé son attention avec une extrême patience, et nous la remercierons aussi pour tous ces conseils qui étaient notre guide vers une vision plus étendue.

Nos remerciements vont également à madame NAIT BELKACEM. S, pour l'honneur et le plaisir qu'elle nous a fait en acceptant de présider ce jury.

Nous exprimons nos sincères remerciements à Monsieur CHEURFA. F, qui a bien voulu examiner ce mémoire et participer au jury.

Nous tenons à exprimer toute notre gratitude et notre vifs remerciements à tous les enseignants de la spécialité Recherche Opérationnelle.

*Dédicace*

Je dédie ce travail á mon père et ma mère pour leur bénédiction et soutien.

À La mémoire de ma grande mère.

À ma soeur Djouher.

À mes frères Nadjib et *M<sup>ed</sup>* Amine.

À ma grande famille.

À mes chères amies.

À ma binôme Loubna et sa famille.

À mes professeurs surtout ma promotrice Melle Ouatiki.

Hafida.

*Dédicace*

Je dédie ce travail à mon père et ma mère pour leur bénédiction et soutien.

À ma soeur Ikram.

À mes frères Moussaab et *M<sup>ed</sup>* Amine.

À ma grande famille.

À mes chère amies.

À ma binôme Hafida et sa famille.

À mes professeurs surtout ma promotrice Melle Ouatiki.

Loubna.

# Introduction générale

La théorie des graphes trouve différentes applications dans de nombreux domaines tels que la chimie, la biologie, les réseaux de télécommunications ou encore les réseaux sociaux. Les recherches en théorie des graphes sont essentiellement menées par des informaticiens du fait de l'importance des aspects algorithmiques (recherche de solutions). Il s'agit essentiellement de modéliser des problèmes.

Les graphes constituent ainsi des outils de modélisation importants et très utilisés en informatique. On peut ainsi ramener un problème concret et complexe à un modèle mathématique plus clairement posé qui consiste en l'étude de sommets et arêtes.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques.

La théorie des graphes constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de Cayley, Menger, König, Berge, Erdős, etc. Son histoire débute avec les travaux d'Euler au XVIII<sup>ème</sup> siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg .

Le problème de coloration de graphes est l'un des origines de la théorie des graphes, ce problème remonte au XIX<sup>ème</sup> siècle lorsque Guthrie a remarqué que quatre couleurs étaient suffisantes pour colorer la carte d'Angleterre, sans donner la même couleur à deux régions ayant une frontière commune.

La coloration de graphes est un problème central de l'optimisation combinatoire, c'est un domaine très attractif par ses nombreuses applications. La coloration de graphes permet de modéliser de nombreux problèmes réels tels que l'allocation de fréquences, la diffusion dans les réseaux, le partage des ressources, le transfert de fichiers, etc...

Comme tout domaine d'étude la coloration de graphes est connue par de nombreux

propriétés et théorèmes qui ont été démontré par différentes méthode de démonstration, c'est dans ce cadre que notre étude est focalisée. Nous nous intéressons a l'étude d'une technique de preuve qui consiste en la méthode de déchargement, cette méthode a vu le jour principalement dans la démonstration du fameux théorème des quatre couleurs.

Dans le but de résoudre le théorème des quatre couleurs, le mathématicien allemand Heinrich Heesch a introduit une méthode qui a été analogue à déplacer la charge dans un réseau électrique, de trouver un ensemble de configurations inévitables, cette dernière est connue par le nom procédure de déchargement.

Après quelques années, Haken a remarqué une manière pour améliorer et développer la procédure de déchargement et par la suite avec une collaboration avec Appel, ils ont abouti a la preuve du théorème.

L'objectif principal de ce mémoire est l'étude de la méthode de déchargement et ces différentes applications pour prouver des théorèmes concernant la coloration de graphes.

La démarche que nous adoptons pour atteindre l'objectif est la suivante :

Le premier chapitre est consacré aux notions de base, nous donnons des définitions fondamentaux et rappels sur les notions de base en théorie des graphes, que nous utiliserons aux cours de ce mémoire.

Le deuxième chapitre porte sur la coloration de graphes. Nous parlerons de graphe avec ses différentes manières ainsi que les propriétés fondamentaux et aussi la complexité relative a ce problème.

Le troisième chapitre est consacré à la méthode de déchargement, son historique ainsi que sa démarche. Nous l'illustrons par des exemples qui consistent en des démonstrations de quelques Théorèmes.

Comme pratiquement, toutes les preuves qui utilisent la méthode de déchargement sont constructives et donnent des algorithmes en temps polynomial, nous avons donc donner et implémenter un algorithme dans le chapitre quatre qui permet de trouver les configurations réductibles d'un théorème. Nous avons ensuite appliquer la méthode de déchargement pour prouver l'énoncé du Théorème.

Nous terminons notre travail par une conclusion générale, dans laquelle nous résumons tout ce que nous avons fait dans ce mémoire.

# 1

## Les Notions de Base

Comme toute discipline, la théorie des graphes se distingue par son propre langage, dans ce chapitre nous présentons la terminologie et les concepts de base relatifs aux thèmes traités.

D'autres définitions seront introduites au fur et à mesure qu'elles seront abordées dans les chapitres à suivre. Toutefois, il ne s'agira guère d'un aperçu exhaustif, nous référons donc le lecteur aux livres de Claude Berge [6,7],[13] pour plus de détails.

## 1.1 Quelques définitions et notations dans les ensembles

Comme nous aurons besoin des connections logiques dans les chapitres suivants, nous jugerons utiles d'introduire quelques notions fondamentales des ensembles.

### Définitions et notations

Un ensemble  $A$  désigne intuitivement une collection d'objets (les éléments de l'ensemble), le cardinal d'un ensemble  $A$  est noté  $|A| = k$ , tel que ces éléments sont présentés de la manière suivantes  $\{x_1 \dots x_k\}$ .

Un sous-ensemble  $S \subseteq A$  désigne une partie de  $A$ .

Le complémentaire de  $S$  dans  $A$  est notée  $\overline{S}$ , c'est à dire  $A \setminus S$ .

Lorsque  $x$  est un élément de  $A$ , nous écrivons  $x \in A$  et dire " $x$  appartient à  $A$ ". Lorsque  $x$  n'est pas dans  $A$ , nous écrivons  $x \notin A$ .

Si chaque élément d'un ensemble  $B$  appartient à  $A$ , puis  $B$  est un sous-ensemble de  $A$  et  $A$  contient  $B$ , nous écrivons  $B \subseteq A$  ou  $A \supseteq B$ .

Dans ce qui suit nous définissons les opérations fondamentales dans les ensembles.

Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles. Leur *union*  $A \cup B$  se compose de tous éléments de  $A$  ou de  $B$  (ou les deux).

Leur *intersection*  $A \cap B$  se compose de tous éléments  $A$  et  $B$ . Leur *différence*  $A - B$  est constitués des éléments de  $A$  qui ne sont pas dans  $B$ .

Deux ensembles sont *disjoints* si leur intersection est l'ensemble vide noté  $\phi$ .

### Ensemble minimal/maximal et ensemble minimum/maximum

Soit une propriété  $P$ . On dit qu'un ensemble  $S$  est minimal pour la propriété  $P$  si aucun sous-ensemble strict de  $S$  ne vérifie cette propriété. Un ensemble est dit minimum pour la propriété  $P$  si aucun ensemble plus petit (pas nécessairement un sous-ensemble) ne vérifie la propriété. Ainsi, un ensemble minimum est nécessairement minimal, mais l'inverse n'est pas vrai en général.

De même, nous disons qu'un ensemble  $S$  est maximal pour la propriété  $P$  si aucun ensemble contenant  $S$  et différent de  $S$  ne vérifie la propriété  $P$ . Il est maximum si aucun ensemble plus grand que  $S$  (sans nécessairement le contenir) ne vérifie  $P$ .

## 1.2 Concepts de graphe

### 1.2.1 Définitions

Un *graphe*  $G = (V, E)$  est défini par un couple  $(V, E)$ , tel que  $V$  est un ensemble fini non vide et  $E$  une relation binaire commutative sur  $V$ .

L'ensemble  $V$  est appelé l'ensemble des *sommets* de  $G$ , et  $E$  un sous-ensemble de  $V \times V$ . Les éléments de  $E$  sont appelés *arêtes* de  $G$ . La *taille* d'un graphe  $G = (V, E)$  est le nombre arête  $m = |E|$ .

- \* On note  $uv \in E$  l'arête joignant les sommets  $u$  et  $v \in V$ .
- \* Les sommets  $u$  et  $v$  sont appelés les *extrémités* de l'arête.

Nous disons que deux sommets  $u$  et  $v$  sont *incidents* ou *voisins* s'il existe une arête qui les relie c'est à dire pour l'arête  $uv$ , les sommets  $u$  et  $v$  sont les *extrémités* de cette arête.

- \* Le nombre des arêtes *incidentes* à un sommet est le nombre des arêtes sortants du sommet.
- \* Lorsque plusieurs arêtes relient deux sommets, nous les appelons des *arêtes multiples*.

Nous appelons *ordre* d'un graphe  $G = (V, E)$  le nombre de sommets  $|V|$  de ce graphe.

#### Boucle

Une *boucle* est une arête dont les deux extrémités sont identiques.

#### Graphe simple

Un graphe est *simple* s'il ne contient ni boucle ni arêtes multiples.

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit *fini* s'il contient un nombre fini de sommets.

Un *multigraphe* est un graphe qui n'est pas simple (Voir figure 1.1).

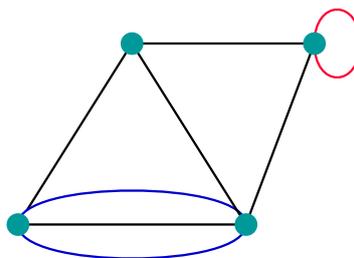


FIGURE 1.1: Un multigraphe :  $G$  non simple.

Dans la figure 1.1 :

$G$  est un *multigraphe* puisqu'il n'est pas simple.

L'ordre du graphe  $G$  est :  $n = |V| = 4$ .

La taille de  $G$  est :  $m = |E| = 8$ .

L'arête bleu est une arête multiples.

L'arête rouge est une boucle.

### Degré

Le *degré* d'un sommet  $v$  d'un graphe  $G$ , notée  $d_G(v)$  ou  $d(v)$  est le nombre d'arêtes de  $G$  incidente à  $v$ . Pour un graphe simple, le degré de  $v$  correspond également au nombre de sommets adjacents à  $v$ .

Un sommet de degré  $k$  est appelé un  $k$ -sommet. Un  $k^+$ -sommet (resp.  $k^-$ -sommet) est un sommet de degré au moins ( $\geq k$ ) (resp. au plus  $\leq k$ )  $k$ .

Le nombre  $\delta(G)$  est le degré minimum de  $G$  noté  $\delta(G) = \min\{d(v), v \in V(G)\}$  et  $\Delta(G)$  est le nombre le degré maximum de  $G$  noté  $\Delta(G) = \max\{d(v), v \in V(G)\}$ .

Pour un graphe simple d'ordre  $n$ , le degré d'un sommet est un entier compris entre 0 et  $n - 1$ .

### Degré moyen

Notons par  $\bar{d}(G)$  le *degré moyen* des sommets de  $G$  donné par :

$$\bar{d}(G) = \frac{\sum_{v \in V} d(v)}{|V(G)|}.$$

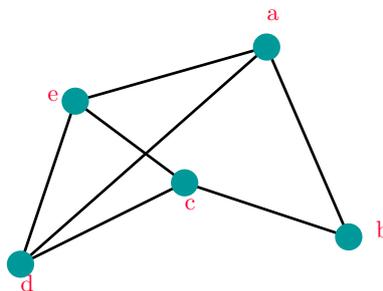


FIGURE 1.2: Un graphe simple  $G$ .

$$\delta(G) = \min_{v \in V} d(v) = 2 \quad \text{et} \quad \Delta(G) = \max_{v \in V} d(v) = 3.$$

Les sommets a,c,e,d sont des 3-sommets. Le sommet b est un 2-sommet.

Le degré moyen  $\bar{d}(G) = 14/5$ .

### Le voisinage

Dans le graphe  $G$ , le *voisinage* (ou voisinage ouvert) d'un sommet  $v$  noté  $N_G(v)$  est l'ensemble des sommets adjacents à  $v$ . En d'autres termes  $N_G(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ .

Le *voisinage fermé* d'un sommet  $V$  noté  $N_G[v]$  est l'ensemble des sommets adjacents à  $v$  plus le sommet  $v$  lui-même. Nous avons  $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ .

### Chaîne

Une *chaîne*  $\mu$  est une séquence d'arête de la forme  $(e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, e_i)$  tel que, pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , chaque arête  $e_i$  a un sommet en commun avec l'arête précédente.

La longueur d'une chaîne  $\mu$  est égale au nombre de ses arêtes qu'égalise à  $k - 1$  (Voir figure 1.4).

Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite *simple*. Une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet est dite *élémentaire*.

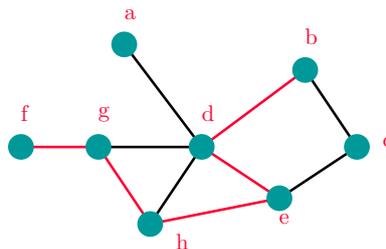


FIGURE 1.3: La chaîne rouge joignant le sommet  $f$  au sommets  $b$  est de longueur 5 .

### Cycle

Un *cycle*  $C_n$  est une chaîne qui commence avec un sommet  $v$  et se termine avec le même sommet.  $C_n$  est un graphe connexe à  $n$  sommets tel que  $n \geq 3$ .

Un cycle de longueur  $k$  est noté un *k-cycle*. (Voir figure 1.5)

Un graphe  $G$  est dit *acyclique* s'il n'existe aucun cycle dans  $G$ .

### Distance

Soit  $G = (V, E)$  un graphe, nous appelons *distance* entre  $v$  et  $v'$ , que nous notons  $\text{dist}(v, v')$ , la longueur du plus courte chaîne entre  $v$  et  $v'$ .

Nous avons les propriétés suivantes :

1. L'*excentricité* d'un sommet  $v$  de  $G$  est  $\text{exc}(v) = \max\{\text{dist}(v, v'), v \in V\}$ .

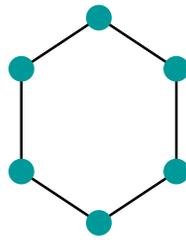
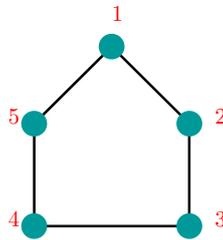


FIGURE 1.4: Un 6-cycle :cycle de longueur 6 .

2. Le diamètre d'un graphe est  $\text{diam}(G) = \max\{\text{exc}(v), v \in V\}$ .
3. Le rayon d'un graphe  $\text{rayon}(G) = \min\{\text{exc}(v), v \in V\}$ .

FIGURE 1.5: Un Le graphe  $G$ .

$\text{dist}(1, 2) = 1$  ,  $\text{dist}(1, 3) = 2$ ,  $\text{dist}(1, 4) = 2$ ,  $\text{dist}(1, 5) = 1$ ,  $\text{dist}(2, 3) = 1$ ,  
 $\text{dist}(2, 4) = 2$ ,  $\text{dist}(2, 5) = 2$ ,  $\text{dist}(3, 4) = 1$ ,  $\text{dist}(3, 5) = 2$ ,  $\text{dist}(4, 5) = 1$ .

$\text{diam}(G) = 2$ ,  $\text{rayon}(G) = 1$ .

### Thread

Un  $k$ -thread est une chaîne avec  $k$  sommets internes de degré 2. Les extrémités d'un thread sont son premier et son dernier sommets.

La longueur d'un  $k$ -thread est :  $k + 1$  dont  $k$  sont des sommets internes de degré 2.

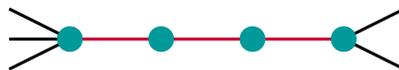
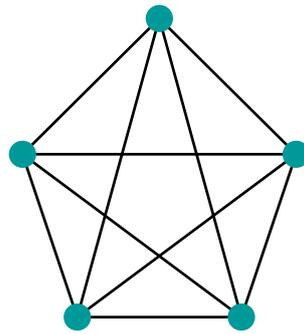


FIGURE 1.6: Un 2-thread de longueur 3 .

### Graphe complet

Un graphe complet est un graphe où chaque sommet est relié à tous les autres.

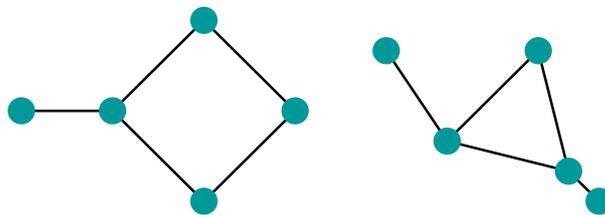
Le graphe complet d'ordre  $n$  noté  $K_n$ , tel que chaque sommet est de degré  $n - 1$ .

FIGURE 1.7: Le  $K_5$ .

### Grphe connexe

Un graphe est dit *connexe* si et seulement s'il existe une chaîne entre chaque paire de sommets.

Une *composante connexe* d'un graphe  $G$  est un sous-graphe  $G' = (V', E')$  connexe qu'est maximal pour cette propriété, c'est-à-dire il n'est pas possible d'ajouter d'autres sommets en conservant la connexité du sous-graphe.

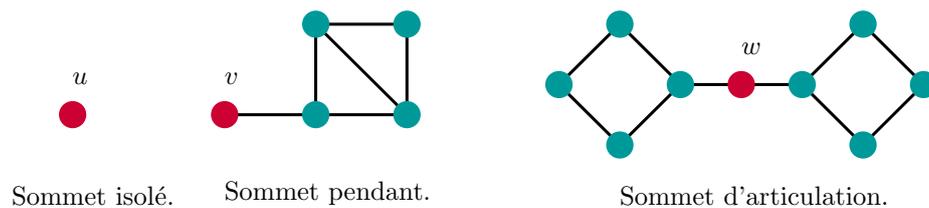
FIGURE 1.8: Un graphe  $G$  avec 2 composantes connexes.

### Sommets caractéristiques

Un sommet de degré 0 est dit *isolé* s'il n'est relié à aucun autre sommet.

Lorsque  $d(v) = 1$ , nous disons que le sommet  $v$  est *pendant*.

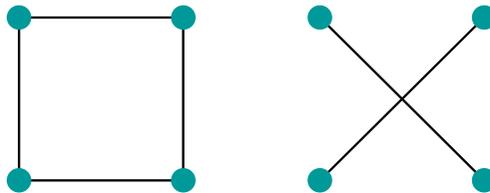
Un sommet qui relie des composantes connexes est dit un sommet *d'articulation*, car si on le supprime on augmente le nombre de composantes connexes.

FIGURE 1.9: *Les sommets caractéristiques.*

### Graphes complémentaires

Nous appelons le *complémentaire* de  $G$ , le graphe  $\overline{G}$ , ayant le même ensemble de sommets que  $G$ , et ayant pour ensemble d'arêtes  $E(\overline{G}) = \{uv, u, v \in V; uv \notin E(G)\}$ , c'est-à-dire  $E(\overline{G})$  a exactement les paires de sommets qui ne sont pas des arêtes de  $G$ .

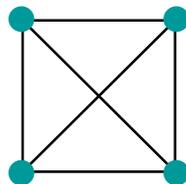
On remarque que  $\overline{\overline{G}} = G$ .

FIGURE 1.10: *Un graphe  $G$  et son complémentaire  $\overline{G}$ .*

### Graphe régulier

Un graphe  $G = (V, E)$  est *régulier* si tous les sommets de  $G$  ont le même degré, et il est régulier de degré  $k$  si le degré de tous ses sommets est  $k$ . Ce graphe est également appelé  $k$ -régulier (Voir figure 1.11).

Le graphe complet d'ordre  $n$  est donc un graphe régulier de degré  $n - 1$  ( $(n - 1)$ -régulier) et chaque cycle est 2-régulier.

FIGURE 1.11: *Un graphe  $G$  est 3-régulier.*

### Maille

La *maille* d'un graphe connexe  $G$  notée  $g(G)$  est la longueur du plus petit cycle dans

$G$  qui contient au moins un cycle  $g$ . Nous avons  $3 \leq g(G) \leq n$  et  $g = +\infty$  si  $G$  ne contient pas de cycle.

### Graphe partiel

Un *graphe partiel* d'un graphe  $G = (V, E)$  est un graphe  $G' = (V, E')$  tel que  $E'$  est un sous-ensemble de  $E$ , autrement dit, nous obtenons  $G'$  en enlevant une ou plusieurs arêtes au graphe  $G$ .

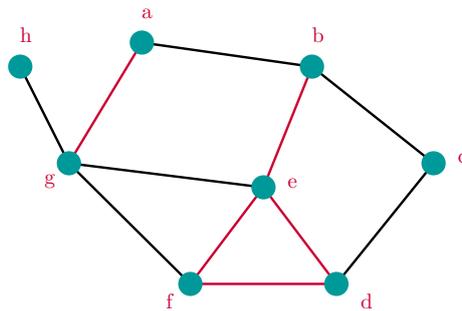


FIGURE 1.12: Le graphe  $G' = (V, E')$  ou  $V = \{a, \dots, h\}$  et  $E'$  les arêtes en rouge est un graphe partiel.

### Graphe induit (sous-graphe)

Un graphe *induit* est un sous-graphe de  $G$  induit par un sous-ensemble de sommets  $S \subseteq V$ , noté  $G[S]$  est le graphe dont l'ensemble des sommets  $S$  et dont l'ensemble des arêtes est  $(E \cap S) \times S$ , c'est-à-dire le graphe obtenu en gardant de  $G$  ses sommets dans  $S$  et toutes les arêtes les reliant.

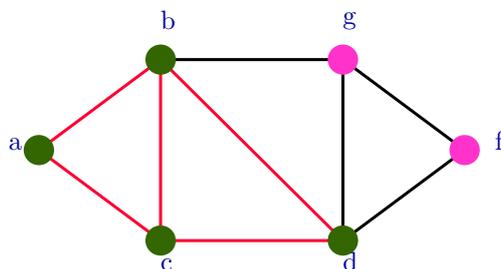


FIGURE 1.13: Le sous-graphe induit par l'ensemble  $\{a, b, c, d\}$ .

### Subdivision du graphe

Un graphe  $G'$  est appelé *subdivision* du graphe  $G$  s'il se déduit de  $G$  par insertions successives d'un certain nombre de sommets sur des arêtes de  $G$ . Plus formellement,  $G'$  est une subdivision de  $G$  s'il s'obtient à partir de  $G$  par des opérations successives de remplacement d'une arête  $(u, v)$  de  $G$  ( $u$  et  $v$  étant des sommets de  $G$ ) par un nouveau sommet  $w$  plus deux arêtes  $(u, w)$  et  $(v, w)$ . (Voir figure 1.14)

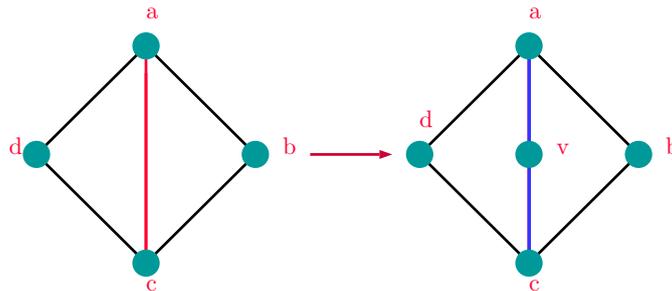


FIGURE 1.14: La subdivision du graphe  $G$ .

### Triangulation

Un graphe  $G$  est *triangulé* si tout cycle de longueur supérieur au égale à 4 ( $\geq 4$ ) admet une corde.

Une *corde* est une arête qui relie deux sommets non adjacents dans un cycle.

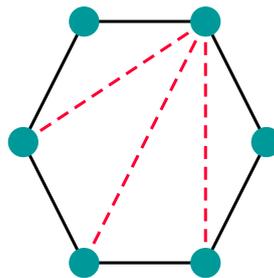


FIGURE 1.15: Le graphe triangulé.

### Stable

Soit  $G = (V, E)$  un graphe, un sous-ensemble de sommets  $S$  de  $V$  est un ensemble *stable* (ou simplement *stable*) si deux sommets de  $S$  ne sont jamais adjacents.

Un stable  $S$  est un *stable maximum* si pour tout stable  $S'$  on a  $|S'| \leq |S|$ .

Le cardinal d'un stable maximum appelé *nombre de stabilité* et est noté  $\alpha(G)$ .

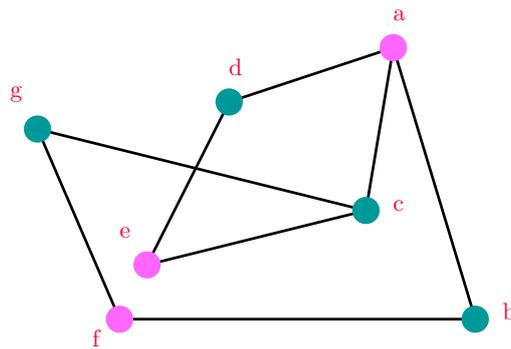


FIGURE 1.16: L'ensemble  $S = \{a, e, f\}$  est un stable.

### Clique

Une *clique* est un sous-graphe complet d'un graphe  $G$ .

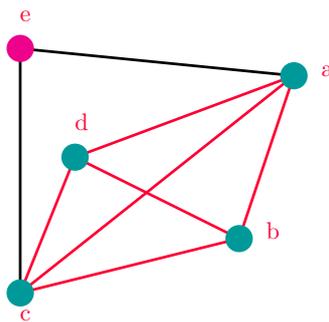


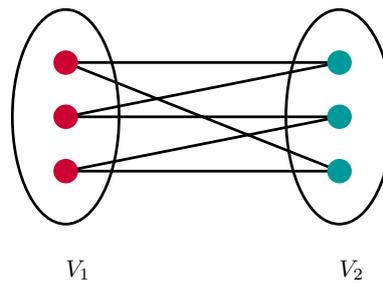
FIGURE 1.17: Le sous-graphe engendré par l'ensemble  $C = \{a, b, c, d\}$  est une clique.

## 1.2.2 Familles particulière des graphes

### Graphe biparti

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit *biparti* si les sommets de ce graphe peuvent être partitionnés en deux ensembles stables  $V_1$  et  $V_2$ .

Ce graphe peut être écrit comme suit :  $G = (V_1, V_2, E)$  (Voir figure 1.18).

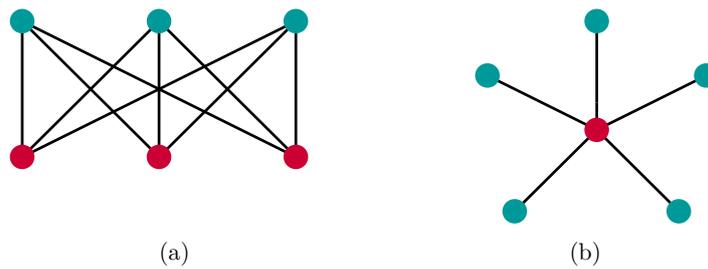
FIGURE 1.18: *Un graphe biparti.*

### Graphe biparti complet

Un graphe  $G$  est dit *biparti complet* si pour tout  $u \in V_1$  et pour tout  $v \in V_2$  nous avons  $(u, v) \in E(G)$ .

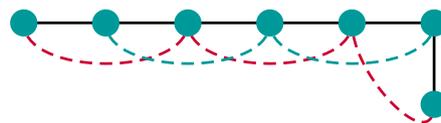
Le graphe biparti complet avec  $|V_1| = m$  et  $|V_2| = n$  est noté  $K_{m,n}$ .

Les graphes de la forme  $K_{1,n}$  sont appelés *étoiles* (Voir figure 1.19).

FIGURE 1.19: (a) un  $K_{3,3}$ , (b) l'étoile  $K_{1,5}$ .

### Graphe puissance

Le *graphe puissance* noté  $G^p$  pour  $p \geq 0$  d'un graphe  $G$ , est le graphe obtenu à partir de  $G$  en ajoutant une arête entre chaque paire de sommets à distance au plus  $p$  dans  $G$ . De cette définition, nous remarquons facilement que  $G^1 = G$  et un  $G^0$  est un stable.

FIGURE 1.20: *Un graphe puissance  $G^2$ .*

### Arbre

Un *arbre*  $T = (V, E)$  est un graphe connexe et sans cycle.

Pour un *arbre*  $T$  de *racine*  $r$  nous avons :

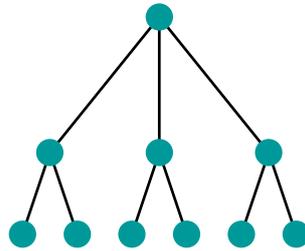


FIGURE 1.21: *Un arbre*  $T$ .

- \* *Le père* d'un sommet  $u$  est l'unique voisin de  $u$  sur le chemin de la racine à  $u$ . La racine  $r$  est le seul sommet sans père.
- \* *Les fils* d'un sommet  $u$  sont les voisins de  $u$  autres que son père.
- \* *Une feuille* est un sommet sans fils. Les feuilles correspondent aux sommets de degré 1.
- \* Les sommets de degré supérieur ou égal à deux sont appelés *sommets internes*.
- \* *La hauteur*  $h$  de l'arbre  $T$  est la longueur du plus long chemin de la racine à une feuille

*Un centre* est un sommet d'excentricité minimum par lequel passe toutes les chaînes élémentaires de longueur maximum.

### Forêt

Une forêt est un graphe sans cycle qui n'est pas nécessairement connexe, composée de l'union d'arbres deux-à-deux disjoints (union d'arbres).

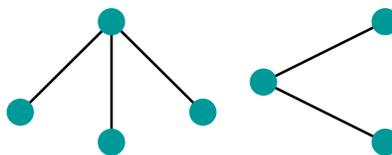
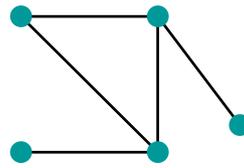


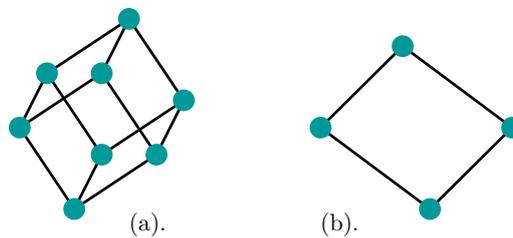
FIGURE 1.22: *Une forêt* .

### Graphes caractéristiques

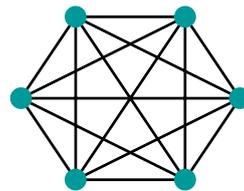
Un *sparse* graphe est un graphe à faible degré moyen c'est-à-dire chaque sommet a un petit degré.

FIGURE 1.23: *Un sparse graphe.*

Un graphe 3-régulier est appelé un graphe *cubique* et si  $\Delta(G) < 3$  alors  $G$  est appelé un graphe *subcubic*.

FIGURE 1.24: (a) *Un graphe cubique, (b) un graphe subcubic .*

Un graphe  $G$  est dit *k-sommet-connexe* s'il possède au moins  $k+1$  sommets et s'il reste encore connexe après en avoir ôté  $k-1$  sommets, le graphe cycle  $C_n$  est 2-sommet-connexe pour tout  $n > 3$ .

FIGURE 1.25: *Le graphe complet  $K_6$  est 5-sommet-connexe .*

# 2

## Coloration de graphes

*”La coloration de graphes est sans doute le sujet le plus populaire dans la théorie des graphes.”*

Dans ce chapitre nous aborderons d’abord l’historique du problème de coloration puis nous entamons la coloration sous ses différents aspects : coloration des sommets, coloration des arêtes et coloration par liste. Nous donnons bien évidemment les différents théorèmes et propriétés relatifs au problème et nous reprenons l’étude de la complexité du problème de coloration des sommets d’un graphe.

## 2.1 Historique

L'origine du problème de coloration remonte au *XIX* ème siècle par l'un des problèmes les plus célèbres et les plus productifs qui est le problème des quatre couleurs. Ce problème est resté pendant plus d'un siècle sans solution.

Les premiers résultats de coloration de graphes concernent presque exclusivement les graphes planaires : il s'agissait alors de colorer des cartes.

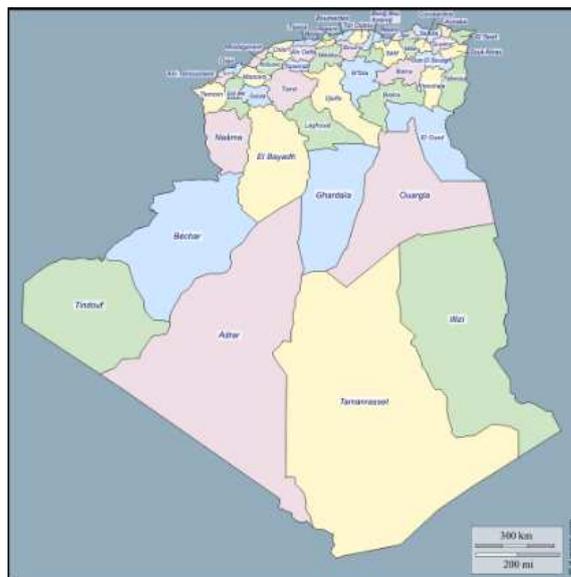


FIGURE 2.1: La carte géographique d'Algérie colorée par 4 couleurs.

En 1852, le jeune mathématicien **F.Guthrie** [2, 47] s'est demandé s'il est toujours possible de colorer une carte géographique à l'aide de quatre couleurs de sorte a ce que des pays voisins aient des couleurs différentes.

La première trace écrite de la conjecture des quatre couleurs apparait dans une lettre que **August. De. Morgan** a envoyé à **William. Rowan. Hamilton**, [2, 47] en 1852.

De nombreuses tentatives de démonstration de la conjecture (incorrectes) furent alors proposées premièrement par **Arthur Cayley**, [2, 9] en 1878 qui été incapable de déterminer la verité ou la fausseté de la conjecture. Une année après de cette proposition, **Arthur Baye Kempe** a publié un document qui prétendait prouver que la conjecture était vraie, les arguments de *kampe* était extrêmement intelligents bien que sa preuve s'est avérée a ne pas être complète, elle contenait la plupart des idées de base qui ont conduit à la bonne preuve un siècle après, on citait que **kampe** était le premier qui a introduit la notion des configurations inévitables et la réductibilité, et il faut citer aussi que c'est **Kempe** qui a donné naissance a la méthode de preuve par configuration réductible.

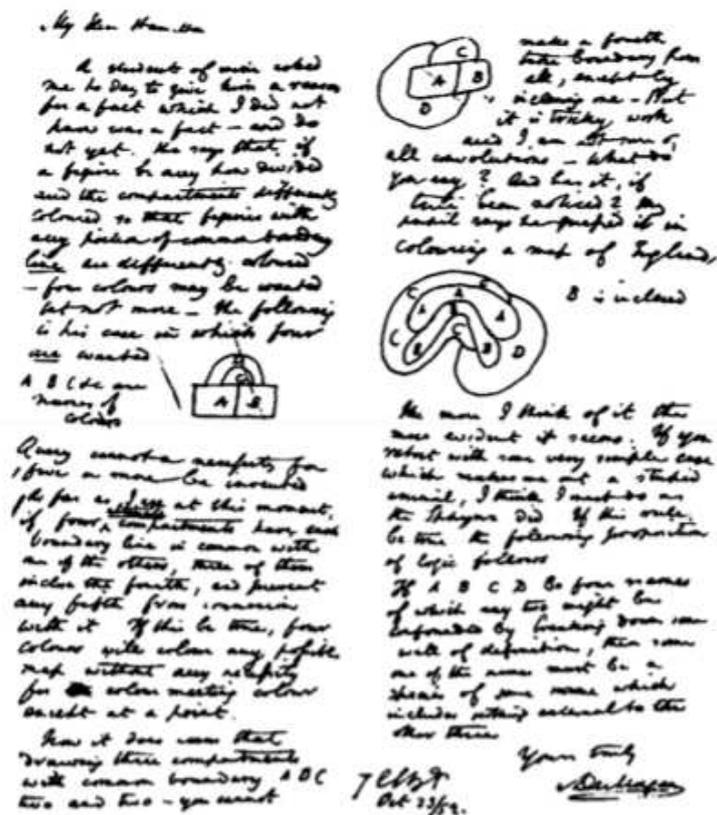


FIGURE 2.2: La lettre de Morgan à Hamilton, 23 Oct 1852.

Nous pouvons décrire les arguments de **Kempe** sur la conjecture des quatre couleurs par une tentative de trouver un ensemble inévitable de configurations réductibles et de prouver qu' un tel ensemble est suffisant pour prouver la conjecture.

L'étude de cette conjecture entraîna de nombreux développements en théorie des graphes, par : **P. G. Tait**, **P. J. Heawood**, **F. Ramsey** et **H. Hadwiger** [9].

En 1880 [9] et en relation avec la conjecture des quatre couleurs, un autre problème de la coloration a été posé qui est le problème de coloration d'arêtes. Le premier article qui traite le problème de la coloration d'arêtes a été écrit par **Tait** [54] en 1889. Dans cet article, Tait a prouvé que le problème des quatre couleurs est équivalent au problème de la coloration des arêtes des graphes planaires cubiques avec trois couleurs. De nombreux résultats de coloration d'arêtes sont aujourd'hui connus. En particulier, **Vizing** [55] a montré en 1964 que tout graphe non orienté de degré au plus  $\Delta$ , admet une  $(\Delta + 1)$ -coloration propre d'arêtes.

En 1890, **P. J. Heawood** [2, 9] a fait remarquer que la démonstration de **A. Kempe** était fautive. Il montra quant à lui le théorème des cinq couleurs en reprenant des idées de **A. Kempe**.

Depuis que **kampe** a introduit l'idée de réductibilité, beaucoup de méthodes de test des configurations réductibles ont été développée par **George David Birkhoff** [2, 12] en 1913 et **Philip Franklin**[2].

La carte à colorer a été remplacée par un graphe, chaque pays étant représenté par un sommet et deux pays voisins étant reliés par une arête.

Avec les travaux de **Heesch**, [2, 3] la théorie de configuration réductible s'est très bien développée et il apparu dans ces travaux une méthode de changement de charge pour trouver des configurations réductibles, donc on peut dire que la méthode de déchargement est aparu dans les travaux de Heesch.

De nombreux travaux ont été publiés lors du 20<sup>eme</sup> siècle pour réduire le nombre de couleurs a quatre, jusqu'à la démonstration finale de deux chercheurs americains, **K. Appel et W. Haken** qui travaillent avec **Koch**, [2, 3] en 1976. Ils ont pu répondre affirmativement à cette conjecture des quatre couleurs, en se basant sur un ordinateur et en modifiant la méthode de déchargement, ils ont pu aboutir a trouver l'ensemble de toutes les configurations réductibles. Plus d'un siècle s'est donc écoulé entre l'énonce et la résolution de ce problème en apparence très simple.

## 2.2 Aperçu sur la planarité

**Définition 2.2.1.** Un graphe  $G = (V, E)$  est dit **planaire** s'il est possible de le représenter sur un plan de sorte que les sommets soient des points distincts, les arêtes des courbes simples (sans point double et pouvant être tracées sans lever le crayon) et que les deux arêtes ne se rencontrent pas en dehors de leurs extrémités.

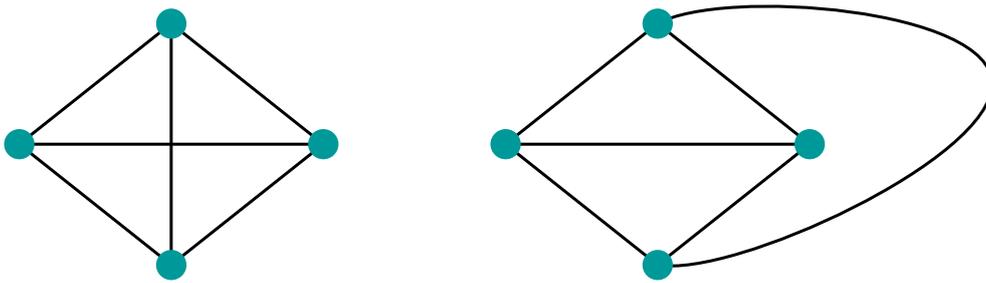


FIGURE 2.3:  $G$  est sa représentation planaire .

**Définition 2.2.2.** Une **face** noté  $f$  d'un graphe est par définition une région du plan limitée par des arêtes et qui ne contient ni sommets ni arêtes dans son intérieur. Deux faces  $f_1$  et  $f_2$  sont dites **adjacentes** s'ils ont au moins une arête commune ; deux faces qui ne se touchent que par un sommet ne sont pas adjacentes.

Le degré d'une face  $f$  noté  $d(f)$  est égal à la longueur du cycle ou de la chaîne fermée qui limite  $f$ . Un graphe planaire contient toujours une face non bornée appelé face extérieure.

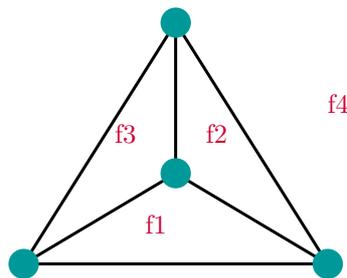


FIGURE 2.4: Les faces d'un graphe planaire  $G$  .

Dans cet exemple le graphe planaire  $G$ , a exactement 4 faces, numérotées de 1 à 4, elle sont toutes bordées par 3 arêtes, c'est-à-dire qu'elles sont toutes de degré 3 ( $d(f) = 3$ ).

Comme nous utiliserons souvent les graphes planaires dans tous ce qui suit. Nous

jugeons utiles de donner les théorèmes de bases les concernant. Nous reprenons aussi quelques preuves afin de familiariser le lecteur aux propriétés des graphes planaires.

**Propriété 2.2.1.** ([12]) Soit  $G = (V, E)$  un graphe planaire de taille  $m$  ( $|E(G)| = m$ ), Alors

$$\sum_{f \in F(G)} d(f) = 2m.$$

*Démonstration.* Cette propriété est presque évidente : elle n'exprime ni plus ni moins que le fait qu'une arête donnée du graphe  $G$  borde exactement 2 faces. Elle attribue un degré 1 pour chaque face.

Lorsqu'on calcule la somme  $\sum_{f \in F(G)} d(f)$ , on aura donc compté exactement deux fois chaque arête du graphe.  $\square$

**Exemple 2.2.1.** En appliquant cette propriété sur le graphe de la figure 2.5 on trouve : le graphe planaire  $G$  a 4 faces tel que  $d(f) = 3$  pour chaque face, soit  $\sum_{f \in F(G)} d(f) = 4 \cdot 3 = 12$ , et comme  $m = 6$  alors nous avons  $6 \cdot 2 = \sum_{f \in F(G)} d(f) = 12$ .

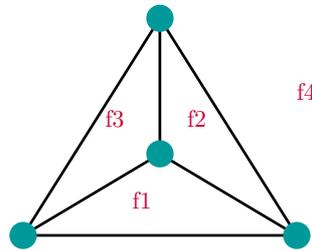


FIGURE 2.5: Un graphe planaire  $G$ .

**Théorème 2.2.1.** (La formule d'Euler [40, 43]) Soit  $G = (V, E)$  un graphe planaire connexe, d'ordre  $n$  et de taille  $m$  et où  $f$  est le nombre de faces de n'importe quelle représentation planaire de  $G$  nous avons :

$$n - m + f = 2.$$

*Démonstration.* Par induction sur le nombre de faces, la proposition est vraie pour tous les graphes planaires ayant une arête.

Supposons  $f = 1$ ,  $G$  est un arbre et par suite  $m = n - 1$  ce qui implique que  $n - m + f = n - (n - 1) + 1 = 2$ .

Supposons que la formule est vrai pour  $f = k$ .

Soit  $e$  une arête d'un cycle de  $G$  adjacent à deux faces  $f_1$  et  $f_2$ .

Si on supprime l'arête  $e$ , le graphe  $G'$  obtenu a exactement  $|V'| = n$ ,  $|E'| = m - 1$ ,  $f' = f - 1$ . Nous avons  $n' - m' + f' = 2$  alors  $n - (m - 1) + f - 1 = 2$  ce qui est équivalent à  $n - m + f = 2$ .

□

Si un graphe planaire n'est pas connexe avec  $k$  composantes connexes alors d'après la formule d'Euler, nous avons le résultat suivant.

**Corollaire 2.2.1.** ([55]) *Si  $G$  est un graphe planaire a  $n$  sommets,  $m$  arêtes, et  $f$  faces, alors  $n - m + f = 1 + k$ .*

La formule d'Euler a de nombreuses applications, en particulier pour les graphes planaires, où toutes les faces ont une longueur d'au moins 3.

**Théorème 2.2.2.** ([47,50]) *Soit  $G$  un graphe planaire simple, avec  $n \geq 3$  et  $m$  arêtes alors*

$$m \leq 3n - 6.$$

*Démonstration.* Comme la taille de chaque graphe d'ordre 3 ne peut pas dépasser 3, l'inégalité est valable pour  $n = 3$ . Donc on peut supposer que  $n \geq 4$ . D'autre part, nous pouvons supposer que les graphes planaires de notre étude sont connexes, car des arêtes peuvent être rajoutée pour produire un graphe connexe. Supposons que  $G$  est un graphe connexe planaire d'ordre  $n \geq 4$  et de taille  $m$ . Par la formule d'Euler,  $n - m + f = 2$ . Soit  $f_1, f_2, \dots, f_f$  les faces de  $G$  et supposons que l'on note le nombre d'arêtes sur la frontière de  $f_i$  ( $i = 1, \dots, f$ ), par  $m_i$  tel que  $m_i \geq 3$ . Etant donné que chaque arête de  $G$  est situé sur la limite d'au maximum deux faces de  $G$ , nous avons alors :

$$3f = \sum_{i=1}^f m_i \leq 2m.$$

Ce qui nous donne d'après la formule d'Euler  $3(2 + m - n) \leq 2m$ , donc  $m \leq 3n - 6$ .

□

Si le graphe planaire est triangulé alors le théorème 2.2.2 devient comme suit :

**Théorème 2.2.3.** ([47]) *Pour chaque graphe planaire triangulé alors,  $m = 3n - 6$ .*

**Corollaire 2.2.2.** ([43]) *Dans un graphe planaire  $G$  simple et sans boucle, il existe un sommet  $v$  tel que  $d_G(v) \leq 5$ .*

*Démonstration.* Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple et planaire, sans pert de généralité nous pouvons supposer  $G$  connexe (traitement successivement des différentes composantes connexes de  $G$ ). Une face d'une représentation planaire de  $G$  est entourée par 3 arêtes au minimum, donc si  $f$  représente le nombre de faces nous avons :  $f \leq \frac{2n}{3}$ , si  $d_G \geq 6 \forall v \in V$  alors  $\sum d_G(v) \geq 6n$  c-à-d  $2m \geq 6n$  donc  $m \geq \frac{6n}{2} = 3n$  d'après la formule d'Euler nous avons  $f = m - n + 2 > n - \frac{n}{3} + 2 > \frac{2n}{3}$ .  $\square$

La contraposé du Théorème 2.2.2, nous donne la formulation du théorème suivant.

**Théorème 2.2.4.** ([55]) *Si  $G$  un graph d'ordre  $n = 5$  et de taille  $m$  tel que  $m > 3n - 6$ , alors  $G$  n'est pas planaire.*

**Théorème 2.2.5.** ([47]) *les graphes  $k_5$ ,  $k_{3,3}$  ne sont pas des graphes planaires.*

le théorème suivant est un théorème fondamental dans la théorie des graphes. Il montre que le graphe qui ne contient pas un sous-graphe  $K_5$  et  $K_{3,3}$ , représente la seule raison de sa planarité.

**Proposition 2.2.1.** ([50]) *Un graphe  $G$  est planaire si et seulement si toute subdivision de  $G$  est planaire.*

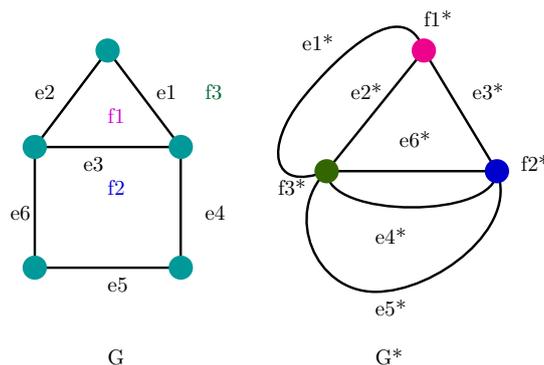
**Théorème 2.2.6.** (**Kuratowski** [40, 50], 1930) *Un graphe est planaire si et seulement si il ne contient pas les sous graphes  $k_5$  ou  $k_{3,3}$ .*

### 2.2.1 Le graphe dual

Etant donné un graphe planaire  $G$ , on peut définir un second graphe  $G^*$  de la façon suivante :

**Définition 2.2.3.** *A chaque face  $f$  de  $G$  correspond un sommet  $f^*$  de  $G^*$ , et a chaque arête  $e$  de  $G$  correspond une arrête  $e^*$  de  $G^*$ . Deux sommets  $f^*$  et  $g^*$  sont reliés par l'arête  $e^*$  dans  $G^*$  si et seulement si leurs faces correspondantes  $f$  et  $g$  sont séparées par l'arrête  $e$  dans  $G$ . Le graphe  $G^*$  est appelé le **dual** de  $G$ .*

Dans le dual  $G^*$  d'un graphe planaire  $G$ , les arêtes correspondantes a celles qui sont dans la frontière d'une face  $f$  de  $G$  sont simplement les arêtes incidentes au sommet correspondant  $f^*$ .

FIGURE 2.6: Le graphe  $G$  est son dual  $G^*$ .

## 2.3 Coloration de graphes

La coloration de graphes est devenu un sujet de grand intérêt, en grande partie en raison de son histoire fascinante à cause de la diversité de ses résultats théoriques, ses problèmes non résolus et de ses nombreuses applications. Les problèmes traitant de coloration de graphes qui ont reçu le plus d'attention impliquent la coloration des sommets d'un graphe.

La coloration de graphes est un outil permettant de caractériser les graphes. Il n'y a pas une unique façon de colorer les graphes mais plusieurs. Nous pouvons déjà vouloir colorer différents éléments d'un graphe (les sommets, les arêtes, une combinaison de ces éléments, des sous-structures, etc) et à ceci peuvent s'ajouter différentes contraintes. La contrainte la plus courante est celle de la propriété.

## 2.4 Coloration de sommets

**Définition 2.4.1.** La coloration de sommets d'un graphe  $G$  est une affectation de couleurs aux sommets du graphe  $G$ , une couleur à chaque sommet, tel que deux sommets adjacents sont colorés différemment et cette coloration est appelée une coloration propre. Puisque cette coloration est propre alors les couleurs utilisées peuvent être des éléments de l'ensemble des nombres entiers positifs  $\{1, \dots, k\}$ .

Une coloration est considérée comme étant une fonction  $C : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  de telle sorte que  $C(u) \neq C(v)$  si  $u$  et  $v$  sont adjacents dans  $G$ .

Si chaque couleur utilisée est l'une des couleurs de  $\{1, \dots, k\}$  donné, nous disons que c'est une  $k$ -coloration.

Une  $k$ -sommets-coloration d'un graphe, ou plus simplement une  $k$ -coloration, est une affectation à chacun de ses sommets d'une couleur parmi  $k$  couleurs, un graphe est  $k$ -colorable s'il admet une  $k$ -coloration propre.

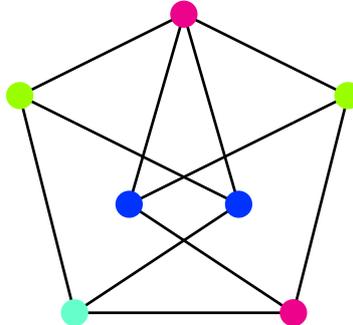


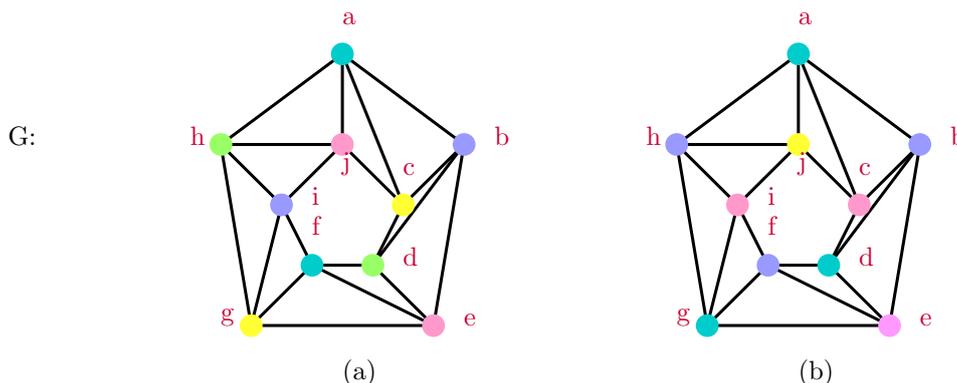
FIGURE 2.7: Coloration de sommets d'un graphe  $G$  .

### 2.4.1 Le nombre chromatique

Un graphe  $G$  est  $k$ -colorable s'il existe une coloration de  $G$  à partir d'un ensemble de  $k$  couleurs. L'entier minimum positif  $k$  pour lequel  $G$  est  $k$ -colorable représente *le nombre chromatique* de  $G$ , et est noté  $\chi(G)$ . Le nombre chromatique d'un graphe  $G$  est donc le nombre minimum de l'ensemble des indépendants dans lesquels  $V(G)$  peut être partitionné. Un graphe  $G$  avec un *nombre chromatique*  $k$  est un graphe dit  *$k$ -chromatique*. Par conséquent, si  $\chi(G) = k$ , alors il existe une  $k$ -coloration de  $G$ . En effet, un graphe  $G$  est  $k$ -colorable si et seulement si  $\chi(G) \leq k$ . Certainement, tout graphe d'ordre  $n$  est  $n$ -colorable. Nécessairement, si une  $k$ -coloration d'un  *$k$ -chromatique* graphe  $G$  est donnée, alors toutes les couleurs  $k$  doivent être utilisées.

Deux colorations différentes d'un graphe  $G$  sont présentées dans la figure 2.8, la coloration de la figure 2.8 (a) est une 5-coloration et celle de la figure 2.7(b) est une 4-coloration. Comme l'ordre de  $G$  est 10, le graphe  $G$  est  $k$ -colorable pour tout entier  $k$  avec  $4 \leq k \leq 10$ . Comme  $G$  est 4-colorable, alors  $\chi(G) \leq 4$ . Il n'existe pas une 3-coloration de  $G$  comme nous allons expliquer. Pour tout état de coloration  $C$  de  $G$ , les sommets  $a$ ,  $b$  et  $c$  doivent être colorés différemment car ils induisent un triangle. Par conséquent, nous pouvons supposer que  $a$  est coloré 1,  $b$  est coloré 2 et  $c$  est coloré 3 comme indiqué à la figure 2.8(b). Si nous essayons de colorer  $G$  avec seulement trois couleurs 1,2 et 3, alors nous sommes obligé de colorer les sommets de  $G$  comme suit :

$$\begin{aligned} c(a) &= 1, c(b) = 2, c(c) = 3, c(d) = 1, c(e) = 3, \\ c(f) &= 2, c(g) = 1, c(h) = 3, c(i) = 2, c(j) = 2. \end{aligned}$$

FIGURE 2.8: Coloration de graphe  $G$ .

Cependant, les sommets  $j$  et  $h$  sont adjacents à la fois de la couleur 2, ce qui est impossible. Ainsi,  $G$  n'admet pas une 3-coloration. Par conséquent,  $\chi(G) \geq 4$ , et par suite  $\chi(G) = 4$ .

En général, pour montrer que certains graphes possèdent un nombre chromatique  $k$ , par exemple, nous avons besoin de montrer qu'il existe une  $k$ -coloration de  $G$  (et donc  $\chi(G) \leq k$ ) et de montrer que chaque coloration de  $G$  nécessite au moins  $k$  couleurs (et donc  $\chi(G) \geq k$ ).

Il n'y a pas de formule générale pour déterminer le nombre chromatique d'un graphe. En effet, le problème de  $k$ -coloration d'un graphe pour un  $k \geq 3$  est un problème  $NP$ -complet. Par conséquent, pour déterminer le nombre chromatique de certains graphes spécifiques il suffit de déterminer les limites supérieures et / ou inférieures pour le nombre chromatique d'un graphe.

### 2.4.2 Bornes et valeurs exactes de $\chi(G)$

Pour tout graphe  $G$  d'ordre  $n$ , nous avons  $1 \leq \chi(G) \leq n$ . Evidemment,  $\chi(K_n) = n$ . En outre, si  $G$  est un graphe d'ordre  $n$  qui est pas complet, alors en attribuant la couleur 1 à deux sommets non adjacents de  $G$  et en gardant  $(n - 2)$  couleurs différentes pour les  $(n - 2)$  sommets restants, ceci produit une  $(n - 1)$ -coloration de  $G$ .

**Corollaire 2.4.1.** *Un graphe  $G$  d'ordre  $n$  a un nombre chromatique  $n$  si et seulement si  $G = K_n$ .*

Puisque les couleurs distinctes sont nécessaires pour colorer deux sommets adjacents d'un graphe, nous avons aussi :

**Corollaire 2.4.2.** *Un graphe  $G$  d'ordre  $n$  a un nombre chromatique 1 si et seulement si  $G = \overline{K_n}$ .*

**Théorème 2.4.1.** (Gaddum, Nordhaus 1960 [7]). *Soit  $\overline{G}$  le graphe complémentaire du graphe simple  $G$ , alors  $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$ .*

Dans un graphe biparti  $G$ , chaque arête doit joindre un sommet de  $V_1$  et un sommet de  $V_2$ , alors :

**Corollaire 2.4.3.** *Un graphe  $G$  a un nombre chromatique égale à 2 si et seulement si  $G$  est biparti.*

A partir de ces observations, nous avons ce qui suit :

**Théorème 2.4.2.** ([55]) *Un graphe  $G$  est 2-colorable si et seulement si  $G$  est biparti.*

Nous avons aussi ce qui suit :

**Corollaire 2.4.4.** *Le nombre chromatique d'un graphe  $G$  est au moins 3 si et seulement si  $G$  a un cycle impair.*

Une assez évidente remarque, mais qui est souvent utile, est que la limite inférieure d'un nombre chromatique pour le  $G$  graphe implique les nombres chromatiques de ses sous-graphes.

**Théorème 2.4.3.** ([54, 55]) *Si  $H$  est un sous-graphe d'un graphe  $G$ , alors  $\chi(H) \leq \chi(G)$ .*

En conséquence du théorème 2.4.3, si un graphe  $G$  contient un  $K_k$  comme un sous-graphe, alors  $\chi(G) \geq k$ .

Notons par  $\omega(G)$  l'ordre de la plus grande clique (sous-graphe complet) d'un graphe  $G$ . Le résultat suivant est alors une conséquence immédiate du théorème 2.4.2.

**Théorème 2.4.4.** ([12, 50, 55]) *Pour tout graphe  $G$ ,  $\chi(G) \geq \omega(G)$ .*

De nombreuses limites (deux limites supérieure et inférieure) ont été développés pour le nombre chromatique d'un graphe. Deux des limites les plus élémentaires pour le nombre chromatique d'un graphe  $G$  impliquent le numéro de l'indépendance  $\alpha(G)$ , qui est la cardinalité maximale d'un ensemble indépendant de sommets de  $G$ .

**Théorème 2.4.5.** ([7, 55]) *Si  $G$  un graphe d'ordre  $n$ , alors,  $\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$ .*

D'après les résultats précédante nous avons  $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n$ .

**Théorème 2.4.6.** ([55]) *Pour tout graphe  $G$  d'ordre  $n$ , alors  $\chi(G) \leq \lfloor \frac{n+\omega(G)}{2} \rfloor$ .*

**Théorème 2.4.7.** ([7, 50]) *Si  $G$  est un graphe simple avec  $n$  sommets et  $m$  arêtes, alors  $\chi(G) \geq \frac{n^2}{n^2-2m}$ .*

**Théorème 2.4.8.** ([50, 54, 55]) Pour tout graphe  $G$ ,  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

Comme nous l'avons vu dans le théorème 2.4.8,  $\Delta(G) + 1$  est une limite supérieure pour le nombre chromatique d'un graphe connexe  $G$ . Rowland Leonard Brooks [40] (1941) a montré que  $\chi(G) = \Delta(G) + 1$  ne se produit que dans des cas très spéciaux.

**Théorème 2.4.9.** (**Brooks** 1941 [7, 50, 55])

Si  $G$  est un graphe connexe, qui est ni un cycle impair ni un graphe complet, alors  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .

Reed [50, 55] a conjecturé que pour tout graphe  $G$ ,  $\chi(G) \leq \frac{\Delta(G) + \omega(G) + 1}{2}$ .

### 2.4.3 Exemples de coloration de graphe

Depuis plusieurs décennies, la coloration de graphes est un domaine très attractif de la théorie des graphes par ses nombreuses applications. La coloration de graphes permet de modéliser de nombreux problèmes réels, depuis le placement de personnes autour d'une table ou de pièces sur un échiquier jusqu'aux différents problèmes d'ordonnancement et de planning de la vie de tous les jours et dans le domaine des réseaux.

#### Problème de planification d'examens

Dans une université l'administration doit organiser les horaires des examens. On suppose qu'il y a 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numérotés de 1 à 7 et il y a des étudiants qui rentrent dans deux preuves différentes tel que le tableau suivant résume les paires de cours qui ont des étudiants en communs.

	1	2	3	4	5	6	7
1		×	×	×			×
2	×		×	×	×		×
3	×	×		×		×	×
4	×	×	×		×	×	
5		×		×		×	×
6			×	×	×		×
7	×	×	×		×	×	

Pour répondre a la question suivante :

Comment organiser ces épreuves de façon qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps et cela sur une durée minimale ?

Nous considérons le graphe  $G$  de la figure 2.9 dont les sommets sont les épreuves qui sont numérotées de 1 à 7, une arête relie deux de ses sommets lorsque les deux cours correspondant possèdent des étudiants en communs.

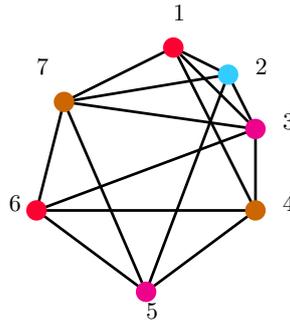


FIGURE 2.9: *Le graphe qui modélise le problème de planification d'examens*

Planifier les examens en un temps minimal consiste à déterminer une  $k$ -coloration  $G$ , avec  $k = \chi(G)$ .

Le graphe  $G$  possède un sous-graphe complet d'ordre 4 (de sommets 1, 2, 3, 7), donc  $\chi(G) > 4$  : Déterminons une partition des sommets de  $G$  en sous-ensembles stables :

$$\begin{aligned} S_1 &= \{ 1,6 \}. \\ S_2 &= \{ 2 \}. \\ S_3 &= \{ 3,5 \}. \\ S_4 &= \{ 4,7 \}. \end{aligned}$$

D'où  $\chi(G) \leq 4$ , et finalement  $\chi(G) = 4$ . Les examens peuvent être répartis en 4 périodes, de la manière suivante :

- \* 1<sup>re</sup> période, épreuves des cours 1 et 6.
- \* 2<sup>eme</sup> période, épreuve du cours 2.
- \* 3<sup>eme</sup> période épreuves des cours 3 et 5.
- \* 4<sup>eme</sup> période épreuves des cours 4 et 7.

### Problème d'allocation de fréquence

Le problème d'allocation de fréquences peut être modélisé par un problème de coloration propre de sommets. Le problème d'allocation de fréquences a pour but d'affecter

une fréquence à chacune des antennes d'un réseau mobile en minimisant les risques d'interférences dans les communications. Un réseau permet aux mobiles de communiquer entre eux sur de larges zones. Chaque antenne d'un réseau mobile a besoin d'une fréquence pour permettre le transport des informations par ondes radio. Dans l'antenne d'un réseau mobile GSM, par exemple, le nombre d'antennes mobiles ne cesse d'augmenter, alors que le nombre de fréquences allouées est très limité. Il est donc nécessaire d'affecter une même fréquence à plusieurs antenne d'un réseau mobiles du réseau. Deux antenne d'un réseau mobile utilisant des fréquences trop proches peuvent subir des dégradations, nommées interférences. Lorsque le niveau d'interférence est trop élevé, la qualité du signal devient si mauvaise que la communication est impossible. La performance du réseau mobile dépend en grande partie de la façon dont les fréquences sont attribuées aux antennes d'un réseau mobile, constituant le problème d'allocation de fréquences.

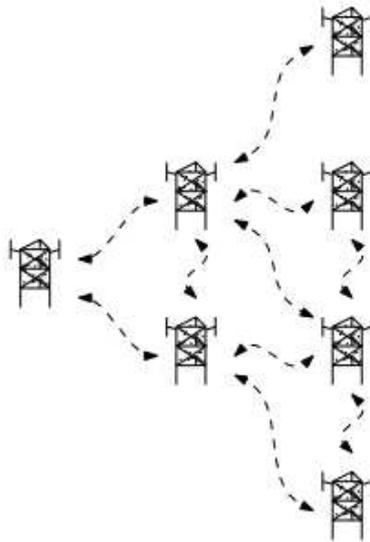


FIGURE 2.10: *Un réseau d'antenne.*

Nous modélisons ainsi le réseau d'antenne par un graphe, appelé *graphe d'interférences*, dont les sommets sont les antennes, et les arêtes relient deux antennes qui interfèrent entre elles. Les fréquences à allouer correspondent à des couleurs avec lesquelles nous colorons les sommets du graphe. La coloration doit être une coloration propre : deux sommets adjacents ne peuvent recevoir la même couleur.

Dans la figure 2.10 nous avons un réseau d'antenne qui représente l'emplacement des antennes ainsi que les interférences entre ses antennes.

Pour réaliser une telle allocation des fréquences nous considérons le graphe  $G$  dont on cherche à trouver le nombre minimum de couleur pour colorer ce graphe et qui représente le nombre minimum de fréquences à allouer.

Dans le tableau suivant nous résumons les interférences entre les antennes d'un réseau mobile telle que le réseau est composée de 7 antennes.

	1	2	3	4	5	6	7
1					×		
2			×		×		
3		×		×	×	×	
4			×			×	
5	×	×	×			×	×
6			×	×	×		×
7					×	×	

TABLE 2.1: Un tableau qui résume les interférences entre les antennes d'un réseau mobile

Allouer des fréquences au réseau d'antennes revient alors à colorer le graphes  $G$  avec un minimum de couleur.

$G$  possède un sous-graphe complet d'ordre 3 (de sommets 3, 5, 6), donc  $\chi(G) > 2$  : Déterminons une partition des sommets de  $G$  en sous-ensembles stables :

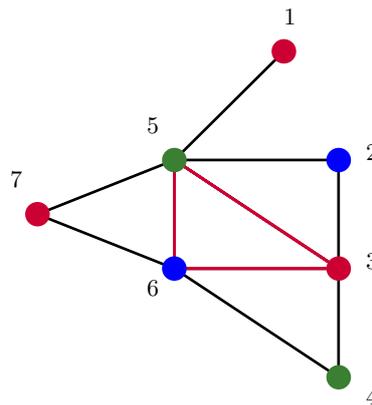


FIGURE 2.11: Le graphe d'interférences.

$$S_1 = \{ 1, 3, 7 \}.$$

$$S_2 = \{ 2, 6 \}.$$

$$S_3 = \{ 4, 5 \}.$$

D'où  $\chi(G) \leq 3$ , et finalement  $\chi(G) = 3$ . Les fréquences peuvent être réparties en 3 antennes, de la manière suivante :

- \* 1<sup>re</sup> fréquence est allouée aux antennes 1, 3 et 7.
- \* 2<sup>eme</sup> fréquence est allouée aux antennes 2 et 6.
- \* 3<sup>eme</sup> fréquence est allouée aux antennes 4 et 5.

## 2.5 Coloration des arêtes

Nous abordons par la suite un autre paramètre de coloration de graphes qui est la coloration des arêtes d'un graphe.

**Définition 2.5.1.** *Une coloration des arêtes d'un graphe  $G$  est une affectation de couleurs aux arêtes de  $G$ , une couleur à chacune, de sorte que deux arêtes adjacentes aient des couleurs différentes, alors cette coloration des arêtes est dite une coloration propre des arêtes.*

**Définition 2.5.2.** *Un graphe  $G$  est dit  $k$ -arête-colorable s'il admet une coloration propre des arêtes avec au plus  $k$  couleurs. Une  $k$ -arête-coloration d'un graphe  $G$  peut être décrite comme étant une fonction  $C : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  tel que  $C(e_1) \neq C(e_2)$  pour chaque deux arêtes adjacentes  $e_1$  et  $e_2$ .*

La première observation importante sur la coloration des arêtes a vu le jour avec le théorème de Tait.

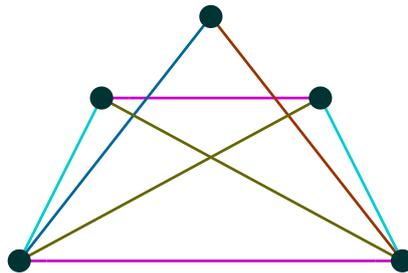


FIGURE 2.12: Coloration des arêtes d'un graphe  $G$  .

**Théorème 2.5.1.** (*Tait* 1880 [50]) *Les faces d'un graphe planaire  $G$ , 3-régulier peuvent être 4-colorable si et seulement si  $G$  peut être 3-arête-colorable.*

### 2.5.1 L'indice chromatique

Etant donnée une  $k$ -arête-coloration d'un graphe  $G$  en utilisant les couleurs  $\{1, 2, \dots, k\}$  et soit  $E_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) l'ensemble des arêtes de  $G$  qui sont colorées par  $i$ . Puisque les ensembles établis  $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$  de  $E(G)$  sont les classes de couleurs des arêtes de  $G$  pour la  $k$ -arête-coloration donnée, donc deux arêtes de  $G$  adjacentes n'ont pas la même couleur dans une coloration propre des arêtes de  $G$ , chaque classe de couleur des arêtes se compose d'un ensemble d'arêtes de  $G$ . En effet, l'indice chromatique de  $G$  noté  $\chi'(G)$  est le nombre minimum d'ensembles des arêtes dans lequel  $E(G)$  peut être partitionné.

Autrement dit, l'indice chromatique d'un graphe  $G$  est le nombre minimum de couleurs pour lequel  $G$  est  $k$ -arête-colorable. Si  $\chi'(G) = k$  alors le graphe  $G$  est dit  $k$ -arête-chromatique.

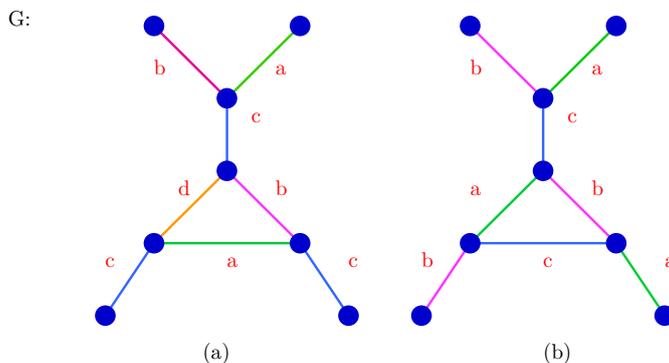


FIGURE 2.13: Coloration des arêtes d'un graphe  $G$ .

Deux colorations différentes d'un graphe  $G$  sont présentées dans la figure 2.13. La coloration de la figure 2.13(a) est une 4-arête-coloration et celle de la figure 2.13(b) est une 3-arête-coloration. Comme le nombre d'arête de  $G$  est 8, le graphe  $G$  est  $k$ -colorable pour tout entier  $k$  avec  $4 \leq k \leq 8$ . Comme  $G$  est 3-arête-colorable, alors  $\chi'(G) \leq 3$ . Il n'existe pas une 2-coloration de  $G$  car il contient un triangle (sous-graphe complet) d'où toutes ses arêtes doivent être de couleurs différentes donc  $\chi'(G) = 3$ .

### 2.5.2 Bornes de l'indice chromatique

**Théorème 2.5.2.** Si  $G$  un graphe de taille  $m \geq 1$  alors  $\chi'(G) \geq \frac{m}{\alpha'(G)}$ .

Dans une coloration des arêtes, les arêtes incidentes à un même sommet doivent évidemment toutes avoir des couleurs différentes. Cette observation donne la borne inférieure qui est

$$\chi'(G) \geq \Delta(G).$$

L'inégalité de la borne inférieure de l'indice chromatique devient une égalité pour les graphes bipartis, ce qui est exprimé par le théorème de Köing.

**Théorème 2.5.3.** (*Köing* [29, 47, 50] 1916) *Si  $G$  est un graphe biparti alors  $\chi'(G) = \Delta(G)$ .*

Si  $G$  n'est pas biparti, il n'est pas toujours vrai que  $\chi'(G) = \Delta(G)$ . Un théorème important dû à Vizing (1964)[12], et indépendamment Gupta (1966) [12], affirme que pour tout graphe simple  $G$ ,  $\chi'(G) = \Delta(G)$  ou  $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ .

**Théorème 2.5.4.** (*Vizing*[11, 29]) *Chaque graphe  $G$  satisfait  $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ .*

Vizing a montré que  $\chi'(G) = \Delta(G)$  pour chaque graphe planaire  $G$  avec  $\Delta(G) \geq 8$ . Il a donné des exemples de graphes planaires avec  $\Delta(G) = 4, 5$  qui ne sont pas  $\Delta$ -arête-colorable, et a conjecturé que il n'existe pas un tel graphe pour  $\Delta(G) = 6, 7$ . Cela reste ouvert pour  $\Delta(G) = 6$ , mais le cas  $\Delta(G) = 7$  a été résolu par Sanders et Zhao [11], comme suit :

**Théorème 2.5.5.** (*Sanders et Zhao* [11]) *Tout graphe planaire  $G$  avec  $\Delta(G) \geq 7$  vérifie  $\chi'(G) = \Delta(G)$ .*

Le théorème de vizing divise les graphes finis en deux classes selon leur indice chromatique. La classe 1 est la classe des graphes qui satisfait  $\chi'(G) = \Delta(G)$  et la classe 2 est celle des graphes qui satisfait  $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ .

**Théorème 2.5.6.** (*Shannon* 1949 [50]) *Si  $G$  un graphe alors  $\chi'(G) \leq \frac{3}{2}\Delta(G)$ .*

## 2.6 Coloration de sommet par liste

**Définition 2.6.1.** *Pour un graphe  $G$ , nous définissons une affectation de liste en tant que fonction  $L : V(G) \rightarrow 2^N$ , qui assigne une liste de couleurs  $L(v)$  à chaque sommet  $v$ .*

*Si  $|L(v)| = k$ , pour tout sommet  $v$ , alors  $L$  est appelé un  $k$ -affectation.*

*Toute coloration  $C_L : V(G) \rightarrow N$  qui assigne à chaque sommet  $v \in V(G)$  une couleur à partir de la liste  $L(v)$  de sorte que la  $C_L(u) \neq C_L(v)$ , pour chaque deux sommets adjacents  $\{u, v\} \in E(G)$ , est appelé une  $L$ -coloration d'un graphe  $G$ .*

### 2.6.1 Le nombre chromatique par liste

Le nombre chromatique par liste d'un graphe  $G$ , noté  $\chi_l(G)$ , est définie comme étant le plus petit entier  $k$  tel que pour toute  $k$ -affectation  $L$  sur le graphe  $G$ , il existe une  $L$ -coloration de  $G$ . Une borne supérieure du nombre de liste chromatique est donnée par  $\chi_l(G) \geq \chi(G)$ .

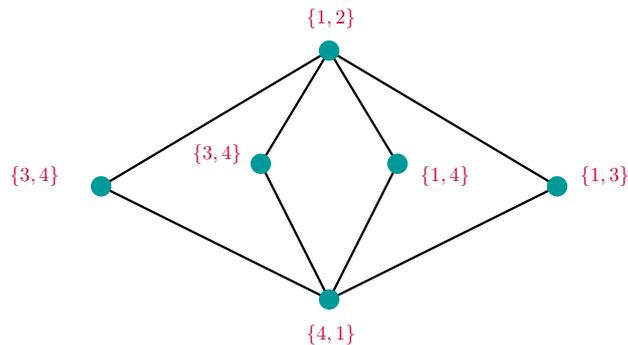


FIGURE 2.14: *Un biparti qui n'est pas 2-liste coloration.*

#### La choisissabilité

Si  $k \geq \chi_l(G)$ , alors nous disons que le graphe  $G$  est  $k$ -choisissable ou ( $k$ -liste-colorable).

**Théorème 2.6.1.** ([34, 55]) *Pour tout graphe  $G$  nous avons  $\chi(G) \leq \chi_l(G) \leq \Delta + 1$ .*

**Théorème 2.6.2.** ([55]) *Chaque cycle pair est 2-choisissabilité.*

**Corollaire 2.6.1.** ([55]) *Pour chaque entier  $n$  paire,  $n \geq 4$  nous avons  $\chi_l(C_n) = 2$ .*

**Théorème 2.6.3.** ([34]) *Si un graphe connexe  $G$  est ni complet ni cycle impair alors  $\chi_l(G) \geq \Delta(G)$ .*

Un des résultats les plus spectaculaires de la théorie des graphes est la preuve du Théorème des quatre Couleurs, qui montre que chaque graphe planaire est 4-colorable. Le nombre chromatique par liste des graphes planaires ne dépasse pas 6, ce qui découle du fait que, dans chaque graphe planaire, il existe un sommet de degré au plus 5.

En 1979, Erdős et al [34] ont présenté des conjectures qui stipulent qu'il existe un graphe planaire  $G$  tel que  $\chi_l(G) = 5$  et qu'il n'y a pas un graphe planaire  $G$  tel que  $\chi_l(G) = 4$ .

**Théorème 2.6.4.** (**Thomassen** 1994 [29, 34]) *Chaque graphe planaire est 5-choisissabilité.*

Les autres résultats les plus importants concernant la coloration par liste des graphes planaires sont les suivants.

**Théorème 2.6.5.** ([34]) *Chaque graphe planaire biparti est 3-choisissabilité.*

**Théorème 2.6.6.** ([34]) *Chaque graphe planaire de maille 5 est 3-choisissabilité.*

**Théorème 2.6.7.** *Si  $G$  est un graphe triangulé alors  $\chi_l(G) = \chi(G)$ .*

Une approche similaire s'applique aux colorations par listes des graphes d'intervalles

**Corollaire 2.6.2.** ([12]) *Tout graphe d'intervalles  $G$  satisfait  $\chi_l(G) = \omega(G)$ .*

## 2.7 Coloration des arêtes par liste

**Définition 2.7.1.** *Pour un graphe  $G$ , nous définissons une affectation de liste aux arêtes en tant que fonction  $L : V(G) \rightarrow 2^N$ , qui assigne une liste de couleurs admissibles  $L(e)$  à chaque arête  $e$ . Si  $|L(e)| = K$  pour chaque arête  $e \in E(G)$ , alors nous appelons  $L$  une  $k$ -arête-affectation.*

*Toute coloration  $C_L : E(G) \rightarrow N$  qui assigne à chaque arête  $e \in E(G)$  d'une couleur à partir de la liste  $L(v)$  de sorte que la  $C_L(e_1) \neq C_L(e_2)$ , pour chaque deux arêtes adjacentes  $\{e_1, e_2\} \in E(G)$ , est appelé une  $L$ -arête-coloration d'un graphe  $G$ .*

### 2.7.1 L'indice chromatique par liste

**Définition 2.7.2.** *L'indice chromatique par liste d'un graphe  $G$ , noté  $\chi'_l(G)$ , est définie comme étant le plus petit entier  $k$  tel que pour tout  $k$ -Arête-affectation  $L$  sur le graphe  $G$  il y a une  $L$ -arête-coloration de  $G$ , une borne supérieur de l'indice chromatique liste est donnée par  $\chi'_l(G) \geq \chi'(G)$ .*

Si  $k \geq \chi'_l(G)$ , alors nous disons que le graphe  $G$  est  $k$ -arête-choisissable.

Pour la coloration des arêtes Vizing prouvé que  $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ , il a conjecturé que ces bornes sont également valables pour l'indice chromatique par liste.

**Conjecture 2.7.1.** ([34]) *Tout graphe  $G$  satisfait  $\Delta(G) \leq \chi'_l(G) \leq \Delta(G) + 1$ .*

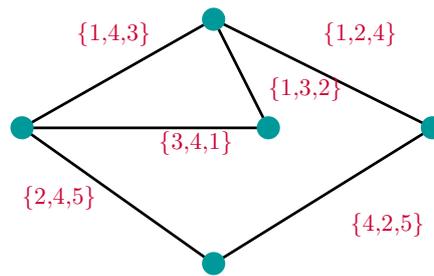


FIGURE 2.15: Coloration des arêtes par liste.

Pour l'indice de liste chromatique  $\chi'_l(G)$ , où les listes de couleurs sont attribuées sur les arêtes de  $G$  et chaque arête doit être colorée avec une couleur de sa liste, il est attendu que ce nombre est toujours égal au l'indice chromatique de  $G$ .

La conjecture suivante est apparue dans la presse dans un article de Bollobas et Harris [49] 1985, mais il a été pensé plus tôt par Vizing, Gupta, et par Albertson et Collins[50].

**Conjecture 2.7.2.** ([11,34]) *Tout graphe  $G$  satisfait  $\chi'_l(G) = \chi(G)$ .*

Cette conjecture est encore largement ouverte. Certains résultats partiels ont toutefois été obtenus dans des cas spéciaux de graphes planaires : par exemple, la conjecture est vraie pour les graphes planaires de degré maximum à moins 12, et qui est représenté par le théorème suivant :

**Théorème 2.7.1.** (Borodin et al[11]) *Tout graphe  $G$  planaire avec  $\Delta(G) = 12$  vérifie  $\chi'_l(G) = \Delta(G)$ .*

Concernant la classe des graphes bipartis la conjecture est vraie.

**Théorème 2.7.2.** (Galvin[29]) *Tout graphe biparti  $G$  satisfait  $\chi'_l(G) = \chi(G)$ .*

Toujours pour les graphes biparti, nous avons une valeur exacte de l'indice chromatique par liste qui est exprimé par le corollaire suivant :

**Corollaire 2.7.1.** *Tout graphe biparti  $G$  satisfait  $\chi'_l(G) = \Delta(G)$ .*

**Théorème 2.7.3.** ([13]) *Chaque graphe planaire avec une d'au moins 5 est un cycliquement 4-choisissable.*

## 2.8 Les graphes parfaits

Les graphes parfaits ont été introduits par Claude Berge au début des années 1960 [7], la notion de graphe parfait a depuis été d'une grande importance en théorie des graphes. De nombreuses classes sont en effet incluses dans la classe des graphes parfaits. Elle permet de généraliser un certain nombre de résultats connus sur ces classes particulières. Les graphes parfaits ont une importance majeure du fait des nombreuses applications dans le monde réel qu'on leur trouve. De plus, les graphes parfaits ont été étudiés intensivement dans le but de prouver les deux fameuses conjectures (faible et forte) des graphes parfaits.

**Définition 2.8.1.** *Un graphe  $G$  est parfait si et seulement si pour chacun de ses sous-graphes induits  $H$  nous avons  $\omega(H) = \chi(H)$ . Ainsi, chaque sous-graphe induit d'un graphe parfait est aussi parfait.*

Cette définition a été introduit par Claude Berge [7]. Ce concept a conduit à deux conjectures, les deux qui ont attiré beaucoup d'attention. Avant de décrire ceux-ci, nous considérons plusieurs classes de graphes parfaits.

Pour un graph  $G$  on a 4 paramètres optimales intéressant.

Un nombre indépendant  $\alpha(G)$  est la taille d'un stable maximale,  $\omega(G)$  est une clique max,  $\chi(G)$  est le nombre chromatic et  $\theta(G)$  est une clique couvrante minimale.

Berge a définit deux types de perfection :

- \*  $G$  est  $\gamma$ -perfect si  $\chi(G[A]) = \omega(G[A])$  pour tout  $A \subseteq V(G)$ .
- \*  $G$  est  $\alpha$ -perfect si  $\theta(G[A]) = \alpha(G[A])$  pour tout  $A \subseteq V(G)$ .

Si  $G = K_n$ , alors  $\chi(G) = \omega(G) = n$ . En outre, chaque sous-graphe induit  $H$  de  $K_n$  est également un graphe complet et ainsi  $\chi(H) = \omega(H)$ . Donc, chaque graphe complet est parfait. D'autre part, si  $G = \overline{K_n}$  et  $H$  un sous-graphe induit de  $G$ ,  $\chi(H) = \omega(H) = 1$ . Ainsi, chaque graphe vide est également parfait. Les graphes bipartis constituent une classe plus intéressante des graphes parfaits.

**Théorème 2.8.1.** ([55]) *Chaque graphe biparti est parfait.*

**Théorème 2.8.2.** ([55]) *Chaque graphe dont le complément est biparti est parfait.*

**Définition 2.8.2.** *Soit  $S$  une collection d'intervalles finis de nombres réels fermé  $S = \{I_1, I_2 \dots I_n\}$ . Le graphe d'intervalle  $G$  représentant  $S$  a un ensemble de sommets  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  où  $v_i v_j \in E(G)$  si  $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ . Si  $G$  est un graphe d'intervalle, donc tous les sous-graphes induits de  $G$  sont également des graphes d'intervalles.*

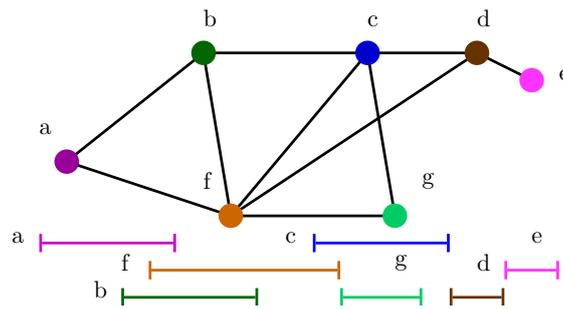


FIGURE 2.16: Un graphe d'intervalle de sept intervalles.

**Théorème 2.8.3.** ([7, 55]) *Chaque graphe d'intervalle est un graphe parfait.*

**Théorème 2.8.4.** ([7, 55]) *Chaque graphe triangulé est parfait.*

Les graphes parfaits, outre leur utilité indéniable dans le monde de l'algorithmique, sont connus pour les théorèmes suivants, qui furent pendant longtemps des conjectures. Chacun d'eux est aujourd'hui résolu.

Les graphes qui ont prouvé à l'origine de Berge sont appelés  $\gamma$ -parfaits et de nos jours savent aussi parfaits.

**Définition 2.8.3.** *Un trou est un cycle impair sans corde avec au moins 5 sommets, Un anti trou est le complémentaire d'un trou, un graphe est dit de Berge s'il ne contient aucun trou impair et aucun anti trou impair.*

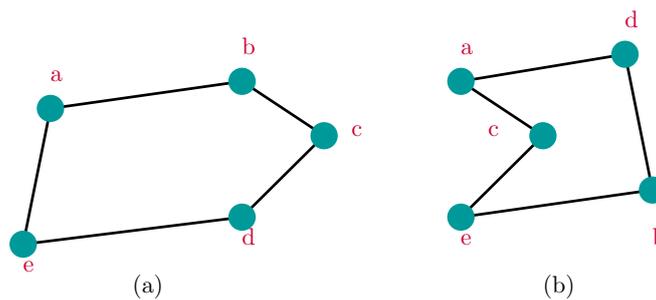


FIGURE 2.17: (a) Un trou, (b) anti trou.

En 1960 [7, 8, 55] Claude Berge a conjecturé la conjecture suivante :

**Conjecture 2.8.1.** (*La conjecture faible des graphes parfaits* [7, 8, 55] 1960) *Un graphe  $G$  est  $\alpha$ -parfait si et seulement si son complément  $\overline{G}$  est  $\gamma$ -parfait.*

Une formulation analytique de cette conjecture est due à Fulkerson [7, 50]. En 1970, Olaru et Sachs [7] ont présenté une approche intéressante et finalement, et à l'âge de 22 ans, László Lovász [50, 55] a reçu son doctorat de l'Académie hongroise des sciences. Son conseiller était Tibor Gallai. Deux ans plus tard (1972), Lovász [35, 37] a vérifié la conjecture faible des graphes parfaits, qu'il a été transformée à un théorème.

**Théorème 2.8.5.** (*Théorème des graphes parfaits, Lovász [35, 50]*) *Un graphe  $G$  est parfait si et seulement si son complémentaire  $\overline{G}$  est parfait.*

Lovász [36], a obtenu une autre caractérisation des graphes parfaits.

**Théorème 2.8.6.** (*Lovász [36]*) *Un graphe  $G$  est parfait si et seulement si  $|V(H)| \leq \alpha(H)\omega(H)$  pour chaque sous-graphe de  $G$  induit par  $H$ .*

Si  $G$  est un cycle impair de longueur 5 ou plus, ou  $G$  est le complémentaire d'un tel cycle impair, alors  $\chi(G) \neq \omega(G)$ . En 1961, Claude Berge [7, 21, 50, 55] a conjecturé que ce fait est essentiel pour déterminer si un graphe est parfait.

**La conjecture forte des graphes parfaits :** un graphe  $G$  est parfait si et seulement si ni  $G$ , ni  $\overline{G}$  contient un cycle impair induit de longueur 5 ou plus.

Après un 28 mois sur cette conjecture, sa vérité a été établie en 2002 par Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour et Robin Thomas [22, 55].

**Théorème 2.8.7.** (*Le théorème fort des graphes parfaits [22, 35, 50, 55]*) *Un graphe  $G$  est parfait si et seulement si ni  $G$ , ni  $\overline{G}$  contient un cycle impair induit de longueur 5 ou plus*

**Théorème 2.8.8.** (*Chudnovsky, Robertson, Seymour and Thomas, 2002 [22]*) *Les graphes de Berge sont parfaits.*

### 2.8.1 Coloration des graphes parfaits

Existe-t-il un algorithme en temps polynomial pour colorier tout graphe parfait ?

De nombreux problèmes appliqués peuvent être modélisés par le problème de la coloration des sommets d'un graphe, qui est un problème NP-complet en général mais polynomial sur la classe des graphes parfaits introduite par Berge [7].

En 1984 Grötschel, Lovász et Schrijver [51] ont montré qu'il était possible de colorier optimalement les sommets d'un graphe parfait en temps polynomial. Le principe de

leur algorithme est de considérer un graphe parfait  $G = (V, E)$ , et de trouver un plus grand ensemble stable dans  $G$  et une partition de  $V$  en plus petits nombres de clique. Cet algorithme est tout à fait différent des algorithmes typiques utilisés dans l'optimisation combinatoire plutôt que d'avoir une combinatoire naturelle il exploite une variation sur la méthode ellipsoïde.

Réellement cette méthode n'est pas efficace d'un point de vue pratique et il est toujours intéressant de trouver un algorithme "purement" combinatoire permettant de colorier les graphes parfaits en temps polynomial.

Il existe plusieurs algorithmes simples et rapides permettant de colorier des sous-classes de graphes parfaits. Ces algorithmes utilisent en particulier des techniques d'optimisation pour colorer les graphes parfaits qui fonctionnent pour certaines sous-classes. La notion de contraction de paire d'amis, et éliminations successives de sommets, aussi des algorithmes de parcours comme LexBFS, LexColor pour prouver des résultats structuraux sur les graphes considérés.

## 2.9 Coloration des graphes planaires

Pour plus d'un siècle, le problème le plus célèbre non résolu jusqu'au 1976 en théorie des graphes, était le problème de coloration des cartes appelé "le problème des quatre couleurs". Ce problème, qui traite de déterminer si une conjecture appelée quatre couleurs était vraie ou fausse, a eu un impact majeur sur le développement de la théorie des graphes. En fait, ils se sont posé la question suivante :

*Les pays de chaque carte peuvent-ils être colorés avec quatre couleurs au moins, de telle sorte que chaque deux pays ayant une frontière commune soient colorés différemment ?*

Les graphes planaires ont d'abord été étudiés en tant que dual d'une carte, parce que chaque graphe planaire simple à  $n$ -sommets a au moins  $3n - 6$  arêtes, un graphe planaire possède un sommet de degré au plus 5. Cela donne une preuve inductive que les graphes planaires sont 6-colorable.

En 1852, Guthrie [2] a conjecturé que n'importe quelle carte peut être coloriée avec au plus quatre couleurs. Ce résultat est prouvé en 1876 par Kempe [2, 55]. En 1878 Cayley [2, 50] a annoncé le problème au société mathématique de London, et Kempe a publié une «solution». Onze ans plus tard Heawood [9] a découvert une erreur dans la solution proposée par Kempe du problème des quatre couleurs et ni lui ni Kempe ont été en mesure de corriger l'erreur, Heawood a pu utiliser la technique de Kempe pour prouver que

chaque carte peut être colorée avec cinq couleurs ou moins. Cela a conduit au théorème suivant :

**Théorème 2.9.1. *Five Color Theorem, Heawood, 1890, [2, 50]*** *Chaque graphe planaire est 5 colorable.*

En 1890, Heawood [2, 50] a publié une réfutation. Néanmoins, l'idée de Kempe de chemins utilisée par Heawood pour prouver le théorème de cinq couleurs en alternance, conduit finalement à une preuve par Appel et Haken [2] 1976 (travail avec Koch). Un chemin sur lequel les couleurs alternent entre deux couleurs spécifiées est une chaîne de Kempe.

Pour prouver le théorème des cinq couleurs, ils ont supposé qu'un contre exemple minimal contient un sommet de degré au plus 5 et qu'un graphe planaire avec un tel sommet ne peut pas être un contre exemple minimal. Ceci suggère une approche du problème des quatre couleurs, nous devons seulement considérer une triangulation, puisque chaque graphe planaire simple contient une triangulation, ceci suggère à trouver des configurations réductibles, et Kempe [2] le premier qui a utilisé l'ensemble des configurations pour montrer le théorème des quatre couleurs, à cause de la difficulté de ses configurations interdites Heesch [2, 50] a contribué à l'idée de chercher les configurations réductibles et a développé une méthode pour générer l'ensemble des configurations réductibles et inévitables.

En 1976 Appel et Haken en collaboration avec Koch [2], ont amélioré la démonstration de la conjecture du problème des quatre couleurs qui a été démontré par ordinateur.

**Théorème 2.9.2. *Théorème des quatre couleurs Appel, Haken, Koch, 1976, [2]*** *Chaque graphe planaire est 4-colorable.*

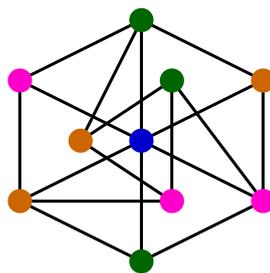


FIGURE 2.18: *Un graphe planaire coloré avec 4-couleurs.*

### 2.9.1 Coloration des faces

Afin de traduire le Problème des quatre Couleurs dans le langage de la théorie des graphes, nous avons besoin de la notion de *coloration des faces* ou face-coloration d'un

graphe planaire. Une *k-face-coloration* d'un graphe planaire est une affectation d'une couleur parmi  $k$  à chacune de ses faces. La coloration est propre si, quelles que soient deux faces adjacentes, elles ne reçoivent pas la même couleur. Un graphe planaire est *k-face-colorable* s'il admet une *k-face coloration* propre. Comme toute carte peut être vue comme un graphe planaire sans arête séparatrice, le théorème des quatre Couleurs est équivalente à l'énoncé suivant :

**Conjecture 2.9.1.** (*Conjecture des quatre Couleurs (Version Face)*[12]) *Tout graphe planaire sans arête séparatrice est 4-face-colorable.*

Plus d'un siècle s'est écoulé avant que la conjecture des quatre Couleurs soit enfin prouvée par Appel et Haken, [2] en 1976.

**Théorème 2.9.3.** (*Théorème des quatre Couleurs*[12]) *Tout graphe planaire sans arête séparatrice est 4-face-colorable.*

## 2.10 Notions de complexité

Un problème est défini par la donnée d'un objet mathématique représenté par un nombre fini de symboles (l'instance ou l'entrée) et d'une question dont la réponse dépend uniquement de l'instance. Si la réponse à la question ne peut être que "oui" ou "non", on parle de problème de décision.

Un algorithme de résolution d'un problème  $P$  donné est une procédure décomposable en opérations élémentaires transformant une chaîne de caractère représentant les données de n'importe quel exemple du problème  $P$  en une chaîne de caractères représentant les résultats de  $P$ .

La taille d'une instance est le nombre de symboles nécessaires à sa représentation, pour chaque algorithme, et pour chaque entier  $n$ , nous chercherons à évaluer la complexité de l'algorithme, c'est-à-dire le nombre d'opérations élémentaires nécessaires à l'exécution de l'algorithme pour une instance de taille  $n$  dans le pire des cas.

Un algorithme est dit *polynomial* si le nombre d'opération élémentaires nécessaires pour résoudre un exemple de taille  $n$  est une fonction polynomiale en  $n$ . Un algorithme est considéré comme *efficace* si et seulement si il est polynomial.

### 2.10.1 Les problèmes de la classe $P$

**Définition 2.10.1.** *Un problème est dit appartenir à la classe  $P$  s'il existe un algorithme polynomiale pour le résoudre. On dit que les problèmes de la classe  $P$  sont faciles.*

### 2.10.2 Les problèmes de la classe NP

**Définition 2.10.2.** *C'est l'abréviation pour "non deterministic polynomial time". Cette classe renferme tous les problèmes de décision dont on peut associer à chacun d'eux un ensemble de solutions potentielles (de cardinal au pire exponentiel) tel qu'on puisse vérifier en un temps polynomial si une solution potentielle satisfait la question posée. Le terme non déterministe désigne un pouvoir qu'on incorpore à un algorithme pour qu'il puisse deviner la bonne solution.*

**Théorème 2.10.1 (44).** *Si le problème  $(P)$  se réduit en temps polynomial à  $(P')$  et si  $(P')$  peut être résolu par un algorithme polynomial il en est de même de  $(P)$ .*

**Définition 2.10.3.** *Un problème appartient à la classe NP s'il peut être résolu en temps polynomial par un algorithme non déterministe.*

### 2.10.3 Les problèmes de la classe NP-Complet

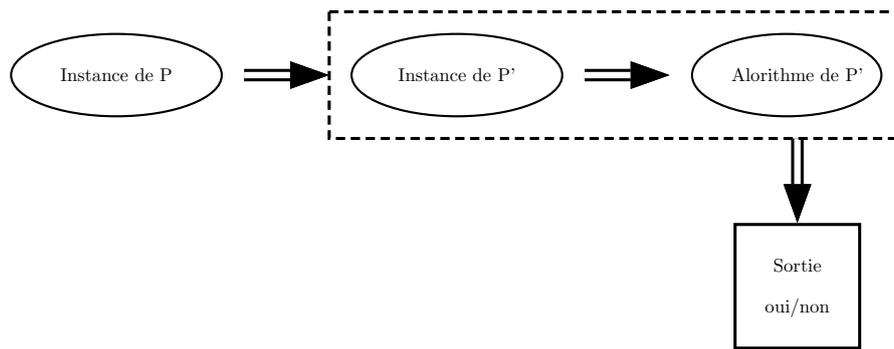
**Définition 2.10.4.** *Un **problème de reconnaissance** est un problème dont les résultats ne peuvent prendre que l'une des valeurs **vrai** ou **faux**.*

**Définition 2.10.5.** *Un problème de reconnaissance est dit **NP-Complet** si tout problème de la classe NP peut se réduire polynomialement à lui.*

**Définition 2.10.6.** *Un problème  $P$  quelconque est dit **NP-dur** s'il existe une réduction polynomiale du problème de satisfaisabilité à  $P$ . Les problèmes NP-durs sont des problèmes au moins aussi difficile que les problèmes NP-complets.*

### 2.10.4 La réduction polynomiale

**Définition 2.10.7.** *Un problème de décision (reconnaissance)  $P$  se réduit à un problème de décision  $P'$  s'il existe un algorithme polynomial qui transforme toute entrée  $U$  de  $P$  (instance  $U$  de  $P$ ) en une entrée  $V = R(U)$  de  $P'$  telle que  $V \in \text{oui dans } (P) \Leftrightarrow V \in \text{oui dans } (P')$ .*

FIGURE 2.19: *La réduction polynomiale.*

## 2.11 L'étude de la NP-Complétude du problème de coloration

Le problème de coloration des sommets d'un graphe consiste à donner à chaque sommet d'un graphe une couleur de manière à ce que deux sommets adjacents ne soient jamais coloriés avec la même couleur, le but étant de minimiser le nombre de couleurs.

Le problème de la coloration a été très largement étudié dans le cadre de la complexité tout d'abord, puis de l'approximation polynomiale, il est donc difficile de déterminer le nombre chromatique d'un graphe.

**Théorème 2.11.1.** ([46]) *Le problème de la  $k$ -Coloration des sommets d'un graphe  $G$  est NP-complet, quel que soit  $k \geq 3$ .*

En revanche, on peut facilement déterminer si un graphe est 2-coloriable (ce qui est équivalent à savoir s'il est biparti).

### Le problème d'optimisation

Etant donné un graphe  $G = (V, E)$ , tel que  $|V| = n$ ,  $|E| = m$ , il s'agit de déterminer un sous ensemble de sommet  $V'$  ( $V' \subseteq V$ ) de façon que deux sommets adjacents soient de couleurs différentes, avec un nombre minimum de couleurs  $k$ .

### Le problème de décision

Etant donné un graphe  $G = (V, E)$  d'ordre  $n$  et un entier  $k \leq n$  existe-t-il une coloration des sommets de cardinal au plus  $k$  " $\chi(G) \leq k$ " est le problème de reconnaissance associée à une coloration minimum des sommets d'un graphe.

## L'algorithme non déterministe (ND)

---

**Algorithm 1** L'algorithme ND de coloration.
 

---

- 1: **Entré** : un graphe  $G = (V, E)$  d'ordre  $n$  et un entier  $k$ .
  - 2: **Sortie** : une coloration de  $G$  avec au plus  $k$  couleurs.
  - 3: **Début** :
  - 4:  $V' := \phi$ ;  $\leftarrow 1$
  - 5: **Pour**  $i = 1$  à  $n$  faire  $\leftarrow 2n$ 
    - $v_i :=$  choix avec couleur  $(V \setminus V')$ ;
    - $V' := V' \cup \{v_i\}$ ;
  - 6: **Fait**
    - Si** tout sommets adjacents à  $v_i$  a une couleur différente alors  $\leftarrow 1$
    - Réponse** := vrai;  $\leftarrow C_2^n$
    - Sinon**
    - Réponse** := faux;
    - Fin si**
  - 7: **Fin pour**
- 

## Calcul de la complexité

La complexité de l'algorithme  $ND$  est :  $1 + 2n + 1 + C_2^n = 2 + 2n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} + 3n + 2 \simeq O(n^2)$ .

L'algorithme non déterministe pour le problème de coloration est de complexité polynomial  $O(n^2)$ , donc le problème de coloration appartient à la classe  $NP$ .

### 2.11.1 La réduction polynomiale du problème de coloration au problème de 3-Sat

On sait que le problème de coloration appartient à la classe NP pour montrer qu'il est NP-Complet, il suffit de mettre en évidence une réduction polynomiale du problème de 3-Sat au problème de coloration.

Nous allons réduire 3-SAT à la  $k$ -coloration. Nous mettrons en évidence une transformation polynomiale du problème de 3-Satisfaisabilité au problème du nombre chromatique.

**Entrée** : Un ensemble de variable  $V = \{v_1 \dots v_n\}$  et un ensemble de clauses  $C = \{C_1 \dots C_m\}$  de taille  $m$ . Une clause est un ensemble de trois éléments où chaque clause  $C_i$  contient trois occurrences distinctes, soit la variable  $v_i$  ou son complémentaire  $\bar{v}_i$ , par exemple un

clause  $C_1 = \{v_1, v'_2, v_4\}$ .

**Sortie :** Existe-t-il une affectation satisfaisante de valeurs de vérité *vraie* ou *fausse* pour les variables de l'ensemble  $V$ , de telle sorte qu'au moins un sommet de chaque clause de  $C$  est affecté à la valeur vraie ?

Nous construisons une affectation  $C(G)$  de l'ensemble de couleurs relative au problème de 3-Sat, donc nous associons un graphe  $G = (V, A)$  de la manière suivante :

$$V = \{v_1 \dots v_n\} \cup \{v'_1 \dots v'_n\} \cup \{y_1 \dots y_n\} \cup \{C_1 \dots C_m\}.$$

$$A = \{(v_k, v'_k) | 1 \leq k \leq n\} \cup \{(y_p, y_q) | p \neq q\} \cup \{(y_p, v_q) | p \neq q\} \cup \{(y_p, v'_q) | p \neq q\} \cup \{(x_k, C_i) | v_k \in C_i\} \cup \{(x'_k, C_i) | x'_k \in C_i\}.$$

Chaque sommets  $v_i$  est relié avec son complémentaire  $v'_i$  et nous définissons un autre sommet  $y_j$  qui est relié a  $v_i$  et  $v'_i$ , de sorte que  $i \neq j$ , et pour chaque clause  $C_i = \{v_i, v_j, v_k\}$  nous créons un sommet  $C_i$  qui est relié aux sommet  $v_i$  ou  $v'_i$ .

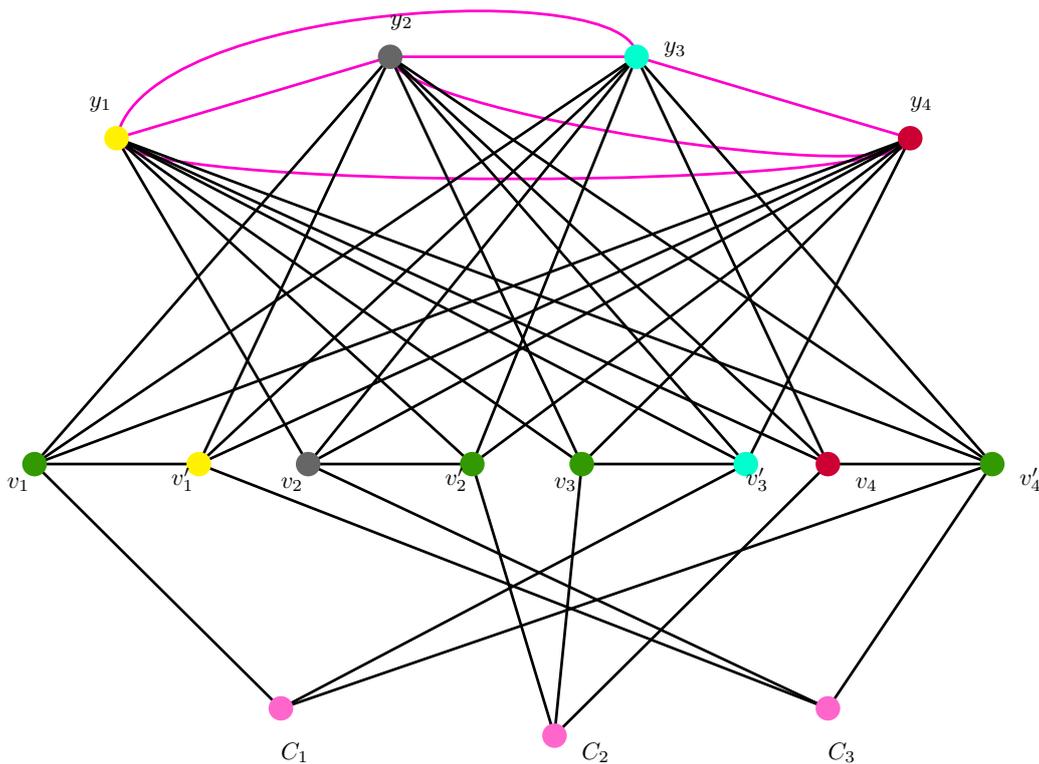


FIGURE 2.20: Le graphe  $G(C)$  associe à une affectation  $C$ .

Nous devons montrer que  $C$  a une valeur de vérité satisfaisante si et seulement si le graphe  $G(C)$  à un ensemble de stables de cardinalité  $\leq k$ .  $C$  à une valeur de vérité *vraie*

de 3-Sat si et seulement si  $G(C)$  est  $k$ -colorable.

Nous supposons que  $C$  à au moins une valeur de vérité vraie, par exemple dans la figure (2.20), nous avons l'affectation suivant  $v_1 =$  vraie,  $v_2 =$  fausse,  $v_3 =$  vraie,  $v_4 =$  fausse cette affectation permet d'avoir un ensemble de sommets  $V$  de  $G(C)$  comme suit : Si  $v_i =$  vraie donc mettre le sommet  $v_i$  dans l'ensemble de stable  $S_1$  sinon si  $v_i =$  Fausse donc mettre le sommet  $v_i$  dans un autre stable  $S_j$  tel que  $j = \{2, n + 1\}$ .

L'ensemble  $S$  est un ensemble des stables car :

Le sous graphe engendré par  $\{y_i, i = \overline{1, n}\}$  forme une clique donc nous avons  $n$  stables,  $S_i, i = \overline{1, n}$ . Nous mettons les variables affectées de la valeur de vérité vraie dans le même stable  $S_{n+1}$ . Leurs voisins affectés de la valeur fausses seront affectés dans  $\{S_i, i = \overline{1, n}\}$ .

Comme chaque clause à un degré 3, donc parmi les  $(n + 1)$  couleurs, il en reste  $n + 1 - 3 = (n - 2)$  couleurs pour les colorer c-à-d nous affectons les clause  $C_j, j = \overline{1, n}$  aux stable  $S_i, i = \overline{1, n}$  donc le nombre de stables  $= (n + 1)$ .

Contrairement, supposant que  $G(C)$  a un ensemble des stables différents  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$ . Nous devons montrer que  $C$  a une affectation de valeur de vérité vraie. Nous remarquons que chaque sommet  $y_j$  doit être dans un stable  $S_j$  car ils ont tous des couleurs différentes puisqu'ils sont adjacents deux à deux.

Nous colorons l'ensemble  $y_j$  avec  $n$  couleurs étant donné qu'il forme une clique.

Du fait que  $y_j$  n'est pas adjacent à  $\{x_j, x'_j\}$ . Donc nous attribuons la couleur de  $y_j$ , soit  $j$  à l'un des sommets  $\{x_j, x'_j\}$ .

L'ensemble des sommets restants dans l'ensemble  $\{x_i, x'_i; i = \overline{1, n}\}$  aura une nouvelle couleur.

Comme chaque  $C_i$  est adjacent à 3 sommets de  $\{x_i, x'_i, i = \overline{1, n}\}$ , donc nous colorons la clause  $C_i$  avec l'une des couleurs déjà attribuées allant de 1 à  $(n + 1)$ .

Nous permutons alors la couleur de  $x_i$  et celle de  $x'_i$  si nécessaire de sorte que chaque  $C_i$  doit être adjacent à un sommet du même stable. Ce stable reçoit la valeur vrai.

Ainsi le problème de 3-sat est satisfaisable.

Nous devons montrer aussi que la construction illustré dans la figure (2.20) pour créer une coloration à partir d'une affectation de 3-Sat peut être réalisée en temps polynomial. La longueur d'une affectation de 3-Sat est  $O(3m + 3)$ , définie  $C$  par  $m$  ensembles de taille trois et  $n$  variables, le graphe  $G(C)$  à  $3n + m$  sommets et un nombre d'arêtes qui égale à  $m = \frac{n(n-1)}{2} + 3n - 2 + 3m = \frac{n^2}{2} + (3 - \frac{1}{2}n) + 3m - 2 = \frac{n^2}{2} + \frac{5}{2}n + 3m - 2$  donc le cardinal de  $G(C)$  est au plus un constante de temps de cardinal de  $C$  cela implique que le graphe

$G(C)$  peut être construit à partir d'une instance de 3-Sat en temps polynomial.

# 3

## La méthode de déchargement

Nous explorons dans ce chapitre la méthode de déchargement que nous l'illustrons en moyennant des preuves de quelques Théorème concernant la coloration des sommets d'un graphe.

## 3.1 Introduction

La méthode de déchargement est une technique de démonstration qui intervient en théorie des graphes, et particulièrement pour les problèmes de coloration .

Cette méthode est apparue pour la première fois en 1904 afin de prouver le théorème des quatre couleurs. Au cours des années 1960 et 1970 le mathématicien allemand Heinrich Heesch [6] a été le premiers à utiliser une méthode qui introduit l'idée d'attribuer ce qu'on appelle une "charge" à chaque sommet d'un graphe planaire ainsi que de le décharger suivant des règles qui indiquent comment les charges peuvent être redistribués entre les sommets.

Il a également élargi le concept de réductibilité avec Ken Durre et il a utilisé un test avec l'ordinateur. Malheureusement, il était incapable de se procurer le temps d'un super ordinateur nécessaire pour continuer son travail.

L'idée de déchargement est basée sur le principe des configurations réductibles qui a été introduite pour la 1<sup>er</sup> fois par Kempe[50], (1849–1922) pour démontrer la conjecture des quatres couleurs.

Au cours des 100 dernières années, un certain nombre d'auteurs, y compris *A. B. Kempe*, *G. D. Birkhoff*, et *H. Heesch* [9] ont développé une théorie de réductibilité pour aborder le problème. Simultanément, une théorie des ensembles inévitables, a été mis au point et la fusion de ceux-ci a conduit à l'épreuve.

En 1976, le problème des quatre couleurs a été prouvé par les jeunes mathématiciens de l'Université de l'Illinois Appel et Haken [2] en utilisant l'ordinateur. Ainsi, le problème des quatre couleurs a été changé dans le théorème des quatre couleurs.

Ces dernières années, cette technique de déchargement a été utilisée avec succès pour aborder une grande variété de problèmes de coloration pour les graphes plongés dans le plan et d'autres surfaces.

En 1977, *K.Appel* et *W. Haken* [2, 3] ont édité un livre qui comportent dans la 1<sup>er</sup> partie la méthode de déchargement et en 2<sup>eme</sup> partie la réductibilité avec *J.Koch*.

## 3.2 Les différentes techniques de démonstration

Les mathématiques discrètes (par exemple la théorie des graphes, l'algèbre et la géométrie des structures finies) sont à l'oeuvre dans presque tous les domaines des mathématiques fondamentales. La plus part des mathématiciens fondamentaux y font recours dès qu'il se trouve quelque chose à classifier ou à ordonner. Les mathématiques discrètes sont l'un des piliers de l'informatique fondamentale et le ressort d'un très grand nombre d'applications sociétales ou industrielles.

La logique est une branche fondamentale des mathématiques qui permet d'établir la valeur de vérité de propositions et de construire des raisonnements mathématiques.

### 3.2.1 Les connecteurs logiques

**Définition 3.2.1.** Une proposition logique (ou assertion) est une affirmation formée d'un assemblage de symboles et de mots, portant sur des objets mathématiques, à laquelle on peut clairement attribuer la valeur vraie ou la valeur faux. nous notons  $P$  une proposition.

Dans le tableau suivant nous résumons les différents connecteurs logiques.

Nom	Symbole	Signification	Condition de vérité
Négation	$\neg p$	non $p$	$p$ fausse
Conjonction	$p \wedge q$	$p$ et $q$	les deux sont vrai
Disjonction	$p \vee q$	$p$ ou $q$	l'un des deux est vrai
Equivalence	$p \Leftrightarrow q$	$p$ ssi $q$	la même valeur de vérité
Implication	$p \Rightarrow q$	$p$ implique $q$	$q$ est vrai si $p$ vrai

TABLE 3.1: Les conecteurs logiques.

### 3.2.2 Définitions

En mathématiques, une démonstration est un raisonnement qui permet, à partir de certains axiomes, d'établir qu'une assertion est nécessairement vraie. Un résultat qui est démontré s'appelle un *théorème*. En grec, le *lemme* signifie "principe" et *théorème* signifie "thèse a être certifiée (prouvée)". Ainsi un *théorème* est un résultat majeur nécessitant un effort.

Un *lemme* est une déclaration moindre que le théorème, généralement prouvé pour aider à prouver d'autres déclarations. Une fois le *théorème* démontré, il peut être utilisé comme base pour démontrer d'autres assertions. Une assertion qui est supposée vraie mais

qui n'a pas encore été démontrée est appelée une *conjecture*.

Une *proposition* est une affirmation "proposée" à être prouvée, généralement cela prend moins d'effort qu'un théorème. Le mot *corollaire* vient du latin, un *corollaire* suit facilement un théorème ou une proposition, sans beaucoup de travail supplémentaire.

Dans cette partie nous définissons les différents types de raisonnements (méthodes de démonstrations) que l'on peut suivre en mathématiques.

### 3.2.3 Démonstration directe

La démonstration *directe* consiste à démontrer la proposition énoncée (par exemple un théorème) en partant directement des hypothèses données et en arrivant à la conclusion par une suite d'implications logiques.

**Exemple 3.2.1.** Soit  $a$  et  $b \in N$ . Montrer Si  $a = b$  alors  $a^2 = b^2$ .

Nous supposons que  $a, b \in N$  tel que  $a = b$  et nous montrons que  $a^2 = b^2$ .

Si  $a = b$  alors  $a - b = 0$ . Si  $a - b = 0$  alors  $(a - b)(a + b) = 0$ .

Comme  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$  on obtient  $a^2 - b^2 = 0$ . Si on a  $a^2 - b^2 = 0$  alors  $a^2 = b^2$ .

### 3.2.4 Démonstration par un contre-exemple

La recherche d'un contre-exemple est une méthode utilisée pour prouver que certaines affirmations, prétendant à un certain caractère de généralité (c-à-d les propositions universelles), sont fausses. Quand un énoncé commence par « Pour tout .... » ( $\forall$ ), il suffit, pour prouver qu'il est faux, de trouver un élément « il existe ... » ( $\exists$ ) qui réalise les conditions imposées dans l'hypothèse, sans que soit vérifiée la conclusion. C'est la donnée du contre-exemple.

**Exemple 3.2.2.** Soit  $P$  la proposition "  $\forall n \in N, n^2 + 1$  " est un nombre premier. Démontrez que  $P$  est fausse.

Il suffit de trouver un élément dans  $N$  tel que :  $n^2 + 1$  n'est pas premier.

Pour démontrer que  $P$  est fausse on va montrer que  $c$  est vraie.

$\neg P$  est la proposition  $\exists n \in N, n^2 + 1$  n'est pas un nombre premier.

Soit  $n = 3, n^2 + 1 = 10$ , d'où 10 n'est pas un nombre premier, donc  $\exists n \in N$  tel que  $n = 3$  pour le quel la proposition  $p$  est fausse.

### 3.2.5 Démonstration par contraposée

Cette démonstration sert à démontrer les propositions : "Si  $P$  est vraie alors  $Q$  est vraie" ( $P \Rightarrow Q$ ), nous avons  $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$ . On prouve directement que  $\neg Q \Rightarrow \neg P$  est vraie donc par équivalence que  $P \Rightarrow Q$  est vraie (et comme  $P$  est supposée vraie par hypothèse alors  $Q$  est vraie).

**Exemple 3.2.3.** Démontrez la proposition  $P : \forall n \in \mathbb{N}$ , si  $n^2$  est pair, alors  $n$  est pair.

Nous réalisons cette démonstration par contraposition. Ainsi plutôt que de montrer que si  $n^2$  est pair, alors  $n$  est pair. Nous allons montrer que si  $n$  est impair alors  $n^2$  est impair.

$n$  est impair  $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$ , on élève au carré on trouve  $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n^2 = (2k + 1)^2$ .

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n^2 = 2k^2 + 2k + 1, \Rightarrow n^2 = 2(k^2 + k) + 1$ , poser  $m = k^2 + k$  comme  $k \in \mathbb{Z}$ , donc  $k^2 + k$  est aussi  $\in \mathbb{Z}$  alors  $n^2 = 2(k^2 + k) + 1 = 2m + 1$ .

Cela implique que  $n$  est impair  $\Rightarrow n^2$  est impair, par contraposition  $n$  est pair  $\Rightarrow n^2$  est pair, d'où la proposition est démontrée.

### 3.2.6 Démonstration par l'absurde



Elle consiste à supposer le contraire de la proposition  $P$  énoncée c-à-d ( $\neg P$ ) et de montrer qu'on aboutit alors à une contradiction (impossibilité).

**Exemple 3.2.4.** Démontrer que la proposition  $P$  est vraie,  $P$  : "  $\sqrt{2}$  est un nombre irrationnel".

Par l'absurde. Nous avons donc montrer que la proposition  $\neg P$  est fausse.  $\neg P$  se traduit par "  $\sqrt{2}$  est un nombre rationnel".

$\sqrt{2}$  est rationnel, il peut se mettre sous la forme d'une fraction, c'est à dire  $\exists a \in \mathbb{Z}$ ,  $\exists b \in \mathbb{Z}^*$ ,  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ .

Nous simplifions cette égalité nous trouvons :  $2 = \frac{a^2}{b^2}$  ceci implique que  $2b^2 = a^2$ . Donc  $a^2$  est pair, alors  $a$  est pair (d'après la proposition précédente démontrée).

Donc  $\exists k \in \mathbb{Z}$ ,  $a = 2k$ , nous remplaçons dans l'égalité, nous obtenons :

$$2b^2 = (2k)^2 \Rightarrow 2b^2 = 4k^2 \text{ c-à-d } b^2 = 2k^2.$$

Donc  $b^2$  est pair, donc  $b$  est pair ce qui est impossible car  $a$  est pair et que  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux. On aboutit à une contradiction.

Donc la proposition  $\neg P$  est fausse, donc  $\sqrt{2}$  est un nombre irrationnel.

### 3.2.7 Démonstration par induction

Soit  $P(n)$  une propriété de l'entier  $n \in \mathbb{N}$ , si les propriétés (a) et (b) ci-dessous vérifie pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  l'instruction  $P(n)$  est vraie.

a)  $P(1)$  est vraie.

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $P(n)$  est vrai, alors  $P(n + 1)$  est vraie, donc nous déduisons que  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

L'application de la méthode d'induction permet de prouver (a) dans le théorème, l'étape de base est la proposition de l'étape (b) qu'est une instruction conditionnelle, et son hypothèse (" $P(n)$ " est vraie).

**Exemple 3.2.5.** Démontrer la propriété  $P$  suivante : pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x$  strictement positif,  $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ .

Nous utilisons la démonstration par récurrence (induction) pour démontrer la propriété  $P$ .

\* Premièrement  $(1+x)^0 = 1 \geq 1+0x$ , donc la propriété est vraie au rang 0.

\* Deuxièmement supposons que la propriété est vraie pour un certain rang  $n$ , c'est-à-dire supposons que  $(1+x)^n \geq 1+nx$ .

Alors,  $(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$ , d'où  $(1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x+nx^2$ , donc,  $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$  (puisque  $x$  est positif).

Par conséquent,  $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ . La propriété reste donc vraie au rang  $n+1$ .

\* Conclusion : la propriété  $P$  est vraie quel que soit l'entier naturel  $n$ .

### 3.2.8 La méthode probabiliste

La méthode probabiliste est une technique de preuve qui s'est révélée très efficace dans l'établissement de nombreux théorèmes tant en théorie des graphes qu'en combinatoire ou en théorie des nombres. On trouve également des résultats obtenus par cette méthode en théorie des jeux, en théorie de la complexité, en géométrie, et en analyse.

Le principe de base de la méthode probabiliste peut être décrit de la manière suivante : pour prouver l'existence d'une structure combinatoire jouissant de certaines propriétés, nous construisons un espace de probabilités approprié au problème et nous montrons qu'un élément choisi de façon aléatoire dans cet espace possède les propriétés désirées avec une probabilité strictement positive.

Pour appliquer la méthode probabiliste nous supposons le théorème suivant :

**Théorème 3.2.1.** (*Erdős* 1947) Si les entiers positifs  $n$  et  $k$  satisfont l'inégalité  $\binom{n}{k}2^{1-\binom{n}{k}} < 1$ , alors  $R(k, k) \geq n$ .

Afin de pouvoir démontrer ce théorème il faut tout d'abord donné une définition sur le nombre de Ramsey.

**Définition 3.2.2.** Le nombre de Ramsey  $R(k, l)$  est le plus petit entier  $n$  tel que pour toute coloration des arêtes de  $K_n$  en deux couleurs, disons bleu et rouge, il y ait soit un  $K_k$  rouge (c'est-à-dire un sous-graphe complet à  $k$  sommets dont toutes les arêtes sont coloriées en rouge), soit un  $K_l$  bleu.

*Démonstration.* Tout d'abord, nous remarquons que prouver ce théorème revient à montrer l'existence d'une coloration des arêtes de  $K_n$  sans  $K_k$  rouge ni  $K_k$  bleu.

Supposons que chaque arête est coloriée soit en bleu, soit en rouge avec une probabilité  $\frac{1}{2}$  et ceci indépendamment des autres arêtes. Formellement, nous venons de créer un espace de probabilités  $(\Omega, A, P)$  tel que les éléments de  $\Omega$  sont les  $2^{\binom{n}{2}}$  colorations possibles des arêtes de  $K_n$  en deux couleurs. Ces éléments sont tous équiprobables.

Pour tout ensemble  $S$  de  $k$  sommets, soit  $A_S$  l'événement que le sous-graphe de  $K_n$  induit par  $S$  est unicolore. Clairement, pour chaque  $S$ ,

$$P(A_S) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}} = 2^{1-\binom{n}{2}}.$$

Soit  $B$  l'événement qu'il y ait au moins un  $K_k$  unicolore dans une coloration de  $K_n$  alors :

$$P(B) = p\left(\bigcup_{S \subseteq V_{|S|=k}} (A_S)\right) \leq \sum_{S \subseteq V_{|S|=k}} (A_S) = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{n}{k}}.$$

et le dernier terme est strictement inférieur à 1 par hypothèse. Par conséquent,

$$P(B^c) = 1 - P(B) > 0.$$

□

Cela assure l'existence d'un point de notre espace de probabilité pour lequel l'événement  $B_c$  se réalise. Autrement dit, il existe une coloration de  $K_n$  pour laquelle il n'y a aucun  $K_k$  unicolore. Ceci termine la preuve.

### 3.3 Quelques notions et propositions

#### Le degré maximum moyenne

Le degré maximal moyen d'un graphe  $G$ , noté  $mad(G)$ , est le maximum des degrés moyens  $\bar{d}(H)$  de tous les sous-graphes  $H$  de  $G$ . Intuitivement, cela mesure la rareté d'un graphe, car il indique à quel point la concentration des arêtes dans une même zone. Par exemple, en déclarant que  $mad(G)$  doit être inférieur à 2 signifie que  $G$  est une forêt. Grâce à cette mesure, nous utilisons le déchargement pour démontrer des théorèmes.

$$mad(G) = \max_{H \subseteq G} \frac{\sum_{v \in H} d(v)}{n}.$$

Comme nous avons besoin des notions de la planarité avec le degré moyen maximum nous donnons les propositions suivantes qui impliquent la relation entre eux.

**Proposition 3.3.1.** ([26]) *Si  $G$  est un graphe planaire, alors  $mad(G) < 6$ .*

*Démonstration.* Il suffit de démontrer la relation pour les triangulations, étant donné que le  $mad$  est croissant sur les graphes ordre d'inclusion et que tout graphe peut être triangulé. Comme pour tout graphe triangulé nous avons  $m = 3n - 6$ , alors  $\bar{d}(G) = 6 - \frac{12}{n} < 6$ .  $\square$

Tout sous-graphe d'un graphe planaire étant lui-même planaire, nous obtenons le résultat de la proposition.

Beaucoup de résultats concernant la coloration ou la structure des graphes planaires (ou graphes planaires avec une grande maille) ont été prouvés par le déchargement. La formule d'Euler implique que tout graphe planaire avec la maille au moins  $g$  a un degré moyen inférieur à  $\frac{2g}{g-2}$ . De nombreux résultats se sont avérés pour les graphes planaires avec la maille au moins  $g$  en prenant en compte à chaque fois que  $mad(G) < \frac{2g}{g-2}$ .

**Corollaire 3.3.1.** ([45]) *Pour tout graphe planaire  $G$  de maille  $g(G)$ ,*

$$mad(G) = \max \frac{\sum_{v \in V} d(v)}{n} < \frac{2g(G)}{g(G) - 2}.$$

*Démonstration.* Puisque toute face est de longueur au moins  $g(G)$ , on minore le nombre d'arêtes par  $g(G)f \leq 2m$ . Par injection dans la formule d'Euler nous avons :

$g(G)f \leq 2m$  ce qui est équivalent par la formule d'Euler à :

$$\begin{aligned} g(G)(2 + m - n) &\leq 2m \Leftrightarrow \\ 2 &\leq n - m + \frac{2}{g} \Leftrightarrow 2 \leq n + m\left(\frac{2}{g} - 1\right). \\ 2 &\leq n - m\left(\frac{2-g}{g}\right) \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$2 - n - m\left(\frac{2-g}{g}\right) \leq 0.$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{n}(2(n-2) + \frac{2-g(G)}{g(G)}2m) \\
0 &\leq 2 - \frac{4}{n} + \frac{2-g(G)}{g(G)}2m \\
\bar{d}(G) &< \frac{2g(G)}{g(G)-2}(2 - \frac{4}{n}) \\
\bar{d}(G) &< \frac{2g(G)}{g(G)-2}.
\end{aligned}$$

□

Les valeurs données dans le tableau 3.2 représentent la relation entre la maille  $g(G)$  et le  $\text{mad}(G)$  dans un graphe planaire  $G$ . Nous observons que lorsque la maille augmente, le degré moyen maximum tend vers 2.

maille $g(G)$	$\text{mad}(G)$
3	$< 6$
4	$< 4$
5	$< \frac{10}{3}$
6	$< 3$
7	$< \frac{14}{5}$
8	$< \frac{8}{3}$
...	...

TABLE 3.2: Relation entre la maille et le  $\text{mad}$  dans un graphe planaire  $G$ .

### 3.4 La méthode de déchargement

La méthode de déchargement est une technique de démonstration utilisée pour prouver des résultats dans la théorie des graphes structurale, et surtout connu pour son rôle central dans la preuve du théorème des quatre couleurs.

Le plus souvent, cette méthode est appliquée aux graphes planaires et utilisée pour prouver que tout graphe dans une certaine classe contient des sous-graphes à partir d'une liste spécifiée utilisée pour démontrer un résultat de coloration.

Cette technique est la plus efficace de produire des ensembles inévitables de configurations. Le théorème des quatre couleurs a été prouvé par Appel et Haken [2, 4] en 1976. En fait, sa démonstration a été assistée par ordinateur qui a utilisé cette méthode qui depuis, a été sollicitée de plus en plus pour résoudre les problèmes des graphes avec ou sans

l'assistance d'un ordinateur. La méthode est surtout utilisée pour les graphes planaires sur une surface en raison de la formule d'Euler.

### 3.4.1 Les configurations inévitables et réductibles

En 1913, G.D.Birkhoff [2] a utilisé l'argument de la chaîne de Kempe pour développer la méthode générale de la réductibilité de certaines configurations réductibles prouvant que cette configuration ne peut pas se produire dans un contre exemple minimal à la congestion de couleur.

Une configuration réductible est un arrangement de pays qui ne peuvent pas se produire dans un contre-exemple minimal.

Si une carte contient une configuration réductible, la carte peut être réduite à une petite carte. Cette carte plus petite a la condition que, si elle peut être coloré avec quatre couleurs, la carte originale peut aussi. Cela implique que si la carte d'origine ne peut être coloré avec quatre couleurs, la carte plus petite ne peut pas non plus et donc la carte d'origine ne soit pas minimal.

Un inévitable est un ensemble de configurations de telle sorte que chaque carte qui satisfait certaines conditions nécessaires pour être une triangulation non-4-couleur minimum (comme ayant un degré minimum 5) doivent avoir au moins une configuration de cet ensemble.

En utilisant des règles mathématiques basées sur les propriétés des configurations réductibles, Appel et Haken [3] ont trouvé un ensemble inévitable de configurations réductibles, prouvant ainsi qu'un contre-exemple minimal à la conjecture des quatre couleurs ne pourrait pas exister. Leur preuve a réduit que les cartes ont une possibilité pour 1936 configurations réductibles (plus tard réduit à 1476) qui devaient être vérifiées une par une par ordinateur et ont pris plus d'un millier d'heures. Cette partie de réductibilité du travail a été indépendamment une double vérification avec les différents programmes et les ordinateurs. Cependant, la partie inévitabilité de la preuve a été vérifiée dans plus de 400 pages de microfiche, par suite cette ensemble a été diminué à 633 configurations réductibles.

Une configuration est un sous-graphe d'une triangulation plane constituée d'un circuit (appelé l'anneau) et son intérieur. Une configuration est appelée réductible si elle peut être démontrée par certaines méthodes standards qui ne peut pas être immergée dans un contre exemple minimal pour la conjecture des quatre couleurs. Un ensemble de configurations est appelé inévitable si chaque triangulation plane contient un certain élément de

l'ensemble.

D'après les définitions, il est immédiat que le théorème des quatre couleurs est prouvé si un ensemble inévitable de configurations réductibles est fourni.

Une configuration  $C$  est un sous-graphe induit d'un graphe  $G$ . si chaque fois que  $G$  contient  $C$ , nous pouvons former un graphe  $G'$  avec moins d'arêtes que  $G$  telle que toute bonne coloration de  $G'$  donne lieu à une bonne coloration de  $G$ . Pour prouver qu'une configuration est réductible, nous déduisons de la minimalité de  $G$  que le graphe  $G - C$  peut être correctement coloré, puis prouver que cette coloration peut être étendue à une coloration propre du graphe original  $G$ , ce qui donne une contradiction.

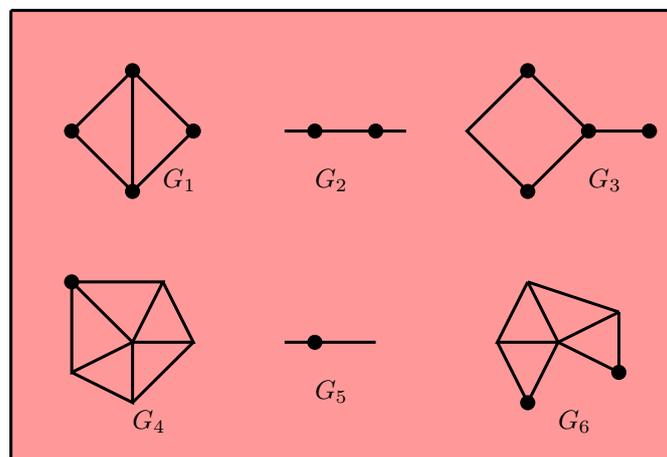


FIGURE 3.1: Quelques configurations réductibles.

## 3.5 Le déroulement de la méthode

### 3.5.1 L'application par le degré moyen maximum

Supposons que l'on veuille montrer une propriété  $P$ , nous prenons au premier lieu un contre exemple minimal  $G$ , nous prouvons qu'aucune configuration réductible n'existe.

La deuxième étape consiste à démontrer qu'un graphe  $G$  qui ne contient pas les configurations réductibles a un degré moyen maximum au moins  $\alpha$  ( $\text{mad} \geq \alpha$ ), pour cela nous appliquons les règles de déchargement pour redistribuer les charges entre les sommets du graphe  $G$  de façon que la charge totale soit conservée.

Comme certaines configuration sont interdites, nous pouvons alors prouver que, après l'application des règles de déchargement, chaque sommet a une charge final d'au moins  $\alpha$ . Cela implique que le degré moyen du graphe est au moins  $\alpha$ , d'où le degré moyen maximum est au moins  $\alpha$ , ce qui donne une contradiction avec la propriété posé alors aucun contre exemple minimal ne peut exister, donc la propriété  $P$  est vérifiée pour chaque graphe  $G$ .

### 3.5.2 L'application par la formule d'Euler

Supposons que le théorème soit faux, Nous obtenons une contradiction en utilisant la méthode de déchargement. Voici le déroulement de la preuve : à chaque sommet et à chaque face est attribuée une charge initiale. La formule d'Euler permet de prouver que la somme totale des charges est strictement négative. Ensuite, des règles de redistribution de la charge sont établies, et chaque sommet et face donne ou reçoit de la charge selon ces règles. Au final, la somme totale des charges reste la même, mais la charge de chaque sommet ou face est (en général) différente de la charge originale. Alors, par une analyse de cas, nous montrons que la charge de chaque sommet et de chaque face est positive, une contradiction.

## 3.6 Exemples d'application avec le déchargement

### 3.6.1 Méthode de déchargement avec le degré moyen maximum

#### 1<sup>er</sup> exemple

Nous reprenons le résultat Vizing et Gupta [26] cité dans le chapitre précédent qui est l'un des théorèmes les plus célèbres dans la coloration de graphes.

**Théorème 3.6.1.** (*Théorème de Vizing*)[26] Si  $G$  un graphe alors  $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

le problème  $\chi'(G) = \Delta(G)$  est NP-complet, alors nous cherchons des conditions pour l'égalité.

**Conjecture 3.6.1.** Si  $G$  un graphe planaire et  $\Delta(G) \geq 6$  alors  $\chi'(G) = \Delta(G)$ .

**Théorème 3.6.2.** (*Lemme d'Adjacence de Vizing*)(VAL)([26,30])

Si  $x$  et  $y$  sont adjacents dans un graphe arête critique  $G$ , alors au moins  $\max\{1 + \Delta(G) - d(y), 2\}$  voisins de  $x$  ont le degré  $\Delta(G)$ .

Vizing [26] a prouvé la Conjecture pour  $\Delta(G) \geq 8$ , en utilisant lemme de Vizing (VAL). Il est courant de dire que  $G$  est de classe 1 si  $\chi'(G) = \Delta(G)$ , classe 2 autrement.

C'est-à-dire :

Classe 1 :  $\{ G / \chi'(G) = \Delta(G) \}$ .

Classe 2 :  $\{ G / \chi'(G) \neq \Delta(G) \}$ , d'après le théorème de Vizing nous avons :  $\Delta(G) < \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1 \implies \chi'(G) = \Delta(G) + 1$ .

Un graphe arête critique  $G$  est alors un graphe de classe 2 de telle sorte que  $\chi'(G-e) = (\Delta(G)+1) - 1 = \Delta(G)$  pour tous les  $e \in E(G)$ . En effet, VAL implique que chaque graphe arête critique a au moins trois sommets de degré maximal, alors  $\Delta(G) = \Delta(G-e)$ . Nous notons également que chaque graphe de classe 2 contient un graphe arête critique avec le même degré maximal.

Vizing a prouvé la conjecture en utilisant VAL pour  $\Delta(G) \geq 8$  via le comptage des arguments sur les sommets de degrés divers. La preuve est plus claire dans la langue de déchargement, ce qui n'a pas été en usage.

Luo et Zhang [25] ont utilisé VAL et le déchargement pour prouver que  $\chi'(G) = \Delta(G)$  pour la grande famille des graphes  $G$  avec  $mad(G) < 6$  et  $\Delta(G) \geq 8$ . Nous présentons une preuve un peu plus simple d'un résultat légèrement plus faible, nécessitant  $mad(G) < 6$ . En fait, Miao et Sun [25] ont prouvé que  $\chi'(G) = \Delta(G)$  également lorsque  $\Delta(G) \geq 8$  et  $mad(G) < 13/2$ , leur résultat utilise lemme VAL supplémentaire.

Ici VAL prend la place des arguments de réductibilité.

**Théorème 3.6.3.** ([26]) *Si  $G$  est un graphe avec  $mad(G) < 6$  et  $\Delta(G) \geq 8$ , alors  $\chi'(G) = \Delta(G)$ .*

### Le principe de la méthode de déchargement

Supposons que l'on veuille montrer une propriété  $P$ , dans un graphe  $G$ .

La première étape consiste à un contre exemple minimal  $G$ . On prouve par l'absurde qu'aucune configuration réductible n'existe.

La deuxième étape consiste à démontrer qu'un graphe  $G$  qui ne contient pas les configurations réductibles a un degré moyen maximum au moins 6 ( $mad \geq 6$ ), pour cela nous attribuons à chaque sommet de  $G$  une charge  $\omega(v)$  égale à son degré c-à-d  $\omega(v) = d(v)$ .

Nous appliquons les règles de déchargement pour redistribuer les charges entre les sommets du graphe  $G$  de façon que la charge totale soit conservée.

Comme certaines configurations sont interdites, nous pouvons alors prouver que, après l'application des règles de déchargement, chaque sommet a une charge finale  $\omega'(v)$  d'au moins 6. Cela implique que le degré moyen du graphe est au moins 6, d'où le degré moyen maximum est au moins 6, ce qui donne une contradiction avec la propriété posée. Alors aucun contre exemple minimal ne peut exister, donc la propriété est vérifiée pour chaque graphe  $G$ .

*Démonstration.* Soit  $k = \Delta(G)$  et  $G$  un graphe qui ne vérifie pas la propriété (P) qui est :  $\chi'(G) = \Delta(G)$ . D'après le théorème 3.6.3 nous avons  $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1 \implies \chi'(G) = \Delta(G) + 1$  nous supposons que  $G$  est minimal pour cette propriété, c-à-d  $\forall e \in E(G), \chi'(G - e) = \Delta(G) \implies G$  est un graphe arête critique.

D'après VAL chaque sommet  $v$  a au moins deux  $k$ -voisins et  $\delta(G) \geq 2$ . Nous utilisons le déchargement avec la charge initiale  $\omega(v) = d(v)$ . Il suffit de montrer que chaque sommet aura une charge finale  $\omega'(v)$  d'au moins 6 ( $\omega'(v) \geq 6$ ).

Soit  $\omega(v)$  (resp  $\omega'(v)$ ) la charge initiale (resp charge finale) de chaque sommet  $v$ .

(R1) Si  $d(v) \leq 4$ , alors  $v$  aura besoin  $\frac{6-d(v)}{d(v)}$  de chacun de ses voisins.

\* Si  $d(v) = 4$ , alors  $\omega(v) = d(v) = 4$ .

Après l'application de (R1) la charge finale devient  $\omega'(v) = 4 + \frac{1}{2}4 = 4 + 2 = 6$  (Voir figure 3.2)

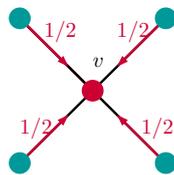
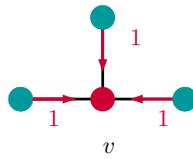


FIGURE 3.2: La règle de déchargement (R1) si  $d(v) = 4$ .

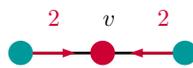
\* Si  $d(v) = 3$ , alors  $\omega(v) = d(v) = 3$ .

Après l'application de (R1) la charge finale devient  $\omega'(v) = 3 + 1(3) = 3 + 3 = 6$  (Voir figure 3.3)

FIGURE 3.3: La règle de déchargement (R1) si  $d(v) = 3$ .

\* Si  $d(v) = 2$ , alors  $\omega(v) = d(v) = 2$ .

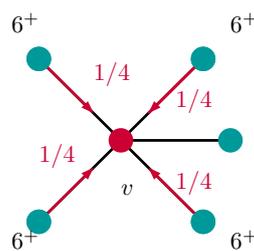
Après l'application de (R1) la charge finale devient  $\omega'(v) = 2 + 2(2) = 2 + 4 = 6$  (Voir figure 3.4)

FIGURE 3.4: La règle de déchargement (R1) si  $d(v) = 2$ .

(R2) Si  $d(v) \in \{5, 6\}$ , alors  $v$  prend  $1/4$  de chaque  $6^+$ -voisin.

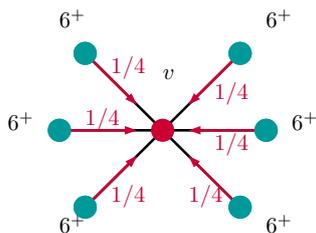
\* Si  $d(v) = 5$ , alors  $\omega(v) = d(v) = 5$ .

Après l'application de (R2) la charge finale devient  $\omega'(v) = 5 + \frac{1}{4}(4) = 5 + 1 = 6$  (Voir figure 3.5)

FIGURE 3.5: La règle de déchargement (R2) si  $d(v) = 5$ .

\* Si  $d(v) = 6$ , alors  $\omega(v) = d(v) = 6$ .

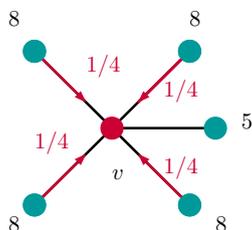
Après l'application de (R2) la charge finale devient  $\omega'(v) = 6 + \frac{1}{4}(6) = 6 + \frac{3}{2} > 6$  (Voir figure 3.6).

FIGURE 3.6: La règle de déchargement (R2) si  $d(v) = 6$ .

Pour  $v \in V(G)$ , soit  $j$  le degré minimum parmi les sommets dans  $N_G(v)$ . Si  $j < k$ , alors  $v$  a au moins  $k + 1 - j$  voisins de degré  $k$ , d'après VAL. Ainsi  $k + 1 - j \leq d(v) - 1$ , ce qui donne  $j \geq 10 - d(v)$  étant donné que  $k \geq 8$ , Noter que les  $7^+$ -sommets ne prennent aucune charge.

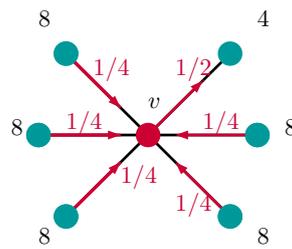
\* Si  $d(v) \leq 4$ , alors  $j \geq 6$ , donc  $v$  ne perd aucune charge, et (R1) envoie assez pour faire  $v$  heureux.

\* Si  $d(v) = 5$ , alors  $j \geq 5$ . En outre,  $j = 5$  a besoin de  $k - 4$  voisins avec degré  $k$ . Pour  $k \geq 8$ ,  $v$  est adjacent à 4 sommets de degré  $k = 8$ , alors la charge de  $4(1/4)$  vient à  $v$ , sans frais des charge est donné par la suite, et  $v$  est heureux.

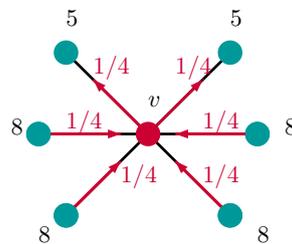
FIGURE 3.7: La règle de déchargement si  $d(v) = 5$  et  $j \geq 5$ .

\* Si  $d(v) = 6$ , alors  $j \geq 4$ . Dans la plupart des  $j - 3$  voisins ont un degré inférieur à  $k$ . Pour  $j \in \{4, 5, 6\}$ ,  $v$  donne au plus  $2/4, 2/4, 3/4$  et reçoit au moins  $5/4, 4/4, 3/4$ , respectivement, et devient heureux.

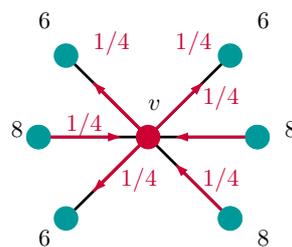
\*\* Si  $d(v) = 6$  et  $j = 4$  alors  $v$  est adjacent à un sommet de degré 4, donc  $v$  donne une charge de  $\frac{1}{2}$  au sommet de degré  $j$  et reçoit une charge de  $\frac{1}{4}$  de chaque sommet de degré 8 adjacent à  $v$ .

FIGURE 3.8: La règle de déchargement si  $d(v) = 6$  et  $j = 4$ .

\*\* Si  $d(v) = 6$  et  $j = 5$  alors  $v$  est adjacent à deux sommets de degré 5, donc  $v$  donne une charge de  $\frac{1}{4}$  au sommet de degré  $j$  et reçoit une charge de  $\frac{1}{4}$  de chaque sommet de degré 8 adjacent à  $v$ .

FIGURE 3.9: La règle de déchargement si  $d(v) = 6$  et  $j = 5$ .

\*\* Si  $d(v) = 6$  et  $j = 6$  alors  $v$  est adjacent à trois sommets de degré 6, donc  $v$  donne une charge de  $\frac{1}{4}$  au sommet de degré  $j$  et reçoit une charge de  $\frac{1}{4}$  de chaque sommet de degré 8 adjacent à  $v$  (Voir figure 3.10).

FIGURE 3.10: La règle de déchargement si  $d(v) = 6$  et  $j = 6$ .

Si  $d(v) = 7$ , puis  $j \geq 3$ . Au plus  $j - 2$  voisins ont un degré inférieur à  $k$ . Pour  $j \in \{3, 4, 5, 6\}$ ,  $v$  donne au maximum une charge de  $3/3, 4/4, 4/3, 4/4$ , respectivement, et devient heureux.

\*\* Si  $d(v) = 7$  et  $j = 3$  alors  $v$  est adjacent à un sommet de degré 3, donc  $v$  donne une charge de 1 au sommet de degré  $j$  (Voir figure 3.11).

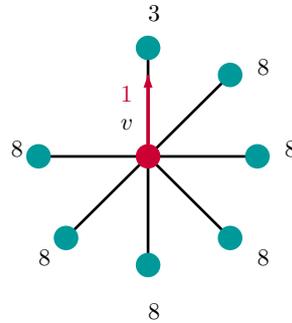


FIGURE 3.11: La règle de déchargement si  $d(v) = 7$  et  $j = 3$ .

\*\* Si  $d(v) = 7$  et  $j = 4$  alors  $v$  est adjacent à deux sommets de degré 4, donc  $v$  donne une charge de  $\frac{1}{2}$  au sommet de degré  $j$ .

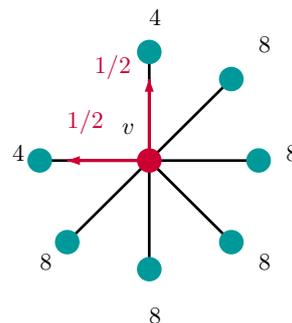


FIGURE 3.12: La règle de déchargement si  $d(v) = 7$  et  $j = 4$ .

\*\* Si  $d(v) = 7$  et  $j = 5$  alors  $v$  est adjacent à trois sommets de degré 5, donc  $v$  donne une charge de  $\frac{1}{4}$  à chaque sommet de degré  $j$  (Voir figure 3.13).

\*\* Si  $d(v) = 7$  et  $j = 6$  alors  $v$  est adjacent à quatre sommets de degré 6, donc  $v$  donne une charge de  $\frac{1}{4}$  à chaque sommet de degré  $j$  (Voir figure 3.14).

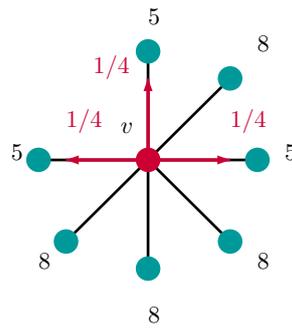


FIGURE 3.13: La règle de déchargement si  $d(v) = 7$  et  $j = 5$ .

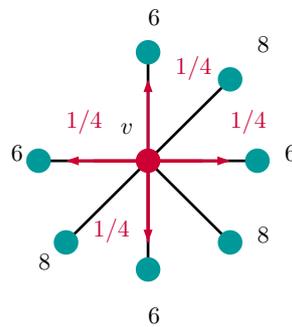


FIGURE 3.14: La règle de déchargement si  $d(v) = 7$  et  $j = 6$ .

Si  $d(v) \geq 8$ , alors  $j \geq 2$ . Au plus  $j - 1$  voisins ont un degré inférieur à  $k$ . Pour  $j \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $v$  donne au maximum une charge de  $4/2, 6/3, 6/4, 4/4, 5/4$ , respectivement, et devient heureux.

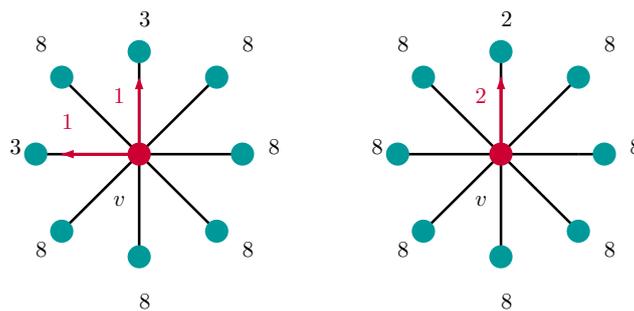
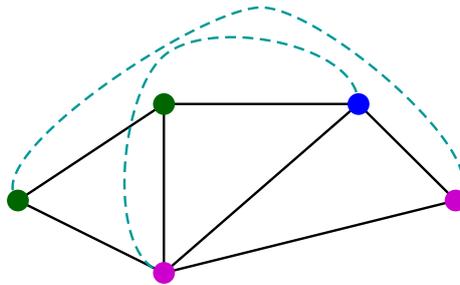


FIGURE 3.15: La règle de déchargement si  $d(v) = 8$  et  $j = 2$ ,  $j = 3$ .

□

2<sup>eme</sup> Exemple

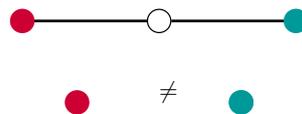
**Définition 3.6.1.** La coloration à distance "d" d'un graphe  $G$  est une coloration des sommets de  $G$  telle que deux sommets  $u$  et  $v$  ont des couleurs différentes si  $\text{dist}(u, v) = d$ . La coloration propre est donc une coloration à distance 1. Nous notons  $\chi(G^d)$  est le plus petit nombre de couleurs nécessaires à colorer à distance "d" le graphe  $G$ .

FIGURE 3.16: Coloration de graphe  $G$  à distance  $d = 3$ .

**Définition 3.6.2.** Une coloration injective d'un graphe  $G$  est une coloration des sommets de  $G$  telle que deux sommets  $u$  et  $v$  ont des couleurs différentes s'ils sont à distance exactement deux l'un de l'autre.

$\varphi_i : V(G) \rightarrow N$  est une coloration injective de  $G$  si :

$$\forall uv, vw \in E(G) : \varphi_i(u) \neq \varphi_i(w).$$

FIGURE 3.17: Coloration de graphe  $G$  à distance  $d = 2$ .

Deux sommets voisins pouvant ainsi avoir la même couleur, une coloration injective n'est pas une coloration propre de  $G$ . Le plus petit nombre de couleurs nécessaire à réaliser une coloration injective d'un graphe  $G$  est appelé *nombre chromatique injective* de  $G$  noté par  $\chi_i(G)$ .

La coloration injective a été introduite par Hahn et al. [24], qui ont montré des applications du nombre chromatique injective.

Il est naturel de chercher des relations entre le nombre chromatique injective  $\chi_i(G)$  et le nombre chromatique  $\chi(G)$ , le nombre chromatique de  $G^2$  a également été largement étudié dans le cas où  $G$  est un graphe planaire, puisque la coloration injective est un cas particulier de coloration des sommets, il est naturel de se demander si la détermination du nombre chromatique injective d'un graphe arbitraire est NP-difficile, ce qui a été démontré par Hahn et al [24].

la recherche d'une coloration optimale s'est concentré sur la délimitation du nombre chromatique pour les classes spéciales de graphes comme c'est le cas pour le nombre chromatique injective.

Etant donné que tous les voisins d'un sommet doivent recevoir des couleurs distinctes, car ils sont à une distance 2 il est facile de voir que  $\chi_i(G) \geq \Delta(G)$ .

Puisque une  $k$ -coloration injective de  $G$  est une  $k$ -coloration de  $G^2$ , nous avons :

$$\chi_i(G) \leq \chi(G^2), \text{ Montassier [24] a conjecturé que } \chi_i(G) \leq 2\chi(G^2).$$

Doyon, Hahn, et Raspaud [24] ont montré que pour tout graphe  $G$  avec un degré maximum  $\Delta$  nous avons les trois résultats suivant : si  $\text{mad}(G) < \frac{14}{5}$ , alors  $\chi_i(G) = \Delta + 3$ ; si  $\text{mad}(G) < 3$ , alors  $\chi_i(G) = \Delta + 4$ , et si  $\text{mad}(G) < \frac{10}{3}$ , alors  $\chi_i(G) = \Delta + 8$ .

Dans [33], ils ont amélioré certaines limites dans certains cas; spécifiquement, ils ont étudié des conditions suffisantes pour lesquelles  $\chi_i(G) = \Delta(G)$  et  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 1$ , et aussi des études concernant des conditions pour lesquelles  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$ , alors nous reprenons le résultat principal de Doyon et al.

**Théorème 3.6.4.** ([24]) Si  $\Delta = 3$  et  $\text{mad}(G) < 36/13$ , alors  $\chi_i(G) \leq 5$ .

Hahn et al, [24] ont conjecturé que tout graphe planaire  $G$  de degré maximum  $\Delta(G)$  a  $\chi_i(G) \leq \lceil \frac{3\Delta}{2} \rceil$ . Pour  $\Delta = 3$ , la conjecture stipule que  $\chi_i(G) \leq 5$ .

Dans ce qui suit nous reprenons la démonstration du théorème 3.6.4 par la méthode de déchargement.

### Preuve

En démontrant le théorème 3.6.4, la démarche de la méthode de déchargement appliquée sur ce dernier est la suivante :

Supposons que l'on veuille montrer la propriété  $P$  du théorème 3.6.4, dans le graphe  $G$ .

Nous considérons au 1<sup>er</sup> lieu un contre exemple minimal  $G'$  qui ne vérifie pas la propriété ( $P$ ) du théorème 3.6.4, et nous prouvons par induction qu'aucune configuration réductible n'existe.

La deuxième étape consiste à démontrer que le graphe  $G'$  qui ne contient pas les configurations réductibles a un degré moyen maximum au moins  $\frac{36}{13}$  (mad  $\geq \frac{36}{13}$ ), pour cela nous attribuons à chaque sommet de  $G$  une charge  $\omega(v)$  égale à son degré c-à-d  $\omega(v) = d(v)$ .

Puis nous appliquons les règles de déchargement pour redistribuer les charges entre les sommets du graphe  $G'$  de façon que la charge totale soit conservée.

Comme certaines configurations sont interdites, nous pouvons alors prouver que, après l'application des règles de déchargement, chaque sommet a une charge finale  $\omega'(v)$  d'au moins  $\frac{36}{13}$ . Cela implique que le degré moyen du graphe est au moins  $\frac{36}{13}$ , d'où le degré moyen maximum est au moins  $\frac{36}{13}$ , ce qui donne une contradiction avec la propriété déjà posée.

Nous déduisons donc qu'aucun contre exemple minimal ne peut exister, et par suite la propriété est vérifiée pour chaque graphe  $G$ .

### Les configurations réductibles du théorème (3.6.4)

Soit  $G'$  un contre exemple minimal qui ne vérifie pas le théorème 3.6.10, c-à-d mad( $G'$ )  $< 36/13$ ,  $\Delta(G') = 3$ , et  $\chi_i(G') > 5$ .

Les configurations suivantes sont réductibles. Nous les notons dans ce qui suit par : (Claim 3.6.i)  $i = \overline{1.4}$ .

**Claim 3.6.1.** *Le graphe  $G'$  ne contient pas un 1-sommet.*



FIGURE 3.18: *La configuration de Claim 3.6.1.*

*Démonstration.* Supposons que  $G'$  a un sommet  $v$  de degré 1. Considérons le graphe  $G'' = G' - v$ , par la minimalité de  $G'$ , nous avons  $G''$  vérifie  $\chi_i(G'') \leq 5$ . Nous pouvons colorer  $G' - v$  puisque  $v$  a au plus  $\Delta - 1$  couleurs interdites, donc nous pouvons étendre

la coloration à  $G$ .

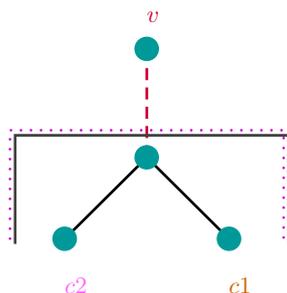


FIGURE 3.19: La preuve du configuration de Claim 3.6.1.

□

**Claim 3.6.2.** *Le graphe  $G'$  ne contient pas deux 2-sommet adjacents.*



FIGURE 3.20: La configuration de Claim 3.6.2.

*Démonstration.* Supposons que  $G'$  a deux sommets  $v$  et  $u$  de degré 2 adjacents. Considérons le graphe  $(G'') = G' - \{u,v\}$ , par la minimalité de  $G'$ , nous avons  $G''$  vérifie  $\chi_i G'' \leq 5$ . Nous pouvons colorer  $G' - \{u,v\}$  puisque  $v, u$  ont au plus  $\Delta$  couleurs interdites, donc nous pouvons étendre la coloration à  $G$ .

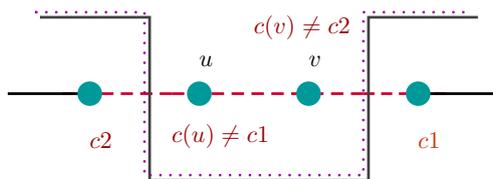


FIGURE 3.21: La preuve de la configuration de Claim 3.6.2.

□

**Claim 3.6.3.** *Le graphe  $G'$  ne contient pas un 3-sommet adjacent a deux 2-sommets*

*Démonstration.* Supposons que  $G'$  un sommet  $v$  de degré 3 adjacent a deux sommets de degré 2  $u, w$ . Considérons le graphe  $G'' = G' - \{u,v,w\}$ , par la minimalité de  $G'$ , nous avons  $G''$  vérifie  $\chi_i(G'') \leq 5$ . Nous pouvons colorer  $G' - \{u,v,w\}$  puisque  $v, u, w$  ont au plus  $\Delta + 1$  couleurs interdites, donc nous pouvons étendre la coloration à  $G$ .

□

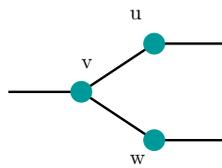


FIGURE 3.22: La configuration de Claim 3.6.3.

**Claim 3.6.4.** *Le graphe  $G'$  ne contient pas deux 3-sommets adjacents tel que chacun adjacent a 2-sommets.*

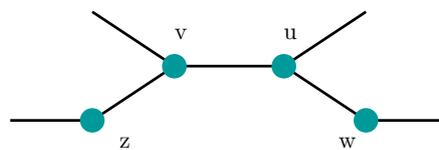


FIGURE 3.23: La configuration de Claim 3.6.4.

*Démonstration.* Supposons que  $G'$  a deux sommets  $v, u$  de degré 3 qui sont adjacents chacun a 2-sommets, soient  $w, z$ . Considérons le graphe  $G'' = G' - \{u, v, w, z\}$ . Par la minimalité de  $G'$ , nous avons  $(G'')$  vérifie  $\chi_i(G'') \leq 5$ , nous pouvons colorer  $G' - \{u, v, w, z\}$  puisque  $v, u, w, z$  ont au plus  $\Delta + 1$  couleurs interdites, donc nous pouvons étendre la coloration à  $G$ .

□

### Les règles de déchargement

Nous attribuons à chaque sommet  $v$  une charge initiale  $\omega(v) = d(v)$ , d'après le Claim 3.6.1 nous avons  $\delta(G') \geq 2$ , puisque  $\Delta(G) = 3$  alors seulement les 2-sommets ont besoin de prendre une charge  $\omega(v)$ .

Nous redistribuons ensuite cette charge par les règles de déchargement suivantes :

(R1) : Chaque 3-sommets donne une charge de  $\frac{3}{13}$  à chaque 2-sommet qui lui est adjacent.

D'après le Claim 3.6.3, chaque 3-sommet de  $G'$  est adjacent à un seul 2-sommet.

(R2) : Chaque 3-sommets donne une charge  $\frac{1}{13}$  pour chacune de 2-sommets de distances 2.

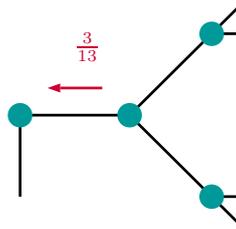


FIGURE 3.24: La règle de déchargement (R1) .

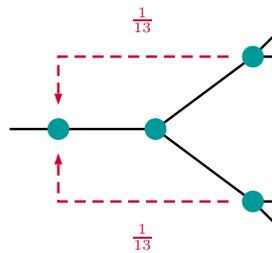


FIGURE 3.25: La règle de déchargement (R2).

(R2.1) : Lorsque les 3-sommets sont relié dans un cycle de longueur 4 alors le 3-sommets opposé donne a 2-sommets une charge de  $\frac{2}{13}$ .

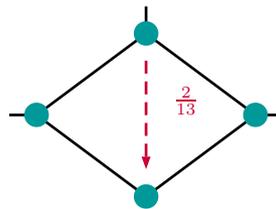


FIGURE 3.26: La règle de déchargement (R2.1).

D'après claim 3.6.2 et Claim 3.6.3 chaque sommet  $v$  avec une distance  $d = 2$  d'un 2-sommets doit être un 3-sommets ( $d(v) = 3$ ).

D'après claim 3.6.4 un 2-sommets n'est pas lie dans un cycle de longueur 3.

Puisque seulement le 2-sommets qui nécessite un changement de charge alors ça charge finale  $\omega'(v)$  est la suivante :

$$\omega'(v) = 2 + 2\left(\frac{1}{13}\right) + 2\left(\frac{3}{13}\right) + \frac{2}{13} = \frac{36}{13}.$$

Notez que les Claim 3.6.2, claim 3.6.3, et claim 3.6.4 impliquent que chaque 3-sommets  $v$  ne peut pas avoir 2-sommets à la fois de distance 1 et 2, d'où sa charge finale  $\omega'(v) = 3 - (\frac{3}{13})$ . En outre que  $v$  a au plus trois 2-sommets de distance  $d = 2$ , donc sa charge finale  $\omega'(v) = 3 - 3(\frac{1}{13})$ .

Voici une figure qui récapitule les règles de déchargement du théorème 3.6.4.

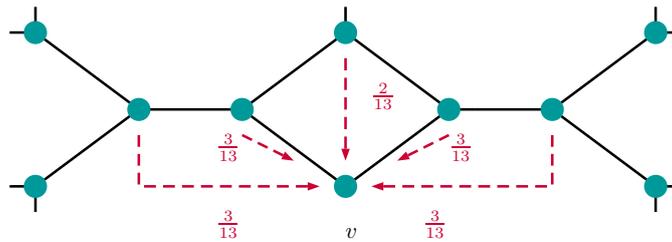


FIGURE 3.27: Les règles de déchargement du théorème 3.6.4.

### Conclusion

Après l'application des règles de déchargement tout les sommets de  $G'$  ont au moins une charge finale  $\omega'(v) = \frac{36}{13}$  ce qui implique que le degré moyen maximum est au moins  $\frac{36}{13}$  ( $\text{mad}(G') \geq \frac{36}{13}$ ) qu'est une contradiction avec la propriété ( $P$ ), alors aucun contre exemple minimal ne peut exister, par conséquent la propriété est vérifiée pour tout graphe  $G$ .

### 3.6.2 Méthode de déchargement avec la formule d'Euler

#### 1<sup>er</sup> exemple

La méthode de déchargement a été développée dans l'étude des graphes planaires. Bien que de nombreux résultats sur les graphes planaires étendent à tous les graphes satisfaisant la résultante sont liées on utilise  $\text{mad}(G)$ . Puisque la planarité est très restrictive pour les graphes planaires on peut parfois se révéler des résultats plus forts que pour tenir  $\text{mad}(G) < 6$ .

La particularité de la méthode de déchargement pour les graphes planaires est que la charge peut également être affectée à des faces, qui sont des sommets dans le graphe dual. Le graphe dual  $G^*$  est également planaire, si  $\text{mad}(G^*) < 6$  et nous pouvons utiliser le déchargement sur  $G$  et  $G^*$ . Grâce à l'interaction entre eux qu'est plus efficace et conduit à trois voies communes (et naturelles) pour affecter la charge sur les graphes planaires.

**Proposition 3.6.1.** *Soit  $G$  un graphe planaire avec  $V(G)$  et  $F(G)$  l'ensemble des sommets et des faces, et soit  $d(f)$  la taille d'une face  $f$ , les équations suivantes sont vérifiées pour  $G$  :*

$$\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F(G)} (2d(f) - 6) = -12.$$

(chargement des sommets).(I)

$$\sum_{v \in V(G)} (2d(v) - 6) + \sum_{f \in F(G)} (d(f) - 6) = -12.$$

(chargement des faces).(II)

$$\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 4) + \sum_{f \in F(G)} (d(f) - 4) = -8.$$

(chargement équilibré).(III)

*Démonstration.* On sait que  $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$ , et  $\sum_{f \in F(G)} d(f) = 2m$ .

(I) :

D'après la formule d'Euler nous avons :

$$n - m + f = 2 \Rightarrow -6(n - m + f) = -6(2) = -12.$$

$$-6n + 6m - 6f = \sum_{v \in V(G)} d(v) - \sum_{v \in V(G)} 6 + \sum_{f \in F(G)} 2d(f) - \sum_{f \in F(G)} 6 =$$

$$\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F(G)} (2d(f) - 6) = \quad CQFD.$$

(II) :

L'équations (II) vaut d'après la formule d'Euler :

$$n - m + f = 2 \Rightarrow -6(n - m + f) = -6(2) = -12.$$

$$-6n + 6m - 6f = \sum_{v \in V(G)} 2d(v) - \sum_{v \in V(G)} 6 + \sum_{f \in F(G)} d(f) - \sum_{f \in F(G)} 6 =$$

$$\sum_{v \in V(G)} (2d(v) - 6) + \sum_{f \in F(G)} (d(f) - 6) = \quad CQFD.$$

(III) :

L'équations (III) vaut :

$$n - m + f = 2 \Rightarrow -4(n - m + f) = -4(2) = -8.$$

$$-4n + 4m - 4f = \sum_{v \in V(G)} d(v) - \sum_{v \in V(G)} 4 + \sum_{f \in F(G)} d(f) - \sum_{f \in F(G)} 4 =$$

$$\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 4) + \sum_{f \in F(G)} (d(f) - 4) = \quad CQFD.$$

□

### Remarque

D'après la démonstration de la proposition, nous déduisons que la charge totale initiale est négative.

### 1<sup>er</sup> exemple

Comme nous avons cité quelque propriété de la coloration des arêtes par liste dans le chapitre précédent, nous avons la déclaration célèbre de la Conjecture de coloration des arête par liste.

#### **Conjecture 3.6.2. (Conjecture de Coloration d'arête par Liste [11,26,39])**

Chaque graphe  $G$  satisfait  $\chi'_l(G) = \chi'(G)$ .

La conjecture est encore largement un problème ouvert. Certains résultats partiels ont toutefois été obtenus dans le cas particulier des graphes planaires : par exemple, la conjecture est vraie pour les graphes planaires de degré maximal d'au moins 12, Borodin [11,26] a confirmé la Conjecture de coloration d'arête par liste pour les graphes planaires avec un grand degré, prouvant que  $\chi'_l(G) = \Delta(G)$  lorsque  $\Delta(G) \geq 14$ . Cette suite a été renforcée pour  $\Delta(G) \geq 12$  comme suite :

**Théorème 3.6.5.** (*Borodin et al [11,39]*)

Chaque graphe planaire  $G$  avec  $\Delta(G) \geq 12$  satisfait  $\chi'_l(G) = \Delta(G)$ .

En 1965 [11,26] Vizing a conjecturé que chaque graphe  $G$  est  $(\Delta + 1)$  arêtes-choosable.

**Conjecture 3.6.3.** (*Vizing [11,39]*) Pour tout graphe  $G$  satisfait  $\chi'_l(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

En 1990 [11,23] la conjecture 3.6.4 a été étudiée activement dans le cas des graphes planaires.

Certaines restrictions sur les cycles et a été résolu par Borodin [23] pour les graphes planaires de degré maximal d'au moins 9 (une preuve plus simple a été trouvé plus tard par Cohen et Havet [23,26]).

**Théorème 3.6.6.** (*Borodin[23]*)

Si  $G$  est un graphe planaire avec  $\Delta \geq 9$ , alors  $\chi'_l(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

Bonamy [11,23] a obtenu cette conclusion aussi pour  $\Delta = 8$ .

**Théorème 3.6.7.** (*Bonamy [11,23]*) Chaque graphe planaire  $G$  avec  $\Delta(G) = 8$  satisfait  $\chi'_l(G) \leq 9$ .

Dans ce qui suit, nous reprenons la démonstration du théorème 3.6.6 par la méthode de déchargement.

### Le principe de la méthode de déchargement

Nous considérons au 1<sup>er</sup> lieu un contre exemple minimal  $G'$  qui ne vérifie pas la propriété ( $P$ ) du théorème 3.6.6 c-à-d Soit  $L$  une affectation uniforme de liste de  $(\Delta(G) + 1)$  telle que  $G'$  n'est pas  $L$ -arête colorable, et nous prouvons qu'il ne peut pas contenir certaines configurations dites réductibles ou interdites. Nous faisons ceci, en supposant que  $G'$  ne contient pas l'une des configurations, et par contradiction on trouve que l'une des configurations réductibles existe dans  $G'$ .

La deuxième étape consiste à prouver que le graphe planaire  $G'$  ne satisfait pas la formule d'Euler sachant que  $G'$  ne contient aucune de ces configuration.

Nous attribuons à chaque sommet  $v$  une charge  $\omega(v)$  tel que  $\omega(v) = d(v) - 4$ , et à chaque face une charge  $\omega(f)$  tel que  $\omega(f) = d(f) - 4$ .

Nous appliquons les règles de déchargement pour redistribuer les charge entre les sommets et les faces du graphe  $G'$  avec conservation de la charge total. Comme certains configuration sont interdites, nous pouvons prouver qu'après l'application des règles de déchargement, chaque sommet et chaque face a une charge finale  $\omega'(v)$  et  $\omega'(f)$  non négative c-à-d ( $\omega'(v) \geq 0, \omega'(f) \geq 0$ ). Ce qui donne une contadiction. Cela implique qu'aucun contre exemple minimal ne peut exister, et par la suite la propriété  $P$  est vérifiée pour chaque graphe planaire  $G$ .

**Les configurations réductibles du théorème 3.6.6**

Soit  $G'$  un contre-exemple minimal qui ne vérifie pas le théorème 3.6.6, c'est -à-dire :  $G'$  n'est pas  $L$ -arête colorable tel que  $L$  est une liste uniforme de  $(\Delta(G) + 1)$  couleurs.

Les configurations suivant sont réductibles. Nous les notons dans ce qui suit par :

(Claim 3.6.i) \i = 5.8.

**Claim 3.6.5.** *Le graphe  $G'$  ne contient pas une arête  $uv$  tel que  $d(u) + d(v) \leq \Delta(G) + 2$ .*

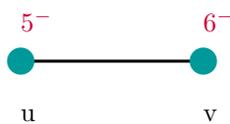


FIGURE 3.28: La configuration réductible du Claim 3.6.5.

*Démonstration.* Supposons que  $G'$  contient une arête  $uv$  tel que  $d(u) + d(v) \leq \Delta(G) + 2$ , par minimalité  $G'$  ne contient pas l'arête  $uv$ .

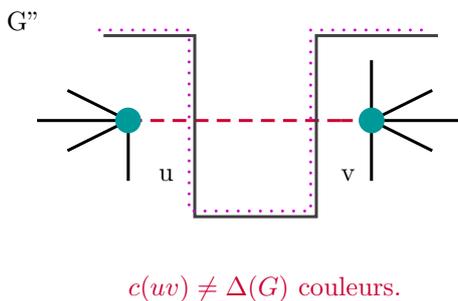


FIGURE 3.29: La preuve de la configuration réductible du Claim 3.6.5.

Supposons que  $G''$  contient l'arête  $uv$ , considérons le graphe  $G'' = G' - uv$  par la minimalité de  $G'$ , nous avons  $G''$  vérifie :  $\chi_l''(G) \leq \Delta(G) + 1$ , nous pouvons colorer  $G''$  puisque  $uv$  a au plus  $\Delta(G)$  couleurs interdites, donc nous pouvons étendre la coloration

à  $G$ .

□

**Claim 3.6.6.** *Le graphe  $G'$  ne contient pas un sommet de degré 2.*

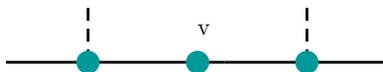
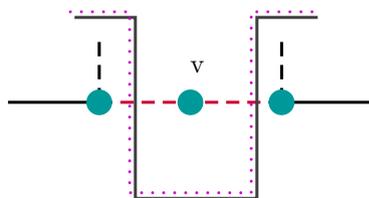


FIGURE 3.30: *La configuration réductible du Claim 3.6.6.*

*Démonstration.* Soit  $v$  un sommet de degré 2 dans ( $G'$ ) ce graphe qui est minimal  $G'$  ne contient pas le sommet  $v$ .



$c(v) \neq \Delta - 1$  couleurs interdites.

FIGURE 3.31: *Preuve de la configuration réductible du Claim 3.6.6.*

Supposons que  $G''$  contient le sommet  $v$ . Considérons le graphe  $G'' = G' - v$  par la minimalité de  $G'$ , nous avons  $G''$  qui vérifie  $\chi'_l(G) \leq \Delta(G) + 1$ , nous pouvons colorer  $G''$  puisque  $v$  a au plus  $\Delta(G) - 1$  couleurs interdit, donc nous pouvons étendre la coloration à  $G$ .

□

**Claim 3.6.7.** *Pour  $j \geq 3$ , les voisins d'un  $j$ -sommets ayant un degré au moins  $\Delta(G) + 3 - j$ . Pour chaque  $j$ . Soit  $k = \Delta(G)$  et  $N_j$  est le nombre de  $j$ -sommets de  $G'$ , ce qui implique que la somme de degré de chaque deux sommets adjacent vaut 12.*

Soit  $N_j$  le nombre de  $j$ -sommets dans  $G$ .

**Claim 3.6.8.**  *$G'$  vérifier l'inégalité suivante :  $N_k > 2N_3$ .*

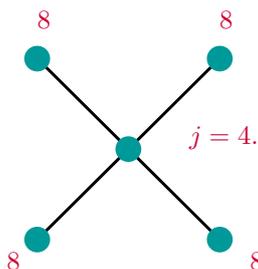


FIGURE 3.32: La configuration réductible du claim 3.6.7 pour  $j = 4$ .

*Démonstration.* Soit  $F$  l'ensemble des arêtes de  $G$  ayant un sommet de degré 3 (d'où les autres sommets a un degré  $k = \Delta(G)$ ).

Soit  $H$  le sous-graphe biparti avec ensemble de sommets de degré 3 et  $\Delta(G)$  et les arêtes de l'ensemble  $F$ .

Nous montrons d'abord que  $H$  est une forêt. Supposons par l'absurde que  $H$  a un cycle  $C$ . Puisque  $H$  est biparti,  $C$  est paire.

Par minimalité de  $G'$ ,  $G \setminus E(C)$  a une  $L$ -arête-coloration. Maintenant, chaque arête de  $C$  présente au moins deux couleurs disponibles étant donné qu'il est incident à  $\Delta(G) + 1$  arêtes, dont  $\Delta(G) - 1$  sont colorés. Puisque les cycles sont 2-arêtes-choosable, nous pouvons prolonger la  $L$ -arêtes-coloration à  $G$ , qui est une contradiction.

Maintenant, étant donné que tous les sommets de  $V_3$  ont un degré 3 dans  $H$ , nous concluons que  $|E(H)| = 3N_3$  et donc  $N_k + N_3 > 3N_3$ .

□

### Les règles de déchargement

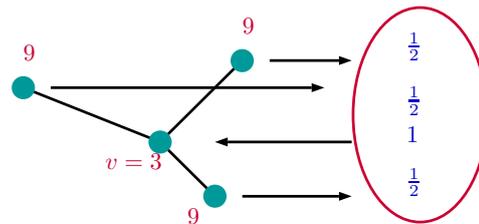
Nous attribuons à chaque sommet  $v$  une charge initiale  $\omega(v)$  tel que  $\omega(v) = d(v) - 4$  et chaque face  $f$  une charge initiale  $\omega(f)$  tel que  $\omega(f) = d(f) - 4$ . D'après l'équation (III) (chargement équilibre) nous résultons que la somme totale des charge initiale est négative ( $\omega = -8$ ), et que la banque des charges (le pot) a une charge négligeable.

Les règles de déchargement sert a rendre tout les sommets et les faces heureux, et garde la charge de la banque (pot) non négatif pour contredit le contre exemple.

**Définition 3.6.3.** La banque des charges ou pot est une récipient à ouverture large pour le stockage des charges.

Puisque  $G'$  n'a pas un sommet de degré 2, alors  $\delta(G') \geq 3$ , d'où seule les sommets de degré 3 et aussi les faces de degré 3 ont besoin d'une charge  $\omega(v)$  (resp  $\omega(f)$ ).

(R1) Chaque  $k$ -sommets donne une charge de  $\frac{1}{2}$  à la banque (pot) et à partir du quel chaque 3-sommet reçoit 1.



La banque des charges (pot).

FIGURE 3.33: La règle de déchargement (R1).

(R2) Chaque  $8^+$ -sommets donne  $\frac{1}{2}$  à chacune de ses 3-faces incidentes.

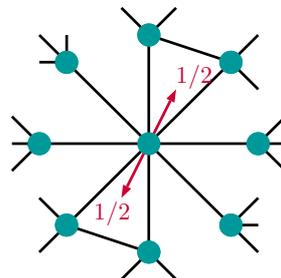


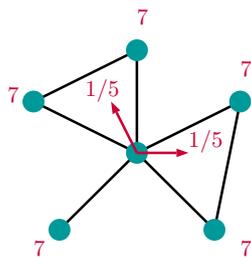
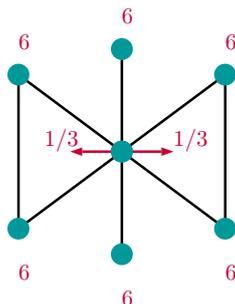
FIGURE 3.34: La règle de déchargement (R2).

(R3) Chaque  $j$  sommet avec  $j \in \{5, 6, 7\}$  donne  $\frac{j-4}{j}$  à chacune de ses 3-faces incidentes.

\* Si  $d(j) = 5$ , alors  $j$  donne une charge de  $\frac{1}{5}$  à chacune de ses 3-faces incidentes.

Si  $d(j) = 6$ , alors  $j$  donne une charge de  $\frac{1}{3}$  à chacune de ses 3-faces incidentes.

Si  $d(j) = 7$ , alors  $j$  donne une charge de  $\frac{3}{7}$  à chacune de ses 3-faces incidentes.

FIGURE 3.35: La règle de déchargement (R3) pour  $j = 5$ .FIGURE 3.36: La règle de déchargement (R3) pour  $j = 6$ .

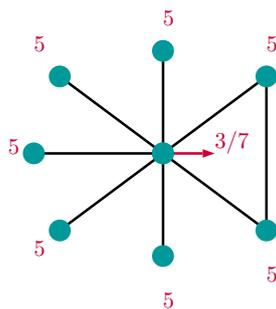
Nous montrons que la charge finale  $\omega'$  pour tout sommets et faces est positive. aussi pour la charge finale de la banque des charges (pot). Cela implique que la charge finale totale est positive, puisque la charge totale finale  $\omega'$  égale à la charge totale initiale  $\omega$ . Donc est une contradiction.

Puisque  $N_k > 2N_3$  par le claim 3.6.4, la charge du pot est positif, car si  $N_3 = 2$  alors  $N_9 = 3 * 2 = 6$  ce qui confirme que la charge totale du pot est positive.

Soit  $v$  un  $j$ -sommets.

- \* Si  $j = 3$ ,  $v$  reçoit 1 du pot et ne donne aucune charge a part, alors  $\omega(v) \geq 0$ .
- \* Si  $j = 4$ , la charge de  $v$  ne change pas car donc  $\omega(v) = j - 4 = 0$ .
- \* Si  $j \in \{5, 6, 7\}$ , alors  $v$  envoie au plus  $\frac{j-4}{j}$  à chacune de ses faces d'incident, de sorte que  $\omega(v) = j - \frac{j-4}{j} \geq 0$ .
- \* Si  $8 \leq j \leq \Delta(G) - 1$ , alors  $v$  envoie au plus  $\frac{1}{2}$  à chacune de ses faces d'incidents alors  $\omega(v) = j - 4 - \frac{j}{2} \geq 0$ .
- \* Si  $j = \Delta(G)$ , alors  $v$  donne une charge de  $\frac{1}{2}$  au pot et  $\frac{1}{2}$  à chaque 3-face incidentes alors  $\omega(v) = j - 4 - \frac{d}{2} - \frac{1}{2} \geq 0$ , puisque  $d \geq 9$ .

Soit  $f$  un  $j$ -faces.

FIGURE 3.37: La règle de déchargement (R3) pour  $j = 7$ .

- \* Si  $j \geq 4$ , alors sa charge ne change pas, alors  $\omega(f) = d(f) - 4 \geq 0$ .
- \* Supposons maintenant que  $\omega(f) = 3$ . Si  $f$  contient un  $4^-$ -sommet, alors les deux autres voisins ont un degré au moins  $\Delta(G) - 1$ , alors  $f$  reçoit  $\frac{1}{2}$  de chacun d'eux, alors  $\omega(f) = 3 - 4 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$ .
- \* Si  $f$  contient un 5-sommets alors ses deux autres sommets ont un degré au moins  $\Delta(G) - 2$  qui est au moins 7. alors  $f$  reçoit au moins  $\frac{1}{5}$  de son 5-sommets et au moins  $\frac{3}{7}$  des deux autres sommets. Donc,  $\omega(f) \geq 3 - 4 + \frac{1}{5} + 2 + \frac{3}{7} > 0$ , d'autre part si les sommets incidentes à  $f$  est  $6^+$  alors  $f$  recoit une charge de  $\frac{1}{3}$  de chaque sommets.

### 2<sup>eme</sup> Exemple

En 1973, Grünbaum [17] a publié un grand papier sur la coloration de graphe, dans lequel, différentes restrictions ont été donnés au type de tous les 2 et 3 chromatiques sous-graphes. La conjecture principale de Grünbaum dans [17] était : Tout graphe planaire acyclique est 5-colorable.

En 1976, Steinberg [20] a conjecturé que tout graphe planaire sans cycles de longueur 4 et 5 est 3-colorable. Récemment, en 2005 Borodine et al [17], ont prouvé que les graphes planaires sans cycles de longueur 4 à 7 sont des 3-colorables.

#### Conjecture 3.6.4. (Steinberg 1976 [20])

Tout graphe planaire sans cycle de longueur 4 ou 5 est 3-colorable.

Erdős, [20] a suggéré la relaxation du problème suivant : qu'il existe une constante  $C$  telle que l'absence dans un graphe planaire de cycles de longueur entre 4 à  $C$  garantit son 3-colorabilité? Abbott et Zhou [1] ont prouvé qu'un tel  $C$  existe tel que  $C = 11$ .

#### Théorème 3.6.8. (Abbott et Zhou, 1991 [1])

Tout graphe planaire sans cycle de longueur compris entre 4 et 11 est 3-colorable.

Dans ce qui suit nous représentons la démonstration de Abbott et Zhou,[14] où ils utilisent la méthode de déchargement pour démontrer le théorème 3.6.8.

En suite en 1996 [14] a été amélioré pour  $C = 10$  par Borodin.

**Théorème 3.6.9. (Borodin,1996 [45])**

*Tout graphe planaire sans cycle de longueur compris entre 4 et 10 est 3-colorable.*

**Démonstration du théorème 3.6.8**

**Le principe de la méthode**

Nous supposons au 1<sup>er</sup> lieu un contre exemple minimal  $G'$  qui ne vérifie pas la propriété  $P$  du théorème 3.4.4 c-à-d, soit  $G'$  un graphe planaire sans cycle de longueur entre 4 et 11 qui n'est pas 3-colorable. et nous prouvons qu'il ne peut pas contenir certaines des configurations réductibles.

Nous supposons que  $G'$  ne contient pas l'une des configurations, et par l'absurde nous trouvons que l'une des configuration réductible existe dans  $G'$ .

Deuxièmement nous prouvons que le graphe planaire  $G'$  ne satisfait pas la formule d'Euler sachant que  $G'$  ne contient aucune de ces configurations réductibles.

Nous attribuons à chaque sommet  $v$  une charge  $\omega(v)$  tel que  $\omega(v) = d(v) - 6$ , et à chaque face une charge  $\omega(f)$  tel que  $\omega(f) = 2d(f) - 6$ .

Nous appliquons les règles de déchargement pour redistribuer les charges entre les sommets et les faces du graphe  $G'$  avec conservation de la charge totale. Comme certaines configuration sont interdites, nous pouvons prouver qu'après l'application des règles de déchargement, chaque sommet et chaque face a une charge finale  $\omega'(v)$  et  $\omega'(f)$  non négative c-à-d  $\omega'(v) \geq 0$ ,  $\omega'(f) \geq 0$ . Ce qui donne une contadiction. Cela implique qu'aucun contre exemple minimal ne peut exister, et par la suite la propriété  $P$  est vérifiée pour chaque graphe planaire  $G$ .

**Les configurations réductibles**

Soit  $G'$  un contre-exemple-minimal, nous prouvons que  $G'$  vérifies les claims suivantes :

**Claim 3.6.9.**  $G'$  ne contient pas un sommet de degré au plus 2.

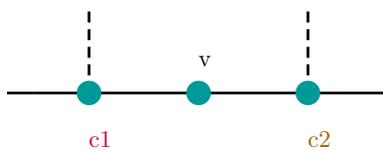


FIGURE 3.38: La configuration réductible de Claim 3.6.9.

*Démonstration.* Supposons que  $v$  soit un sommet de degré au plus 2 dans  $G'$ . Par minimalité,  $G' - v$  admet une 3-coloration propre. Comme  $v$  est adjacent à au plus deux sommets, alors  $v$  a au plus 2 couleurs interdites, donc nous pouvons étendre la coloration à  $G$ .

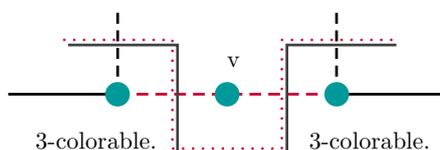


FIGURE 3.39: preuve du configuration réductible de Claim 3.6.9.

□

**Claim 3.6.10.**  $G'$  ne contient pas un sommet d'articulation (séparateur).

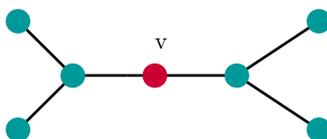


FIGURE 3.40: La configuration réductible de Claim 3.6.10.

*Démonstration.* Supposons que  $G'$  ait un sommet séparateur  $v$ . Soient  $\{C_1, \dots, C_k\}$  les composantes connexes de graphe  $G' - v$ . Pour  $\forall i = \overline{1, k}$ , soit  $G_i = G[C_i \cup \{v\}]$ . Par minimalité de  $G'$ , tous les  $G_i$  admettent une 3-coloration propre  $\{1, 2, 3\}$ , quitte à interchanger les couleurs nous pouvons supposer que  $v$  est coloré 1 dans chacun de ces coloration. L'union de celles-ci est une 3-coloration propre de  $G$ , ce qui est une contradiction.

□

### Les règles de déchargement

Nous attribuons a chaque sommet  $v$  une charge initiale  $\omega(v) = d(v) - 6$  et chaque face  $f$  une charge initiale  $\omega(f) = 2d(f) - 6$ . D'après la formule d'Euler la charge totale vaut  $\sum_{v \in d(G)} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F(G)} (2d(f) - 6) = -12$ . Notre but est d'effectuer une phase de

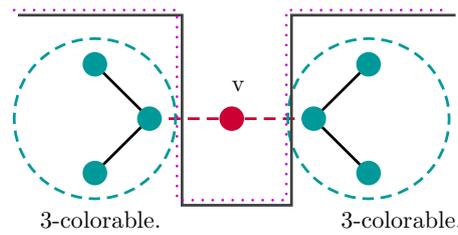


FIGURE 3.41: Preuve du configuration réductible de Claim 3.6.10.

déchargement afin que tout les sommets et faces aient une charge positive, ce qui est une contradiction.

Initialement toutes les faces ont une charge positive et les grandes faces ont une charge largement positive, En revanche tout les sommets de degré inférieur à 6 ont une charge strictement négative, nous allons donc effectuer un déchargement de grandes faces vers les sommets.

(R1) Chaque face de taille au moins 12 a au moins une charge  $\omega(f) \geq 2d(f) - 6 = 18$  va donner  $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$  a chacun de ses sommets.

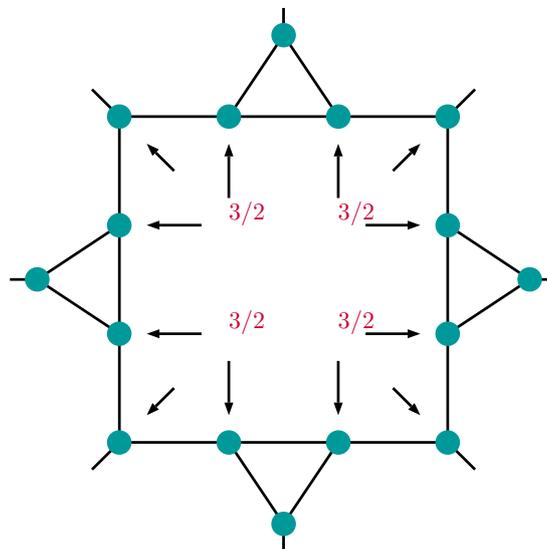


FIGURE 3.42: La règle de déchargement.

Observons que deux faces de degré 3 ne peuvent pas partager une arête car  $G'$  ne contient pas un cycle de longueur 4, de plus  $G'$  n'a pas un sommet séparateur par claim 3.6.10, donc chaque sommet est adjacent a  $d(v)$  faces donc au mois  $\lceil \frac{d(v)}{2} \rceil$  faces distinctent de taille au moins 12 .

Les nouvelles charges  $\omega'(v)$  et  $\omega'(f)$  obtenues sont alors les suivantes :

Puisque  $G'$  n'a pas de sommets de degré  $\leq 2$ , donc  $\forall v \in G' d(v) \geq 3$ , la nouvelle charge d'un sommet  $v$  est au moins  $\omega'(v) = d(v) - 6 + \frac{3}{2}(\frac{d(v)}{2}) \geq 0$  car  $d(v) \geq 3$ .

\* Les faces de taille 3 ont une charge nulle donc elle n'ont rien à donner.

\* Les faces de taille plus grandes, sont de taille au moins 12 car les cycles de longueur entre 4 et 11 sont interdits, alors leurs nouvelles charges est  $2d(f) - 6 - \frac{3}{2}d(f) \geq 0$  ce qui le cas.

### Conclusion

Après l'application des règles de déchargement, la charge finale totale est supérieure à 0 ce qui contredit qu'elle vaut  $-12$  ce qui implique que n'importe quelle contre exemple minimal ne peut pas exister donc la propriété posée est vraie.

Borodin [17] et indépendamment Sanders et Zhao [17] ont prouvé le théorème pour  $C \leq 9$ , aussi Borodin, Glebov, Raspaud et Salavatipour [15] ont prouvé le résultat du théorème 3.

**Théorème 3.6.10.** (2004 [15]) *Tout graphe planaire sans cycle de longueur entre 4 et 7 est 3-colorable.*

Min Chen, Weifan Wang ont prouvé le théorème suivant dans [21] :

**Théorème 3.6.11.** (2007 [21])

*Soit  $G$  un graphe planaire qui contient 5-cycle. Ensuite, tous les 3-coloration des sommets de toute 3-face ou 9-face de  $G$  peut être prolongée dans une 3-coloration.*

Borodin, Glebov, Montassier et Raspaud [16] ont montré que les graphes planaires sans 5 et 7 cycles et sans triangles adjacents sont 3-colorable.

**Théorème 3.6.12.** (2008 [16])

*Tout graphe planaire sans 5 et 7 cycles et sans triangles adjacents sont 3-colorable.*

Dans l'amélioration du résultat de Borodine et al, Yingqian Wang, Ming Chen, Liang Shen ils ont montré que si un graphe planaire sans cycles de longueur 4, 6 et 7 ne contient pas de 5-faces adjacentes, il est 3-colorable. En corollaire, chaque graphe planaire sans cycles de longueur 4,6,7 et 8 est 3-colorable.

**Corollaire 3.6.1.** (Yingqian Wang, Ming Chen, Liang Shen [20])

*Tout graphe planaire sans cycles de longueur 4,6,7 et 8 est 3-colorable.*

Huajing Lua, Yingqian Wanga, Weifan Wanga, Yuehua Bua, Mickaël Montassierb, André Raspaudb ont prouvé le résultat du théorème 6.

**Théorème 3.6.13.** (2009 [18])

*Tout graphe planaire sans 4, 7 et 9 cycles est 3-colorable.*

# 4

## Implémentation de la méthode de résolution

## 4.1 Généralités sur le langage

Matlab est un logiciel dédié à la résolution de problèmes d'analyse numérique ou de traitement du signal. Il permet d'effectuer des calculs matriciels ou de visualiser les résultats sous forme graphique. La formulation des problèmes s'apparente à la formulation mathématique des problèmes à résoudre. L'utilisation de ce logiciel consiste à lancer des lignes de commandes, qui peuvent le plus souvent ressembler à la programmation en C.

Le nom Matlab vient de MATrix LABoratory, les éléments de données de base manipulés par Matlab étant des matrices (mais pouvant évidemment se réduire à des vecteurs et des scalaires) qui ne nécessitent ni dimensionnement ni déclaration de type. Contrairement aux langages de programmation classiques, les fonctions du Matlab permettent de manipuler directement et interactivement ces données matricielles, le rendant ainsi particulièrement efficace en calcul numérique, analyse et visualisation de données en particulier. Il existe deux modes de fonctionnement sur Matlab :

**le mode interactif :** les instructions sont exécutées au fur et à mesure qu'elles sont données par l'utilisateur.

**le mode exécutif :** dans ce cas, l'utilisateur utilise un fichier "M-file" contenant toutes les instructions à exécuter.

## 4.2 Programmation avec Matlab

Il y a deux façons pour écrire des fonctions Matlab :

- soit directement dans la fenêtre de commandes,
- soit en utilisant l'éditeur de développement de Matlab, en sauvegardant les programmes dans des fichiers texte avec l'extension ".m".

### Fichiers \*.m

Les programmes sauvegardés dans les fichiers Matlab (\*.m) sont alors directement utilisables comme des fonctions Matlab à partir de la fenêtre de commande. Pour cela, le fichier doit se trouver dans le répertoire Matlab, qui est en pratique le dossier Work.

### Création d'une fonction

La création d'une fonction dans Matlab se fait par la syntaxe suivante :  $\text{fonction}[s_1, s_2, \dots, s_n] = \text{nom-fonction}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . Les variables  $s_1, s_2, \dots, s_n$  sont les arguments de sortie (S) de la fonction et les variables  $e_1, e_2, \dots, e_n$  sont les arguments d'entrée (E). Attention : le fichier M(M-file) doit avoir le même nom que la fonction qu'il contient.

### Implémentation des méthodes

Avant de parler des programmes et de leurs caractéristiques, laissez nous vous présenter les fonctions utilisées et notre démarche pour programmer et étudier ces méthodes.

#### Les commandes et les fonctions prédéfinies utilisées

- \* **adjacency(G)** :  $A = \text{adjacency}(G)$  renvoie la matrice d'adjacence pour le graphe  $G$ .  
Si  $(i, j)$  est une arête dans  $G$ , alors  $A(i, j) = 1$ . Dans le cas contraire,  $A(i, j) = 0$ .
- \* **bins = conncomp** :  $\text{bins} = \text{conncomp}(G)$  renvoie les composantes connexes du graphe  $G$  comme binaire. Les numéros de cases indiquent à quel composante chaque sommet appartient dans le graphe.
- \* **full** :  $\text{full}(A)$  Convertit une matrice d'adjacence creuse à une matrice d'adjacence complète.
- \* **degree** :  $D = \text{degree}(G)$  renvoie le degré de chaque sommet dans le graphe  $G$ . Le degré est le nombre des arêtes connectés à chaque sommet.
- \* **length** :  $\text{length}(x)$  trouve la Longueur de vecteur ou plus grande dimension de la collection.
- \* **numnodes** :  $\text{numnodes}(G)$  renvoie le nombre de sommets dans un graphe  $G$ .
- \* **plot** :  $\text{plot}(x, y)$  tracé "y" en fonction de "x".
- \* **rmnode** :  $G = \text{rmnode}(G, i)$  supprime les sommets spécifiés par  $i$  de graphe  $G$ . Les arêtes incidentes aux sommet  $i$  sont également supprimés.  $\text{rmnode}$  actualise la numérotation des sommets dans  $H$ .
- \* **size** :  $\text{size}(M)$  fourni les dimensions de la matrice  $M$ .
- \* **sort** :  $\text{sort}(v, 'descent')$  trié les éléments de  $v$  selon un ordre décroissant du degré.
- \* **sum** : si  $A$  est un vecteur  $\text{sum}(A)$  rend la somme des éléments, si  $A$  est une matrice, la somme ( $A$ ) traite les colonnes de  $A$  comme vecteurs, rendre un vecteur de la ligne des sommes de chaque colonne.
- \* **triu** :  $U = \text{triu}(A)$  renvoie la matrice triangulaire supérieure de  $A$ .
- \* **zeros** :  $\text{zeros}(n)$  return  $n$ -par- $n$  matrice de zéros, ( $\text{zeros}(m, n)$  return un  $m$ -par- $n$  matrice de zéros).

### 4.3 L'implémentation de la méthode de déchargement

La méthode de déchargement est une méthode de démonstration qu'est applicable sur plusieurs théorèmes et propriétés concernant principalement la coloration des graphes.

Dans notre cas nous allons appliquer cette technique sur un théorème particulier annoncé déjà dans le chapitre précédent.

**Théorème 4.3.1.** (Abbott et Zhou, 1991 [1])

Tout graphe planaire sans cycle de longueur compris entre 4 et 11 est 3-colorable.

Afin d'animer notre application nous avons crée des interfaces en utilisant guide MATLAB. La première interface représente la page de garde (Figure 4.1).



FIGURE 4.1: Fenêtre qui représente la page de garde.

Cette dernière nous permet de passer a une deuxième interface qui représente le menu des fonctions programmées de cette méthode pour le théorème 4.3.1 figure (4.2).

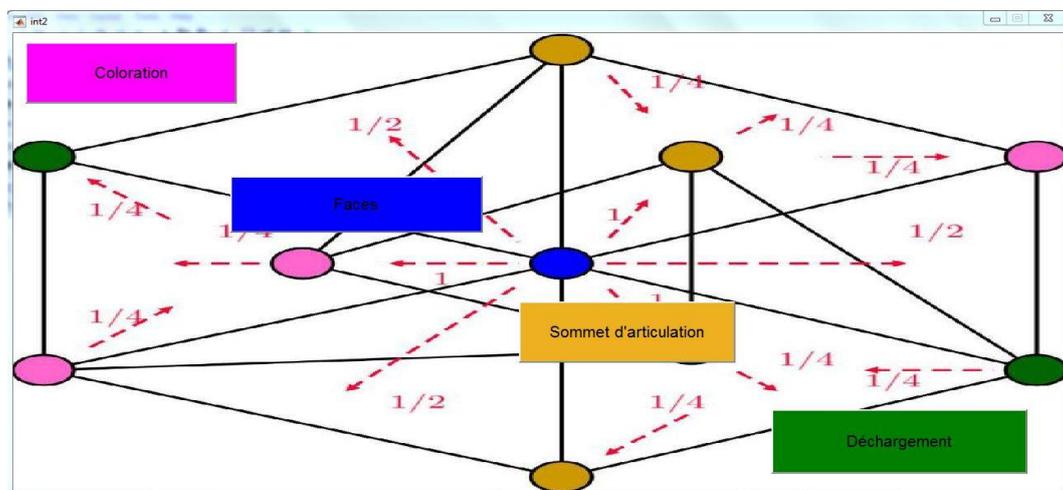


FIGURE 4.2: Fenêtre qui représente le plan de notre méthode.

### 4.3.1 La coloration

La méthode de déchargement se base sur la supposition d'un contre exemple minimal qui ne vérifiée pas une certaines propriété dans notre cas (la 3-colorabilité).

Pour cela nous avons programmer une fonction *coloration* qui renvoie le nombre chromatique  $\chi(G)$  ainsi un vecteur qui donne à chaque sommet sa couleurs et sans oublier que cette fonction nous renvoie le graphe (G) coloré.

Dans le logiciel matlab nous insérons un graphe ( $G$ ) de la manière suivante :

Tout d'abord nous avons besoin de deux vecteurs  $S, T$  tel que :

$S$  est le vecteurs des prédécesseurs.

$T$  est le vecteurs des successeurs, puis nous définissons un graphe  $G$  avec la fonction graphe  $G = graph(S, T)$ .

Voici l'algorithme relatif à la fonction coloration :

---

**Algorithm 2** L'algorithme coloration ;

---

1: **Entrée** : un graphe  $G = (V, E)$  d'ordre  $n$ .

2: **Sortie** : une coloration de  $G$  avec un nombre minimum de couleurs.

3: **Début** :

$M :=$  La matrice d'adjacence du graphe  $G$  ;

$D :=$  vecteur des degré des sommets de  $G$  par ordre décroissant ;

Parcourir  $M$  selon les indices des sommets de  $D$  ;

4: Couleur := 1 ;

5: **S'** il existe un sommet non coloré alors

**Pour**  $i = D[1]$  à  $D[n]$  faire.

**Pour**  $j = 1$  à  $n$  faire.

Attribuer la couleurs de sommets de  $D[1]$  à tout sommets  $j$ , non adjacent à  $D[1]$  qui n'est pas coloré avec la couleur de  $D[1]$  ;

**Fin pour**

Couleur := Couleur + 1 ;

**Fin pour**

6: **Fin Si**

---

#### Exemple d'exécution

**Entrée**  $S = [1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4 \ 5]$ ,  $T = [2 \ 5 \ 6 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 4 \ 5 \ 5 \ 6 \ 6]$ .

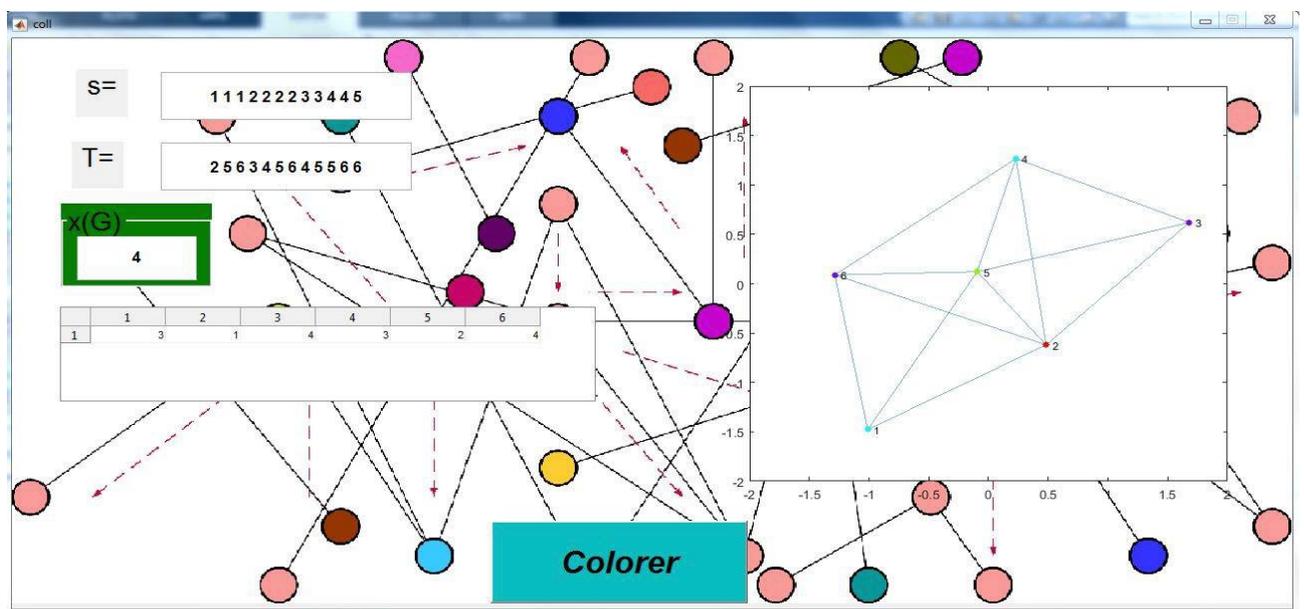
**Sortie** :  $\chi(G) = 4$ .

$V =$ 

Les sommets( $i$ )	1	2	3	4	5	6
Les couleurs	3	1	4	3	2	4

TABLE 4.1: Le vecteur des sommets et leurs couleurs.

le programme nous donne une fenêtre pour exécuter le programme de coloration et afficher le nombre chromatique de  $G$ , ainsi la couleur de chaque sommets et le graphe correspondant.

FIGURE 4.3: Fenêtre qui représente la coloration du graphe  $G$ .

### Le temps d'exécution

Afin de calculer le temps d'exécution pour le programme coloration nous avons programmé la fonction *time*, cette dernière est pour but de claculé le temps nécessaire pour l'exécuter selon des graphes généré aléatoirement c-à-d on fixe le nombre de sommet et on change la structure du graphe en changeant le nombre d'arêtes.

Le tableau suivant résume le temps d'exécution de coloration

Nbr de sommets	Nbr d'arête	temps coloration (s)
n = 5	m=8	T=2.235821
n = 5	m=7	T=0.382746
n = 5	m=0	T=0.080258
n = 20	m=63	T=0.061773
n = 20	m=113	T=0.044896
n = 20	m=80	T=0.017936

TABLE 4.2: Le temps d'exécution de coloration.

### 4.3.2 Les configurations réductibles

La 1<sup>er</sup> étape de la méthode de déchargement consiste à définir les configurations réductibles d'un contre exemple minimal. Pour cela nous avons l'algorithme suivant qui cherche une configurations réductible.

---

**Algorithm 3** L'algorithme configuration réductible 2;
 

---

- 1: **Entrée** : un contre exemple minimal  $G$ .
  - 2: **Sortie** : sommet de degré inférieure ou égale à 2, une configuration réductible vérifiée.
  - 3: **Début** :
    - Tant que** il existe un sommet dans le graphe faire
      - S'il existe** un somme de degré  $\leq 2$  alors
        - Pour**  $i = 1$  à  $n$  faire
          - colorer les composantes de  $(G - i)$ ;
          - étendre la coloration à  $i$  en lui donnant une des couleurs non attribuées à ses voisins;
        - Fin pour**
      - Fin si**
      - S'il existe** un somme séparateur alors
        - Pour**  $i = 1$  à  $n$  faire
          - $A_i = G - i$ ;
          - colorer les composantes connexe  $A \cup i$ ;
          - permuter éventuellement les couleurs pour que  $i$  soit coloré 1 dans tous les  $A_i$ ;
          - on obtient alors la 3-coloration de  $G$ ;
        - Fin pour**
      - Fin si**
    - Tant que**
- 

Premièrement nous supposons que le contre exemple minimal  $G'$  ne contient pas certaines configurations interdites, et par rapport à notre théorème les configurations interdites sont :

\* Le graphe  $G'$  ne contient pas *un sommet d'articulation (séparateur)*. Pour cela l'algorithme programmé avec Matlab "*sommet séparateur*" est un programme qui permet de résoudre les problèmes de connexité qui nous renvoie le nombre de sommet d'articulation dans un graphe  $G$  s'il existe, aussi sont numéro dans le graphe.

L'algorithme suivant relatif à la fonction "sommet séparateur".

---

**Algorithm 4** L'algorithme sommet séparateur ;

---

- 1: **Entré** : un graphe  $G = (V, E)$  d'ordre  $n$ .
  - 2: **Sortie** : l'existence d'un sommet d'articulation et son numéro dans le graphe.
  - 3: **Début** :
  - 4: composant connexe := 0 ;
  - 5: **Pour**  $i = 1$  à  $n$  faire
    - $A := G - i$  ;
    - Si**  $A$  est connexe alors
      - $i$  n'est pas un sommet séparateur ;
    - Sinon**
      - composant connexe := composant connexe + 1 ;
      - numéro de (sommet séparateur)= $i$  ;
    - Fin si**
  - 6: **Fin pour**
- 

#### Exemple d'exécution

**Entrée** :  $S = [1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 5 \ 6 \ 6 \ 7 \ 8]$ ,  $T = [2 \ 4 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 9 \ 8 \ 9]$ .

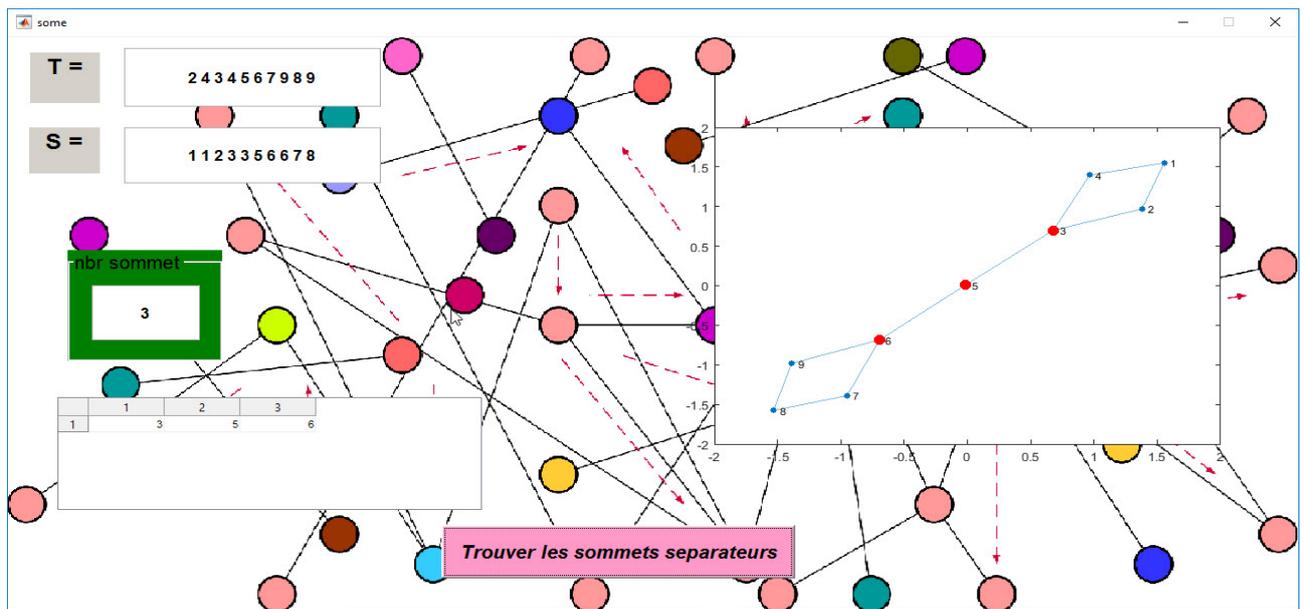
**Sortie** : sommets d'articulations = 3.

$V =$

Les sommets d'articulations ( $i$ )	1	2	3
leurs numéros	3	5	6

TABLE 4.3: Le vecteur des sommets d'articulations et leurs numéros dans le graphe  $G$ .

le programme nous donne une fenêtre pour exécuter le programme et afficher s'il existe ou non les sommets d'articulations, ainsi un vecteur des sommets d'articulation et leurs numéros dans le graphe .

FIGURE 4.4: Fenêtre qui représente l'existence des sommets d'articulation  $G$ .

### Le temps d'exécution

Afin de calculer le temps d'exécution pour le programme sommet séparateur nous avons programmé la fonction *time1*, cette dernière est pour but de claculé le temps nécessaire pour l'exécuter selon des graphes généré aléatoirement c-à-d on fixe le nombre de sommet et on change la structure du graphe en changeant le nombre d'arêtes.

Le tableau suivant résume le temps d'exécution de sommet séparateur

Nbr de sommets	Nbr d'arête	tmprs sommet separateur (s)
n = 5	m=2	T=10.135122
n = 5	m=9	T=0.102041
n = 5	m=7	T=0.061770
n = 20	m=5	T=0.313664
n = 20	m=103	T=0.367777
n = 20	m=94	T=0.283028

TABLE 4.4: Le temps d'exécution de sommet séparateur.

Afin de crée des graphes aléatoirement nous avons programé une fonction générateur qui génère des graphes selon le nombre de sommet que l'on donne.

la fenêtre suivante donne la représentation d'un graphe générer aléatoirement à partir

---

**Algorithm 5** L'algorithme générateur ;

---

- 1: **Entrée** : Un nombre de sommet  $n$ .
  - 2: **Sortie** : des graphes générés aléatoirement avec coloration et sommet séparateur.
  - 3: **Début** :
  - 4: Générer  $P$  ;
  - 5: Générer une matrice  $A < p$
  - 6: Calculer la matrice triangulaire de  $A$
  - 7: La somme de la matrice triangulaire et sa transposé
  - 8: Dessiner le graphe
- 

de son nombre de sommet et représente aussi la coloration des graphes et la recherche de sommet séparateur.

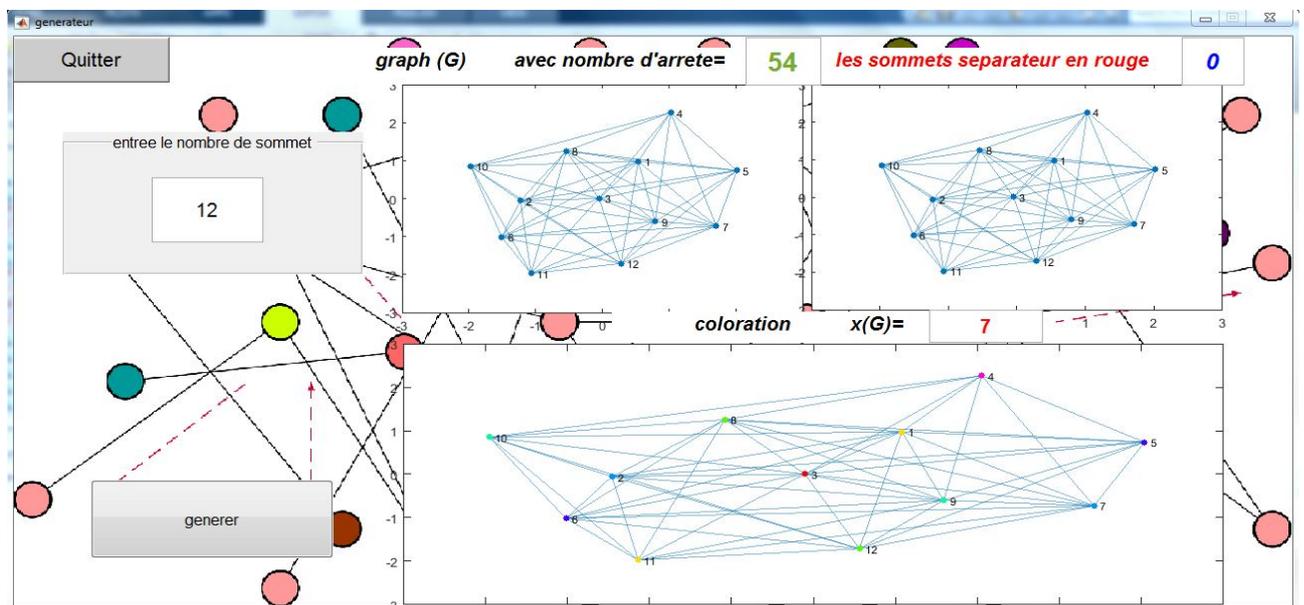


FIGURE 4.5: Fenêtre qui représente les faces du graphe  $G$ .

\* Deuxièmement nous supposons que le contre exemple minimale ne doit pas contenir un sommet de degré inférieur ou égal à 2. Pour cela nous avons l'algorithme *degré inférieure à 2* suivant qui teste s'il existe des sommets de degré  $\leq 2$  dans le contre exemple minimale.

### 4.3.3 Les règles de déchargement

Après la vérification des configurations réductibles nous pouvons maintenant appliquer la deuxième étape qui est les règles de déchargement.

---

**Algorithm 6** L'algorithme degré inférieure à 2;

---

- 1: **Entrée** : un graphe  $G = (V, E)$  d'ordre  $n$ .
  - 2: **Sortie** : existence ou non d'un sommet de degré inférieure ou égale à 2.
  - 3: **Début** :
  - 4:  $D :=$  vecteur de degré des sommets de  $G$ ;
  - 5: **Pour**  $i = 1$  à  $n$  faire
    - Si**  $D(i) \leq 2$  alors
      - $i$  est un sommet de degré  $\leq 2$  (la configuration réductible n'est pas vérifiée)
    - Sinon**
      - $D(i) > 2$  et la configuration réductible est vérifiée;
    - Fin si**
  - 6: **Fin pour**
- 

Pour appliquer les règles de déchargement nous avons besoin d'attribuer des charges aux sommets et aux faces comme nous avons expliqué dans le chapitre précédent. Alors il faut tout d'abord définir les faces.

Comme notre exemple contient que des faces de degrés 3 et 12, donc nous avons abouti à programmer une fonction "Faces" qui calcule le nombre de faces de degré 3 et 12 dans un graphe  $G$  et aussi deux matrices qui renvoient les sommets de chaque faces (3, 12).

Dans l'algorithme "Faces" programmé avec Matlab et puisque nous travaillons sur les graphes non orienté. Nous avons utilisé la triangulation de la matrice d'adjacence dans le but d'éviter a revenir à un sommet déjà traité

---

**Algorithm 7** Faces ;

---

```

1: Entrée : un graphe  $G = (V, E)$  d'ordre  $n$ .
2: Sortie : les faces de longueur 3 et 12 et leurs matrices de sommets.
3: Début :
4: Soit  $M$  la matrice d'adjacence et  $B$  la matrice triangulaire supérieure de  $M$  ;
5: face3 = 0 ;
6: face12 = 0 ;
7: Pour  $i = 1$  à  $n$  faire
    Chercher s'il existe une arête avec un autre sommet  $j$  ;
8:     Pour  $j = i + 1$  à  $n$  faire
        Chercher s'il existe une arête avec un autre sommet  $k$  ;
9:         Pour  $k = j + 1$  à  $n$  faire
            Si existe une arête avec le sommet  $i$  ;
                alors face de degré 3 = face de degré 3 + 1 ;
                indice des sommets de face de degré 3 = [i,j,k] ;
            Fin Si
10:            Pour  $l = k + 1$  à  $n$  faire
                :
                et continuer jusqu'à  $x = w + 1$  ;
11:            Pour  $x = w + 1$  à  $n$  faire
                Si existe une arête avec le sommet  $i$  ;
                    alors face de degré 12 = face de degré 12 + 1 ;
                    indice des sommets de face de degré 12
                    = [i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,w,x] ;
                Fin Si
            Fin pour
                :
            Fin pour
12:         Fin pour
3:     Fin pour
13: Fin pour

```

---

**Exemple d'exécution**

**Entrée :**

$S=[1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12]$ ,  $T=[2\ 3\ 4\ 5\ 3\ 13\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13]$ .

**Sortie :** nombre de faces de degré 3 =3.

nombre de faces de degré 12=1.

les faces de longueurs 3	les indices des sommets de faces
1	1 2 3
2	1 3 4
3	1 4 5

TABLE 4.5: Les faces de degré 3.

Les faces de longueurs 12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Les indices des sommets de ses faces	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

TABLE 4.6: Les faces de degré 12.

Le programme nous donne une fenêtre après l'exécution de l'exemple et afficher le nombre de faces de degré 3 et 12 et leurs sommets.

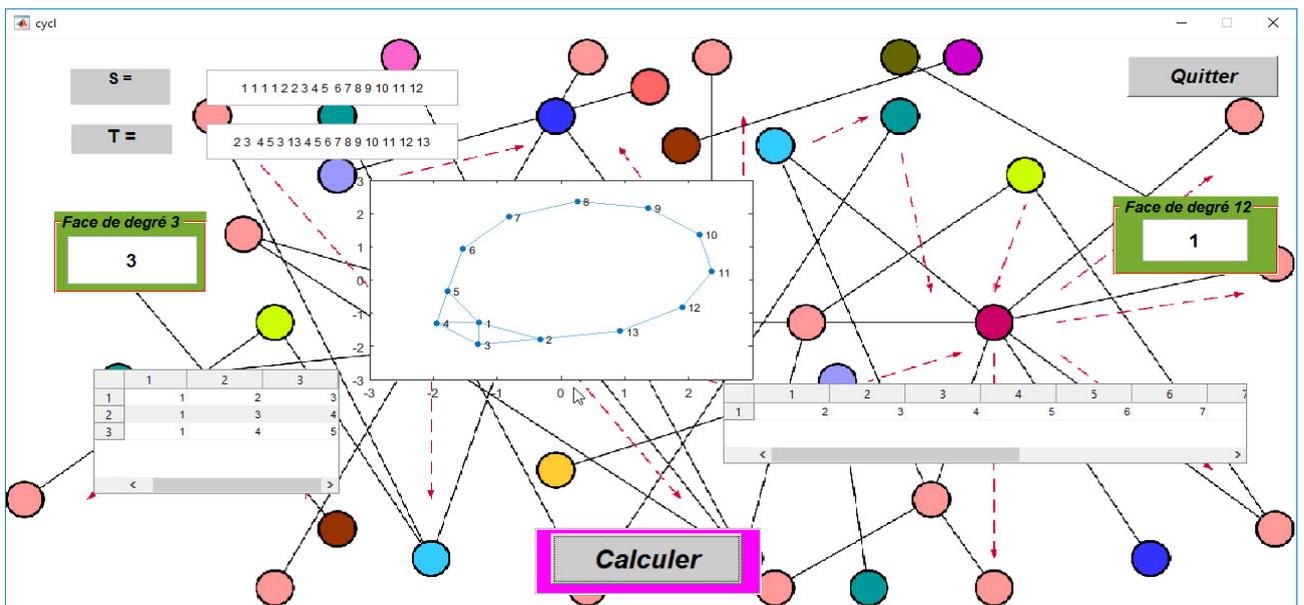


FIGURE 4.6: Fenêtre qui représente les faces du graphe  $G$ .

### Le temps d'exécution

Afin de calculer le temps d'exécution pour le programme face nous avons programmé la fonction *time2*, cette dernière est pour but de claculé le temps nécessaire pour l'exécuter selon des graphes généré aléatoirement c-à-d on fixe le nombre de sommet et on change la structure du graphe en changeant le nombre d'arêtes.

Le tableau suivant résume le temps d'exécution de face

Nbr de sommets	Nbr d'arête	tmpts face (s)
n = 5	m=6	T=0.145062
n = 5	m=2	T=0.038185
n = 5	m=3	T=0.004214
n = 20	m=20	T=0.093726
n = 20	m=17	T=0.010458
n = 20	m=107	T=0.401104

TABLE 4.7: Le temps d'exécution de face.

La programmation de toutes les fonctions précédant vont être utile dans la programmation de la méthode de déchargement pour le théorème 4.3.1.

En se basant sur ce théorème nous avons programmé une fonction *Déchargement* qui renvoie si la méthode de déchargement est applicable ou non et si la propriété est vérifiée, c-à-d il n'existe pas un contre exemple minimal alors le graphe  $G$  est trois colorable.

Pour arriver à ce résultat nous avons fait appelle à une fonction "Règle de déchargement" qui sert à redistribuer les charges entre les sommets et les faces. Tel que la charge de initiale  $\omega(v)$  de chaque sommet  $v$  est  $\omega(v) = d(v) - 6$  et la charge de initiale  $\omega(f)$  de chaque face  $f$  est  $\omega(f) = 2d(f) - 6$ . Donc la charge initiale totale est  $\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F(G)} (2d(f) - 6) = -12$ .

Dans notre cas seulement les sommets de degré 3, 4, 5 qui ont besoin des charges et la face de degré 12 qui donne une charge de  $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$  à chacun de ses sommets.

Voici l'algorithme de la fonction Règle de déchargement.

Et pour aboutir a notre objectif concernant le théorème nous avons fait un algorithme principale ("*Déchargement*") qui contient appel a toute les fonctions que nous avons

---

**Algorithm 8** L'algorithme Règle de déchargement

---

- 1: **Entrée** : un graphe  $G$  connexe sans cycle entre 4 et 11.
  - 2: **Sortie** : vecteurs des charges des sommets et des faces.
  - 3: **Début** :
  - 4: **Pour**  $i = 1$  à  $n$  faire
  - 5:  $d(i) = d(i) - 6$ ;
  - 6: charge de face de degré 3 :=  $2^*(\text{degré de la face } 3) - 6$  ;
  - 7: charge de face de degré 12 :=  $2^*(\text{degré de la face } 12) - 6$  ;
  - 8: **Si**  $d(i) < 0$  alors
  - 9: le sommet  $i$  est adjacent à 2 faces de degré 12 alors
  - 10:  $d(i) := d(i) + \frac{3}{2}(2)$ ;
  - 11: charge de faces de degré 12 := charge de faces de degré 12 -  $\frac{3}{2}$  ;
  - 12: **fin si**
  - 13: **Fin pour**
- 

programmé.

---

**Algorithm 9** L'algorithme Déchargement

---

- 1: **Entrée** : un graphe  $G$  connexe sans cycle entre 4 et 11.
  - 2: **Sortie** : Le graphe est 3 colorable la propriété est vraie.
  - 3: Col := coloration ;
  - 4: **Si** Col = 3 alors
  - 5: arrêter ;
  - 6: **Sinon**
  - 7: h := sommet séparateur ;
  - 8: d := degré inférieure à 2 ;
  - 9: **Si**  $(h = 0) \wedge (d = 0)$  alors
  - 10: [charge finale des sommets, charge finale des faces] := Règle de déchargement ;
  - 11: **Fin Si**
  - 12: **Si** (charge finale des sommets  $> 0$  et charge finale des faces  $> 0$ ) alors
  - 13: la propriété est vraie c-à-d tout graphe sans cycle entre 4 et 11 est 3 colorable.
  - 14: **Fin Si**
- 

**Exemple d'exécution**

**Entrée** : un graphe planaire  $G$  connexe sans cycle de longueur entre 4 et 11.

**Sortie** : le graphe  $G$  est 3 colorable alors la propriété est vérifiée.

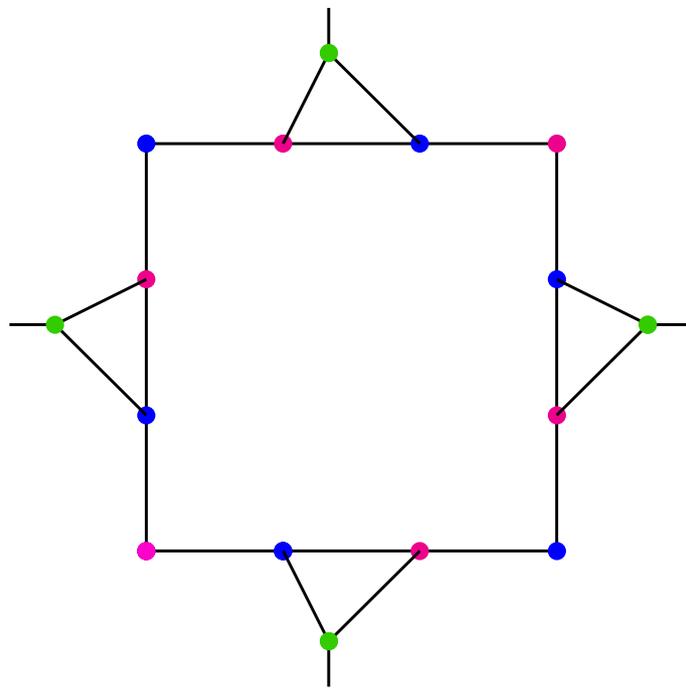


FIGURE 4.7: *Le graphe de déchargement.*

# Conclusion général

Dans ce travail, nous avons abordé et étudié une méthode de démonstration qui est la méthode de déchargement. Cette technique de preuve a vu le jour avec la démonstration du Théorème des quatre couleurs, et utilisée surtout pour les problèmes de coloration des graphes planaires. Elle intervient aussi où le  $\text{Mad}(G)$  qui est le degré maximum moyen figure.

Nous avons exploré en reprenant les démonstrations de quelques théorèmes où la méthode est utilisée.

Cette technique nous a permis de voir une nouvelle manière de preuve qui nous a pas été enseignée. C'était très motivant de savoir comment le principe de déchargement permet de prouver des propriétés sur la base d'un déchargement qui doit préserver la charge totale attribuée, or ceci n'est pas vérifié, ce qui permet de confirmer le résultat.

Nos perspectives c'est d'explorer cette méthode afin de prouver de nouveaux résultats non encore trouvés qui concerne la coloration des graphes planaires.

**Résumé :** La méthode de déchargement a été utilisée dans la théorie des graphes depuis plus d'un siècle. Sa fameuse application fut dans la preuve du théorème des 4 couleurs qui stipule que le nombre chromatique d'un graphe planaire est au plus 4. Cependant, elle reste mystérieuse pour plusieurs praticiens de la théorie des graphes.

Cette méthode est une technique de preuve qui est basée sur le principe de déchargement des sommets du graphe suivant des règles que l'on fixe sans modifier la charge globale attribuée, afin de prouver qu'un graphe  $G$  a une propriété  $P$ .

Dans les graphes planaires, cette technique est basée sur la formule d'Euler. Cette méthode est très utilisée dans les problèmes de coloration de graphes.

---

**Mot clé :** graphe planaire, coloration, degré moyen maximum, contre exemple, règles de déchargement, configurations réductibles, les charges.

---

# Bibliographie

[1] H., L., Abbott, B., Zhou, *On small faces in 4-critical graphs*, Art. comb, 32 : 203 – 207, 1991.

[2] K., Appel and W.,Haken, *Every map is four colorable*,I.Discharging ,Illinois Journal of mathematics,1977.

[3] K., Appel and W.,Haken, *Every map is four colorable* ,II.Reductibility ,Illinois Journal of mathematics,1977.

[4] K., Appel and W.,Haken, *research announcements every planar map is four colorable1*, Amerecain Math society 5, 1976.

[5] K. Appel and W. Haken, *an unavoidable set of configurations in planar traingulation*, J. combin. theory B, 26 : l – 21, 1979.

[6] C., Berge, *Theory of graphs and its Applications*, Methuen, London, 1962.

[7] C., Berge, *Graphs and hypergraphs*, Dunod, paris, 1970.

[8] C., Berge, V., Chvatal, *Topics on perfect graph*, North Holland, 1984.

[9] N., L., Biggs, E., K., Llyod, R., J., Wilson, *Graph theory 1736 – 1936*, clarendon press oxford, 1976.

[10] M., Bonamy, B., Lévêque, A., Pinlou, *Graphs with maximum degree  $\Delta \geq 17$  and maximum average degree less than 3 are list 2-distance( $\Delta + 2$ )-colarable*, 2013.

[11] M., Bonamy *Planar graphs with  $\Delta \geq 8$  are  $(\Delta + 1)$ -edge-choosable*, 2013.

[12] J., A., Bondy et U., S., R., Murty, *Théory des Graphes*, Traduit de l'anglais par F. havet, 2008.

[13] A., Bondy, J., Fonlupt, J., L., Fouquet, J., C., Fournier, J., L., Ramyrez Alfonson, *Graph théory in paris producing of a conference in memory of Claude Berge*, Birkhäuser verlag, 2007.

[14] O., V., Borodin *Coloring of plane graphs : A survy*, *Discrete Mathematics*, 313 : 517 – 539, 2013.

[15] O., V., Borodin, A., N., Glebov, A., Raspaud, M., R., Salvatipour, *planar graphs without cycles of length from 4 to 7 are 3-colorable*, *J. Combin. theory B*, 93 : 303 – 311, 2005.

[16] O., V., Borodin, A., N., Glebov, M., montassier A., Raspaud, *planar graphs without 5 and 7 cycles and without adjacent triangles are 3-colorable*, *J. Combin. theory B*, 99 : 668 – 673, 2009.

[17] O., V., Borodin, A., N., Glebov, A., Raspaud, *planar graphs without triangles adjacent to cycles of length from 4 to 7 are 3-colorable*, *Discrete Mathematics*, 310 :2584-2594, 2010.

[18] Y., Bua, H., Lua, Y., Wanga, W., Wanga, M., Montassier, A., Raspaud, *On the 3-colorability of planar graphs without 4, 7 and 9 cycles*, *Discrete Mathematics*, 309 : 4596 – 4607, 2009.

[19] J., cai, J., Hou, G., liu, *List edge and list total colorings of planar graphs without 4 cycles*, *theoretical computer Science*, 369 : 250 – 255, 2000.

[20] M., Chen, Y., Wang, L., Shen, *Plane graphs without cycles of length 4, 6, 7 or 8 are 3-colorable*, *Discrete Mathematics*, 308 : 4014 – 4017, 2008.

[21] M., Chen, W., Wang, *On 3-colorable planar graphs without short cycles*, *Applied Mathematics Letters*, 21 : 961 – 965, 2008.

[22] M., Chudnovsky, N., Robertson, P., Seymour and R., Thomas, *The strong perfect graph theorem*, *Ann. of Math*, 164 : 51 – 229, 2006.

- [23] N., Cohen F., Havet, *Planar graphs with maximum degree  $\delta \geq 9$  are  $(\delta + 1)$ -edge-choosable A short proof*, Discrete Mathematics, 310 : 3049 – 3051, 2010.
- [24] D., W., Cranston, S., J., Kim, G., Yu, *Injective Colorings of Graphs with Low Average Degree*, Algorithmica, 60 : 553 – 568, 2011.
- [25] D., w., Cranston, S., J., Kim, G., Yu, *Injective colorings of sparse graphs*, 2010.
- [26] D., W., Cranston, D., B., West, *A Guide to the Discharging Method*, 2013.
- [27] D., W., Cranston, R., Škrekovski, *Sufficient sparseness conditions for  $G^2$  to be  $(\delta + 1)$ -choosable, when  $\delta \geq 5$* , 2013.
- [28] D., W., Cranston, R., Erman, R., Škrekovski, *Choosability of the square of a planar graph with maximum degree four*, 2013.
- [29] R., Diestel, *graph theory*, Springer Briefs in Mathematics, New York, 2000.
- [30] L., M., Favrholt, M., Stiebitz, D., Scheide, B., Toft, *graph edge coloring Vizing's Theorem and Goldberg's Conjecture*, John Wiley et Sons, 2012.
- [31] G., Hahna, D., Sotteaud, J., Kratochvíl, J., Siran, *On the injective chromatic number of graphs*, Discrete Mathematics, 256 : 179 – 192, 2002.
- [32] V., Isoz, *Eléments de mathématiques appliquées 3<sup>ème</sup> édition revue et corrigée*, 2014.
- [33] S., J., Kim, S., I., Oum, *Injective chromatic number and chromatic number of the square of graphs*, 305 – 701, 2009.
- [34] M., Kubale, *Graph colorings*, American Mathematical Society, 2000.
- [35] L., Lovász, *A Characterization of Perfect Graphs*, j. combin. theory B, 13 : 95 – 98, 1972.
- [36] L., Lovász, *On chromatic number of finite set-systems*, Acta Math, Acad Sci Hungar, 79 : 59 – 67, 1967.

- [37] H., Meyniel, *On the perfect graph conjecture*, Discrete Mathematics 16 : 339 – 342, 1976.
- [38] J., Nešetřil, P., O., de Mendez, *Algorithms and Combinatorics*, 2012.
- [39] J., Nešetřil and M., Pellegrini, *The Seventh European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications*, Edizioni Della Normal, 2013.
- [40] T., Nishizeki, Md., S., Rahman, *planar graph drawing*, World Scientific Publishing, 2004.
- [41] T., Robin, , *The four color theorem*, 1995.
- [42] W., R., Pulleyblank, *Progress in combinatorial optimization*, Academic press, Canada, 1984.
- [43] M., Sakarovitch *Graphes et programmation linéaire*, Hermann enseignement des sciences, Paris, 1984.
- [44] M., Sakarovitch *Programmation discrète*, Hermann enseignement des sciences, Paris, 1984.
- [45] Manisucrit Eric Sopena.
- [46] L., Stockmeyer *Planar 3-colorability is NP complete*, Sigact News, 5(3) : 1925, 1973.
- [47] V., I., Volishin, *introduction to graph theory*, Nova Science Publishers, New york, 2009.
- [48] V., I., Volishin, *Graph Coloring : History, results and open problems*, Alabama Journal of Mathematics, 2009.
- [49] W., D., Wallis, *A Beginner's Guide to Graph Theory*, 2<sup>eme</sup> édition, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2007.
- [50] D., B., West, *Introduction to Graph Theory*, Pearson education, 2001.

- 
- [51] R., William, *Progress in combinatorial optimization*, 1984.
- [52] D., R., Woodall, *The average degree of an edge-chromatic critical graph II*, J.combin theory, 194 – 218, 2007.
- [53] B.Xu, *On 3-colorable plane graphs without 5- and 7-cycles*, J. Combin.Theory B, 96 : 958 – 963, 2006.
- [54] P., Zhang, *Color-Induced Graph Colorings*, Springer Briefs in Mathematics, 2015.
- [55] P., Zhang, *Graphs and digraphs*, 6<sup>eme</sup> édition, Taylor et Francis Group, 2016.
- [56] L., Zhang, *Every planar graph with maximum degree 7 is of class 1*, Graphs and combinatorics, 16 : 467 – 495, 2000.