

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université M'hamed Bougara Boumerdes  
Faculté des sciences  
Département de Mathématiques

---



Mémoire présenté  
en vue de l'obtention du diplôme de Master  
en Mathématiques Financières

Par : MAZOUNI Fatima  
Et : MENDAS Kenza

Thème

**Méthodes d'estimations de la volatilité des indices boursiers**

Soutenu publiquement à l'UMBB le 28 /06 /2017, devant le jury composé de :

Président	Mr. K.KHALDI
Promotrice	Mme. S.MEDDAHI
Examineur	Mr. K.AKLIOUET

Année Universitaire 2016 - 2017



## **Remerciements**

Toute nos gratitude, grâce et remerciements vont à dieu le tout puissant qui nous a donné la force, la patience le courage et la volonté pour élaborer ce modeste travail.

Nos remerciements s'adressent tout naturellement à notre promotrice, Madame S.MEDDAHI, pour sa patience, et surtout pour sa confiance et ses conseils, sa disponibilité et sa bienveillance.

Nous remercions vivement Monsieur K.KHALDI professeur à l'université de M'hamed Bougara Boumerdes, pour l'intérêt qu'il a apporté à ce sujet en acceptant d'être le président du jury.

Nous remercions également Monsieur K.AKLIQUET enseignant à l'université de M'hamed Bougara Boumerdes pour avoir accepté d'évaluer ce travail et participer à ce jury.

Nous témoignons une reconnaissance particulière à l'ensemble des enseignants du département des mathématiques pour leur soutien inestimable et leur instruction.

Enfin, on remercie nos familles et nos amis qui ont fait de notre réussite leur principale préoccupation, et à tout ceux de près ou de loin, ont contribués à la réalisation de ce travail.



## Dédicaces

A mon très cher père.

A ma très chère mère.

A mes très chers grands parents.

A mes frères et soeurs.

A ma binôme Kenza et Djamil qui m'ont soutenue jusqu'au bout.

A toute ma famille et mes amies.

Je dédie ce travail.

*Fatima*



A mon très cher père.

A ma très chère mère.

A la mémoire de mes grands parents.

A ma soeur, son mari, mes neveux.

A ma binôme Fairouz et Haythem qui m'ont soutenue jusqu'au bout.

A toute ma famille et mes amies.

Je dédie ce travail.

*Kenza*

# Résumé

Nous nous intéressons aux méthodes d'estimation de la volatilité des indices boursiers dans le cas où la volatilité est constante (volatilité historique et volatilité implicite) et non constante (volatilité stochastique et volatilité conditionnelle ARCH/GARCH).

Nous analysons les principales propriétés des séries financières, le modèle de Black-Scholes. Nous illustrons ces méthodes par une application sur des données réelles de cours de l'action *SP&500*.

**Mots-clés :**

Volatilité, équations différentielles stochastiques, instruments financiers, rendements, modèle de Black-Scholes, volatilité implicite, volatilité stochastique, modèle ARCH/GARCH.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>6</b>
<b>1 Calcul Stochastique et instruments financiers</b>	<b>8</b>
1.1 Calcul stochastique	9
1.1.1 Tribu	9
1.1.2 Filtration	9
1.1.3 Processus adapté	9
1.2 Processus stochastique en temps continu	10
1.2.1 Processus gaussien	10
1.2.2 Martingale	10
1.3 Mouvement brownien	10
1.3.1 Définitions et propriétés	11
1.3.2 Processus de Wiener général	12
1.3.3 Temps d'arrêt	13
1.4 Intégrale stochastique	14
1.4.1 Construction de l'intégrale stochastique	14
1.4.2 Calcul d'Itô	15
1.5 Equations différentielles stochastiques	17
1.5.1 Définitions	18
1.5.2 Existence et unicité de solution	18
1.5.3 Exemples d'EDS	19
1.6 Instruments financiers	20
1.6.1 Les options	20
1.6.2 Notion d'arbitrage et la relation de parité Call-Put	22
1.6.3 Marchés financiers viables :	22
1.6.4 Marchés complets :	22
1.6.5 Options sur indices boursiers	23
<b>2 Modélisation stochastique de la dynamique du sous-jacent : Modèle de Black-Scholes</b>	<b>25</b>
2.1 Modèle de Black-Scholes	26
2.1.1 Présentation du modèle	26
2.1.2 Portefeuille autofinçant	27
2.1.3 Evaluation risque-neutre	28
2.1.4 Equation différentielle de Black-Scholes	29
2.2 Series des rendements	31

2.2.1	Loi jointe des rendements . . . . .	32
2.2.2	Propriétés des séries financières : . . . . .	33
2.2.3	Tests statistiques des séries de rendements : . . . . .	35
2.2.4	Les grecques . . . . .	37
2.2.5	Extension de modèle de Black-Scholes . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Méthodes d'estimation de la volatilité</b>	<b>39</b>
3.1	Volatilité . . . . .	40
3.2	Méthodes d'estimations de la volatilité . . . . .	40
3.2.1	Modèle à volatilité locale (constante) . . . . .	40
3.3	Application numérique . . . . .	49
3.3.1	Estimation des paramètres . . . . .	50
3.3.2	La méthode historique . . . . .	50
3.3.3	La méthode implicite . . . . .	53
3.4	Modèle à volatilité stochastique . . . . .	55
3.4.1	Présentation du modèle . . . . .	55
3.4.2	Equation différentielle du modèle à volatilité stochastique . . . . .	56
3.4.3	Estimation de la volatilité : . . . . .	58
3.5	Modèle à volatilité conditionnelle (ARCH-GARCH) . . . . .	59
3.5.1	Le principe générale du modèle ARCH-GARCH . . . . .	60
3.5.2	Estimation des paramètres ARCH et GARCH . . . . .	65
3.5.3	Evaluation des options . . . . .	67
3.6	Application numérique . . . . .	67
3.6.1	Estimation des paramètres de la volatilité stochastique . . . . .	69
3.6.2	Simulation de la volatilité stochastique . . . . .	69
3.6.3	Modélisation de la volatilité conditionnelle . . . . .	69
	<b>Conclusion</b>	<b>78</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>80</b>

# Introduction générale

Les modèles mathématiques constituent un pilier incontournable de la finance de marché moderne. Pour bien comprendre ces modèles de plus en plus complexe, les spécialistes de la finance utilisent des outils mathématiques tel que le mouvement brownien, les équations différentielles stochastiques,...

Le concept de la volatilité est probablement un des sujets qui suscitent le plus de recherches dans le domaine de la finance mathématique. Cet intérêt pour la volatilité est motivé par deux raisons importantes : le nombre de plus en plus grand de compagnies utilisant les outils de gestion de risques et le grand nombre de produits dérivés transignés dans les marchés financiers mondiaux.

L'étude la plus reconnue dans le monde de la finance mathématique est certainement le modèle d'évaluation des options de Black-Scholes (1973), qui a connu un succès immédiat auprès des chercheurs et des professionnels de la finance, tant le besoin était grand d'outil de gestion des risques. Le modèle de Black-Scholes permet d'évaluer le prix d'une option en se basant sur l'hypothèse que l'évolution d'un titre suit un mouvement brownien géométrique et que la volatilité est constante.

Cependant, l'hypothèse de la constance de la volatilité dans la formule de Black-Scholes était rejetée depuis le début tel que démontré dans les travaux de Black (1976), Schmalensee et Trippi (1978) et ceux de Christie (1982), et surtout après le

crash de 1978, qui a mis en évidence l'effet de "smile" qui pourtant ne devrait pas apparaître sous les hypothèses de Black-Scholes. Ces constatations nous amènent à considérer la volatilité comme processus de diffusion, ce qui a donné naissance aux modèles à volatilité stochastique.

Dans le cadre des problèmes d'évaluation d'option, l'incertitude associée aux prix futur de l'actif sous-jacent est le déterminant le plus important dans la formation des prix varié au cours du temps l'un des outils les plus intéressants apparu pour caractériser de telles variances variables a été introduit par Engle (1982), il s'agit des modèles ARCH, depuis leurs apparition des centaines de travaux de recherches se sont attachés à appliquer ce type de modélisation à des séries financières.

Ce travail est réparti en trois chapitres :

**Le premier chapitre** introduit les notions élémentaires du calcul stochastique et une introduction au monde de la finance.

**Le deuxième chapitre** est consacré à la présentation du modèle d'évaluation d'option de Black-Scholes, ainsi des séries de rendements avec ses propriétés.

**Le troisième chapitre** présente les méthodes d'estimation de la volatilité constante à savoir la volatilité historique et implicite, et non constante (volatilité stochastique et volatilité conditionnelle ARCH/GARCH). On termine par une application sur le cours de l'action de l'indice boursier *SP&500*.



# 1

## Calcul Stochastique et instruments financiers

### **Introduction**

Les mathématiques financières sont devenues de nos jours un outil incontournable dans un monde où l'argent prend une place prépondérante dans les affaires. Pour toutes les opérations économiques, l'agent n'a plus le droit à l'erreur, son raisonnement doit toujours être rationnel afin de lui permettre de prendre des décisions rentable, plusieurs outils mathématiques notamment les processus stochastiques, ont été mis au point dans le but de résoudre de nombreux problèmes financiers.

## 1.1 Calcul stochastique

### 1.1.1 Tribu

Soit  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espace de probabilité ou  $\Omega$  est l'espace fondamental dont les éléments sont noté  $\omega$  et  $\mathfrak{F}$  une tribu sur  $\Omega$  ou ( $\sigma$ -algèbre). Une tribu sur  $\Omega$  est une famille de  $\Omega$  telle que :

1.  $\phi \in \mathfrak{F}$
2.  $\forall A \in \mathfrak{F}$  alors  $C_A \in \mathfrak{F}$  (Stable par passage au complémentaire)
3. Stable par union et intersection dénombrable

### 1.1.2 Filtration

Soit  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espace de probabilité, on appelle filtration sur  $\Omega$ , toute famille croissante  $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}_t, t \in T\}$  de sous tribu de  $\mathfrak{F}$ .

La tribu  $\mathfrak{F}_t$ , représente l'information fournie par le processus jusqu'à l'instant  $t$ . De façon plus précise, une filtration indexée par  $T$  est une famille  $(\mathfrak{F}_t)_{t \in T}$ , de sous tribus de  $\mathfrak{F}$  c'est-à-dire  $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}$ , possédant la propriété de croissance suivante :

$$s \leq t \Rightarrow \mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t$$

### 1.1.3 Processus adapté

Un processus  $X = (X_t, t \in T)$  est adapté à une filtration  $\mathfrak{F}$  si pour tout  $t$ ,  $X_t$  est  $\mathfrak{F}_t$ -mesurable

On appelle filtration naturelle d'un processus  $X$  et l'on note  $\mathfrak{F}^X$  la plus petite filtration par rapport à laquelle  $X$  est adapté, en d'autres termes, pour tout  $t$ ,  $\mathfrak{F}_t^X$  est la tribu engendrée par les variables  $X_s, s \leq t$ .

Une filtration  $\mathfrak{F}_t$  est plus fine qu/ la filtration naturelle associée à  $(X_s)$ . Pratiquement, dans de nombreux cas, cela correspond à la situation suivante : on observe un phénomène aléatoire dépendant du temps, alors  $(\mathfrak{F}_t)$  correspond à l'information contenue dans tout le  $\mathfrak{F}_t$ .

## 1.2 Processus stochastique en temps continu

### Définition 1.1. .

On appelle processus stochastique à temps continu une famille  $(X_t)_{t \in T}$  de variables aléatoires indexées par un ensemble  $T$ , définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . Un processus  $X_t(w)$  dépend de deux paramètres  $t$  (généralement le temps) et de  $w \in \Omega$ .

Pour  $t \in T$  fixé, l'application  $w \in \Omega \rightarrow X_t(w)$  est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ .

Pour  $w \in \Omega$  fixé, l'application  $t \in T \rightarrow X_t(w)$  est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus, noté  $X_t(w)$  ou  $X(t, w)$ .

### 1.2.1 Processus gaussien

Un processus stochastique  $(X_t, t \geq 0)$  est dit gaussien si le vecteur  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  est un vecteur gaussien ( $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ ).

Autrement dit,  $(X_t)_{t \geq 0}$  est gaussien si toute combinaison linéaire  $\sum_{i=1}^n \alpha_i X_{t_i}$  suit une loi gaussienne (pour tout  $n \in \mathbb{N}, t_1, t_2, \dots, t_n \in T$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ ).

### 1.2.2 Martingale

Soit  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espace probabilisé et  $(\mathfrak{F})_{t \geq 0}$  une filtration de cet espace. Une famille adaptée  $(M_t)_{t \geq 0}$  de variable aléatoires intégrables (c'est-à-dire vérifiant  $E(|M_t|) < +\infty$  pour tout  $t$ ) est :

- Une martingale si, pour tout  $s \leq t$ ,  $E(M_t / \mathfrak{F}_s) = M_s$ .
- Une sur-martingale si, pour tout  $s \leq t$ ,  $E(M_t / \mathfrak{F}_s) \leq M_s$ .
- Une sous-martingale si, pour tout  $s \leq t$ ,  $E(M_t / \mathfrak{F}_s) \geq M_s$ .

## 1.3 Mouvement brownien

Le mouvement brownien a été découvert en 1827 par le botaniste britannique Robert Brown (1773-1858). En 1900, Louis Bachelier l'utilise le premier pour modéliser la dynamique des cours de la bourse, puis en 1905 Albert Einstein mit en évidence le

mouvement brownien en étudiant la dynamique moléculaire, ainsi que ses relations avec l'équation de la diffusion.

La première étude mathématique est faite par Norbert Wiener (1923) qui exhibe également une démonstration de l'existence de mouvement brownien puis Paul Lévy (1948) s'intéresse aux propriétés fines des trajectoires du Brownien, et c'est le début d'une activité de recherche intense, continuant de nos jours.

### 1.3.1 Définitions et propriétés

#### Définition 1.2. .

Soit  $B = \{B_t, t \geq 0\}$  un processus défini sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  muni de la filtration  $\mathfrak{F}_t$ . On suppose que  $B$  est  $\mathfrak{F}_t$ -adapté et à trajectoires continues. On dit que  $B$  est un  $\mathfrak{F}_t$ -mouvement Brownien si :

1.  $B$  est à accroissements indépendants : si  $t \geq s$ , la variable aléatoire  $B_t - B_s$  est indépendante de  $\mathfrak{F}_s$ .
2.  $B$  est à accroissements stationnaires : si  $t \geq s$ , la variable aléatoire  $B_t - B_s$  a la même loi que  $B_t - B_0$ .
3. pour tout  $t \geq 0$ ,  $B_t - B_0$  suit la loi normale  $N(0, t)$ .

Si de plus  $B_0 = 0$ , on dit que  $B$  est un mouvement Brownien standard.

#### Proposition 1.1. .

Soit  $B = \{B_t, t \geq 0\}$  un  $F_t$ -mouvement Brownien sur l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathfrak{F}, P, \{\mathfrak{F}_t \geq 0\})$ . Alors  $B$  est un processus Gaussien de fonction moyenne  $\mathbb{E}[B(t)] = 0$  et d'opérateur variance  $K_B(s, t) = \min(s, t)$ .

#### Proposition 1.2. .

Soit  $B$  un mouvement Brownien standard. Soit  $\lambda$  une constante donnée. Chacun des processus suivants est une martingale :

- i)  $\{B_t, t \geq 0\}$ .
- ii)  $\{B_t^2 - t, t \geq 0\}$ .
- iii)  $\{\exp^{\lambda B_t - \lambda^2 \frac{t}{2}}, t \geq 0\}$ .

**Proposition 1.3.**

Si  $B$  est un mouvement Brownien standard. Soit  $T$  et  $\lambda$  deux constantes positives données. Alors les processus suivants sont des mouvements Browniens.

- i)  $B_t = \{-B_t, t \geq 0\}$  : propriété de symétrie.
- ii)  $B_t = \{B_{T+t} - B_T, t \geq 0\}$  : propriété d'invariance par translation.
- iii)  $B_t = \{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}B_{\lambda t}, t \geq 0\}$  : propriété d'autosimilarité .
- iv)  $B_t = \{tB_{\frac{1}{t}}, t \geq 0\}$  : propriété d'inversion du temps.

**1.3.2 Processus de Wiener général**

Le processus de Wiener standard vérifie

$$E(B_t) = 0 \text{ et } V(B_t) = t$$

L'espérance et la variance sont donc normalisées. La généralisation naturelle consiste à introduire des paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ ,  $\mu$  représente le drift, c'est-à-dire l'espérance de variation par unité de temps et  $\sigma^2$  la variance de cette variation par unité de temps.

**Définition 1.3.**

Un processus  $W$  est appelé mouvement brownien général de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  si  $W_t$  s'écrit :

$$W_0 = 0$$

$$W_t = \mu t + \sigma B_t$$

Les propriétés de  $W$  se déduisent directement de celles de  $B$ .

**Théorème 1.1.**

1.  $W$  est un processus à accroissements indépendants et stationnaires, à trajectoires continues mais non dérivables en aucun point.
2. Pour  $s < t, W_t - W_s \sim N(\mu(t-s), \sigma\sqrt{t-s})$ .
3.  $Cov(W_t, W_s) = \sigma^2(t-s)$

4.  $W$  est une sous (sur)-martingale par rapport à sa filtration naturelle si  $\mu > (<)0$ .

Si  $W_t$  représente la rentabilité cumulée d'un actif financier sur l'intervalle  $[0; t]$ ,  $\mu > 0$  signifie que l'espérance de rentabilité est positive. S'il existe un actif sans risque de rentabilité  $r$ , l'aversion au risque des agents économiques se traduira alors par  $\mu > r$ .

### 1.3.3 Temps d'arrêt

**Définition 1.4.** .

Soit  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espace probabilisé filtré; on appelle temps d'arrêt toute variable aléatoire  $\tau$  à valeurs dans  $T \cup \{+\infty\}$  telle que pour tout  $t$ , l'évènement  $\{\tau \leq t\}$  est dans la tribu  $\mathfrak{F}_t$ .

Une définition du temps d'arrêt pour les processus en temps discret peut être donnée sous une forme presque analogue, la seule différence que l'évènement considéré est  $\{\tau = t\}$  au lieu  $\{\tau \leq t\}$ .

**Théorème 1.2.** .

Soient  $\tau$  et  $\tau'$  deux temps d'arrêt par rapport à une filtration  $\mathfrak{F}$ ,  $\tau + \tau'$ ,  $\min(\tau, \tau')$ ,  $\max(\tau, \tau')$  sont des temps d'arrêt.

Des temps d'arrêt du type  $\min(\tau, \tau')$  et  $\max(\tau, \tau')$  interviennent par exemple dans certains contrat d'assurance décès. Si  $\tau$  et  $\tau'$  désignent les dates de décès d'un mari et de son épouse, la compagnie devra payer sa prestation au temps  $\min(\tau, \tau')$  si le contrat sur deux têtes stipule que le capital doit être versé au dernier survivant. Par contre, il sera versé à la date  $\max(\tau, \tau')$  si le contrat bénéficie aux héritiers au dernier des deux décès.

**Définition 1.5.** .

Soit  $\tau$  un temps d'arrêt et  $X$  un processus

1.  $\tau$  est  $\mathfrak{F}_\tau$ -mesurable.
2. Si  $\tau$  est borné et  $X$  adapté à  $\mathfrak{F}$ , alors  $X_\tau$  est  $\mathfrak{F}_\tau$ -mesurable.
3. Si  $\tau$  et  $\tau'$  sont deux temps d'arrêt tels que  $\tau \leq \tau'$ , alors  $\mathfrak{F}_\tau \subseteq \mathfrak{F}_{\tau'}$ .

## 1.4 Intégrale stochastique

Le calcul différentiel donne un cadre à la notion d'équation différentielle ordinaire. Il sert de modèle pour des phénomènes variables dans le temps. Lorsqu'on a voulu ajouter à ces équations des perturbations aléatoires, on a été gêné par la non différentiabilité du mouvement brownien. Du coup on a commencé par construire une intégrale par rapport au mouvement brownien, pour ensuite définir la notion d'équation différentielle stochastique. Et il a fallu donner un sens à  $\int_0^t g(X_s)dB_s$

### 1.4.1 Construction de l'intégrale stochastique

Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un  $\mathcal{F}$ -mouvement brownien standard sur un espace probabilisé filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ .

Nous allons donner un sens à  $\int_0^t g(X_s)dB_s$  pour une classe de processus  $g(X_s)$  adaptés à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . On va commencer par construire l'intégrale stochastique sur un ensemble de processus dit élémentaires. Dans toute la suite, on fixe  $T$  un réel strictement positif et fini.

**Définition 1.6** (Processus élémentaire). .

On appelle processus élémentaire  $H = \{H_t, 0 \leq t \leq T\}$  un processus de la forme :

$$H_t(w) = \sum_{i=1}^n H_i(w) \mathbb{1}_{]t_{i-1}, t_i]} t \in ]0, T]$$

où  $(0 = t_0 \leq \dots \leq t_n = T)$  est une subdivision de  $[0, T]$  et  $H_i$  est  $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -mesurable.

**Définition 1.7** (Intégrale stochastique). .

On définit l'intégrale stochastique d'un processus élémentaire  $H$ , le processus continu  $(I(H)_t)_{0 \leq t \leq T}$ , si  $t \in ]t_k, t_{k+1}]$  on a :

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^n H_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + H_{k+1}(B_{t_i} - B_{t_k})$$

Notons que  $I(H)_t$  peut s'écrire :

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^n H_i(B_{t \wedge t_i} - B_{t \wedge t_{i-1}})$$

Ce qui prouve la continuité de la fonction  $t \mapsto I(H)_t$ . On notera  $\int_0^t H_s dB_s$  pour  $I(H)_t$ .

**Proposition 1.4** (Propriétés de l'intégrale stochastique). .

L'intégrale stochastique du processus élémentaire  $H$  par rapport au mouvement Brownien, satisfait les propriétés :

1. Le processus  $\left\{ \int_0^t H_u dB_u, 0 \leq t \leq T \right\}$  est  $\mathfrak{F}$ -adapté et à trajectoires continues.
2. Le processus  $\left\{ \int_0^t H_u dB_u, 0 \leq t \leq T \right\}$  est une  $\mathfrak{F}$ -martingale qui démarre à zéro.
3. Le processus  $\left\{ \int_0^t H_u dB_u, 0 \leq t \leq T \right\}$  vérifie la propriété d'isométrie.

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^t H_u dB_u \right]^2 = \mathbb{E} \left[ \int_0^t H_u^2 du \right]$$

4. Si  $K$  est un processus élémentaire, alors

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_s^t H_u dB_u \right) \left( \int_s^\tau K_u dB_u \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[ \int_s^{\min(t,\tau)} H_u K_u dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right]$$

- 5.

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t H_u dB_u \right|^2 \right] \leq 4 \mathbb{E} \left[ \int_0^T H_u^2 du \right]$$

## 1.4.2 Calcul d'Itô

Le lemme d'Itô, ou encore formule d'Itô est l'un des principaux résultats de la théorie du calcul stochastique. Ce lemme offre un moyen de manipuler le mouvement brownien ou les solutions d'équations différentielles stochastiques (EDS).

La formule d'Itô a été démontrée pour la première fois par le mathématicien japonais Kiyoshi Itô dans les années 1940.

On considère un  $\mathcal{F}$ -mouvement Brownien standard  $B$  défini sur l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_{t \geq 0}\}; P)$ , et on fixe un horizon de temps  $[0, T]$  où  $T > 0$ .

### 1.4.2.1 Processus d'Itô

**Définition 1.8.** .

Un processus stochastique  $(X_t)_{t > 0}$  est appelé processus d'Itô s'il s'écrit sous la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$



où  $X_0$  est  $\mathcal{F}_0$ -mesurable,  $\{\mu_t, t \in \mathbb{R}_+\}$  et  $\{\sigma_t, t \in \mathbb{R}_+\}$  sont deux processus  $\mathcal{F}_t$ -adaptés vérifiant les conditions d'intégrabilité

$$\int_0^t |\mu_s| ds < +\infty \text{ P.p.s}$$

$$\int_0^t |\sigma_s|^2 ds < +\infty \text{ P.p.s}$$

On note également

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$$

### 1.4.2.2 Formule d'Itô

**Proposition 1.5** (La formule d'Itô pour le mouvement brownien). .

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . On suppose que la dérivée seconde  $f''$  est bornée.

Alors

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds$$

**Théorème 1.3.** .

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  par rapport à  $t$  et par rapport à  $x$ , aux dérivées bornées. Soit  $X$  un processus d'Itô :

$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$ . Alors, le processus  $Y$  défini par  $Y_t = f(t, X_t)$  est un processus d'Itô, avec

$$\begin{aligned} Y_t &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) d\langle X_s \rangle \\ &= f(0, X_0) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} b_s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma_s^2 \right\}(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma_s \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dB_s \end{aligned}$$

### 1.4.2.3 Formule d'intégration par partie (IPP)

Soit  $X_t$  et  $Y_t$  deux processus d'Itô :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s \text{ et } Y_t = Y_0 + \int_0^t \mu'_s ds + \int_0^t \sigma'_s dB_s$$

Alors

$$X_t Y_t = \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t$$

avec la convention que  $\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t \sigma_s \sigma'_s ds$

## 1.5 Equations différentielles stochastiques

Les équations différentielles sont des équations d'évolution du type :

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (1.5.1)$$

où l'inconnue est une fonction  $x(t)$  qui doit vérifier une équation impliquant sa dérivée  $x'(t)$  et elle-même. Les cas les plus simples sont les équations différentielles d'ordre 1 comme en (1.5.1) (seule la dérivée 1ère est impliquée) avec  $f(t, x) = a + bx$  indépendant de  $t$  et affine par rapport à  $x$ . Symboliquement, l'équation (1.5.1) se réécrit :

$$dx(t) = f(t, x(t)) dt \quad (1.5.2)$$

Par exemple, l'équation  $dx(t) = b(t)x(t)dt$  modélise le cours d'un actif financier  $x(t)$  soumis au taux d'intérêt variable  $b(t)$ . Il est bien connu que la solution est

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t b(s) ds\right)$$

Les EDS sont des généralisations des équations (1.5.2) où la dynamique déterministe d'évolution  $b$  est perturbée par un terme aléatoire (stochastique). On parle alors d'équation différentielle stochastique. En général la perturbation aléatoire est considérée comme un bruit. Il est légitime de considérer que ce bruit est un processus gaussien et en général il est modélisé par un mouvement brownien  $B$  et une intensité de bruit  $\sigma(t, x)$  :

$$dX(t) = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t \quad (1.5.3)$$

où  $\sigma$  est une fonction du temps  $t$  et de l'inconnue au temps  $t$  ( $X_t$ ) mais pourrait juste dépendre du temps ( $\sigma_t$ ) ou de la valeur  $X_t$  en  $t$  ( $\sigma(X_t)$ ) ou encore être constante  $\sigma$ .

En fait, l'écriture (1.5.3) est symbolique car  $dB_t$  n'a pas vraiment de sens (le mouvement brownien n'est pas dérivable). Il faudrait écrire (1.5.3) sous la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s \quad (1.5.4)$$

qui, elle a un sens si l'intégrale stochastique  $\int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$  a un sens.

### 1.5.1 Définitions

#### Définition 1.9. .

Soit  $0 \leq t < T$ . On appelle *équation différentielle stochastique (EDS)* sur  $[0, T]$ , avec donnée initiale  $x$ , toute relation de la forme :

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \quad (1.5.5)$$

où  $X$  est le processus d'Itô sur  $[0, T]$  (appelé l'inconnue),  $x$  une variable aléatoire  $F_0$ -mesurable,  $\mu(t, X_t)$  et  $\sigma(t, X_t)$  sont deux fonctions données, mesurables définies sur  $\mathbb{R} \times [0, T]$  et à valeurs réelles. Le terme  $\mu(t, X_t)$  est appelé *dérivée* ou *drift* de l'EDS, alors que  $\sigma(t, X_t)$  est appelé *coefficient de diffusion*.

La solution de l'EDS est une fonction aléatoire. Il s'agit donc d'un processus qu'on note  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ .

### 1.5.2 Existence et unicité de solution

#### Théorème 1.4. .

Soient  $\mu(t, X_t)$  et  $\sigma(t, X_t)$  deux fonctions mesurables sur  $[0, T] \times \mathbb{R}$  et qu'il existe une constante  $K > 0$  auxquelles on impose les hypothèses ci-dessous :

a) (condition de Lipschitz) : Pour tout  $t \in [0, T]$  et pour tous  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$$

b) Pour tout  $t \in [0, T]$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$|\mu(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 < K^2(1 + |x|^2)$$

c) (Condition sur la valeur initiale) :  $X_{t_0}$  est  $\mathfrak{F}_0$ -mesurable avec  $E(|X_0|^2) \leq \infty$  alors pour tout  $t \leq T$  l'équation (1.5.5) admet une solution forte unique presque sûrement à trajectoires continues.

### 1.5.3 Exemples d'EDS

#### 1.5.3.1 Black et Scholes

C'est le cas particulier où  $\mu(t, X_t)$  et  $\sigma(t, X_t)$ , c'est-à-dire

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \quad (1.5.6)$$

Cette EDS modélise l'évolution d'un cours  $X$  soumis à un taux d'intérêt déterministe  $\mu$  et à une perturbation stochastique  $\sigma X_t dB_t$ . Dans un contexte financier, le coefficient de diffusion  $\sigma$  est appelé volatilité. Noter que la partie déterministe de l'accroissement de  $X_t$  ( $\mu X_t$ ) et sa partie aléatoire ( $\sigma X_t$ ) sont toutes les deux proportionnelles à la valeur courante,  $X_t$  en  $t$

La solution de (1.5.6) est :

$$X_t = X_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma B_t\right)$$

qui est le mouvement brownien géométrique.

#### 1.5.3.2 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est la solution unique de l'EDS appelée équation de Langevin.

$$\begin{cases} dX_t = -cX_t dt + \sigma dB_t \\ X_0 = 0 \end{cases} \quad (1.5.7)$$

où  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$  et  $c > 0$  sont des constantes. Dans le problème physique modélisé par cette équation  $X_t$  présente la vitesse d'une particule en suspension dans un liquide, soumise au bombardement moléculaire ainsi qu'un frottement de coefficient  $c$ .

On peut expliciter cette solution. En effet,  $Y_t = X_t \exp(ct)$  et écrivons la formule d'intégration par parties

$$dY_t = dX_t \exp(ct) + X_t d(\exp(ct)) + d\langle X_t, \exp(ct) \rangle_t$$

De plus, puisque  $d(\exp(ct)) = c \exp(ct)dt$

$$\langle X_t, \exp(ct) \rangle_t = 0$$

On en déduit que  $dY_t = \sigma \exp(ct)dB_t$ , alors la solution de (1.5.7) est

$$X_t = x \exp(-ct) + \sigma \exp(-ct) \int_0^t \sigma \exp(cs)dB_s.$$

## 1.6 Instruments financiers

Depuis des années, nous assistons à une révolution de grande ampleur sur les marchés financiers. Cette activité financière se développe à travers de nombreux instruments tels que la circulation de monnaie exprimée dans différentes devises, des opérations de prêts et d'emprunts et bien sûr des actions émises par les entreprises qui reflètent leur capitalisation. Des indices ont été créés (SP500, CAC40,...) permettant aux investisseurs étranger d'avoir une information rapide sur le comportement actions d'un pays. Dans cette partie, on présente les définitions élémentaires en finance.

### 1.6.1 Les options

Une option est un instrument financier qui fait partie des produits dérivés dont la détention, en échange du paiement d'une prime, procure le droit, et non l'obligation, d'acheter (dans le cas d'un call) ou de vendre (dans le cas d'un put) un actif support (le sous jacent) à une date précise ou pendant une période donnée et pour un prix donné appelé prix d'exercice de l'option ou encore strike en anglais. On distingue deux formes d'option.

**Définition 1.10** (Call-Européen). .

*Une option d'achat européenne, est un contrat qui donne le droit (et non l'obligation) à son détenteur d'acheter une certaine quantité d'actif sous-jacent (de valeur  $S_t$  à l'instant  $t$ ) à une certaine date future, appelée maturité, notée  $T$ , et à un prix fixé dans le contrat, noté  $K$ , appelé strike. L'acheteur va exercer son option si  $S_T > K$ , sinon il ne fait rien. La valeur réelle donc échangée à la maturité, appelée le "pay-off" de l'option, est donc*

$(S_T - K)_+ = \max(S_T - K, 0)$ . Une fois passée sa date d'échéance, l'option d'achat ne vaut plus rien. L'option d'achat est donc un bien périssable.

**Définition 1.11** (Put Européen). .

Une option de vente européenne, est un contrat qui donne le droit à son détenteur de vendre une certaine quantité d'actif sous-jacent à une date future et à un prix fixé dans le contrat. Avec les mêmes notations que pour le call, on obtient que le pay-off du put est  $(K - S_T)_+ = \max(K - S_T, 0)$

**Définition 1.12** (Un actif sous-jacent). .

C'est un actif sur lequel porte une option ou plus largement un produit dérivé. Il peut être :

- Actions.
- Obligations.
- Indices boursiers.

**Définition 1.13** (Le prix d'exercice ou strike). .

C'est le prix auquel le détenteur de l'option peut acheter ou vendre le sous-jacent. Ce prix est déterminé lors de la négociation initiale de l'option n'est pas modifiable pendant la durée de vie du contrat (jusqu'à l'échéance).

La position du cours du sous-jacent par rapport au prix d'exercice permet de caractériser l'option. Une option d'achat (respectivement de vente) est dite :

- "à la monnaie" si le cours du sous-jacent cote le prix d'exercice.
- "hors de la monnaie" si le cours du sous-jacent est inférieur (respectivement supérieur) au prix d'exercice.
- "dans la monnaie" si le cours du sous-jacent est supérieur (respectivement inférieur) au prix d'exercice.

**Définition 1.14** (Maturité ou la date d'exercice). .

La date d'exercice est le dernier jour auquel l'option peut être exercée, ainsi, passé cette date, l'option perd toute sa valeur c'est-à-dire une date fin de validité du contrat.

### 1.6.2 Notion d'arbitrage et la relation de parité Call-Put

L'arbitrage est une opération financière assurant un gain positif ou nul de manière certaine. L'hypothèse de base, retenue dans tous les modèles, est l'absence d'opportunité d'arbitrage (A.O.A), c'est-à-dire qu'il est impossible de faire des profits sans prendre de risque.

A partir de cette hypothèse, on peut établir des relations entre les prix des call et des put européen de même échéance  $T$ , de même prix d'exercice  $K$ , sur une action de cours  $S_t$  à l'instant  $t$ , et un taux pour placer ou emprunter de l'argent et constant égal à  $r$ .

On désigne par  $C_t$  et  $P_t$  les prix respectifs du call et du put à l'instant  $t$ .

Par l'A.O.A, pour tout instant  $t \leq T$ , on a la relation suivante appelée "relation de parité call-put" :

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

### 1.6.3 Marchés financiers viables :

#### Définition 1.15. .

*On dit que le marché est viable s'il n'existe pas de stratégie d'arbitrage.*

#### Théorème 1.5. .

*Le marché est viable si et seulement si s'il existe une probabilité  $P^*$  équivalente à  $P$  sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.*

*(Deux probabilités  $P_1$  et  $P_2$  sont équivalentes si et seulement si, pour tout événement  $A$ ,  $P_1(A) = 0 \Leftrightarrow P_2(A) = 0$ . Ici,  $P^*$  équivalente à  $P$  signifie simplement que pour tout  $\omega \in \Omega, P^*(\omega) > 0$ ).*

### 1.6.4 Marchés complets :

Soit  $h$  la variable aléatoire représentant le profit que permet l'exercice d'une option européenne  $\mathfrak{F}_n$ -mesurable, d'échéance  $T$ , de prix d'exercice  $K$ , on a  $h = (S_T - K)_+$  pour une option d'achat et  $h = (K - S_T)_+$  pour une option de vente où  $S_T$  est le cours de l'actif à l'échéance,  $h$  est donc une fonction de  $S_T$  seulement.

**Définition 1.16.** .

On dit que l'option européenne  $h$  est simulable s'il existe une stratégie admissible  $\phi$  dont la valeur à l'instant  $T$  est égale à  $h$  c'est-à-dire  $V_T(\phi) = h$

**Remarque 1.1.** .

Dans un marché viable, pour que l'option  $h$  simulable, il suffit qu'il existe une stratégie autofinancée de valeur égale à  $h$  à l'instant  $T$ .

**Définition 1.17.** .

On dit qu'un marché financier est complet si toute option est simulable.

L'intérêt des marchés complets est qu'ils se prêtent à une théorie très simple de l'évaluation et de la couverture des actifs conditionnels.

## 1.6.5 Options sur indices boursiers

### 1.6.5.1 Historique

Les options sur indices boursiers sont apparues en 1983 sur les marchés d'options négociable de Chicago. Ce type a connu un énorme succès suite au développement de la théorie et de la pratique financière et suite à l'essor des marchés d'options négociables dès 1973.

Le succès des options sur indices aux Etats-Unis a été suivi par la création de marché de ce type en Asie et en Europe.

Les options sur indices permettent la répartition des risques dans l'économie et la contribution à la complétude des marchés. De plus elles ont un rôle informationnel : information - volatilité, anticipée - prix des options sur indices - couverture de base sur un prix de couverture connu.

**Définition 1.18.** .

Un indice boursier est une mesure statistique de la performance d'un marché d'action ou d'un segment de marché d'action. On peut citer, à cet effet, le SP&500 qui mesure l'évolution du marché financier américain.

Un indice boursier ne comprend pas tous les titres du marché. Il doit être conçu de manière à ce que l'échantillon des titres sélectionnés fournisse une bonne approximation



*du marché à analyser. Il doit refléter la performance et le risque du marché, dans son ensemble, afin de servir comme point de repère dans la mesure des performances des portefeuilles boursiers.*

# 2

## Modélisation stochastique de la dynamique du sous-jacent : Modèle de Black-Scholes

### **Introduction**

Dans le monde d'aujourd'hui, la finance joue un rôle des plus important et est parfois à l'origine des crises mondiales. Il apparait alors important que la finance soit basée sur des modèles solides permettant d'évaluer les risques et les prix. De cette nécessité, le modèle de Black-Scholes s'est imposé comme référence depuis 1973, dans le calcul d'option. Le modèle de Black-Scholes est un modèle mathématique qui permet d'évaluer le cours du sous-jacent jusqu'à l'échéance de l'option. Les hypothèses de

ce modèle sont très restrictives : continuité des trajectoires, constance de la volatilité, log-normalité des rendements,... Il a l'avantage d'être un modèle simple, facile à estimer.

Dans ce chapitre, nous allons présenter le modèle de Black-Scholes d'évaluation des options financières et les séries des rendements.

## 2.1 Modèle de Black-Scholes

### 2.1.1 Présentation du modèle

Considérons un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_{t \geq 0}), P)$ .

le modèle proposé pour décrire l'évolution des cours est un modèle continu avec un actif risqué (une action de prix  $S_t$  à l'instant  $t$ ) et un actif sans risque (de prix  $S_t^0$  à l'instant  $t$ ).

L'évolution de  $S_t^0$  est régie par l'équation différentielle :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, S_0^0 = 1$$

de sorte que  $S_t^0 = \exp(rt)$  pour  $t \geq 0$ , où  $r$  le taux d'intérêt (connu et constant).

On suppose que l'actif risqué est solution de l'EDS :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \tag{2.1.1}$$

On applique la formule d'Itô pour résoudre l'équation (2.1.1) :

$$df_t = \left( \frac{df}{dS} \mu S_t + \frac{df}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dS^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{df}{dS} \sigma S_t dB_t$$

On pose  $Y_t = \log(S_t)$  d'où  $S_t = \exp(Y_t)$

Appliquons la formule d'Itô à  $Y_t$ . On obtient :

$$\begin{aligned}
 dY_t &= \left( \frac{1}{S_t} \mu S_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{1}{S_t} \sigma S_t dB_t \\
 &= \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB_t \\
 Y_t &= Y_0 + \int_0^t \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) ds + \int_0^t \sigma dB_s \\
 &= \log S_0 + \int_0^t \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) ds + \int_0^t \sigma dB_s \\
 &= \log S_0 + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t
 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$S_t = S_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right] \quad (2.1.2)$$

Où ce processus est appelé un mouvement Brownien géométrique.

## 2.1.2 Portefeuille autofinçant

### Définition 2.1. .

*Un portefeuille est un ensemble d'investissement possédé par un intervenant sur le marché. Ce sont des positions sur le marché, c-à-d le nombre d'actifs et de produit dérivé qu'il possède. Il peut contenir des actions, des options, des devises... On peut appeler cela un portefeuille initial sans l'action de gestion des risques.*

### Définition 2.2. .

*Un portefeuille autofinancé est une stratégie qui consiste à l'investissement à tout moment  $t \in [0, T]$  d'une quantité notée  $\Theta_t$  d'actif risqué  $S$  et d'une quantité  $\Phi_t$  d'actif sans risque  $R$ . La valeur de portefeuille est donnée par :*

$$\Pi_t = \Theta_t S_t + \Phi_t R_t$$

*Avec la condition d'autofinancement :*

$$d\Pi_t = \Theta_t dS_t + \Phi_t dR_t$$

Une stratégie est dite autofinancante s'il n'y a pas d'ajout ou de retrait d'argent dans le portefeuille entre deux instants successifs; elle consiste à :

\* Débuter avec une somme initiale d'argent  $\Pi$  (réparti entre actif risqué et actif sans risque).

\* Modifier cette répartition une fois à chaque pas de temps après avoir eu connaissance des cotations des actifs le contenant, et sans importer ni exporter d'argent.

### 2.1.3 Evaluation risque-neutre

On a l'équation suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

Soit  $Q$  une probabilité équivalente à  $P$  définie par :

$$\frac{dQ}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left( -\frac{\mu-r}{\sigma} B_t - \frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2} t \right)$$

Alors par le théorème de Girsanov  $\hat{B}_t = B_t + \frac{\mu-r}{\sigma} t$  est un mouvement brownien sous  $Q$  et

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma d\hat{B}_t$$

Posons  $\tilde{C}(t, S_t) = e^{-r(T-t)} E^Q [h(S_t) | S_t]$ . Alors  $e^{-rt} \tilde{C}(t, S_t)$  est une  $Q$ -martingale. Une application de la formule d'Itô donne :

$$e^{rt} d(e^{-rt} \tilde{C}) = \left( -r\tilde{C} + \frac{d\tilde{C}}{dt} + rS_t \frac{d\tilde{C}}{dS} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{d^2\tilde{C}}{dS^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{d\tilde{C}}{dS} d\hat{B}_t$$

Ce qui montre que  $\tilde{C}$  est une solution de :

$$rC(t, S) = \frac{dC}{dt} + rS \frac{dC}{dS} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2C}{dS^2} \quad (2.1.3)$$

De l'unicité de solution on déduit que le prix d'une option de payoff  $h(S_t)$ , solution de (2.1.3), dans le modèle de Black-Scholes est donné par :

$$C(t, S_t) = e^{-r(T-t)} E^Q [h(S_t) e^{r(T-t) - \frac{1}{2} \sigma^2 (T-t) \hat{B}_t + \sigma \hat{B}_{t-1}} | S_t]$$

Ceci est un cas particulier du célèbre théorème fondamental de valorisation des actifs financiers qui dit que le marché est sans opportunité d'arbitrage si et seulement s'il existe une probabilité  $Q$  (probabilité risque-neutre), équivalent à la probabilité historique  $P$  tel que les prix actualisés de tous les actifs sont des martingales.

### 2.1.4 Equation différentielle de Black-Scholes

Le modèle de Black-Scholes repose sur un nombre d'hypothèse de base.

- Il n'ya ni taxes, ni coût de transaction.
- L'action ne verse pas de dividendes.
- Il n'ya pas d'opportunité d'arbitrage.
- Les actifs sont traités de manière continue.
- Le taux sans risque  $r$  est constant et identique sur toutes les maturités.

La valeur d'une option d'achat à maturité  $T$  et de prix d'exercice  $K$  est une fonction  $C(S_t, t)$ .

En appliquant le lemme d'Itô, on obtient :

$$dC(S_t, t) = \left( \frac{\partial C}{\partial S}(S_t, t)\mu S_t + \frac{\partial C}{\partial t}(S_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S_t, t)\sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial C}{\partial S}(S_t, t)\sigma S_t dB_t$$

En constituant un portefeuille composé d'un Call, de  $\Phi_t^0$  parts de l'actif sans risque et de  $\Phi_t$  de l'actif risqué, la valeur du portefeuille est :

$$V_t = \Phi_t^0 S_t^0 + \Phi_t S_t = C(S_t, t) \quad (2.1.4)$$

En supposant la condition d'autofinancement  $dV_t = \Phi_t^0 dS_t^0 + \Phi_t dS_t = dC_t$  et en identifiant les termes de  $dt$  et  $dB_t$  dans  $dV_t$  et  $C_t$ , on a :

$$\Phi_t^0 r S_t^0 + \Phi_t \mu S_t = \frac{\partial C}{\partial t}(S_t, t) + \mu S_t \frac{\partial C}{\partial S}(S_t, t) + \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S_t, t)$$

et  $\Phi \sigma S_t = \sigma S_t \frac{\partial C}{\partial S}(S_t, t)$ , soit  $\Phi_t = \frac{\partial C}{\partial S}(S_t, t)$

En utilisant l'équation (2.1.4), on obtient :

$$\Phi_t^0 S_t^0 = C(S, t) - \Phi_t S_t \quad (2.1.5)$$

En remplaçant  $\Phi$  par sa valeur dans (2.1.5), on trouve :

$$\Phi_t^0 S_t^0 = C(S, t) - \frac{\partial C}{\partial S} S_t$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t}(S_t, t) + r S_t \frac{\partial C}{\partial S}(S_t, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S_t, t) &= r C(S_t, t) \\ C(S_t, t) &= (S_T - K)_+ \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

C'est l'équation de Black-Scholes.

#### 2.1.4.1 Cas d'une option d'achat

La résolution de l'EDP de Black-Scholes dans le cas d'un Call  $C(S_t, t) = \max((S_t - K), 0)$  quand  $t = T$  donne comme valeur de l'option :

$$C(S_t, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

où

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$N(\cdot)$  est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

#### 2.1.4.2 Cas d'une option de vente

Le prix d'une option de vente  $P(S_t, t)$ , portant sur le même titre de base et ayant la même date d'échéance et le même prix d'exercice, est donné par :

$$P(S_t, t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

En raison de la relation de parité Call-Put

$$P + C = Ke^{-r(T-t)}$$

#### 2.1.4.3 Robustesse de la formule de Black-Scholes

La formule de Black-Scholes est souvent utilisée dans le marché même pour les actifs dont la volatilité n'est pas constante ni même déterministe cette pratique est partiellement justifié par la propriété connue sous le nom de "Robustesse" de la formule de Black-Scholes, même si la vraie volatilité du sous-jacent est stochastique, la formule de Black-Scholes peut être utilisé pour calculer les bornes supérieures ou inférieures du prix, pour vu que la volatilité constante utilisée major ou minore est la vraie volatilité.

Supposons que le prix d'action suit :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma_t dB_t$$

où  $\sigma_t$  est un processus stochastique, et que l'agent calcule son portefeuille de couverture en utilisant la formule de Black-Scholes avec la volatilité  $Q$  d'évolution du portefeuille de l'agent est :

$$dV_t = rV_t dt + \Delta_{BS}(t, S_t)(dS_t - rS_t dt), V_0 = C_{BS}(0, S_0)$$

L'erreur finale de couverture est donnée par la différence entre  $V_t$  et le pay-off de l'option :

$$\varepsilon_t = V_t - H_t = V_t - C_{BS}(T, S_T)$$

En appliquant la formule d'Itô on a alors :

$$dC_{BS}(t, S_t) = \left( \frac{dC_{BS}}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2 C_{BS}}{dS^2} \sigma_t^2 S_t^2 \right) dt + \frac{dC_{BS}}{dS} dS_t$$

mais  $C_{BS}(t, S_t)$  en tant qu'une fonction satisfait l'EDP de Black-Scholes :

$$\frac{dC_{BS}}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2 C_{BS}}{dS^2} Q_t^2 S_t^2 = r \left( C_{BS} + S \frac{dC_{BS}}{dS} \right)$$

En rassemblant les trois équations, on trouve :

$$\varepsilon_t = V_t - H_t = \frac{1}{2} e^{rt} \int_0^T e^{-rt} \frac{1}{2} \frac{d^2 C_{BS}}{dS^2} (Q^2 - \sigma) S_t^2 dt$$

Si  $Q \geq \sigma$  p,s, nous avons  $V_t \geq H_T$  p,s, le portefeuille de couverture Black-Scholes domine le prix de l'option et donc, le prix Black-Scholes domine le vrai prix.

## 2.2 Series des rendements

En général il n'est pas très intéressant de voir juste le prix d'un investissement, à savoir un titre financier dans notre cas. Du point de vue d'un investisseur, le rendement de l'investissement est beaucoup plus intéressant. Principalement à cause qu'un investisseur insiste plus sur le gain relatif réalisable, plutôt que sur le prix nominal de l'investissement, mais par ce que le rendement comme indice de changement du prix relatif permet des comparaisons entre compagnies, titres boursiers et monnaie. Le rendement d'un titre varie donc en fonction du cours du titre, c'est une valeur financière, à la différence de la rentabilité financière, qui est une valeur comptable se



calculé différemment selon le type de placement. Soit  $S_t$  le prix d'un actif à la date  $t$ . On va s'intéresser à une transformation de ce prix par rapport à une durée, ou une fréquence d'échantillonnage. Le rendement à l'instant  $t$  peut être défini par :

**Taux de rendement arithmétique**

$$R_{1,t} = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$$

**Taux de rendement géométrique**

$$R_{2,t} = \log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$$

Les deux rendements sont liés par la formule suivante :

$$R_{1,t} = e^{R_{2,t}} - 1 \approx R_{2,t}$$

Le taux de rendement géométrique est le plus utilisé dans les diverses recherches, il permet de relier les modèles en temps discret et ceux en temps continu. Dans notre mémoire on utilise le taux de rendement géométrique et il sera noté par  $R_t$ .

**2.2.1 Loi jointe des rendements**

**Proposition 2.1.** .

On note  $m = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$

Pour tout  $h \geq 0$  fixé, les rendements :

$R_j = \ln(S(jh)) - \ln(S((j-1)h)), j \geq 1$  sont indépendants, identiquement distribués, et

$$R_j \sim N(mh, \sigma^2 h)$$

C'est-à-dire  $R_j$  est distribué selon une loi normale de moyenne  $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)h$ , et de variance  $\sigma^2 h$ .

**Preuve :** pour  $1 \leq j \leq n$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{S(jh)}{S((j-1)h)} &= \frac{S_0 e^{\mu jh - \frac{jh\sigma^2}{2} + \sigma W(jh)}}{S_0 e^{\mu(j-1)h - \frac{(j-1)h\sigma^2}{2} + \sigma W((j-1)h)}} \\ &= e^{\mu h - \frac{h\sigma^2}{2} + (W(jh) - W((j-1)h))} \end{aligned}$$

En appliquant le logarithme de chaque côté

$$\begin{aligned} R_j &= \ln(S(jh)) - \ln(S((j-1)h)) \\ &= \mu h - \frac{\sigma^2}{2}h + \sigma\{W(jh) - W((j-1)h)\} \\ &\sim N\left(\mu h - \frac{\sigma^2}{2}h, \sigma h\right) \end{aligned}$$

Les incréments  $W(jh) - W((j-1)h)$  sont indépendants, les  $R_j$  sont donc aussi indépendants.

Une contrainte très importante du modèle de Black Scholes est que les rendements  $R_j, 1 \leq j \leq n$  sont indépendants et de même loi gaussienne.

## 2.2.2 Propriétés des series financières :

### 2.2.2.1 Non stationnarité :

La plupart des séries de prix d'actifs financiers  $S_t$  sont généralement non stationnaires au sens de la stationnarité du second ordre, tandis que les processus associés aux rendements sont compatibles avec la propriété de stationnarité au second ordre.

#### Stationnarité

Un processus  $(X_t, t \in Z)$  est dit stationnaire au sens faible si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $\forall t \in Z, E(X_t^2) < \infty$
2.  $\forall t \in Z, E(X_t) = m$ , indépendant de  $t$ .
3.  $\forall (t, h) \in Z^2, Cov(X_t, X_{t+h}) = \delta_h$ , indépendant de  $t$ .

### 2.2.2.2 Skewness et excès de Kurtosis

La kurtosis indique la forme de la courbe de distribution. Une distribution normale a une Kurtosis de 3. Si la distribution possède un Kurtosis supérieure, elle est dite leptokurtique c'est-à-dire que la probabilité d'être très proche de la moyenne est élevée (forme de pic laissant apparaître une pente plus raide de la courbe) et elle est également dorte dans les extrêmes. Par contre, la probabilité baisse rapidement en s'éloignant de la moyenne.

La Skewness indique l'asymétrie d'une distribution, par opposition à une distribution gaussienne dont la Skewness est égale à 0 et donc symétrique autour de la moyenne. Dans ce cas, on note l'existence de queues longues à gauche ou à droite. Le Skewness est positive lorsque la distribution est graphiquement plus longue à droite de la moyenne. Elle est négative lorsque la courbe est plus longue à gauche de la moyenne.

Dans le modèle de Black-Scholes, l'hypothèse du mouvement brownien géométrique pour le processus des cours est équivalent à l'hypothèse gaussienne pour la distribution des rendements, ayant  $\mu_3 = 0$  pour moment d'ordre 3 (ou skewness) et  $\mu_4 = 3$  pour moment d'ordre 4 (ou kurtosis).

En 1962 Mandelbort constate que les données financières ont des queues de distribution plus épaisses que celles d'une loi normale, c'est-à-dire que les valeurs loin de la moyenne apparaissent avec des probabilités plus élevées que pour une loi normale. Selon cet auteur, vu l'importance de l'information contenue dans les queues de distribution, il serait inconvenable de négliger, comme il était alors d'usage, les valeurs "extrêmes".

### **2.2.2.3 Hétéroscédasticité :**

L'hétéroscédasticité est une des caractéristiques des séries financières, elle représente le caractère non constant de la variance d'une série dans le temps. Pour démontrer facilement l'hétéroscédasticité d'une série financière, il est plus intéressant de subdiviser notre série de données et ensuite de calculer la déviation standard (l'écart type) de chacune de nos sous-séries et les comparer.

### **2.2.2.4 Autocorrélation :**

Les rendements ne démontrent qu'une faible autocorrélation, tandis que les carrés des rendements sont autocorrélés à niveau significatif.

L'autocorrélation d'un processus  $X_t$  désigne la corrélation du processus par rapport à une version décalée dans le temps de lui-même. L'absence d'autocorrélation des rendements renvoie à la notion d'efficacité des marchés. Nous rappelons que sous cette

hypothèse, le prix d'une action incorpore toute l'information disponible. Elle signifie que les cours ne peuvent varier entre  $t$  et  $t+1$  qu'en raison de l'arrivée de nouvelles informations non anticipées. Ce qui implique qu'après une hausse des prix d'hier, il a à peu près autant de chances d'observer une hausse ou une baisse des prix aujourd'hui. Pour l'investisseur, cela signifie qu'il est à priori difficile d'utiliser l'information dans les prix passés pour prévoir les prix futurs.

## 2.2.3 Tests statistiques des séries de rendements :

### 2.2.3.1 Tests de normalité :

Pour tester la normalité des rendements il existe plusieurs tests statistiques, le test le plus utilisé est le test de Jarque-Bera qui est basé sur la notion de Skewness (asymétrie) et du Kurtosis (aplatissement).

### 2.2.3.2 Tests de Skewness et de Kurtosis

Soit  $\mu_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k$  le moment centré d'ordre  $k$ , le coefficient de Skewness ( $S_k$ ) est égale à :  $(S_k^{\frac{1}{2}}) = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$  et le coefficient de Kurtosis  $K_u = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$ .

Si la distribution est normale et le nombre d'observation grand :

$$S_k^{\frac{1}{2}} \sim N\left(0, \sqrt{\frac{6}{n}}\right) \text{ et } K_u \sim N\left(3, \sqrt{\frac{24}{n}}\right)$$

On construit les statistiques :

$$V_1 = \frac{S_k^{\frac{1}{2}} - 0}{\sqrt{\frac{6}{n}}} \text{ et } V_2 = \frac{K_u - 3}{\sqrt{\frac{24}{n}}}$$

On compare les deux statistiques avec 1.96 au seuil  $\alpha = 5\%$

Si  $H_0 : V_1 = 0$  (symétrie) et  $V_2 = 0$  (aplatissement) sont vérifiées alors :

$$|V_1| < 1.96 \text{ et } |V_2| < 1.96$$

Sinon l'hypothèse de normalité est rejetée.

### 2.2.3.3 Test de Jarque-Bera

Le test de normalité de Jarque-Bera est également fondé sur les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement. Il évalue les écarts simultanés de ces coefficients avec les valeurs de référence de la loi normale.

La statistique de Jarque-Bera  $T$  qui s'écrit :

$$T = n \left( \frac{S_\kappa}{6} + \frac{(K_u - 3)^2}{24} \right)$$

Elle est distribuée asymptotiquement selon une loi  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté.

Si  $T > \chi_{1-\alpha}^2(2)$ , on rejette l'hypothèse  $H_0$  de normalité des résidus au seuil  $\alpha$ .

### 2.2.3.4 Test d'indépendance de Box-Ljung :

Pour tester si les rendements supposés de même loi, forment un bruit blanc, c'est à dire sont indépendants, que l'on connaisse ou non la loi de ces derniers, il existe plusieurs tests statistiques parmi eux le test de Box-Ljung.

Le test de Box-Ljung concerne les  $\kappa$  premières autocorrélations, où  $\kappa$  égale au quart de la taille de la série. Un modèle est homogène si ses résidus ne se comportent comme une réalisation d'un bruit blanc.

On teste l'hypothèse nulle :

$H_0$  : les autocorrélations ne sont pas significatives c'est à dire  $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_\kappa = 0$  tel que  $h$  prend les valeurs  $r+1, r+2, \dots, \kappa$  avec  $r$  est le nombre de paramètres estimés.

Pour cela on utilise le test de Box-Ljung qui est basé sur la statistique  $Q$  définie par :

$$Q = n(n+2) \sum_{h=1}^{\kappa} \frac{\hat{\rho}_h^2}{n-h}$$

qui est distribuée selon un  $\chi^2$  à  $(\kappa - r)$  degrés de liberté, avec  $\hat{\rho}_h$  égale l'autocorrélation d'ordre  $h$ .

#### Règle de décision :

On accepte  $H_0$  au seuil  $\alpha$  (indépendance des résidus) si  $Q < \chi_{\kappa-r}^2$ .

On rejette  $H_0$  au seuil  $\alpha$  (indépendance des résidus) si  $Q > \chi_{\kappa-r}^2$ .

### 2.2.4 Les grecques

Les grecques sont les instruments de base de la gestion financière des options. Elles découlent des principaux modèles d'évaluation d'option, notamment de celui de Black-Scholes. Elles sont des indicateurs qui mesurent la sensibilité du prix d'une option par rapport à un paramètre donné (le cours de sous-jacent, le temps, la volatilité...).

**Delta**  $\Delta$  : mesure la variation du prix de l'option par rapport aux variations du sous-jacent.

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$$

**Gamma**  $\Gamma$  : mesure la sensibilité du delta par rapport au sous-jacent, donc c'est la dérivée seconde par rapport à l'actif sous-jacent.

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

**Théta**  $\Theta$  : mesure la sensibilité du prix par rapport au temps. Il fournit une indication sur la vitesse à laquelle le prix de l'option décroît plus la date d'échéance approche.

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t}$$

**Rho**  $\rho$  : mesure la variabilité d'une option par rapport au taux d'intérêt sans risque.

$$\rho = \frac{\partial C}{\partial r}$$

**Viga**  $v$  : mesure la sensibilité du prix de sous-jacent par rapport à la variation de la volatilité, donc il indique plus que le sous-jacent est risqué, plus le prix de l'option est élevé.

$$v = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$$

Dans le cas de l'option européenne d'achat et de vente (sont respectivement Call et Put), les valeurs des grecques à  $t = 0$  sont données par le tableau suivant :

	Call	Put
$\Delta$	$N(d_1) \geq 0$	$-N(d_1) \leq 0$
$\Gamma$	$\frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}N'(d_1) \geq 0$	$\frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}N'(d_1) \geq 0$
$\Theta$	$-\frac{S\sigma}{2\sqrt{T-t}}N'(d_1) - Kre^{-r(T-t)}N(d_2) \geq 0$	$\frac{S\sigma}{2\sqrt{T-t}}N'(d_1) + Kre^{-r(T-t)}(N(d_2) - 1)$
$\rho$	$(T-t)Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \geq 0$	$(T-t)Ke^{-r(T-t)}(N(d_2) - 1) \leq 0$
$v$	$S\sqrt{T-t}N'(d_1) \geq 0$	$S\sqrt{T-t}N'(d_1) \geq 0$

### 2.2.5 Extension de modèle de Black-Scholes

Le modèle de Black-Scholes sert de référence à tous ceux qui pratiquent la finance des marchés. Bien qu'il soit un modèle très populaire dans le monde de la finance, celui-ci repose sur des hypothèses plus ou moins réalistes. Il suppose que les rendements instantané du sous-jacent est connue et constante, bien qu'il soit facile de trouver des modèles meilleurs que celui de Black-Scholes, du point de vue technique et mathématique, il est presque impossible que ceux-ci aient un succès commercial similaire au modèle de Black-Scholes.

# 3

## Méthodes d'estimation de la volatilité

### Introduction

L'étude la plus reconnue dans le monde de la finance est le modèle d'évaluation des options de Black-Scholes qui se base sur l'hypothèse de la constance de la volatilité. Plusieurs autres modèles ont été développés pour mieux rendre compte de la réalité du marché, les prix sautent soudainement, les études empiriques montrent que la volatilité n'est pas constante et les queues de distribution sont plus épaisses que celle d'une loi log-normale, donc l'hypothèse gaussienne pour les rendements des actifs financiers n'a qu'un champ de validité réduit, ce qui a donné naissance aux modèles à volatilité stochastique.

La classe de modèle **ARCH/GARCH** a été utilisée pour prévoir la volatilité à cause de leur capacité à modéliser des séries financières.



Dans ce chapitre, nous allons présenter les différentes méthodes d'estimation de la volatilité d'un indice boursier. Ce chapitre est partagé en deux parties :

**Dans la première partie** nous étudions les méthodes d'estimation de la volatilité constante : la méthode historique, la méthode implicite et une application sur des données réelles d'un indice boursier *SP&500*.

**La deuxième partie**, on présente les modèles à volatilité non constante (volatilité stochastique), et volatilité conditionnelle ARCH/GARCH

En l'illustrant avec une application sur des données réelles de *SP&500*.

## 3.1 Volatilité

La volatilité est un paramètre qui mesure l'instabilité du cours d'un actif financier. Elle mesure l'amplitude des variations d'une action. L'estimation de la volatilité est le point le plus délicat dans l'établissement d'un prix. D'autant plus, que la valeur d'une option est très sensible aux variations de la volatilité.

La volatilité se présente ainsi comme un paramètre très important dans la détermination de la valeur d'une option et la précision de son estimation conditionne la précision de l'évaluation de l'option. Autrement dit, il ne suffit pas d'avoir un bon modèle d'évaluation d'une option, il faut également avoir une estimation la plus précise possible de la volatilité.

## 3.2 Méthodes d'estimations de la volatilité

### 3.2.1 Modèle à volatilité locale (constante)

Dans le calcul de la valeur d'une option et le taux d'intérêt sont deux paramètres inobservables. La volatilité est un paramètre déterminant dans le calcul de la valeur d'une option. C'est un paramètre stochastique contrairement à l'hypothèse de Black-Sholes qui le considère comme constant. Les principaux estimateurs de ce paramètre sont la volatilité historique et la volatilité implicite.

### 3.2.1.1 Volatilité historique

Pour obtenir le paramètre de la volatilité, en utilisant des données historiques du sous-jacent, qu'elles sont considérées comme un outil d'aide à la décision pour déterminer une variation future (pour prévoir les cours futurs). L'estimation de cette volatilité a été utilisée par plusieurs chercheurs tels que Black-Scholes(1972), Galai(1977) et Finnerty(1978).

La volatilité historique est mesurée par l'écart-type du rendement  $R_t$  du sous-jacent, durant la période qui précède l'émission des options.

Le rendement instantané du sous-jacent est supposé suivre un mouvement brownien géométrique suivant l'équation  $\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_t$ . Il est équivalent d'affirmer que  $R_t$  suit une loi log-normal. La volatilité  $\sigma$  du rendement instantané est supposée être constante dans le modèle de Black-Scholes. Il est possible d'estimer la volatilité instantanée avec des observations rapprochées du cours du sous-jacent. La racine carrée de la variance empirique sans biais ( $\hat{\sigma}$ ) est la meilleure estimation de la volatilité. donnée par les formules suivantes :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) - \bar{r} \right)^2$$

où :

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$$

avec

- $n$  : le nombre d'observation à considérer pour le calcul de la volatilité.
- $\bar{r}$  : la moyenne des rendements.
- $S_t$  : le cours de l'actif sous-jacent à la date  $t$ .
- $S_{t-1}$  : le cours de l'actif sous-jacent à la date  $t-1$ .

### 3.2.1.2 Volatilité implicite

Etant donné les critiques adressées à la méthode historique, une méthode alternative consiste à utiliser les prix observés sur les marchés pour en extraire une volatilité implicite.

Le vrai problème, avec la volatilité implicite, est sa liaison avec le processus de diffusion du sous-jacent.

La formule de Black-Scholes est utilisée pour calculer la valeur de la volatilité implicite  $\sigma$  dans le but d'égaliser le prix de l'option donnée.

Le calcul de la volatilité implicite nécessite donc l'inversion de la formule de Black-Scholes.

#### 1- Méthodes d'estimation de la volatilité implicite :

Il existe plusieurs méthodes pour estimer la volatilité implicite ; selon le modèle d'évaluation, les types, les classes et les séries d'option disponibles. Cela pose un problème car intuitivement, il devrait exister une seule mesure de la volatilité par actif financier sous-jacent à l'option. Pour résoudre le problème de la structure de la volatilité implicite, plusieurs auteurs ont suggéré différentes méthodes de calcul afin de trouver un seul chiffre qui pouvait caractériser un actif financier en particulier.

La première, qui a été suggérée par Trippi(1977) et par la suite Schmalensee et Trippi (1978). La volatilité implicite du sous-jacent peut être déterminée, à partir des  $n$  options les plus liquides du marché, comme la moyenne arithmétique des volatilités implicites de ces différentes options.  $\sigma_{impl}$ , à l'instant  $t$  est donc :

$$\hat{\sigma}_{impl,t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_{impl}$$

Cette moyenne peut être pondérée, par les prix des options, ou par leurs sensibilités, par rapport à la volatilité.

Latané et Rendleman (1976) suggèrent la deuxième méthode d'estimer la volatilité,

celle-ci est défini par l'équation suivante :

$$\hat{\sigma}_{impl} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n v_i} \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2 \sigma_{impl}^2}$$

où  $v_i$  est le véga de l'option calculé avec la formule de Black-Scholes.

Pour obtenir une expression de la volatilité d'après la formule de Black-Scholes, reprenons donc la formule de Black-Scholes pour un call-européen :

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Or  $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$ , on a alors

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} et,$$

$$\begin{aligned} SN'(d_1) &= S \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}d_1^2} \\ &= S \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K e^{\ln(\frac{S}{K})} e^{-\frac{1}{2} \frac{\ln^2(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})^2(T-t)^2 + 2(r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\ln(\frac{S}{K})}{\sigma^2(T-t)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln^2(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})^2(T-t)^2 + (2r + \sigma^2 - 2\sigma^2)\ln(\frac{S}{K})(T-t)}{\sigma^2(T-t)} \right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln^2(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})^2(T-t)^2 + 2\ln(\frac{S}{K})(T-t)(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma^2(T-t)} \right)} \end{aligned}$$

D'autre par :

$$\begin{aligned}
Ke^{-r(T-t)}N'(d_2) &= Ke^{-r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_2^2} \\
&= Ke^{-r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\frac{S}{K}+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2} \\
&= K\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln^2(\frac{S}{K})+(r-\frac{\sigma^2}{2})^2(T-t)+2\ln(\frac{S}{K})(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma^2(T-t)}+2r(T-t)\right)} \\
&= K\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln^2(\frac{S}{K})+2\ln(\frac{S}{K})(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+(r-\frac{\sigma^2}{2})^2(T-t)^2-2r(T-t)^2\sigma^2}{\sigma^2(T-t)}\right)} \\
&= K\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln^2(\frac{S}{K})+2\ln(\frac{S}{K})(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+(r^2+\frac{\sigma^4}{4}-r\sigma^2+2r\sigma^2)}{\sigma^2(T-t)}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}Ke^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln^2(\frac{S}{K})+(r+\frac{\sigma^2}{2})^2(T-t)^2+2\ln(\frac{S}{K})(T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma^2(T-t)}\right)}
\end{aligned}$$

Et donc, on a :

$$SN'(d_1) = Ke^{-r(T-t)}N'(d_2) \quad (3.2.1)$$

On pose ensuite :

$$\begin{aligned}
C^{(1)} &= \frac{\partial C}{\partial(\ln S)} \\
C^{(2)} &= \frac{\partial^2 C}{\partial(\ln S)^2} \\
\xi &= C^{(2)} - C^{(1)}
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
C^{(1)} &= SN(d_1) + \frac{S}{\sigma(T-t)}N'(d_1) - \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sigma(T-t)}N'(d_2) \\
C^{(2)} &= SN(d_1) + 2\frac{S}{\sigma(T-t)}N'(d_1) + \frac{S}{(\sigma(T-t))^2}N''(d_1) - \frac{Ke^{-r(T-t)}}{(\sigma(T-t))^2}N''(d_2)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\xi = \frac{S}{\sigma(T-t)}N'(d_1) + \frac{S}{(\sigma(T-t))^2}N''(d_1) - \frac{Ke^{-r(T-t)}}{(\sigma(T-t))^2}N''(d_2)$$

Or  $N''(d) = -dN'(d)$ ,  $d_1 = d_2 + \sigma(T-t)$  et en utilisant (3.2.1) on a :

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{S}{\sigma(T-t)}N'(d_1) + \frac{1}{(\sigma(T-t))^2}(Ke^{-r(T-t)}d_2N'(d_2) - Sd_1N'(d_1)) \\ &= \frac{S}{\sigma(T-t)}N'(d_1) + \frac{1}{(\sigma(T-t))^2}Ke^{-r(T-t)}N'(d_2) \\ &= \frac{S}{\sigma(T-t)}N'(d_1) + \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sigma(T-t)}N'(d_2) \\ &= \frac{2S}{\sigma(T-t)}N'(d_1) = \frac{2Ke^{-r(T-t)}}{\sigma(T-t)}N'(d_2)\end{aligned}$$

Soit  $K_\xi$  l'élasticité de la fonction auxiliaire  $\xi$  par rapport à  $S$  :

$$K_\xi = \frac{\partial \ln|\xi|}{\partial \ln S}$$

Or  $\ln|\xi| = \ln(2) + \ln(S) - \ln(\sigma(T-t)) - \ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{d_1^2}{2}$ , D'où :

$$\begin{aligned}K_\xi &= 1 - \frac{d_1}{\sigma(T-t)} \\ &= -\frac{d_1}{\sigma(T-t)} + \frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \\ &= -\frac{d_1}{\sigma(T-t)} + \frac{(r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma^2(T-t)} + \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \\ &= -\frac{1}{\sigma^2(T-t)}\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\end{aligned}$$

et

$$\sigma^2(T-t)\left(K_\xi - \frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2}\right) = \ln\left(\frac{S}{K}\right) \iff \sigma^2(T-t)\left(K_\xi - \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{S}{K}\right) - r(T-t)$$

D'où

$$\sigma = \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) - r(T-t)}{(T-t)\left(K_\xi - \frac{1}{2}\right)}}$$

On a donc une expression de la volatilité en fonction des autres paramètres et de  $K_\xi$  qui n'est autre qu'une combinaison des différentielles premières et secondes du prix du call par rapport au logarithme du sous-jacent. En connaissant donc les valeurs précédentes du call, on en déduit la volatilité.

On remarque que la volatilité implicite dépend du prix d'exercice et de la maturité.

En pratique, pour calculer la volatilité implicite, on ne se sert pas de cette formule trop compliquée à mettre en place, on utilise une résolution numérique. Si on appelle

$C_0$  la valeur d'un call à l'instant initial, pour calculer la volatilité implicite, on cherche à résoudre :

$$C_0 - SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) = 0$$

.

On peut utiliser la méthode de Newton-Raphson.

### La méthode de Newton-Raphson :

Cette fonction requiert de connaître les inputs de l'option tels que le prix spot  $S$ , le prix de l'exercice  $K$ , le taux sans risque  $r$ , l'échéance  $T$  et le type d'option, Call ou Put. Ensuite, elle retourne la valeur de la volatilité implicite quand la différence entre le prix observé et celui du modèle est inférieure à un seuil de tolérance  $\varepsilon$

$$C_{BS}(\sigma, K, T) - C_{mkt}(K, T) < \varepsilon$$

- $C_{mkt}(K, T)$  : est le prix de l'option observé sur le marché, avec un prix d'exercice  $K$  et d'échéance  $T$ .
- $C_{BS}(\sigma, K, T)$  : est le prix du Call obtenu par la formule de Black-Scholes avec le même prix d'exercice et la même échéance.

Bien que la méthode Newton-Raphson converge rapidement vers la valeur de la volatilité implicite, elle requiert une valeur initiale estimée de la volatilité.

### 2- Le smile de volatilité :

La volatilité est le seul paramètre inobservable dans le modèle de Black-Scholes, on peut considérer le prix de l'option comme fonction de la volatilité, si ce modèle était parfait, la volatilité implicite serait la même quelque soit le prix du marché de l'option. Des études empiriques ont montré que la volatilité est liée au prix d'exercice de l'option et de sa durée de vie résiduelle, quand il s'agit d'une option européenne si on représente la volatilité implicite en fonction du prix d'exercice de l'option, en fixant la maturité, on obtient une courbe de la forme convexe plutôt qu'une droite horizontale comme le suppose le modèle de Black-Scholes, cette forme de la courbe est désignée de "smile".

Quoi qu'il en soit, les praticiens de la finance utilisent souvent le smile, c'est-à-dire une représentation graphique de la volatilité implicite à l'équation de Black-Scholes

en deux dimensions.

### 3- La structure par termes de volatilité :

Pour tout prix d'exercice  $K$ ,  $K > 0$  la fonction  $\sigma_t$  de la volatilité implicite pour des maturités  $T$ , est appelée structure par termes de volatilité implicite pour le prix d'exercice  $K$ . Cette fonction fait appel à une autre forme d'allure.  $K$  est habituellement choisi pour être le prix d'exercice "à la monnaie". Cette volatilité tend à être une fonction croissante de la maturité lorsque les volatilités historiques à court terme sont faibles. Cela traduit que les opérateurs anticipent une hausse de la volatilité. Symétriquement, la volatilité tend à être une fonction décroissante de la maturité qui se traduit également par une anticipation d'une baisse de la volatilité par les opérateurs.

### 4- La surface de la volatilité :

Lorsque la structure par termes et la courbe du "smiling" de la volatilité sont combinées, elles produisent une surface de la volatilité. Celle-ci définit la volatilité implicite comme une fonction à la fois du prix d'exercice et de la durée de vie de l'option.

la surface de volatilité est souvent présentée sous la forme d'un tableau donnant les volatilités implicites en fonction du prix d'exercice et de la durée de vie des options. De manière plus générale, la volatilité implicite est une fonction  $\sigma = \sigma_i(T, K)$ . Nous observons maintenant les prix d'une option sur une action associés à divers prix d'exercice et à diverses échéances.

### 5- Rôle de la volatilité implicite dans les marchés d'options :

La volatilité implicite est très utilisée pour le calcul des ratios de couverture des options européennes. Pour toute option, indépendamment du modèle utilisé on peut écrire :

$$C(t, S_t) = C^{BS}(t, S_t, \sigma)$$

où  $\sigma$  est la volatilité implicite de cette option. Si la volatilité implicite ne dépend pas



du  $S_t$  mais seulement du strike et du temps, on pourrait écrire :

$$\frac{dC(t, S_t)}{dS} = \frac{dCBS(t, S_t)}{dS}$$

le delta de l'option est donc égale à son delta Black-Scholes. L'absence de dépendance de la volatilité implicite par rapport au sous-jacent a été appelée le régime sticky strike. En réalité cette condition est rarement vérifiée, et le changement de  $\sigma$  avec le sous-jacent doit être pris en compte :

$$\frac{dC(t, S_t)}{dS} = \frac{dC^{BS}(t, S_t)}{dS} + \frac{dC^{BS}}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dS} \quad (3.2.2)$$

Cette divergence entre le delta d'une option et son delta Black-Scholes est souvent traité comme une nouvelle source de risque, risque de vega. Il est souvent géré en rendant le portefeuille vega-neutre. Pour un portefeuille d'options européennes ceci signifie que la somme des dérivées de chaque option par rapport à sa volatilité implicite doit être nulle  $\sum_{K=1}^N \frac{dC^{BS}}{d\sigma} = 0$ . Si maintenant on suppose que les volatilités implicites des différents strikes et maturités varient de la même façon avec le sous-jacent  $\frac{d\sigma}{dS}$  ne dépend pas de  $K$ , le risque dû au changement de volatilité implicite sera totalement couvert.

Une autre approche pour la prise en compte du deuxième terme dans (3.2.2) consiste à modifier le delta d'une option en faisant des hypothèses appropriés sur l'évolution du smile avec le sous-jacent. Par exemple, dans le régime sticky delta ou sticky money-ness, on suppose que la volatilité implicite dépend du ratio  $K/S$  mais pas de ces deux variables séparément. En posant  $\sigma = \sigma(K/S)$ , on a alors

$$\frac{dC}{dS} = \frac{dC^{BS}}{dS} - \frac{dC^{BS}}{d\sigma} \frac{K}{S^2} \sigma'$$

Comme en général la volatilité décroît avec le strike (pour les options proches de la monnaie), l'hypothèse de sticky delta implique  $\frac{dC}{dS} > \frac{dC^{BS}}{dS}$  : le delta d'une option est supérieur à son delta Black-Scholes.

### 3.3 Application numérique

Dans cette partie, nous allons faire une étude sur la série *SP&500* qui représente un indice boursier créé par Standard Poor's, il regroupe les 500 valeurs américaines qui sont les plus représentatives de l'économie américaine. Il est représentatif de l'évolution du marché américain.

Cette étude est consacré à l'estimation de la volatilité (volatilité historique et volatilité implicite) de modèle de Black-Scholes. Nous présentons aussi des programmes permettant de calculer le call européen à l'aide de ce modèle. Nous disposons de 191 observations journalières de cours de l'action *SP&500* pour la période de 02/04/2007 à 02/01/2008, dont l'évolution du cours est représenté dans la figure suivante.

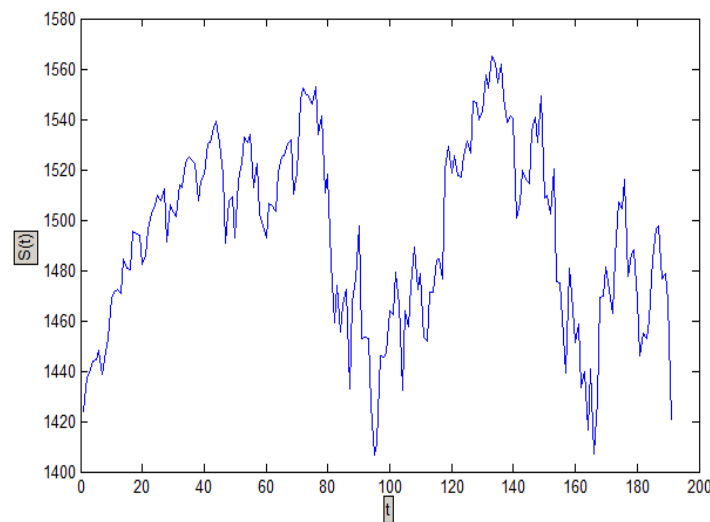
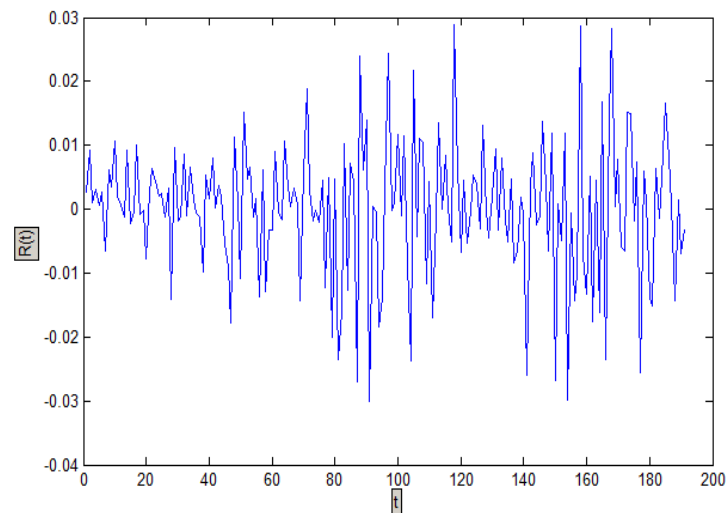


FIGURE 3.1 – Le graphe de la série *SP&500*

A partir de ces données nous calculons les rendements  $R_t = \ln(S_t/S_{t-1})$  pour  $i = 1, \dots, n$ . le rendement journalière évolue de la manière suivante :

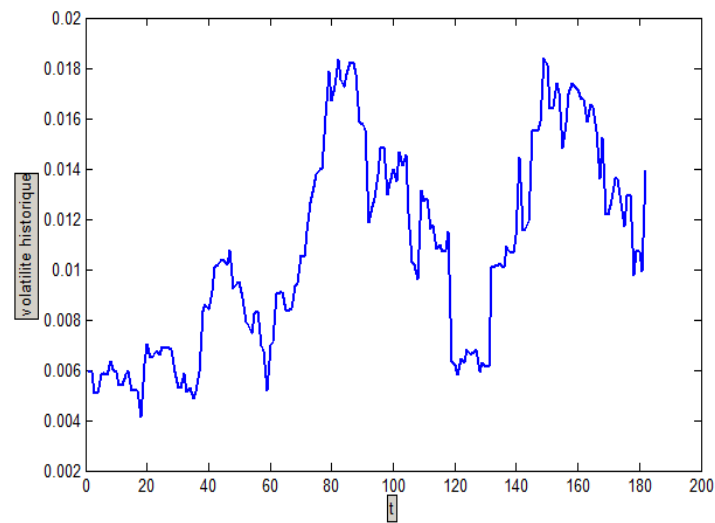
FIGURE 3.2 – Le graphe des rendements de la série *SP&500*

### 3.3.1 Estimation des paramètres

### 3.3.2 La méthode historique

L'estimation de  $\mu$  et  $\sigma$  par la méthode historique, dépendent seulement de  $n$  observations des rendements  $(r_1, \dots, r_n)$ , et sont données par :

$$\begin{aligned}\sigma &= 0.01 \\ \hat{\mu} &= \bar{r} + \frac{1}{2}\sigma^2 \\ &= 3.67115 * 10^{-8} + 0.5 * (0.01)^2 = 6.05228 * 10^{-5}\end{aligned}$$

FIGURE 3.3 – Graphe de la volatilité historique de *SP&500*

### 3.3.2.1 Simulation de la solution de l'équation de Black-Scholes

On utilise les paramètres estimés par les méthodes historiques pour faire la simulation.

Le graphe suivant représente la trajectoire de la solution de l'équation de Black-Scholes pour  $S_0 = 1424$ ,  $\mu = 6.02 * 10^{-5}$  et  $\sigma = 0.01$

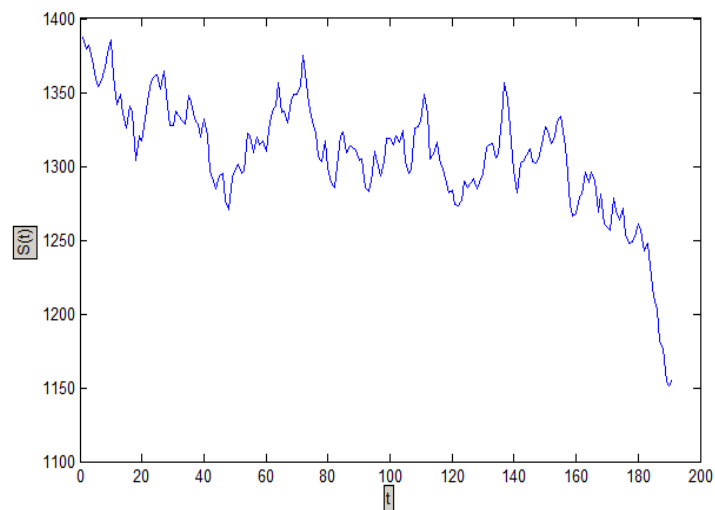


FIGURE 3.4 – Trajectoire de la solution de l'équation de Black-Scholes

### 3.3.2.2 Simulation du Call européen du modèle de Black-Scholes

Le prix d'une option d'achat européenne de prix du sous-jacent  $S_0$  à l'instant  $t=0$ , de taux d'intérêt sans risque  $r$ , de volatilité du sous-jacent  $\sigma$ , de prix d'exercice  $K$ , et de maturité de l'option  $T$  est calculé par simulation.

Pour  $S_0 = 1424$ ,  $r = 0.01$ ,  $\sigma = 0.01$ ,  $K = 1430$ ,  $T=1$ , on trouve  $C_{BS} = 10.5796$  où  $C_{BS}$  désigne le prix du call européen du modèle de Black-Scholes.

Le graphe suivant représente l'évolution du call européen en fonction de temps pour l'action  $SP\&500$ .

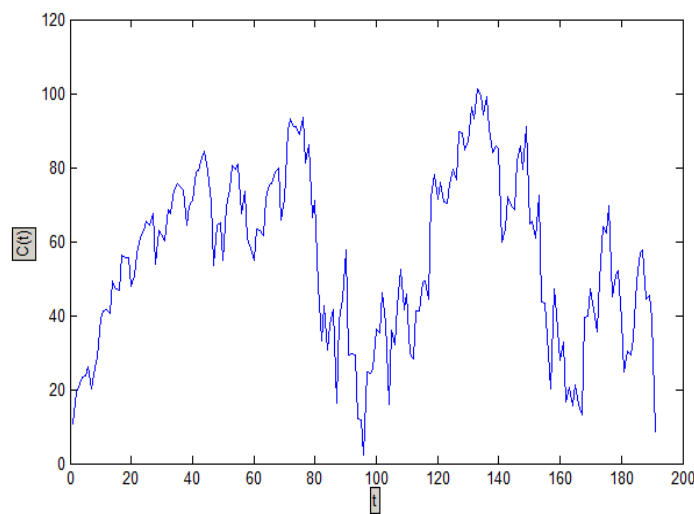


FIGURE 3.5 – Le graphe du call européen pour le modèle de Black-Scholes de l'indice  $SP\&500$

### 3.3.2.3 Simulation du Put européen du modèle de Black-Scholes

Le prix de l'option de vente européen de prix du sous-jacent  $S_0$  est calculé par simulation pour :

$S_0 = 1424$ ,  $r = 0.01$ ,  $\sigma = 0.01$ ,  $K = 1600$  et  $T = 1$ , on trouve  $P_{BS} = 160.0797$  désigne le prix de put européen calculé par Black-Scholes.

Le graphe suivant suivant représente l'évolution du put européen en fonction de temps pour l'action  $SP\&500$ .

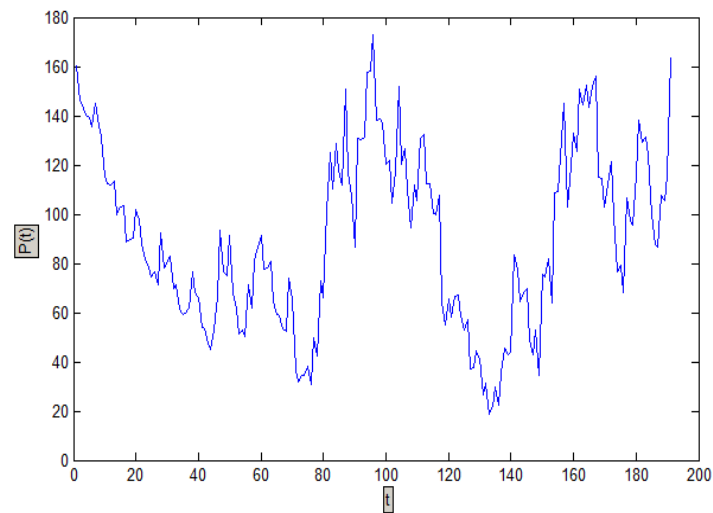


FIGURE 3.6 – Le graphe du put européen pour le modèle de Black-Scholes de l'indice *SP&500*

### 3.3.3 La méthode implicite

En utilisant la méthode de Newton-Raphson pour calculer la volatilité implicite, on varie la valeur de  $K$ , on trouve :

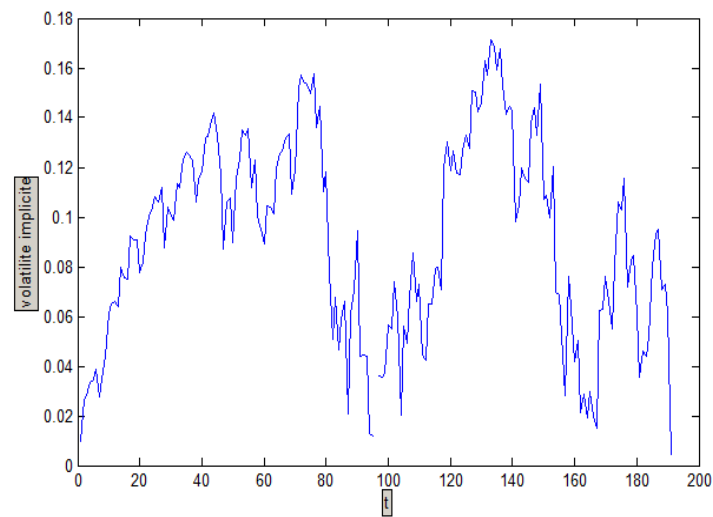


FIGURE 3.7 – Le graphe de la volatilité implicite de l'indice *SP&500* en fonction de  $t$

D'après le graphe on remarque que la volatilité implicite n'est pas constante, elle varie en fonction de temps.

### 3.3.3.1 Le smile de volatilité

Nous avons déjà défini le smile en deux dimensions (2D), C'est la volatilité qui découle la formule de Black-Scholes lorsque on connaît le prix de l'option.

Pour établir le smile il faut disposer des prix observés d'une option sur une action quelconque qui ne diffèrent que par le prix d'exercice  $K$ . La figure suivante donne l'allure d'un smile de volatilité d'un indice  $SP\&500$  construit à l'aide de la formule de Black-Scholes.

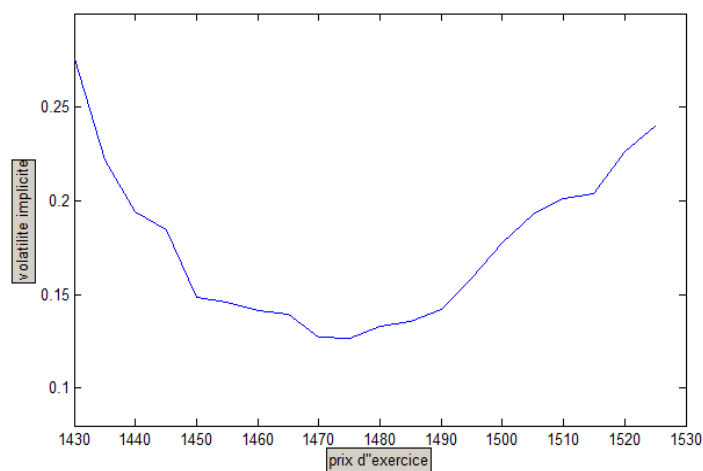


FIGURE 3.8 – le smile de la volatilité implicite de l'indice  $SP\&500$

D'après le graphe on remarque que la volatilité implicite augmente avec le prix d'exercice de l'option et le prix du call observé sur le marché. Cela indique que le titre de la volatilité implicite la plus élevée est le plus risqué.

### 3.3.3.2 La surface de volatilité

La fonction reliant la volatilité implicite au  $T$  et  $K$ , est représenté dans un espace à trois dimensions (3D) par une nappe de volatilité, qu'on aperçoit dans la figure suivante, qu'on a programmée sur Matlab, pour un  $S_0 = 1424$ ,  $r = 0.01$ ,  $\sigma = 0.01$

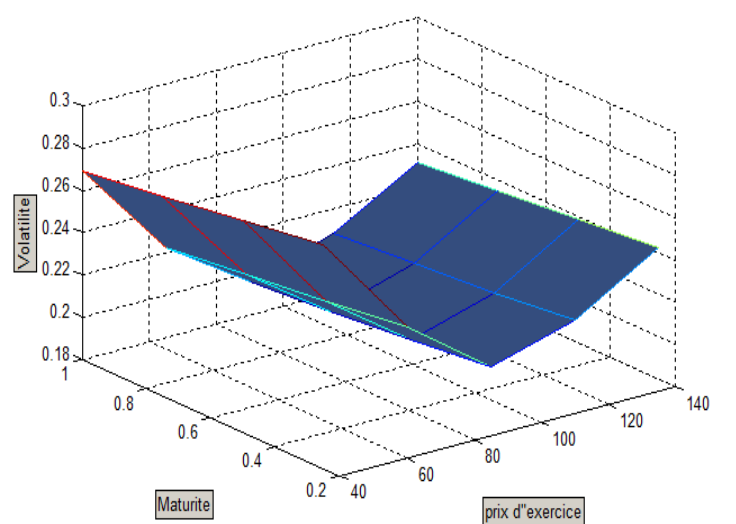


FIGURE 3.9 – surface de la volatilité implicite

### 3.4 Modèle à volatilité stochastique

La modélisation de la volatilité et son estimation jouent un rôle important dans l'évaluation des produits dérivés et dans les systèmes de gestion de risque. Il est maintenant reconnu que le modèle de Black-Scholes, n'est plus suffisant pour rendre compte des phénomènes des marchés modernes, spécialement depuis le crash de 1987.

L'hypothèse de la constance de la volatilité dans la formule de Black-Scholes (1973) a été rejetée vu que la distribution empirique des rendements présentait des caractéristiques différents de celle d'une loi gaussienne. Ce phénomène peut par exemple être modélisé par des dynamiques à volatilité stochastique.

#### 3.4.1 Présentation du modèle

Dans le modèle de volatilité stochastique comme EDS, la volatilité sera elle-même un processus stochastique, dépendant du temps et du hasard. Ceci revient en fait, à injecter un processus stochastique qui est celui de la volatilité dans un autre processus de diffusion géométrique des prix de l'actif sous-jacent. Le coefficient de corrélation entre les mouvements des rendements instantanés du sous-jacent et les mouvements de



la volatilité, est constant. Le prix du sous-jacent  $S$  et la volatilité de son rendement instantané sont les deux variables d'états du modèle. Elles suivent des processus décrits par les équations suivantes :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$$

$$d\sigma_t = D_t dt + q_t dB'_t$$

où

$$d\langle B_t, B'_t \rangle_t = \rho dt$$

. Où, les paramètres  $\mu_t$  et  $\sigma_t$  sont respectivement, le drift réel et la volatilité instantanée du rendement instantané du sous-jacent. Les quantités  $D_t$  et  $q_t$  sont, respectivement le drift et la volatilité de la volatilité, qui sont des fonctions du prix du sous-jacent de la volatilité et du temps. Les processus  $dB_t$  et  $dB'_t$  sont des processus de Wiener Lévy que nous pouvons écrire sous la forme :

$$dB_t = u_s \sqrt{dt}$$

et

$$dB'_t = u_\sigma \sqrt{dt}$$

avec,  $u_s$  et  $u_\sigma$  sont des variables aléatoires suivent chacune une loi normale centrée réduite. Le coefficient de corrélation entre ces deux variables aléatoires est égale à  $\rho$ . Ainsi, les équations de diffusion du prix du sous-jacent et de la volatilité peuvent s'écrire sous la forme :

$$dS = \mu S dt + \sigma S \sqrt{dt} u_s$$

$$d\sigma = D(S, \sigma, t) dt + q(S, \sigma, t) \sqrt{dt} u_\sigma$$

$$\rho = \rho(u_s, u_\sigma)$$

### 3.4.2 Equation différentielle du modèle à volatilité stochastique

L'équation différentielle du modèle à volatilité stochastique est à une différence près, pour évaluer une option  $V$ , le modèle à volatilité stochastique, à savoir le prix

du sous-jacent et la volatilité. Le prix du sous-jacent est négociable sur le marché à l'inverse de la volatilité qui ne l'est pas dont la valeur instantanée, peut être déduite à partir du prix d'une deuxième option  $V_1$

Si on applique le lemme d'Itô à la valeur de l'option  $V(S, \sigma)$  qui est fonction des deux variables d'état, on peut écrire :

$$dV = \left( \frac{dV}{dt} + \mu S \frac{dV}{dS} + \omega \frac{dV}{d\sigma} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2V}{dS^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{d^2V}{d\sigma^2} + pq\sigma S \frac{d^2V}{dS d\sigma} \right) dt + \sigma S \frac{dV}{dS} dZ_s + q \frac{dV}{d\sigma} dZ_\sigma \quad (3.4.3)$$

La différentielle de l'option additionnelle  $dV_1$  s'écrit, exactement sous la même forme, en remplaçant  $V$  par  $V_1$ .

D'un autre côté, les processus des options sont brownien géométriques, ce qui amène à écrire :

$$\frac{dV}{V} = \mu_V dt + \sigma_{V_S} dZ_S + \sigma_{V_\sigma} dZ_\sigma \quad (3.4.4)$$

et

$$\frac{dV_1}{V_1} = \mu_{V_1} dt + \sigma_{V_{1S}} dZ_S + \sigma_{V_{1\sigma}} dZ_\sigma \quad (3.4.5)$$

Des équations (3.10) et (3.11) se dégagent trois équations pour l'option  $V$ , soit :

$$\mu_V V = \frac{dV}{dt} + \mu S \frac{dV}{dS} + \omega \frac{dV}{d\sigma} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2V}{dS^2} + \frac{1}{2} q^2 \frac{d^2V}{d\sigma^2} + pq\sigma S \frac{d^2V}{dS d\sigma} \quad (3.4.6)$$

$$\sigma_{V_S} V = \sigma S \frac{dV}{dS} \quad (3.4.7)$$

$$\sigma_{V_\sigma} V = q \frac{dV}{d\sigma} \sigma \quad (3.4.8)$$

On peut également écrire des équations analogues pour  $V_1$ , en remplaçant  $V$  avec.

Pour évaluer l'option  $V$ , il faut constituer un portefeuille  $\Pi$  sans risque composé de l'option  $V$ , de l'option  $V_1$  du sous-jacent  $S$ , dans des proportions respectives  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$ . La valeur de l'option additionnelle  $V_1$  nous renseigne sur la valeur de la volatilité puisque cette dernière n'est pas négociable.

$$\Pi = \alpha_1 V + \alpha_2 V_1 + \alpha_3 S \quad (3.4.9)$$

La variation de la valeur du portefeuille  $\Pi$ , pendant un intervalle de temps  $dt$ , est  $d\Pi$  tel que :

$$d\Pi = \alpha_1 dV + \alpha_2 dV_1 + \alpha_3 dS$$

En remplaçant  $dV$  et  $dV_1$ , par leurs expressions dans les equations (3.11) et (3.4.5) on obtient :

$$d\Pi = (\alpha_1\mu_V V + \alpha_2\mu_{V_1} V_1 + \alpha_3\mu_S S)dt + (\alpha_1\sigma_{V_S} V + \alpha_2\mu_{V_1 S} V_1 + \alpha_3\sigma_S S)dS + (\alpha_1\sigma_{V_\sigma} V + \alpha_2\mu_{V_1\sigma} V_1)d\sigma$$

pour que le portefeuille  $\Pi$  soit sans risque il faut que les termes, en  $dS$  et  $d\sigma$ , soit non nuls. Soit le système :

$$\alpha_1\sigma_{V_S} V + \alpha_2 \mu_{V_1 S} V_1 + \alpha_3 \sigma_S S = 0 \quad (3.4.10)$$

$$\alpha_1\sigma_{V_\sigma} V + \alpha_2 \mu_{V_1\sigma} V_1 = 0 \quad (3.4.11)$$

Etant donné que le modèle à volatilité stochastique est un modèle d'équilibre, en l'absence d'opportunités d'arbitrage sur le sous-jacent, le portefeuille sans risque (supposé couvert également contre le risque lié à la volatilité) doit être rémunéré aux taux sans risque. Ceci nous amène à écrire :

$$d\Pi = r\Pi dt$$

$$d\Pi = (\alpha_1\mu_V V + \alpha_2\mu_{V_1} V_1 + \alpha_3\mu_S S)dt = r(\alpha_1 V + \alpha_2 V_1 + \alpha_3 S)dt$$

D'où l'equation :

$$\alpha_1(\mu_v - r)V + \alpha_2(\mu_{V_1} - r)V_1 + \alpha_3(\mu - r)S = 0 \quad (3.4.12)$$

### 3.4.3 Estimation de la volatilité :

Dans une économie neutre, si la volatilité suit un mouvement brownien, on peut écrire : où  $D$  est le drift risque neutre de la volatilité et  $q$  est la volatilité de la volatilité. Ces deux paramètres sont à estimer à partir des données historiques de la volatilité, en considérant la volatilité historique ou implicite.

#### 3.4.3.1 Estimation du drift risque-neutre de la volatilité ( $D$ ) :

On considère que ce drift est constant, à l'instar du drift risque neutre du prix du sous-jacent, il est calculé comme étant la moyenne de la dérivée de la volatilité par rapport au temps. On a ainsi :

$$E(d\sigma_t) = Ddt$$

D'où l'expression du drift risque-neutre de la volatilité :

$$D = E \left( \frac{d\sigma_t}{dt} \right)$$

Ainsi, si on a une série temporelle de la volatilité  $(t_i, \sigma_i)$ , de taille  $n$ , triée suivant le temps  $t_i$ , on peut déduire la série  $(\Delta t_i, \Delta \sigma_i)$ . L'estimation du drift de la volatilité est la moyenne empirique des variations de la volatilité rapportés aux intervalles de temps correspondants. Soit :

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta \sigma_i}{\Delta t_i} \quad (3.4.13)$$

### 3.4.3.2 Estimation de la volatilité de la volatilité (q) :

Étant donné que la volatilité de la volatilité  $q$  est supposé constante, elle peut être calculée comme l'écart type de la variable  $\frac{d\sigma}{\sqrt{dt}}$ .

En effet comme l'on a :  $\frac{d\sigma}{\sqrt{dt}} = D\sqrt{dt} + U_q$ , et que  $U$  est une variable aléatoire normale centrée réduite, on peut écrire :

$$\frac{d\sigma}{\sqrt{dt}} \rightarrow N(D\sqrt{dt}, q)$$

et

$$V \left( \frac{d\sigma}{\sqrt{dt}} \right) = q^2$$

par conséquent, si on considère la série  $(t_i, \sigma_i, 1 \leq i \leq n)$ , la volatilité de la volatilité peut être estimé par la quantité :

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{d\sigma_i}{\sqrt{dt_i}} - D\sqrt{dt_i} \right)^2} \quad (3.4.14)$$

## 3.5 Modèle à volatilité conditionnelle (ARCH-GARCH)

La modélisation du processus ARCH (hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive, en anglais autoregressive conditional heteroscedasticity) a ouvert une nouvelle voie particulièrement riche pour la spécification des comportements sur les marchés financiers. A partir des travaux de Engle (1982), toute série d'aménagement a été proposés afin d'adapter l'étude de cas particuliers des principes de cette modélisation.

Ces divers modèles sont présentés dans cette partie accompagné des méthodes d'estimation et des formulations de tests appropriés.

### 3.5.1 Le principe générale du modèle ARCH-GARCH

L'approche ARCH / GARCH a été proposée pour prendre en compte des variances conditionnelles dépendant du temps. Le principe général consiste donc à remettre en cause la propriété d'homoscédasticité que l'on retient généralement dans le cadre du modèle linéaire. Ce principe qui été proposé par Engle (1982) consiste supposer que la variance dépend de l'ensemble informationnel dont on dispose. Il propose une spécification ARCH(q) où le carré des perturbations suit un processus autorégressif d'ordre q. Engle a donc proposé ces processus pour palier aux insuffisances de la classe des représentations ARMA, notamment en ce qui concerne les séries financières qui présentent une volatilité (ou variabilité) instantanée mesurée par la variance conditionnelle) en fonction du temps et par des ajustements asymétriques.

Ainsi, les modèles ARCH sont basés sur une paramétrisation endogène de la variance conditionnelle.

#### 3.5.1.1 Le modèle ARCH(p)

L'aspect hétéroscédastiques est introduit par l'intermédiaire d'une dynamique autorégressive sur les carrés du bruit. Le modèle est défini par :

$$Y_t = \beta X_t + \varepsilon_t$$

où

$$\varepsilon_t / I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

Où le terme  $Y_t$  correspond aux variables expliquant les rendements, il peut être un modèle ARMA(p, q). L'expression  $I_{t-1} = \sigma(X_{t-s})_{s \leq t}$  désigne la tribu engendrée par les  $(X_{t-s})_{s \leq t}$  dans la modélisation ARCH, le processus  $\varepsilon_t$  peut s'écrire sous la forme :

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t$$

Avec

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^P \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 = \alpha_0 + \alpha(L)\varepsilon_t^2$$

Où  $L$  est un opérateur de retard et  $z_t \sim N(0, 1)$ .

Un processus  $\varepsilon_t$  satisfait une représentation ARCH(1) si :

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t$$

Avec

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

Où  $z_t$  est un bruit blanc faible tel que :  $E(z_t) = 0$  et  $V(z_t) = 1$ ,  $\alpha_0 > 0$  et  $0 \leq \alpha_1 \leq 1$ , Cette condition sur les paramètres est posée pour assurer la positivité de la variance conditionnelle. Le modèle ARCH permet de prendre les groupements de volatilité. la composante  $z_t$  désigne une variable qui, conditionnellement à l'ensemble d'information des valeurs passées de  $\varepsilon_t$  c'est-à-dire  $I_{t-1} = \sigma(\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-i}, \dots)$  est déterministe et positive.

Dans ce cas, le processus  $\varepsilon_t$  est caractérisé par des autocorrélations nulles  $E[\varepsilon_t \varepsilon_s] = 0$  pour  $t \neq s$  ce qui signifie que les  $\varepsilon_t$  sont non corrélés dans le temps, en effet  $\varepsilon_t$  reste un bruit blanc mais dit faible.

Nous pouvons écrire le modèle ARCH sous deux formes. Prenons le modèle ARCH(1) pour les illustrer.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sigma^2 + \alpha_1(\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma^2)$$

Sachant que  $\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$  nous retrouvons la forme habituelle du modèle ARCH(1) ainsi :

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \alpha_1 \left( \varepsilon_{t-1}^2 - \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \right) \\ &= \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 - \frac{\alpha_1 \alpha_0}{1-\alpha_1} \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \end{aligned}$$

les carrés des erreurs sont autorégressives :

$$\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2 + v_t$$

Où  $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$  ( $v_t$  est un processus d'innovation qui est lui même une différence de deux martingales).

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \Leftrightarrow \varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + v_t$$

Et en ayant les informations disponibles jusqu'à  $t - 1$ , Avec  $I_{t-1}$  c'est l'ensemble de l'information jusqu'à  $t-1$ , en effet

$$E[v_t/I_{t-1}] = 0$$

avec  $I_{t-1}$  c'est l'ensemble de l'information jusqu'à  $t - 1$ .

### 1- Les propriétés des modèles ARCH

#### Propriété 1 :

On a pour tout  $s > 1$  :

$$E[\varepsilon_t/I_{t-s}] = 0$$

#### Propriété 2 :

La variance conditionnelle du processus  $\varepsilon_t$  satisfaisant une représentation ARCH(1), définie par l'équation  $\varepsilon_t = z_t \sigma_t$  est non constante dans le temps et vérifie :

$$V[\varepsilon_t/I_{t-s}] = \alpha_0 \left( \frac{1 - \alpha_1^s}{1 - \alpha_1} \right) + \alpha_1^s \varepsilon_{t-s}^2 \quad \forall t.$$

C'est la propriété centrale des processus ARCH, le processus  $\varepsilon_t$  a une variance conditionnelle qui dépend du temps.

#### Propriété 3 :

Les autocovariances conditionnelles du processus  $\varepsilon_t$ , ARCH(1), définie par l'équation :

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t$$

$$\text{cov}[\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}/I_{t-s}] = 0 \quad \forall k, s \geq 1$$

### 3.5.1.2 Le modèle GARCH(p,q)

Le modèle GARCH (autorégressif conditionnellement hétéroscédastique généralisé) est une extension du modèle ARCH a été développé par Bollerselv en 1986. Ce dernier a introduit dans l'équation ARCH de valeurs retardées de la variance.

**Définition 3.1.** On considère un modèle autorégressif exprimé sous la forme avec  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc faible qui satisfaisant la propriété l'équation de la variance conditionnelle d'un processus GARCH s'écrit :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^P \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 = \alpha_0 + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2$$

Où  $L$  est l'opérateur de retard.

Pour que la variance conditionnelle soit positive, il faut que les paramètres de l'équation du modèle soient positives avec les conditions  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i > 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, P$  et  $\beta_j > 0$  pour  $j = 1, 2, \dots, q$ .

#### 1- Les propriétés des processus GARCH

Les propriétés théoriques des processus GARCH se déduisent de la même façon que nous avons développé les propriétés des processus ARCH.

##### Propriété 1 :

Le processus  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc, si  $E[\varepsilon_t^2] < \infty$ .

On a

$$E[\varepsilon_t] = E[E(\varepsilon_t/I_{t-1})] = 0$$

et,

$$\begin{aligned} cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) &= E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}] \\ &= E[\varepsilon_{t-k} E(\varepsilon_t/I_{t-1})] \\ &= 0, \forall k > 0. \end{aligned}$$

##### Propriété 2 :

Une condition nécessaire de l'existence de la variance d'un processus GARCH(p,q) est :

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$$



**Remarque 3.1.** Si cette condition est vérifiée avec les contraintes de non négativité donnée ci-dessus, elle est également suffisante. Donc le processus GARCH est faiblement stationnaire ou stationnaire au second ordre. Dans le cas où l'inégalité précédente est saturée, c'est-à-dire que  $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j = 1$  on dira alors que le processus GARCH est intégré.

### Propriété 3 :

Le processus  $\varepsilon_t^2$  d'une représentation GARCH(p,q) peut être représenté sous la forme d'un processus ARMA ( $\max(p, q), q$ ) défini dans une innovation  $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$  tel que :

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) \varepsilon_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j v_{t-j} + v_t, \quad n = \max(p, q)$$

avec :  $\alpha_i = 0$  si  $i > p$  et  $\beta_j = 0$  si  $j > q$

### 2- Modèle GARCH(1,1)

Pour modéliser les données empirique sur le marché financier, un modèle avec erreur GARCH(1,1) est donné par l'équation :

$$\begin{aligned} Y_t &= cX_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= z_t \sigma_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \end{aligned}$$

avec  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 > 0$ , et  $\beta_1 > 0$  dans ce modèle, les carrés des résidus suivent un processus ARMA(1,1) :

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 v_{t-1} + v_t$$

Il est stationnaire pour  $0 < \alpha_1 + \beta_1 < 1$ , où  $v_t = \varepsilon_t^2 + \sigma_t^2$  est un processus d'innovation pour  $\varepsilon_t^2$  existe et est constante au cours du temps. Sachant que  $V(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2)$ , il suffit à partir de la forme ARMA(1,1) sur  $\varepsilon_t^2$  de définir la variance du processus :

$$V(\varepsilon_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)}$$

### 3.5.2 Estimation des paramètres ARCH et GARCH

#### 3.5.2.1 Estimations des paramètres ARCH

L'estimation des paramètres de modèles ARCH se base très souvent sur la maximisation de la fonction de vraisemblance. Par hypothèse  $X_t$  est conditionnellement gaussien. La vraisemblance associée à  $X_t$  conditionnellement au passé  $X_{t-1}$  est donc :

$$L(x_t/X_{t-1};\theta) = \frac{1}{\sigma_t\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x_t^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

et dépend du vecteur de paramètres :

$$\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p)^t \text{ à travers } \sigma_t$$

La fonction de vraisemblance de  $(x_1, x_2, \dots, x_T)^t$  conditionnelle à  $X_0 = \phi$ , par conséquent

$$L(x_1, x_2, \dots, x_T/X_{t-1};\theta) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sigma_t\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x_t^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

L'estimateur est alors défini comme le vecteur :

$$\hat{\theta}_T = (\hat{\alpha}_{0,T}, \dots, \hat{\alpha}_{p,T})$$

Qui maximise le logarithme de cette fonction de vraisemblance :

$$\hat{\theta}_T = \operatorname{argmax} \ln L_T(x_1, x_2, \dots, x_T; \theta)$$

#### 1- Estimation des paramètres GARCH

L'estimation par maximum de vraisemblance d'un modèle ARMA est rendue plus difficile que celle d'un processus autorégressif pur, puisque le processus d'innovation n'est pas directement observé, le même phénomène survient lorsqu'on tente de maximiser la vraisemblance d'un processus GARCH. En effet, la vraisemblance associée à  $X_t$  conditionnellement au passé  $X_{t-1}$  s'écrit :

$$L(x_t/X_{t-1};\theta) = \frac{1}{\sigma_t\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \quad (3.5.15)$$

Mais cette fois, la variance  $\sigma_t$  dépend donc des valeurs passées de la variance conditionnelle  $\sigma_{t-1}^2, \dots, \sigma_{t-q}^2$ . Ces valeurs n'étant pas observées en pratique, la maximisation

directe de la vraisemblance est rendue impossible. En pratique, on estime successivement les valeurs de  $(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_{t-1}^2)$  avant de calculer la vraisemblance. Ainsi, pour un vecteur :

$$\theta' = (\alpha'_0, \alpha'_1, \dots, \alpha'_p, \beta'_1, \dots, \beta'_q)^t$$

fixé de paramètres, on calcul récursivement :

$$\widehat{\sigma}_s^2 = \alpha'_0 + \sum_{i=1}^p \alpha'_i X_{s-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta'_j \widehat{\sigma}_{s-j}^2$$

avec la convention  $X_i = 0$  et  $\sigma_j^2 = 0$  si  $i \leq 0$ . On remplace donc la fonction de vraisemblance 3.5.15 par :

$$L_T(x_t, \dots, x_T; \theta') = \prod_{t=1}^T L(x_t / X_{t-1}; \theta')$$

Cette fonction de vraisemblance peut être calculée pour différentes valeurs du vecteurs  $\theta'$  et sa maximisation donne l'estimateur de maximum de vraisemblance.

## 2- Test de ARCH de Engle (1982)

Le principe de ce test est le suivant : On réalise la régression suivante :

$$\widehat{\varepsilon}_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^N \alpha_i \widehat{\varepsilon}_{t-i}^2$$

avec les  $\widehat{\varepsilon}_t$  sont les résidus issue par l'estimation du processus ARMA(p,q). Dans les séries financières ce test sert à tester l'hypothèse nulle :

$H_0$  : L'homoscédasticité ( $\alpha_i = 0, \forall i = 1, \dots, N$ )

contre

$H_1$  : l'hétéroscédasticité conditionnelle ( $\exists i, \alpha_i \neq 0$ ).

On calcul la statistique du multiplicateur de lagrange  $TR^2$  avec :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum \widehat{\varepsilon}_t^2}{\sum (\widehat{\varepsilon}_t - \bar{\varepsilon}_t)}$$

est le coefficient de détermination associé et T le nombre d'observation.

Sous  $H_0$  :  $TR^2$  suit une loi de  $\chi_2^2(N)$  avec N représente le nombre de régresseur.

— Si  $TR^2 < \chi_\alpha^2(N)$  on accepte  $H_0$  d'homoscédasticité au seuil  $\alpha$ .

— Si  $TR^2 > \chi_\alpha^2(N)$  on rejette  $H_0$  au seuil  $\alpha$ .

avec  $\chi_\alpha^2(N)$  est le quantile d'ordre  $\alpha$  de la loi de  $\chi^2$  à (N) degré de liberté.

### 3.5.3 Evaluation des options

Duan(1995) a introduit un modèle GARCH d'options, dont le processus de rendement devient :

$$R_t = r + \lambda \sigma_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + z_t \sigma_t$$

D'où

- $z_t \sim N(0,1)$
- $\lambda$  est le prix de risque constant
- $r$  est le taux d'interêt sans risque

Le processus de la variance des rendements  $\sigma_t^2$  devient :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 (z_{t-1} - \lambda_{t-1})^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

Par récurrence, on trouve facilement que le prix de l'actif sous-jacent à la date de maturité T est donné par :

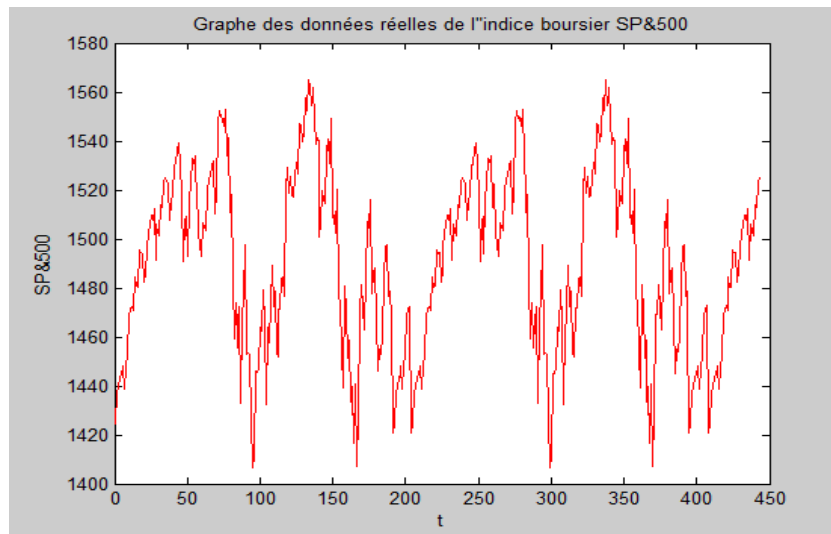
$$S_t = S_0 \exp \left( r(T-t) - 0.5 \sum_{i=t+1}^T \sigma_i^2 + \sum_{i=t+1}^T z_i \sigma_i \right) \quad (3.5.16)$$

Pour déterminer les prix d'action pour les deux modèles nous utilisons les formules (3.4.13) et (3.5.16).

## 3.6 Application numérique

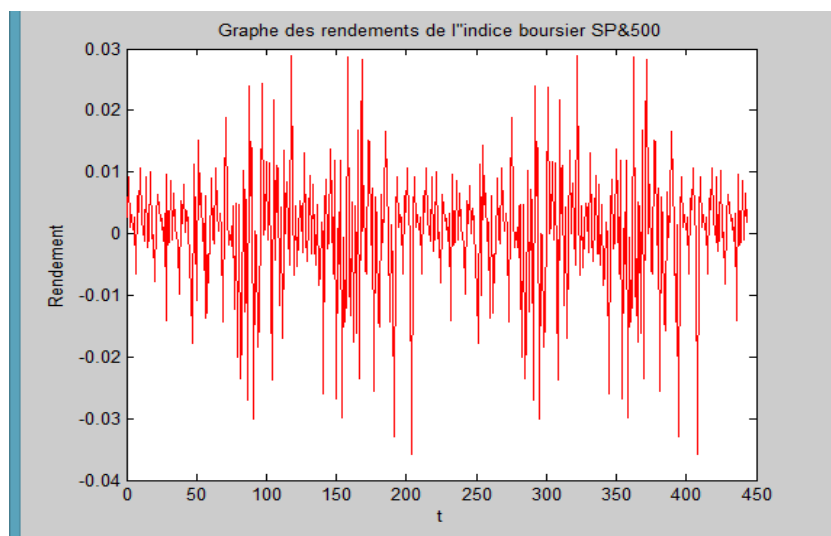
Nous allons faire une étude sur la série SP&500 pour estimer la volatilité stochastique et la volatilité conditionnelle, qui dispose de 443 observations journalières pour la période de 02/04/2007 à 31/12/2008.

dont l'évolution du cours est représenté sur la figure suivante.

FIGURE 3.10 – Les données réelles de l'indice boursier *SP&500*

A partir de ces données nous calculons les rendements  $R_t$ .

Les rendements journalière évolue de la manière suivante :

FIGURE 3.11 – Le graphe des rendements de *SP&500*

### les propriétés statistiques :

D'après l'histogramme des statistiques on a : la moyenne  $\mu = 1.57 * 10^{-4}$  ,  $\sigma = 0.010674$  et  $JB = 59.98125$ .

On remarque que :

$JB = 59.98 > \chi_2^2 = 5.99$  donc :

On rejette l'hypothèse de normalité (les rendements ne sont pas normaux).

### 3.6.1 Estimation des paramètres de la volatilité stochastique

On utilise les formules (3.4.13) et (3.4.14) pour estimer les paramètres du volatilité stochastique, on trouve :

$$D = -1.1152 * 10^{-4} \text{ et } q = 2.3392 * 10^{-4}$$

### 3.6.2 Simulation de la volatilité stochastique

Nous prenons les paramètres  $D$  et  $q$  estimées pour faire la simulation du volatilité stochastique pour l'action *SP&500*

Le graphe est représenté dans la figure suivante :

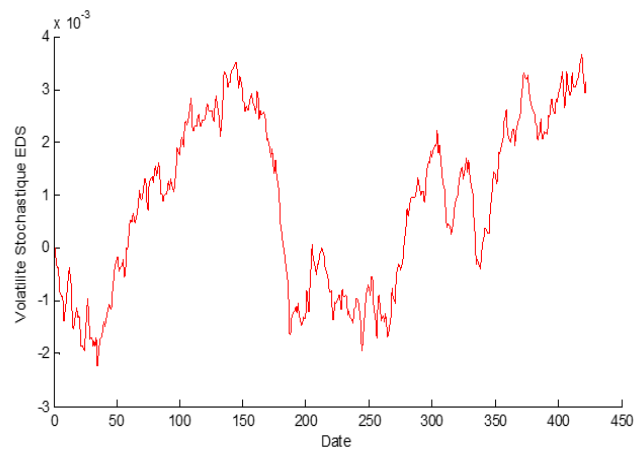


FIGURE 3.12 – Simulation de la volatilité stochastique en fonction de temps de *SP&500*

La figure nous montre que la volatilité n'est pas constante, elle varie en fonction de temps.

### 3.6.3 Modélisation de la volatilité conditionnelle

#### 1- Analyse préliminaire :

Avant toute analyse d'une série il est indispensable d'étudier le graphe représentant son évolution, car ce dernier nous donne une idée globale sur les caractéristiques du processus gérant cette série à savoir ; la saisonnalité, la tendance, les points de

reptures... Le graphe (3.10)

Dans notre cas on s'intéresse à l'étude des rendements calculés pour notre série. **2-**

### Stationnarité de la série des rendements :

D'après le graphe (3.11), on peut voir que la série des rendements est stationnaire c'est-à-dire la moyenne de la série se situe sur une droite parallèle à l'axe des abscisses.

### Test de normalité :

Les tests sont effectués à partir des allures empiriques des coefficients de skewness, kurtosis et la statistique de Jarque-Bera donnée par le logiciel Eviews.

D'après le logiciel on obtient l'histogramme suivant :

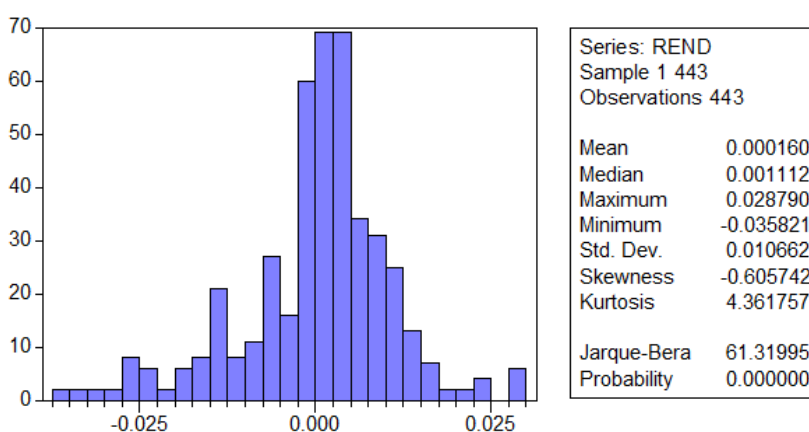


FIGURE 3.13 – L'histogramme des statistiques sur les rendements

### Test de skewness :

On a :  $|S_k^{1/2}| = 0.605742 > 0$  et  $V_1 = 6.69 > 1.96$

On accepte l'hypothèse de l'asymétrie.

### Test de kurtosis :

$|k_u| = 4.361757 > 3$  et  $V_2 = 5.85 > 1.96$

Donc on rejette l'hypothèse d'aplatissement alors une distribution leptokurtique.

### Statistique de Jarque-Bera :

$JB = 61.31995 > 5.99$

On rejette l'hypothèse  $H_0$  de la normalité.

### Corrélogramme de la série des rendements :

Le corrélogramme ci-dessous donné par Eviews, les bornes de l'intervalle de

confiance sont présentés par des pointillés, tous les termes qui sont à l'intérieur de cet intervalle sont significativement différents de zéro et ceux qui sortent de ce dernier sont significativement différents de zéro au seuil de signification de 5%.

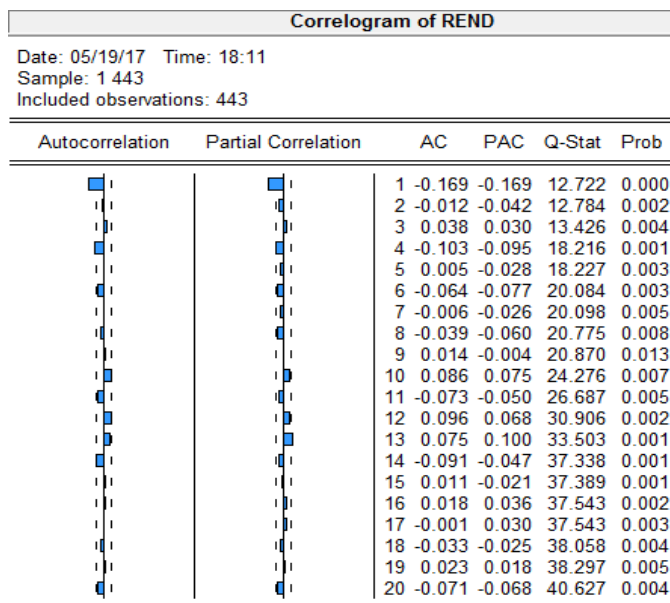


FIGURE 3.14 – Le correlogramme des rendements

Une étude préliminaire du correlogramme semble indiquer l'absence d'une saisonnalité et d'une tendance.

Pour avoir une confirmation de ces caractéristiques, on applique des tests statistiques connus.

### Test de racine unitaire (Dickey-Fuller) sur la série des rendements :

A partir du logiciel Eviews, on procède à l'estimation par la méthode des moindres-carrés avec  $\rho = 0$  des trois modèles [1], [2] et [3] de Dickey-Fuller sur la série des rendements, dont les résultats d'analyse sont représentés ci-dessous.

#### Modèle [3]

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
REND(-1)	-1.168983	0.047040	-24.85090	0.0000
C	0.000353	0.001005	0.351366	0.7255
@TREND(1)	-7.76E-07	3.93E-06	-0.197539	0.8435



La t-statistique de la tendance égale à -0.1975 est inférieur à 2.78 donnée par la table de Dickey-Fuller au seuil 5%, donc la tendance est non significative alors on passe au modèle [2].

### Modèle [2]

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
REND(-1)	-1.168897	0.046986	-24.87732	0.0000
C	0.000181	0.000501	0.361400	0.7180

La t-statistique de la constante est égale à 0.3614 est inférieur à 2.52 (Dickey-Fuller) au seuil 5% donc la constante est non significative donc on passe au modèle [1].

### Modèle [1]

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
REND(-1)	-1.168648	0.046935	-24.89925	0.0000

On remarque que la t-statistique de la racine unitaire de Dickey-Fuller égale à -24.899 est inférieure à toutes les valeurs critiques au seuil de 1%, 5% et 10% donc la série est stationnaire.

### 3- Identification du modèle :

On analyse le corrélogramme partiel de la série stationnaire des rendements, on remarque que le modèle MA(1) est le meilleur car il possède les meilleurs critères d'informations (les critères d'Akaike et de Schwarz sont minimum, et le  $R^2$  est maximum).

### 4- Estimation des paramètres du modèle :

Le logiciel Eviews donne les résultats suivants :

Dependent Variable: REND  
 Method: Least Squares  
 Date: 05/19/17 Time: 18:38  
 Sample: 1 443  
 Included observations: 443  
 Convergence achieved after 5 iterations  
 Backcast: 0

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	-0.177022	0.046820	-3.780865	0.0002
R-squared	0.029625	Mean dependent var		0.000160
Adjusted R-squared	0.029625	S.D. dependent var		0.010662
S.E. of regression	0.010503	Akaike info criterion		-6.272000
Sum squared resid	0.048761	Schwarz criterion		-6.262760
Log likelihood	1390.248	Durbin-Watson stat		1.996417
Inverted MA Roots	.18			

### Test sur le modèle :

La racine de polynôme MA(1) est supérieur en module à 1, car son inverse calculé par Eviews est inférieur à 1, alors les conditions de stationnarité et d'inversibilité sont vérifiées.

Le coefficient de paramètre du modèle MA(1) égale à (-0.177022), est significativement différent de zero, ce qui est confirme par le test de student car la t-statistique associé au paramètre du modèle égale à (-3.780865) en valeur absolue est supérieur au valeur théorique (1.96) au seuil 5%.

### Test sur les résidus :

La série des résidus est représenté par le graphe ci-dessous :

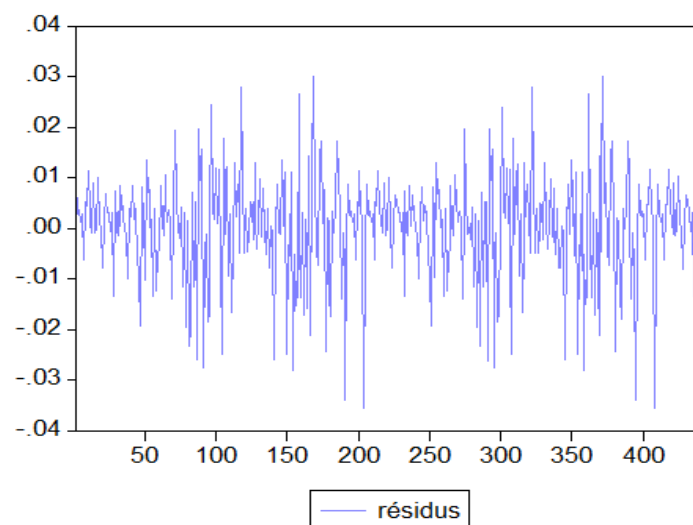


FIGURE 3.15 – Le graphe des résidus

**tests de normalité sur les résidus :**

D'après le logiciel on obtient l'histogramme suivant :

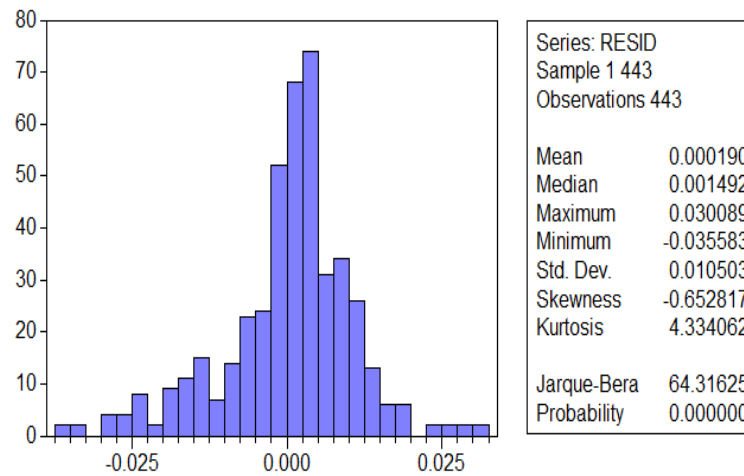


FIGURE 3.16 – L'histogramme des propriétés statistiques des résidus

**Test de skewness :**

On a :  $|S_k^{1/2}| = -0.655719 > 0$  et  $V_1 = 6.96 > 1.96$

On accepte l'hypothèse de l'asymétrie.

**Test de kurtosis :**

$|k_u| = 4.321439 > 3$  et  $V_2 = 5.67 > 1.96$

Donc on rejette l'hypothèse d'aplatissement alors une distribution leptokurtique.

**Statistique de Jarque-Bera :**

$JB = 63.97795 > 5.99$

On rejette l'hypothèse  $H_0$  de la normalité. Donc nous pouvons qualifier notre bruit blanc, de bruit blanc non-gaussien

**Test de Box-ljung :**

Ce test est utilisé pour tester l'indépendance

$Q_{stat}(20) = 26.347 < \chi_1^2 9 = 30.14$  au seuil 5%

Donc, on accepte l'hypothèse  $H_0$ , les résidus sont des bruits blancs.

**corrélogramme des résidus au carré du modèle MA(1) :**

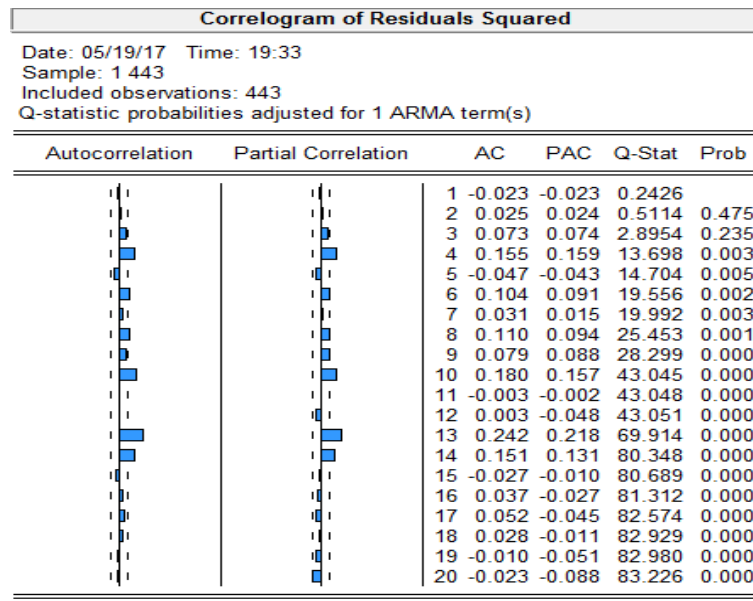


FIGURE 3.17 – Le corrélogramme des résidus au carrés

D'après le corrélogramme on voit des pics significativement différent de zéro alors les  $\varepsilon_t^2$  sont pas des bruit blanc donc il existe un effet ARCH ou bien GARCH, on passe au test de multiplicateur de lagrange. ce test conduit aux résultats suivants :

ARCH Test:

F-statistic	3.564265	Probability	0.007106
Obs*R-squared	13.96263	Probability	0.007415

Test Equation:

Dependent Variable: RESID^2

Method: Least Squares

Date: 06/14/17 Time: 09:15

Sample(adjusted): 5 443

Included observations: 439 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	8.63E-05	1.40E-05	6.156822	0.0000
RESID^2(-1)	-0.037061	0.047389	-0.782062	0.4346
RESID^2(-2)	0.021059	0.047266	0.445528	0.6562
RESID^2(-3)	0.077780	0.047283	1.645003	0.1007
RESID^2(-4)	0.159438	0.047385	3.364723	0.0008

D'après les résultats on a  $LM(\text{calculé}) = 13.96263 > \chi_4^2 = 9.49$  alors on rejette l'hypothèse d'indépendance dans ce cas  $\varepsilon_t \sim GARCH(1, 1)$ .

**Estimation des paramètres :**

Dependent Variable: REND				
Method: ML - ARCH (Marquardt)				
Date: 05/19/17 Time: 19:51				
Sample: 1 443				
Included observations: 443				
Convergence achieved after 14 iterations				
MA backcast: 0, Variance backcast: ON				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
MA(1)	-0.163276	0.058275	-2.801804	0.0051
Variance Equation				
C	2.58E-06	1.25E-06	2.066056	0.0388
ARCH(1)	0.056821	0.016042	3.541932	0.0004
GARCH(1)	0.921729	0.018390	50.12211	0.0000
R-squared	0.029441	Mean dependent var	0.000160	
Adjusted R-squared	0.022809	S.D. dependent var	0.010662	
S.E. of regression	0.010540	Akaike info criterion	-6.331248	
Sum squared resid	0.048770	Schwarz criterion	-6.294286	
Log likelihood	1406.371	Durbin-Watson stat	2.023610	
Inverted MA Roots	.16			

La figure nous montre que la Z-statistique de tous les coefficients sont supérieur à 1.96 donc sont tous significativement différent de zéro. d'après tous ces résultats on peut estimer la volatilité à l'aide de modèle GARCH(1,1), d'où l'équation de la volatilité est donnée par :

$$\sigma = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2}$$

le graphe suivant montre l'évolution de la volatilité en fonction de temps (t) :

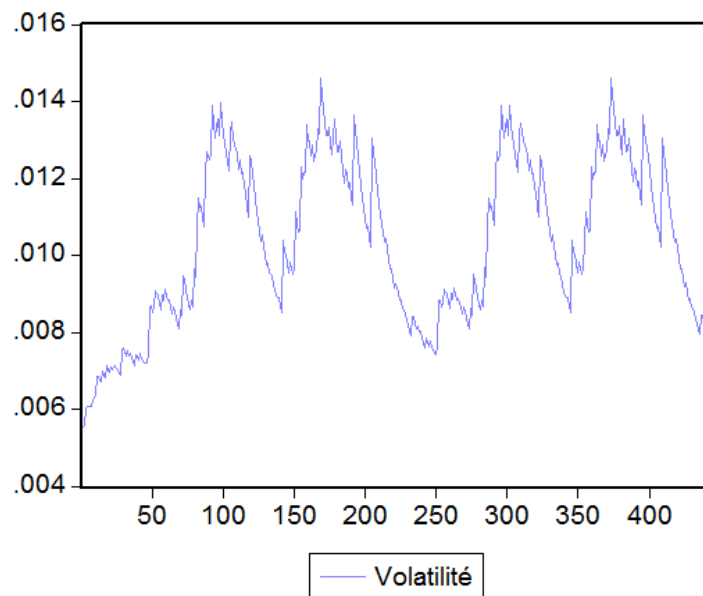


FIGURE 3.18 – Le graphe de la volatilité en fonction de temps

On remarque que la volatilité n'est pas constante, elle est conditionnelle par rapport aux valeurs passées.

Il est maintenant connu que la volatilité d'un actif change de manière aléatoire au cours du temps.

# Conclusion

Nous avons tout au long de ce travail, consacré notre étude aux méthodes d'estimation de la volatilité des indices boursiers que nous avons illustré par une application sur le cours de l'action *SP&500*.

Dans le premier chapitre, nous avons exposé des outils mathématiques indispensables qui sont le calcul stochastique et les équations différentielles stochastiques. Ces derniers ont été utilisés et appliqués dans notre travail à travers les modèles présentés, ainsi les principaux concepts de base des actifs financiers.

Ensuite le deuxième chapitre, a été consacré pour l'étude d'un modèle mathématique de Black-Sholes qui est devenu une référence utilisé pour modéliser les actifs financiers. On a présenté aussi quelques caractéristiques des séries de rendements. Parmi ces caractéristiques, on retrouve l'excès du coefficient d'aplatissement, le coefficient d'asymétrie ainsi l'hétéroscédasticité et l'autocorrélation.

Dans le troisième chapitre, on a présenté les différentes méthodes d'estimation de la volatilité dans le cas où la volatilité est constante on a étudié la volatilité historique et implicite, et la volatilité non constante (volatilité stochastique et volatilité conditionnelle ARCH/GARCH).

Pour la volatilité on a vu qu'elle est une variable clé que l'on retrouve pour la

plupart des instruments financiers, elle joue un rôle centrale dans la plupart des domaines de la finance et intervient dans les modèles d'évaluation d'option, aussi bien que dans la modélisation du prix des options ainsi que les différentes approches utilisées pour estimer la volatilité, avec son existence plusieurs chercheurs essayent d'étudier la raison de la volatilité du marché, qui n'est pas seulement les informations existantes sur le marché mais aussi les comportements des investisseurs, et plusieurs autres facteurs.

Afin d'assimiler toute cette théorie nous avons eu recours à l'application numérique sur des données réelles de l'indice boursier *SP&500*.



# Bibliographie

- [1] BERHOUNE.K. *Processus ARCH-GARCH applications*. mémoire à université Abou Bekr Belkaid-Tlemcen, 2013.
- [2] BERTON.J. *Calcul stochastique M2 Mathématique*. Rennes 1 , 2014.
- [3] COMETS.F.MEYRE.T. *Calcul stochastique et modèles de diffusions*. cours et exercices corrigés.
- [4] Coulon.J. *Volatilité et gestion de portefeuille*. mémoire longue, 2009.
- [5] C.COX.J.A.ROSS.S.RUBINSTEIN.M. *Options pricing : a simplified approach*. journal of financial economics, 1979.
- [6] E.Racicot.F.Théoret.R. *Finance computationnelle et gestion des risques ingénierie financières avec applications Excel (visual Basic) et Matlab*. Presse de l'Université du Québec, 2006.
- [7] FARES.C. *Estimation et prévision de la volatilité de l'indice SP&500*. Université du Québec à Montréal, Mai 2008.
- [8] GABET.L.ABERGEL.F.MUNITOKE.I. *Introduction au mathématiques financières*. Ecole Centrale Paris, 2010.
- [9] GALLARDO.L *Mouvement brownien et calcul d'Itô avec exercices corrigés*. Hermann, 2008.
- [10] HURLIN.C. *Econométrie pour la finance Modèle ARCH-GARCH*. Université d'Orléans, 2006-2007.

- [11] JERBI.Y. *Evaluation des options et gestion des risques financiers par les réseaux de neurones et par les modèles à volatilité stochastique*. thèse de doctorat Université Paris 1-Panthéon-Sorbonne, 20 Février 2006.
- [12] KADEM.S. *Une étude exploratoire des options en finance*. mémoire de Magister à université des sciences et de la technologie "HOUARI BOUMEDIENE", 2011.
- [13] LAMBRETON.D.LAPEYRE.B. *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*. Ellipses Marketing, 2012.
- [14] LEGRIGNOU.B. *La surface de volatilité*. Ecole Normale Supérieure.
- [15] LESSARD.S. *Processus stochastiques cours et exercices corrigés*. Ellipses marketing, 2014.
- [16] LOULIDI.S. *Modélisation stochastique en finance, application à la construction d'un modèle à changement de régime avec sauts*. Université de BORDEAUX I.
- [17] PHAM.H. *Introduction aux mathématiques et modèles stochastiques des marchés financiers*. Université Paris 7, 2006-2007.
- [18] PRASONG SY.A. *La volatilité stochastique des marchés financiers : Une application aux modèles d'évaluation d'instruments optionnels en temps continu*. Université de droit, d'économie et des sciences d'AIX- Marseille, 2003.
- [19] SAIMI.N. *Estimation de la volatilité et filtrage non linéaire*. Université du Québec à trois-Rivières, 2001.
- [20] TANKOV.P. *Calibration de modèles et couverture de produits dérivés*. Université Paris VII.
- [21] TANKOV.P. *Surface de volatilité*. Université Paris-Diderot (Paris VII), 2015.
- [22] WARLOP.R. *Modèle de Black-Sholes, rapport de stage*. Ecole Normale Supérieure de cachan, 2001.
- [23] ZITOUNI.M. *Déscretisation et résolutions numériques des équations différentielles stochastiques rétrogrades*, Université M'hamed Bouguera-Boumerdes, 2009-2010.