Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de M'hamed Bougerra
Faculté Des Siences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présentée pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Financières

THÈME

processus de sauts de markov application a la file $M/E^r/1$

présenté par:

BECHKIT Abderahmane

TAIBI Amor

Soutenu, le 28/ 06 /2017 devant le jury composé de:

Mr.	Khaldi.......	K.	Président
Mr.	Akliouat	K.	Encadreur
Mr.	Chemrikh................	H.	Examinateur

Remerciements

Nous tenons à exprimer nos plus vifs remerciements à ALLAH pour nous avoir facilité ce travail.

Nous tenons à adresser nos plus sincères remerciements à monsieur Akliouat Kamel

Pour nous avoir fait confiance et dirigé dans un domaine dans lequel nous n'avons aucune connaissance pour l'appui dont a pu bénéficier ainsi que pour la disponibilité dont il a fait preuve tout au long de la réalisation de ce travaille , nous remercions également les membres de jury qui ont accepté de juger ce travail, nous sommes très reconnaissant à leurs remarques et commentaires qui nous on aider beaucoup pour mieux présenter ce document.

Que les personnes qui on fait l'œuvre de la réussite du travail qui nous a permet de profiter de cette expérience très enrichissante soit également remercie.

Enfin nous remercions tous ceux qui de près ou de loin nous ont aidés ou soutenus dans notre travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail et ma profonde gratitude à ma mère et mon père pour l'éducation qu'ils m'ont prodigué; avec tous les moyens et au prix de tou les sacrifices qu'ils ont consentis à mon égard, pour le sens du devoir qu'ils mon enseigné depuis mon enfance.

A mes chers : Oussama et Amine

A ma précieuse sœur Ikram

A ma grand-mère maternelle

A tous les membres de ma famille, petits et grands

A mes adorables amies: djamil, raouf,zaki,fares, rabah, mohamed ,djamel,zoubir,ismail, pour leur fidélité

A tous mes amis avec lesquels j'ai partagé mes moments de joie et de bonheur

A tous mes collègues de la promotion mathématique financière 2017

Que toute personne m'ayant aidé de près ou de loin, trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

Abedrahmanne

Dédicaces

Ce travail est dédié à

Ma mère

Aux très chers

mes frères Brahim et Ahmed et Mouhamed .

A mes tres chers amis:moh,oussama,ismail,yacine,brahim,elaarbi...

et à tous ceux qui ont contribué de loin ou de près à la

réalisation de ce travail .

A tout les étudiants de mathématique financiére

Amor

Table des matières

Introduction générale

Les origines du formalisme des files d'attente datent du début du XXème siècle et principalement des travaux de deux mathématiciens : le mathématicien danois A.K. Erlang avec ses travaux sur les réseaux téléphoniques et le russe A.A. Markov avec la création des modèles markoviens.

C'est en 1909 que les bases de la théorie des files d'attente sont lançées, grâce à l'article du mathématicien danois A.K. Erlang "The theory of probabilities and telephone conversations". Les premiers résultats sont variés : Erlang observe le caractère poissonnien des arrivées des appels à un central téléphonique, et le caractère exponentiel des durées des appels ; il réussit à calculer de manière relativement simple la probabilité d'avoir un appel rejeté. La notion d'équilibre stationnaire d'un système d'attente est introduite pour la première fois.

A partir des années 30, les travaux de plusieurs mathématiciens tels que Molina, Fry, Pollaczek aux Etats Unis, Kolmogorov et Khintchine en Russie, Palm en Suède, ou Crommelin en France permettent à la théorie des files d'attente de se développer lentement.

Les années 50 verront l'essor important de la théorie des files d'attente. Les applications de ces travaux sont alors très pratiques et concernent les disciplines de recherche opérationnelle et génie industriel.

Une file d'attente est un modèle mathématique d'un phénoméne d'attente. Compte tenu de l'importance des phénoménes d'attente dans notre univers quotidien, des outils d'analyse de ces phénomènes se sont naturellement développés au fil des années.

Les exemples de phénomènes d'attente dans les sociétés dites modernes sont nombreux. Cela va des phénomènes les plus visibles, par exemple dans le domaine des transports (terrestre, aérien,...) ou des services (banque, poste,...) aux phénomènes d'attente plus discrets que l'on retrouve dans certains systèmes tels les réseaux téléphoniques, les systèmes informatiques...

notre travail se décompose en quatre parties

- ► la première partie on a presenté les processus stochastiques suivi des chaînes de Markov à temps discrets

► la deuxiéme parties nous présentons les processus stochastiques à temps continu ,processus de poisson et processus de naissance et de mort

► la troisiéme partie sera consacrée aux files d'attente markoviennes les plus connues : $M/M/1, M/M/S$

► la quatriéme partie est consacré à l'étude des files d'attente $M/E^r/1$ et l'aplication nous décrivons le modèle associé à ce type de file.

Chapitre 1

Chaines de markov

1.1 Introduction:

Un modéle d'évolution dynamique en temps discret dans lequel on fait dépendre l'évolution future de l'état présent et du hasard est une chaîne de Markov. C'est un processus stochastique à temps discret. On en rencontre dans de nombreux domaines d'applications.

1.1.1 chaîne de Markov à temps discret

Définition 1.1.1 *: Une suite $(Xn)n \geq 0$ de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble au plus dénombrable E est une chaîne de Markov d'espace d'états E si et seulement si pour tout $k \in N$ pour tout $(x_0.......x_{k+1})$ dans E tels que*

$$\begin{cases} P(X_k = i_k.......X_0 = i_0) > 0 \\ \\ P(X_{k+1} = i_{k+1}/X_k = i_k........X_0 = i_0) = P(X_{k+1} = i_{k+1}/X_k = i_k) \end{cases}$$

La chaîne est dite homogène si on a de plus pour tout $k \in N$ et tout $i, j \in E$:

$$P(X_{k+1} = j/X_k = i) = P(X_1 = j/X_0 = i)$$

On appelle probabilité de transition pour aller de l'état i à l'état j la probabilité:

$$p_{i,j} = P(X_{k+1} = j/X_k = i) = P(X_1 = j/X_0 = i)$$

Loi d'une chaîne de Markov:

La loi d'une chaîne de Markov homogéne $(X_n)_{n\in N}$ est entiérement dèterminée par la donnèe de sa matrice de transition P et de la loi de X_0, appelée loi initiale et notèe μ_0 pour tout $i \in E$,

$$\mu_0(i) = P(X_0 = i)$$

Plus précisément, pour tout entier n et toute suite d'états $i_0, .., i_{n-1}, i_n$ de E :

$$P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \mu_0(i_0)p_{i_0}, i_1...p_{i_{n-1}, i_n}$$

La formule permet d'ècrire la probabilitè d'une intersection, i.e.

$$P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0)$$

1.1.2 matrice de transition

Définition 1.1.2 *: On appelle matrice de transition, la matrice* $P = (p_{i,j})_{i,j\in E}$

$$P = \begin{pmatrix} p_{i_0,j_0} & p_{i_0,j_1} & p_{i_0,j_2} & \cdots & \cdots \\ p_{i_1,j_0} & p_{i_1,j_1} & p_{i_1,j_2} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

la matrice de transition P de la chaine discret (X_n) est une matrice carée, constituée par les probabilites de transition . elle verifie les proprétées: pour tout couple $(i; j)$ de E:

$$0 \leq p_{i;j} \leq 1$$

pour tout $i, j \in E$, on a:

$$\sum p_{i;j} = 1$$

Théorème 1.1.1 *:on considére une chaîne de markov sur l'espace d'états E de matrice de transition P on a:*

$$p_{ij}^n = \sum_{k\in E} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj}$$

Démonstration: $p_{ij}^{n} = P(X_n = j \ / \ X_0 = i) = P(X_n = j, \underset{k\in E}{\cup}(X_{n-1} = k) \ / \ X_0 = i)$

$= \sum\limits_{k\in E} P(X_n = j, X_{n-1} = k \ / \ X_0 = i)$

$= \sum\limits_{k\in E} P(X_n = j, X_{n-1} = k \ / \ X_0 = i) P(X_{n-1} = k \ / \ X_0 = i)$

puisque $(X_n)_{n\in N}$ est une chaîne de markov ,on a:

$$p_{ij}^{n} = \sum_{k\in E} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj}$$

sous forme matricielle ,on écrit :

$$P^n = P^{n-1}P$$

de façon générale

$$p_{i,j}^{m+n} = \sum_{k\in E} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)} \qquad\qquad i, j \in E, m \geq 1, n \geq 1$$

d'ou :

$$P^{m+n} = P^m P^n$$

le systéme d'équations connu sous le nom d'équations de "chapman kolmogorov"

1.2 Classification des états:

Nous allons définir une classification des états et en déduire les propriétés des chaînes de Markov. Les états d'une chaîne de Markov se répartissent en classes que l'on définit à partir de la matrice de transition.

1.2.1 Chane de Markov irrèductibles:

Définition 1.2.1 *:*

Soient i et j deux ètats de E. On dit que l'ètat j est accessible depuis l'ètat i si

$$\exists n \in N, p_{i,j}^{(n)} = P(X_n = j/X_0 = i) > 0$$

On dit que les ètats i et j communiquent si chacun est accessible depuis l'autre. On note alors $i \longleftrightarrow j$

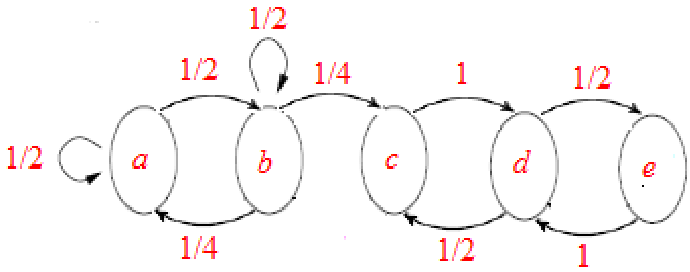
-La relation $\longleftrightarrow$ est une relation d'èquivalence sur E.

Exemple 1.2.1 *:*

Considèrons une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \{a, b, c, d, e\}$et dont la matrice et le

graphe de transition sont donnèes par :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



La chaîne comporte deux classes irrèductibles : $\{a, b\}$ et $\{c, d, e\}$.

1.3 Les mesures stationnaires:

Définition 1.3.1 *:Une mesure stationnaire (ou invariante) d'une chaîne de Markov de matrice de transition P est une loi de probabilité sur E, disons $\pi = [\pi(j)] \quad j \in E$, vérifiant*

$$\pi = \pi P \quad et \sum_{i=0}^{\infty} \pi = 1$$

Soit π une mesure stationnaire pour la chaîne de Markov $(X_n)n \in N$ de matrice de transition P.Rappelons que le vecteur ligne $(\mu_n(j))j \in E$ désigne la loi de la v.a.X_n.La formule $\mu_{n+1} = \mu_n P$ implique que si la loi de X_n est π (i.e. $\mu_n = \pi$) alors il en est de même pour la loi de X_{n+1}(i.e.$\mu_{n+1} = \pi$).Par conséquent, si la loi initiale μ_0 (celle de X_0) est π alors toutes les v.a. X_n seront distribuées selon π.C'est ce qui justifie le qualificatif de stationnaire.Cela signifie que la probabilité de se trouver dans un état donné reste constante au cours du temps, bien que la chaîne saute constamment d'état en état. Une mesure stationnaire doit donc être comprise comme un équilibre dynamique en loi.

Chapitre 2

Processus markoviens de saut

2.1 introduction:

Les Processus markoviens de sauts sont la généralisation des chaînes de Markov au temps continu.Le passage du temps discret au temps continu se fait en remplacant le pas de temps fixe d'une chaîne de Markov par des intervalles de temps aléatoires indépendants de loi exponentielle.

Définition 2.1.1 *:Un processus markovien de sauts $\{X_t\}$ $t \geq 0$ á espace d'états E satisfait les deux égalités suivantes : pour tout entier n, pour tous états $i_0, i_1, ..., i_n, j$ et pour toute suite croissante de réels positifs $t_1 < ... < t_n < t_{n+1}$ on a :*

$$P(X(t_{n+1}) = j/X(t_n) = i_n, ..., X(t_1) = i_1, X_0 = i_0) = P(X(t_{n+1}) = j/X(t_n) = i_n)$$

Définition 2.1.2 *la probabilité conditionnelle $P(X(t) = j/X(s) = i)$ ne dépend que des états i, j et de l'accroissement $t-s$, ce qui justifie la notation suivante. Pour tout réel positif t et pour tous états i, j, la probabilité de transition de i vers j sur un intervalle (de temps) de longueur t est définie par :*

$$p_{i,j}(s,t) = P(X(t) = j/X(s) = i)$$

les probabilités de transition ainsi définies obéissent aux propriétés suivantes:

- $p_{i,j}(t) \geq 0$
- $\sum\limits_{i \in E} p_{i,j}(t) = 1$
- $p_{i,j}(s,t) = \sum\limits_{i \in E} p_{i,k}(s,u)p_{k,j}(u,t) \qquad s \leq u \leq t$

cette derniére relation correspond à l'équation de chapman-kolmogorov.

2.2 matrice de transition:

Pour une chaîne de markov homogéne et à temps continu,les probabilités de transition $\{P(t)\}\ t \geq 0$ peuvent être regroupées dans une matrice $p(t)$ =$\{\ p_{i,j}(t)\}$ de dimensions finies selon le nombre des états du processus ,notons que les éléments d'une telle matrice sont tous en fonction du paramétre t :

$$p_{i,j}(t) = \begin{pmatrix} p_{i_0j_0}(t) & p_{i_0j_1}(t) & p_{i_0j_3}(t) & \dots \\ p_{i_1j_0}(t) & p_{i_1j_1}(t) & p_{i_1j_3}(t) & \dots \\ p_{i_2j_0}(t) & p_{i_2j_1}(t) & p_{i_2j_2}(t) & \dots \\ \dots. & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Soit $\{X_t\}\ t \geq 0$ un processus markovien de sauts de matrices de transition $\{\ P(t)\}\ t \geq 0$. Soient $s, t \geq 0$. Alors:

$$P(t+s) = P(t)P(s)$$

2.3 Générateur infinitésimal

on définit :

$$p(t) = p_{i,j}(t, t + \Delta t)$$

et on pose :

$$H(s,t) = p_{i,j}(s,t)$$

donc : $\frac{dH(s,t)}{dt} = H(s,t)Q(t)$

alors:

$$Q(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t) - I}{\Delta t}$$

I est la matrice identité telle que $Q(t)$ est appelée générateur infinitésimal, ou matrice de sauts, de la chaîne de Markov en temps continu.

On a donc :

$$\begin{cases} q_{ij}(t) = \underset{\Delta t \to 0}{lim} \frac{pij(t,t+\Delta t)}{\Delta t} & si \quad i \neq j \\ \\ q_{ii}(t) = \underset{t \to 0}{lim} \frac{pii(t,t+\Delta t)-1}{\Delta t} & si \quad i = j \end{cases}$$

on a: $\sum\limits_{j} q_{i,j}(t) = 0$

$\frac{dH(s,t)}{ds} = -Q(s)H(s,t)$ pour $s \leq t$

$\Rightarrow \frac{dp_{ij}(s,t)}{dt} = q_{jj}(t)p_{ij}(s,t) + \sum\limits_{k \neq j} q_{kj}(t)p_{ik}(s,t)$ kolmogorov forward

$\Rightarrow \frac{dp_{ij}(s,t)}{ds} = -q_{ii}(s)p_{ij}(s,t) - \sum\limits_{k \neq i} q_{ik}(s)p_{hj}(s,t)$ kolmogorov backward

avec les condition initiales $P_{ij}(t,t) = \begin{cases} 1 \ si \ i = j \\ 0 \ si \ i \neq j \end{cases}$

Et on peut écrire les développements limités à l'ordre 1 :

$$p_{ij}(t) = q_{ij}t + o(t)$$

Si la chaîne est dans l'état i initialement, la probabilité qu'elle soit dans l'état j à l'instant t est environ $q_{ij}t$, avec t "petit". Le nombre q_{ij} est alors appelé taux de transition instantané de l'état i vers l'état j. De même, on a :

$$1 - p_{ii}(t) = -q_{ii}t + o(t)$$

Si la chaîne est dans l'état i initialement, la probabilité qu'elle l'ait quitté à l'instant t est environ $-q_{ii}t$. Le coefficient positif $-q_{ii}$ est le taux instantané de départ de l'état i. Par ailleurs, pour tout i fixé et pour tout $t \geq 0$, la somme des $p_{ij}(t)$ fait 1. Avec les développements limités ci-dessus, on a donc formellement :

$$1 = \sum_j pij(t) = 1 + \left(-qii + \sum_{i \neq j} qij\right) t + o(t)$$

Il s'ensuit que : $\forall i \in N \qquad -q_{ii} = \sum_{i \neq j} q_{ij}$

En d'autres termes, la somme de chaque ligne de Q est nulle. Résultat à ne pas confondre avec celui concernant les matrices de transition $P(t)$, pour lesquelles la somme sur chaque ligne vaut 1.

Concrètement, avec l'interprétation donnée ci-dessus des q_{ij} , c'est simplement dire que la somme des taux de transition de l'état i vers l'ensemble des autres états j est égale au taux de départ de l'état i.

La relation précédente n'est bien sûr valable que si la série $\sum_{i \neq j} q_{ij}$ est convergente. Si pour un indice i, on a $\sum_{i \neq j} q_{ij} = 0$, donc aussi $q_{ii} = 0$, cela signifie que si on arrive dans l'état i, on ne le quitte plus , on dit alors que l'état i est absorbant.

Reprenons la forme matricielle de Chapman-Kolmogorov, avec $s = h$, et dérivons par rapport à h :

$$P(t+h) = P(t)P(h) \Rightarrow P\prime(t+h) = P(t)P\prime(h)$$

En $h = 0$, ceci donne : $P\prime(t) = P(t)A$. Puisqu'on peut inverser les rôles de t et h, on a de façon générale :

$$\forall t \geq 0 \quad P\prime(t) = AP(t) = P(t)A$$

Ceci se traduit pour les probabilités de transition par :

$$p\prime_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} q_{ik}p_{kj}(t) \sum_{k=0}^{+\infty} p_{ik}(t)q_{kj}$$

Supposons une minute que $P(t)$ ne soit pas matricielle, mais scalaire : la fonction $P(t)$ solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} p(0) = 1 \\ p\prime(t) = ap(t) \end{cases}$$

est tout simplement la fonction exponentielle : $p(t) = \exp q(t)$.

2.4 mesure stationnaire:

notons $Q(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{p_{i,j}(t,t+\Delta t)-I}{\Delta t}$ le générateur infinitésimal de la matrice de transition.

En posant :

$\pi_j(t) = p[X(t) = j]$

et de plus $\pi(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), ...)$

donc :$\pi(t) = \pi(0)\pi(0,t) = \pi \exp\{\int\limits_0^t Q(u)du\}$

$\frac{d\pi(t)}{dt} = \pi(t)Q(t)$ On obtient au final pour la distribution :

$$\frac{d\pi_j(t)}{dt} = q_{jj}(t)\pi_j(t) + \sum_{k \neq j} q_{kj}(t)\pi_k(t)$$

2.5 Chaine de markov continue homogéne:

La chaîne de Markov est homogène si les probabilités de transition $p(s, s+t)$ ne dépendent que de $(s + t - s)$. On note alors :

$p_{ij}(t) = p_{ij}(s, s+t)$ et $q_{ij} = q_{ij}(t)$ $\qquad i, j = 1, 2, 3.............$

On a bien sûr pour tout entier i et tout réel positif t :

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t) = 1.$$

d'ou: $H(t) = H(s, s+t) = [p_{ij}(t)]_{ij}$

Les transitions de probabilités satisfont les équations suivantes, dites de Chapman-Kolmogorov :

pour tout couple d'entiers (i, j), pour tous réels positifs s et t :

$$pij(s+t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(s)p_{kj}(t).$$

son ecriture matriciélle :

$$H(s+t) = H(s)H(t)$$

on aussi les équations de backward et forward:

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = q_{jj}p_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} q_{kj}p_{ik}(t)$$

$$\frac{dp_{ij}(t)}{ds} = -q_{ii}p_{ij}(t) - \sum_{k \neq i} q_{ik}p_{hj}(t)$$

l'écriture matriciélle esl :

$\frac{dH(t)}{dt} = H(t)Q$

$\frac{dH(t)}{ds} = QH(t)$

avec les conditions initieles $H(0) = I$

donc la solution du systéme donne:$H(t) = exp(Qt)$

on sait que:$\frac{d\pi_j(t)}{dt} = q_{jj}(t)\pi_j(t) + \sum_{k \neq j} q_{kj}(t)\pi_k(t)$

donc $\frac{d\pi(t)}{dt} = \pi(t)Q$

2.6 Classification des ètats:

2.6.1 Classes irrèductibles:

Un processus markovien de sauts de gènérateur A est dit irréductible sur E si pour tous états $i, j \in E$ distincts il existe des états $i_1, ..., i_n \in E$ tous différents tels que :

$$x_{i_0;i_1}, x_{i_1,i_2} ......, x_{i-1,i}, x_{i,j} \geqslant 0$$

Comme dans le cas discret, être irréductible signifie que l'on peut passer de n'importe quel état i à n'importe quel état j avec une probabilité strictement positive.Considérons un processus markovien de sauts $\{Xt\}t \geq 0$ de matrices de transition $\{P(t)\}t \geq 0$, irréductible sur E et admettant une mesure stationnaire π. Alors :

• π est l'unique mesure stationnaire du processus $\{Xt\}t \geq 0$

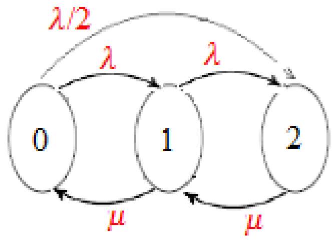
• la matrice $P(t)$ converge quand t tend vers l'infini vers une matrice dont toutes les lignes sont égales à π :

$$\lim_{t \to +\infty} p_{ij}(t) = \pi(j)$$

avec la condition $\sum \pi_j = 1$ on peut déterminer p_j a l'aide de l'écriture matriciélle $\pi Q = 0$ car:

$\frac{d\pi_j}{dt} = 0 \Rightarrow q_{jj}\pi_j + \sum_{k \neq j} q_{kj}\pi_k = 0$

Exemple 2.6.1 *: une chaine de markov en temps continue est donné par*



on cherche la proba stationnaire

d'apres le graqhe de transition on a :

$q_{01} = \lambda \quad , \quad q_{12} = \lambda \quad , \quad q_{10} = \mu \quad , \quad q_{21} = \mu \quad , \quad q_{02} = \frac{\lambda}{2}$

à l'équilibre l'équation :

$$q_{jj}\pi_j + \sum_{k \neq j} q_{kj}\pi_k = 0$$

avec $j = 0, 1, 2$

pour $j = 0 \Rightarrow q_{00}\pi_0 + q_{10}\pi_1 + q_{20}\pi_2 = 0 \Longrightarrow q_{00}\pi_0 + \mu\pi_1 = 0$

pour $j = 1 \Rightarrow q_{11}\pi_1 + q_{01}\pi_0 + q_{21}\pi_2 = 0 \Longrightarrow q_{11}\pi 1 + \lambda\pi_0 + \mu\pi_2 = 0$

pour $j = 2 \Rightarrow q_{22}\pi_2 + q_{02}\pi_0 + q_{12}\pi_2 = 0 \Longrightarrow q_{22}\pi_2 + \frac{\lambda}{2}\pi_0 + \lambda\pi_1 = 0$

d'ou:

$-q_{00}\pi_0 = \lambda\pi_0 + \frac{\lambda}{2}\pi_0 = \frac{3}{2}\lambda\pi_0$

$-q_{11}\pi_1 = (\lambda + \mu)\pi_1$

$-q_{22}\pi_2 = \mu\pi_2$

donc on obtient les équations de la balances suivants:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\lambda\pi_0 = \mu\pi_1 \\ (\lambda+\mu)\pi_1 = \lambda\pi_0 + \mu\pi_2 \\ \mu\pi_2 = \frac{\lambda}{2}\pi_0 + \lambda\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

d'ou :

$\pi_0 = \frac{2}{3}\mu\pi_1$

$\pi_2 = (\frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{3})\pi_1$

$\frac{2}{3}\mu\pi_1 + \pi_1 + (\frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{3})\pi_1 = 1$

pour $\lambda = 2$ *et* $\mu = 3$ *on a:*

$\pi_0 = \frac{1}{2}$, $\pi_1 = \frac{1}{4}$, $\pi_2 = \frac{1}{4}$

2.7 Processus de naissance et de mort:

Ces processus permettent de façon générale de décrire l'évolution temporelle de la taille d'une population d'un type donné. Dans le cas d'un système d'attente, on considère par exemple des populations comprenant tous les clients qui sont dans le système à l'instant t. Les processus de naissance et de mort sont des processus stochastiques à temps continu et à espace d'états discret $n = 0, 1, 2, \ldots$. Ils sont caractérisés par deux conditions importantes : ils sont sans mémoire, et à partir d'un état donné n, des transitions ne sont possibles que vers l'un ou l'autre des états voisins $(n+1)$ et $(n-1)$ pour $n \geq 1$.

Alors, soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus de naissance et de mort à états discrets et homogène dans le temps, c'est-à-dire :

$$P(X(t+s) = j/X(s) = i) = p_{ij}(t)$$

Ne dépend pas de s. Ce processus est de naissance et de mort si :

p(1 naissance pendant Δt / il y a i individus) donc:

$p_{i,i+1}(\Delta t) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$ $i \geq 0$

p(1 mort pendant Δt / i individus) d'ou:

$p_{i,i-1}(\Delta t) = \mu_i \Delta t + o(\Delta t)\ i \geq 1$

p(0 naissance pendant Δt / i individus) $= 1 - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$

p(0 mort pendant Δt / i individu) $= 1 - \mu_i \Delta t + o(\Delta t)$

$p_{i,j}(\Delta t) = o(\Delta t) \quad |i-j| \ \geq 2$

λ_i et μ_i sont appelés taux de transition (taux de naissance et de mort).

on peut facilement vérifier qu'un tel processus est une chaîne de markov à temps continu.de plus on peut obtenir les équations de kolmogorov

on note : $\quad p_i(t) = p[X(t) = i]$

$$\begin{cases} \frac{dp_i(t)}{dt} = \lambda_{i-1} p_{i-1}(t) - (\lambda_i + \mu_i) p_i(t) + \mu_{i+1} p_{i+1}(t) \\ \\ \qquad\qquad \frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \end{cases}$$

ces équations , complétées par les conditions initiales , constituent le systéme d'équations le plus fondamental en théorie des phénoménes d'attente.

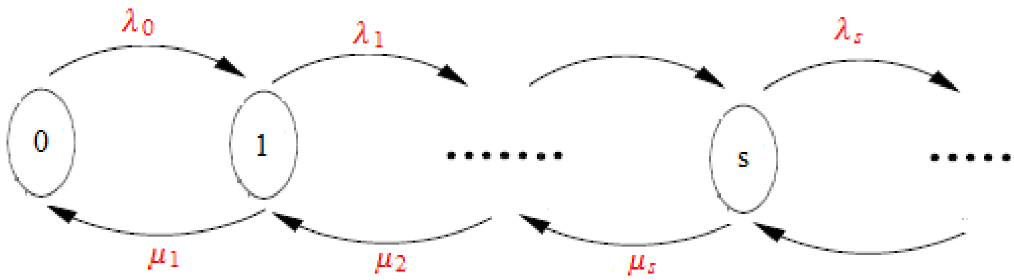
la résolution analytique des équation de kolmogorov se montre généralement trés complexe. dans le cas particulier où:

•la taille initiale de la population est égale à 1

•$\lambda_i = \lambda \forall i > 0$

•$\mu_i = \mu \forall i \geqslant 1$

2.7.1 Graphe des transitions:



Graphe de transition d'un processus de naissance et de mort

2.7.2 processus de naissance:

Dans ce cas , nous considérons des populations qui ne peuvent qu'augmenter .En d'autres termes ,le taux de décroissance est égal à 0 analysons les deux situations suivantes:

•$\lambda_i = \alpha$ Ceci signifie que le taux de croissance globale de la population est indépendant de la taille.On s'aperçoit que ce processus n'est rien d'autre que le processus de Poisson de paramètre α . D'où , la distribution probabiliste du processus est donnée par:

$$P\{X(t) = i\} = p_i(t) = \frac{\alpha^i t^i}{i} \exp -\alpha t \qquad (t > 0 \ et \ i = 0, 1, 2, ...)$$

•$\lambda_i = i\alpha$ Ici,on associe à chaque événement présent un taux de croissance égal à α. Ceci signifie que le taux de croissance globale de la population est proportionnel à la taille de la populatin. Dans ce cas ,les équations de Kolomogorov sont données par:

$$\frac{dp(t)}{dt} = \lambda_{i-1}p_{i-1}(t) - \lambda_i p_i(t)$$

la résolution de ces équations aboutit à la distribution de

$$X(t) : P\{X(t) = i\} = p_i(t) = \exp -\lambda t(1 - \exp -\lambda t)^{i-1} \quad (i \geqslant 1), (t > 0 \ et \ i = 0, 1, 2, ...)$$

2.8 Processus de Poisson:

2.8.1 Définition d'un processus de Poisson:

Parmi les processus stochastiques à temps continu, les processus de Poisson occupent une place privilégiée .Ils sont utilisés avant tout pour décrire la réalisation dans le temps d'événements aléatoires d'un type donné, comme par exemple l'arrivée de tâches dans l'unité centrale d'un ordinateur, l'arrivée de clients vers un guichet ou une cabine téléphonique,l'arrivée d'appels dans un central téléphonique, etc. Pour étudier ces processus, nous considérons le nombre d'événements $N(t)$ se produisant dans l'intervalle du temps $[0, t]$ .Le processus stochastique $\{N(t); t \geqslant 0\}$ est appelé processus de comptege . ce processus vérifier les propriétés suivantes :

- $N(t) \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$;
- si $s < t$, alors $N(s) \leq N(t)$;

• le nombre aléatoire d'événements qui se produisent dans l'intervalle $]s,t]$ est donné par $N(t)-N(s)$.

on appelle processus de poisson un processus de comptage vérifiant les trois condition suivantes:

• Le processus $N(t)$ est homogène dans le temps. Ceci signifie que la probabilité d'avroir K événements dans un intervalle de longueur donnée s ne dépend que de s et non pas de la position de l'intervalle dans l' axe temporel : $P\{N(t+s)-N(t)=k\}=p_k(t)$ pour tous $t,s>0$ et $k=0,1,2,...$

• le processus $N(t)$ est à accroissements indépendants et stationnaires. Ceci signifie que, pour tout système d'itervalles disjoints, les nombres d'événements s'y produisant sont des variables aléatoires indépendantes. Un processus vérifiant cette condition est dit sans mémoire.

• la propabilité que deux événements ou plus se produisent dans un intervalle infiniment petit $\triangle t$, est négligeable par rapport à la probabilité qu'il n'y ait qu'un seul événement. D'une manière plus précise, on écrit :

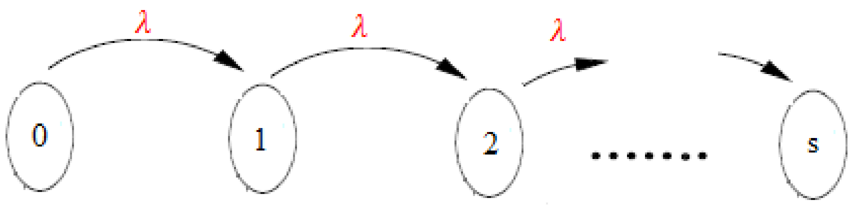
$p_k(\Delta t)=o(\Delta t)$. $k\geqslant 2$

$p_1(\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$.

$p_0(\Delta t)=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$.

Le coefficient λ est appelé l'intensité du processus poissonien.

2.8.2 Graphe des transitions:



Graphe de transition pour le processus de Poisson

Théorème 2.8.1 *Si $N(t)$ est un processus de Poisson, alors $N(t)$ suit une loi de Poisson :*

$$P(N(t)=i)=p_n(t)=e^{-\lambda t\frac{(\lambda t)^i}{i!}}.(t>0\ et\ i=0,1,2,...)$$

pour Δ_t suffisamment petit, nous avant le système d'équation suivant :

$$P(N(t+\Delta t)-N(t)=i)=O(\Delta t),\quad i\geqslant 2$$

$$P\left\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\right\}=\lambda\Delta t+O(\Delta t)$$

$$P\left\{N(t+\Delta t)\neq(t)=0\right\}=1-\lambda\Delta t+O(\Delta t)$$

En supposant $p_i(t)=P\left\{N(t)=i\right\}$

pour $n>0$

on a :

$$\begin{aligned}p_i(t+\Delta t) &= P(N(t)=i)P(N(t+\Delta t)-N(t)=0)+P(N(t)=i-1)P(N(t+\Delta t)-N(t)=1)+O(\Delta\\ &= p_i(t)(1-\lambda\Delta t)+p_{i-1}(t)\lambda\Delta t+O(\Delta t)\\ &= p_i(t)+\lambda\Delta t(p_{i-1}(t)-p_i(t))+O(\Delta t)\end{aligned}$$

d'ou :

$$\frac{p_i(t+\Delta t)-p_i(t)}{\Delta t}=\lambda\left[p_{i-1}(t)-p_i(t)\right]+\frac{O(\Delta t)}{\Delta t}$$

et en passant à la limite,on obtient:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\mathrm{p}_n(\mathrm{t}) &= \frac{p_i(t+\Delta t)-p_i(t)}{\Delta t}=\lambda\left[p_{i-1}(t)-p_i(t)\right]\\ &\Longrightarrow \frac{dp_i(t)}{dt}=\lambda\left[p_{i-1}(t)-p_i(t)\right]\end{aligned}$$

pour $i = 0$ on a:

$$\begin{aligned} p_0(t+\Delta t) &= P\{N(t)=0\}\, P\{N(t+\Delta t) \not- (t) = 0\} \\ &= p_0(t) \\ &= 1 - \lambda \Delta t + O(\Delta t) \end{aligned}$$

D'où:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t)$$

les fonctions $p_i(t)$ vérifient donc le système différentiel:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t)$$

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \lambda \left[p_{i-1}(t) - p_i(t)\right]$$

la solution de ce système est donnée par :

$$p_0(t) = \exp -\lambda t$$

$$p_1(t) = \lambda t \exp -\lambda t$$

et par récurrence :

$$p_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \quad , \ (t > 0 \text{ et } i = 0, 1, 2, ...)$$

Chapitre 3

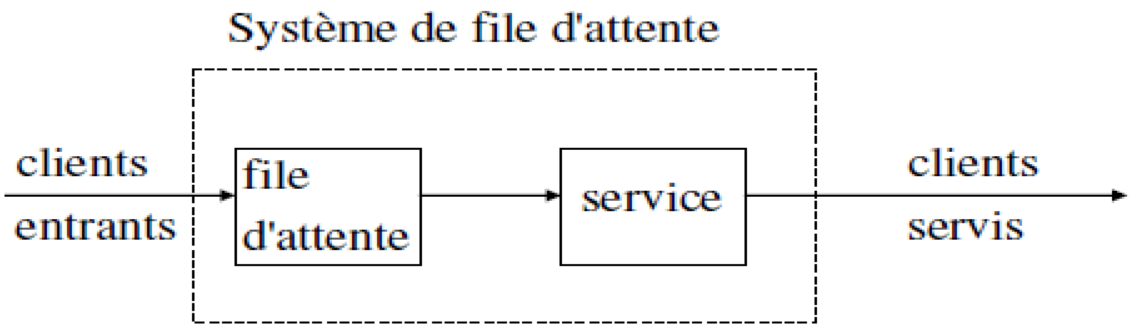
Files D'attente

3.1 introduction:

Les files d'attente peuvent être considérées comme un phénomène caractéristique de la vie quotidienne. Ce phénomène se manifeste dans les domaines d'activités les plus divers :

les guichets de la poste, les stations téléphoniques, la technique militaire,...etc.

Le modèle général d'un phénomène d'attente peut être résumé comme suit : des clients arrivent suivant un processus quelconque à un intervalle de temps aléatoire pour acquérir un service auprès d'un serveur. A l'arrivée d'un client, si un dispositif de service (serveur) est libre, il se dirige immédiatement vers ce dispositif où il est servi. Dans le cas contraire, le client prend place dans une file d'attente, sinon il quitte le système. La durée du service auprès de chaque serveur est aussi aléatoire.



Population: La population constitue la source de clients potentiels. Elle est caractérisée par son nombre d'élément (fini ou infini).

File d'attente: La file d'attente est caractérisée par le nombre maximum permis de clients en attente (fini ou infini)

Clients: Les clients (issus de la population) se joignent au système avec un taux moyen d'arrivée.

Service: Le service peut être assuré par un ou plusieurs serveurs. Le temps qui s'écoule entre le début et la fin de service d'un client est dénoté le temps de service suivant une distribution de probabilité. Donc le taux de service est une autre caractéristique du système.

3.1.1 Discipline de service:

la discipline de service détermine l'ordre dans lequel les clients sont rangées dans la file et y sont retirés pour recevoir un service. Les disciplines les plus courantes sont:

• **FIFO (first in, first out) ou FCFS (first come first served) ou PAPS (premier arrive, premier servi)** : c'est la file standard dans laquelle les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée. Notons que les disciplines FIFO et FCFS ne sont pas équivalentes lorsque la file contient plusieurs serveurs. Dans la première, le premier client arrivé sera le premier à quitter la file alors que dans la deuxième, il sera le premier à commencer son service. Rien n'empêche alors qu'un client qui commence son service après lui, dans un autre serveur, termine avant lui. En français, le terme PAPS comporte une ambiguïté, puisqu'il ne peut différencier une file "premier arrivé", premier servi" d'une file "premier arrivé, premier sortit".

• **LIFO (last in, first out) ou LCFS (last come, first served) ou DAPS (dernier arrive, premier servi) :** Cela correspond à une pile, dans laquelle le dernier client arrivé (donc posé sur la pile) sera le premier traité (retiré de la pile). À nouveau, les disciplines LIFO et LCFS ne sont équivalentes que pour une file mono serveur.

• **RANDOM (aléatoire) :** Le prochain client qui sera servi est choisi aléatoirement dans la file d'attente .

3.1.2 Notations de Kendall:

Une file d'attente est notée $A/B/m/K/N/Z$ selon Kendall avec:

- A : Processus d' arrivée des clients (distribution d'inter arrivée).
- B : Schéma de service (distribution de durée de service de clients).
- m : nombre de serveurs.
- K : capacité maximale de la file d'attente.
- N : nombre de clients utilisant le système.
- Z : discipline du système qui décrit la façon dont les clients sont ordonnés.

Pour les arrivées et les services on utilise les symboles suivants:

- M : loi exponentielle.
- D : loi déterministe.
- G : loi générale.
- H_k : loi hyperexponentielle d'ordre k .
- E_k : loi d'Erlang d'ordre k.

Le nombre de serveurs peut varier de 1 à l'infini (noté ∞), de même pour K et N .

-Lorsque les deux derniers éléments de la notation de KENDALL ne sont pas pricisés, il est sous-entendu que : $K = +\infty$ et $Z = FIFO$.

Dans la suite,nous nous limiterons à l'étude des systèmes de type $A/B/m/K/N/Z$ (systèmes de file d'attente à arrivées poissonniennes et à durées de service exponentielles pour lesquels les processus de naissance et de mort fournissent un cadre d'analyse uniforme.

3.1.3 Analyse mathématique:

L'étude mathématique d'un système d'attente se fait le plus souvent par l'introduction d'un processus stochastique qui décrit l'évolution temporelle du système , premierement on s'intéresse au nombre X_t de clients se trouvant dans le systéme à l'instant t. En fonction des quantités qui définissent la structure du systéme, on cherche à calculer :

- les probabilités d'état $p_n(t) = P([X_t = n])$qui définissent le régime transitoire du processus (X_t) $t \geq 0$

•le régime stationnaire du processus, défini par

$$p_n = \lim_{t\to+\infty} p_n(t) = \lim_{t\to+\infty} P([X_t = n]).$$

3.1.4 Mesures de performances:

Nous appelons état d'un système à l'instant t le nombre $N(t)$ de clients présents dans le système à cet instant (un client est «présent dans le système» s'il est en file d'attente ou en cours de service). Les quantités fondamentales auxquelles s'intéresse l'analyste dans le cadre des modèles de files d'attente sont les probabilités d'état, que nous définissons de la façon suivante:

pour : $n = 0, 1, 2, ...$et $t \geq 0$

P_n Probabilité qu'il y ait n clients dans le système

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

Lorsque P_n a été connues alors on peut calculer les nombreuses mesures de performance du système de files d'attente à étudier. Parmi les plus importantes,

on considérera les mesures à long terme suivantes :

L =Nombre moyen de client dans le système.

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$$

Lq = Nombre moyen de clients dans la file d'attente (excluant ceux qui sont dans le service) .

$$Lq = \sum_{n=0}^{\infty} (n - S)P_n$$

avec: S = Le nombre de serveur.

W = Temps moyen dans le système .

on a :

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n$$

donc:

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}}$$

$Wq =$ Temps moyen dans la file (excluant le temps de service) .

$$Wq = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}$$

3.1.5 Formule de LITTLE :

La formule de LITTLE nous donne la relation qui existe entre les valeur caractéristiques d'un système d'attente, elles sont liées par les relations suivantes:

- $L = \lambda_e.W$
- $L_q = \lambda_e.W_q$
- $W = W_q + \frac{1}{\mu}$
- $W_q = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu}$

Ou λ_e : le taux d'entrée des clients dans le systéme si la capacité est illimitée ;

$\lambda_e = \lambda$.

$\lambda = nP_k$ l'orsque $P_n = k$

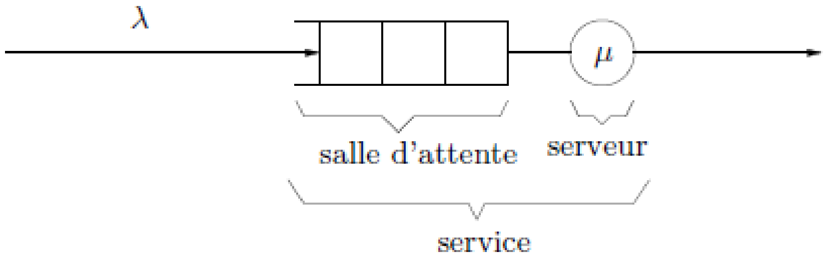
μ : le taux de service d'un client.

3.2 Les files d'attente Markoviennes:

Les files d'attente markoviennes sont celles qui sont pour les quelles les inters arrivées et les durées de service sont exponentiels. Leur notation de Kendall sera de la forme M/M/...(M comme markovien...)

3.2.1 La file d'attente M/M/1:

M : comme sans mémoire ou markovien . 1 est le nombre de guichets. On suppose que le processus des arrivées est un processus de Poisson d'intensité , et que les temps de service sont i.i.d. de loi commune la loi exponentielle (μ). Le nombre de clients présents dans le système (au guichet + en attente) est alors un processus markovien de saut à valeurs dans IN.



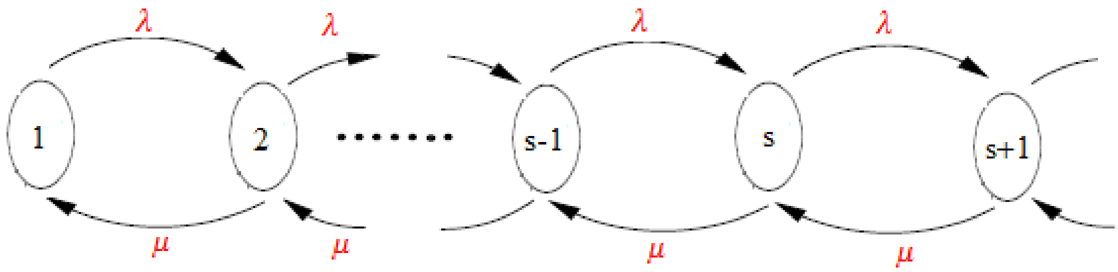
la file M/M/1

Graphe des transitions:

Dans le cas de la file $M/M/1$, considérons la distribution la plus simple suivante : $\{X(t),\ t \geqslant 0\}$, ou $X(t)$ est le nombre de clients présente dans la système à l'instant t. puisque la capacité est illimitée, l'espace d'états $E = \{1, 2, 3, ...\}$

Lorsqu'a un instant donné t il y'a $X(t)$ clients dans le système $(X(t) > 0)$, deux événements peuvent se produire : l 'arrivée d 'un nouveau client et le départ d'un client résultant la fin de service .Le processus de naissance et de mort ne permet de modéliser ce genre de phénoméne .

La figure ci-dessous nous donne le graphe de transition :



graphe de transition de la file M/M/1

Stabilité du système:

La condition de stabilité de la file d'attente en question est $\lambda < \mu$; ça exprime le fait que le nombre moyen de clients qui arrivent a l'attente par unité du temps, doit être inferieur au nombre moyen de client que le serveur est capable de traiter. Cela nous conduit à définir une autre variable $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ qui représente le coefficient d'utilisation du système , alors on note : **le système est stable** $\Longleftrightarrow \rho < 1$

Remarque 3.2.1 *Lorsque $\rho > 1$, il arrive λ client en moyen tandis que le serveur en plein régime il peut traiter que μ clients par unité du temps , donc le nombre de clients en attente tend vers l'infini, dans ce cas on dit que la file est instable.*

Analyse du régime permanent:

On s'intéresse à l'analyse stationnaire d'une file stable (donc pour laquelle $\lambda < \mu$) . On note $p(n)$ la probabilité stationnaire d'être dans l'état n, ou encore la probabilité pour que le système contienne n clients au régime permanent . Les probabilités stationnaires $p(n)$ peuvent être calculées de plusieurs façon , on considére la file $M/M/1$ comme un processus de naissance et de mort pour lequel :

$$\lambda_n = \lambda$$

Stabilité du système:

$$\mu_n = \begin{cases} \mu & si \quad n \neq 0 \\ 0 & si \quad n = 0 \end{cases}$$

Equations de Balance

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1 \\ \lambda P_1 + \mu P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda P_n + \mu P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} \end{cases}$$

Ce système a une solution de la forme :

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0\,, \qquad\qquad n = 1, 2, ...$$

Avec la condition de normalisation de propabilités :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

C'est-à-dire :

$$P_0 + P_1 + P_2 + ... + P_n + P_{n+1} + ... = 1.$$

Remplaçons les P_n par leurs valeurs on obtient :

$$P_0 + P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 + P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + ... + P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} + ... = 1$$

$$\Longrightarrow P_0\left(1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + ... + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} + ...\right) = 1$$

$$\Longrightarrow P_0\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right) = 1$$

On trove:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Puisque $\quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$

alors :

$$P_0 = 1 - \rho$$

Finalement , on a le résultat suivant :

$$\mathbf{P}_n = \boldsymbol{\rho}^n . (1-\rho) \quad \mathbf{n} \geqslant \mathbf{1}$$

Calculons maintenant les caractéristiques de la file d'attente M/M/1:

a) Nombre moyen de clients dans le système L:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{n=1}^{\infty} n P_n = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = \rho(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1} \\ &= \rho(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{d\rho}(\rho^n) = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}(\frac{1}{1-\rho}) = \rho(1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^2} \\ &= \frac{\rho}{(1-\rho)} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} \\ &= \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \end{aligned}$$

b) Nombre moyen de clients dans la file d'attene L_q:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_q &= \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n \\ &= L - (1-P_0) = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} - \frac{\lambda}{\mu} \\ &= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \end{aligned}$$

c) Temps moyen pour un client dans le système W :

$$\begin{aligned} W &= \frac{L}{\lambda} = \frac{\lambda}{(\mu-\lambda)}\frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{1}{(\mu-\lambda)} \end{aligned}$$

d) Temps moyen pour un client dans la file d'attente W_q:

$$\begin{aligned} W_q &= \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}\frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \end{aligned}$$

3.2.2 La file d'attente M/M/S:

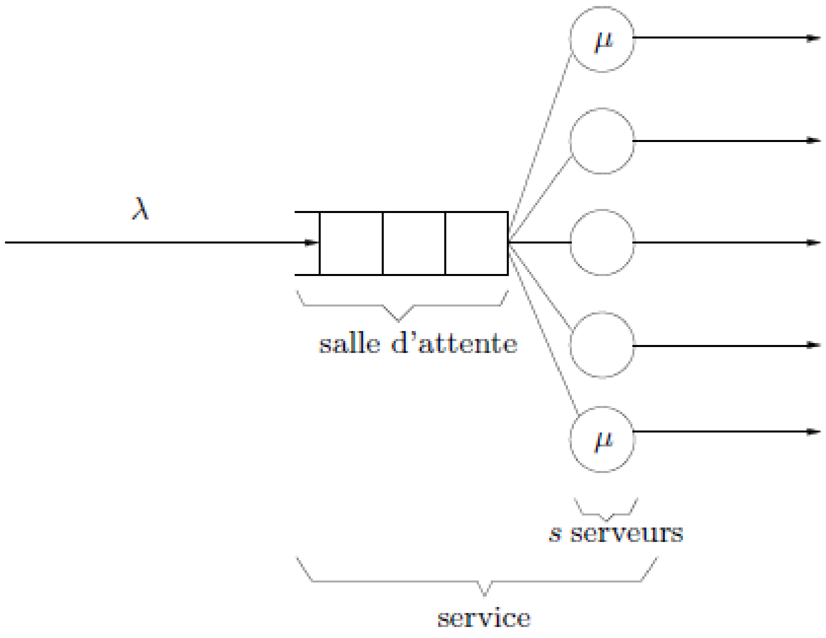
Définition 3.2.1 *:*

Considérons un modèle de file d'attente où les arrivées et les départs se produisent comme dans un processus de naissance et de mort où :

$$\lambda_n = \lambda \qquad \forall n$$

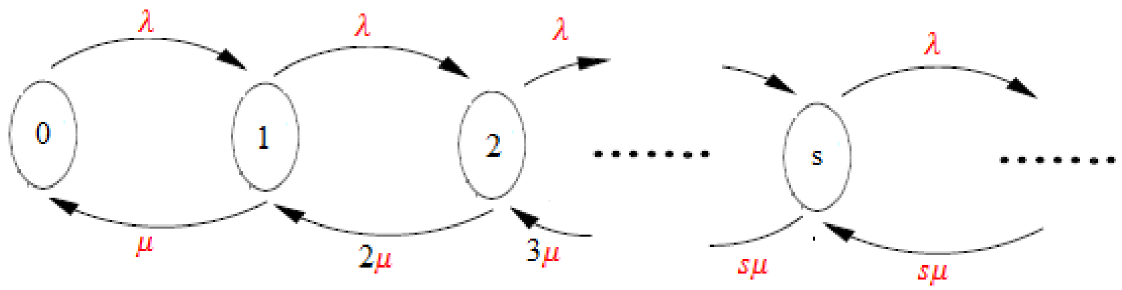
$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & si \quad 0 < n < s \\ s\mu & si \quad\quad n > s \end{cases}$$

chaque serveur a un taux de service de μ ,mais le taux de service depend du nombre de clients dans le système, si le nombre est inférieur à s seul un sous-ensemble de serveurs egal au nombre de clients sont actifs, si le nombre de clients est superieur ou égal s a , les s serveurs sont actifs



la file M/M/s

Graphe des transitions :



graphe de transition de la file M/M/S

Stabilité du système :

La condition de stabilisé de se systéme est : $\lambda < S\mu$, alors la valeur de ρ qu'on a défini précédamment sera définie comme suit :$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$ On note : **Le système est stable** $\Longleftrightarrow \rho < 1$

Analyse du régime permanent :

On note $P(n)$, la probabilité stationnaire d'être dans l'état n (probabilité que le système contienne n clients). Ces probabilités peuvent être calculées à l'aide des équations de Balance associées à ce modèle.

Equations de Balance :

Cas 01 : $1 \leqslant n \leqslant S$:

$$\begin{cases} 0: & \lambda P_0 = \mu P_1 \\ 1: & \lambda P_1 + \mu P_1 = \lambda P_0 + 2\mu P_2 \\ & . \\ & . \\ & . \\ (S-1): & \lambda P_{S-1} + (S-1)\mu P_{S-1} = \lambda P_{S-2} + S\mu P_S \\ S: & \lambda P_S + S\mu P_S = \lambda P_{S-1} + S\mu P_{S+1} \\ (S+1): & \lambda P_{S+1} + (S+1)\mu P_{S+1} = \lambda P_S + S\mu P_{S+2} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \\ P_2 = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^2}{2!} P_0 \\ . \\ . \\ . \\ P_S = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^S}{S!} P_0 \end{cases}$$

D'où :

$$\mathbf{P}_n = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} \mathbf{P}_0, \qquad \mathbf{n = 0, 1, 2, ..., S}$$

Cas 02 : Si $n > S$:

$$\begin{cases} P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \\ P_2 = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^2}{2!} P_0 \\ . \\ . \\ P_S = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^S}{S!} P_0 \\ P_{S+1} = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{S+1}}{S!S} P_0 \\ P_{S+2} = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{S+2}}{S!S^2} P_0 \\ . \\ . \\ P_n = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{S!S^{n-S}} P_0 \end{cases}$$

Finalement, on obtient :

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} \mathbf{P}_0, & \mathbf{n = 0, 1, 2, ...S} \\ \\ \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{S!S^{n-S}} \mathbf{P}_0; & \mathbf{n > S} \end{cases}$$

La condition de normalisation des probabilités : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n = 1$ nous permet de calculer P_0
On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P_n &= \sum_{n=0}^{S} P_n + \sum_{n=S+1}^{\infty} P_n = 1 \\
&\Rightarrow \sum_{n=0}^{S} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} P_0 + \sum_{n=S+1}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{s! s^{n-s}} P_0 = 1 \\
&\Rightarrow P_0 (\sum_{n=0}^{S} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \sum_{n=S+1}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{s! s^{n-s}}) = 1 \\
&\Rightarrow P_0 (\sum_{n=0}^{S} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \sum_{n=S+1}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{n-s}}{s^{n-S}}) = 1 \\
&\Rightarrow P_0 (\sum_{n=0}^{S} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \sum_{n-S=1}^{\infty} (\frac{\lambda}{s\mu})^{n-s}) = 1 \\
&\Rightarrow P_0 [\sum_{n=0}^{S} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} (\frac{1}{1-\frac{\lambda}{S\mu}} - 1)] = 1 \\
&\Rightarrow P_0 = [\sum_{n=0}^{S} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{S\mu})(\frac{\lambda}{\mu})^S}{s!(1-\frac{\lambda}{S\mu})}]^{-1} \\
&\Rightarrow P_0 = [\sum_{n=0}^{S} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{s+1}}{s!(\frac{S\mu-\lambda}{\mu})}]^{-1}
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\mathbf{P}_0 = [\sum_{n=0}^{S} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{s+1}}{s!(s-\frac{\lambda}{\mu})}]^{-1}$$

Remarque 3.2.2 *:La probabilité qu'un client qui entre dans le système doit attendre est définie par la probabilité d'attente comme suit :* $P(attente) = P(X \geqslant S)$

$$\begin{aligned}
P(attente) &= \sum_{n=S}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{s! s^{n-s}} P_0 = \frac{P_0}{s!} \sum_{n=S}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{n-s} (\frac{\lambda}{\mu})^s}{s^{n-s}} \\
&= \frac{P_0 (\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \sum_{n=S=0}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{n-s}}{s^{n-s}} = \frac{P_0 (\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} . \frac{1}{1-\frac{\lambda}{s\mu}} \\
&= \frac{P_0 (\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!(1-\rho)}
\end{aligned}$$

Alor :

$$P(X \geqslant S) = \frac{P_s}{(1-\rho)}$$

tel que :

$$P_s = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} P_0$$

Qui est la première formule d'Erlang .

Calculons maintenant les caractéristiques de la file d'attente M/M/S:

a) Nombre moyen de clients dans le système L: D'aprés la formule de Little; on a:

$$L = \frac{P_s \rho}{(1-\rho)^2} + s\rho$$

b) Nombre moyen de clients dans la file d'attene L$_q$:

$$L_q = \sum_{n=S+1}^{\infty} (n-s) P_n = \sum_{n=S+1}^{\infty} (n-s) \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{s! s^{n-s}} P_0$$

$$L_q = \frac{P_0}{s!} (\frac{\lambda}{\mu})^s \sum_{n=S+1}^{\infty} (n-s) (\frac{\lambda}{s\mu})^{n-s} = \frac{P_s \rho}{(1-\rho)^2}$$

Alors:

$$L_q = \frac{P_s \rho}{(1-\rho)^2}$$

c) Temps moyen pour un client dans le système W :

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{P_s \rho}{\lambda (1-\rho)^2} + \frac{s\rho}{\lambda}$$

d) Temps moyen pour un client dans la file d'attente W$_q$:

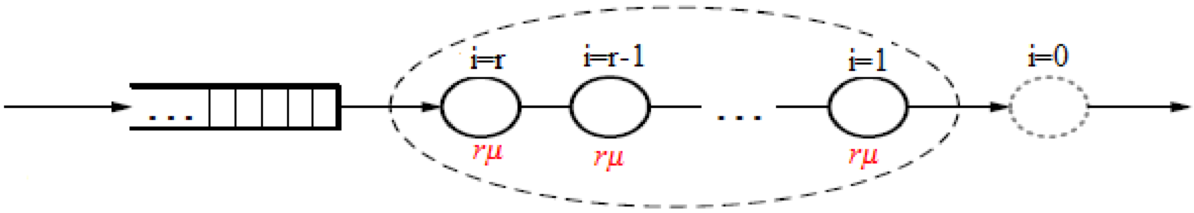
$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{P_s \rho}{\lambda (1-\rho)^2}$$

Chapitre 4

La file d'Erlang M/E$^{(r)}$/1 et application:

4.1 introduction:

Nous considérons un système de mise en file d'un seul serveur qui a une entrée Poisson et Erlang temps de service. Le modèle Erlang est un système de file d'attente bien connu qui s'applique à De nombreuses situations de la vie réelle. La relation d'Erlang avec la distribution exponentielle aussi nous permet de décrire les modèles de files d'attente où le service peut être une série d'étape identique . Par exemple, un hôpital où les gens ont besoin d'un examen médical, Suivie de phases identiques telles que l'examen des yeux, les rayons x, l'analyse sanguine, etc. en utilisant la distribution Erlang comme distribution de service, un client entre Le service peut être considéré comme générant un ensemble de r phases de service. Les phases ont une distributions exponentielles identiques avec le paramètre $r\mu$.toutes les étapes du service sont indépendantes et identiques



Définition 4.1.1 *les clients arrivents dans le systeme par groupes de r clients selon un processus de poisson de cadance λ.chaque client qui entre dans le service est obligé de passé succéssivement par les r services de dureé $\exp(r\mu)$.on peut consideré la dureé de service comme la somme de r services de dureé $\exp(r\mu)$ donc:*

$S = S_1 + S_2 + \ldots\ldots\ldots + S_r$ *si* $\exp(r\mu) = \gamma(1, r\mu)$ *d'ou:*

$s \rightsquigarrow \gamma(r, r\mu)$ *est une loi d'Erlang de dansité:*

$f(x) = \frac{(r\mu)^r}{(r-1)!} x^{r-1} \exp(-r\mu x)$ *ou bien :* $f(x) = \frac{r\mu(r\mu x)^{r-1} \exp(-r\mu x)}{(r-1)!}$ *avec* $E(x) = \frac{1}{\mu}$ *et* $V(x) = \frac{1}{r\mu^2}$

4.1.1 Graphe des transitions :

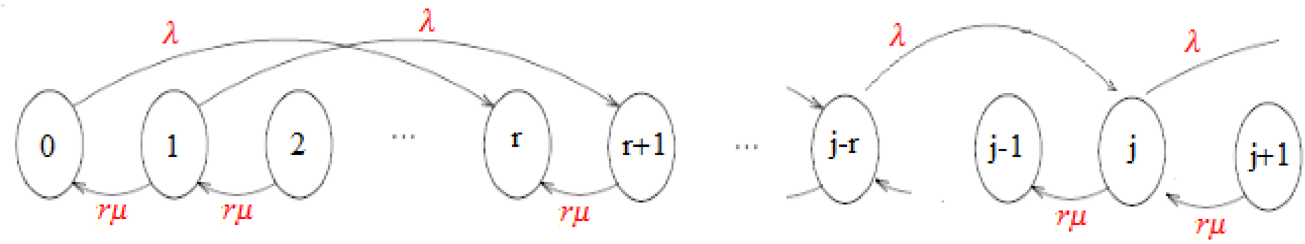


Diagramme de transition de la file M/E^r/1

les équations de la balance :

$$\begin{cases} r\mu P_1 = \lambda P_0 \quad , j = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ \\ (\lambda + r\mu) P_j = \lambda P_{j-r} + r\mu P_{j+1} \quad , j \geqslant 1 \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

pour résoudre le systéme on introduit la fonction génératrice:

$$G(z) = \sum_{j \geqslant 0} P_j z^j$$

telle que z est une variable complexe.on verifie immediatement que $G(z)$ est definie au moins pour $\mid z \mid \leq 1$ et que :

$$G(0) = P_0 \quad et \quad G(1) = 1$$

dans l'équation (2) on multiplie par z^j et on somme sur j donc on obtient :

$$\Rightarrow \sum_{j\geq 1}(\lambda + r\mu)P_j z^j = \sum_{j\geq 1}\lambda P_{j-r}z^j + \sum_{j\geq 1} r\mu P_{j+1}z^j$$
$$\Rightarrow (\lambda + r\mu)\sum_{j\geq 1}P_j z^j = \lambda\sum_{j\geq 1}P_{j-r}z^j + r\mu\sum_{j\geq 1}P_{j+1}z^j$$
$$\Rightarrow (\lambda + r\mu)[G(z) - P_0] = \lambda\sum_{j\geqslant 1}P_{j-r}z^j + \frac{r\mu}{z}[G(z) - P_0 - zP_1]$$

on va resoudre

$$\lambda\sum_{j\geqslant 1}P_{j-r}z^j$$

on a : $k = j - r \Rightarrow j = k + r$

pour $j \geq 1 \Rightarrow k \geq 1 - r$

donc:

$$\lambda[\sum_{k\geqslant 1-r}P_k z^{k+r}] = \lambda\left[\sum_{k=1-r}^{0}P_k z^{k+r} + \sum_{k\geqslant 0}P_k z^{k+r}\right] = \lambda z^r\sum_{k\geqslant 0}P_k z^k = \lambda z^r G(z)$$

d'ou:

$$(\lambda + r\mu)[G(z) - P_0] = \lambda z^r G(z) + \frac{r\mu}{z}[G(z) - P_0 - zP_1]$$

$$\Rightarrow \lambda G(z) - \lambda P_0 + r\mu G(z) - r\mu P_0 = \lambda z^r G(z) + \frac{r\mu}{z}G(z) - \frac{r\mu}{z}P_0 - r\mu P_1$$

$$\Rightarrow (\lambda + r\mu)G(z) - \lambda z^r G(z) - \frac{r\mu}{z}G(z) = r\mu P_0 - \frac{r\mu}{z}P_0$$

$$\Rightarrow (\lambda + r\mu)zG(z) - \lambda z^{r+1}G(z) - r\mu G(z) = (z-1)r\mu P_0$$

donc finalment on a la resolution de ce systeme :

$$\mathbf{G(z)} = \frac{(z-1)r\mu P_0}{(\lambda + r\mu)z - \lambda z^{r+1} - r\mu}$$

on calcule la valeur de P_0 :

on a

$$G(1) = \sum_{k\geq 0} P_k(1)^k = 1$$

c'est a dire $G(1) = 1$

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 1} G(z) &= \frac{A(z)}{B(z)} = \lim_{z\to 1}\frac{A'(z)}{B'(z)} \\
&= \frac{r\mu P_0}{(\lambda + r\mu) - \lambda(r+1)z^r} \\
&= \frac{r\mu P_0}{\lambda + r\mu - \lambda r - \lambda} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{r\mu P_0}{r\mu - r\lambda} &= 1 \\
&\Rightarrow r\mu P_0 = r\mu - r\lambda
\end{aligned}$$

$$P_0 = \frac{r\mu}{r\mu} - \frac{r\lambda}{r\mu} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \rho$$

$$P_0 = 1 - \rho$$

d'ou:

$$\mathbf{G(z)} = \frac{r\mu(1-\rho)(z-1)}{(\lambda + r\mu)z - \lambda z^{r+1} - r\mu}$$

pour verifier cette solution on va la comparé avec la file $M/M/1$:

si $r = 1$:

on a :

$$\begin{aligned}
G(z) &= \frac{\mu(1-\rho)(z-1)}{(\lambda+\mu)z - \lambda z^2 - \mu} \\
&\Rightarrow G(z) = \frac{\mu(1-\rho)(z-1)}{[\frac{\lambda+r}{r}z - \frac{\lambda}{\mu}z^2 - 1]} \\
&\Rightarrow G(z) = \frac{(1-\rho)(z-1)}{[(\rho+1)z - \rho z^2 - 1]} = \frac{(1-\rho)(z-1)}{(z-1)(1-\rho z)} = \frac{1-\rho}{1-\rho z} \\
&\Rightarrow G(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho z} = (1-\rho)\frac{1}{1-\rho z}
\end{aligned}$$

avec

$$G(z) = \sum_{k \geqslant 0} P_k z^k$$

et

$$\frac{1}{1-\rho z} = \sum_{k \geq 0} (\rho z)^k$$

donc :

$$\Rightarrow (1-\rho) \sum_{k \geq 0} (\rho z)^k = \sum_{k \geqslant 0} P_k z^k$$

$$\Rightarrow \sum_{k \geq 0} (1-\rho) \rho^k z^k = \sum_{k \geqslant 0} P_k z^k$$

on trouve :

$$P_k = (1-\rho)\rho^k$$

donc c'est une distribution stationnaire d'une file $M/M/1$

4.2 application:

4.2.1 introduction:

Le cas d'une file d'attente générale est sensiblement plus difficile à étudier, car si les temps entre arrivées de clients et les temps de service ne sont pas exponentiels, on perd la propriété de Markov. En effet, l'état actuel du système ne suffit pas à déterminer son évolution future, qui dépend entre autres du temps que le client actuellement servi a déjà passé au serveur. Dans certains cas particuliers, on peut se ramener à un système markovien en introduisant des états supplémentaires.

Dans notre travail nous pris en considération une File d'attente $M/E^r/1$, Supposons que les clients arrivent selon un processus de Poisson d'intensitée λ, mais que le temps de service suit une loi Gamma de paramètres $(r,\, r\mu)$ avec $r \geqslant 2$. Une interprétation possible de cette loi est que le service du client requiert r actions successives, prenant chacune un temps exponentiel de paramètre $(r\mu)$.

nous observons un système de files d'attente dont les lois des inter-arrivées et des durées de service sont générales durant une période de temps T , ainsi le nombre des clients entrés et celui des clients servis dans le système est aléatoire

4.2.2 Algorithme de simulation:

Afin de simuler le système décrit plus haut et d'évaluer ses performances durant un intervalle de temps $[0, t]$, on suit les étapes de l'algorithme suivantes :

Donner l'horizon de simulation T.

Générer les séquences d'inter-arrivées suivant une loi Poisson.

Générer les durées de service suivant une loi Erlang^2.

Calculer n_t et m_t tel que :

n_t : représente le nombre de clients entrant dans le système durant la période $[0, t]$.

m_t : représente le nombre de clients servis durant $[0, t]$.

Estimer $f(x)$ (la loi d'inter-arrivées) et $g(x)$ (la loi service) avec leurs estimateurs respectifs.

Tracer le graphe des densités estimées.

Calculer la durée moyenne entre deux arrivées consécutives$EX = \int x f_{n_t}(x)dx$.

Calculer le taux d'arrivé : $\lambda = \frac{1}{EX}$

Calculer la durée moyenne de service E=$\int y g_{m_t}(y)dy$.

Calculer le taux de service $\mu = \frac{1}{EY}$.

Calculer le coefficient d'utilisation du système :$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Si $\rho < 1$, à l'aide des formules analytiques , on évalue les performance du système.

En se basant sur l'algorithme décrit ci-dessus, nous allons simuler le système de files d'attente $M/E^r/1$, dont les durées entre deux arrivées consécutives suivent une loi exponentielle de paramètre λ , et les durées de service suivent une loi d'Erlang de paramètres (k , μ) Dans le but de voir le comportement aléatoire des séquences des inter-arrivées et des durées de services, le système sera simulé plusieurs fois suivant des horizons de plus en plus grand .

4.2.3 Résultats de simulation :

Dans ce mémoire, on a utilisé le langage de programmation matlab version 7 . 9 . 0 dans la simulation des différents systèmes.

MATLAB (matrix laboratory) est un langage de programmation de quatrième génération émulé par un environnement de développement du même nom ; il est utilisé à des fins de calcul numérique. Développé par la société The MathWorks , MATLAB permet de manipuler des matrices, d'afficher des courbes et des données, de mettre en œuvre des algorithmes, de créer des interfaces utilisateur, et peut s'interfacer avec d'autres langages comme le C , C ++ , Java , et Fortran . Les utilisateurs de MATLAB (environ un million en 2004) sont des milieux très différents comme l'ingénierie, les sciences et l'économie dans un contexte aussi bien industriel que pour la recherche. Matlab peut s'utiliser seul ou bien avec des toolbox (boîte à outils).

Le langage MATLAB a été conçu par Cleve Moler à la fin des années 1970 à partir des bibliothèques Fortran, LINPACK et EISPACK, le logiciel MATLAB est construit autour du langage MATLAB. Une interface en ligne de commande, qui est un des éléments du bureau MATLAB, permet d'exécuter des commandes simples. Des séquences de commandes peuvent être sauvegardées dans un fichier texte, typiquement avec l'éditeur MATLAB, sous la forme d'un "script" ou encapsulée dans une fonction.

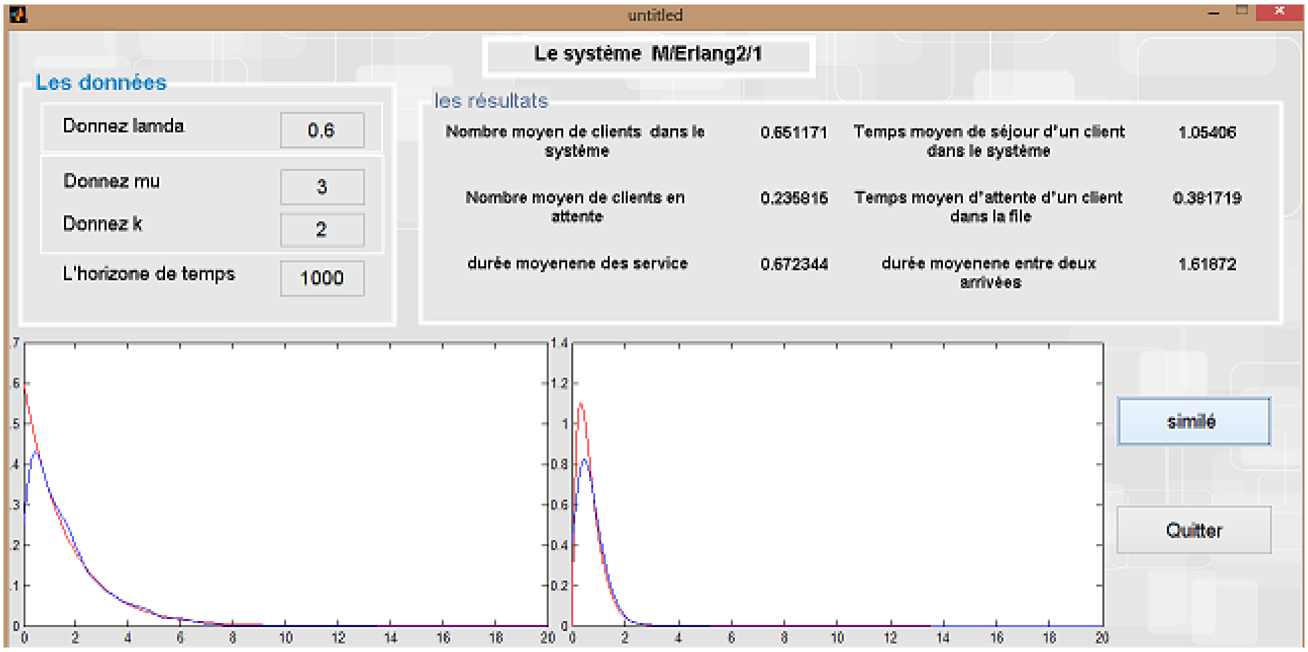
Pour mieux utilisé notre applications nous avons effectué une interface graphique utilisons le langage de programmations Matlab la figure suivant représente notre principale face:

Notre application est composée à une interface graphique telle que la partie sup gauche a été réservé pour les données l'utilisateur ,On a λ : paramètre pour les inters arriver suit une loi exp ,Est pour les service on a une loi d'Erlang de paramètres (k, μ), et pour la case d'horizon du temps signifie la durée de notre expérience

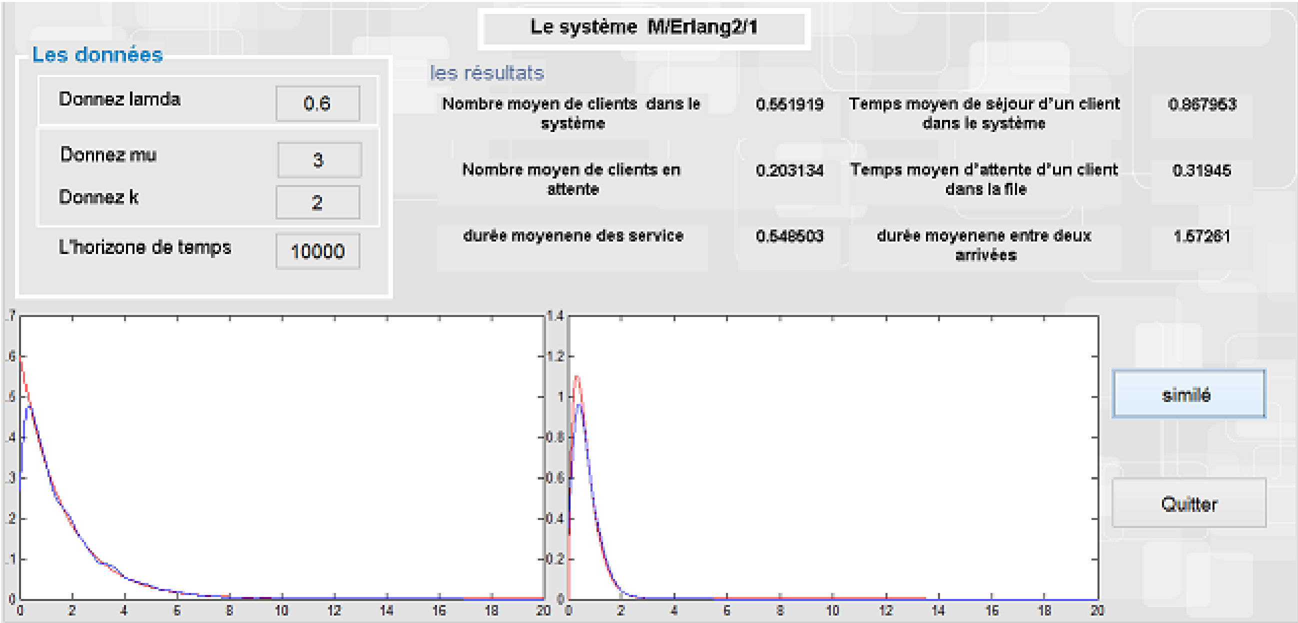
Pour la partie sup droite elle est réservée pour les résultats obtenue par les simulations

Pour le premier graphe inferieure gauche réserver pour présenter les graphes résulta les inters arriver et les deuxièmes graphes réserver pour les résulta de service (loi Erlang)

On prend un exemple pour $T = 1000$, on a la courbe en rouge représenté la loi théorique pour le bleu représente la courbe obtenu par la simulation.



Pour $T = 10000$:



Vous avez remarqué à chaque fois on augmente horizon de temps la courbe obtenu par la simulation va être plus proche a la courbe théorique.

Conclusion générale

L'objectif de notre mémoire est l'évaluation du système de la file d'attente Erlang en passant en premier par les notions de base des chaines de Markov puis en élargissant le travaille pour aboutir essentiellement au processus de saut et les processus de naissance et de mort.

On a composé notre étude de deux partie

La première partie théorique qui consiste a l'analyse du phénomène fil d 'attente en utilisant les processus de saut qui grâce aux équations de Kolmogorov va nous donner les processus de naissance et de mort ,ces derniers forme est une grande partie des files d'attente.

Pour la partie file d'attente on a pris beaucoup plus en considération la file $M/M/1$ et

$M/M/S$

qui sont des files d'attentes Markovien.

A partir de la distribution stationnaire on a obtenu les caractéristiques telle que le nombre moyen de clients dans le système ,le nombre moyen de client dans la file d'attente,la durée moyenne de séjour d'un clients dans le système ainsi que la durée moyenne de séjour d'un clients dans la file d'attente ,a partir de ces exemples on a examiné la partie essentiel de notre travaille qui consiste a l'étude de la file $M/E^r/1$ (ERLANG) ,on a donner la densité de cette dernière, sa variance et son espérance puis a l'aide du graphe de transissions on a put trouver les équations de balance qui nous ont aider a calculer la fonction génératrice sans passer par la file $M/G/1$

La deuxieme partie pratique on a évaluer le système $M/E^r/1$ .Nous avons fait appele aux différente technique de simulations. Pour juger les résultats obtenu par la simulation nous avons constatés les résultats théorique du système d'attente $M/E^r/1$, nous avons réalisé nos idées sur une interface graphique par le langage de programmations MATLAB.

Bibliographie

[1] Bruno Baynat. Théorie des files d'attente, des chaînes de Markov aux réseaux à forme produit.Hermes Sciences Publications, 2000.

[2] Gunter Bolch, Stefan Greiner, Hermann de Meer, and Kishor S. Trivedi. Queueing networks and Markov chains. John Wiley & Sons Inc., New York, 1998.

[3] Philippe Bougerol. Processus de sauts et Files d'attente. Format électronique,http ://www.proba.jussieu.fr/supports.php, 2001.

[4] Nicolas Bouleau. Processus stochastiques et applications. Hermann, 2000.

[5] Rick Durrett. Essentials of stochastic processes. Springer Texts in Statistics. Springer-Verlag,New York, 1999.

[6] Dominique Foata et Aimé Fuchs. Processus stochastiques. Dunod, 2002.

[7] Geoffrey R. Grimmett and David R. Stirzaker. One Thousand Exercises in Probability. Oxford University Press, New York, 2001.

[8] Geoffrey R. Grimmett and David R. Stirzaker. Probability and random processes. Oxford University Press, New York, 2001.

[9] James R. Norris. Markov Chains. Cambridge University Press, 1997.

[10] Alan Ruegg. Processus stochastiques. Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1989.

[11] Bernard Ycart. Modèles et algorithmes markoviens. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[12] Bernard Ycart. Files d'attente. Cahiers de Mathématiques Appliquées, CMA 14, 2004.

[13] Bernard Ycart. Processus markoviens de saut. Cahiers de Mathématiques Appliquées, CMA 12, 2004.

[14] Bessel Solaiman. Processus stochastiques pour l'ingénieur.

[15] David Coupier,Processus stochastiques, POLYTECH'LILLE GIS 4

[16] Nathan P. Sherman and Jevtrey P. Kharoufeh. : An M/M/1 retrial queue with unreliable server. Operations Research Letters. 2006.

[17] N. Bouleau : Processus Stochastiques et Applications, Hermann, 1988.

[18] E. Cinlar : Introduction to Stochastic Processes, Prentice Hall 1975.

[19] Universit ´e de Rennes I – Master de mathématiques,File d'attente M/M/1 – 2004-2005.

[20] ERLANG, A. K. The theory of probabilities and telephone conversations. Nyt Tidsskrift for Matematik B 20, 33-39 (1909), 16.

[21] CHEVALLIER, L. Les files d'attente. Publications Oboulo. com (2008).

[22] A. Krinik (1992): Taylor series solution of the M /M / 1 queueing system, J. Comp and Appl. Math., 44, 371-380.

[23] ALLEN, A. O. Probability, statistics, and queueing theory. Academic Press, 2014

[24] Donald Gross and Carl M. Harris : Fundamentals of Queueing Theory,Third Edition,Wiley-Interscience,New York etc. 1998.

[25] Ganna Leonenko Transient solution of the M/E^k/1 queueing system Department of Mathematics Cardiff University November, 2005.

[26] U.N. Bhat, I.V. Basawa (1992): Queueing and Related Models, Clarendon Press,Oxford.

[27] A.B. Clarke (1956): A waiting line process of Markov type, Ann. Math. Stat.,27, 452-459.

[28] D.R. Cox, W.L. Smith (1961): Queues, Chapman and Hall.

[29] W. Feller (1966): An Introduction to Probability Theory and its Application, Jon Wiley&Sons, Second Edition.

[30] D. Gross, C.M. Harris (1974): Fundamentals of Queueing Theory, John Wiley&Sons, New York